Il teorema di Cauchy-Kowalevski e le sue conseguenze

Candidato: Alessandro Pedone,
Relatore: Prof. Maurizio Grasselli

Politecnico di Milano

24 settembre 2024

Indice

Sofya Vasilyevna Kovalevskaya (1850-1891)

Diamo per nota la figura storica di Augustin-Louis Cauchy.
Kowalevski è stata:

- una matematica russa allieva di Weierstrass
- la **prima donna** a conseguire un dottorato (3 tesi risalenti al 1875) e a ottenere una cattedra in Europa (in matematica)

Esistono diverse sue **rappresentazioni artistiche** sia in letteratura che nel cinema. Le più rilevanti sono:

- Una biografia accurata: *Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky* (1983), Don H. Kennedy
- Un racconto breve: *Too Much Happiness* (2009), Alice Munro

Domande guida

E' possibile che esista una soluzione analitica
a un sistema di EDP
con condizioni di Cauchy?

La risposta sarà affermativa, per questo ci chiediamo già:

- sotto quali ipotesi?
- la soluzione è unica?
- il problema è ben posto?
- quali conseguenze hanno risultati ottenuti?

Tipologie di equazioni (e operatori)

Equazioni di ordine k:

Lineare	$\sum_{\vert\alpha\vert\leq k} a_\alpha\, D^\alpha u = f$
Quasi-lineare	$\sum_{\vert\alpha\vert=k} a_\alpha(x, D^\beta u)\, D^\alpha u + a_0(x, D^\beta u) = f,$ $\vert\beta\vert < k$
Non lineare	$F(x, D^\alpha u) = 0, \quad \vert\alpha\vert \leq k$
In forma normale	$D_t^k u = G(x, D_x^\alpha D_t^j u), \quad \vert\alpha\vert + j \leq k,\ j < k$

Strumenti

- Superfici caratteristiche
- Metodo delle caratteristiche
- Problemi di Cauchy
- Serie di potenze

Superfici caratteristiche per op. lineari

L operatore differenziale lineare.

Definizione 2.1

Forma caratteristica di L:
$\chi_L(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \quad \text{con} \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n$

Definizione 2.2

Varietà caratteristica di L in x:
$\mathrm{char}_x(L) = \{\xi \neq 0 : \chi_L(x,\xi) = 0\}$

Definizione 2.3

Γ superficie caratteristica per L in $x \iff \nu(x) \in \mathrm{char}_x(L)$

Osservazione

Caso di operatore del 1° ordine: $A = (a_1, \ldots, a_n)$ tangente a Γ.
Utile per generalizzazioni successive.

Significato

$$\xi \in \mathrm{char}_x(L)$$

in x L non è "propriamente" di ordine k nella direzione ξ.

$$\Gamma \text{ non caratteristica}$$

date su Γ $D^i_\nu u\,(i < k)$ di una soluzione u è possibile calcolare tutte le sue derivate parziali su Γ.

Op. quasi-lineari 1° ordine

- $\gamma(s) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ parametrizzazione locale di Γ
- $u = \phi$ su Γ dato di Cauchy

Definizione 2.4

Γ non caratteristica in $x_0 = g(s_0)$

$$\iff \det \left[\underbrace{\begin{matrix} D_{s_1}\gamma_1 & \cdots & D_{s_{n-1}}\gamma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{s_1}\gamma_n & \cdots & D_{s_{n-1}}\gamma_n \end{matrix}}_{\text{span del piano tangente}} \left| \begin{matrix} a_1(\gamma, \phi(\gamma)) \\ \vdots \\ a_n(\gamma, \phi(\gamma)) \end{matrix} \right. \right] (s_0) \neq 0$$

Metodo delle caratteristiche

I problemi seguenti [1] sono **equivalenti**.

$$\text{EDP}: \begin{cases} \sum a_j(x,u) D_{x_j} u = b(x,u) \\ u = \phi \text{ su } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{EDO}: \begin{cases} D_t\, x = A(x,y)^{\,2} \\ D_t\, y = b(x,y) \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = \phi(x_0), \quad \forall x_0 \in \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Dove $y = u(x)$ e $A(x,y) = [a_1(x,y), \ldots, a_n(x,y)]$.

[1] si può generalizzare al caso non lineare (1° ordine!)

[2] le soluzioni x vengono dette *curve caratteristiche*

Teorema 2.1

Ipotesi	Problema (1) a_j, b, ϕ, $\Gamma \in C^1$ Γ non caratteristica
Tesi	$\exists!$ soluzione C^1 in un intorno di Γ
Dim	sfruttando il teorema di esistenza e unicità locale per EDO

Problema di Cauchy

- Spesso utilizzato quando la superficie dei dati **non** è un bordo.
- Necessita anche le **derivate normali** ($D_\nu^j u$) della soluzione sulla superficie per determinarla univocamente.
- Portano con sé il rischio di un problema **sovradeterminato** (buone per l'unicità e meno per l'esistenza della soluzione).

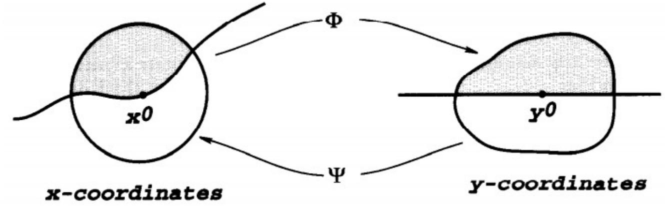
Problema generale

$$\begin{cases} F^*(x, D^\alpha u^*) = 0 & |\alpha| \leq k,\ F^* \text{ almeno } C^1 \\ D^j_\nu u^* = \phi^*_j & \text{su } \Gamma^* \text{ per } j < k \end{cases}$$

Mappatura in $t = 0$

Detta γ^* la parametrizz. locale di Γ^*, applichiamo la mappa:

$$\Phi(x) = \left[x_1 \quad \cdots \quad x_{n-1} \;\middle|\; x_n - \gamma^*(x_1, \ldots, x_{n-1})\right]$$



L. C. Evans, *Partial Differential Equations*

1. Selezioniamo una variabile privilegiata e chiamiamola "tempo":

$$
\begin{aligned}
t &\leftarrow x_n \\
x &\leftarrow (x_1, \ldots, x_{n-1})
\end{aligned}
$$

2. Chiamiamo $\Gamma = \{t = 0\}$.
3. Indichiamo le derivate nel modo seguente: $D_x^\alpha D_t^j u$.
4. Otteniamo il problema ($u^* = u(\Phi)$):

$$
\begin{cases}
F(x, t, D_x^\alpha D_t^j u) = 0 & |\alpha| + j \leq k \\
D_t^j u(x, 0) = \phi_j(x) & \text{per } j < k
\end{cases}
$$

Superfici non caratteristiche in generale

Definizione 2.5

Γ^* (o Γ) è non caratteristica $\iff$ l'equazione su Γ può essere riscritta in **forma normale** rispetto a t.

Osservazione

Si dimostra che è coerente con le definizioni precedenti.

Osservazione

- Caso lineare $\to$ condizione sui coefficienti.
- Caso non lineare $\to$ validità ipotesi teorema del Dini su F.

Serie di potenze notevole

Definizione 2.6

Funzione maggiorante:

$$\mathcal{M}_{Cr}(x) = \frac{Cr}{r - (x_1 + \ldots + x_n)}$$

Osservazione

Per il teorema multinomiale se $|x| < r/n$ si ha che

$$\frac{Cr}{r - (x_1 + \ldots + x_n)} = C \sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha!\, r^{|\alpha|}} x^{\alpha}.$$

Metodo dei maggioranti

Teorema 2.2 (utilità del maggiorante)

$$\begin{cases} g_\alpha \geq |f_\alpha| \\ \sum g_\alpha x^\alpha \text{ ha raggio di conv. } R \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \sum f_\alpha x^\alpha \\ \text{ha raggio almeno } R \end{array}$$

In questo caso si scrive: $\sum g_\alpha x^\alpha \gg \sum f_\alpha x^\alpha$.

Teorema 2.3 (costruzione del maggiorante)

$\sum f_\alpha x^\alpha$ ha raggio $R \implies \exists\, r < R$, $C > 0$ tali che

$$|f_\alpha| \leq C \frac{1}{r^{|\alpha|}} \leq C \frac{|\alpha|!}{\alpha!\, r^{|\alpha|}}$$

Schema dell'approccio

Seguendo l'ordine cronologico di scoperta procediamo per **generalizzazioni progressive**:

1. EDO
2. EDP quasi-lineari
3. EDP in forma normale

EDO

Teorema di unicità $f : A \times B \to \mathbb{C}^n$ olomorfa (A, B aperti)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \quad \forall x \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

Se la soluzione esiste è unica

Teorema di esistenza locale con stima del raggio

EDP quasi-lineari

Forma particolare del sistema di interesse

DIMOSTRAZIONE: metodo delle caratteristiche e metodo dei maggioranti

1. si osserva come i coefficienti di una serie di potenze che risolve l'equazione devono essere dei polinomi a coefficienti non negativi
2. $A_i^* \gg A_i, B^* \gg B \implies u^* \gg u$
3. si scelgono A_i^*, B^* in modo tale da poter calcolare esplicitamente una soluzione analitica con il metodo delle caratteristiche

Stima del raggio di convergenza

Ricordando la stima:

$$\widetilde{r} = \frac{1}{n-1}\,\frac{r}{8Cmn} \text{ con } C \geq \frac{1}{2}$$

Osserviamone l'andamento rispetto a r, sapendo che:

$$r < \min\{\textit{raggi di conv. dei coefficienti } a^i_{ml},\, b_m\}$$

$$C \geq \max \left\{ \begin{array}{c} \max\limits_{i,m,l,\alpha} \left| a^i_{ml}\, r^{|\alpha|} \right| \\ \max\limits_{m,\alpha} \left| b_m\, r^{|\alpha|} \right| \end{array} \right\}$$

EDP in forma normale

Teorema 3.1 (di equivalenza)

I due problemi seguenti sono equivalenti

$$\text{non lineare : } \begin{cases} D_t^k u = G(x, D_x^\alpha D_t^j u) \quad |\alpha| + j \leq k,\, j < k \\ D_t^j u = \phi_j \text{ su } \Gamma,\, j < k \end{cases}$$

$$\text{quasi-lineare : } \begin{cases} D_t\, y = \sum_{j=1}^{n-1} A_j(x,y) D_{x_j} y + B(x,y) \\ y(0) = \phi(x_0), \quad \forall x_0 \in \Gamma \end{cases}$$

Dimostrazione

1. Si costruisce il sistema in modo tale che $y_{\alpha j} = D_x^\alpha D_t^j u$

Le matrici A_j e B saranno quindi ricavabili dalle espressioni[3]:

$$
\begin{aligned}
D_t y_{\alpha j} =& y_{\alpha(j+1)} && |\alpha| + j < k \\
D_t y_{\alpha j} =& D_{x_i} y_{(\alpha - 1_i)(j+1)} && |\alpha| + j = k,\ j < k \\
D_t y_{0k} =& D_t G + \sum_{|\alpha|+j<k} D_{y_{\alpha j}} G y_{\alpha(j+1)} \\
& + \sum_{|\alpha|+j=k,\ j<k} D_{y_{\alpha j}} G D_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)}
\end{aligned}
$$

I dati di Cauchy saranno invece:

$$
\begin{aligned}
y_{\alpha j}(x,0) =& D_x^\alpha \phi_j(x) && j < k \\
y_{0k}(x,0) =& G\left(x, 0, D_x^\alpha \phi_j(x)\right) && |\alpha| + j \leq k,\ j < k
\end{aligned}
$$

[3] $i(\alpha) = \min_i i : \alpha \neq 0$

2 rimozione ϕ : $y(x,t) \leftarrow y(x,t) - \phi(x)$

3 rimozione t : si aggiunge la variabile $y^0 = t$ (con relativa equazione)

Esempio di Lewy

Importanza della richiesta di analiticità generalizzazione esempio di Lewy, enunciato

Teorema 4.1

Ipotesi	$A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto
Tesi	$\exists\, F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ : \ \nexists\, u \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che $\begin{cases} Lu = F \text{ in } A \\ u_x,\ u_y,\ u_t \text{ soddisfano} \\ \text{la condizione di Hölder} \end{cases}$

Dimostrazione

1. traslare il problema del teorema precedente in modo da ricondursi al caso di un generico punto (x_0, y_0, t_0), usando come forzante la funzione $g(x, y, t) = f(t - 2xy_0 + 2x_0y)$;
2. costruire con una serie una funzione $S_a \in C^\infty$ per ogni $a \in l^\infty$;
3. costruire degli insiemi $E_{j,n} \subseteq l^\infty$ chiusi e senza parte interna sfruttando S_a e il teorema di Ascoli-Arzelà;
4. concludere la dimostrazione del nuovo teorema utilizzando i lemmi appena citati per ricavare, con un ragionamento per assurdo, l'uguaglianza $l^\infty = \bigcup E_{j,n}$, grazie alla quale si può applicare l'argomento di Baire.

Esempio di Kowalevski

Importanza superfici non caratteristiche

Esempio di Hadamard

Nessuna garanzia della stabilità della soluzione

Versione classica

Enunciato, può essere visto come corollario di un teorema più astratto.

Versione astratta

Premessa

$$E_s = H(\overline{\mathcal{O}_s}; \mathbb{C}^m)$$

con $s \in [0, 1]$, costante C

Enunciato

Dimostrazione esistenza

Dimostrazione unicità

Versioni "olomorfe"

Come nel caso delle EDO tutto si estende in modo **immediato** al caso complesso assumendo i dati olomorfi.

Le conseguenze di questo teorema si osservano in vari campi, tra cui i principali sono:

- teoria delle equazioni differenziali
- fisica matematica: emersione di numerose domande (cosa succede nella realtà se esiste una sol. analitica locale?)
- geometria differenziale
- teoria economica

Impatto sulla teoria delle equazioni differenziali:

- confutare la congettura di Weierstrass (ogni funzione è
- teorema di Holmgren
- Treves e Nierenberg per la ricerca di condizioni necessarie e/o sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali
- Hormander la teoria degli operatori differenziali lineari (con particolare attenzione alla condizioni necessarie)

Teorema di Holmgren

Enunciato astratto, si dimostra utilizzando la versione astratta di CK

Enunciato concreto

Sketch della dimostrazione

Teorema di Cartan-Kähler

Un teorema molto importante in geometria differenziale:

- sull'integrabilità di **sistemi differenziali esterni** (*exterior differential systems*)
- che si dimostra utilizzando il teorema di Cauchy-Kowalevski
- che ha un'applicazione al campo economico (I. Ekeland, P.A. Chiappori)

Citando Ekeland a riguardo del paper scritto nel 1999 scritto insieme a Chiappori:

> *Questo articolo risolve un problema di base nella teoria economica, che era rimasto aperto per* ***trent'anni****, ovvero la caratterizzazione delle funzioni di domanda di mercato. Il metodo di dimostrazione consiste nel ridurre il problema a un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, per il quale si cercano soluzioni convesse. Questo viene riscritto come un sistema differenziale esterno e viene risolto mediante il teorema di Cartan-Kähler, insieme ad alcune manipolazioni algebriche per ottenere la* ***convessità****.*

Nonostante la ricerca condotta in quegli anni

- non fosse guidata da applicazioni immediate
- portò a risultati deludenti rispetto alle aspettative di Cauchy e Weierstrass

ha avuto un impatto gigantesco grazie alla comprensione delle soluzioni di sistemi di EDP che ci ha permesso di raggiungere.

Era una vita – gli costava dirlo, come ebbe ad ammettere, perché si era sempre guardato dagli eccessivi entusiasmi –, era una vita che aspettava di veder entrare nel suo studio un allievo del genere. Un allievo in grado di lanciargli una sfida assoluta, di non seguire soltanto il percorso spericolato della sua mente, ma se possibile di spiccare un volo più alto.

— Alice Munro, *Too Much Happiness*