Calcolo Numerico - Laurea in Matematica, a.a. 2021-2022
Esercizi di Laboratorio del 25/10/2021

1. **L'algoritmo di Thomas**. È dato il sistema lineare $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ con

$$\mathbf{A} = \frac{(n+1)^2}{4\pi^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$\mathbf{f}_j = \sin(x_j),\ x_j = 0 + 2j\pi/(n+1),\ j = 1, \ldots, n$ (nodi interni), con $\mathbf{A}$ tridiagonale e simmetrica.

1.1) Per n fissato, costruisci $\mathbf{f}$ ed $\mathbf{A}$ mediante la seguente funzione:

```
function [A,f]=creamatrice(n)
%function [A,f]=creamatrice(n)
%
% determino i valori in x (n nodi interni per n+2 nodi totali, per n+1 intervalli)
  x=linspace(0,2*pi,n+2);  x=x(2:n+1,1);
% genero il termine noto
  f=sin(x);
% genero la matrice dei coefficienti
  A=(diag(2*ones(n,1))+diag(-ones(n-1,1),1)+diag(-ones(n-1,1),-1));
  A=( (n+1)^2/(4*pi^2) )*A;
end
```

Nota l'uso di `diag` nei tre casi.

1.2) Implementa l'algoritmo di Thomas (funzione `u = Thomas(A,f);`), ricordando i seguenti passaggi:

- Per determinare gli elementi di L ed U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ddots \\ \beta_2 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \beta_n & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix},$$

  l'algoritmo di Thomas procede come segue
  ($a_i, b_i, c_i,\ i = 1, \ldots, n$ sono gli elementi di A: `a = diag(A); b=diag(A,-1); c = diag(A,1);`).

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}, \qquad i = 2, \ldots, n$$

  ATTENZIONE: gli indici del vettore `b` sono sfasati di uno rispetto agli indici di β_i.

- Per risolvere i sistemi $Ly = \mathbf{f}$ ed $U\mathbf{u} = y$ in cascata, si procede quindi con:

$$y_1 = \mathbf{f}_1, \quad y_i = \mathbf{f}_i - \beta_i y_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\mathbf{u}_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad \mathbf{u}_i = (y_i - c_i \mathbf{u}_{i+1})/\alpha_i, \quad i = n-1, \dots, 1$$

Controlla la correttezza della soluzione per $n = 10$, calcolando la norma del residuo $\mathbf{r} := \mathbf{f} - \mathbf{Au}$.

2. **La formula di Sherman-Morrison.** Per A ed $\mathbf{f}$ del precedente esercizio, e dato il sistema $B\mathbf{u} = \mathbf{f}$, dove B è uguale ad A, tranne la prima colonna, che è data da $B(i, 1) = (n-1)^2/(4\pi^2)$, $i = 1, \dots n$.

   i) Determina esplicitamente w, v in modo che valga $B = A + wv^T$.

   ii) Per $n = 100$, scrivi uno script (chiamalo `SM.m`) per una procedura che risolva il sistema $B\mathbf{u} = \mathbf{f}$, sfruttando in modo opportuno la seguente formula di Sherman-Morrison:

$$(A + wv^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}w(1 + v^T A^{-1} w)^{-1} v^T A^{-1},$$

   in modo da dover solo risolvere sistemi lineari con A, mediante l'algoritmo di Thomas del procedente esercizio.

3. Facoltativo. **La formula di Sherman-Morrison-Woodbury.**

   È dato il sistema $C\mathbf{u} = \mathbf{f}$ dove

$$C = A + WV^T, \quad W, V \in \mathbb{R}^{n \times s},$$

   i) Genera le matrici W, V con elementi random da una distribuzione uniforme, ed $s = 5$.

   ii) Per $n = 100$, scrivi uno script (chiamalo `SMW.m`) per una procedura che risolva il sistema $C\mathbf{u} = \mathbf{f}$, sfruttando in modo opportuno la seguente formula di Sherman-Morrison-Woodbory:

$$(A + WV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}W(I + V^T A^{-1} W)^{-1} V^T A^{-1},$$

   in modo da dover solo risolvere sistemi lineari con A, mediante l'algoritmo di Thomas del procedente esercizio, e più termini.

   In particolare, proponi una variante dell'algoritmo di Thomas che risolva i sistemi $AQ = W$ contemporaneamente, minimizzando il costo computazionale.