Calcolo Numerico - Laurea in Matematica, a.a. 2021-2022
Esercizi di Laboratorio del 14/12/2021

1. Scrivi una funzione `[x,lambda]=potenze(A,x0,maxit,tol);` che implementi il metodo delle potenze:

   i) Fissato $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ di norma unitaria, e $y = Ax^{(0)}$ (*)

   Per $i = 0, 1, 2, \dots,$ maxit
   $\lambda^{(i)} = (x^{(i)})^H y$
   Visualizza $[i, \|r^{(i)}\|, |\lambda^{(i)}|]$
   Se $\frac{\|r^{(i)}\|}{|\lambda^{(i)}|} <$ `tol` Stop
   $x^{(i+1)} = y/\|y\|$
   $y = Ax^{(i+1)}$ (*)

   End

   per l'approssimazione dell'autovalore dominante $\lambda_1$ di una matrice $A$. Verifica la funzione `potenze` sulla matrice `A` $=$ `Q` $*$ `diag(1 : 10)/Q`; con `Q` $=$ `randn(10,10)`;, dove $\text{spec}(A) = \{1, 2, \dots, 10\}$ (usa inoltre `maxit=500, tol=1e-8, x0=rand(n,1)`, con `x0` normalizzato).

   ii) Modificando opportunamente la funzione `potenze`, riporta su uno stesso grafico (Figura 1) la storia della convergenza dell'errore negli autovalori, $e^{(i)} := |\lambda^{(i)} - \lambda_1|$ (qui $\lambda_1 = 10$), ed anche $|\lambda_2/\lambda_1|^i$, per $i = 1, 2, \dots$. Aggiungi titolo, etichette e legenda. Commenta.

2. **Apri una nuova figura, Figura 2.** Considera la seguente matrice, modifica della precedente,

   `Asim = Qor * diag(1:10) * Qor';` con `Qor = orth(Q);`

   Osserva che gli autovalori sono gli stessi, ma che `Asim` è simmetrica. Usa la precedente funzione `potenze` con questi dati, e confronta il grafico della convergenza dell'errore con quello del punto precedente. Spiega il fenomeno.

3. Crea la funzione `ITpotenze` che, mediante la semplice sostituzione della riga (*) nell'algoritmo precedente con $y^{(k+1)} = (A - \mu I)^{-1}x^{(k)}$, implementa l'algoritmo delle potenze inverse traslate. In particolare: **Implementa il metodo in modo che la matrice $(A - \mu I)$ venga fattorizzata una sola volta all'inizio, e durante l'iterazione vengano risolti due sistemi triangolari.**

   i) Verifica `ITpotenze` sulla matrice $A$ nonsimmetrica al punto 1 per l'approssimazione dell'autovalore più piccolo $\lambda_n = 1$ ($\mu = 0$). Riporta i risultati in Figura 3.

   ii) Analogamente, per $A$ nonsim al punto 1, approssima il secondo autovalore più piccolo $\lambda_{n-1} = 2$, per

   $$\mu = 1.55, 1.60, 1.65, \dots, 1.95.$$

   Riporta su un grafico (Figura 4) il numero di iterazioni risultante (asse ordinate), al variare del rapporto $\frac{|\lambda_{n-1}-\mu|}{|\lambda_n-\mu|}$ (asse ascisse). Commenta. Assicurati che il metodo converga all'autovalore cercato!