Monotonia dei generatori rispetto a d_0 per gruppi a permutazioni pari

Alessandro barro
alessandro1.barro@mail.polimi.it

Richiesta Sia $(G, *)$ un gruppo di simmetrico a permutazioni pari (come il gruppo del cubo di Rubik) e sia $d_0 \in [0, M]$ la distanza definita tra un qualsiasi elemento $g \in G$ e un $g_0 \in G$ fissato ($M \in \mathbb{N}$). Sia S un insieme di generatori per il gruppo, inoltre definiamo strutture di livello gli insiemi $\mathcal{Y}_n = \{g \in G \mid d_0(g) = n\}$. Allora vale

$$(s * g) \notin \mathcal{Y}_n, \quad \forall g \in \mathcal{Y}_n, \quad \forall s \in S \cup S^{-1} \tag{1}$$

Dimostrazione Sia $g \in G$, distinguiamo 3 casi:

1. $g = g_0 \in \mathcal{Y}_0$
2. $g = g_n \in \mathcal{Y}_n$, con $[1, M-1]$
3. $g = g_M \in \mathcal{Y}_M$

1. Per costruzione g_0 è unico $\implies |\mathcal{Y}_0| = 1 \implies d_0(s * g_0) \in \mathcal{Y}_1 \neq \mathcal{Y}_0, \forall s \in S \cup S^{-1}$.
2. Si considerino $g_1, g_2 \in \mathcal{Y}_n$, e $g_1 \neq g_2$. Sia $\psi : G \mapsto G$ una mappa invertibile diversa dall'identità tale che

$$\psi : g_1 \mapsto g_2 \tag{2}$$

In particolare $\psi[g] = s_p * \cdots * s_1 * g \neq g$. Dimostriamo che $p > 1$ necessariamente. Scriviamo

$$g_1 = z * g_0 \tag{3}$$
$$g_2 = w * g_0 \tag{4}$$

dove z, w sono prodotti finiti di elementi di $S \cup S^{-1}$. Dall'uguaglianza (4) si ha che

$$g_2 = w * g_0 \tag{5}$$
$$\psi[g_1] = w * g_0 \tag{6}$$
$$\psi[z * g_0] = w * g_0 \tag{7}$$
$$s_p * \cdots * s_1 * z * g_0 = w * g_0 \tag{8}$$

L'ultima equazione vale se e solo se $s_p * \cdots * s_1 * z = w$. Se $p = 0$ allora ψ è l'identità e i due elementi coincidono, che è assurdo. Se $p = 1$ si ottiene

$$s_1 * z = w \tag{9}$$
$$e = (s_1 * z)^{-1} * w = z^{-1} * s_1^{-1} * w \tag{10}$$

Il numero di trasposizioni applicate è dispari, e continua ad esserlo anche in caso $z_1^{-1} * s_1^{-1} = s_1^{-1} * w_n = e$, che è assurdo.
3. Segue da un ragionamento simile a quello in 1., considerando la struttura di livello corrispondente al diametro del gruppo.

■