Calcolo Numerico - Laurea in Matematica, a.a. 2021-2022
Esercizi di Laboratorio del 29/11/2021

1. Problema ai minimi quadrati. È dato il problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 10 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \mathbf{1}.$$

i) Usa la fattorizzazione QR di Householder costruita nella precedente esercitazione, per la risoluzione del problema ai minimi quadrati. In particolare:
- Copia la funzione `QR_house.m` rinominandola `x = minquad_house(A,b)`;
- Nella nuova funzione, modifica l'iterazione in modo da aggiornare anche il vettore `b`, **senza** aggiornare `U`, ottenendo direttamente $\hat{\mathtt{b}} = \mathtt{Q}^{\mathtt{T}}\mathtt{b}$;
- Sapendo che $R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, determina $\mathtt{x} = \mathtt{R_1}^{-1}\mathtt{b1}$, dove `b1` è il primo blocco del vettore $\hat{b}$, ottenuto durante l'iterazione;

ii) Scrivi una funzione `x = minquad_chol(A,b)` che usa la decomposizione di Cholesky $A^TA = LL^T$ per risolvere il problema mediante l'equazione normale $(A^TA)x = A^Tb$; (all'interno, usa la funzione matlab `L = chol(M,'lower');` per determinare il fattore di Cholesky per una matrice M, ed usa "backslash" per risolvere con i due sistemi triangolari. Se disponibili, puoi usare i tuoi risolutori triangolari superiore/inferiore)
Confronta le soluzioni ottenute con QR e con l'equazione normale, calcolando la norma relativa della loro differenza.

iii) Considera i dati

$$A_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}; \qquad b = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^3.$$

Per $\delta = 1e-3, 1e-4, 1e-5, 1e-6, 1e-7, 1e-8, 1e-9$ (implementa con un ciclo) scrivi uno script che confronta le soluzioni ottenute con `minquad_chol` e `minquad_house`, con quella ottenuta con il comando `x =` $A_\delta\backslash$ `b`, riportando su un grafico gli errori relativi nei due casi al variare di δ, cioè

$$\frac{\|x^* - x_{house}\|}{\|x^*\|}, \qquad \frac{\|x^* - x_{chol}\|}{\|x^*\|}.$$