

Versione Preliminare. Materiale in fase di revisione

Introduzione alla fisica dell'evoluzione stellare

Cenni di meccanica statistica delle nubi autogravitanti

Autore:
Alessandro Candolini

2 giugno 2012

Alessandro Candolini: *Introduzione ai modelli di evoluzione stellare* © 14 giugno 2012.

E-MAIL:

alessandro.candolini@gmail.com

INDICE

| | |
|---|----|
| PREFAZIONE | V |
| 1 COLLASSO GRAVITAZIONALE | 1 |
| 1.1 Nubi autogravitanti | 1 |
| 1.2 Effetti della perdita di energia | 3 |
| 1.2.1 Aumento della temperatura | 3 |
| 1.2.2 Contrazione della nube | 4 |
| 1.2.3 Incremento della velocità angolare di rotazione | 6 |
| 1.2.4 Sintesi dei principali effetti connessi alla perdita di energia radiante | 6 |
| 1.3 Alcune considerazioni sul modello di formazione stellare | 6 |
| 1.4 Le protostelle | 8 |
| 2 IL LIMITE DI CHANDRASEKHAR | 9 |
| 2.1 Cenni di meccanica quantistica | 9 |
| 2.1.1 Buca di potenziale infinita | 10 |
| 2.1.2 Buca finita di potenziale ed effetto tunnel | 12 |
| 2.2 Gas di Fermi degenerare in regime non relativistico | 12 |
| 2.3 Gas di Fermi degenerare in regime relativistico | 12 |
| 3 BUCHI NERI | 15 |
| 3.1 Premesse | 15 |
| 3.1.1 Calcolo ingenuo del raggio di Schwarzschild in gravitazione Newtoniana | 15 |
| 3.2 La soluzione di Schwarzschild | 16 |
| 3.3 Buchi neri in astrofisica | 16 |
| A INTRODUZIONE ALLA FISICA DEL CORPO NERO | 17 |
| B GAS DI FERMI IDEALE | 19 |
| C TEOREMA DEL VIRIALE | 21 |
| D CENNI SULLA TEORIA QUANTISTICA DEI BUCHI NERI | 23 |
| D.1 Soluzione di Schwarzschild delle equazioni di campo | 23 |
| D.2 La radiazione di Hawking | 24 |
| BIBLIOGRAFIA | 25 |

PREFAZIONE

Queste note nascono come rielaborazione del materiale da me presentato ad alcune conferenze che ho avuto occasione di svolgere in passato per gli Studenti delle classi quinte del Liceo Scientifico Statale Giovanni Marinelli di Udine (Italia). L'obiettivo degli interventi e di queste note è quello di cercare di offrire una sintesi di alcuni tra i principali aspetti legati allo studio dei modelli fisici di evoluzione stellare.

Ho sempre ritenuto che l'approccio *descrittivo* spesso adottato nei testi e nei corsi di scienze delle scuole superiori per presentare l'argomento dell'evoluzione stellare sia inutilmente limitativo. Si tratta infatti di un approccio *nozionistico*, in cui lo studente viene *informato*, anche dettagliatamente, delle singole tappe di sviluppo di una stella, senza però avere idee di perché la vita di una stella si svolga in quel modo e soprattutto come si faccia a sapere!

Studenti dell'ultimo anno del Liceo hanno infatti avuto modo di maturare un background di conoscenze di fisica sufficiente che permetta loro di afferrare, a grandi linee almeno, gli aspetti fisici chiave che oggi si è propensi a ritenere guidino la dinamica, la struttura e l'evoluzione delle stelle.

Non vi sarebbe ovviamente nulla di male in un simile approccio descrittivo se la conoscenza attuale derivasse dall'osservazione diretta. In tal caso, non si farebbe altro che limitarsi a presentare i risultati delle osservazioni, lasciando l'eventuale interpretazione di queste osservazioni a studi successivi. Si potrebbe essere portati a ritenere che buona parte delle conoscenze oggi acquisite in merito all'evoluzione stellare siano il frutto di osservazioni dirette. Non è così. L'intera vita di una stella si svolge su scale di tempo dell'ordine di parecchi milioni di anni. Evidentemente, simili durate di tempo sono troppo lunghe per permettere di monitorare, in modo continuativo, l'evolversi di una stessa stella in tutte le sue fasi di sviluppo. Invece, quanto possiamo affermare di sapere oggi sull'evoluzione stellare discende in larga misura dall'elaborazione di modelli teorici. Certamente questi modelli devono poi risultare compatibili con i dati oggi in possesso sugli oggetti stellari conosciuti.

Il testo è stato inizialmente pensato come materiale integrativo e di approfondimento rispetto ai programmi scolastici tradizionalmente svolti nelle classi quinte di un Liceo Scientifico. Questa è anche la ragione per cui si è scelto di mantenere l'esposizione a un livello piuttosto elementare, omettendo in larga misura i dettagli tecnici e il formalismo matematico richiesti, invece, in trattazioni di livello più avanzato.

Vi è almeno una seconda ragione per prediligere un simile approccio espositivo. In questo modo, infatti, il testo non viene ridotto a essere una presentazione informativa e perlopiù nozionistica, ma lascia intravedere, seppure solamente a grande linee, il ragionamento che "sta dietro" allo studio dell'evoluzione stellare.

I risultati di fisica a cui si fa riferimento nel testo dovrebbero essere padroneggiati con sicurezza da uno studente del quinto anno di Liceo Scientifico, con l'eccezione, forse, del teorema del viriale. Per ogni evenienza, alcune note di supporto sono comunque raccolte in appendice.

L'approccio adottato è strettamente teorico. Questo significa che i riferimenti a oggetti astronomici osservati sono perlopiù assenti e, laddove presenti, rimangono comunque piuttosto marginali. Si rimanda il Lettore che volesse approfondire questi aspetti ai più appropriati testi del settore. Riferimenti completi ad alcuni di questi testi si possono reperire in Bibliografia. In particolare, si segnala l'ottimo volume di Robert Burnham.

Per quanto riguarda l'organizzazione del materiale, il testo si articola in cinque capitoli e quattro appendici.

Il Capitolo 1 presenta una panoramica sui processi di formazione stellare. Il teorema del viriale per nubi autogravitanti è introdotto, senza dimostrazione (vedi Appendi-

ce C), sin dall'inizio. Buona parte dei risultati che saranno ottenuti nel seguito fanno riferimento a questo teorema. Buona parte della trattazione sin qui svolta si ispira all'eccellente esposizione di Kittel. Il materiale proposto contiene alcune lacune. Una delle omissioni maggiori riguarda il ruolo svolto dalla turbolenza e dai campi magnetici nel collasso gravitazionale. Si è preferito non sviluppare per esteso questa parte, dati gli obiettivi modesti che questa presentazione si propone. Il lettore può integrare le informazioni al riguardo consultando, ad esempio, un testo di livello intermedio come.

Il Capitolo ?? si rivolge alle stelle in sequenza principale. Non vengono introdotte le equazioni differenziali di struttura stellare. Piuttosto, si è preferito dare risalto alla nozione di equilibrio, distinguendo tra equilibrio idrostatico ed equilibrio termico. È opportuno prestare attenzione a questi termini: rispetto al significato specifico che assumono in altri contesti (in termodinamica, ad esempio), vengono adoperati qui con un'accezione piuttosto particolare. Nella stessa accezione saranno impiegati anche nei capitoli successivi. Per il processo di fusione dei nuclei di idrogeno, non si entra nei dettagli della catena protone-protone e del ciclo di Bethe. La distinzione tra i caratteri che esibiscono le stelle in cui è attivo prevalentemente l'uno o l'altro processo è presentata piuttosto estesamente, seppure a un livello qualitativo. Conclude il capitolo una digressione sul caso, in parte ancora misterioso, di η Carinae.

Il Capitolo ?? tratta l'esodo dalla sequenza principale. Si è preferito postporre la discussione sulla pressione di degenerazione degli elettroni fino alla Sezione ???. La formula per il calcolo della pressione, derivabile nell'ambito della statistica quantistica di Fermi-Dirac, non viene dimostrata. Piuttosto, buona parte della trattazione è spesa per mettere in evidenza le peculiari proprietà della pressione di degenerazione. È importante che queste proprietà vengano assimilate a fondo dal Lettore: la pressione di degenerazione gioca infatti un ruolo centrale in tutta la dinamica successiva dell'oggetto stellare.

Per quanto riguarda il fenomeno supernova, la dinamica dell'evento non viene sviluppata nel dettaglio. È parso importante focalizzare l'attenzione sulle differenze tra eventi di tipo Ia e di tipo Ib, questo soprattutto visto l'impiego degli eventi Ia come candele standard per la misura delle distanze extragalattiche. L'esposizione è arricchita da alcuni eventi storici di supernovae galattiche, e viene discusso l'evento 1989A.

È parso utile predisporre un quadro di riepilogo delle proprietà caratteristiche delle nane bianche (Sezione ???). La trattazione, ispirata ancora una volta all'eccellente volume di Robert Burnham **burnham** offre al Lettore una buona occasione per abbandonare il terreno della speculazione teorica e confrontarsi per un attimo con quanto realmente ci è dato conoscere dall'osservazione del cielo. Il Lettore potrà così familiarizzare con gli ordini di grandezza in gioco.

Aprè il Capitolo 2 una modesta introduzione dedicata alla figura di Subramohion Chandrasekhar. Le vicende che hanno accompagnato la scoperta da parte di Chandrasekhar della massa limite che oggi porta il suo nome meritano di essere almeno menzionate. La prima parte del capitolo è riservata agli aspetti teorici del limite di Chandrasekhar. Pur non entrando nei dettagli tecnici dell'argomento, si è cercato di enfatizzare il carattere intrinsecamente relativistico del limite di Chandrasekhar: un gas degenerare relativistico, a differenza di un gas degenerare non relativistico, non è in grado di fornire "abbastanza" pressione per garantire l'insorgere di una condizione di stabilità (idrostatica) nell'edificio stellare. Per l'eccellente qualità della narrazione, la vicenda della scoperta sperimentale della prima pulsar e le vicende che ne seguirono sono riportate, quasi parola per parola, da **encicl** La studio delle proprietà della materia neutronica nelle condizioni in cui viene a trovarsi nell'interno di una stella di neutroni non sono neppure accennate. L'Autore non esita a dichiarare la sua completa ignoranza al riguardo nel momento della stesura! Il modello Pacini-Glode è tratteggiato nei suoi aspetti fondamentali. Un'esposizione più dettagliata può trovarsi, ad esempio, in un testo classico di radioastronomia amatoriale come **krauss**

Le appendici si configurano come note integrative o di supporto ai contenuti principali discussi nel testo. L'Appendice A tratta della fisica del corpo nero. L'argomento

si trova sviluppato in quasi ogni buon testo di elettromagnetismo e fisica quantistica. Ci limiteremo qui a riportare alcuni dei risultati più importanti a cui si è fatto riferimento nel testo, omettendo in molti casi le relative dimostrazioni. L'Appendice ?? è una sommaria presentazione circa alcuni recenti risultati sull'osservazione dei neutrini solari. L'Appendice C contiene una dimostrazione del teorema del viriale, basata sull'uso delle leggi di Newton. Infine, l'Appendice D tratta della fisica quantistica dei buchi neri.

Sarò grato a chiunque voglia segnalarmi omissioni e/o errori sicuramente presenti nel testo. Qualunque consiglio o suggerimento sarà sempre più che gradito.

Trieste, 14 giugno 2012

Alessandro Candolini

INDICE

| | | |
|-------|--|---|
| 1.1 | Nubi autogravitanti | 1 |
| 1.2 | Effetti della perdita di energia | 3 |
| 1.2.1 | Aumento della temperatura | 3 |
| 1.2.2 | Contrazione della nube | 4 |
| 1.2.3 | Incremento della velocità angolare di rotazione | 6 |
| 1.2.4 | Sintesi dei principali effetti connessi alla perdita di energia radiante | 6 |
| 1.3 | Alcune considerazioni sul modello di formazione stellare | 6 |
| 1.4 | Le protostelle | 8 |

Viene enunciato il teorema del viriale per nubi autogravitanti (in equilibrio). Il teorema è utilizzato per predire, sotto opportune ipotesi semplificatrici, la dinamica di una nube autogravitante soggetta a perdita di energia per irraggiamento. In particolare, si vedrà che, come conseguenza del teorema del viriale (in approssimazione di collasso quasi-statico), ogni nube autogravitante risponde alla perdita di energia radiante contraendosi e aumentando via via la propria temperatura, e *può* così diventare una stella. Ciò avviene a condizione che si rendano disponibili all'interno della nube temperature sufficientemente elevate da consentire l'innesco delle reazioni di fusione termoneucleare (vedremo che queste reazioni richiedono temperature di milioni di kelvin). Quando le reazioni si innescano, esse forniscono energia che bilancia *esattamente* la perdita di energia per irraggiamento, ciò sempre in virtù del teorema del viriale. Può accadere (e vedremo che ciò è connesso alla massa della nube) che il collasso venga arrestato prematuramente (cioè prima che le temperature siano sufficientemente alte per l'avvio delle reazioni di fusione termoneucleare) a causa dell'insorgere di effetti di natura non termica (nello specifico, effetti quantistici di cui parleremo più estesamente in un capitolo successivo); in tal caso, la nube arresta il proprio collasso prima di essere diventata una stella (si parla di nane brune). Alcuni limiti al modello presentato vengono discussi in § 1.3.

1.1 NUBI AUTOGRAVITANTI

Consideriamo una nube di gas ideale. Sia N il numero di particelle che compongono la nube. Da un punto di vista microscopico, un gas ideale è costituito da particelle

- *puntiformi*; (Con “particella puntiforme” intendiamo che le sue dimensioni siano trascurabili rispetto all'estensione dell'intera nube e che si possa ignorare la struttura interna (i gradi di libertà interni) di queste particelle.)
- Non interagenti reciprocamente (cioè ignoreremo nella trattazione le interazioni tra queste particelle);

È opportuno fare una precisazione sul significato dell'espressione “particelle non interagenti con forze di natura elettrica”. Le particelle a cui vogliamo fare riferimento quando parliamo di un gas sono atomi o molecole. Anche se si tratta di strutture aventi in genere carica elettrica complessiva nulla, queste entità sono sempre soggette a interazioni elettriche. Nella nostra analisi sull'evoluzione stellare, dovremmo includere alla lista delle particelle anche atomi ionizzati ed elettroni liberi, che sono entità

dotate di carica elettrica (complessiva nel caso degli ioni) non nulla. È chiaro che per ciascuna di queste particelle le interazioni elettriche sono presenti eccome! Tanto più quando ci si trova a parlare di ioni. Quello che intendiamo dire con “forze di natura elettrica trascurabili” è che mediamente possiamo trascurare l’interazione a distanza che ogni particella della nube subisce ad opera di tutte le altre particelle della nube. Non si possono trascurare invece le interazioni elettriche negli urti tra queste particelle. D’altro canto nel nostro modello a particelle puntiformi, l’energia è conservata (e anche nei casi reali, l’ipotesi che gli urti siano elastici è soddisfatta con buona approssimazione) per cui l’unico effetto degli urti è quello di deviare le particelle coinvolte dalla loro iniziale traiettoria.

Ci si potrebbe aspettare che una nube quale quella ora descritta, se lasciata libera di espandersi nello spazio vuoto, si espanda indefinitamente. Perché? Supponiamo che tra le particelle sia distribuito un certo quantitativo di energia cinetica. (Come vedremo in Sezione 1.2.1, questo è sicuramente vero a patto che la nube, come peraltro è realistico attendersi, si trovi a una temperatura assoluta superiore allo zero kelvin.) Dal momento che nessuna interazione di natura elettrica è presente tra le particelle, queste non si influenzeranno a vicenda. Non essendo trattentate nel loro moto, al trascorrere del tempo si distribuiranno su regioni di spazio via via di ampiezza maggiore.

In realtà può succedere che la nube rimanga comunque contenuta indefinitamente entro un volume finito per effetto della mutua attrazione gravitazionale tra le particelle che la compongono. Per quanto esotico possa apparire questo fenomeno, si ritiene oggi che nelle stelle avvenga proprio questo. Una stella è una struttura mantenuta assieme dalla forza di gravità tra le sue parti. Una nube che rimanga confinata indefinitamente entro una regione finita di spazio per mezzo della sola attrazione gravitazionale che si esercita tra le particelle che la compongono la chiameremo “nube autogravitante”.

Introduciamo, in modo per certi versi informale, due grandezze fisiche che possono essere utili a specificare le proprietà di una nube (non necessariamente autogravitante). Il Lettore interessato potrà comunque reperire le definizioni formali in Appendice C.

La prima grandezza è l’energia cinetica totale della nube. Si tratta della somma algebrica dell’energia cinetica di ciascuna particella della nube. Siccome le particelle della nube sono per ipotesi puntiformi, non hanno quindi estensione né struttura interna, non possono ruotare attorno a qualche loro asse, e pertanto l’energia cinetica di ogni singola particella puntiforme della nube coincide con l’energia cinetica associata al solo moto di traslazione di tale particella. Nel seguito, indicheremo l’energia cinetica totale con E_c . Sarà utile ricordare che, essendo per definizione l’energia cinetica di ogni particella una quantità positiva, anche l’energia cinetica totale della nube sarà positiva.

La seconda quantità di cui avremmo bisogno nel seguito è la cosiddetta “energia potenziale gravitazionale propria” della nube. (Talvolta l’aggettivo “propria” viene tralasciato, e anche noi spesso ci adegueremo per brevità a questa usanza.) Nel seguito, indicheremo l’energia potenziale gravitazionale propria con U_g . Sarà utile ricordare che, essendo la forza di attrazione gravitazionale sempre attrattiva, l’energia potenziale gravitazionale di una nube ha sempre valore numerico negativo.

Siamo pronti per enunciare il seguente importantissimo risultato, valido per nubi autogravitanti in quasi equilibrio.

TEOREMA 1.1 (DEL VIRIALE): Per una nube autogravitante sussiste la relazione

$$\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2} \langle U_g \rangle, \quad (1.1)$$

dove le parentesi ad angolo $\langle \cdot \rangle$ indicano che le quantità che vi figurano vanno mediate su periodi di tempo “ragionevolmente” lunghi.

Il Lettore può trovare una dimostrazione di questo teorema basata su semplici considerazioni di meccanica newtoniana in Appendice C. Nella stessa appendice, si può

reperire anche maggiori dettagli su come debba intendersi l'espressione "tempi ragionevolmente lunghi".

Conviene introdurre un'ulteriore grandezza che possiamo associare alla nostra nube, l'energia totale E , definita come la somma dell'energia cinetica E_c e dell'energia potenziale gravitazionale propria U_g :

$$E = E_c + U_g . \quad (1.2)$$

Siccome le uniche forze agenti sulle particelle della nube sono le forze gravitazionali di mutua interazione, che sono forze conservative, l'energia totale così definita si conserva.

Vedremo adesso che il teorema del viriale può essere utilizzato come strumento per caratterizzare una nube autogravitante una volta che sia noto il valore dell'energia totale E a un qualche istante di tempo. (Siccome l'energia totale si conserva nel nostro caso, non è particolarmente rilevante a che istante si riferisca il valore E .) Si hanno due casi:

1. se $E > 0$, la nube (o almeno parte di essa) si espande indefinitamente;
2. se $E < 0$, la nube *non* può espandersi indefinitamente, i. e., è autogravitante.

Cerchiamo di spiegarne la ragione. Cominciamo dal caso 1. Supponiamo per assurdo che, per $E > 0$, la nuvola *non* si espanda indefinitamente, ma rimanga confinata in un volume finito. Allora sarebbe possibile applicare il teorema del viriale. Possiamo riscrivere la Eq. (1.1) nella forma $\langle U_g \rangle = -2 \langle E_c \rangle$, da cui

$$\langle E \rangle = \langle E_c + U_g \rangle = \langle E_c \rangle + \langle U_g \rangle = \langle E_c \rangle - 2 \langle E_c \rangle = - \langle E_c \rangle . \quad (1.3)$$

Si è già osservato che, per come definita, l'energia cinetica è una grandezza sempre positiva; dalla Eq. (1.3) si conclude allora che $\langle E \rangle < 0$. Ma per la conservazione dell'energia, l'energia totale è costante, i. e., $\langle E \rangle = E$, da cui si conclude che $E < 0$ contro l'ipotesi iniziale che $E > 0$.

Veniamo adesso al caso 2. Procediamo per assurdo come nel caso precedente e supponiamo che, per $E < 0$, la nuvola invece si espanda indefinitamente. Ciascuna particella finirà cioè per trovarsi a distanza infinita dalle altre. Quando ciò avviene, l'energia potenziale gravitazionale propria finale U_g è nulla per definizione, tutta l'energia è cinetica (quindi positiva) e l'energia totale del sistema è dunque positiva contro l'ipotesi iniziale che $E < 0$.

1.2 EFFETTI DELLA PERDITA DI ENERGIA

Si dimostrerà di seguito che ogni nube per cui $E < 0$ non solo, come già mostrato alla sezione precedente, rimane contenuta entro un volume finito, ma tende a contrarsi su sé stessa aumentando la propria temperatura. Come approfondiremo meglio nella prossima sezione, questi risultati suggeriscono automaticamente un meccanismo plausibile per spiegare come si formino le stelle.

1.2.1 Aumento della temperatura

Nella nostra indagine supporremo di poter ritenere valido il teorema di equipartizione dell'energia, da cui si ricava che la temperatura assoluta T di un sistema di N particelle *puntiformi* in equilibrio termico è legata al valore dell'energia cinetica media $\langle E_c \rangle$ totale delle N particelle dalla relazione

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} N k T \quad (1.4)$$

dove k è la costante di Boltzmann, pari a $1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Si è già visto che $E = \langle E \rangle = \langle E_c \rangle + \langle U_g \rangle = -\langle E_c \rangle$ come conseguenza del teorema del viriale ai numeri (1.3) e (??). Tenendo conto della relazione (1.4) si ha quindi:

$$E = \langle E \rangle = -\langle E_c \rangle = -\frac{3}{2}NkT \quad (1.5)$$

da cui infine ricavando la temperatura assoluta T si ha:

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{\langle E_c \rangle}{Nk} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\langle E \rangle}{Nk} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{E}{Nk} \quad (1.6)$$

La nube assume facilmente temperature superiori, in qualche misura, alla temperatura dello spazio esterno, che, all'epoca attuale, è pari a circa 2.7 kelvin (radiazione del fondo cosmico). Per il principio zero della termodinamica, la nube tenderà a irradare energia nello spazio, in forma di onde elettromagnetiche, al fine di ricercare una condizione di equilibrio termico con lo spazio esterno. Indichiamo con ΔE la quantità di energia irradiata dalla nube nello spazio circostante. ΔE rappresenta cioè la frazione di energia totale che la nube *perde* nel tentativo di stabilire una relazione di equilibrio termico con l'ambiente esterno più freddo. La variazione ΔT di temperatura corrispondente alla perdita di energia ΔE è pari, secondo la relazione (1.6), a:

$$\Delta T = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta E}{Nk} \quad (1.7)$$

Ripercorriamo brevemente a parole quanto si è fatto in questi ultimi passaggi: abbiamo semplicemente ripreso le equazioni (1.3) e (??) del capitolo precedente, le abbiamo modificate introducendo l'espressione del principio di equipartizione e tutto ciò al fine di giungere ad una relazione, la numero (1.7) appunto, che leghi la variazione di energia ΔE alla variazione di temperatura ΔT .

Questa equazione ci serve per dire che in generale il segno di ΔE sarà opposto al segno di ΔT (nella relazione (1.7) compare infatti un segno meno per cui, qualora uno dei due termini della relazione sia negativo, l'altro dovrà necessariamente essere positivo e viceversa.)

Pertanto, se ΔE è negativo (la nube *perde* energia sotto forma di radiazione elettromagnetica) allora ΔT è positiva. Questo significa che, *via via che la nuvola di gas irraggia energia, la sua temperatura deve aumentare.*

L'effetto può apparire sconcertante, ma come si è visto è una conseguenza deducibile, neanche troppo difficilmente, dal teorema del viriale: più la nube emette energia più la sua temperatura aumenta, la stella continua ad irraggiare energia e intanto aumenta la propria temperatura e così via. La stella perde energia e di conseguenza si scalda. È questo il significato profondo della relazione (1.7). Il fatto che la nube si riscaldi è la prima conseguenza della perdita, da parte della nube stessa, di energia radiante.

1.2.2 Contrazione della nube

Si vuole ora esaminare un secondo effetto della perdita di energia radiante; si vedrà che, man mano che la nube rilascia energia nello spazio in forma di onde elettromagnetiche, oltre a scaldarsi subisce pure un effetto di *contrazione*.

Anche questa seconda conseguenza è deducibile da alcune considerazioni quantitative sul teorema del viriale. Vediamo di capire come. Per il teorema del viriale, se l'energia cinetica E_c *aumenta* è necessario che l'energia potenziale U_g *diminuisca*. Nell'espressione matematica del teorema del viriale compare infatti un segno meno; qualora il valore, mediato su un lungo periodo di tempo, di una delle due grandezze *aumenti*, il valore dell'altra grandezza dovrà *diminuire* affinché la relazione (1.1) continui a mantenersi valida. Un aumento di energia cinetica implica dunque una diminuzione dell'energia potenziale.

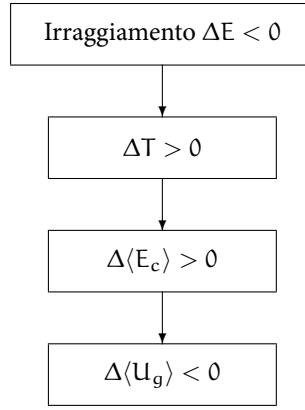


Figura 1.1: Schema

Se la nube irradia energia, abbiamo visto sopra (sezione 1.2.1) che aumenta la temperatura. Se aumenta la temperatura, aumenta l'energia cinetica media (basti ricordare il solito teorema di equipartizione). Ma maggiore energia cinetica significa, come abbiamo visto ora, minore energia potenziale. L'energia potenziale gravitazionale propria U_g di un sistema è, per definizione, correlata alla massa ed alla geometria del sistema stesso. Un'espressione matematica per U_g nel caso di una sfera omogenea di massa m e raggio r è.

$$U_g = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{r} \quad (1.8)$$

dove G è la costante di gravitazione universale.

Il fattore numerico $3/5$ è riferito al caso particolare di una sfera uniforme. Quello che qui ci interessa è la dipendenza di U_g dall'inverso del raggio.

Se U_g deve diminuire come si è detto, è necessario che r (che nell'espressione sopra compare al denominatore) diminuisca. In altri termini, mano a mano che la nube irradia energia, la nuvola diventa sempre più calda e si *contrae*. Questa è una conseguenza del teorema del viriale. Il processo di contrazione della nube non è innescato da alcun meccanismo esterno alla nube stessa. *Qualunque* insieme di particelle, per cui inizialmente $E < 0$, evolverà autonomamente in maniera tale da ridurre le proprie dimensioni spaziali e da aumentare la propria temperatura interna; l'evoluzione è perfettamente descrivibile e prevedibile (come si è voluto mostrare) mediante l'impiego del teorema del viriale (e, volendo essere rigorosi, nell'ipotesi di applicabilità del teorema di equipartizione dell'energia). Qualsiasi fattore estraneo alla nube stessa risulta superfluo per rendere ragione del processo di contrazione. Le leggi della fisica prevedono che *qualsiasi* nube di gas per cui $E < 0$ subisca contrazione gravitazionale e aumenti nel contempo la propria temperatura.

Se il meccanismo di contrazione può essere interamente spiegato alla luce del teorema del viriale, ancora ignote rimangono invece le cause *all'origine della formazione* dei globuli di Bok. Il perché si formino, all'interno delle nebulose, marcate disomogeneità nella distribuzione dei gas e delle polveri rimane ancora oggi oggetto di discussione. Secondo una delle ipotesi oggi maggiormente accreditate la condensazione dei materiali della nebulosa e la formazione di strutture globulari sarebbe da imputarsi all'effetto di compressione operato da onde d'urto sprigionate nell'esplosione di vicine supernovae.

Quello che preme ancora una volta sottolineare, contro taluni errori in merito alla questione alle volte riportati in una manualistica anche di un certo livello, è che l'effetto di compressione prodotto dall'esplosione delle supernovae *non* concorre in alcun modo, o comunque con rilevanza scarsamente significativa, a indurre la contrazione

dei globuli di Bok, il cui comportamento è *interamente* regolato dal teorema del viriale, ma semmai costituisce uno dei principali fattori coinvolti nella formazione di disomogeneità in seno alla nebulosa, quali appunto gli stessi globuli di Bok devono essere considerati.

1.2.3 Incremento della velocità angolare di rotazione

A titolo di pura curiosità ricordiamo a questo punto come, durante la fase di contrazione, la nube inizi a manifestare un sensibile moto di rotazione. Ciò è conseguenza del principio di conservazione del momento della quantità di moto (o momento angolare). Malgrado infatti la velocità iniziale di rotazione della nube sia il più delle volte talmente piccola da non essere operativamente misurabile, la contrazione determina un aumento della velocità angolare (non diversamente da quanto avviene con una ballerina che avvicina le proprie braccia.)

1.2.4 Sintesi dei principali effetti connessi alla perdita di energia radiante

In sintesi la perdita di energia sotto forma di radiazione elettromagnetica determina:

- aumento della temperatura interna della nube;
- contrazione della nube;
- aumento della velocità angolare della nube.

1.3 ALCUNE CONSIDERAZIONI SUL MODELLO DI FORMAZIONE STELLARE

Si è presentato un modello teorico semplificato che fornisca una qualche spiegazione dei meccanismi di formazione stellare. Prima di procedere oltre, appare lecito interrogarsi sull'attendibilità di siffatto modello e sulle prove sperimentali che esso eventualmente vanta a conforto. L'elaborazione di ogni modello fisico richiede inoltre che vengano discusse le idealizzazioni e le approssimazioni che esso inevitabilmente contiene. Anche tenendo conto del fatto che il modello precedentemente descritto non vuole essere che una grossolana semplificazione della decisamente più rigorosa e dettagliata modellistica esistente al riguardo, non si può prescindere dal fornire alcuni estremi di riferimento che permettano al lettore di formarsi un'idea, per quanto generale, della validità dei modelli di formazione stellare.

Fin qui si è esposto un modello teorico soddisfacente secondo cui *ogni* nube di gas autogravitante tale per cui $E < 0$ (Sezione 1.1) e sufficientemente massiccia¹, andrà incontro a collasso gravitazionale, a seguito del quale darà poi origine ad una stella. Si è anche detto, nel paragrafo introduttivo alla sezione 1, che possibili candidati al ruolo di nubi dalle quali si origineranno, per successiva contrazione, le stelle, sono i *globuli di Bok*²

Quali prove si hanno che i globuli di Bok siano veramente i primi embrioni di futuri corpi stellari?

Per rispondere, nel seguito si farà riferimento prevalentemente a **dick**

¹ Come si vedrà più dettagliatamente alla??, si possono verificare delle situazioni in cui la massa in gioco è inferiore al valore critico di circa 0.07 masse solari. Al di sotto di questo valore critico si ha l'arresto del collasso gravitazionale (causa l'insorgere di fenomeni quantistici) prima che la temperatura interna della nube raggiunga i valori di innesco delle reazioni nucleari.

² Più precisamente si parla di *globuli di Bok maggiori*. Esiste un secondo gruppo di oggetti, appartenenti alla medesima classe dei globuli di Bok, ma di dimensioni estremamente più contenute. Sulla relazione che esista tra i due gruppi non si sa molto, ma secondo talune teorie recenti pare che le differenze non si limitino all'estensione spaziale **dick**

Conferme osservazionali dirette che provino in maniera inequivocabile che questi globuli evolvano a formare delle stelle ad oggi non ve ne sono. Nessuno ha mai visto nascere una stella. Ciò accade perché il processo di formazione stellare richiede scale di tempo troppo grandi perché possa venire direttamente osservato. Un tale problema non sussiste esclusivamente per le fasi iniziali dell'evoluzione stellare, ma, come si è cercato di mettere in luce sin dall'introduzione, costituisce una questione ricorrente che ritroveremo per tutti gli stadi evolutivi successivi.

Un argomento piuttosto valido a sostegno dell'ipotesi che le stelle si originino dentro globuli di Bok in contrazione potrebbe essere quello di trovare stelle di formazione recente all'interno di queste strutture nebulari. Un'indagine di questo tipo è stata condotta qualche tempo fa da W.E. Herbst e D.G. Turner. Il risultato è stato che un globulo, noto come Lynds 810, contiene almeno una stella giovane, plausibilmente originatasi per contrazione del globulo stesso.³

Il fatto stesso che i globuli di Bok stiano collassando è tutt'altro che scontato. Potrebbe darsi benissimo il caso che tutti questi globuli siano strutture gravitazionalmente stabili. Se così fosse, ci troveremo di fronte a due alternative: o le nubi che collassano a formare le stelle sono altre, diverse dai globuli di Bok, oppure semplicemente il nostro modello è tutto da rifare e non è affatto vero che le stelle si originano come si è cercato di far intendere nelle pagine precedenti.

Un modo per verificare che i globuli si stiano realmente contraendo potrebbe essere questo: dal nostro modello sappiamo (1.1) che l'unico requisito perché si abbia la contrazione è che $E < 0$, perché per $E > 0$ la nube semplicemente si disperde e il teorema del viriale non è più applicabile. Se disponessimo di un dispositivo capace di misurare direttamente il valore di E per un dato globulo, allora basterebbe vedere se $E > 0$ o se $E < 0$ per poter affermare, in tutta sicurezza, che quel globulo sta collassando o meno. In realtà ciò non è proprio rigorosamente esatto perché si sono supposti trascurabili certi fattori, come presenza di campi magnetici, di cui diremo qualche parolina in seguito. Per ora continuiamo a trascurare questi fattori. Allora, come si stava dicendo, se misuriamo che $E < 0$ siamo assolutamente certi che il globulo si sta contraendo.

Purtroppo le cose non sono così semplici, perché non disponiamo di uno strumento che ci permetta di misurare direttamente E . Occorre procedere per via *indiretta*, partendo dalla misurazione diretta di altre grandezze per poi risalire al valore di E . Si tratta cioè, per il nostro globulo, di raccogliere un po' di dati sperimentali e poi da questi, con qualche conticino, ricavare quanto vale E .

Di quali dati abbiamo bisogno per calcolare E ?

Sappiamo dalla (1.2) che $E = \langle E_c \rangle + \langle U_g \rangle$. Questo non ci aiuta per niente, non disponendo di alcun modo per misurare direttamente neanche $\langle E_c \rangle$ e $\langle U_g \rangle$. Ma noi sappiamo anche dell'altro: sappiamo ad esempio il principio di equipartizione dell'energia (1.4), e abbiamo anche un'espressione, la (1.8), per U_g nel caso in cui il globulo sia una sfera.

Per valutare $\langle E_c \rangle$ sarà sufficiente conoscere il numero di particelle N che compongono il globulo e la sua temperatura interna assoluta T ; per $\langle U_g \rangle$ ci servono la massa del globulo M e il raggio r . Se si considera che, sapendo la composizione approssimativa del globulo (e questa si può sapere tramite indagine spettroscopica), N può essere ricavato da M , i parametri di cui abbiamo bisogno sono, alla fine, la temperatura interna T , la massa M ed il raggio r .

Raggio e massa del globulo sono deducibili dall'analisi di lastre fotografiche, il primo da una misura delle dimensioni *apparenti* del globulo sulla lastra (nota la distanza del globulo dalla Terra), la seconda, in modo un po' più complicato, stimando l'effetto di assorbimento operato dalle polveri del globulo sulla luce delle stelle che vi passa attraverso **dicke**. Tra i metodi più efficaci per determinare la temperatura interna si ricorda quello basato sull'osservazione della riga spettrale dell'ossido di carbonio alla lunghezza d'onda di 2.6mm **dicke**.

³ L'indagine è citata da **dicke**. L'autore si scusa, ma purtroppo non gli è stato possibile reperire il lavoro originale dei due ricercatori e neppure venire a conoscenza di sviluppi più recenti sulla questione.

A questo punto, noti T , r ed M , non resta che verificare che i loro valori forniscano la conferma della contrazione gravitazionale dei globuli di Bok. Nell'indagine condotta da Dickman su un campione di otto globuli, tutti questi otto globuli si sono rivelati, in base alla misura dei parametri T , M ed r , in stato avanzato di collasso gravitazionale **dick**

Nel modello di formazione stellare presentato, si è ignorata l'esistenza di almeno tre importanti fattori frenanti che possono opporsi alla contrazione gravitazionale **dick**

1. *forze centrifughe* dovute alla rotazione;
2. *campi magnetici*
3. *turbolenza fluidodinamica*

La geometria sferica del globulo suggerisce che il primo di questi fattori, la presenza di forze centrifughe, sia trascurabile con buona approssimazione; in caso contrario, ci si aspetterebbe che l'entità della forza centrifuga fosse tale da provocare un sensibile schiacciamento nella forma del globulo. Più difficile è valutare l'entità dei restanti due fattori. Vi sono comunque buone ragioni per considerare trascurabili, almeno in prima approssimazione, anche questi fattori. Per una trattazione qualitativa più approfondita sull'argomento si rimanda all'articolo di Dickman **dick**

1.4 LE PROTOSTELLE

È noto come, all'aumentare della temperatura, l'intensità massima di irraggiamento per un corpo si abbia a frequenze via via più elevate. In forma quantitativa, per un corpo nero⁴ questo fatto viene espresso mediante la legge dello spostamento di Wien.⁵ Il globulo di Bok, durante la fase di contrazione, aumentando la propria temperatura, comincerà ad emettere radiazione con un massimo di intensità attorno a frequenze sempre maggiori, diventando infine osservabile nell'infrarosso e, in molti casi, nello spettro del visibile. Qualche decina di anni fa, esaminando con fotometri sensibili all'infrarosso la regione centrale della nebulosa di Orione, Becklin e Neugebauer, due astrofisici del Caltech, hanno identificato una intensa sorgente di radiazione infrarossa, da ritenersi una nube in contrazione gravitazionale. La scoperta si è poi ripetuta, nella medesima zona di cielo, grazie a Kleinmann e Low, che hanno identificato un oggetto, ancora meno compatto, anch'esso visibile nel lontano infrarosso. Da allora, il numero di simili oggetti, presumibilmente associati a stelle in via di formazione, è andato sempre aumentando; ad essi è stato dato il nome di *protostelle*: pur brillando di luce propria, caratteristica questa delle stelle, non derivano la quantità di energia che irradiano nello spazio da reazioni di fusione nucleare.

La durata della fase di protostella dipende dalla massa dei materiali in condensazione: il corso evolutivo è tanto più rapido quanto maggiore è la massa in gioco.

⁴ Qualunque sistema fisico avente *potere assorbente* $A(\nu, T, \dots)$ pari ad 1, cioè in grado di assorbire *tutta* la radiazione incidente.

⁵ Detta λ_{\max} la lunghezza d'onda alla quale si ha la massima intensità di irraggiamento per un corpo nero alla temperatura assoluta T , la legge dello spostamento di Wien stabilisce che $\lambda_{\max} \cdot T = b_0$, con b_0 costante pari a $b_0 = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ **caf**

2

IL LIMITE DI CHANDRASEKHAR

INDICE

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1 | Cenni di meccanica quantistica | 9 |
| 2.1.1 | Buca di potenziale infinita | 10 |
| 2.1.2 | Buca finita di potenziale ed effetto tunnel | 12 |
| 2.2 | Gas di Fermi degenerare in regime non relativistico | 12 |
| 2.3 | Gas di Fermi degenerare in regime relativistico | 12 |

Era il 1930 quando il giovane fisico indiano Subramahyan Chandrasekhar decise di imbarcarsi per l'Inghilterra con nel cuore il sogno di raggiungere l'Inghilterra dove studiare e diventare un giorno membro della Royal Society. Durante il viaggio, Chandra si dedicò allo studio delle fasi terminali dell'evoluzione stellare.

Egli in particolare si accorse che una nana bianca di massa superiore ad un certo valore critico stimato pari a circa $1,4M_{\odot}$ non potrà mai essere gravitazionalmente stabile. Non possono semplicemente esistere nane bianche di massa maggiore a $1,4M_{\odot}$; per simili valori di massa la forza di attrazione gravitazionale del corpo stellare stesso risulta talmente intensa da vincere anche la repulsione tra gli elettroni degeneri.

In questo capitolo vedremo che il collasso gravitazionale può essere arrestato dall'insorgere di effetti di natura genuinamente quantistica: pressione di degenerazione. La pressione di degenerazione ha le sue radici nel principio di esclusione di Pauli (e *non*, come infelicitemente riportato in taluni testi di presunta "divulgazione", nella relazione di indeterminazione di Heisenberg, che non è un principio di meccanica statistica, si applica in genere ad operatori non commutanti, anche per bosoni.)

2.1 CENNI DI MECCANICA QUANTISTICA

Il Lettore potrebbe essere già familiare, con alcuni aspetti di natura quantistica dell'atomo di idrogeno non relativistico che spesso vengono menzionati, almeno a livello qualitativo, anche nei corsi base di chimica. Tra questi, ricordiamo

- Livelli energetici quantizzati: l'elettrone nell'atomo di idrogeno può assumere solo certi precisi ben determinati valori di energia, lo spettro dei valori di energia possibile è discretizzato, ci sono energie permesse e energie non permesse.
- Aspetto intrinsecamente probabilistico della teoria: in genere, la teoria non permette di prevedere l'esito della misurazione di una quantità, ma solamente di conoscere la probabilità che una misurazione. Questa probabilità, secondo l'interpretazione standard corrente è da ritenersi *non* epistemica, cioè non è interpretata come frutto di una nostra conoscenza incompleta e parziale sullo stato del sistema fisico, bensì è intrinseca.

Torneremo in termini più precisi su queste questioni. Per ora, l'intento era piuttosto quello di richiamare nozioni che forse il Lettore aveva già incontrato altrove.

Non è questa la sede per discutere in maniera sistematico l'edificio teorico della meccanica quantistica non relativistica. Un tale studio sistematico ci porterebbe lontano, inoltre presenta complicazioni sia dal punto di vista del formalismo matematico richiesto (nella formulazione operatoriale, si basa sui teoremi di decomposizione spettrale di operatori limitati, possibilmente anche non limitati, densamente definiti

in uno spazio di Hilbert astratto sul campo dei numeri complessi; nella formulazione di Feynman, richiede il ricorso all'integrazione in spazi funzionali) inoltre presenta aspetti concettuali non banali. Ci limitiamo a presentare peraltro alcuni degli ingredienti base, senza alcuna pretesa di completezza o sistematicità, ma è quanto basta per il calcolo che ci servirà.

L'equazione di Schrödinger stazionaria unidimensionale per una particella quantistica puntiforme di massa m , senza spin o altri gradi di libertà interni, in moto non relativistico in un potenziale $V(x)$ (dipendente solo dalla posizione) è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d\psi_E(x)}{dx} + V(x)\psi_E(x) = E\psi_E(x), \quad (2.1)$$

dove $\hbar = h/2\pi$ è la costante di Planck "razionalizzata" (cioè è la costante di Planck h divisa per 2π). E è l'energia della particella.

La Eq. (2.1) è una equazione differenziale ordinaria; le sue soluzioni sono le funzioni d'onda $\psi_E(x)$. L'interpretazione fisica delle funzioni d'onda $\psi_E(x)$ è probabilistica: $|\psi_E(x)|^2$ è la densità di probabilità che una misurazione di posizione della particella rilevi la particella nel punto individuato dalla coordinata x .

2.1.1 Buca di potenziale infinita

Consideriamo una particella di massa m confinata nella regione $0 < x < L$. In questa regione, l'equazione di Schrödinger stazionaria diventa in particolare

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_E(x)}{dx^2} = E\psi_E(x), \quad 0 < x < L,$$

ovvero

$$\frac{d^2\psi_E(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_E(x), \quad 0 < x < L. \quad (2.2)$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria, lineare, omogenea, del secondo ordine a coefficienti costanti. La teoria di queste equazioni è molto ben sviluppata ed esauriente. È noto che *tutte e sole* le soluzioni sono della forma

$$\psi_E(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x, \quad 0 < x < L, \quad (2.3)$$

dove A e B sono numeri reali (o complessi) qualunque e

$$\omega = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Non è difficile verificare per sostituzione diretta nella eq. (2.2) che le funzioni (2.3) soddisfano la eq. (2.2). Altra faccenda è dimostrare che non ci sono altre soluzioni oltre a questa! Ma la teoria delle equazioni lineari non solo permette di trovare sistematicamente le soluzioni (2.3) ma ci assicura anche che non ci sono altre soluzioni oltre a queste.

All'esterno della buca, cioè per $x < 0$ oppure $x > L$, la probabilità di trovare la particella è nulla, quindi $\psi_E(x) = 0$. Per *continuità*, la funzione d'onda deve annullarsi agli estremi della buca, cioè

$$\psi_E(0) = \psi_E(L) = 0.$$

Queste condizioni (condizioni al contorno) impongono che

$$\psi_E(0) = B = 0$$

da cui $B = 0$ quindi, e

$$\begin{aligned} \psi_E(L) &= A \sin(\omega L) \\ &= 0. \end{aligned}$$

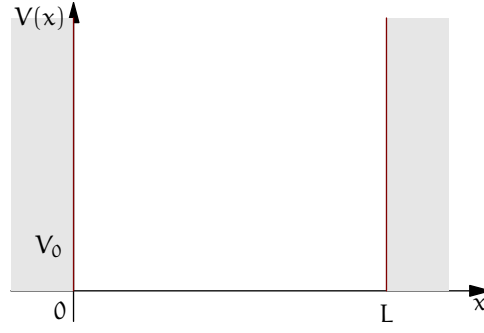


Figura 2.1: Buca di potenziale infinita

Quest'ultima condizione è verificata se e soltanto se: $A = 0$ oppure $\sin(\omega L) = 0$. La condizione $A = 0$ porterebbe a $\psi_E(x) = 0$ per ogni x , non accettabile. Quindi

$$\sin(\omega L) = 0. \quad (2.4)$$

La eq. (2.4) è verificata se e soltanto se

$$\omega L = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

cioè se e soltanto se

$$\omega = k \frac{\pi}{L}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Escludiamo però il valore $k = 0$ che implicherebbe $\omega = 0$ e quindi $\psi_E(x) = 0$ per ogni x .

Questa relazione ha importanti conseguenze. Siccome ω è legata al valore dell'energia E , otteniamo che

$$\omega^2 = k^2 \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

da cui

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2 k^2}{2mL^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

cioè non tutti i valori di energia E sono permessi! Ci sono dei livelli energetici. Solo le energie che si ottengono inserendo valori interi (non nulli) di k nella espressione sopra sono permesse. La particella non potrà mai trovarsi a un'energia E che non soddisfi questa formula. Le energie permesse dipendono da k , possiamo etichettarle con E_k . Si dice che l'energia è quantizzata.

Il *ground state* (la minima energia permessa) *non* è zero, come ci si potrebbe aspettare. Classicamente, la particella può trovarsi a energia zero, quando è ferma. Quantisticamente invece, la minima energia possibile è quella che si ottiene per $k = 1$ e vale

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Questo risultato è compatibile con la relazione di indeterminazione posizione-impulso di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geqslant,$$

dove Δx etc.

2.1.2 Buca finita di potenziale ed effetto tunnel

2.2 GAS DI FERMİ DEGENERI IN REGIME NON RELATIVISTICO

Cosa succede se nella buca di potenziale ci sono più particelle? Se le particelle sono *non* interagenti tra loro, allora il problema fattorizza

2.3 GAS DI FERMİ DEGENERI IN REGIME RELATIVISTICO

La pressione degli elettroni degeneri nell'approssimazione non relativistica dipende dalla densità volumetrica di elettroni n_e (sezione ??). Più precisamente, se P_{deg} è la pressione degli elettroni degeneri, dall'equazione (??), si ha che:

$$P_{deg} \propto n_e^{\frac{5}{3}} \quad (2.5)$$

In condizioni di equilibrio idrostatico, la pressione P_g che si esercita in un *qualunque* punto all'interno del corpo stellare per effetto del peso della materia degli strati sovrastanti cresce, come ragionevole aspettarsi, con la massa della stella e con la sua densità. Questo significa che, a parità di densità, più una stella è massiccia e più grande sarà la pressione che si eserciterà in un suo punto qualunque causa l'attrazione gravitazionale della massa stellare su sé stessa. Viceversa, a parità di massa, la pressione sarà tanto più grande quanto più densa sarà la stella. Si può tradurre in forma quantitativa questo fatto scrivendo la relazione:

$$P_g \propto M^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \quad (2.6)$$

dove M e ρ sono rispettivamente la massa e la densità della stella. Si noti che la pressione P_g , come anche la pressione degli elettroni degeneri (??), non dipende da quale punto del corpo stellare si scelga di considerare: la pressione ha lo stesso valore in ogni punto della stella. Non daremo qui una dimostrazione della (2.6); l'equazione può essere dedotta dall'equazione per l'equilibrio idrostatico e facendo uso dell'equazione di stato del gas perfetto.

Fatte queste due precisazioni, siamo pronti per affrontare il problema del limite di Chandrasekhar. In questa sezione si cercherà di sottolineare un fatto in particolare modo, e questo fatto è il seguente: finché si considera come formula per la pressione degli elettroni degeneri la (??), ricavata nell'approssimazione non relativistica, non si arriverà mai a trovare qualche evidenza che esiste il limite di Chandrasekhar, e cioè che nane bianche di massa superiore a $1.4M_{\odot}$ non possono stabilizzarsi in condizione di equilibrio idrostatico. Ma se si ricava una nuova espressione per la pressione degli elettroni degeneri nel caso relativistico, allora automaticamente emerge la problematica del limite di Chandrasekhar. La deduzione di questo fatto richiede ovviamente il ricorso a particolarismi tecnici e ad un certo formalismo matematico che esulano certo dagli obiettivi modesti del presente documento. Si vuole in questa sezione presentare qualche sommario argomento a favore di quanto sopra detto, senza pretesa di alcuna completezza. Questa sezione vuole giusto essere un assaggio che indichi al lettore dove nasca l'idea dell'esistenza del limite di Chandrasekhar. In ogni caso la presente sezione è da considerarsi come materiale integrativo di approfondimento. Il lettore che lo volesse non tardi a proseguire nelle sezioni successive.

Un calcolo preciso basato sulla statistica di Fermi–Dirac fornisce la seguente espressione per il calcolo della pressione degli elettroni degeneri nel caso relativistico:

$$P_{deg} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{8\pi}\right)} \cdot h \cdot c \cdot n_e^{\frac{4}{3}} \quad (2.7)$$

cioè:

$$P_{deg} \propto n_e^{\frac{4}{3}} \quad (2.8)$$

Può apparire una piccola differenza rispetto alla relazione di proporzionalità (2.5). La (2.8) e la (2.5) differiscono solo per la potenza con cui vi figura la densità di elettroni n_e . Eppure proprio da questa apparentemente quasi insignificante differenza, che concettualmente non sembra nascondere niente di nuovo, tra le due relazioni prende avvio il problema del limite di Chandrasekhar. Finché si lavora con la relazione (2.5), qualsiasi sia la pressione P_g dovuta all'attrazione gravitazionale della stella su sé stessa, si può sempre scegliere n_e abbastanza grande perché risulti che p_g e P_{deg} si equilibrano a vicenda. Se una stella è molto massiccia, per la (2.6) la pressione sarà molto grande; via via che la stella si contrae il suo volume diminuisce, e siccome la sua massa non cambia, sia n_e che ρ crescono; allora la pressione p_g , in base alla (2.6) cresce, perché cresce ρ , e anche P_{deg} cresce perché cresce anche n_e ; ma P_{deg} cresce più rapidamente di P_g , perché, per la (2.5), P_{deg} cresce con potenza 5/3 della densità, mentre P_g cresce con una potenza più piccola, 4/3 appunto, della densità. Ad un certo punto P_{deg} sarà cresciuta abbastanza da equilibrare p_g . In termini matematici si ha che il rapporto P_{deg}/P_g cresce al crescere della densità, cioè via via che il collasso della stella procede. Ad un certo punto questo rapporto sarà cresciuto al punto da valere esattamente 1.

Ma se invece della (2.5) usiamo la (2.8) questo non è più vero, perché in questo caso si avrebbe che sia P_{deg} sia P_g crescono con la medesima potenza della densità, la potenza 4/3: via via che la stella si contrae cioè aumentano nella stessa maniera sia la pressione di degenerazione sia la pressione dovuta all'attrazione gravitazionale della stella su sé stessa. non è più come nel caso precedente che le due pressioni crescono in maniera diversa via via che la stella prosegue nella fase di collasso. In termini matematici il rapporto P_{deg}/P_g non dipende più da una qualche potenza della densità, ma dipende solo dalla massa della stella. Vale la relazione:

$$\frac{P_g}{P_{deg}} \propto M^{\frac{2}{3}} \quad (2.9)$$

Per un certo valore critico della massa della stella, la pressione degli elettroni degeneri non sarà mai in grado di eguagliare la pressione dovuta all'attrazione gravitazionale della stella su sé stessa, e conseguentemente la pressione degli elettroni degeneri non sarà sufficiente ad arrestare il collasso gravitazionale di queste stelle. Stelle troppo massicce non potranno stabilizzarsi nello stadio di nana bianca. Per stelle degeneri del tutto prive di idrogeno il valore critico per cui questo succede vale:

$$M_c = 1.44M_{\odot}$$

Questo limite è il limite di Chandrasekhar e la massa critica M_c prende il nome di massa di Chandrasekhar.

3

BUCHI NERI

INDICE

| | | |
|-------|--|----|
| 3.1 | Premesse | 15 |
| 3.1.1 | Calcolo ingenuo del raggio di Schwarzschild in gravitazione Newtoniana | 15 |
| 3.2 | La soluzione di Schwarzschild | 16 |
| 3.3 | Buchi neri in astrofisica | 16 |

Questo capitolo si propone un duplice scopo. Il primo obiettivo è presentare alcuni concetti di base relativi alla fisica (classica) dei buchi neri, che verranno illustrati esplicitamente nel caso particolare della geometria di Schwarzschild e commentando alcuni risultati più generali che possono essere derivati dallo studio della struttura causale globale. Il secondo, è esporre la connessione che questi argomenti di fisica teorica hanno con l'astrofisica. L'astrofisica offre infatti un contesto tipico dove incontrare buchi neri, in particolare:

- Buchi neri stellari (masse intorno a qualche volta la massa solare);
- Buchi neri supermassicci al centro di certe galassie;
- Buchi neri primordiali.

In particolare, entreremo più nel dettaglio sui buchi neri stellari (prodotti dal collasso gravitazionale di stelle di massa superiore al limite di). I buchi neri supermassicci al centro della galassia sono rilevanti per spiegare certi processi in astrofisica, ne accenneremo brevemente. Illustreremo anche alcune prove (indirette) molto forti a favore dell'esistenza di questi buchi neri, in particolare al centro della nostra galassia. I buchi neri primordiali sono di interesse per la cosmologia e potrebbero offrire una conferma diretta di alcune previsioni sulla teoria quantistica dei buchi neri (effetto Hawking), tuttavia non ne sono ancora stati osservati.

3.1 PREMESSE

3.1.1 Calcolo ingenuo del raggio di Schwarzschild in gravitazione Newtoniana

Se lanciamo un oggetto verso l'alto, tipicamente lo vediamo rallentare, raggiunge un'altezza massima e poi ricadere a terra. Non sempre è così. Se la velocità con cui l'oggetto è lanciato verso l'alto è sufficientemente alta, l'oggetto potrà allontanarsi senza ricadere. Quanto velocemente dobbiamo lanciarlo? La minima velocità è chiamata "velocità di fuga". Non è difficile calcolare, nell'ambito della teoria Newtoniana della gravitazione, quale sia la velocità di fuga.

Uguagliando energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale

$$\frac{1}{2}mv^2 = G \frac{mM}{R^2},$$

si trova

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Si noti che la velocità di fuga è indipendente dalla massa m .

3.2 LA SOLUZIONE DI SCHRWARZCHILD

La metrica di Schwarzschild è

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{-1} dr^2 + R^2 (d^2\vartheta + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

3.3 BUCHI NERI IN ASTROFISICA

A

INTRODUZIONE ALLA FISICA DEL CORPO NERO

In questa Appendice vengono richiamati alcuni importanti risultati inerenti la fisica del corpo nero.

Ogni corpo portato a temperatura assoluta superiore agli 0 K emette energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Conviene, in questa sede, considerare questa affermazione alla stregua di un fatto sperimentale, senza entrare nei dettagli teorici che ne permettono una giustificazione in qualche misura adeguata. A questa modalità di emissione di energia in forma di radiazione elettromagnetica si dà il nome di *irraggiamento*.

Un qualunque corpo può anche assorbire una parte dell'energia trasportata da eventuale radiazione elettromagnetica che incide la sua superficie. In generale, diremo che un qualunque corpo è in grado di scambiare energia sotto forma di radiazione elettromagnetica.

B | GAS DI FERMI IDEALE

Meccanica statistica quantistica di un gas di fermioni non-interagenti (in equilibrio).

C | TEOREMA DEL VIRIALE

D

CENNI SULLA TEORIA QUANTISTICA DEI BUCHI NERI

INDICE

| | | |
|-----|---|----|
| D.1 | Soluzione di Schwarzschild delle equazioni di campo | 23 |
| D.2 | La radiazione di Hawking | 24 |

L'esistenza di regioni di spazio-tempo *dalle* quali è preclusa la trasmissione di ogni genere di segnale o informazione verso un possibile osservatore esterno è una conseguenza deducibile nell'ambito di una teoria classica della gravitazione ed in ultima analisi essa può essere fatta discendere dall'essere l'interazione gravitazionale sempre attrattiva, perlomeno in situazioni ordinarie. Per designare siffatte regioni di universo, inaccessibili all'osservazione, il fisico americano John A. Wheeler ha coniato, nell'autunno del 1967, il termine, all'epoca quanto mai appropriato, di *buco nero*.

Modelli di buchi neri, messi a punto nell'ultimo trentennio tenendo conto di taluni effetti di natura genuinamente quantistica, paiono tuttavia suggerire l'eventualità che lo scenario classico poc'anzi tratteggiato possa non essere considerato del tutto corretto. Già nel 1974 Stephen Hawking, compiendo un'analisi del comportamento della materia in prossimità di un buco nero alla luce di certe considerazioni derivabili nell'ambito delle teorie quantistiche dei campi, dedusse per via teorica come i buchi neri vadano incontro ad emissione termica.

Per ragioni che saranno meglio analizzate nel seguito, una verifica operativa del fatto che i buchi neri siano soggetti ad irraggiamento cade oltre le effettive possibilità di sperimentazione, e pertanto l'ipotesi che i buchi neri emettano non è, almeno attualmente, suscettibile di alcuna conferma empirica diretta. La discussione in merito, che ad oggi non ha conosciuto una risposta in ogni modo definitiva, si inserisce nel quadro più ampio dell'elaborazione di una teoria coerente della gravitazione su scala quantistica capace di risolvere l'incompatibilità tra due delle massime formulazioni teoriche del Novecento: la meccanica quantistica e la teoria generale della relatività. Una simile impresa, lungi dall'essere stata condotta a termine con successo, rappresenta quasi certamente una delle frontiere più ambite della fisica di questo secolo.

D.1 SOLUZIONE DI SCHWARZSCHILD DELLE EQUAZIONI DI CAMPO

Argomenti a sostegno della tesi circa la presenza nell'Universo di regioni dalle quali neanche i segnali luminosi possono evadere, confinati indefinitamente entro le medesime dagli intensi campi gravitazionali in gioco, possono in qualche modo farsi risalire, nell'ambito della legge newtoniana di gravitazione universale, ai lavori pionieristici che John Mitchell (1724-1793) e Pierre Simon de Laplace (1749-1827) diedero alla luce sul finire del Settecento.

È tuttavia solo con l'elaborazione, ad opera di Albert Einstein nel 1915, di una teoria generalizzata della gravitazione (la cosiddetta relatività generale), atta a descrivere in maniera precisa, e per quanto se ne sa, fondamentalmente corretta la propagazione della radiazione elettromagnetica in regimi a gravità forte, che si ebbero a disposizione gli strumenti teorici e un apparato matematico necessari ad una accurata analisi dei buchi neri. A pochi mesi dall'originario lavoro di Einstein sulla relatività generale, l'astronomo Karl Schwarzschild per primo ricavò una soluzione delle equazioni

di campo della nuova teoria (le cosiddette equazioni di Einstein), soluzione che è da considerarsi

D.2 LA RADIAZIONE DI HAWKING

BIBLIOGRAFIA

BERMAN, G. N.

- 1965 *A Collection of Problems on a Course of Mathematical Analysis*, Translated by D. E. Brown; translation edited by I. N. Sneddon, Pergamon Press LTD., Oxford.

DOLCHER, MARIO

- 1991 *Elementi di Analisi Matematica*, Lint, Trieste, ISBN: 88-85083-59-5.

RUDIN, WALTER

- 1976 *Principles of Mathematical Analysis*, 3^a ed., McGraw-Hill, Boston, ISBN: 0-07-085613-3.

SPIVAK, MICHAEL

- 1980 *Calculus*, 2^a ed., Publish or Perish, Inc, Berkeley, CA., ISBN: 0-914098-77-2.

