Calcolo Numerico - Laurea in Matematica, a.a. 2021-2022
Esercizi di Laboratorio del 18/10/2021

Esercizi

1. Dato il sistema $Ux = y$ con $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore, la seguente iterazione determina x:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{u_{nn}} \\ x_k &= \frac{1}{u_{kk}}(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{k,j}x_j), \qquad k = n-1, \dots, 1 \end{aligned}$$

i) Implementa una funzione `x = RisolviTriangSup0(U,y);` che, dati U e y, calcola x.

Verifica la correttezza della soluzione calcolando la norma del residuo, `norm(y-U*x)`, usando i seguenti dati:

```
n=6; rng(1); U=triu(randn(n)); y=(-1).^(1:n)'
```

ii) Modifica la funzione del punto precedente, chiamandola `x = RisolviTriangSup(U,y);`, in cui la sommatoria in j viene sostituita dalla seguente operazione vettoriale: `u(k,k+1:n)*x(k+1:n)`.

2. Dato il sistema lineare $Ax = b$, il metodo di eliminazione di Gauss è dato dal seguente algoritmo

$$\begin{aligned} \text{Per} \quad & k = 1, \dots, n-1 \\ & m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad i = k+1, \dots, n \\ & a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \qquad i,j = k+1, \dots, n \\ & b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}, \qquad i = k+1, \dots, n \end{aligned}$$

Attenzione: la procedura non azzera esplicitamente gli elementi sotto la diagonale. Al termine la matrice U è contenuta nella parte superiore di A (estrarre la matrice triangolare superiore con `U = triu(A)`).

Scrivi una funzione Matlab `[x]=Gauss(A,b);` che faccia le seguenti operazioni:

* Implementazione del metodo di eliminazione di Gauss per calcolare i dati del sistema trasformato $A^{(n)}x = b^{(n)}$, con $A^{(n)}$ triangolare superiore;

* Chiamata a `RisolviTriangSup` per la risoluzione del sistema triangolare superiore $A^{(n)}x = b^{(n)}$.

Per testare la funzione, costruisci uno **script** che, dato il sistema lineare

$$Ax = b, \quad A = \begin{bmatrix} -2.3 & 4 & -1.5 & -1 \\ 4 & -9.2 & 0.9 & 5 \\ -4 & 5 & -5 & 5.2 \\ -8 & 8 & -13.4 & 20 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

faccia quanto segue:

1. Risolve il sistema mediante chiamata alla funzione `Gauss.m`

2. Sapendo che $x_{esatta} = A \setminus b$, verifica l'accuratezza della soluzione mediante: a) Calcolo della norma relativa del residuo, $\|r\|/\|b\|$, con $r = b - Ax$ (per la norma, usa la funzione Matlab `norm(r)`), b) Calcolo della norma relativa dell'errore, $\|x - x_{esatta}\|/\|x\|$. Fai un display di question valori come nella seguente tabella:

residuo	errore relativo
...	...

dove la prima riga si ottiene con: `disp([' residuo            errore relativo'])`