Politecnico di Milano

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Matematica
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Sull'esistenza di soluzioni locali di equazioni differenziali alle derivate parziali

Tesi di

Alessandro Pedone

Relatore:

Prof. Maurizio Grasselli ....

Candidato:

Alessandro Pedone ....

Sessione di Laurea Settembre 2024
Anno Accademico 2023/2024

Indice

Sommario

Prerequisiti
Struttura dei capitoli e senso della trattazione: dare uno sguardo di insieme ai teoremi più importanti per la teoria locale, nelle forme più generali possibile, per poi dare un focus successivo alle equazioni lineari dove si riescono ad enunciare con efficacia condizioni sufficienti (Holmgren) e condizioni necessarie (Hörmander).
NOTAZIONE MULTI-INDICE
Derivate parziali

$$D^{\alpha}(u)$$

$$D^{ke_i}(u) = \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} = \partial_{x_i}^k u$$

$$k = 1 \implies \partial_{x_i} u = u_{x_i}$$

Gradiente

$$Du = \nabla u = [u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}]$$

Matrice Hessiana

$$D^2 u = Hu = \begin{bmatrix} \nabla u_{x_1} \\ \vdots \\ \nabla u_{x_n} \end{bmatrix}$$

Proprietà fondamentali Leibniz...

Capitolo 1
Teorema di Cauchy-Kovalevski

Perché non Kovalevskaya Chi è K Cronologia delle dimostrazioni Abbreviato CK

1.1 Versione per EDO

Versione per EDO

1.2 Versione per EDP quasi-lineari

Versione per EDP quasi-lineari Rifacendoci a Evans, e quindi anche usando la notazione in esso presente, assumiamo che i coefficienti del sistema B_j e c abbiano come raggi di convergenza $r_{B_j} > 0$ e $r_c > 0$ di conseguenza per il Lemma nel capitolo 4.6.2 si osserva che affinché la maggiorazione valga è necessario che $r < \min\{\min_j\{r_{B_j}\}, r_c\}$. Consideriamo ora la funzione

$$\nu = \frac{r - s - \sqrt{(r-s)^2 - 2tCrmn}}{mn}$$

e ricordiamone alcune proprietà:

1. E' interessante perché essa alla conclusione della dimostrazione del teorema di CK permette di scrivere in forma compatta la soluzione del problema maggiorante nella seguente forma:

$$u = \nu(x_1 + \ldots + x_{n-1}, t)[1, \ldots, 1]^T$$

2. Essa è analitica in un intorno dell'origine, in particolare per $t < \frac{(r-s)^2}{2Crmn}$ e di conseguenza anche in $B_h(0,0)$ con $h = \frac{r}{8Cmn}$.

3. In $B_h(0,0)$ vale la condizione $s^2 + m\nu^2(s,t) < r^2$q

4. Unendo le ultime due condizioni si ottiene che la soluzione è maggiorante in

1.3 Versione per EDP non lineari

Versione per EDP non lineari Riscrivere l'equazione come un problema di evoluzione (vedi pdf)

1.4 Versione astratta

Versione astratta

1.5 Esempi

Dopo aver visto il teorema di Cauchy-Kovalevski in tutte le sue forme più note, si concentra ora lo sguardo su tre esempi importanti che aiutano a inquadrare meglio il ruolo che giocano le ipotesi e che limiti ha questo teorema.
Tale discussione risulta particolarmente di rilievo, poiché per molto tempo si ritenne ragionevole pensare che un'equazione differenziale con coefficienti piuttosto regolari, come ad esempio C^∞, dovesse avere almeno una soluzione. Questo, però, oltre al caso di analiticità trattato dal teorema oggetto del capitolo, in generale non accade.

Esempio 1 (**Lewy**)**.** Questo primo esempio è decisamente il più importante ed interessante tra quelli qui trattati, proprio perché permette di introdurre in modo più rigoroso il problema appena citato.
Nel 1957 Hans Lewy propose questo semplice controesempio, volto a mostrare come l'ipotesi di **analiticità** nel teorema di Cauchy-Kovalevki fosse cruciale, portando un caso di un operatore differenziale lineare con coefficienti analitici che necessita della presenza di una forzante anch'essa analitica per possedere delle soluzioni almeno C^1.
Ciò mostra come sia cruciale, non solo una discussione sulle condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali, ma anche una sulle condizioni necessarie. Infatti, come si vedrà nella sezione **??**, Hormander, matematico che contribuì ampiamente alla teoria delle equazioni lineari, rispose all'emersione di questo problema proprio con delle condizioni necessarie per l'esistenza di soluzioni locali (e quindi anche globali!) per equazioni lineari.
Preliminarmente si riportano qui sotto gli enunciati di due teoremi che torneranno utili nella discussione:

Formula di Green in $\mathbb{C}$ 1.5.1.

Ipotesi	$D \subseteq \mathbb{C}$ *dominio regolare* $f : D \to \mathbb{C}$ $f \in H(\mathring{D})$
Tesi	$\displaystyle\oint_{\partial^+ D} f(z)\,dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x+iy)\,dxdy$

Osservazione. La definizione di dominio regolare non tornerà particolarmente utile, infatti ai fini di questa trattazione è sufficiente sapere che una qualsiasi palla chiusa è regolare (questo verrà utilizzato nella dimostrazione del teorema 1.5.3). Per una formalizzazione di questo concetto si veda [FMS20, cap.8], dove è presente una trattazione dell'analogo teorema in $\mathbb{R}^2$ che va sotto il nome di "Formule di Gauss-Green" e "Formula di Stokes", di quale la generalizzazione in $\mathbb{C}$ è immediata.

Principio di riflessione di Schwarz 1.5.2.

Ipotesi	$D \subseteq \mathbb{C}$ *dominio regolare e simmetrico rispetto a* $\mathbb{R}$ $D \cap\ \mathbb{R}$ *è un intervallo* $f : D \to \mathbb{C}$ $f(\mathbb{R} \cap D) \subseteq \mathbb{R}$ $f \in H(\mathring{D})$
Tesi	$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in \mathring{D}$

Osservazione. La definizione di insieme simmetrico rispetto a $\mathbb{R}$ è data in modo naturale: esso deve soddisfare la condizione $z \in D \implies \overline{z} \in D$.

Per entrare nel vivo dell'esempio, si definisce il seguente operatore:

$$L = D_x + iD_y - 2i(x + iy)D_t$$

che soddisfa le proprietà precedentemente enunciate e il cui comportamento peculiare emerge dal teorema che si enuncia di seguito.

Teorema 1.5.3.

Ipotesi	f *funzione continua a valori reali che dipende solo da* t $u \in C^1\ :\ Lu = f$ *in un intorno dell'origine*
Tesi	f *analitica in un intorno di* $t = 0$

Dimostrazione: Innanzitutto si fissa un $R > 0$ tale che $\{(x, y, t) : x^2 + y^2 < R^2, |t| < R\}$ sia contenuto nell'intorno dell'origine delle ipotesi (ovviamente questo R esiste sempre) e si procede seguendo questi passi:

1. Si definisce la funzione:

$$V(t, s) = \int\limits_{\gamma_r} u(x, y, t)\, dz \quad \text{con} \quad \begin{cases} t \in (-R, R) \\ r^2 = s \in [0, R^2) \\ \gamma_r = \partial^+ B_r(0, 0) \\ z = x + iy \end{cases}$$

2. Si ricerca una relazione tra V_s e V_t:

$$\begin{aligned}
V &= i \iint\limits_{B_r(0,0)} (u_x + iu_y)(x,y,t)\,dx\,dy && \text{per formula di Green}\\
&= i \int_0^r \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y)(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ t)\,\rho\,d\rho\,d\theta && \text{in coordinate polari}\\
V_r &= i \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y)(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ t)\,r\,d\theta && \text{derivando}\\
&= \int\limits_{\gamma_r} (u_x + iu_y)(x,y,t)\,r\,\frac{dz}{z}\\
V_s &= \frac{1}{2r}V_r = \int\limits_{\gamma_r} (u_x + iu_y)(x,y,t)\,\frac{dz}{2z}\\
&= \int\limits_{\gamma_r} u_t(x,y,t)\,dz + \int\limits_{\gamma_r} f(t)\,\frac{dz}{2z} && \text{usando } Lu = f\\
&= iV_t + \pi i f(t) \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

3. Si definiscono le funzioni:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$
$$U(t,s) = V(t,s) + \pi F(t)\ .$$

   e si osservano le seguenti proprietà di U vista come funzione di $w = t + is$:

   - si verifica che soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $U_t + iU_s = 2U_{\overline{z}} = 0$ utilizzando la relazione (1.1),
   - olomorfa per $(s,t) \in (0,R^2) \times (-R,R)$ per la proprietà precedente,
   - continua per $(s,t) \in [0,R^2) \times (-R,R)$ perché lo è V,
   - $U(0,t) = \pi F(t)$ per $t \in (-R,R)$, ovvero assume valori reali sull'asse reale.

4. Si prolunga analiticamente U in un intorno dell'origine, infatti, date le proprietà appena osservate, valgono le ipotesi del principio di riflessione di Schwarz che ci permette di definire U per $s \in (-R^2, 0)$ con la seguente formula:

$$U(t,s) = \overline{U(t,-s)}.$$

5. Si conclude il ragionamento notando che, se il prolungamento di U è analitico in un intorno dell'origine, lo deve essere anche $U(t,0) = \pi F(t)$ e anche $f = F'$.

QED

Generalizzazione. Il teorema appena trattato si presta in realtà anche a una generalizzazione interessante e l'idea è la seguente: si cerca di mostrare che, nonostante la forma caratteristica di L non abbia punti singolari, è possibile scegliere una forzante $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ in modo tale che **ovunque** l'equazione differenziale $Lu = F$ non ammetta soluzioni.

Osservazione. Con la notazione $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si indica l'insieme delle funzioni C^k del tipo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Prima di scendere nello specifico di questa seconda parte della discussione dell'esempio di Lewy, è utile richiamare tre definizioni:

Definzione 1.5.1. Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X è denso se per ogni $A \in X$ aperto $D \cap A \neq \emptyset$.

Definzione 1.5.2. Un sottoinsieme E di uno spazio metrico è senza parte interna se $\mathring{E} = \emptyset$.

Definzione 1.5.3. Uno spazio topologico viene detto "di Baire" se l'unione numerabile di ogni famiglia di insiemi chiusi con interno vuoto ha interno vuoto.

La ragione per cui si citano questi concetti è che si è interessati a un teorema, o per meglio dire a un suo corollario, che permette di sviluppare un argomento per assurdo, nel caso si abbia a che fare con spazi metrici completi. Si riportano di seguito gli enunciati.

Teorema della categoria di Baire 1.5.4.

Ipotesi	(X, d) *spazio metrico completo* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi aperti densi in* X $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi chiusi senza parte interna*
Tesi 1	$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *è denso in* X
Tesi 2	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *è senza parte interna*

Osservazione. Con questo teorema si mostra proprio come gli spazi metrici completi siano di Baire nella topologia indotta dalla metrica. Si veda [RF10, cap.10] per la dimostrazione e maggiori dettagli.

Corollario (argomento per assurdo di Baire) 1.5.5.

Ipotesi	(X, d) *spazio metrico completo* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi chiusi* $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$
Tesi	$\exists\, n \in N$ *tale che* $\mathring{E}_n \neq \emptyset$

Osservazione. Questo enunciato è la proposizione contronominale della Tesi 2 del teorema 1.5.4 e come è stato anticipato può essere usato per ottenere un assurdo esibendo un spazio metrico completo uguale all'unione di una famiglia di insiemi chiusi senza parte interna.

Dopo aver inquadrato questi strumenti, è arrivato il momento di entrare nel merito discussione e lo si fa con uno schema che presenta per punti e a grandi linee il ragionamento da affrontare:

1. traslare il problema del teorema 1.5.3 in modo da ricondursi al caso di un generico punto (x_0, y_0, t_0), usando come forzante la funzione $g(x, y, t) = f(t + 2xy_0 - 2x_0y)$ (lemma 1.5.6);

2. costruire una funzione $F_a \in C^\infty$ per ogni $a \in l^\infty$ (lemma 1.5.7);

3. costruire degli insiemi $E_{j,n} \subseteq l^\infty$ chiusi senza parte interna sfruttando F_a (lemma 1.5.8);

4. utilizzare i lemmi per concludere la dimostrazione del teorema 1.5.9, ragionando per assurdo e ottenendo l'uguaglianza $l^\infty = \bigcup_{j,n} E_{j,n}$, in modo fa poter applicare l'argomento di Baire.

Di seguito si dettagliano i passaggi appena elencati con enunciati e dimostrazioni.

Lemma 1.5.6.

Ipotesi	$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$ $u \in C^1 \ : \ Lu(x, y, t) = f(t + 2xy_0 - 2x_0y)$ *in un intorno di* (x_0, y_0, t_0)
Tesi	f *analitica in un intorno di* $t = t_0$

Dimostrazione: sfruttando l'invarianza dell'operatore L rispetto a $T(x, y, t) = (x - x_0, y - y_0, t - t_0 - 2xy_0 + 2x_0y)$, ovvero la validità della relazione: $L(u \circ T) = (Lu) \circ T$. QED

Lemma 1.5.7.

Ipotesi	$\{(x_j, y_j, t_j)\}_{j=1}^\infty$ *denso in* $\mathbb{R}^3$ $c_j = 2^{-j}e^{-\rho_j}$ *con* $\rho_j = \lvert x_j\rvert + \lvert y_j\rvert \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$ $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *periodica e non analitica* $g_j(x, y, t) = f'(t + 2xy_j - 2x_jy)$
Tesi 1	$F_a = \sum_{j=1}^{\infty} a_jc_jg_j$ *converge uniformemente in* $\mathbb{R}^3$
Tesi 2	*lo stesso vale per le derivate formali* $D^\alpha F_a = \sum_{i=1}^{\infty} a_jc_jD^\alpha g_j$

Osservazione. Naturalmente F_a è una funzione C^∞.

Dimostrazione: Siccome f è C^∞ ed è periodica definiamo

$$M_k = \sup_t |f^{(k)}(t)| \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

E ciò ci permette di scrivere, per ogni α multi-indice e $j \in \mathbb{N}_0$, le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}|a_j c_j D^\alpha g_j| &\leq ||a||\, 2^{-j}\, e^{-\rho_j}\, M_{|\alpha|+1}\, \rho_j^{|\alpha|} \\ &\leq ||a||\, 2^{-j}\, M_{|\alpha|+1} \left(\frac{|\alpha|}{e}\right)^{|\alpha|}.\end{aligned}$$

Da cui si ricava la validità di entrambe le tesi. QED

Osservazione. Prima di proseguire è utile soffermarsi brevemente su due questioni:

- l^∞ è una spazio di Banach se dotato della norma: $||b||_\infty = \sup_n |b_n|$ per ogni $b \in l^\infty$;
- esiste una funzione f con le proprietà delle ipotesi: per esempio, la funzione

  $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!\,x)}{(n!)^n}$$

  è definita da un serie puntualmente convergente ed è $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, inoltre è periodica di periodo 2π e si può dimostrare che essa non è analitica in nessun punto $x \in \mathbb{R}$. Sopratutto per quest'ultimo aspetto si veda il problema 4 presente in [Joh82, cap.3] per maggiori dettagli.

Con $A_{j,n}$ indichiamo $B_{n^{-1/2}}(x_i, y_i, t_i)$ dove (x_i, y_i, t_i) sono i punti nelle ipotesi del lemma 1.5.7

Lemma 1.5.8.

Ipotesi	*Stesse ipotesi del lemma 1.5.7* $\{E_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{N}_0} \subseteq l^\infty$ *tali che* $\forall a \in E_{j,n}\ \exists\, u \in C^1(A_{j,n})$ *tale che* – $Lu = F_a$ *in* $A_{j,n}$ – $u(x_j, y_j, t_j) = 0$ – $\lvert D^\alpha u\rvert \leq n$ *per* $\lvert\alpha\rvert \leq 1$ *in* $A_{j,n}$ – $\lvert D^\alpha u(v) - D^\alpha u(w)\rvert \leq n\lvert v-w\rvert^{1/n}$ *per* $\begin{cases}\lvert\alpha\rvert = 1\\ v, w \in A_{j,n}\end{cases}$
Tesi	$\{E_{j,n}\}$ *sono insiemi chiusi e senza parte interna*

Dimostrazione:

$$a^k -> a \text{ in } l^\infty \tag{1.2}$$

QED

Teorema 1.5.9.

Ipotesi	$A \subseteq \mathbb{R}^3$ *aperto*
Tesi	$\exists\, F \in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})\ :\ \nexists\, u \in C^1(A)$ *tale che* $\begin{cases} Lu = F \text{ in } A \\ u_x,\ u_y,\ u_t \text{ soddisfano} \\ \text{la condizione di Hölder}\end{cases}$

Osservazione. L'arbitrarietà di A implica che questo valga per tutti gli aperti di $\mathbb{R}^3$ e quindi che $Lu = F$ non abbia soluzioni C^1 e continue secondo Hölder da nessuna parte.

Osservazione. La tesi implica come conseguenza naturale che non esistano nemmeno soluzioni C^k per ogni $k \geq 1$, in quanto $C^k \subseteq C^1$.

Dimostrazione: Si ragiona per assurdo e si conclude nei seguenti tre passi (di cui il secondo è quello che merita più attenzione):

1. $E_{j,n} \subseteq l^\infty$ per ogni $j, n \in \mathbb{N}_0$ ovviamente.

2. $a \in l^\infty \implies a \in E_{j,n}$ per qualche $j, n \in \mathbb{N}_0$ (i quali dipendono da a).

   Infatti se supponiamo falsa la tesi, per ogni a fissata esista un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ dove $Lu = F_a$ ammette una soluzione fatta bene u. Per la densità sappiamo che esiste (x_j, y_j, t_j) che appartiene ad A. $A_{j,n} \subseteq A$ per n abbastanza grande.

3. Dai primi due passi di conclude che

   $$l^\infty = \bigcup_{j,n \in \mathbb{N}_0} E_{j,n},$$

   ma, quindi, per il fatto che l^∞ è di Banach e per le proprietà degli insiemi $E_{j,n}$, valgono sia le ipotesi del corollario 1.5.5 che la negazione della tesi. Ciò è assurdo.

QED

Esempio 2 (Kovalevski). Questo esempio, dovuto a Kovalevski stessa, è utile a comprendere più a fondo, in modo quanto più essenziale possibile, l'importanza, o meglio la necessità, di assumere che la superficie scelta per assegnare i dati di Cauchy sia **non-caratteristica** per l'equazione differenziale in osservazione.
Si consideri quindi il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in una dimensione:

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Osservazione. La condizione per u_x su Γ necessaria per completare il problema di Cauchy è già implicitamente imposta dall'equazione (1.4).

L'obiettivo che ci si pone è quello di dimostrare che non ammette soluzioni analitiche in un intorno dell'origine.

1. Per cominciare si osserva che in questo caso la superficie su cui sono stati assegnati i dati di Cauchy (1.2) è $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$. Essa in ogni punto ha come versore normale $(0,1)$ ed è, quindi, caratteristica per l'equazione (1.3), poiché

   $$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha = a_{(2,0)} \boldsymbol{\nu}^{(2,0)} = 0.$$

2. Per assurdo si supponga di avere una soluzione del problema u analitica in un intorno dell'origine, ovvero:

$$u(x,t) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)} c(\alpha)\, x^{\alpha_1}\, t^{\alpha_2}, \quad c(\alpha) = \frac{D^\alpha u(0,0)}{\alpha!}$$

dove $|(x,t)| < r$ per qualche $r > 0$.

3. Si calcolano i valori dei coefficienti $c(2n, 0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Per fare questo si sviluppa in serie di potenze centrata nell'origine la funzione del problema di Cauchy:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da questa serie si ottengono le seguenti relazioni:

$$D_x^{2n}u(0,0) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\,\frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = (-1)^n(2n)!$$
$$D_x^{2n+1}u(0,0) = \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\,\frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 0$$

dalle quali si ricava: $c(2n,0) = (-1)^n$ e $c(2n+1,0) = 0$.

4. Si calcolano i valori dei coefficienti $c(2n,n)$ e si dimostra che $c(2n,n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.
A questo scopo, invece, si sfrutta l'equazione (1.1) per ottenere la seguente relazione tra i coefficienti:

$$c(\alpha_1, \alpha_2+1) = \frac{(\alpha_1+2)(\alpha_1+1)}{(\alpha_2+1)}\, c(\alpha_1+2, \alpha_2). \tag{1.5}$$

E si utilizza, quindi, quest'ultima come segue:

$$\begin{aligned}
c(2n,n) &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n}\, c(2n+2, n-1) && (1.5) \quad \text{con} \quad \begin{cases}\alpha_1 = 2n\\ \alpha_2+1 = n\end{cases}\\
&= \ldots = \frac{(2n+2n)\cdots(2n+1)}{n!}\, c(2n+2n, 0) && \text{iterando su } n\\
&= \frac{(4n)!}{(2n)!\, n!}(-1)^{2n}\\
&\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{64n}{e}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty && \text{per la formula di Stirling}
\end{aligned}$$

5. Si completa il ragionamento in modo immediato osservando che $c(2n,n)\, x^{2n}\, t^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ $\forall (x,t) \neq (0,0)$, infatti ciò implica direttamente che la serie di potenze non converge in ogni punto diverso dall'origine e questo è assurdo.

Esempio 3 (**Hadamard**)**.** L'esempio che si propone ora, dovuto ad Hadamard, aiuta a capire un limite importante del teorema di Cauchy-Kovalevski, ovvero il fatto che esso non fornisca alcun controllo sulla **relazione** tra i dati di Cauchy e la forma della soluzione analitica,la quale potrebbe risultare instabile.
Per osservare ciò si considera il seguente problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due dimensioni al variare di n:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_y(x,0) &= n\sin(nx)e^{-\sqrt{n}} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.6}$$

L'obiettivo che ci si pone in questo caso è quello di mostrare come al crescere di n si verifica un blow-up della soluzione u_n del problema di Cauchy (1.6).

1. Il problema, come nell'esempio precedente, è assegnato su $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, che è naturalmente una superficie non caratteristica per l'equazione di Laplace (si noti infatti che essa è ellittica).

2. E' facile verificare che la funzione $u_n(x,y) = \sin(nx)\sinh(ny)e^{-\sqrt{n}}$ soddisfa il problema di Cauchy e che essa è analitica, per questo essa anche l'unica possibile con quest'ultima proprietà.

3. Si osserva, infine, come $\sinh(ny)e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Come conclusione di questa discussione è interessante osservare anche come la soluzione non dipenda con continuità dai dati. Infatti, considerando il problema di Cauchy per $n = \infty$, ovvero con dati $u(x,0) = u_y(x,0) = 0$, si nota immediatamente che l'unica soluzione analitica è $u \equiv 0$, la quale è profondamente diversa dal comportamento asintotico di u_n.

Bibliografia

[Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2010.

[FMS20] Nicola Fusco, Paolo Marcellini, and Carlo Sbordone. *Lezioni di analisi matematica 2.* Zanichelli, 2020.

[Fol95] Gerald B. Folland. *Introdution to Partial Differential Equations.* Princeton University Press, 1995.

[Hö63] Lars Hörmander. *Linear Partial Differential Operators.* Spinger-Verlag, 1963.

[Joh82] Fritz John. *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 1982.

[RF10] Halsey L. Royden and Patrick M. Fitzpatrick. *Real Analysis.* Pearson, 2010.

[Tre75] François Treves. *Basic Linear Partial Differntial Equations.* Amacademic Press, 1975.