Il teorema di Cauchy-Kowalevski e le sue conseguenze

Candidato: Alessandro Pedone,
Relatore: Prof. Maurizio Grasselli

Politecnico di Milano

24 settembre 2024

Indice

Sofya Vasilyevna Kovalevskaya (1850-1891)

Diamo per nota la figura storica di Augustin-Louis Cauchy.
Kowalevski è stata:

- una matematica russa allieva di Weierstrass
- la **prima donna** a conseguire un dottorato (3 tesi risalenti al 1875) e a ottenere una cattedra in Europa (in matematica)

Esistono diverse sue **rappresentazioni artistiche** sia in letteratura che nel cinema. Le più rilevanti sono:

- Una biografia accurata: *Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky* (1983), Don H. Kennedy
- Un racconto breve: *Too Much Happiness* (2009), Alice Munro

Domande guida

E' possibile che esista una soluzione analitica
a un sistema di EDP qualsiasi
con condizioni di Cauchy?

La risposta sarà affermativa, per questo ci chiediamo già:

- sotto quali ipotesi?
- la soluzione è unica?
- il problema è ben posto?
- quali conseguenze hanno risultati ottenuti?

Tipologie di equazioni (e operatori)

Equazioni di ordine k:

Lineare	$\sum_{\lvert\alpha\rvert\leq k} a_\alpha\, D^\alpha u = f$
Quasi-lineare	$\sum_{\lvert\alpha\rvert=k} a_\alpha(x, D^\beta u)\, D^\alpha u + a_0(x, D^\beta u) = f,$ $\lvert\beta\rvert < k$
Non lineare	$F(x, D^\alpha u) = 0, \quad \lvert\alpha\rvert \leq k$
In forma normale	$D_t^k u = G(x, D_t^j D_x^\alpha u), \quad \lvert\alpha\rvert + j \leq k,\, j < k$

Superfici caratteristiche per op. lineari

L operatore differenziale lineare.

Definizione 1.1

Forma caratteristica di L:
$\chi_L(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \quad \text{con} \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n$

Definizione 1.2

Varietà caratteristica di L in x:
$\mathrm{char}_x(L) = \{\xi \neq 0 : \chi_L(x,\xi) = 0\}$

Definizione 1.3

Γ superficie caratteristica per L in $x \iff \nu(x) \in \mathrm{char}_x(L)$

Osservazione

Nel caso di operatore del 1 ordine: $A = (a_1, \ldots, a_n)$ tangente a Γ.
Utile per generalizzazioni successive.

Significato

$$\xi \in \mathrm{char}_x(L)$$

in x L non è "propriamente" di ordine k nella direzione ξ.

$$\Gamma \text{ non caratteristica}$$

date su Γ $D^i_\nu u \, (i < k)$ di una soluzione u è possibile calcolare tutte le sue derivate parziali su Γ.

Op. quasi-lineari di ordine 1

- $\gamma(s) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ parametrizzazione locale di Γ
- $u = \phi$ su Γ dato di Cauchy

Definizione 1.4

Γ non caratteristica in $x_0 = g(s_0)$

$$\iff \det \left[\underbrace{\begin{matrix} D_{s_1}\gamma_1 & \cdots & D_{s_{n-1}}\gamma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{s_1}\gamma_n & \cdots & D_{s_{n-1}}\gamma_n \end{matrix}}_{\text{span del piano tangente}} \left| \begin{matrix} a_1(\gamma, \phi(\gamma)) \\ \vdots \\ a_n(\gamma, \phi(\gamma)) \end{matrix} \right. \right] (s_0) \neq 0$$

Metodo delle caratteristiche

I problemi seguenti sono **equivalenti**.

$$\text{EDP}: \begin{cases} \sum a_j(x,u) D_j u = b(x,u) \\ u = \phi \text{ su } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{EDO}: \begin{cases} D_t\, x = A(x,y)\ ^1 \\ D_t\, y = b(x,y) \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = \phi(x_0), \quad \forall x_0 \in \Gamma \end{cases}$$

Dove $y = u(x)$ e $A(x,y) = [a_1(x,y), \dots, a_n(x,y)]$.

[1] le soluzioni x vengono dette *curve caratteristiche*

Γ non caratteristica e altro $\implies$ esiste un'unica soluzione locale C^1

Problema di Cauchy

- Spesso utilizzato quando la superficie dei dati **non** è un bordo.
- Necessita anche le **derivate normali** $(D^i_\nu u)$ della soluzione sulla superficie per determinarla univocamente.
- Portano con sé il rischio di un problema **sovradeterminato** (buone per l'unicità e meno per l'esistenza della soluzione).

Problema di riferimento

Mappatura in $t = 0$

Superfici non caratteristiche in generale

Background

in quegli anni ci si concentrava sullo studio delle funzioni analitiche grazie al lavoro di Cauchy 1835-42 (analisi complessa), da qui segue quello di Kowalevski 70-74 l'esistenza e l'unicità di soluzioni locali (analitche/olomorfe) di equazioni differenziali ordinarie (che abbrevieremo con EDO da qui in poi) e di sistemi lineari del primo ordine, sfruttando il metodo dei maggioranti Kowalevski fornisce la prima risposta generale per quanto riguarda sistemi non lineari

Metodo dei maggioranti

Si basa sul teorema che garantisce che se $g_\alpha \geq |f_\alpha|$ e la serie con g_α come coefficienti converge allora lo fa anche la quella con coefficienti f_α

Schema dell'approccio

Seguendo l'ordine cronologico di scoperta procediamo per generalizzazioni successive

1. versione di base per EDO
2. versione per EDP quasi-lineari
3. generalizzazione per EDP non lineari

EDO

Teorema di unicità $f : A \times B \to \mathbb{C}^n$ olomorfa (A, B aperti)

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \forall x \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Se la soluzione esiste è unica

Teorema di esistenza locale con stima del raggio

Sketch della dimostrazione

EDP quasi-lineari

Forma particolare del sistema di interesse

DIMOSTRAZIONE: metodo delle caratteristiche e metodo dei maggioranti

1. si osserva come i coefficienti di una serie di potenze che risolve l'equazione devono essere dei polinomi a coefficienti non negativi
2. $A_i^* >> A_i, B^* >> B \implies u^* >> u$
3. si scelgono A_i^*, B^* in modo tale da poter calcolare esplicitamente una soluzione analitica con il metodo delle caratteristiche

EDP non lineari

Forma particolare del sistema di interesse

EDP non lineari

Trasformazione nel sistema quasi-lineare precedente (che è il grande merito di Kowalevski)

Esempio di Lewy

Importanza della richiesta di analiticità generalizzazione esempio di Lewy, enunciato

Teorema 3.1

Ipotesi	$A \subseteq \mathbb{R}^3$ *aperto*
Tesi	$\exists\, F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \;:\; \nexists\, u \in C^1(A, \mathbb{R})$ *tale che* $\begin{cases} Lu = \\ u_x, u \\ la\ co \end{cases}$

Idea della dimostrazione:

1. traslare il problema del teorema precedente in modo da ricondursi al caso di un generico punto (x_0, y_0, t_0), usando come forzante la funzione $g(x, y, t) = f(t - 2xy_0 + 2x_0y)$;
2. costruire con una serie una funzione $S_a \in C^\infty$ per ogni $a \in l^\infty$;
3. costruire degli insiemi $E_{j,n} \subseteq l^\infty$ chiusi e senza parte interna sfruttando S_a e il teorema di Ascoli-Arzelà;
4. concludere la dimostrazione del nuovo teorema utilizzando i lemmi appena citati per ricavare, con un ragionamento per assurdo, l'uguaglianza $l^\infty = \bigcup E_{j,n}$, grazie alla quale si può applicare l'argomento di Baire.

Esempio di Kowalevski

Importanza superfici non caratteristiche

Esempio di Hadamard

Nessuna garanzia della stabilità della soluzione

Versione classica

Enunciato, può essere visto come corollario di un teorema più astratto.

Versione astratta

Premessa

$$E_s = H(\overline{\mathcal{O}_s}; \mathbb{C}^m)$$

con $s \in [0,1]$, costante C

Enunciato

Dimostrazione esistenza

Dimostrazione unicità

Versioni "olomorfe"

Si può rifare tutto con t variabile complessa e i teoremi non cambiano. Lo stesso vale anche per la versione invariante normale.

Le conseguenze di questo teorema si osservano in vari campi, tra cui i principali sono:

- teoria delle equazioni differenziali
- fisica matematica: emersione di numerose domande (cosa succede nella realtà se esiste una sol. analitica locale?)
- geometria differenziale
- teoria economica

Impatto sulla teoria delle equazioni differenziali:

- confutare la congettura di Weierstrass (ogni funzione è
- teorema di Holmgren
- Treves e Nierenberg per la ricerca di condizioni necessarie e/o sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali
- Hormander la teoria degli operatori differenziali lineari (con particolare attenzione alla condizioni necessarie)

Teorema di Holmgren

Enunciato astratto, si dimostra utilizzando la versione astratta di CK

Enunciato concreto

Sketch della dimostrazione

Teorema di Cartan-Kähler

Per quanto riguarda geometria differenziale e teoria economica abbiamo un risultato che seguire dal teorema di CK
Enunciato e applicazione al campo economico

Nonostante la ricerca condotta in quegli anni

- non fosse guidata da applicazioni immediate
- portò a risultati deludenti rispetto alle aspettative di Cauchy e Weierstrass

ha avuto un impatto gigantesco grazie alla comprensione delle soluzioni di sistemi di EDP che ci ha permesso di raggiungere.

Era una vita – gli costava dirlo, come ebbe ad ammettere, perché si era sempre guardato dagli eccessivi entusiasmi –, era una vita che aspettava di veder entrare nel suo studio un allievo del genere. Un allievo in grado di lanciargli una sfida assoluta, di non seguire soltanto il percorso spericolato della sua mente, ma se possibile di spiccare un volo più alto.

— Alice Munro, *Too Much Happiness*