

# Il teorema di Cauchy-Kowalevski e le sue conseguenze

Candidato: Alessandro Pedone,  
Relatore: Prof. Maurizio Grasselli

Politecnico di Milano

24 settembre 2024

# Indice

1 Introduzione

2 Strumenti fondamentali

3 Versione invariante

4 Esempi

5 Versioni alternative

6 Applicazioni

# Sofya Vasilyevna Kovalevskaya (1850-1891)

Diamo per nota la figura storica di Augustin-Louis Cauchy.  
Kowalevski è stata:

- una matematica russa allieva di Weierstrass
- la **prima donna** a conseguire un dottorato (3 tesi risalenti al 1875) e a ottenere una cattedra in Europa (in matematica)

Esistono diverse sue **rappresentazioni artistiche** sia in letteratura che nel cinema. Le più rilevanti sono:

- Una biografia accurata: *Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky* (1983), Don H. Kennedy
- Un racconto breve: *Too Much Happiness* (2009), Alice Munro

# Domande guida

*E' possibile che esista una soluzione analitica  
a un sistema di EDP  
con condizioni di Cauchy?*

La risposta sarà affermativa, per questo ci chiediamo già:

- sotto quali ipotesi?
- la soluzione è unica?
- il problema è ben posto?
- quali conseguenze hanno risultati ottenuti?

# Tipologie di equazioni (e operatori)

Equazioni di ordine  $k$ :

---

---

Lineare	$\sum_{ \alpha  \leq k} a_\alpha D^\alpha u = f$
---------	--

---

Quasi-lineare	$\sum_{ \alpha =k} a_\alpha(x, D^\beta u) D^\alpha u + a_0(x, D^\beta u) = f,$ $ \beta  < k$
---------------	--

---

Non lineare	$F(x, D^\alpha u) = 0, \quad  \alpha  \leq k$
-------------	---

---

In forma normale	$D_t^k u = G(x, D_t^j D_x^\alpha u), \quad  \alpha  + j \leq k, j < k$
------------------	--

---

---

# Strumenti

- Superfici caratteristiche
- Metodo delle caratteristiche
- Problemi di Cauchy
- Serie di potenze



# Superfici caratteristiche per op. lineari

$L$  operatore differenziale lineare.

## Definizione 2.1

Forma caratteristica di  $L$ :

$$\chi_L(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad \text{con} \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

## Definizione 2.2

Varietà caratteristica di  $L$  in  $x$ :

$$\text{char}_x(L) = \{\xi \neq 0 : \chi_L(x, \xi) = 0\}$$

## Definizione 2.3

$\Gamma$  superficie caratteristica per  $L$  in  $x \iff \nu(x) \in \text{char}_x(L)$

## Osservazione

Caso di operatore del 1° ordine:  $A = (a_1, \dots, a_n)$  tangente a  $\Gamma$ .  
Utile per generalizzazioni successive.

# Significato

$$\xi \in \text{char}_x(L)$$

in  $x$   $L$  non è “propriamente” di ordine  $k$  nella direzione  $\xi$ .

$\Gamma$  non caratteristica

date su  $\Gamma$   $D_{\nu}^i u$  ( $i < k$ ) di una soluzione  $u$  è possibile calcolare tutte le sue derivate parziali su  $\Gamma$ .

# Op. quasi-lineari 1° ordine

- $\gamma(s) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizzazione locale di  $\Gamma$
- $u = \phi$  su  $\Gamma$  dato di Cauchy

## Definizione 2.4

$\Gamma$  non caratteristica in  $x_0 = g(s_0)$

$$\iff \det \underbrace{\begin{bmatrix} D_{s_1} \gamma_1 & \cdots & D_{s_{n-1}} \gamma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{s_1} \gamma_n & \cdots & D_{s_{n-1}} \gamma_n \end{bmatrix}}_{\text{span del piano tangente}} \begin{bmatrix} a_1(\gamma, \phi(\gamma)) \\ \vdots \\ a_n(\gamma, \phi(\gamma)) \end{bmatrix} (s_0) \neq 0$$

# Metodo delle caratteristiche

I problemi seguenti <sup>1</sup> sono **equivalenti**.

$$\text{EDP : } \begin{cases} \sum a_j(x, u) D_{x_j} u = b(x, u) \\ u = \phi \text{ su } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{EDO : } \begin{cases} D_t x = A(x, y) \text{ }^2 \\ D_t y = b(x, y) \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = \phi(x_0), \quad \forall x_0 \in \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

Dove  $y = u(x)$  e  $A(x, y) = [a_1(x, y), \dots, a_n(x, y)]$ .

---

<sup>1</sup>si può generalizzare al caso non lineare (1° ordine!)

<sup>2</sup>le soluzioni  $x$  vengono dette *curve caratteristiche*

## Teorema 2.1

Ipotesi		Problema (1)
		$a_j, b, \phi, \Gamma \in C^1$
		$\Gamma$ non caratteristica
Tesi		$\exists!$ soluzione $C^1$ in un intorno di $\Gamma$
Dim		sfruttando il teorema di esistenza e unicità locale per EDO

# Problema di Cauchy

- Spesso utilizzato quando la superficie dei dati **non** è un bordo.
- Necessita anche le **derivate normali** ( $D_\nu^j u$ ) della soluzione sulla superficie per determinarla univocamente.
- Portano con sé il rischio di un problema **sovradeterminato** (buone per l'unicità e meno per l'esistenza della soluzione).

# Problema generale

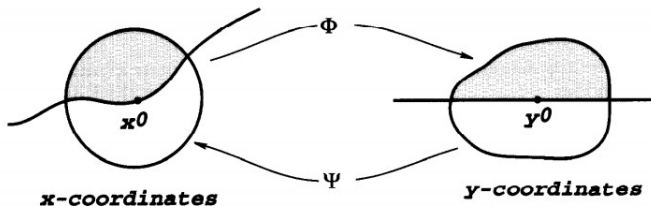
$$\begin{cases} F^*(x, D^\alpha u^*) = 0 & |\alpha| \leq k, F^* \text{ almeno } C^1 \\ D_\nu^j u^* = \phi_j^* & \text{su } \Gamma^* \text{ per } j < k \end{cases}$$



# Mappatura in $t = 0$

Detta  $\gamma^*$  la parametrizz. locale di  $\Gamma^*$ , applichiamo la mappa:

$$\Phi(x) = [x_1 \quad \cdots \quad x_{n-1} \mid x_n - \gamma^*(x_1, \dots, x_{n-1})]$$



L. C. Evans, *Partial Differential Equations*

- 1 Selezioniamo una variabile privilegiata e chiamiamola “tempo”:

$$t \leftarrow x_n$$

$$x \leftarrow (x_1, \dots, x_{n-1})$$

- 2 Chiamiamo  $\Gamma = \{t = 0\}$ .
- 3 Indichiamo le derivate nel modo seguente:  $D_t^j D_x^\alpha u$ .
- 4 Otteniamo il problema ( $u^* = u(\Phi)$ ):

$$\begin{cases} F(x, t, D_t^j D_x^\alpha u) = 0 & |\alpha| + j \leq k \\ D_t^j u(x, 0) = \phi_j(x) & \text{per } j < k \end{cases}$$

# Superfici non caratteristiche in generale

## Definizione 2.5

$\Gamma^*$  (o  $\Gamma$ ) è non caratteristica  $\iff$  l'equazione su  $\Gamma$  può essere riscritta in **forma normale** rispetto a  $t$ .

## Osservazione

Si dimostra che è coerente con le definizioni precedenti.

## Osservazione

- Caso lineare  $\rightarrow$  condizione sui coefficienti.
- Caso non lineare  $\rightarrow$  validità ipotesi teorema del Dini su  $F$ .

# Serie di potenze notevole

## Definizione 2.6

Funzione maggiorante:

$$\mathcal{M}_{Cr}(x) = \frac{Cr}{r - (x_1 + \dots + x_n)}$$

## Osservazione

Per il teorema multinomiale se  $|x| < r/n$  si ha che

$$\frac{Cr}{r - (x_1 + \dots + x_n)} = C \sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}} x^{\alpha}.$$

# Metodo dei maggioranti

## Teorema 2.2 (utilità del maggiorante)

$$\begin{cases} g_\alpha \geq |f_\alpha| \\ \sum g_\alpha x^\alpha \text{ ha raggio di conv. } R \end{cases} \implies \begin{matrix} \sum f_\alpha x^\alpha \\ \text{ha raggio almeno } R \end{matrix}$$

In questo caso si scrive:  $\sum g_\alpha x^\alpha \gg \sum f_\alpha x^\alpha$ .

## Teorema 2.3 (costruzione del maggiorante)

$\sum f_\alpha x^\alpha$  ha raggio  $R \implies \exists r < R, C > 0$  tali che

$$|f_\alpha| \leq C \frac{1}{r^{|\alpha|}} \leq C \frac{|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}}$$

# Schema dell'approccio

Seguendo l'ordine cronologico di scoperta procediamo per **generalizzazioni progressive**:

- 1 EDO
- 2 EDP quasi-lineari
- 3 EDP in forma normale

# EDO

Teorema di unicità  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{C}^n$  olomorfa (A, B aperti)

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \forall x \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

Se la soluzione esiste è unica



# Teorema di esistenza locale con stima del raggio

# EDP quasi-lineari

Forma particolare del sistema di interesse

## DIMOSTRAZIONE: metodo delle caratteristiche e metodo dei maggioranti

- 1 si osserva come i coefficienti di una serie di potenze che risolve l'equazione devono essere dei polinomi a coefficienti non negativi
- 2  $A_i^* \gg A_i, B^* \gg B \implies u^* \gg u$
- 3 si scelgono  $A_i^*, B^*$  in modo tale da poter calcolare esplicitamente una soluzione analitica con il metodo delle caratteristiche

# Stima del raggio di convergenza

Ricordando la stima:

$$\tilde{r} = \frac{1}{n-1} \frac{r}{8Cmn} \text{ con } C \geq \frac{1}{2}$$

Osserviamone l'andamento rispetto a  $r$ , sapendo che:

$$r < \min\{\text{raggi di conv. dei coefficienti } a_{ml}^i, b_m\}$$

$$C \geq \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{i,m,l,\alpha} |a_{ml}^i r^{|\alpha|}| \\ \max_{m,\alpha} |b_m r^{|\alpha|}| \end{array} \right\}$$

# EDP non lineari

Forma particolare del sistema di interesse

# EDP non lineari

Trasformazione nel sistema quasi-lineare precedente (che è il grande merito di Kowalevski)

# Esempio di Lewy

Importanza della richiesta di analiticità

generalizzazione esempio di Lewy, enunciato

## Teorema 4.1

Ipotesi

$A \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto

Tesi

$\exists F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) : \nexists u \in C^1(A, \mathbb{R})$

tale che  $\begin{cases} Lu = F \text{ in } A \\ u_x, u_y, u_t \text{ soddisfano} \\ \text{la condizione di Hölder} \end{cases}$



## Idea della dimostrazione:

- 1 traslare il problema del teorema precedente in modo da ricondursi al caso di un generico punto  $(x_0, y_0, t_0)$ , usando come forzante la funzione  $g(x, y, t) = f(t - 2xy_0 + 2x_0y)$ ;
- 2 costruire con una serie una funzione  $S_a \in C^\infty$  per ogni  $a \in l^\infty$ ;
- 3 costruire degli insiemi  $E_{j,n} \subseteq l^\infty$  chiusi e senza parte interna sfruttando  $S_a$  e il teorema di Ascoli-Arzelà;
- 4 concludere la dimostrazione del nuovo teorema utilizzando i lemmi appena citati per ricavare, con un ragionamento per assurdo, l'uguaglianza  $l^\infty = \bigcup E_{j,n}$ , grazie alla quale si può applicare l'argomento di Baire.

# Esempio di Kowalevski

Importanza superfici non caratteristiche

# Esempio di Hadamard

Nessuna garanzia della stabilità della soluzione

# Versione classica

Enunciato, può essere visto come corollario di un teorema più astratto.

# Versione astratta

Premessa

$$E_s = H(\overline{\mathcal{O}_s}; \mathbb{C}^m)$$

con  $s \in [0, 1]$ , costante  $C$

# Enunciato

## Dimostrazione esistenza

## Dimostrazione unicità



# Versioni "olomorfe"

Si può rifare tutto con  $t$  variabile complessa e i teoremi non cambiano. Lo stesso vale anche per la versione invariante normale.

Le conseguenze di questo teorema si osservano in vari campi, tra cui i principali sono:

- teoria delle equazioni differenziali
- fisica matematica: emersione di numerose domande (cosa succede nella realtà se esiste una sol. analitica locale?)
- geometria differenziale
- teoria economica

Impatto sulla teoria delle equazioni differenziali:

- confutare la congettura di Weierstrass (ogni funzione è
- teorema di Holmgren
- Treves e Nierenberg per la ricerca di condizioni necessarie e/o sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali
- Hormander la teoria degli operatori differenziali lineari (con particolare attenzione alla condizioni necessarie)

# Teorema di Holmgren

Enunciato astratto, si dimostra utilizzando la versione astratta di CK

## Enunciato concreto

## Sketch della dimostrazione

# Teorema di Cartan-Kähler

Per quanto riguarda geometria differenziale e teoria economica  
abbiamo un risultato che segue dal teorema di CK  
Enunciato e applicazione al campo economico

Nonostante la ricerca condotta in quegli anni

- non fosse guidata da applicazioni immediate
- portò a risultati deludenti rispetto alle aspettative di Cauchy e Weierstrass

ha avuto un impatto gigantesco grazie alla comprensione delle soluzioni di sistemi di EDP che ci ha permesso di raggiungere.



*Era una vita – gli costava dirlo, come ebbe ad ammettere, perché si era sempre guardato dagli eccessivi entusiasmi –, era una vita che aspettava di veder entrare nel suo studio un allievo del genere. Un allievo in grado di lanciargli una sfida assoluta, di non seguire soltanto il percorso spericolato della sua mente, ma se possibile di spiccare un volo più alto.*

— Alice Munro, *Too Much Happiness*