Politecnico di Milano

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Matematica
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Il teorema di Cauchy-Kowalevski e le sue conseguenze

Tesi di

Alessandro Pedone

Relatore:

Prof. Maurizio Grasselli ....

Candidato:

Alessandro Pedone ....

Sessione di Laurea Settembre 2024
Anno Accademico 2023/2024

All his life – he had difficulty saying this, as he admitted, being always wary of too much enthusiasm – all his life he had been waiting for such a student to come into this room.
A student who would challenge him completely, who was not only capable of following the strivings of his own mind but perhaps of flying beyond them.

— Alice Munro, *Too Much Happiness*

Abstract

Sofya Kowlevski, la prima donna ad conseguire un dottorato in matematica in Europa, nel 1875 dava la luce alla dimostrazione del teorema di Cauchy-Kowalevski (TCK), il primo risultato generale per l'esistenza di soluzioni locali analitiche per equazioni differenziali alle derivate parziali (EDP) con dati di Cauchy.

La tesi mira a presentare questa pietra miliare della matematica esaltandone la profondità del dettaglio, le conseguenze e anche la semplicità delle idee che ha permesso di far emergere. A questo scopo sono ricorrenti i richiami di nozioni e risultati fondamentali ad affrontare il discorso e vengono trattate tutte le forme principali in cui è possibile enunciare il TCK.

A completamento sono presenti anche una sezione dedicata a tre esempi storicamente cruciali alla comprensione delle EDP e un'altra dedicata, invece, alle due sue fondamentali applicazioni: il teorema di Holmgren e il teorema di Cartan-Kähler.

Parole chiave: EDP, caratteristiche, analiticità/olomorfia, metodo dei maggioranti, teoremi di Cauchy-Kowalevski, Holmgren e Cartan-Kähler

Indice

Capitolo 1
Introduzione

1.1 Chi era Kowalevski?

Sofya Vasilyevna Kovalevskaya (1850-1891) è stata una matematica russa. Per varie ragioni, tra cui proprio il teorema al centro di questa discussione, è tutt'ora una delle figure femmili più rilevanti per la storia di questa disciplina per varie ragioni.
Prima di tutto -> per le pubblicazioni lei soleva firmarsi Kowalevski e questo scritto scegliano la nomenclatura...
Riferimenti biografici
background familiare
studi in germania
aiuto di Weierstrass (lezioni private e quattro tesi di dottorato)
idee politiche (socialiste e radicali, sua sorella Anna le diede copies of radical journals of the time discussing Russian nihilism) e movimenti femministi
Nichilismo antico: for the nihilists, science appeared to be the most effective means of helping the mass of people to a better life. Science pushed back the barriers of religion and superstition, and "proved" through the theory of evolution that (peaceful) social revolutions were the way of nature. For the early nihilists, science was virtually synonymous with truth, progress and radicalism; thus, the pursuit of a scientific career was viewed in no way as a hindrance to social activism. In fact, it was seen as a positive boost to progressive forces, an active blow against backwardness.
successo grazie alle tre tesi di dottorato (I suoi risultati, tra cui il Teorema di Cauchy-Kowalevski, furono pubblicati nel 1875. Fu così che ottenne, prima donna in Europa, un dottorato in matematica) Contribuì nell'equazioni differenziali alle derivate parziali (teorema di CK) e nella meccaninca (Lagrange, Euler, and Kowalevski tops)
ritorno in russia inutile per la sua carriera accademica
in svezia dopo la morte del marito (Divenne, prima donna al mondo, professoressa di matematica, ottenendo la cattedra all'Università di Stoccolma (Högskola))
anche produzione letteraria
morte prematura a 41 anni nel 1891 di polmonite.
Rappresentazioni artistiche
Nel cinema

- “ Sofya Kowalevski” (1985, 3 episodi, 218 minuti, biografico, Lenfilm, OTF, colore). Gran Premio al Festival Internazionale del Film Televisivo Multiepisodio di Pianciano Terme, Italia, nel 1985. Ayan Gasanovna Shakhmaliyeva (1932-1999) regista originaria dell’Azerbaijan.
- A Hill on the Dark Side of the Moon (Swedish: Berget på månens baksida) is a 1983 Swedish drama film directed by Lennart Hjulström

In letteratura

- L’anno dopo la sua morte, la sua cara amica Anne Charlotte Leffler, sorella del matematico Gösta Mittag-Leffler e moglie dell’algebrista italiano Pasquale del Pezzo, le dedicò una biografia (Sonja Kovalevsky. Ciò che ho vissuto con lei e ciò che mi ha detto di sé, Ed. Albert Bonniers, Stoccolma, 1892)
- Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky (1983), Don H. Kennedy, Ohio University Press, Athens, Ohio
- Beyond the Limit: The Dream of Sofya Kovalevskaya (2002) a biographical novel by mathematician and educator Joan Spicci, published by Tom Doherty Associates, LLC
- “ Too Much Happiness” (2009), short story by Alice Munro, published in the August 2009 issue of Harper’s Magazine (ispirato dal primo, infatti il racconto ripercorre gli ultimi giorni di vita di Sof’ja Kovalevskaja arricchito da reminiscenze del passato che Munro ha acquisito da lettere, diari e scritti. Munro ha potuto accedere a tali documenti tramite la moglie di Don H. Kennedy la quale è una lontana discendente di Kovalevskaja)

1.2 Il teorema di Cauchy-Kowalevski

Che abbrevieravemo spesso CKT da qui in poi
Abbrevieremo equazioni differenziali alle derivate parziali con EDP
Contesto scientifico
Al tempo ci si concentrava sulle funzioni analitiche (Cauchy) perché era il periodo dello sviluppo della teoria classica e le serie di potenze sembravano essere un buono strumento per un’approssimazione locale delle soluzioni (in stile polinomi di Taylor)
Cauchy sviluppa la teoria delle funzioni complesse dopo un utilizzo già avviato di diversi strumenti di questo campo da parte di Eulero, Laplace e Fourier. Questo gli permette di dimostrare (1835-42) l’esistenza e l’unicità di soluzioni locali (analitche/olomorfe) di equazioni differenziali ordinarie (che abbrevieremo con EDO da qui in poi) e di sistemi lineari del primo ordine, sfruttando il metodo dei maggioranti (cruciale per gli sviluppi successivi di K).
Weierstrass, che ricordiamo essere il meastro di Kowalevski, ha un approccio speculare: vuole definire delle funzioni analitche sfruttando le equazioni differenziali, mentre Cauchy voleva trovare solamente soluzioni analitiche a equazioni differenziali.
Infatti congettura di Weierstrass: serie di potenze formali generate da EDP convergono necessariamente.

Altri contributi arrivano da: Briot, Bouquet e Fuchs che svilupparono meglio il concetto di singolarità (fisse, o indipendenti dai dati, e mobili) e Jacobi che fornì la definzione di una forma canonica/normale per i sistemi che si rivelà fondamentale per il lavoro di K.
Da qui comincia il lavoro di K (70-74) che porterà all'enunciato e alla dimostrazione del risultato più generale fino a quel momento (1874). A grandi linee l'idea importante avuta da K è quella di un cambio di variabile lineare che permettesse di scrivere un sistema non lineare (che soddisfa certe ipotesi) in forma normale e di potersi occupare dell'esistenza di una soluzione a questo sistema.
Osservazione: anche Darboux raggiunse risultati simili nello stesso periodo ma con meno generalità di K (entrambi pubblicarono nel 75)
Sviluppi successivi
la dimostrazione venne semplificata da E. Goursat in un suo libro di testo di analisi matematica risalente intorno al 1900.
dimostrazioni più astratte e più generali, grazie al lavoro di Treves e Nierenberg (che è in generale sull'esistenza di soluzioni locali, vedi PAPER TREVES)
teorema inutile nella pratica che però ha ispirato ricerche e scoperte future cruciali e utili (come accadde per i grafi di eulero)
Domande cruciali a cui si vuole rispondere che guideranno il nostro percorso di comprensione, cercheremo di dare delle risposte con il teorema e osserveremo i risultati

- è possibile che esista una soluzione analitica a un sistema di EDP?

se sì

- sotto quali ipotesi? vedi capitolo versione invariante
- è unica? vedi capitolo versione invariante
- dipende in modo continuo dai dati iniziali? vedi capitolo esempi
- quali applicazioni ha questo teorema?

Capitolo 2
Strumenti fondamentali

In questo capitolo vengono trattate delle nozioni fondamentali per la trattazione della teoria locale presentata.
Si tratta il metodo delle caratteristiche che sarà cruciale nella dimostrazione del teorema di CK anche se in una forma meno generale di quella presentata

2.1 Equazioni differenziali alle derivate parziali

2.2 Superfici caratteristiche

Cosa si intende per superficie analitica
Definizione di superficie caratteristica

i. caso $t = 0$ e calcolo di tutte le derivate (evans)

ii. caso lineare (folland)

iii. caso quasi lineare (folland)

iv. caso generale e calcolo di tutte le derivate (evans)

v. classificazione delle EDP

2.3 Metodo delle caratteristiche

i. caso lineare (folland)

ii. caso quasi lineare (folland)

iii. caso generale (evans)

Capitolo 3
Il teorema di Cauchy-Kovalevski

3.1 Versione per EDO

Versione per EDO

3.2 Versione per EDP quasi-lineari

IDEE CHIAVE:
• RISCRIVERE L'EQUAZIONE IN FORMA DI EVOLUZIONE
• METODO DEI MAGGIORANTI: inserire nell'equazione delle serie di potenze, ottenere informazioni sui coefficienti, stimare questi coefficienti, dimostrare che la stima (una maggiorazione!) converge.
• METODO DELLE CARATTERISTICHE
Versione per EDP quasi-lineari Rifacendoci a Evans, e quindi anche usando la notazione in esso presente, assumiamo che i coefficienti del sistema B_j e c abbiano come raggi di convergenza $r_{B_j} > 0$ e $r_c > 0$ di conseguenza per il Lemma nel capitolo 4.6.2 si osserva che affinché la maggiorazione valga è necessario che $r < \min\{\min_j\{r_{B_j}\}, r_c\}$. Consideriamo ora la funzione

$$\nu = \frac{r - s - \sqrt{(r-s)^2 - 2tCrmn}}{mn}$$

e ricordiamone alcune proprietà:

1. E' interessante perché essa alla conclusione della dimostrazione del teorema di CK permette di scrivere in forma compatta la soluzione del problema maggiorante nella seguente forma:
$$u = \nu(x_1 + \ldots + x_{n-1}, t)[1, \ldots, 1]^T$$

2. Essa è analitica in un intorno dell'origine, in particolare per $t < \frac{(r-s)^2}{2Crmn}$ e di conseguenza anche in $B_h(0,0)$ con $h = \frac{r}{8Cmn}$.

3. In $B_h(0,0)$ vale la condizione $s^2 + m\nu^2(s,t) < r^2$

4. Unendo le ultime due condizioni si ottiene che la soluzione è maggiorante in

3.3 Versione per EDP non lineari

Versione per EDP non lineari Riscrivere l'equazione come un problema di evoluzione (vedi pdf)

Capitolo 4

Esempi

Dopo aver visto il teorema di Cauchy-Kowalevski in tutte le sue forme più note, si concentra ora lo sguardo su tre esempi importanti che aiutano a inquadrare meglio il ruolo che giocano le ipotesi e che limiti ha questo teorema.

Tale discussione risulta particolarmente di rilievo, poiché per molto tempo si ritenne ragionevole pensare che un'equazione differenziale con coefficienti piuttosto regolari, come ad esempio C^∞, dovesse avere almeno una soluzione. Questo, però, oltre al caso di analiticità trattato dal teorema oggetto del capitolo, in generale non accade.

4.1 Esempio di Lewy

Questo primo esempio è decisamente il più importante ed interessante tra quelli qui trattati, proprio perché permette di introdurre in modo più rigoroso il problema appena citato.

Nel 1957 Hans Lewy propose questo semplice controesempio, volto a mostrare come l'ipotesi di **analiticità** nel teorema di Cauchy-Kowalevski fosse cruciale, portando un caso di un operatore differenziale lineare con coefficienti analitici che necessita della presenza di una forzante anch'essa analitica per possedere delle soluzioni almeno C^1.

Ciò mostra come sia cruciale, non solo una discussione sulle condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali, ma anche una sulle condizioni necessarie. Infatti Hörmander, matematico che contribuì ampiamente alla teoria delle equazioni lineari, rispose all'emersione di questo problema proprio con delle condizioni necessarie per l'esistenza di soluzioni locali (e quindi anche globali!) per equazioni lineari, le quali ispirarono poi a loro volta il lavoro di Treves e Nirenberg volto alla ricerca di condizioni necessarie e sufficienti.

Preliminarmente si riportano qui sotto gli enunciati di due teoremi che torneranno utili nella discussione:

Formula di Green in $\mathbb{C}$ 4.1.1.

Ipotesi	$D \subseteq \mathbb{C}$ *dominio regolare* $f : D \to \mathbb{C}$ $f \in H(\mathring{D})$
Tesi	$\displaystyle\oint_{\partial^+ D} f(z)\,dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x+iy)\,dxdy$

Osservazione. La definizione di dominio regolare non tornerà particolarmente utile, infatti ai fini di questa trattazione è sufficiente sapere che una qualsiasi palla chiusa è regolare (questo verrà utilizzato nella dimostrazione del teorema 4.1.3). Per una formalizzazione di questo concetto si veda [FMS20, cap.8], dove è presente una trattazione dell'analogo teorema in $\mathbb{R}^2$ che va sotto il nome di "Formule di Gauss-Green" e "Formula di Stokes", di quale la generalizzazione in $\mathbb{C}$ è immediata.

Principio di riflessione di Schwarz 4.1.2.

Ipotesi	$D \subseteq \mathbb{C}$ *dominio regolare e simmetrico rispetto a* $\mathbb{R}$ $D \cap \mathbb{R}$ *è un intervallo* $f : D \to \mathbb{C}$ $f(\mathbb{R} \cap D) \subseteq \mathbb{R}$ $f \in H(\mathring{D})$
Tesi	$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in \mathring{D}$

Osservazione. La definizione di insieme simmetrico rispetto a $\mathbb{R}$ è data in modo naturale: esso deve soddisfare la condizione $z \in D \implies \overline{z} \in D$.

Per entrare nel vivo dell'esempio, si definisce il seguente operatore:

$$L = D_x + iD_y - 2i(x+iy)D_t$$

che soddisfa le proprietà precedentemente enunciate e il cui comportamento peculiare emerge dal teorema che si enuncia di seguito.

Teorema 4.1.3.

Ipotesi	f *funzione continua a valori reali che dipende solo da* t $u \in C^1 \ : \ Lu = f$ *in un intorno dell'origine*
Tesi	f *analitica in un intorno di* $t = 0$

Dimostrazione: Innanzitutto si fissa un $R > 0$ tale che $\{(x,y,t) : x^2 + y^2 < R^2, |t| < R\}$ sia contenuto nell'intorno dell'origine delle ipotesi (ovviamente questo R esiste sempre) e si procede seguendo questi passi:

1. Si definisce la funzione:

$$V(t,s) = \int_{\gamma_r} u(x,y,t)\,dz \quad \text{con} \quad \begin{cases} t \in (-R,R) \\ r^2 = s \in [0,R^2) \\ \gamma_r = \partial^+ B_r(0,0) \\ z = x+iy \end{cases}$$

2. Si ricerca una relazione tra V_s e V_t:

$$\begin{aligned}
V &= i \iint\limits_{B_r(0,0)} (u_x + iu_y)(x,y,t)\,dx\,dy && \text{per formula di Green} \\
&= i \int_0^r \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y)(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ t)\,\rho\,d\rho\,d\theta && \text{in coordinate polari} \\
V_r &= i \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y)(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ t)\,r\,d\theta && \text{derivando} \\
&= \int\limits_{\gamma_r} (u_x + iu_y)(x,y,t)\,r\,\frac{dz}{z} \\
V_s &= \frac{1}{2r} V_r = \int\limits_{\gamma_r} (u_x + iu_y)(x,y,t)\,\frac{dz}{2z} \\
&= \int\limits_{\gamma_r} u_t(x,y,t)\,dz + \int\limits_{\gamma_r} f(t)\,\frac{dz}{2z} && \text{usando } Lu = f \\
&= iV_t + \pi i f(t) && (4.1)
\end{aligned}$$

3. Si definiscono le funzioni:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^t f(\tau)\,d\tau \\
U(t,s) &= V(t,s) + \pi F(t)\ .
\end{aligned}$$

   e si osservano le seguenti proprietà di U vista come funzione di $w = t + is$:

   - si verifica che soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $U_t + iU_s = 2U_{\overline{z}} = 0$ utilizzando la relazione (4.1),
   - olomorfa per $(s,t) \in (0,R^2) \times (-R,R)$ per la proprietà precedente,
   - continua per $(s,t) \in [0,R^2) \times (-R,R)$ perché lo è V,
   - $U(0,t) = \pi F(t)$ per $t \in (-R,R)$, ovvero assume valori reali sull'asse reale.

4. Si prolunga analiticamente U in un intorno dell'origine, infatti, date le proprietà appena osservate, valgono le ipotesi del principio di riflessione di Schwarz che ci permette di definire U per $s \in (-R^2, 0)$ con la seguente formula:

$$U(t,s) = \overline{U(t,-s)}.$$

5. Si conclude il ragionamento notando che, se il prolungamento di U è analitico in un intorno dell'origine, lo deve essere anche $U(t,0) = \pi F(t)$ e anche $f = F'$.

QED

Generalizzazione. Il teorema appena trattato si presta in realtà anche a una generalizzazione interessante e l'idea è la seguente: si cerca di mostrare che, nonostante la forma caratteristica di L non abbia punti singolari, è possibile scegliere una forzante $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ in modo tale che **ovunque** l'equazione differenziale $Lu = F$ non ammetta soluzioni.

Osservazione. Dati due spazi matrici (X, d_X) e (Y, d_Y), con la notazione $C(X, Y)$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si indica l'insieme delle funzioni continue del tipo $h : X \to Y$. Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$ si usa la notazione $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ naturalmente per le funzioni C^k.

Prima di scendere nello specifico di questa seconda parte della discussione dell'esempio di Lewy, è utile richiamare tre definizioni:

Defnzione 4.1.1. Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X è denso se per ogni $A \in X$ aperto $D \cap A \neq \emptyset$.

Defnzione 4.1.2. Un sottoinsieme E di uno spazio metrico è senza parte interna se $\mathring{E} = \emptyset$.

Defnzione 4.1.3. Uno spazio topologico viene detto "di Baire" se l'unione numerabile di ogni famiglia di insiemi chiusi con interno vuoto ha interno vuoto.

La ragione per cui si citano questi concetti è che si è interessati a un teorema, o per meglio dire a un suo corollario, che permette di sviluppare un argomento per assurdo, nel caso si abbia a che fare con spazi metrici completi. Si riportano di seguito gli enunciati.

Teorema della categoria di Baire 4.1.4.

Ipotesi	(X, d) *spazio metrico completo* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi aperti densi in* X $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi chiusi e senza parte interna*
Tesi 1	$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *è denso in* X
Tesi 2	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *è senza parte interna*

Osservazione. Con questo teorema si mostra proprio come gli spazi metrici completi siano di Baire nella topologia indotta dalla metrica. Si veda [RF10, cap.10] per la dimostrazione e maggiori dettagli.

Corollario (argomento per assurdo di Baire) 4.1.5.

Ipotesi	(X, d) *spazio metrico completo* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ *famiglia di insiemi chiusi* $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$
Tesi	$\exists\, n \in N$ *tale che* $\mathring{E}_n \neq \emptyset$

Osservazione. Questo enunciato è la proposizione contronominale della Tesi 2 del teorema 4.1.4 e, come è stato anticipato, può essere usato per ottenere un assurdo esibendo un spazio metrico completo uguale all'unione di una famiglia di insiemi chiusi e senza parte interna.

Il secondo importante risultato di analisi funzionale, che giocherà un ruolo importante per raggiungere lo scopo dichiarato, è il teorema di Ascoli-Arzelà: un teorema "di compattezza", il quale sostituisce il teorema di Heine-Borel nel compito di ricerca di una sottosuccessione convergente, nel caso in cui non si abbia a che fare con spazi metrici di cui sia nota la proprietà di compattezza. In particolare verrà utilizzato per dimostrare che un insieme (di cui si capirà la struttura più avanti) è chiuso, sfruttando la proprietà di convergenza uniforme che la tesi garantisce e tenendo in considerazione che è un insieme viene detto "chiuso" se e solo se per ogni successione convergente completamente contenuta in esso, quest'ultima converge proprio a un elemento dell'insieme.
Per comprendere a pieno l'enunciato di tale teorema, si richiamano insieme ad esso due definizioni.

Definzione 4.1.4. Una successione di funzioni $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ si dice uniformemente limitata in X se $\exists\, M \geq 0$ tale che $|f_n| \leq M$ in X.

Definzione 4.1.5. Una successione di funzioni $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ si dice equicontinua in X se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che $d(x, y) < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Teorema di Ascoli-Arzelà 4.1.6.

Ipotesi	(X, d) *spazio metrico completo* $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *successione di funzioni* $-$ *uniformemente continua* $-$ *equilimitata*
Tesi	$\exists\, f \in C(X, \mathbb{R}), n_k$ *tali che* $f_{n_k} \to f$ *uniformemente*

Dopo aver inquadrato questi strumenti, è arrivato il momento di entrare nel merito discussione e lo si fa con uno schema che presenta per punti e a grandi linee il ragionamento da affrontare:

1. traslare il problema del teorema 4.1.3 in modo da ricondursi al caso di un generico punto (x_0, y_0, t_0), usando come forzante la funzione $g(x, y, t) = f(t - 2xy_0 + 2x_0y)$ (lemma 4.1.7);
2. costruire una funzione $S_a \in C^\infty$ per ogni $a \in l^\infty$ (lemma 4.1.8);
3. costruire degli insiemi $E_{j,n} \subseteq l^\infty$ chiusi e senza parte interna sfruttando S_a e il teorema di Ascoli-Arzelà (lemma 4.1.9);
4. concludere la dimostrazione del teorema 4.1.10 utilizzando i lemmi appena citati per ricavare, con un ragionamento per assurdo, l'uguaglianza $l^\infty = \bigcup E_{j,n}$, grazie alla quale si può applicare l'argomento di Baire.

Di seguito si dettagliano i passaggi appena elencati con enunciati e dimostrazioni.

Lemma 4.1.7.

Ipotesi	$F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$ $u \in C^1\ :\ Lu(x, y, t) = F'(t - 2xy_0 + 2x_0y)$ *in un intorno di* (x_0, y_0, t_0)
Tesi	F *e* F' *sono analitiche in un intorno di* $t = t_0$

Dimostrazione: sfruttando l'invarianza dell'operatore L rispetto a

$$T(x,y,t) = (x + x_0, y + y_0, t + t_0 + 2xy_0 - 2x_0y),$$

ovvero la validità dell'identità (facile da verificare) $L(u \circ T) = (Lu) \circ T$, si deduce che, se u è soluzione dell'equazione delle ipotesi, essa rende vera in un intorno dell'origine anche l'espressione:

$$L(u \circ T)(x,y,t) = f(t + t_0) \text{ con } f = F'. \tag{4.2}$$

Chiaramente $u \circ T \in C^1$ e $g(t) = f(t+t_0)$ soddisfano le ipotesi del teorema 4.1.3 e quindi applicandolo alla seconda equazione la tesi è dimostrata. QED

Osservazione. L'analiticità di F segue dall'ultimo passaggio della dimostrazione del teorema 4.1.3, tendendo in considerazione del fatto che essa è della forma $F(t) = \int_0^t f(\tau) + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Osservazione. L'equazione (4.2) vale in un intorno dell'origine poiché l'operatore T rende $\mathbb{R}^3$ un gruppo, noto in generale come gruppo di Heisenberg, e agisce in questo contesto come una traslazione.

Lemma 4.1.8.

Ipotesi

$$\begin{aligned}
&\{(x_j, y_j, t_j)\}_{j=1}^{\infty} \text{ denso in } \mathbb{R}^3 \\
&c_j = 2^{-j} e^{-\rho_j} \text{ con } \rho_j = |x_j| + |y_j| \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 \\
&a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty} \\
&F \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ periodica e non analitica} \\
&f_j(x,y,t) = F'(t + 2xy_j - 2x_jy)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Tesi 1

$$S_a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j c_j f_j \text{ converge uniformemente in } \mathbb{R}^3$$

Tesi 2

$$\text{lo stesso vale per le derivate formali } D^{\alpha} S_a = \sum_{i=1}^{\infty} a_j c_j D^{\alpha} f_j$$

Osservazione. Naturalmente S_a è una funzione C^{∞}.

Dimostrazione: Siccome F è C^{∞} ed è periodica si definisce $M_k = \sup_t \left|F^{(k)}(t)\right| \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. E ciò permette di scrivere, per ogni α multi-indice e $j \in \mathbb{N}_0$, le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
|a_j c_j D^{\alpha} f_j| &\le \|a\|_{\infty} \, 2^{-j} \, e^{-\rho_j} \, M_{|\alpha|+1} \, \rho_j^{|\alpha|} \\
&\le \|a\|_{\infty} \, 2^{-j} \, M_{|\alpha|+1} \left(\frac{|\alpha|}{e}\right)^{|\alpha|} \qquad \text{poichè } \max_{x \ge 0} \frac{x^{|\alpha|}}{e^x} = \left(\frac{|\alpha|}{e}\right)^{|\alpha|}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$D^{\alpha} S_a$ converge totalmente, e quindi anche uniformemente, essendo che la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}^3} |a_j c_j D^{\alpha} f_j|$$

ha un termine generale minore o uguale della parte destra della disuguaglianza (4.4), la cui corrispondente serie numerica è ovviamente convergente.

QED

Osservazione. Prima di proseguire è utile soffermarsi brevemente su due questioni:

- l^∞ è una spazio di Banach se dotato della norma: $\|b\|_\infty = \sup_n |b_n|$ per ogni $b \in l^\infty$;
- esiste una funzione f con le proprietà delle ipotesi: per esempio, la funzione

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!\,x)}{(n!)^n}$$

  è definita da un serie puntualmente convergente ed è $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, inoltre è periodica di periodo 2π e si può dimostrare che essa non è analitica in nessun punto $x \in \mathbb{R}$. Sopratutto per quest'ultimo aspetto si veda il problema 4 presente in [Joh82, cap.3] per maggiori dettagli.

Notazione. $A_{j,n} = B_{n^{-1/2}}(x_i, y_i, t_i)$ dove (x_i, y_i, t_i) sono i punti nelle ipotesi del lemma 4.1.8.

Lemma 4.1.9.

Ipotesi | *Stesse ipotesi del lemma 4.1.8*

$\{E_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{N}_0} \subseteq l^\infty$ *tali che* $a \in E_{j,n} \iff \exists\, u \in C^1(A_{j,n})$ *tale che*

- $Lu = S_a$ *in* $A_{j,n}$
- $u(x_j, y_j, t_j) = 0$
- $|D^\alpha u| \leq n$ *per* $|\alpha| \leq 1$ *in* $A_{j,n}$
- $|D^\alpha u(v) - D^\alpha u(w)| \leq n|v-w|^{1/n}$ *per* $\begin{cases} |\alpha| = 1 \\ v, w \in A_{j,n} \end{cases}$

(4.5)

Tesi | $\{E_{j,n}\}$ *sono insiemi chiusi e senza parte interna*

Dimostrazione: si dimostrano separatamente le due proprietà:

1. Per quanto riguarda la proprietà di chiusura, si vuole mostrare che se $\{a^k\} \subseteq E_{j,n}$ è tale che $a^k \xrightarrow{l^\infty} a$ allora $a \in E_{j,n}$. Ciò, a sua volta, si riduce a mostrare l'esistenza di una funzione u con le proprietà in (4.5).

   Si deduce immediatamente che $S_{a^k} \to S_a$ in modo uniforme, poiché $|S_a - S_{a^k}| \leq M_1 \left\|a - a^k\right\|$ per la (4.4) con $\alpha = 0$. Inoltre, per le ipotesi su a^k esiste una funzione u_k che risolve l'equazione $Lu_k = S_{a^k}$ e che soddisfa le altre proprietà in (4.5). Proprio grazie a queste ultime u_k soddisfa le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà con $X = A_{j,n}$, quindi per una qualche u vale che $u_{k_h} \to u$ uniformemente .

   In particolare, sfruttando il fatto che L è un operatore del primo ordine, si ricava facilmente che $Lu = S_a$ in $A_{j,n}$ poiché

$$\begin{array}{ll} Lu_{k_h} \to Lu & \text{uniformemente per le proprietà di } u_k \\ \| & \\ S_{a^{k_h}} \to S_a & \text{uniformemente} \end{array}$$

   e che u eredita tutte le altre proprietà in (4.5) da u_k grazie alla convergenza uniforme.

2. In ultimo si vuole mostrare che $\mathring{E}_{j,n} = \emptyset$ ragionando per assurdo. Si suppone che esista una successione a interna a $\mathring{E}_{j,n}$. Definendo poi
$$\delta_j = \frac{1}{c_j}\mathbb{1}_{\{j\}} \in l^\infty,$$
si osserva che esiste un $\theta \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo tale che $a' = a + \theta\delta_j \in E_{j,n}$. Siano ora u e u' le soluzioni rispettivamente di $Lu = S_a$ e di $Lu = S_{a'}$ con le proprietà in (4.5) e sia
$$u'' = \frac{u' - u}{\theta}.$$
Chiaramente è vero che $u'' \in C^1$; inoltre si deduce immediatamente usando la linearità di L e la definizione della serie S, che vale la relazione
$$Lu'' = S_{\delta_j} = f_j,$$
ma ciò entra in contraddizione con il lemma 4.1.7 (di cui valgono tutte le ipotesi), non essendo F analitica.

QED

Teorema 4.1.10.

Ipotesi	$A \subseteq \mathbb{R}^3$ *aperto*
Tesi	$\exists\, F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \;:\; \nexists\, u \in C^1(A, \mathbb{R})$ *tale che* $\begin{cases} Lu = F \text{ in } A \\ u_x,\, u_y,\, u_t \text{ soddisfano} \\ \text{la condizione di Hölder} \end{cases}$

Osservazione. L'arbitrarietà di A implica che questo valga per tutti gli aperti di $\mathbb{R}^3$ e quindi che $Lu = F$ non abbia soluzioni C^1 e con derivate prime continue secondo Hölder da nessuna parte.

Osservazione. La tesi implica come conseguenza naturale che non esistano nemmeno soluzioni C^k per ogni $k \geq 1$, in quanto $C^k \subseteq C^1$.

Dimostrazione: Si ragiona per assurdo e si conclude nei seguenti tre passi (di cui il secondo è quello che merita più attenzione).

1. $E_{j,n} \subseteq l^\infty$ per ogni $j, n \in \mathbb{N}_0$ ovviamente.

2. $a \in l^\infty \implies a \in E_{j,n}$ per qualche $j, n \in \mathbb{N}_0$ (i quali dipendono da a).

   Supponendo la tesi falsa, è possibile affermare che $\forall a \in l^\infty\ \exists\, A \in \mathbb{R}^3$, $u^* \in C^1(A, \mathbb{R})$ tali che si ha che $Lu^* = S_a$ e che u^* ha le derivate prime continue secondo Hölder in A.

   Si sa, inoltre, che per la densità dell'insieme dei punti in (4.3) esiste un $(x_j, y_j, t_j) \in A$ ed essendo A aperto esiste un k (scelto abbastanza grande) tale per cui $A_{j,k} \subseteq A$.

   Consideriamo ora la funzione $u = u^* - u^*(x_j, y_j, t_j)$, in modo che u mantenga le proprietà di u^*, ma soddisfi al contempo la condizione $u(x_j, y_j, t_j)$ come richiesto in una della proprietà in (4.5).

   In ultimo è chiaro che, essendo le derivate prime di u continue secondo Hölder, esiste un m abbastanza grande per cui valgono le condizioni rimanenti in (4.5) con m al posto del pedice n e prendendo poi $n = \max\{k, m\}$ l'implicazione è dimostrata.

3. Dai primi due passi di conclude che

$$l^\infty = \bigcup_{j,n\in\mathbb{N}_0} E_{j,n},$$

ma, quindi, per il fatto che l^∞ è di Banach e per le proprietà degli insiemi $E_{j,n}$, valgono sia le ipotesi del corollario 4.1.5 che la negazione della tesi. Ciò è assurdo.

QED

4.2 Esempio di Kowalevski

L'esempio su cui ci si concentra è dovuto a Kowalevski stessa ed è stato utile a suo tempo a comprendere più a fondo, in modo quanto più essenziale possibile, l'importanza, o meglio la necessità, di assumere che la superficie scelta per assegnare i dati di Cauchy sia **non-caratteristica** per l'equazione differenziale in osservazione. Inoltre costituisce un controesempio alla congettura proposta da Weierstrass, che suggeriva la possibilità di definire funzioni analitiche attraverso equazioni differenziali. Infatti tutto ciò viene citato all'interno di una lettera rivolta a Fuchs (un matematico tedesco dell'Università di Berlino) scritta da Weierstrass (che supervisionò il lavoro di ricerca di Kowalevski), con cui quest'ultimo faceva richiesta per l'accettazione delle tesi di dottorato di Sofya. La lettera è riportata integralmente in [Ken83, app.C].
Seguendo le orme di Kowaleski, si consideri quindi il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in una dimensione:

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{4.6}$$

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

Osservazione. La condizione per u_x su Γ necessaria per completare il problema di Cauchy è già implicitamente imposta dall'equazione (4.7).

Osservazione. In realtà il dato iniziale realmente scelto da Kowalevski durante la sua ricerca è $\frac{1}{1-x}$, che però si è deciso di non utilizzare qui per semplicità, evitando alcuni problemi legati alla singolarità della funzione e mantenendo invariato il significato del ragionamento.

L'obiettivo che ci si pone è quello di dimostrare che non ammette soluzioni analitiche in un intorno dell'origine.

1. Per cominciare si osserva che in questo caso la superficie su cui sono stati assegnati i dati di Cauchy (1.2) è $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$. Essa in ogni punto ha come versore normale $(0,1)$ ed è, quindi, caratteristica per l'equazione (4.6), poiché

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha = a_{(2,0)} \boldsymbol{\nu}^{(2,0)} = 0.$$

2. Per assurdo si supponga di avere una soluzione del problema u analitica in un intorno dell'origine, ovvero:

$$u(x,t) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)} c(\alpha)\, x^{\alpha_1}\, t^{\alpha_2}, \quad c(\alpha) = \frac{D^\alpha u(0,0)}{\alpha!}$$

dove $|(x,t)| < r$ per qualche $r > 0$.

3. Si calcolano i valori dei coefficienti $c(2n,0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Per fare questo si sviluppa in serie di potenze centrata nell'origine la funzione del problema di Cauchy:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Da questa serie si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} D_x^{2n}u(0,0) &= \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\,\frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = (-1)^n(2n)! \\ D_x^{2n+1}u(0,0) &= \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\,\frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

   dalle quali si ricava: $c(2n,0) = (-1)^n$ e $c(2n+1,0) = 0$.

4. Si calcolano i valori dei coefficienti $c(2n,n)$ e si dimostra che $c(2n,n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.
   A questo scopo, invece, si sfrutta l'equazione (1.1) per ottenere la seguente relazione tra i coefficienti:

$$c(\alpha_1, \alpha_2+1) = \frac{(\alpha_1+2)(\alpha_1+1)}{(\alpha_2+1)}\,c(\alpha_1+2, \alpha_2). \tag{4.8}$$

   E si utilizza, quindi, quest'ultima come segue:

$$\begin{aligned} c(2n,n) &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n}\,c(2n+2, n-1) && (4.8) \quad \text{con} \quad \begin{cases}\alpha_1 = 2n \\ \alpha_2+1 = n\end{cases} \\ &= \ldots = \frac{(2n+2n)\cdots(2n+1)}{n!}\,c(2n+2n,0) && \text{iterando su } n \\ &= \frac{(4n)!}{(2n)!\,n!}(-1)^{2n} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{64n}{e}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty && \text{per la formula di Stirling} \end{aligned}$$

5. Si completa il ragionamento in modo immediato osservando che $c(2n,n)\,x^{2n}\,t^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ $\forall (x,t) \neq (0,0)$, infatti ciò implica direttamente che la serie di potenze non converge in ogni punto diverso dall'origine e questo è assurdo.

4.3 Esempio di Hadamard

L'esempio che si propone ora, dovuto ad Hadamard (1932), aiuta a capire un limite importante del teorema di Cauchy-Kowalevski, ovvero il fatto che esso non fornisca alcun controllo sulla **relazione** tra i dati di Cauchy e la forma della soluzione analitica, la quale potrebbe risultare instabile.

Per osservare ciò si considera il seguente problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due dimensioni al variare di n:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_y(x,0) &= n\sin(nx)e^{-\sqrt{n}} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.9}$$

L'obiettivo che ci si pone in questo caso è quello di mostrare come al crescere di n si verifica un blow-up della soluzione u_n del problema di Cauchy (4.9).

1. Il problema, come nell'esempio precedente, è assegnato su $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, che è naturalmente una superficie non caratteristica per l'equazione di Laplace (si noti infatti che essa è ellittica).

2. E' facile verificare che la funzione $u_n(x,y) = \sin(nx)\sinh(ny)e^{-\sqrt{n}}$ soddisfa il problema di Cauchy e che essa è analitica, per questo è anche l'unica possibile con quest'ultima proprietà.

3. Si osserva, infine, come $\sinh(ny)e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Come conclusione di questa discussione è interessante osservare anche come la soluzione non dipenda con continuità dai dati. Infatti, considerando il problema di Cauchy per $n = \infty$, ovvero con dati $u(x,0) = u_y(x,0) = 0$, si nota immediatamente che l'unica soluzione analitica è $u \equiv 0$, la quale è profondamente diversa dal comportamento asintotico di u_n.

Capitolo 5
Versioni alternative

(classica e astratta)
Ispirazione a Ovsyannikov, L.V. (vedi bibliografia) (vedi pag 109 e 110 treves analytic)

Capitolo 6
Conseguenze

6.1 Teorema di Holmgren

6.2 Altre applicazioni

I. Ekeland
Cartan Kahler
4 (with Chiappori), ”Aggregation and market demand: an exterior differential calculus viewpoint”, Econometrica, 67 (1999), p. 1435-1458
This paper solves a basic problem in economic theory, which had remained open for thirty years, namely the characterization of market demand functions. The method of proof consists of reducing the problem to a system of nonlinear PDEs, for which convex solutions are sought. This is rewritten as an exterior differential system, and is solved by the Cartan-Kähler theorem, together with some algebraic manipulations to achieve convexity. The introduction of exterior differential calculus proved to be a breakthrough, and was the starting point of a long collaboration with P.A. Chiappori. We realized that the mathematical structure we had discovered in this problem was to be found also in one of the major problems of econometrics: given a group (a household, for instance), can one characterize and identify the preferences of each member if one observes only the collective demand ?. I am happy to say that this research program is now concluded, with the publication of two major papers [14] and [25] and a100-pages survey [28] which will probably turn into a book.
14: (with P.A. Chiappori) ”The microeconomics of group behaviour: general characterization”. Journal of Economic Theory, september 2006 , volume 130 (p.1 – 26)
25: (with P.A. Chiappori) ”The microeconomics of group behaviour: Identification”. Econometrica, 2005, 44 pages
28: (with P.A. Chiappori). ”The mathematics and economics of aggregation”. Foundations and Trends in Economic Theory, 2009

Bibliografia

[CE99] Pierre A. Chiappori and Ivar Ekeland. Aggregation and market demand: an exterior differential calculus viewpoint. *Econometrica*, 67:1435–1458, 1999.

[CE06] Pierre A. Chiappori and Ivar Ekeland. The micro economics of group behavior: General characterization. *Journal of Economic Theory*, 130:1–26, 2006.

[CE09a] Pierre A. Chiappori and Ivar Ekeland. The economics and mathematics of aggregation: Formal models of efficient group behavior. *Foundations and Trends® in Microeconomics*, 5:1–2, 2009.

[CE09b] Pierre A. Chiappori and Ivar Ekeland. The Microeconomics of Efficient Group Behavior: Identification. *Econometrica*, 77:763 – 799, 2009.

[Eke] Ivar Ekeland. Some applications of the Cartan-Kähler theorem to economic theory.

[Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2010.

[FMS20] Nicola Fusco, Paolo Marcellini, and Carlo Sbordone. *Lezioni di analisi matematica 2.* Zanichelli, 2020.

[Fol95] Gerald B. Folland. *Introdution to Partial Differential Equations.* Princeton University Press, 1995.

[Hö63] Lars Hörmander. *Linear Partial Differential Operators.* Spinger-Verlag, 1963.

[Joh82] Fritz John. *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 1982.

[Ken83] Don H. Kennedy. *Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky.* Ohio University Press, 1983.

[Luc24] Sandra Lucente. Teorema di Cauchy-Kovalevskaja per le equazioni differenziali. *Le Scienze*, 2024. Collona *Rivoluzioni matematiche.*

[Ovs65] L.V. Ovsyannikov. *Singular operators in Banach spaces scales* (in Russian). Doklady Acad. Nauk., 1965. p. 819–822.

[RF10] Halsey L. Royden and Patrick M. Fitzpatrick. *Real Analysis.* Pearson, 2010.

[Rou80] Delfina Roux. *Istituzioni di analisi superiore - PARTE I.* Edizioni la Viscontea, 1980.

[Tre70] François Treves. On local solvability of partial differential equations. 1970.

[Tre75] François Treves. *Basic Linear Partial Differntial Equations.* Amacademic Press, 1975.

[Tre22] François Treves. *Analytic Partial Differential Equations.* Springer Nature, 2022.