Calcolo Numerico - Laurea in Matematica, a.a. 2021-2022
Esercizi di Laboratorio del 24/03/2022

Suggerimento: scrivere uno script con tutti i comandi
Alcuni comandi utili da investigare in laboratorio: `fprintf`, `legend`, `axis`, `xlabel`, `ylabel`, **e "Property Editor" della figura**

ESERCIZIO 1. **L'esempio di Runge.** Considera la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, per $x \in [-5, 5]$.

1. Fai il grafico della funzione f per $x \in [-5, 5]$. Riprendendo il codice della precedente esercitazione, sovrapponi ad f il grafico del polinomio interpolatorio per $n = 5, 9, 10, 11$ su nodi equispaziati e commenta il comportamento su tutto l'intervallo $[-5, 5]$.

2. Al variare di n, usa i seguenti nodi di Chebyshev come nodi di interpolazione:
$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\widehat{x}_k^{(n)}, \quad \widehat{x}_k^{(n)} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, \ldots, n$$
(usa `xcap=cos((2*(0:n)+1)./(2*n+2)*pi);`). Riporta su uno stesso plot il grafico di f e del polinomio interpolatorio sui nodi $\{x_k\}$, $n = 5, 10, 15$. Stima l'errore E_n e fai un display del risultato al variare di n

n	E_n
$\vdots$	$\vdots$

3. Per $n = 11$, sovrapponi il grafico dell'errore $f(x) - p_n^{(I)}(x)$, $x \in [a, b]$ dove $p_n^{(I)}$ è il polinomio del punto 1), e dell'errore $f(x) - p_n^{(C)}(x)$, $x \in [a, b]$ dove $p_n^{(C)}$ è il polinomio del punto 2). Aumentare eventualemente il valore di n per valutare le differenze dei due errori.

ESERCIZIO 2. **Interpolazione polinomiale composita.** Crea lo *handle* per la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{100}} + \frac{1}{\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 + \frac{4}{100}} - 6, \qquad \text{per} \quad x \in [0, 2]$$
(corrisponde alla funzione predefinita `humps` in Matlab). Fai il grafico usando `fplot(f,[0,2],'*-')`.

1. **Grafico di polinomi compositi al variare del grado.**
Per $\ell = 1, 2, 3$, determina il polinomio composito $P_h^{(\ell)}$ di grado ℓ come segue:
i) Definisci $k = 10$ sottointervalli $[x_0, x_1], \ldots, [x_{k-1}, x_k]$;
ii) Su ogni sottointervallo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$, usa la funzione[1] `get_polyn` per determinare il polinomio interpolante di grado ℓ (pensa ad un modo per tenere in memoria tutti i coefficienti ottenuti);
iii) Riporta il grafico di ogni polinomio locale sulla stessa figura di quello di f.

2. **Studio dell'ordine di convergenza.** Sia h la lunghezza di ogni sottointervallo, $h = x_{j+1} - x_j$. È noto che
$$\|f - P_h^{(\ell)}\|_\infty \approx Ch^p.$$
Fissiamo il polinomio composito $P_h^{(2)}$ di ordine 2.
i) Per $k = 1, 2, 3, ...$, costruisci una successione di sottointervalli in modo che $h = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
ii) Stima l'errore $\|f - P_h^{(2)}\|_\infty$ sull'intero intervallo $[0, 2]$. Mediante il confronto di errori successivi, stima l'ordine di convergenza asintotica dell'approssimazione, fornendo come "display" durante il run i valori per la seguente tabella:

[1] Vedi precedente lab, oppure la funzione Matlab `polyfit`.

h	$\|f - P_h^{(2)}\|_\infty$	p
0.5		
0.25		
$\vdots$		

dove p è una stima dell'ordine di convergenza[2] . Osserva sperimentalmente che $p \to \ell + 1$ per $h \to 0$. Posto err$\approx \|f - P_h^{(2)}\|_\infty$, per la visualizzazione dei risultati usa `fprintf('%g %g %g \n',h,err,p)`

Esercizio 3 (Facoltativo) **Approssimazione della funzione di Runge mediante interpolazione composita.**

Ripeti il punto due dell'esercizio 2 per la funzione di Runge, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, per $x \in [-5, 5]$. Usa polinomi compositi di grado $\ell = 1$ e $\ell = 2$, al variare di h, con nodi interpolanti equispaziati.

Esercizio 4. (Facoltativo) **Ancora sui nodi di Chebyshev.** Considera l'intervallo $[-1, 1]$. Per $n = 5, 10$ considera l'insieme $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dei nodi equispaziati, e l'insieme $\{\widehat{x}_0, \widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n\}$ dei nodi di Chebyshev.

1. Fai il grafico dei polinomi nodali:

$$\omega_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t - x_k), \qquad \widehat{\omega}_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t - \widehat{x}_k),$$

   Suggerimento: Posto `x` il vettore colonna dei nodi, ed `t` il vettore colonna dei punti in cui si vuole valutare il polinomio nodale, definisci lo handle per il polinomio nodale:

```
w=@(t,x,N,n1)( prod(t*ones(1,n1)-ones(N,1)*x',2));
```

   Cosicchè per esempio, per `x` (di dimensione `n1`$=n+1$) e `t` (di dimensione `N`) definiti in precedenza, `w(t,x,100,6)` valuta il polinomio nei punti del vettore colonna `t` di dimensione $N = 100$, per $n = 5$, con nodi di interpolazione le $n + 1$ componenti del vettore colonna `x`.

2. Stima $\max_{t\in[-1,1]} |\omega_n(x)|$ e $\max_{t\in[-1,1]} |\widehat{\omega}_n(x)|$ e confronta i risultati.

Esercizio 5. (Facoltativo)

Fai il grafico dei polinomi di base di Lagrange per $n = 10$ con nodi equispaziati in $[-5, 5]$. (usa uno handle simile a quello del precedente esercizio)

In un altro grafico, fai lo stesso tipo di grafico ma con nodi di Chebyshev.

[2]Ricorda che

$$\frac{\|f - P_{\frac{h}{2}}^{(2)}\|_\infty}{\|f - P_h^{(2)}\|_\infty} \approx \frac{C\left(\frac{h}{2}\right)^p}{Ch^p} = \left(\frac{1}{2}\right)^p, \quad \text{cosicchè} \quad p = \frac{1}{\log(1/2)} \log\left(\frac{\|f - P_{\frac{h}{2}}^{(2)}\|_\infty}{\|f - P_h^{(2)}\|_\infty}\right).$$