Politecnico di Milano

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Matematica
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Sull'esistenza di soluzioni locali di equazioni differenziali alle derivate parziali

Tesi di

Alessandro Pedone

Relatore:

Prof. Maurizio Grasselli ....

Candidato:

Alessandro Pedone ....

Sessione di Laurea Settembre 2024
Anno Accademico 2023/2024

Indice

Sommario

Prerequisiti
Struttura dei capitoli e senso della trattazione: dare uno sguardo di insieme ai teoremi più importanti per la teoria locale, nelle forme più generali possibile, per poi dare un focus successivo alle equazioni lineari dove si riescono ad enunciare con efficacia condizioni sufficienti (Holmgren) e condizioni necessarie (Hörmander).
NOTAZIONE MULTI-INDICE
Derivate parziali

$$D^{\alpha}(u)$$

$$D^{ke_i}(u) = \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} = \partial_{x_i}^k u$$

$$k = 1 \implies \partial_{x_i} u = u_{x_i}$$

Gradiente

$$Du = \nabla u = [u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}]$$

Matrice Hessiana

$$D^2 u = Hu = \begin{bmatrix} \nabla u_{x_1} \\ \vdots \\ \nabla u_{x_n} \end{bmatrix}$$

Proprietà fondamentali Leibniz...

Capitolo 1
Teorema di Cauchy-Kovalevski

Perché non Kovalevskaya Chi è K Cronologia delle dimostrazioni Abbreviato CK

1.1 Versione per EDO

Versione per EDO

1.2 Versione per EDP quasi-lineari

Versione per EDP quasi-lineari Rifacendoci a Evans, e quindi anche usando la notazione in esso presente, assumiamo che i coefficienti del sistema B_j e c abbiano come raggi di convergenza $r_{B_j} > 0$ e $r_c > 0$ di conseguenza per il Lemma nel capitolo 4.6.2 si osserva che affinché la maggiorazione valga è necessario che $r < \min\{\min_j\{r_{B_j}\}, r_c\}$. Consideriamo ora la funzione

$$\nu = \frac{r - s - \sqrt{(r-s)^2 - 2tCrmn}}{mn}$$

e ricordiamone alcune proprietà:

1. E' interessante perché essa alla conclusione della dimostrazione del teorema di CK permette di scrivere in forma compatta la soluzione del problema maggiorante nella seguente forma:

$$u = \nu(x_1 + \ldots + x_{n-1}, t)[1, \ldots, 1]^T$$

2. Essa è analitica in un intorno dell'origine, in particolare per $t < \frac{(r-s)^2}{2Crmn}$ e di conseguenza anche in $B_h(0,0)$ con $h = \frac{r}{8Cmn}$.

3. In $B_h(0,0)$ vale la condizione $s^2 + m\nu^2(s,t) < r^2$q

4. Unendo le ultime due condizioni si ottiene che la soluzione è maggiorante in

1.3 Versione per EDP non lineari

Versione per EDP non lineari Riscrivere l'equazione come un problema di evoluzione (vedi pdf)

1.4 Versione astratta

Versione astratta

1.5 Esempi

Dopo aver visto il teorema di Cauchy-Kovalevski in tutte le sue forme più note, si concentra ora lo sguardo su tre esempi importanti che aiutano a inquadrare meglio il ruolo che giocano le ipotesi e che limiti ha questo teorema.
Tale discussione risulta particolarmente di rilievo, poiché per molto tempo si ritenne ragionevole pensare che un'equazione differenziale con coefficienti piuttosto regolari, come ad esempio C^∞, dovesse avere almeno una soluzione. Questo, però, oltre al caso di analiticità trattato dal teorema oggetto del capitolo, in generale non accade.

Esempio 1 (**Lewy**)**.** Questo primo esempio è decisamente il più importante ed interessante tra quelli qui trattati, proprio perché permette di introdurre in modo più rigoroso il problema appena citato.
Nel 1957 Hans Lewy propose questo semplice controesempio, volto a mostrare come l'ipotesi di **analiticità** nel teorema di Cauchy-Kovalevki fosse cruciale, portando un caso di un operatore differenziale lineare con coefficienti analitici che necessita della presenza di una forzante anch'essa analitica per possedere delle soluzioni almeno C^1.
Ciò mostra come sia cruciale, non solo una discussione sulle condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali, ma anche una sulle condizioni necessarie. Infatti, come si vedrà nella sezione **??**, Hormander, matematico che contribuì ampiamente alla teoria delle equazioni lineari, rispose all'emersione di questo problema proprio con delle condizioni necessarie per l'esistenza di soluzioni locali (e quindi anche globali!) per equazioni lineari.
Preliminarmente si riportano qui sotto gli enunciati di due teoremi che torneranno utili nella discussione:

Formula di Green in $\mathbb{C}$ 1.5.1.

Ipotesi

$D \subseteq \mathbb{C}$ *dominio regolare*
$f : D \to \mathbb{C}$
$f \in H(\mathring{D})$

Tesi

$$\oint\limits_{\partial^+ D} f(z)\, dz = 2i \iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x+iy)\, dxdy$$

Principio di riflessione di Schwarz 1.5.2.

$$
\begin{array}{r|l}
\textit{Ipotesi} & \begin{array}{l} D \subseteq \mathbb{C} \textit{ simmetrico rispetto a } \mathbb{R} \\ f : D \to \mathbb{C} \\ f(\mathbb{R} \cap D) \subseteq \mathbb{R} \\ f \in H(\mathring{D}) \end{array} \\
\textit{Tesi} & f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in \mathring{D}
\end{array}
$$

Per entrare nel vivo dell'esempio, si definisce il seguente operatore:

$$L = D_x + iD_y - 2i(x + iy)D_t$$

che soddisfa le proprietà precedentemente enunciate e il cui comportamento peculiare emerge dal teorema che si enuncia di seguito.

Teorema 1.5.3.

$$
\begin{array}{r|l}
\textit{Ipotesi} & \begin{array}{l} f \textit{ funzione continua a valori reali che dipende solo da } t \\ u \in C^1 \ : \ Lu = f \textit{ in un intorno dell'origine} \end{array} \\
\textit{Tesi} & f \textit{ analitica in un intorno di } t = 0
\end{array}
$$

Dimostrazione: Innanzitutto si fissa un $R > 0$ tale che $\{(x, y, t) : x^2 + y^2 < R^2, |t| < R\}$ sia contenuto nell'intorno dell'origine delle ipotesi (ovviamente questo R esiste sempre) e si procede seguendo questi passi:

1. Si definisce la funzione:

$$V(t, s) = \int_{\gamma_r} u(x, y, t)\, dz \quad \text{con} \quad \begin{cases} t \in (-R, R) \\ r^2 = s \in [0, R^2) \\ \gamma_r = \partial^+ B_r(0, 0) \\ z = x + iy \end{cases}$$

2. Si ricerca una relazione tra V_s e V_t:

$$\begin{aligned}
V &= i \iint\limits_{B_r(0,0)} (u_x + iu_y)(x,y,t)\, dx\, dy && \text{per formula di Green} \\
&= i \int_0^r \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y)(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ t)\, \rho\, d\rho\, d\theta && \text{in coordinate polari} \\
V_r &= i \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y)(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ t)\, r\, d\theta && \text{derivando} \\
&= \int\limits_{\gamma_r} (u_x + iu_y)(x,y,t)\, r\, \frac{dz}{z} \\
V_s &= \frac{1}{2r} V_r = \int\limits_{\gamma_r} (u_x + iu_y)(x,y,t)\, \frac{dz}{2z} \\
&= \int\limits_{\gamma_r} u_t(x,y,t)\, dz + \int\limits_{\gamma_r} f(t)\, \frac{dz}{2z} && \text{usando } Lu = f \\
&= iV_t + \pi i f(t) && (1.1)
\end{aligned}$$

3. Si definiscono le funzioni:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$
$$U(t,s) = V(t,s) + \pi F(t)\ .$$

   e si osservano le seguenti proprietà di U vista come funzione di $w = t + is$:

   - si verifica che soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $U_t + iU_s = 2U_{\overline{z}} = 0$ utilizzando la relazione (1.1),
   - olomorfa per $(s,t) \in (0, R^2) \times (-R, R)$ per la proprietà precedente,
   - continua per $(s,t) \in [0, R^2) \times (-R, R)$ perché lo è V,
   - $U(0,t) = \pi F(t)$ per $t \in (-R, R)$, ovvero assume valori reali sull'asse reale.

4. Si prolunga analiticamente U in un intorno dell'origine, infatti, date le proprietà appena osservate, valgono le ipotesi del principio di riflessione di Schwarz che ci permette di definire U per $s \in (-R^2, 0)$ con la seguente formula:

$$U(t,s) = \overline{U(t,-s)}.$$

5. Si conclude il ragionamento notando che, se il prolungamento di U è analitico in un intorno dell'origine, lo deve essere anche $U(t,0) = \pi F(t)$ e anche $f = F'$.

QED

Generalizzazione. Il teorema appena trattato si presta in realtà anche a una generalizzazione interessante e l'idea è la seguente: si cerca di mostrare che, nonostante la forma caratteristica di L non abbia punti singolari, è possibile scegliere una forzante $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ in modo tale che **ovunque** l'equazione differenziale $Lu = F$ non ammetta soluzioni.

Osservazione. con la notazione $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si indica l'insieme delle funzioni C^k del tipo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Prima di scendere nello specifico

- un insieme E è senza parte interna se $\mathring{E} = \emptyset$
- teorema della categoria di Baire per gli spazi metrici ci dice che gli spazi metrici completi sono tutti Spazi di Baire (in senso topologico)

si richiama l'enunciato

Teorema della categoria di Baire 1.5.4.

Ipotesi	(X, d) *spazio metrico completo* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi aperti densi in* X $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi chiusi senza parte interna*
Tesi 1	$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *è denso in* X
Tesi 2	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *è senza parte interna*

In particolare si è interessati a un'applicazione della contronominale della seconda tesi:

Corollario (argomento per assurdo di Baire) 1.5.5.

Ipotesi	(X, d) *spazio metrico completo* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi chiusi* $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$
Tesi	$\exists\, n \in N$ *tale che* $\mathring{E}_n \neq \emptyset$

Questo teorema infatti ha un'applicazione: dimostrare che uno spazio metrico completo è unione numerabile di insiemi mai densi porta a contraddizione
Si divide tutto in 4 passi:

1. traslare il problema del teorema precedente in modo da ricondursi al caso di un generico punto (x_0, y_0, t_0), usando come forzante la funzione $g(x, y, t) = f(t+2xy_0-2x_0y)$ e sfruttando l'invarianza dell'operatore L rispetto a $T(x, y, t) = (x-x_0, y-y_0, t-t_0-2xy_0+2x_0y)$, ovvero la validità della relazione: $L(u \circ T) = (Lu) \circ T$.

2. costruire la funzione F_ϵ
3. lemma tecnico su $E_{j,n}$
4. svolgere la dimostrazione sfruttando i punti precedenti

Servono i seguenti lemmi

Teorema 1.5.6.

Ipotesi	$f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$ $u \in C^1 \ : \ Lu(x,y,t) = f(t + 2xy_0 - 2x_0y)$ *in un intorno di* (x_0, y_0, t_0)
Tesi	f *analitica in un intorno di* $t = t_0$

Teorema 1.5.7.

Ipotesi	$\{(x_i, y_i, t_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *denso in* $\mathbb{R}^3$ $c_i = 2^{-i}e^{-\rho_i}$ *con* $\rho_i = \lvert x_i\rvert + \lvert y_i\rvert \quad \forall i \in \mathbb{N}$ $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *periodica e non analitica*
Tesi 1	$F_a(x,y,t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i c_i f'(t + 2xy_0 - 2x_0y)$ *converge uniformemente in* $\mathbb{R}^3$
Tesi 2	*lo stesso vale per le derivate formali* $D^\alpha F_a = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i c_i D^\alpha f'(t + 2xy_0 - 2x_0y)$

Osservazione. Prima di proseguire è utile soffermarsi brevemente su due questioni:

- l^∞ è una spazio di Banach se dotato della norma: $||b||_\infty = \sup_i |b_i|$ per ogni $b \in l^\infty$;
- f con le proprietà delle ipotesi esiste, per esempio la funzione

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n!\,x)}{(n!)^n}$$

  è definita da un serie puntualmente convergente e $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, inoltre è periodica di periodo 2π e si può dimostrare che essa non è analitica in nessun punto $x \in \mathbb{R}$. Sopratutto per quest'ultimo aspetto si veda [4] per maggiori dettagli.

Esempio 2 (**Kovalevski**)**.** Questo esempio, dovuto a Kovalevski stessa, è utile a comprendere più a fondo, in modo quanto più essenziale possibile, l'importanza, o meglio la necessità, di assumere che la superficie scelta per assegnare i dati di Cauchy sia **non-caratteristica** per l'equazione differenziale in osservazione.
Si consideri quindi il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in una dimensione:

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Osservazione. La condizione per u_x su Γ necessaria per completare il problema di Cauchy è già implicitamente imposta dall'equazione (1.3).

L'obiettivo che ci si pone è quello di dimostrare che non ammette soluzioni analitiche in un intorno dell'origine.

1. Per cominciare si osserva che in questo caso la superficie su cui sono stati assegnati i dati di Cauchy (1.2) è $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$. Essa in ogni punto ha come versore normale $(0,1)$ ed è, quindi, caratteristica per l'equazione (1.2), poiché

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha = a_{(2,0)} \boldsymbol{\nu}^{(2,0)} = 0.$$

2. Per assurdo si supponga di avere una soluzione del problema u analitica in un intorno dell'origine, ovvero:

$$u(x,t) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)} c(\alpha)\, x^{\alpha_1}\, t^{\alpha_2}, \quad c(\alpha) = \frac{D^\alpha u(0,0)}{\alpha!}$$

dove $|(x,t)| < r$ per qualche $r > 0$.

3. Si calcolano i valori dei coefficienti $c(2n,0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Per fare questo si sviluppa in serie di potenze centrata nell'origine la funzione del problema di Cauchy:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da questa serie si ottengono le seguenti relazioni:

$$D_x^{2n} u(0,0) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\, \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = (-1)^n (2n)!$$
$$D_x^{2n+1} u(0,0) = \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\, \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 0$$

dalle quali si ricava: $c(2n,0) = (-1)^n$ e $c(2n+1,0) = 0$.

4. Si calcolano i valori dei coefficienti $c(2n,n)$ e si dimostra che $c(2n,n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.
A questo scopo, invece, si sfrutta l'equazione (1.1) per ottenere la seguente relazione tra i coefficienti:

$$c(\alpha_1, \alpha_2+1) = \frac{(\alpha_1+2)(\alpha_1+1)}{(\alpha_2+1)}\, c(\alpha_1+2, \alpha_2). \tag{1.4}$$

E si utilizza, quindi, quest'ultima come segue:

$$\begin{aligned} c(2n,n) &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n}\, c(2n+2,n-1) && (1.4) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2n \\ \alpha_2 + 1 = n \end{cases} \\ &= \ldots = \frac{(2n+2n)\cdots(2n+1)}{n!}\, c(2n+2n,0) && \text{iterando su } n \\ &= \frac{(4n)!}{(2n)!\,n!}(-1)^{2n} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{64n}{e}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty && \text{per la formula di Stirling} \end{aligned}$$

5. Si completa il ragionamento in modo immediato osservando che $c(2n,n)\, x^{2n}\, t^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ $\forall (x,t) \neq (0,0)$, infatti ciò implica direttamente che la serie di potenze non converge in ogni punto diverso dall'origine e questo è assurdo.

Esempio 3 (**Hadamard**)**.** L'esempio che si propone ora, dovuto ad Hadamard, aiuta a capire un limite importante del teorema di Cauchy-Kovalevski, ovvero il fatto che esso non fornisca alcun controllo sulla **relazione** tra i dati di Cauchy e la forma della soluzione analitica,la quale potrebbe risultare instabile.
Per osservare ciò si considera il seguente problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due dimensioni al variare di n:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_y(x,0) &= n\sin(nx)e^{-\sqrt{n}} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.5}$$

L'obiettivo che ci si pone in questo caso è quello di mostrare come al crescere di n si verifica un blow-up della soluzione u_n del problema di Cauchy (1.5).

1. Il problema, come nell'esempio precedente, è assegnato su $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, che è naturalmente una superficie non caratteristica per l'equazione di Laplace (si noti infatti che essa è ellittica).

2. E' facile verificare che la funzione $u_n(x,y) = \sin(nx)\sinh(ny)e^{-\sqrt{n}}$ soddisfa il problema di Cauchy e che essa è analitica, per questo essa anche l'unica possibile con quest'ultima proprietà.

3. Si osserva, infine, come $\sinh(ny)e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Come conclusione di questa discussione è interessante osservare anche come la soluzione non dipenda con continuità dai dati. Infatti, considerando il problema di Cauchy per $n = \infty$, ovvero con dati $u(x,0) = u_y(x,0) = 0$, si nota immediatamente che l'unica soluzione analitica è $u \equiv 0$, la quale è profondamente diversa dal comportamento asintotico di u_n.

Bibliografia

[1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.

[2] Gerald B. Folland. *Introdution to Partial Differential Equations*. Princeston University Press, 1995.

[3] Lars Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Spinger-Verlag, 1963.

[4] Fritz John. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1982.

[5] François Trèves. *Basic Linear Partial Differntial Equations*. Amacademic Press, 1975.