



POLITECNICO DI MILANO

Corso di Laurea Triennale in INGEGNERIA MATEMATICA
Scuola di INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE

Il teorema di Cauchy-Kowalevski e le sue conseguenze

Tesi di

Alessandro Pedone
Matricola 981105

Relatore:

Prof. Maurizio Grasselli

Sessione di Laurea Settembre 2024
Anno Accademico 2023/2024

All his life – he had difficulty saying this, as he admitted, being always wary of too much enthusiasm – all his life he had been waiting for such a student to come into this room. A student who would challenge him completely, who was not only capable of following the strivings of his own mind but perhaps of flying beyond them.

— Alice Munro, *Too Much Happiness*

Abstract

Sofya Kowalevski, la prima donna ad conseguire un dottorato in matematica in Europa, nel 1874 dava la luce alla dimostrazione del teorema di Cauchy-Kowalevski (TCK), il primo risultato generale per l'esistenza di soluzioni locali analitiche per equazioni differenziali alle derivate parziali (EDP) con dati di Cauchy.

La tesi mira a presentare questa pietra miliare della matematica esaltandone la profondità del dettaglio, le conseguenze e anche la semplicità delle idee che ha permesso di far emergere. A questo scopo sono ricorrenti i richiami di nozioni e risultati fondamentali ad affrontare il discorso e, inoltre, vengono trattate tutte le forme principali in cui è possibile enunciare il TCK.

A completamento sono presenti anche una sezione dedicata a tre esempi storicamente cruciali alla comprensione delle EDP e un'altra dedicata, invece, alle due sue fondamentali applicazioni: il teorema di Holmgren e il teorema di Cartan-Kähler.

Parole chiave: EDP, caratteristiche, analiticità/olomorfia, serie di potenze, metodo dei maggioranti, teoremi di Cauchy-Kowalevski, Holmgren e Cartan-Kähler

Indice

Abstract	iii
1 Introduzione	1
1.1 Chi era Kowalevski?	1
1.2 Il teorema di Cauchy-Kowalevski	3
2 Strumenti fondamentali	5
2.1 Superfici caratteristiche	6
2.2 Metodo delle caratteristiche	8
2.3 Problemi di Cauchy	10
2.4 Serie di potenze	12
3 Il teorema di Cauchy-Kowalevski	15
3.1 EDO	16
3.2 EDP quasi-lineari	17
3.3 EDP in forma normale	22
4 Esempi	23
4.1 Esempio di Lewy	23
4.2 Esempio di Kowalevski	32
4.3 Esempio di Hadamard	34
Bibliografia	35

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Chi era Kowalevski?



Sofya Vasilyevna Kovalevskaya (1850-1891) è stata una matematica russa. Per varie ragioni, tra cui proprio il teorema al centro di questa discussione, è tuttora una delle figure femminili più rilevanti per la storia di questa disciplina.

Prima di tutto, è importante sottolineare che, da qui in poi, ci riferiremo spesso a lei con il nome con cui soleva firmarsi nelle sue pubblicazioni, ovvero Kowalevski.

Per allontanarsi dalla Russia dovette prendere parte a un matrimonio bianco, difatti sposò un uomo con cui poi non ebbe alcun reale rapporto sentimentale e da cui rimase spesso anche geograficamente distante. Tutto ciò le permise di continuare a studiare in Germania; ed è qui che conobbe Karl Weierstrass, uno dei matematici più influenti del suo tempo. Dopo un prima

conoscenza avvenuta nello studio del professore, il rapporto tra loro continuò a svilupparsi grazie alle evidenti doti matematiche di Kowaleski, che Weierstrass non poté fare a meno di assecondare. Infatti, continuò a impartirle lezioni private, fino ad arrivare a supervisionare il suo lavoro di ricerca.

Per quanto riguarda le idee politiche di Kowalevski, possiamo affermare con certezza storica la sua vicinanza a movimenti femministi e idee socialiste e radicali, le quali possono essere fatte risalire al suo background familiare e agli spunti che colse durante la sua esperienza di vita negli stati dell'odierna Europa. È certamente degno di nota il fatto che ricevette in regalo da Anna, sua sorella, diverse copie di riviste radicali di quel tempo, le quali discutevano del cosiddetto nichilismo antico¹.

Quello su cui vogliamo concentrare la nostra attenzione non sono le sue idee politiche, sociali e filosofiche, ma piuttosto sul suo contributo alla matematica. Kowaleski, con l'aiuto di quello che possiamo chiamare il suo mentore, arrivò a diverse scoperte importanti. Dopo diversi anni di collaborazione, arrivò a pubblicare ben tre tesi di dottorato in un solo anno: il 1874. Ma questo non è l'unico aspetto notevole, infatti, fu

¹Per i nichilisti antichi la scienza, e non la religione e la superstizione, appariva come il mezzo più efficace per aiutare la popolazione a condurre e rappresentava, quindi, verità e progresso.

anche la prima donna a conseguire un dottorato; ciò fu reso possibile dal supporto di Weierstrass, come emerge da una lettera che scrisse lui stesso a Fuchs, un suo collega all'Università di Berlino, a riguardo dell'approvazione delle tesi di Kowaleski. Inoltre le sue pubblicazioni, oltre che significative per quanto appena detto, si rivelarono delle pietre miliari della matematica. In particolare i temi trattati sono:

- Equazioni differenziali alle derivate parziali (EDP), teorema di Cauchy-Kowalevski
- Meccanica, Kowalevski top
- Integrali ellittici

Dopo il successo, coronato anche da alcuni premi, che naturalmente seguì alla pubblicazione di queste ricerche, ritornò per un periodo in Russia; scelta che però si rivelerà di fatto inutile per il proseguimento della sua carriera accademica. Successivamente, quando il marito a cui doveva l'opportunità di aver studiato in Germania venne a mancare, si trasferì in Svezia, dove collezionò un altro primato: divenne la prima donna al mondo professoressa di matematica, ottenendo la cattedra all'Università di Stoccolma.

Purtroppo la sua vita venne interrotta prematuramente all'età di 41 da una polmonite, che, considerando ciò quanto emerge dalle fonti, le impedì di portare avanti una sua grande passione: la produzione letteraria. Nonostante non abbia potuto esprimersi come avrebbe voluto in quest'ambito, esistono numerose sue rappresentazioni artistiche, sia in letteratura che nel cinema.

Citiamo di seguito le opere cinematografiche principali:

- *Sofya Kowalevski* (1985, Lenfilm, 3 episodi, 218 minuti), Ayan Gasanovna Shakhmaliyeva (1932-1999, originaria dell'Azerbaijan).
- *A Hill on the Dark Side of the Moon* (Svedese: *Berget på månens baksida*) (1983), Lennart Hjulström (1938-2022)

Citiamo di seguito le opere letterarie principali:

- una biografia: *Sonja Kovalevsky. Ciò che ho vissuto con lei e ciò che mi ha detto di sé* (1892, Ed. Albert Bonniers, Stoccolma), Anne Charlotte Leffler (una cara amica di Kowaleski sorella del matematico Gösta Mittag-Leffler e moglie dell'algebrista italiano Pasquale del Pezzo)
- un'autobiografia: *A Russian Childhood* (1978, Springer New York, NY), Sofya Kovalevskaya, tradotto e curato da Beatrice Stillman
- una biografia: *Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky* (1983, Ohio University Press, Athens, Ohio), Don H. Kennedy
- un romanzo biografico: *Beyond the Limit: The Dream of Sofya Kovalevskaya* (2002, Tom Doherty Associates, LLC), Joan Spicci (matematico ed educatore)
- un racconto biografico: *Too Much Happiness*² (2009, Harper's Magazine), Alice Munro (1931-2024, premio Nobel per la letteratura)

²il racconto ripercorre gli ultimi giorni di vita di Kowalevski arricchito da reminiscenze del passato che Munro ha acquisito da lettere, diari e scritti (documenti a cui ha potuto accedere tramite la moglie di Don H. Kennedy la quale è una lontana discendente di Kowalevski)

1.2 Il teorema di Cauchy-Kowalevski

Una volta introdotta la figura storia, possiamo ora fare il primo passo verso la scoperta di una delle ricerche di Kowaleski: il teorema di Cauchy-Kowalevski, che da qui in poi capiterà di abbreviare con l'acronimo TCK.

Innanzitutto descriviamo rapidamente il contesto scientifico di quel tempo relativo all'ambito delle EDP.

Padre di queste ricerche che si svolgevano nell'Ottocento è Augustin-Louis Cauchy, un matematico che sarà sicuramente noto al lettore. In quegli anni, in particolare tra il 1835 e il 1842, Cauchy si stava occupando di sviluppare la teoria delle funzioni olomorfe, già avviata da altre grandi personalità di spicco come Eulero, Laplace e Fourier.

Cauchy ebbe l'intuizione di applicare questi risultati alle equazioni differenziali.

Quello che è importante cogliere, cercando di calarsi nella mentalità di quel periodo, è che la teoria classica e le serie di potenze erano strumenti molto promettenti, in primis per la loro semplicità ed eleganza, ma anche per la potenzialità di approssimazione che racchiudeva un semplice troncamento di una serie.

Il tentativo di Cauchy di applicare alle equazioni differenziali gli strumenti ottenuti dalle sue ricerche fu un successo, ma si rivelò soltanto parziale per una semplice ragione: egli non riuscì ad andare oltre lo studio di equazioni differenziali ordinarie (EDO) e di EDP lineari.

Il salto avvenne proprio grazie a Kowalevski e Weierstrass. Quest'ultimo fu molto ottimista sui risultati che pensava si potessero raggiungere, forse ancora più di Cauchy: basti pensare che enunciò una congettura secondo la quale sarebbe stato possibile definire funzioni analitiche tramite equazioni differenziali, grazie a serie di potenze formali ricavate dalle espressioni delle equazioni. Per tale ragione spinse Kowalevski, insieme al suo talento, verso questo tema, nel quale lei seppe indagare molto più a fondo.

È sbagliato, però, pensare che le guide di Kowaleski furono soltanto Cauchy e Weierstrass: altri matematici si dedicarono a queste tematiche, tra i quali ricordiamo, tra i più importanti, Briot, Bouquet e Fuchs, che svilupparono meglio i concetti di singolarità, e Jacobi, che fornì per primo la definizione di equazione in forma normale³.

Da queste basi, l'idea importante avuta da Kowalevski può essere riassunta in questo modo:

1. attuare un cambio di variabile che permettesse di scrivere un'equazione non lineare in forma normale (si vedano i capitoli 2 e 3 per il significato di questo termine), mantenendo le ipotesi di regolarità sui dati, e di potersi occupare dell'esistenza di una soluzione a questo sistema;
2. trasformare un'equazione qualsiasi in forma normale in un sistema quasi-lineare particolare;
3. applicare il metodo dei maggioranti già utilizzato da Cauchy per le sue scoperte su EDO ed EDP lineari.

Come accade spesso in matematica, la dimostrazione venne poi semplificata da E. Goursat in un suo libro di testo di analisi matematica risalente al 1900 circa. Inoltre, nel corso

³questo in particolare si rivelerà un concetto cruciale nella ricerca di Kowalevski

del tempo, vennero proposti enunciati e dimostrazioni più astratti e più generali, grazie al lavoro di Ovsyannikov, Treves e Nirenberg.

Notiamo rapidamente che anche Darboux raggiunse risultati molto simili a Kowalevski, ma con meno generalità, nello stesso periodo, infatti, entrambi pubblicarono le loro ricerche nel 1874.

Alla luce di quanto detto fino ad ora, ci poniamo alcune domande cruciali, a cui vogliamo trovare risposte quanto più esaustive possibile e che svolgeranno il ruolo di guida per il discorso che affronteremo:

- è possibile che esista una soluzione analitica a un sistema di EDP con dati di Cauchy?

se sì

- sotto quali ipotesi?
- è unica?
- il problema che ne risulta è ben posto?
- quali applicazioni hanno i risultati ottenuti?

Capitolo 2

Strumenti fondamentali

Prima di addentrarci nella trattazione del teorema, richiamiamo alcune nozioni alla base di quanto diremo più avanti. In particolare, avere chiare queste informazioni risulterà cruciale per assicurarsi di aver compreso a fondo il significato delle ipotesi che richiederemo e le tecniche dimostrative utilizzate.

Prima di tutto, anche per cominciare a prendere familiarità con la notazione, ripassiamo la nomenclatura delle equazioni equazioni differenziali di ordine k , e di conseguenza degli operatori ad esse associate, con una tabella riassuntiva:

Lineare	$\sum_{ \alpha \leq k} a_\alpha D^\alpha u = f$
Quasi-lineare	$\sum_{ \alpha =k} a_\alpha(x, D^\beta u) D^\alpha u + a_0(x, D^\beta u) = f,$ $ \beta < k$
Non lineare	$F(x, D^\alpha u) = 0, \quad \alpha \leq k$
In forma normale	$D_t^k u = G(x, t, D_x^\alpha D_t^j u), \quad \alpha + j \leq k, j < k$

Osservazione. Da qui in poi non faremo sempre particolare attenzione alle assunzioni di regolarità dei dati delle equazioni (f, a_α, F, G e altro), poiché ai nostri scopi è sufficiente che le affermazioni siano vere nel caso in cui tutto sia assunto analitico (con un certo raggio di convergenza). Lo stesso vale per i dati e le superfici dei problemi di Cauchy associati. In ogni caso, quando non specificato, la regolarità può essere considerata come almeno C^1 .

Osservazione. Nel caso di equazione in forma normale si dividono le variabili tra spazio $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ e tempo t , per una ragione che sarà chiara una volta conclusa la lettura di questo capitolo.

Cominciamo già ad anticipare che, successivamente, i coefficienti e le funzioni che definiscono le equazioni li assumeremo molto molto regolari, per la precisione analitici (ovvero localmente sviluppabili in serie di potenze).

Alla luce di quanto detto fin'ora, ci rendiamo conto di come ci sarebbero già alcuni aspetti su cui sarebbe importante soffermarsi. Ma per essere più ordinati riassumiamo le nostre tematiche di interesse in quattro punti, i quali rispecchiano la struttura di questo capitolo:

1. **superfici caratteristiche:** ovvero quelle superfici in \mathbb{R}^n che sono strettamente legate alla forma dell'equazione in osservazione e che possono essere fonte di problemi quando si decide di assegnare dei dati Cauchy su di esse;
2. **metodo delle caratteristiche:** nel caso di equazioni, anche non lineari, del primo ordine è possibile vedere un'EDP come un sistema di EDO dipendente da un parametro;
3. **problemi di Cauchy:** l'unica tipologia di problemi di cui ci occuperemo;
4. **serie di potenze:** costituiscono le fondamenta del concetto di funzione analitica (e olomorfa nel caso dei numeri complessi), ovvero l'unica tipologia di funzioni che cercheremo come soluzione.

2.1 Superfici caratteristiche

In questa prima sezione introduciamo il concetto di superficie caratteristica nei casi più semplici, in modo da comprenderne a pieno il significato. Cominciamo mettendoci nella situazione più semplice in assoluto, ovvero quella di un'equazione lineare. Tale equazione è univocamente determinata dal termine forzante che abbiamo chiamato f e da un operatore differenziale lineare $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$. Concentriamo la nostra attenzione su quest'ultimo e diamo tre definizioni.

Definizione 2.1.1. Forma caratteristica di L : $\chi_L(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ con $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1.2. Varietà caratteristica di L in x : $\text{char}_x(L) = \{\xi \neq 0 : \chi_L(x, \xi) = 0\}$.

Definizione 2.1.3. Γ superficie caratteristica per L in $x \iff \nu(x) \in \text{char}_x(L)$.

Cerchiamo ora di indagare il significato di queste definizioni:

- Prima di tutto notiamo che quando $\xi \in \text{char}_x(L)$ è come se l'operatore non fosse “propriamente” di ordine k nella direzione ξ .
- Inoltre nel caso di operatore del primo ordine ($k = 1$), una superficie Γ è caratteristica quando $A = (a_1, \dots, a_n)$ è tangente a Γ punto per punto (ovvero per ogni $x \in \Gamma$).
- E' possibile dimostrare che una superficie caratteristica “porta con sé più informazioni” nel momento in cui si assegnano delle condizioni di Cauchy su di essa. Infatti, note le derivate normali $D_\nu^j u$ ($j < k$) di una funzione u che vogliamo soddisfi l'equazione, nel caso in cui Γ non sia caratteristica in ogni punto, è possibile calcolare tutte le derivate parziali di u su Γ .

Specialmente l'ultima considerazione, a causa della scarsa rigosità, potrebbe essere fonte di confusione ad una prima lettura. Esiste però un teorema, che mostra tale risultato in modo esplicito nel caso di equazioni quasi-lineari e che può essere trovato insieme alla dimostrazione in [Eva10, cap.4.6].

Considerando che abbiamo a dimostrare un teorema che si rivelerà molto generale, notiamo che, purtroppo, le equazioni lineari non saranno sufficienti a risolvere tutti i nostri problemi. Per questo motivo, vogliamo generalizzare immediatamente il concetto di superficie non caratteristica al caso quasi-lineare, anche se rimaniamo nel caso di equazione del primo ordine. Supponendo di avere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sum a_j(x, u) D_{x_j} u = b(x, u) \\ u = \phi \text{ su } \Gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

e che Γ abbia come parametrizzazione locale in un intorno di $x_0 \in \Gamma$ la funzione $\gamma(s) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, forniamo la seguente generalizzazione, chiaramente ispirata al caso di operatori lineari del primo ordine.

Definizione 2.1.4. Γ non caratteristica in $x_0 = \gamma(s_0)$ se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} D_{s_1} \gamma_1 & \cdots & D_{s_{n-1}} \gamma_1 & a_1(\gamma, \phi(\gamma)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{s_1} \gamma_n & \cdots & D_{s_{n-1}} \gamma_n & a_n(\gamma, \phi(\gamma)) \end{bmatrix} (s_0) \neq 0.$$

span del piano tangente

Adesso è arrivato il momento di utilizzare queste definizioni per trarre qualche conseguenza utile.

2.2 Metodo delle caratteristiche

Affrontiamo un'applicazione della nozione di superficie non caratteristica: il metodo delle caratteristiche per EDP del primo ordine. Esso è un metodo per trovare delle soluzioni di equazioni, eventualmente anche completamente non lineari, che si basa sull'idea di trasformare il problema in un sistema di EDO, che risulta essere equivalente.

Partiamo direttamente dal caso di un'equazione quasi-lineare e consideriamo nuovamente il relativo problema di Cauchy con dati assegnati su una qualche superficie Γ . Vogliamo mostrare che tale problema è **equivalente** a un problema per un sistema di EDO.

$$\text{EDP} : \begin{cases} \sum a_j(x, u) D_{x_j} u = b(x, u) \\ u = \phi \text{ su } \Gamma \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\text{EDO} : \begin{cases} D_t x = A(x, y) \\ D_t y = b(x, y) \\ x(0) = x_0, y(0) = \phi(x_0) \quad \forall x_0 \in \Gamma \end{cases} \quad (2.3)$$

Dove $y = u(x)$ e $A(x, y) = (a_1(x, y), \dots, a_n(x, y))$.

Osservazione. E' importante sottolineare tre aspetti:

- le soluzioni x vengono dette **curve caratteristiche**;
- il secondo problema è parametrico rispetto a x_0 , quindi l'intera soluzione di u sarà data dall'unione su tutti gli $x_0 \in \Gamma$ di tutte le y lungo le curve x ;
- il caso di equazione lineare è immediato da ricavare da quanto scritto sopra, assumendo semplicemente che i coefficienti a_j dipendano solo da x e che b sia della forma $b(x, u) = f(x) - c(x)u$.

Senza fornire un enunciato preciso procediamo facendo un ragionamento comunque rigoroso, che può essere considerato una dimostrazione dell'equivalenza.

Dimostrazione: in entrambe le direzioni una semplice derivazione di funzione composta:

1. Supponiamo di conoscere, per ogni x_0 , $y(t)$ e $x(t)$ che risolvono il problema (2.3). Quindi per ogni x_0 vale che:

$$b(x, y) = D_t y = \sum D_{x_j} y D_t x_j = \sum a_j(x, y) D_{x_j} y.$$

Da cui segue che la funzione $u(x)$ che ha grafico dato dall'unione di tutte le curve $(x(t), y(t))$ risolve il problema (2.2).

2. Assumiamo ora invece di conoscere u soluzione di (2.2). Troviamo x risolvendo $\forall j$:

$$D_t x_j = a_j(x, y), \quad x_j(0) = (x_0)_j$$

Definiamo $y(t) = u(x(t))$ e, infine, utilizziamo lo stesso ragionamento di prima per concludere che y soddisfa l'equazione del sistema di EDO:

$$D_t y = \sum D_{x_j} u D_t x_j = \sum a_j(x, y) D_{x_j} u = b(x, y).$$

QED

A questo punto potrebbe sorgere la curiosità di capire dove nasca l'idea di verificare l'equivalenza con quello specifico sistema di EDO. La risposta a tale quesito risulta essere interessante, perché racchiude in sé il significato geometrico di questo metodo. Infatti, ricordando che il versore normale al grafico di una funzione u è proporzionale al vettore $(\nabla u, -1)$, possiamo affermare che l'equazione (2.2) ci sta dicendo che il campo vettoriale seguente deve essere **tangente** al grafico di u .

$$(a_1(x, u(x)), \dots, a_n(x, u(x)), b(x, u(x))) = (A(x, u(x)), b(x, u(x)))$$

Compreso questo ultimo aspetto comincia già a delinearsi il ruolo della proprietà della caratteristicità di una superficie, infatti se una superficie è caratteristica il campo vettoriale appena Notiamo fin da ora che per i sistemi di EDO esistono teoremi che garantiscono esistenza e unicità locale di soluzioni.

Teorema 2.2.1.

<i>Ipotesi</i>	<i>Problema (2.2)</i>
	$a_j, b, \phi, \Gamma \in C^1$
	Γ non caratteristica
<i>Tesi</i>	$\exists!$ soluzione C^1 in un intorno di Γ

La dimostrazione completa e dettagliata può essere trovata in [Fol95, cap.1], qui ne accenniamo solo le idee fondamentali. L'unicità seguente semplicemente dal fatto che il grafico della soluzione u può essere vista come l'unione delle curve $(x(t), y(t))$, le quali non si intersecano se si prende un intorno abbastanza piccolo di Γ . Per dimostrare l'esistenza si utilizza la rappresentazione dell'equazione come un insieme parametrico di sistemi di EDO per svolgere i seguenti passi:

1. applicare il teorema di esistenza e unicità locale per EDO;
2. dimostrare l'invertibilità di $x(s, t)$, dove s è una variabile ausiliaria legata alla parametrizzazione locale di Γ , grazie alla non-caratteristicità;
3. quindi definire in modo agevole la soluzione $u(x)$ seguendo la stessa idea del punto 1 dell'ultima dimostrazione fatta;
4. verificare con la derivazione di funzione composta che u è soluzione dell'equazione.

Sia la definizione di superficie caratteristica che il metodo delle caratteristiche possono essere generalizzati al caso di generica equazione del primo ordine. Inoltre esiste anche una generalizzazione del teorema 2.2.1 per il caso non lineare, identica sia in spirito che nel merito al caso quasi-lineare. Non affronteremo in dettaglio questo argomento, in quanto non aggiunge nulla a livello di comprensione qualitativa dell'argomento e non tornerà utile nella successiva trattazione. Per approfondire si può fare riferimento a [Fol95, cap.1] e [Eva10, cap.3].

La nozione di superficie non caratteristica, però, non è sufficiente ai nostri scopi e, nel prossimo paragrafo, vogliamo estenderla al caso più generale possibile: equazioni non lineari di qualsiasi ordine.

2.3 Problemi di Cauchy

Fino ad ora abbiamo visto solo caso più semplice di problema di Cauchy, ovvero quello per un'equazione del primo ordine, dove è necessario assegnare solamente il valore delle funzione su una superficie. Per una equazione di un ordine qualsiasi questa informazione non è sufficiente a determinare univocamente la soluzione, infatti tipicamente quello che si fa è assegnare anche le **derivate normali** della soluzione $D_\nu^j u$ con $j < k = \text{ordine dell'equazione}$.

Ci sono altri due punti importanti che vanno tenuti sempre a mente quando si parla di problemi di Cauchy:

- spesso vengono utilizzati quando la superficie dei dati **non** è un bordo (\neq problemi di Dirichlet);
- portano con sé il rischio di essere **sovradeterminati**, ovvero sono un buon approccio per stabilire l'unicità della soluzione e lo sono meno per l'esistenza.

Alla luce di quanto detto nei due paragrafi precedenti abbiamo già intuito che la nozione di superficie non caratteristica ci è utile per identificare quelle superfici su cui vogliamo assegnare delle condizioni di Cauchy in modo tale da avere qualche garanzia sull'esistenza della soluzione in intorno della superficie. Ora ci occupiamo di capire cosa si intende per superficie caratteristica nel caso più generale che possiamo immaginare, seguendo l'approccio più semplice e diretto possibile, in quanto non necessita di particolari dimostrazioni. Consideriamo quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} F^*(x, D^\alpha u^*) = 0 & |\alpha| \leq k, F^* \\ D_\nu^j u^* = \phi_j^* & \text{su } \Gamma^* \text{ per } j < k \end{cases} \quad (2.4)$$

A prescindere dalla forma dell'equazione è possibile modificare questo problema in modo tale da appiattire localmente il bordo della superficie rispetto a una variabile. Per ottenere questo risultato è sufficiente un semplice cambio di coordinate Φ , definita tramite γ^* (parametrizzazione locale di Γ^*):

$$\Phi(x) = (x_1 \quad \cdots \quad x_{n-1} \mid x_n - \gamma^*(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

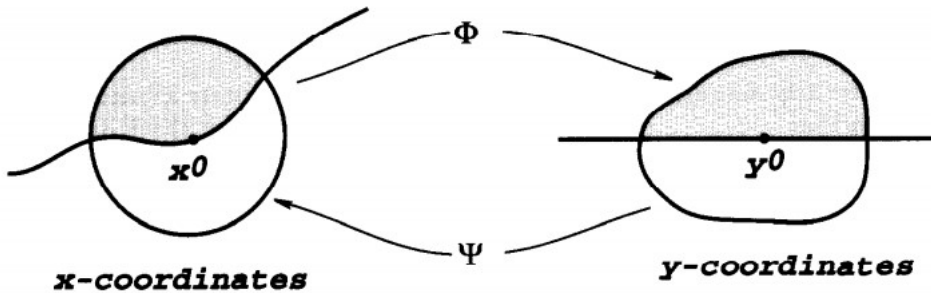


Immagine da [Eva10, cap.8]

Osservazione. Notiamo che Φ preserva l'eventuale analiticità della superficie Γ^* .

Questa trasformazione ci fa capire come sia possibile scegliere di considerare “privilegiata”. Da qui in poi essa prenderà il nome di “tempo” e la indicheremo con la lettera t . Per essere più precisi rinominiamo le variabili nel modo seguente:

$$\begin{aligned} t &\leftarrow x_n \\ x &\leftarrow (x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Inoltre, introduciamo un po' di notazione che tornerà utile più avanti:

- chiamiamo $\Gamma_0 = \{t = 0\}$.
- indichiamo le derivate nel modo seguente: $D_x^\alpha D_t^j u$.

Concludiamo quindi che grazie alla trasformazione Φ otteniamo il nuovo problema:

$$\begin{cases} F(x, t, D_x^\alpha D_t^j u) = 0 & |\alpha| + j \leq k \\ D_t^j u(x, 0) = \phi_j(x) & \text{per } j < k \end{cases} \quad (2.5)$$

dove $u^* = u(\Phi)$.

Definizione 2.3.1. Γ^* (o Γ_0) è non caratteristica se l'equazione su Γ_0 può essere riscritta in **forma normale** rispetto a t , ovvero se il problema (2.5) può essere riscritto così:

$$\begin{cases} D_t^k u = G(x, t, D_x^\alpha D_t^j u) & |\alpha| + j \leq k, j < k \\ D_t^j u = \phi_j & \text{su } \Gamma_0, j < k \end{cases}$$

Per rendere più concreta questa definizione spesso si cercano delle condizioni sufficienti, ed eventualmente anche necessarie, perché l'equazione possa essere riscritta in forma normale, come abbiamo fatto noi nel paragrafo 2.1 per i casi più semplici e come è stato fatto in [Eva10] e in [Fol95]. Vediamo quindi di cosa si tratta, distinguendo i vari casi e ipotizzando di esserci già messi nella situazione (2.5):

- lineare e quasi-lineare: si richiede che $a_{(0, \dots, 0, k)} \neq 0$ su Γ_0 ;
- non lineare: si richiede la validità ipotesi teorema della funzione implicita (noto anche come teorema del Dini) su F , ovvero $D_{(D_t^k u)} F \neq 0$ su Γ_0 .

Osservazione. Sempre rimanendo nell'ipotesi che la superficie sia Γ_0 , a partire da queste considerazioni è facile vedere come la nuova definizione di superficie non caratteristica sia coerente con le definizioni del paragrafo 2.1.

Ricordiamo, infine, che la nozione di superficie caratteristica ci deve garantire la possibilità di calcolare tutte le derivate parziali della soluzione sulla superficie. Per questa ragione l'impostazione di questa costruzione si ispira, in parte, a [Eva10, cap.3], dove è presente la dimostrazione di questa proprietà in due passi:

1. prima si ragiona ipotizzando di essere su Γ_0 ;
2. grazie alla trasformazione Φ si ottiene la proprietà per una generica Γ^* .

2.4 Serie di potenze

Dando per nota la teoria delle funzioni olomorfe, e di conseguenza anche la teoria base delle funzioni analitiche (reali), in questo paragrafo vogliamo scoprire, o conoscere meglio, solamente degli strumenti molto specifici che ci permetteranno di dimostrare il TCK. Cominciamo con lo studiare uno sviluppo in serie di potenze di una funzione di cui non dobbiamo dimenticarci.

Definizione 2.4.1. Funzione maggiorante:

$$\mathcal{M}_{Cr}(x) = \frac{Cr}{r - (x_1 + \dots + x_n)}$$

Utilizzando il teorema multinomiale, dimostriamo che la questa funzione può essere sviluppata in serie di potenze per $|x| < r/n$, ricavandone l'espressione dei coefficienti c_α :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Cr}(x) &= \frac{Cr}{r - (x_1 + \dots + x_n)} = C \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{r} \right)^j \\ &= C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{r^j} \sum_{\alpha} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha = \sum_{\alpha} C \underbrace{\frac{|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}}}_{c_\alpha} x^\alpha. \end{aligned}$$

A partire da questo risultato, vogliamo enunciare due teoremi, che costituiscono la spina dorsale del cosiddetto metodo dei maggioranti, ideato per la prima volta da Cauchy, e che permettono di giustificare la terminologia introdotta poco fa.

Teorema 2.4.1 (utilità del maggiorante).

<i>Ipotesi</i>	$g_\alpha \geq f_\alpha $ $\sum g_\alpha x^\alpha$ ha raggio di conv. R
<i>Tesi</i>	$\sum f_\alpha x^\alpha$ ha raggio almeno R

Teorema 2.4.2 (costruzione del maggiorante).

<i>Ipotesi</i>	$\sum f_\alpha x^\alpha$ ha raggio R
<i>Tesi</i>	$\exists r < R, C > 0 : f_\alpha \leq C \frac{ \alpha !}{\alpha! r^{ \alpha }}$

Dimostrazione: E' sufficiente notare che prendendo $C \geq |f_\alpha r^{|\alpha|}|$ si ha come conseguenza immediata che

$$|f_\alpha| \leq C \frac{1}{r^{|\alpha|}} \leq C \frac{|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}}.$$

QED

Nel caso in cui valgano le ipotesi del teorema 2.4.1 scriveremo: $\sum g_\alpha x^\alpha \gg \sum f_\alpha x^\alpha$.

Osservazione. Gli stessi teoremi continuano a valere nel caso dei numeri complessi.

Concludiamo il paragrafo e il capitolo con qualche proprietà per la manipolazione di serie di potenze. Prima di tutto occupiamoci dell'operazione di composizione.

Teorema 2.4.3.

$$\begin{array}{l|l}
 \text{Ipotesi} & \begin{array}{l} y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tale che } y(x) = \sum y_\alpha (x - x_0)^\alpha \text{ in intorno di } x_0 \\ g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ tale che } g(y) = \sum g_\beta (y - y_0)^\beta \text{ in intorno di } y_0 = y(x_0) \\ f = g \circ y \end{array} \\
 \text{Tesi} & \begin{array}{l} \exists f_\gamma = P_\gamma(g_\beta, y_\alpha \text{ con } \alpha_i \leq \gamma_i) \text{ insieme di coeff. tali che} \\ - P_\gamma \text{ polinomi a coeff. non negativi} \\ - f(x) = \sum f_\gamma (x - x_0)^\gamma \end{array}
 \end{array}$$

Osservazione. La forma dei polinomi P_γ non dipende da g e y .

Dimostrazione: è facile convincersi di questo scrivendo esplicitamente la composizione delle due serie, specialmente per quanto riguarda il fatto che il coefficiente f_γ dipenda solo dagli y_α tali che $\alpha_i \leq \gamma_i$. QED

Ponendoci per semplicità nell'origine e recuperando la notazione (x, t) del paragrafo precedente, enunciamo una semplice riscrittura di questo teorema.

Teorema 2.4.4 (composizione).

$$\begin{array}{l|l}
 \text{Ipotesi} & \begin{array}{l} y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tale che } y(x, t) = \sum y_{\alpha j} x^\alpha t^j \text{ in intorno dell'origine} \\ g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ tale che } g(y) = \sum g_\beta y^\beta \text{ in intorno dell'origine} \\ f = g \circ y \end{array} \\
 \text{Tesi} & \begin{array}{l} \exists f_{\gamma k} = P_{\gamma k}(g_\beta, y_{\alpha j} \text{ con } j \leq i) \text{ insieme di coeff. tali che} \\ - P_{\gamma k} \text{ polinomi a coeff. non negativi} \\ - f(x, t) = \sum f_{\gamma k} x^\gamma t^k \end{array}
 \end{array} \tag{2.6}$$

Un altro modo per ottenere una serie della tipologia in (2.6) è sfruttare una derivazione rispetto a una qualsiasi variabile x_i . Vediamolo con il seguente teorema.

Teorema 2.4.5 (derivazione).

$$\begin{array}{l|l}
 \text{Ipotesi} & y : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tale che } y(x, t) = \sum y_{\alpha j} x^\alpha t^j \text{ in intorno dell'origine} \\
 \text{Tesi} & f = D_{x_i} y \text{ è una serie di potenze come in (2.6) in intorno dell'origine}
 \end{array}$$

Dimostrazione: derivando termine a termine otteniamo

$$D_{x_i} \sum y_{\alpha j} x^\alpha t^j = \sum \underbrace{(\alpha_j + 1) y_{(\alpha + e_i)j}}_{f_{\alpha j}} x^\alpha t^j. \quad ^1$$

E' immediato verificare le altre proprietà di $f_{\alpha j}$.

QED

¹ e_i multi-indice vale 1 in corrispondenza della sua componente i -esima e 0 altrimenti

Infine, siamo interessati a vedere cosa succede quando moltiplichiamo due serie come in (2.6), ottenute con uno dei metodi (teoremi 2.4.4 e 2.4.5), a partire da una stessa serie y .

Teorema 2.4.6.

<i>Ipotesi</i>	f^1, f^2 serie costruite con uno dei due metodi a partire da una stessa y
<i>Tesi</i>	$f = f^1 f^2$ è una serie di potenze come in (2.6) in intorno dell'origine

Osservazione. E' ammissibile anche il caso misto, in cui f^1 è ottenuta con una composizione e f^2 con una derivazione, e sarà proprio quello che utilizzeremo.

Dimostrazione: possiamo ricavare l'espressione dei coefficienti di f :

$$f_{\gamma k} = \sum_{\substack{\omega + \theta = \gamma \\ l + h = k}} f_{\omega l}^1 f_{\theta h}^2.$$

Di conseguenza $f_{\gamma k}$ sarà sicuramente un polinomio a coefficienti non negativi, poiché questa proprietà viene preservata da somme e prodotti. Inoltre, notando che $l, h \leq k$, si può mostrare che ogni singolo polinomio $f_{\gamma k}$ eredita la proprietà degli $f_{\omega l}^1$ e $f_{\theta h}^2$, vale a dire che esso dipende solo dagli $y_{\alpha j}$ dove $j \leq k$. QED

Capitolo 3

Il teorema di Cauchy-Kowalevski

Adesso che abbiamo sviluppato tutti gli strumenti necessari, ipotizziamo di avere un problema di Cauchy qualsiasi. Come abbiamo mostrato nel paragrafo 2.3, esso può essere riscritto nella forma:

$$\begin{cases} F(x, t, D_x^\alpha D_t^j u) = 0 & |\alpha| + j \leq k \\ D_t^j u(x, 0) = \phi_j(x) & \text{per } j < k \end{cases}$$

Di conseguenza ci occuperemo solo di quest'ultimo caso, in cui le condizioni vengono assegnate su $\Gamma_0 = \{t = 0\}$.

L'assunzione fondamentale di questo capitolo è che i dati (F e ϕ_j) siano analitici in un intorno dell'origine, proprietà che utilizzeremo per mostrare l'esistenza di un'unica **soluzione analitica**, sempre in intorno dell'origine.

Per garantire l'esistenza, però, siamo costretti a fare qualche ipotesi sulla struttura dell'equazione. Considerando quanto è stato detto nel capitolo precedente, soprattutto per quanto riguarda il teorema 2.2.1, l'intuito suggerisce che potrebbe essere una buona idea considerare che la superficie Γ_0 sia non caratteristica. Quindi, come seconda assunzione scegliamo la **non-caratteristicità** della superficie. Tale proprietà ci permette di riscrivere nuovamente l'equazione in un'altra forma, ancora più semplice, ovvero:

$$\begin{cases} D_t^k u = G(x, t, D_x^\alpha D_t^j u) & |\alpha| + j \leq k, j < k \\ D_t^j u = \phi_j & \text{su } \Gamma_0, j < k \end{cases} \quad (3.1)$$

Questa idea ci permetterà di dimostrare il TCK.

Teorema di Cauchy-Kowalevski 3.0.1.

<i>Ipotesi</i>	<i>Problema (3.1)</i>
	G, ϕ_j analitici in intorno dell'origine
<i>Tesi</i>	$\exists! u$ soluzione analitica in intorno dell'origine

Dopo aver mantenuto uno sguardo quanto più generale possibile, ci vogliamo occupare di capire come di mostrare il risultato che abbiamo in mente. L'approccio che seguiremo sarà "al contrario", ovvero generalizzando progressivamente i risultati. Infatti, partiremo dal caso meno generale, fino ad arrivare a quello di un'equazione in forma normale, seguendo di fatto l'ordine cronologico di scoperta.

3.1 EDO

Per prima cosa affrontiamo un teorema molto simile al TCK, che tratta il caso di un sistema di EDO in forma normale. Cominciamo subito col riportare l'enunciato.

Teorema 3.1.1.

<i>Ipotesi</i>	$A \subseteq \mathbb{C}, B \subseteq \mathbb{C}^n$ aperti
	$\Omega \subseteq A$ aperto connesso
	$f : A \times B \rightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa
	$Pb: \begin{cases} y' = f(x, y) & \forall x \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
<i>Tesi</i>	localmente esiste un'unica soluzione olomorfa

Osservazione. Non esclude la possibilità di trovare altre soluzioni non analitiche.

Questo risultato fu la prima applicazione della teoria delle funzioni olomorfe in combinazione al metodo dei maggioranti, la quale, come già sappiamo, è stata proposta da Cauchy nella prima metà dell'Ottocento. Non riportiamo la dimostrazione per esteso, perché utilizza un maggiorante diverso rispetto a quello che abbiamo introdotto nel paragrafo 2.4 (ovvero quello che utilizzeremo per dimostrare il TCK). In ogni caso, può essere trovata in [Rou80] e la struttura del ragionamento è la stessa del teorema 3.2.1.

Nonostante non affrontiamo la questione dell'esistenza nel dettaglio, è conveniente discutere a parole e in modo esaustivo il problema dell'**unicità** di soluzioni analitiche (o olomorfe). Una funzione analitica è univocamente determinata da tutte le sue derivate in un punto, le quali, in questo caso, sono note grazie all'analiticità della funzione f . Chiudiamo completamente il discorso affrontando anche la situazione di una EDP: anche qui, assumendo i dati analitici, è possibile conoscere tutte le derivate parziali della funzione, grazie all'ipotesi di non-caratteristicità della superficie su cui vengono assegnate le condizioni.

Poiché questo risultato è stato dimostrato costruendo un maggiorante per la soluzione y , è possibile ottenere una stima del suo raggio di convergenza sfruttando il teorema 2.4.1.

Teorema 3.1.2.

<i>Ipotesi</i>	<i>Ipotesi del teorema 3.1.1</i>
	$\exists \overline{B_a(x_0)} \subseteq A, \overline{B_b(y_0)} \subseteq B$
	$M = \max_{B_a(x_0), B_b(y_0)} f $
<i>Tesi</i>	La soluzione ha raggio almeno $\tilde{r} = a \left[1 - \exp \left(-\frac{b}{aM(n+1)} \right) \right]$

Osservazione. E' interessante osservare cosa accade quando $B = \mathbb{C}^n$.

3.2 EDP quasi-lineari

Ora è il momento di trattare la chiave di volta di tutto il ragionamento sulle EDP, ovvero il teorema che mostra l'esistenza, e quindi anche l'unicità, di una soluzione analitica a un sistema quasi-lineare di EDP in forma normale.

Teorema 3.2.1.

$$\begin{array}{l|l}
 \text{Ipotesi} & \begin{array}{l} A_i, B \text{ analitici in un intorno dell'origine} \\ Pb: \begin{cases} D_t y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x, y) D_{x_i} y + B(x, y) \\ y = 0 \quad \text{su } \Gamma_0 \end{cases} \end{array} \\
 \text{Tesi} & \exists! y(x, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ sol. analitica in intorno dell'origine}
 \end{array}$$

Osservazione. Questo teorema può essere tranquillamente modificato sostituendo l'analiticità con l'**olomorfia**, in modo da ottenere un enunciato simile al caso delle EDO, poiché l'estensione è immediato, in quanto nella dimostrazione non si fa alcuna particolare assunzione che distingue il caso reale da quello complesso.

Dimostrazione: Prima di tutto chiamiamo a_{ml}^i le componenti di A_i e b_m quelle di B , mentre i coefficienti delle serie rispettivamente $(a_{ml}^i)_\gamma$ e $(b_m)_\gamma$. Ora procediamo per punti.

1. Ragionando componente per componente, ipotizziamo $y_h = \sum c_{\alpha j}^h x^\alpha t^j$ con $h = 1, \dots, m$.
2. La condizione di Cauchy ci dice che $c_{\alpha 0}^h = 0$.
3. Inserendo le serie di y , A_i , B nell'equazione e utilizzando i teoremi 2.4.4, 2.4.5 e 2.4.6, si ottiene per ogni riga h :

$$\sum_{\alpha, j} (j+1) c_{\alpha(j+1)}^h x^\alpha t^j = \sum_{\alpha, j} P_{\alpha j} \left((c_{\alpha l}^h)_{l \leq j}, (a_{ml}^i)_\gamma, (b_m)_\gamma \right) x^\alpha t^j$$

dove i polinomi $P_{\alpha j}$ sono naturalmente a coefficienti non negativi.

4. Grazie a questa operazione, ricaviamo una formula ricorsiva per i coefficienti:

$$c_{\alpha(j+1)}^h = (j+1)^{-1} P_{\alpha j} \left((c_{\alpha l}^h)_{l \leq j}, (a_{ml}^i)_\gamma, (b_m)_\gamma \right),$$

che ci permette di concludere che $c_{\alpha j}^h = Q_{\alpha j}((a_{ml}^i)_\gamma, (b_m)_\gamma)$ dove $Q_{\alpha j}$ sono sempre polinomi a coefficienti non negativi, la cui forma non dipende da A_i e B . Allora possiamo anche dire che è sempre possibile costruire una serie di potenze che soddisfa l'equazione. Ci resta da capire se essa converge con un raggio positivo.

5. Supponiamo ora di avere un altro problema con la stessa struttura definito dalle funzioni \tilde{A}_i e \tilde{B} e di conoscere una sua soluzione analitica locale \tilde{y} . Vogliamo mostrare che

$$\tilde{A}_i \gg A_i, \tilde{B} \gg B \implies \tilde{y} \gg y.$$

Tenendo in considerazione che per entrambi i problemi valgono le stesse considerazioni fino al punto 4 (i polinomi $Q_{\alpha j}$ sono gli stessi!), possiamo scrivere la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} |c_{\alpha j}^h| &= |Q_{\alpha j}((a_{ml}^i)_\gamma, (b_m)_\gamma)| \\ &\leq Q_{\alpha j}(|(a_{ml}^i)_\gamma|, |(b_m)_\gamma|) && \text{coeff. non negativi} \\ &\leq Q_{\alpha j}((\tilde{a}_{ml}^i)_\gamma, (\tilde{b}_m)_\gamma) = \tilde{c}_{\alpha j}^h && \tilde{A}_i \gg A_i, \tilde{B} \gg B \end{aligned}$$

6. L'ultimo passo consiste nello scegliere \tilde{A}_i, \tilde{B} , in modo tale da poter calcolare esplicitamente \tilde{y} e poter mostrare che è analitica. Viste le nostre conoscenze sulle serie potenze che arrivano dal teorema 2.4.2, sappiamo costruire un maggiorante per A_i e B . Quindi, selezioniamo due costanti C ed r in modo tale che

$$\frac{Cr}{r - (x_1 + \dots + x_{n-1}) - (y_1 + \dots + y_m)} = \mathcal{M}_{Cr}(x, y) \gg A_i(x, y), B(x, y)$$

e che soddisfino le disequazioni (3.4) e (3.5). Definiamo quindi il problema

$$\begin{cases} D_t \tilde{y}_h = \mathcal{M}_{Cr}(x, y) \left[\sum_{i,j} D_{x_j} \tilde{y}_i + 1 \right] \\ \tilde{y}_h = 0 \quad \text{su } \Gamma_0 \end{cases}$$

dove $h = 1, \dots, m$. A questo punto è possibile dimostrare, utilizzando il metodo delle caratteristiche per equazioni quasi-lineari del primo ordine (paragrafo 2.2), che esso ha come soluzione

$$\tilde{y}_h(x, t) = u(x_1 + \dots + x_n, t) \quad \forall h \quad (3.2)$$

dove

$$u(s, t) = \frac{r - s - \sqrt{(r - s)^2 - 2tCr mn}}{mn}, \quad (3.3)$$

la quale è chiaramente analitica in intorno dell'origine. Si veda [Fol95, cap.1] per il completo svolgimento del calcolo.

7. Concludiamo osservando un fatto interessante: non c'è niente di specifico che garantisca che la soluzione trovata continui a garantire la maggiorazione. Infatti è importante verificare che \tilde{y} soddisfi la disuguaglianza $|(x, \tilde{y}(x, t))| < r$ (in modo che \mathcal{M}_{Cr} sia effettivamente una serie di potenze). Per maggiori dettagli si veda la proposizione 3.2.3.

QED

Come nel caso del sistema di EDO, se sfruttiamo il teorema 2.4.1, possiamo stimare il raggio di convergenza, studiando il raggio della soluzione maggiorante in (3.2).

Teorema 3.2.2. *La soluzione del teorema 3.2.1 converge con raggio almeno*

$$\tilde{r} = \frac{1}{n-1} \frac{r}{8Cmn} \text{ con } C \geq \frac{1}{2}$$

Osservazione. $n \geq 2$ affinché il sistema si realmenti alle derivate parziali.

Osservazione. E' interessante soffermarsi sull'andamento rispetto a r (trade-off Cr), sapendo che:

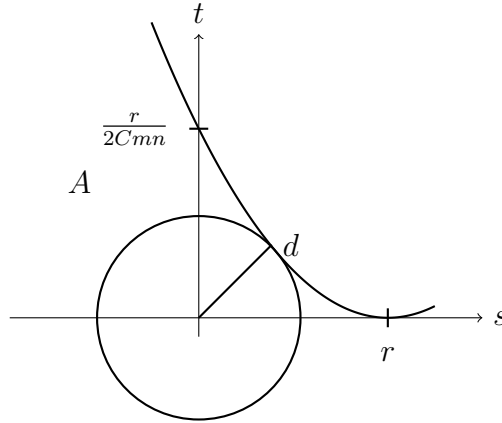
$$r < \min\{\text{raggi di conv. dei coefficienti } a_{ml}^i, b_m\} \quad (3.4)$$

$$C \geq \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{i,m,l,\alpha} |(a_{ml}^i)_\alpha r^{|\alpha|}| \\ \max_{m,\alpha} |(b_m)_\alpha r^{|\alpha|}| \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Dimostrazione: Fissiamo r e C come sopra, inoltre ipotizziamo che $C \geq 1/2$ (possiamo farlo senza alcun problema). Inizialmente concentriamo sulla funzione in (3.3), la quale è analitica in un intorno dell'origine, in particolare nell'insieme

$$A = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 : t < \frac{(r-s)^2}{2Crmn} \right\}.$$

Ovvero è sviluppabile in serie di potenze in $B_l(0)$ con $0 < l < d = \text{dist}(0, \partial A)$.



Scegliendo $l_1 = (n-1)\tilde{r}$ si può dimostrare che, per $C > 1/8$, si ha effettivamente che $l_1 < d$. L'obiettivo sarebbe, quindi, verificare che

$$\sqrt{l_1^2 - s^2} < \frac{(r-s)^2}{2Crmn}$$

per ogni $|s| < l_1$, ma ciò è implicato da

$$l_1 < \frac{(r-l_1)^2}{2Crmn}, \quad (3.6)$$

disuguaglianza che risulta vera se e solo se $C > 1/(4mn) \leq 1/8$.

Ora invece ci occupiamo di generalizzare questa cosa per la funzione \tilde{y}_h in 3.2 con h fissato. Essa è analitica nella ragione

$$A = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n : t < \frac{(r - (x_1 + \dots + x_{n-1}))^2}{2Cr mn} \right\}.$$

La struttura del problema risulta la stessa, quindi naturalmente la definizione di d resta invariata. L'unico aspetto che dobbiamo curare è che, in questa situazione, sarà necessario scegliere $l_2 = \tilde{r}$. Quindi, vogliamo mostrare che

$$\mathcal{L} = \sqrt{l_2^2 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)} < \frac{(r - (x_1 + \dots + x_{n-1}))^2}{2Cr mn} = \mathcal{R}$$

quando $|x| = |(x_1, \dots, x_{n-1})| < l_2$. Ma ciò è implicato dalla disequazione 3.6, che sappiamo essere vera. Dimostriamolo in due passi.

- Vale che $\mathcal{L}^2 < l_2^2 \leq l_1^2$ per $|x| < l_2$.

- Vale che

$$\left(\frac{(r - l_1)^2}{2Cr mn} \right)^2 \leq \min \{ \mathcal{R}^2 : |x| \leq l_2 \} < \mathcal{R}^2 \text{ per } |x| < l_2.$$

Lo mostra sapendo che

$$\max \{ x_1 + \dots + x_{n-1} : |x| \leq l_2 \} = (n-1) \frac{l_2}{\sqrt{n-1}} \leq l_1$$

e facendo vedere che $r - (x_1 + \dots + x_{n-1}) > 0$ per $|x| \leq l_2$ applicando la disuguaglianza triangolare. QED

Un lettore attento sicuramente si chiederà la ragione dietro alla scelta di un costante $C \geq 1/2$. Ebbene, questo problema emerge da ciò che è stato lasciato aperto nella dimostrazione del teorema 3.2.1, ovvero il fatto che in realtà la soluzione \tilde{y} è veramente maggiorante solo se $|(x, \tilde{y}(x, t))| < r$. Tale proprietà è proprio garantita in una palla di raggio \tilde{r} . Vediamolo con una proposizione che, oltre a chiarire, completa il quadro logico delle dimostrazioni.

Proposizione 3.2.3. *La maggiorazione di \tilde{y} vale in $B_{\tilde{r}}(0)$, ovvero*

$$|(x, t)| < \tilde{r} \implies |(x, \tilde{y}(x, t))| = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + m u^2(x_1 + \dots + x_{n-1}, t) < r^2$$

Dimostrazione: Per semplicità dimostriamo che

$$|(s, t)| < l = (n-1)\tilde{r} \implies s^2 + m u^2(s, t) < r^2.$$

La generalizzazione è banale se ci si ispira alla dimostrazione del teorema 3.2.2.

Tenendo in considerazione che $|t|, |s| < l < r$ e che $s^2 + t^2 < l^2 = r/(8Cmn)$, scriviamo la seguente catena di disuguaglianze.

$$\begin{aligned}
& s^2 + m \left[\frac{r - s - \sqrt{(r - s)^2 - 2tCr mn}}{mn} \right]^2 \\
& \leq s^2 + \frac{1}{mn^2} [(r - s)^2 + |(r - s)^2 - 2tCr mn|] & \begin{cases} |s| < r \Rightarrow r - s > 0 \\ \sqrt{(r - s)^2 - 2tCr mn} > 0 \end{cases} \\
& \leq s^2 + \frac{2}{mn^2} (r - s)^2 + \frac{2|t|Cr mn}{mn^2} \\
& \leq l^2 + \frac{2}{mn^2} (r^2 + l^2 + 2rl) + \frac{2lCr mn}{mn^2} & \begin{cases} |s| < l \Rightarrow (r - s)^2 < (r + l)^2 \\ |t| < l \end{cases} \\
& = \left(\frac{r}{8Cmn} \right)^2 + \frac{2r^2}{mn^2} \left[1 + \frac{1}{(8Cmn)^2} + \frac{1}{4Cmn} + \frac{1}{8} \right] \\
& < r^2 \underbrace{\frac{2}{mn^2} \left[\frac{r}{8} + \frac{1}{(8C)^2 mn^2} + \frac{r}{(8Cmn)} + \frac{r}{4Cmn} + \frac{1}{8} \right]}_{< 1} < r^2
\end{aligned}$$

In particolare l'ultima affermazione vale poiché

$$\begin{aligned}
n \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{mn^2} (\dots) & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{9}{8} + \frac{2}{(8C)^2} + \frac{1}{8C} \right) \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{8C} \right) & C > 1/8 \\
& \leq \frac{3}{16} \left(3 + \frac{1}{C} \right) < 1 & \Leftarrow C \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

QED

3.3 EDP in forma normale

Ora ci occupiamo di sfruttare i risultati del paragrafo precedente per generalizzare quel risultato al caso di un'equazione in forma normale. Per fare ciò è sufficiente enunciare e dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.3.1. *I due problemi seguenti sono equivalenti*

$$\begin{aligned} \text{non lineare : } & \begin{cases} D_t^k u = G(x, t, D_x^\alpha D_t^j u) & |\alpha| + j \leq k, j < k \\ D_t^j u = \phi_j & \text{su } \Gamma_0, j < k \end{cases} \\ \text{quasi-lineare : } & \begin{cases} D_t y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x, y) D_{x_i} y + B(x, y) \\ y = 0 & \text{su } \Gamma_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dimostrazione: si divide il ragionamento in tre passi:

1. si costruisce il sistema in modo tale che $y_{\alpha j} = D_x^\alpha D_t^j u$.

Quindi, le matrici A_i e B saranno quindi ricavabili dalle espressioni¹

$$\begin{aligned} D_t y_{\alpha j} &= y_{\alpha(j+1)} & |\alpha| + j < k \\ D_t y_{\alpha j} &= D_{x_l} y_{(\alpha - e_l)(j+1)} & |\alpha| + j = k, j < k \\ D_t y_{0k} &= D_t G + \sum_{|\alpha|+j < k} D_{y_{\alpha j}} G y_{\alpha(j+1)} \\ &+ \sum_{|\alpha|+j=k, j < k} D_{y_{\alpha j}} G D_{x_l} y_{(\alpha - e_l)(j+1)} \end{aligned}$$

e i dati di Cauchy saranno

$$\begin{aligned} y_{\alpha j}(x, 0) &= D_x^\alpha \phi_j(x) & j < k \\ y_{0k}(x, 0) &= G(x, 0, D_x^\alpha \phi_j(x)) & |\alpha| + j \leq k, j < k \end{aligned}$$

2. si rimuovono le condizioni ϕ , ridefinendo $y(x, t) \leftarrow y(x, t) - \phi(x)$;
3. si rimuove la dipendenza da t , aggiungendo la variabile $y^0 = t$, insieme all'equazione $D_t y^0 = 1$ e al dato $y^0(x, 0) = 0$.

Concludiamo dicendo che ovviamente se u è soluzione del problema in forma normale, le $y_{\alpha j}$ saranno soluzione del problema appena costruito. Ma per dimostrare che la $y_{(0, \dots, 0)}$ (soluzione di quest'ultimo) è anche soluzione del problema in forma normale sono necessari diversi conti che possono essere trovati per esteso in [Fol95, cap.1]. QED

Osservazione. Ci sono tre aspetti, che emergono anche dalla dimostrazione, su cui è il caso di soffermarsi brevemente a riflettere:

- mettendo insieme le considerazioni fatte all'inizio del capitolo e i teoremi 3.2.1 e 3.3.1, segue in modo immediato il TCK;
- continua a valere la stima del raggio di convergenza;
- questo teorema di equivalenza si generalizza in modo immediato al caso di un sistema in forma normale.

¹ $l(\alpha) = \min\{l : \alpha_l \neq 0\}$

Capitolo 4

Esempi

Dopo aver visto il TCK nella sua forma più nota, concentriamo ora lo sguardo su tre esempi importanti che aiutano a inquadrare meglio i limiti di questo teorema e il ruolo che giocano le ipotesi.

Tale discussione risulta particolarmente di rilievo, poiché per molto tempo si ritenne ragionevole pensare che un'equazione differenziale con coefficienti piuttosto regolari, come ad esempio C^∞ , dovesse avere almeno una soluzione. Questo, però, oltre al caso di analiticità trattato dal TCK, in generale non accade.

4.1 Esempio di Lewy

Questo primo esempio è decisamente il più importante ed interessante tra quelli qui trattati, proprio perché permette di introdurre in modo più rigoroso il problema appena citato.

Nel 1957 Hans Lewy propose questo semplice controesempio, volto a mostrare come l'ipotesi di **analiticità** nel teorema di Cauchy-Kowalevski fosse cruciale, portando un caso di un operatore differenziale lineare con coefficienti analitici che necessita della presenza di una forzante anch'essa analitica per possedere delle soluzioni almeno C^1 .

Ciò mostra come sia cruciale, non solo una discussione sulle condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali, ma anche una sulle condizioni necessarie. Infatti Hörmander, matematico che contribuì ampiamente alla teoria delle equazioni lineari, rispose all'emersione di questo problema proprio con delle condizioni necessarie per l'esistenza di soluzioni locali (e quindi anche globali!) per equazioni lineari, le quali ispirarono poi a loro volta il lavoro di Treves e Nirenberg volto alla ricerca di condizioni necessarie e sufficienti.

Preliminarmente si riportano qui sotto gli enunciati di due teoremi che torneranno utili nella discussione:

Formula di Green in \mathbb{C} 4.1.1.

<i>Ipotesi</i>	$D \subseteq \mathbb{C}$ dominio regolare
	$f : D \rightarrow \mathbb{C}$
	$f \in H(\mathring{D})$
<i>Tesi</i>	$\oint_{\partial^+ D} f(z) dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x + iy) dx dy$

Osservazione. La definizione di dominio regolare non ci tornerà particolarmente utile, infatti ai nostri scopi è sufficiente sapere che una qualsiasi palla chiusa è regolare (questo verrà utilizzato nella dimostrazione del teorema 4.1.3). Per una formalizzazione di questo concetto si veda [FMS20, cap.8], dove è presente una trattazione dell'analogo teorema in \mathbb{R}^2 che va sotto il nome di “Formule di Gauss-Green” e “Formula di Stokes”, di quale la generalizzazione in \mathbb{C} è immediata.

Principio di riflessione di Schwarz 4.1.2.

<i>Ipotesi</i>	$D \subseteq \mathbb{C}$ dominio regolare e simmetrico rispetto a \mathbb{R}
	$D \cap \mathbb{R}$ è un intervallo
	$f : D \rightarrow \mathbb{C}$
	$f(\mathbb{R} \cap D) \subseteq \mathbb{R}$
	$f \in H(\mathring{D})$
<i>Tesi</i>	$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in \mathring{D}$

Osservazione. La definizione di insieme simmetrico rispetto a \mathbb{R} è data in modo naturale: esso deve soddisfare la condizione $z \in D \implies \bar{z} \in D$.

Per entrare nel vivo dell'esempio, definiamo il seguente operatore:

$$L = D_x + iD_y - 2i(x + iy)D_t$$

che ha dei coefficienti C^∞ e il cui comportamento peculiare emerge dal teorema che enunciamo di seguito.

Teorema 4.1.3.

<i>Ipotesi</i>	f funzione continua a valori reali che dipende solo da t
	$u \in C^1 : Lu = f$ in un intorno dell'origine
<i>Tesi</i>	f analitica in un intorno di $t = 0$

Dimostrazione: Innanzitutto fissiamo un $R > 0$ tale che $\{(x, y, t) : x^2 + y^2 < R^2, |t| < R\}$ sia contenuto nell'intorno dell'origine delle ipotesi (ovviamente questo R esiste sempre) e procediamo seguendo questi passi:

1. Definiamo la funzione:

$$V(t, s) = \int_{\gamma_r} u(x, y, t) dz \quad \text{con} \quad \begin{cases} t \in (-R, R) \\ r^2 = s \in [0, R^2) \\ \gamma_r = \partial^+ B_r(0, 0) \\ z = x + iy \end{cases}$$

2. Troviamo una relazione tra V_s e V_t :

$$\begin{aligned} V &= i \iint_{B_r(0,0)} (u_x + iu_y)(x, y, t) dx dy && \text{per formula di Green} \\ &= i \int_0^r \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y)(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t) \rho d\rho d\theta && \text{in coordinate polari} \\ V_r &= i \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y)(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t) r d\theta && \text{derivando} \\ &= \int_{\gamma_r} (u_x + iu_y)(x, y, t) r \frac{dz}{z} \\ V_s &= \frac{1}{2r} V_r = \int_{\gamma_r} (u_x + iu_y)(x, y, t) \frac{dz}{2z} \\ &= \int_{\gamma_r} u_t(x, y, t) dz + \int_{\gamma_r} f(t) \frac{dz}{2z} && \text{usando } Lu = f \\ &= iV_t + \pi i f(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

3. Definiamo le funzioni:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(\tau) d\tau \\ U(t, s) &= V(t, s) + \pi F(t) . \end{aligned}$$

e osserviamo le seguenti proprietà di U vista come funzione di $w = t + is$:

- si può verificare che soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $U_t + iU_s = 2U_{\bar{z}} = 0$ utilizzando la relazione (4.1),
 - è olomorfa per $(s, t) \in (0, R^2) \times (-R, R)$ per la proprietà precedente,
 - è continua per $(s, t) \in [0, R^2) \times (-R, R)$ perché lo è V ,
 - $U(0, t) = \pi F(t)$ per $t \in (-R, R)$, ovvero assume valori reali sull'asse reale.
4. Possiamo ora prolungare analiticamente U in un intorno dell'origine, infatti, date le proprietà appena osservate, valgono le ipotesi del principio di riflessione di Schwarz che ci permette di definire U per $s \in (-R^2, 0)$ con la seguente formula:

$$U(t, s) = \overline{U(t, -s)}.$$

5. Concludiamo il ragionamento notando che, se il prolungamento di U è analitico in un intorno dell'origine, lo deve essere anche $U(t, 0) = \pi F(t)$ e anche $f = F'$. QED

Generalizzazione. Il teorema appena trattato si presta, in realtà, anche a una generalizzazione interessante e l'idea è la seguente: si cerca di mostrare che, nonostante la forma caratteristica di L non abbia punti singolari, è possibile scegliere una forzante $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ in modo tale che **ovunque** l'equazione differenziale $Lu = F$ non ammetta soluzioni.

Osservazione. Dati due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) , con la notazione $C(X, Y)$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ indichiamo l'insieme delle funzioni continue del tipo $h : X \rightarrow Y$. Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$ useremo la notazione $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ naturalmente per le funzioni C^k .

Prima di scendere nello specifico di questa seconda parte della discussione dell'esempio di Lewy, è utile richiamare tre definizioni:

Definizione 4.1.1. Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X è denso se per ogni $A \in X$ aperto $D \cap A \neq \emptyset$.

Definizione 4.1.2. Un sottoinsieme E di uno spazio metrico è senza parte interna se $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.

Definizione 4.1.3. Uno spazio topologico viene detto “di Baire” se l'unione numerabile di ogni famiglia di insiemi chiusi con interno vuoto ha interno vuoto.

La ragione per cui sono stati citati questi concetti è che siamo interessati a un teorema, o per meglio dire, a un suo corollario, che permette di sviluppare un argomento per assurdo, nel caso si abbia a che fare con spazi metrici completi. Sono riportati di seguito gli enunciati.

Teorema della categoria di Baire 4.1.4.

<i>Ipotesi</i>	(X, d) spazio metrico completo $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq 2^X$ famiglia di insiemi aperti densi in X $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq 2^X$ famiglia di insiemi chiusi e senza parte interna
<i>Tesi 1</i>	$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è denso in X
<i>Tesi 2</i>	$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ è senza parte interna

Osservazione. Con questo teorema si mostra proprio come gli spazi metrici completi siano di Baire nella topologia indotta dalla metrica. Si veda [RF10, cap.10] per la dimostrazione e maggiori dettagli.

Corollario (argomento per assurdo di Baire) 4.1.5.

<i>Ipotesi</i>	(X, d) spazio metrico completo $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq 2^X$ famiglia di insiemi chiusi $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$
<i>Tesi</i>	$\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\overset{\circ}{E}_n \neq \emptyset$

Osservazione. Questo enunciato è la proposizione contronominale della Tesi 2 del teorema 4.1.4 e, come abbiamo anticipato, può essere usato per ottenere un assurdo esibendo un spazio metrico completo uguale all'unione di una famiglia di insiemi chiusi e senza parte interna.

Il secondo importante risultato di analisi funzionale, che giocherà un ruolo importante per raggiungere lo scopo dichiarato, è il teorema di Ascoli-Arzelà: un teorema “di compattezza”, il quale sostituisce il teorema di Heine-Borel nel compito di ricerca di una sottosuccessione convergente, nel caso in cui non si abbia a che fare con spazi metrici di cui sia nota la proprietà di compattezza. In particolare, lo utilizzeremo per dimostrare che un insieme (di cui si capirà la struttura più avanti) è chiuso, sfruttando la proprietà di convergenza uniforme che la tesi garantisce.

Per comprendere a pieno l'enunciato di tale teorema, richiamiamo insieme ad esso due definizioni.

Definizione 4.1.4. Una successione di funzioni $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ si dice uniformemente limitata in X se $\exists M \geq 0$ tale che $|f_n| \leq M$ in X .

Definizione 4.1.5. Una successione di funzioni $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ si dice equicontinua in X se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $d(x, y) < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Teorema di Ascoli-Arzelà 4.1.6.

<i>Ipotesi</i>		(X, d) spazio metrico completo
		$\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ successione di funzioni
		– uniformemente continua
		– equilimitata
<i>Tesi</i>		$\exists f \in C(X, \mathbb{R}), n_k$ tali che $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente

Dopo aver inquadrato questi strumenti, è arrivato il momento di entrare nel merito della discussione e lo facciamo appoggiandoci a uno schema che presenta per punti e a grandi linee il ragionamento da affrontare:

1. trasleremo il problema del teorema 4.1.3 in modo da ricondurci al caso di un generico punto (x_0, y_0, t_0) , usando come forzante la funzione $g(x, y, t) = f(t - 2xy_0 + 2x_0y)$ (lemma 4.1.7);
2. costruiremo una funzione $S_a \in C^\infty$ per ogni $a \in l^\infty$ (lemma 4.1.8);
3. costruiremo degli insiemi $E_{j,n} \subseteq l^\infty$ chiusi e senza parte interna sfruttando S_a e il teorema di Ascoli-Arzelà (lemma 4.1.9);
4. concluderemo la dimostrazione del teorema 4.1.10 utilizzando i lemmi appena citati per ricavare, con un ragionamento per assurdo, l'uguaglianza $l^\infty = \bigcup E_{j,n}$, che ci permette di applicare l'argomento di Baire.

Ora dettagliamo i passaggi appena elencati con enunciati e dimostrazioni.

Lemma 4.1.7.

<i>Ipotesi</i>	$F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
	$(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$
	$u \in C^1 : Lu(x, y, t) = F'(t - 2xy_0 + 2x_0y)$ in un intorno di (x_0, y_0, t_0)
<i>Tesi</i>	F e F' sono analitiche in un intorno di $t = t_0$

Dimostrazione: sfruttando l'invarianza dell'operatore L rispetto a

$$T(x, y, t) = (x + x_0, y + y_0, t + t_0 + 2xy_0 - 2x_0y),$$

ovvero la validità dell'identità (facile da verificare) $L(u \circ T) = (Lu) \circ T$, deduciamo che, se u è soluzione dell'equazione delle ipotesi, essa rende vera in un intorno dell'origine anche l'espressione:

$$L(u \circ T)(x, y, t) = f(t + t_0) \text{ con } f = F'. \quad (4.2)$$

Chiaramente $u \circ T \in C^1$ e $g(t) = f(t + t_0)$ soddisfano le ipotesi del teorema 4.1.3 e quindi applicandolo alla seconda equazione la tesi è dimostrata. QED

Osservazione. L'analiticità di F segue dall'ultimo passaggio della dimostrazione del teorema 4.1.3, tendendo in considerazione del fatto che essa è della forma $F(t) = \int_0^t f(\tau) + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Osservazione. L'equazione (4.2) vale in un intorno dell'origine poiché l'operatore T rende \mathbb{R}^3 un gruppo, noto in generale come gruppo di Heisenberg, e agisce in questo contesto come una traslazione.

Lemma 4.1.8.

<i>Ipotesi</i>	$\{(x_j, y_j, t_j)\}_{j=1}^\infty$ denso in \mathbb{R}^3
	$c_j = 2^{-j}e^{-\rho_j}$ con $\rho_j = x_j + y_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$
	$a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$
	$F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ periodica e non analitica
	$f_j(x, y, t) = F'(t + 2xy_j - 2x_jy)$
<i>Tesi 1</i>	$S_a = \sum_{j=1}^\infty a_j c_j f_j$ converge uniformemente in \mathbb{R}^3
<i>Tesi 2</i>	lo stesso vale per le derivate formali $D^\alpha S_a = \sum_{j=1}^\infty a_j c_j D^\alpha f_j$

Osservazione. Naturalmente S_a è una funzione C^∞ .

Dimostrazione: Siccome F è C^∞ ed è periodica definiamo $M_k = \sup_t |F^{(k)}(t)| \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. E ciò ci permette di scrivere, per ogni α multi-indice e $j \in \mathbb{N}_0$, le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} |a_j c_j D^\alpha f_j| &\leq \|a\|_\infty 2^{-j} e^{-\rho_j} M_{|\alpha|+1} \rho_j^{|\alpha|} \\ &\leq \|a\|_\infty 2^{-j} M_{|\alpha|+1} \left(\frac{|\alpha|}{e}\right)^{|\alpha|} \quad \text{poichè } \max_{x \geq 0} \frac{x^{|\alpha|}}{e^x} = \left(\frac{|\alpha|}{e}\right)^{|\alpha|} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$D^\alpha S_a$ converge totalmente, e quindi anche uniformemente, essendo che la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}^3} |a_j c_j D^\alpha f_j|$$

ha un termine generale minore o uguale della parte destra della disuguaglianza (4.4), la cui corrispondente serie numerica è ovviamente convergente. QED

Osservazione. Prima di proseguire è soffermiamoci brevemente su due questioni:

- l^∞ è uno spazio di Banach se dotato della norma: $\|b\|_\infty = \sup_n |b_n|$ per ogni $b \in l^\infty$;
- esiste una funzione f con le proprietà delle ipotesi: per esempio, la funzione

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n! x)}{(n!)^n}$$

è definita da una serie puntualmente convergente ed è $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, inoltre è periodica di periodo 2π e si può dimostrare che essa non è analitica in nessun punto $x \in \mathbb{R}$. Soprattutto per quest'ultimo aspetto si veda il problema 4 presente in [Joh82, cap.3] per maggiori dettagli.

Notazione. $A_{j,n} = B_{n-1/2}(x_i, y_i, t_i)$ dove (x_i, y_i, t_i) sono i punti nelle ipotesi del lemma 4.1.8.

Lemma 4.1.9.

Ipotesi	<p>Stesse ipotesi del lemma 4.1.8</p> <p>$\{E_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{N}_0} \subseteq l^\infty$ tali che $a \in E_{j,n} \iff \exists u \in C^1(A_{j,n}) :$</p> <ul style="list-style-type: none"> – $Lu = S_a$ in $A_{j,n}$ – $u(x_j, y_j, t_j) = 0$ – $D^\alpha u \leq n$ per $\alpha \leq 1$ in $A_{j,n}$ – $D^\alpha u(v) - D^\alpha u(w) \leq n v - w ^{1/n}$ per $\begin{cases} \alpha = 1 \\ v, w \in A_{j,n} \end{cases}$ 	(4.5)
Tesi	<p>$\{E_{j,n}\}$ sono insiemi chiusi e senza parte interna</p>	

Dimostrazione: dimostriamo separatamente separatamente le due proprietà:

1. Per quanto riguarda la proprietà di chiusura, vogliamo mostrare che se $\{a^k\} \subseteq E_{j,n}$ è tale che $a^k \xrightarrow{l^\infty} a$ allora $a \in E_{j,n}$. Ciò, a sua volta, si riduce a mostrare l'esistenza di una funzione u con le proprietà in (4.5).

Deduciamo immediatamente che $S_{a^k} \rightarrow S_a$ in modo uniforme, poiché $|S_a - S_{a^k}| \leq M_1 \|a - a^k\|$ per la (4.4) con $\alpha = 0$. Inoltre, per le ipotesi su a^k esiste una funzione u_k che risolve l'equazione $Lu_k = S_{a^k}$ e che soddisfa le altre proprietà in (4.5). Proprio grazie a queste ultime u_k soddisfa le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà con $X = A_{j,n}$, quindi per una qualche u vale che $u_{k_h} \rightarrow u$ uniformemente.

In particolare, sfruttando il fatto che L è un operatore del primo ordine, si ricava facilmente che $Lu = S_a$ in $A_{j,n}$ poiché

$$\begin{array}{ll} Lu_{k_h} \rightarrow Lu & \text{uniformemente per le proprietà di } u_k \\ \parallel & \\ S_{a^{k_h}} \rightarrow S_a & \text{uniformemente} \end{array}$$

e che u eredita tutte le altre proprietà in (4.5) da u_k grazie alla convergenza uniforme.

2. In ultimo si mostriamo che $\mathring{E}_{j,n} = \emptyset$ ragionando per assurdo. Quindi, supponiamo che esista una successione a interna a $\mathring{E}_{j,n}$. Definendo poi

$$\delta_j = \frac{1}{c_j} \mathbf{1}_{\{j\}} \in l^\infty,$$

osserviamo che esiste un $\theta \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo tale che $a' = a + \theta \delta_j \in E_{j,n}$. Siano ora u e u' le soluzioni rispettivamente di $Lu = S_a$ e di $Lu = S_{a'}$ con le proprietà in (4.5) e sia

$$u'' = \frac{u' - u}{\theta}.$$

Chiaramente è vero che $u'' \in C^1$; inoltre, usando la linearità di L e la definizione della serie S , è immediato vedere che vale la relazione

$$Lu'' = S_{\delta_j} = f_j,$$

ma ciò entra in contraddizione con il lemma 4.1.7 (di cui valgono tutte le ipotesi), non essendo F analitica.

QED

Teorema 4.1.10.

<i>Ipotesi</i>	$A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto
<i>Tesi</i>	$\exists F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) : \nexists u \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che $\begin{cases} Lu = F \text{ in } A \\ u_x, u_y, u_t \text{ soddisfano} \\ \text{la condizione di Hölder} \end{cases}$

Osservazione. L'arbitrarietà di A implica che questo valga per tutti gli aperti di \mathbb{R}^3 e quindi che $Lu = F$ non abbia soluzioni C^1 e con derivate prime continue secondo Hölder da nessuna parte.

Osservazione. La tesi implica come conseguenza naturale che non esistano nemmeno soluzioni C^k per ogni $k \geq 1$, in quanto $C^k \subseteq C^1$.

Dimostrazione: Ragionando per assurdo, concludiamo con i seguenti tre passi (di cui il secondo è quello che merita più attenzione).

1. $E_{j,n} \subseteq l^\infty$ per ogni $j, n \in \mathbb{N}_0$ ovviamente.
2. $a \in l^\infty \implies a \in E_{j,n}$ per qualche $j, n \in \mathbb{N}_0$ (i quali dipendono da a).

Supponendo la tesi falsa, possiamo affermare che $\forall a \in l^\infty \exists A \in \mathbb{R}^3, u^* \in C^1(A, \mathbb{R})$ tali che si ha che $Lu^* = S_a$ e che u^* ha le derivate prime continue secondo Hölder in A .

Si sa, inoltre, che per la densità dell'insieme dei punti in (4.3) esiste un $(x_j, y_j, t_j) \in A$ ed essendo A aperto esiste un k (scelto abbastanza grande) tale per cui $A_{j,k} \subseteq A$.

Consideriamo ora la funzione $u = u^* - u^*(x_j, y_j, t_j)$, in modo che u mantenga le proprietà di u^* , ma soddisfi al contempo la condizione $u(x_j, y_j, t_j)$ come richiesto in una della proprietà in (4.5).

In ultimo è chiaro che, essendo le derivate prime di u continue secondo Hölder, esiste un m abbastanza grande per cui valgono le condizioni rimanenti in (4.5) con m al posto del pedice n e prendendo poi $n = \max\{k, m\}$ l'implicazione è dimostrata.

3. Dai primi due passi concludiamo che

$$l^\infty = \bigcup_{j,n \in \mathbb{N}_0} E_{j,n},$$

ma, quindi, per il fatto che l^∞ è di Banach e per le proprietà degli insiemi $E_{j,n}$, valgono sia le ipotesi del corollario 4.1.5 che la negazione della tesi. Ciò è assurdo.

QED

4.2 Esempio di Kowalevski

L'esempio su cui ci concentriamo ora è dovuto a Kowalevski stessa ed è stato utile a suo tempo a comprendere più a fondo, in modo quanto più essenziale possibile, l'importanza, o meglio la necessità, di assumere che la superficie scelta per assegnare i dati di Cauchy sia **non-caratteristica** per l'equazione differenziale in osservazione. Inoltre, costituisce un controesempio alla congettura proposta da Weierstrass, che suggeriva la possibilità di definire funzioni analitiche attraverso equazioni differenziali.

Tutto ciò viene citato all'interno di una lettera rivolta a Fuchs (un matematico tedesco dell'Università di Berlino) scritta da Weierstrass (che supervisionò il lavoro di ricerca di Kowalevski), con cui quest'ultimo faceva richiesta per l'accettazione delle tesi di dottorato di Sofya. La lettera è riportata integralmente in [Ken83, app.C].

Seguendo le orme di Kowalevski, consideriamo quindi il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in una dimensione:

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (4.6)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

Osservazione. La condizione per u_x su Γ necessaria per completare il problema di Cauchy è già implicitamente imposta dall'equazione (4.7).

Osservazione. In realtà il dato iniziale realmente scelto da Kowalevski durante la sua ricerca è $\frac{1}{1-x}$, che però abbiamo deciso di non utilizzare qui per semplicità, evitando alcuni problemi legati alla singolarità della funzione e mantenendo invariato il significato del ragionamento.

L'obiettivo che ci poniamo è quello di dimostrare che non ammette soluzioni analitiche in un intorno dell'origine.

1. Per cominciare osserviamo che in questo caso la superficie su cui sono stati assegnati i dati di Cauchy (1.2) è $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$. Essa in ogni punto ha come versore normale $(0, 1)$ ed è, quindi, caratteristica per l'equazione (4.6), poiché¹

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \nu^\alpha = a_{(2,0)} \nu^{(2,0)} = 0.$$

2. Per assurdo supponiamo di avere una soluzione del problema u analitica in un intorno dell'origine, ovvero:

$$u(x, t) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)} c(\alpha) x^{\alpha_1} t^{\alpha_2}, \quad c(\alpha) = \frac{D^\alpha u(0, 0)}{\alpha!}$$

dove $|(x, t)| < r$ per qualche $r > 0$.

¹vedi definizione 2.1.3

3. Calcoliamo i valori dei coefficienti $c(2n, 0) \forall n \in \mathbb{N}$.

Per fare questo dobbiamo sviluppare in serie di potenze centrata nell'origine la funzione del problema di Cauchy:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da questa serie otteniamo le relazioni:

$$\begin{aligned} D_x^{2n} u(0, 0) &= \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = (-1)^n (2n)! \\ D_x^{2n+1} u(0, 0) &= \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

Dalle quali si ricava: $c(2n, 0) = (-1)^n$ e $c(2n+1, 0) = 0$.

4. Calcoliamo i valori dei coefficienti $c(2n, n)$ e dimostriamo che $c(2n, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.
A questo scopo, invece, si sfruttiamo l'equazione (4.6) per ottenere la seguente relazione tra i coefficienti:

$$c(\alpha_1, \alpha_2 + 1) = \frac{(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)}{(\alpha_2 + 1)} c(\alpha_1 + 2, \alpha_2). \quad (4.8)$$

E utilizziamo, quindi, quest'ultima come segue:

$$\begin{aligned} c(2n, n) &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n} c(2n+2, n-1) & (4.8) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2n \\ \alpha_2 + 1 = n \end{cases} \\ &= \dots = \frac{(2n+2n) \cdots (2n+1)}{n!} c(2n+2n, 0) & \text{iterando su } n \\ &= \frac{(4n)!}{(2n)! n!} (-1)^{2n} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{64n}{e} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty & \text{per la formula di Stirling} \end{aligned}$$

5. Completiamo il ragionamento in modo immediato osservando che

$$c(2n, n) x^{2n} t^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \forall (x, t) \neq (0, 0),$$

infatti ciò implica direttamente che la serie di potenze non converge in ogni punto diverso dall'origine e questo è assurdo.

4.3 Esempio di Hadamard

L'ultimo esempio che affrontiamo, dovuto ad Hadamard (1932), aiuta a capire un limite importante del TCK, ovvero il fatto che esso non fornisca alcun controllo sulla **relazione** tra i dati di Cauchy e la forma della soluzione analitica, la quale potrebbe risultare instabile.

Per osservare tale comportamento consideriamo il seguente problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due dimensioni al variare di n :

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u(x, 0) &= 0 \\ u_y(x, 0) &= n \sin(nx) e^{-\sqrt{n}} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Quello che vogliamo mostrare è come al crescere di n si verifica un blow-up della soluzione u_n del problema (4.9).

1. Il problema, come nell'esempio precedente, è assegnato su $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, che è naturalmente una superficie non caratteristica per l'equazione di Laplace (si noti infatti che essa è ellittica e quindi non possiede alcuna superficie caratteristica).
2. E' facile verificare che la funzione $u_n(x, y) = \sin(nx) \sinh(ny) e^{-\sqrt{n}}$ soddisfa (4.9) e che essa è analitica, per questo è anche l'unica possibile con quest'ultima proprietà.
3. Si osserva, infine, come $\sinh(ny) e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Come conclusione di questa discussione è interessante osservare anche come la soluzione non dipenda con continuità dai dati. Infatti, considerando il problema per $n = \infty$, ovvero con dati $u(x, 0) = u_y(x, 0) = 0$, notiamo immediatamente che l'unica soluzione analitica è $u \equiv 0$, la quale è profondamente diversa dal comportamento asintotico di u_n .

A partire da queste considerazioni Hadamard proseguì i suoi studi, prima definendo il concetto di buona positura di un problema di Cauchy², e poi scoprendo che i problemi costruiti con equazioni iperboliche a coefficienti costanti soddisfano sempre questa nella classe delle funzioni C^∞ .

²un problema di Cauchy è ben posto se ha una e una sola soluzione stabile rispetto ai dati

Bibliografia

- [CE99] Pierre A. Chiappori and Ivar Ekeland. Aggregation and market demand: an exterior differential calculus viewpoint. *Econometrica*, 67:1435–1458, 1999.
- [CE06] Pierre A. Chiappori and Ivar Ekeland. The micro economics of group behavior: General characterization. *Journal of Economic Theory*, 130:1–26, 2006.
- [CE09a] Pierre A. Chiappori and Ivar Ekeland. The economics and mathematics of aggregation: Formal models of efficient group behavior. *Foundations and Trends® in Microeconomics*, 5:1–2, 2009.
- [CE09b] Pierre A. Chiappori and Ivar Ekeland. The Microeconomics of Efficient Group Behavior: Identification. *Econometrica*, 77:763 – 799, 2009.
- [Eke] Ivar Ekeland. Some applications of the Cartan-Kähler theorem to economic theory.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [FMS20] Nicola Fusco, Paolo Marcellini, and Carlo Sbordone. *Lezioni di analisi matematica 2*. Zanichelli, 2020.
- [Fol95] Gerald B. Folland. *Introdution to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 1995.
- [Hö63] Lars Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, 1963.
- [Joh82] Fritz John. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1982.
- [Ken83] Don H. Kennedy. *Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky*. Ohio University Press, 1983.
- [Kov78] Sofya Kovalevskaya. *A Russian Childhood*. Springer New York, 1978. Tradotto e curato da Beatrice Stillman.
- [Lef92] Anne Charlotte Leffler. *Sonja Kovalevsky. Ciò che ho vissuto con lei e ciò che mi ha detto di sé* (in russo). Ed. Albert Bonniers, 1892.

- [Luc24] Sandra Lucente. Teorema di Cauchy-Kovalevskaja per le equazioni differenziali. *Le Scienze*, 2024. Collana *Rivoluzioni matematiche*.
- [Ovs65] L.V. Ovsyannikov. *Singular operators in Banach spaces scales* (in Russian). Doklady Acad. Nauk., 1965. p. 819–822.
- [RF10] Halsey L. Royden and Patrick M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Pearson, 2010.
- [Rou80] Delfina Roux. *Istituzioni di analisi superiore - PARTE I*. Edizioni la Viscontea, 1980.
- [Spi02] Joan Spicci. *Beyond the Limit: The Dream of Sofya Kovalevskaya*. Tom Doherty Associates, 2002. Tradotto e curato da Beatrice Stillman.
- [Tre70] François Treves. On local solvability of partial differential equations. 1970.
- [Tre75] François Treves. *Basic Linear Partial Differential Equations*. Amacademic Press, 1975.
- [Tre22] François Treves. *Analytic Partial Differential Equations*. Springer Nature, 2022.