Calcolo Numerico - Laurea in Matematica, a.a. 2021-2022
Esercizi di Laboratorio del 22/11/2021

1. Metodo di Gram-Schmidt per la fattorizzazione QR ridotta.

   i. Data $A = [a_1, \ldots, a_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n \geq m$, scrivi la funzione Matlab `[Q1,R1]=gram(A)`, che determina i fattori Q_1, R_1 tali che $A = Q_1 R_1$ con Q_1 avente colonne ortonormali ed R_1 triangolare superiore. A tal fine, ricorda che il metodo di Gram-Schmidt è dato da:

   Per $k = 1, \ldots, m$

   $$\widehat{q}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j (q_j^T a_k)$$

   $$q_k = \widehat{q}_k / \|\widehat{q}_k\|$$

   Nota: La funzione richiede un solo ciclo `for`.

   ii. Data la matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 10 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

   verifica che Q_1, R_1 soddisfino le condizioni richieste, con buona accuratezza: riporta su command windows i valori risultanti come nella seguente tabella:

$\|\|I - Q1^T Q1\|\|$	$\|A - Q1R1\|$	cond(A)	cond(R1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

   iii. Data la matrice

   $$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & -7 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 10 & -1 & 13 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

   modifica l'algoritmo precedente in modo che: 1) Sia in grado di rilevare che $\tilde{A}$ non ha rango massimo; 2) Non faccia breakdown ma riporti la mancanza di rango massimo in nella matrice R_1; 3) Porti a termine la fattorizzazione.

2. Fattorizzazione completa QR.

   i. Scrivi una funzione `[Q,R]=QR_house(A);` che implementi il seguente algoritmo per la fattorizzazione QR di una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n \geq m$, mediante trasformazioni di Householder: $P_m P_{m-1} \cdots P_1 A = R$

   $R = A$, $U = I_n$
   Per $k = 1, \ldots, m$
   $x = R_{k:n,k}$
   $\alpha = -\text{sign}(x_1)\|x\|$ (segno "-" per evitare cancellazioni..., sign(x_1) : `sign(x(1))`)
   Definisci: $v = x - \alpha e_1$, dove $e_1 = [1; 0; \ldots ; 0] \in \mathbb{R}^{n-k+1}$
   Definisci: $\beta = 2/(v^T v)$
   Applica la trasformazione: $R_{k:n,k:m} = R_{k:n,k:m} - \beta v(v^T R_{k:n,k:m})$
   Aggiorna il prodotto delle matrici ortogonali: $U_{k:n,1:n} = U_{k:n,1:n} - \beta v(v^T U_{k:n,1:n})$
   $Q = U^T$

   ii. Verifica la correttezza della funzione sulla matrice $A = \texttt{randn}(10, 6)$ come nel precedente esercizio.

3. (Esercizio extra, dopo aver studiato le rotazioni di Givens). Scrivi una funzione `[Q,R]=QR_givens(A);` che implementi la fattorizzazione QR mediante rotazioni di Givens, e controlla la correttezza con la seguente matrice di tipo Hessenberg superiore:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$