Calcolo Numerico - Laurea in Matematica, a.a. 2021-2022
Esercizi di Laboratorio del 28/04/2022

Esercizio n.1. **Approssimazione numerica di un integrale del tipo:** $\int_a^b f(x)dx$.

Nello studio di camere a raggi infrarossi, il calcolo dell'energia emessa nello spettro (infrarosso) da un corpo nero per certe lunghezze d'onda, richiede l'approssimazione del seguente integrale

$$E(T) = 2.39 \cdot 10^{-11} \int_a^b \frac{1}{x^5(e^{1.432/(Tx)} - 1)} dx,$$

dove $x$ è la lunghezza d'onda ($a = 3e-4, b = 14e-4$), $T$ è la temperatura ($T = 213$ gradi Kelvin) del corpo nero.

**Attenzione:** il fattore $2.39 \cdot 10^{-11}$ è importante, non va escluso!!

a) Fai il grafico della funzione integranda nell'intervallo considerato (includi la costante).

b) Approssima numericamente tale integrale con le formule dei rettangoli, trapezi e di Cavalieri-Simpson[1]. Confronta l'accuratezza, sapendo che $E(T) \approx 0.020690855481654$.

Esercizio n.2. **Approssimazione numerica mediante formule composite.**

1. Scrivi una funzione `I1m=TrapeziComp(a,b,m,fun)` che implementi la formula composita dei trapezi, per $H = \frac{b-a}{m}$,

$$\mathcal{I}_{1,m}(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) = H \left( \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2} f(x_m) \right)$$

2. Al crescere di $m$, stima con $\mathcal{I}_{1,m}$ il valore dell'integrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_0^{2\pi} x e^{-x} \cos 2x \, \mathrm{dx} = \frac{1}{25}(3(e^{-2\pi} - 1) - 10\pi e^{-2\pi})$$

3. Stima numericamente l'ordine di convergenza al crescere di $m = 2^j$, $j = 1, 2, \ldots$

4. Rifai i punti 2. e 3. con la formula di Cavalieri-Simpson, e confronta i risultati, dove

$$\mathcal{I}_{2,m}(f) = \frac{H}{6} \left( f(x_0) + 2 \sum_{k\, pari} f(x_k) + 4 \sum_{k\, disp} f(x_k) + f(x_{2m}) \right).$$

Esercizio n.3. **Proprietà di regolarità ed integrazione.**

Confronta graficamente la convergenza delle formule composite dei trapezi e di Cavalieri-Simpson (codici del precedente esercizio) al crescere di $m$, per l'approssimazione dell'integrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_0^1 \sqrt{x} \, \mathrm{dx}$$

[1] Sia $x_0 = (a+b)/2$. Formula dei rettangoli: $\mathcal{I}_0 = (b-a)f(x_0)$. Formula dei trapezi: $\mathcal{I}_1 = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$. Formula di Simpson: $\mathcal{I}_2 = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(x_0) + f(b))$.

(con $m$ sull'asse delle ascisse, e l'errore di ognuno dei due metodi su quello delle ordinate). Valuta la velocità di convergenza e commenta.

Esercizio n.4 (facoltativo). **Formule di quadratura come strumento**
Considera la funzione

$$f(x) = \int_0^x t^2 \cos(t) \sin(t) \mathrm{d}t, \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

(Approssima il valore $f(x)$ per un dato $x$ mediante una formula di quadratura composita di grado 2, con almeno 10 intervalli).

Per $n+1$ nodi con $n \in \{4, 6, 8\}$, determina la spline cubica interpolante "not-a-knot" e sovrapponi il suo grafico a quello di $f$ in una stessa figura. Includi etichette, titolo e legenda.