

# Teorema di Cauchy-Kovalevskaya

Alessandro Pedone

Politecnico di Milano

24 settembre 2024

# Indice

1 Introduzione

2 Versione invariante

3 Esempi

4 Versioni alternative

5 Applicazioni

# Sofya Vasilyevna Kovalevskaya (1850-1891)

Diamo per nota la figura storica di Augustin-Louis Cauchy.  
Kovalevskaya è stata:

- una matematica russa allieva di Weierstrass
- la **pima donna** a conseguire un dottorato (3 tesi risalenti al 1875) e a ottenere una cattedra in Europa (in matematica)

Esistono diverse sue **rappresentazioni artistiche** sia in letteratura che nel cinema. Le più rilevanti sono:

- Una biografia accurata: Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky (1983), Don H. Kennedy
- Un racconto breve: Too Much Happiness (2009), Alice Munro

La domanda cruciale a cui vogliamo rispondere è la seguente:

*E' possibile che esista una soluzione analitica  
a un sistema di EDP qualsiasi?*

La risposta a questa domanda sarà affermativa, per questo ci poniamo già delle altre:

- sotto quali ipotesi?
- la soluzione a questo sistema è unica?
- la soluzione dipende in modo continuo dai dati?
- quali conseguenze hanno risultati ottenuti?

# Superfici caratteristiche

Prima di entrare nel merito della discussione è necessario introdurre il concetto di superficie caratteristica per un'equazione.

Caso equazione lineare

Disegno

# Superfici caratteristiche

## Caso generale



# Background

si parte dal lavoro di Cauchy 1835-42, lavoro di Kovalevskaya 70-74  
l'esistenza e l'unicità di soluzioni locali (analitiche/olomorfe) di  
equazioni differenziali ordinarie (che abbrevieremo con EDO da qui  
in poi) e di sistemi lineari del primo ordine, sfruttando il metodo dei  
maggioranti

# Schema dell'approccio

- EDO
-

# ODE

# Esempio di Lewy

Importanza della richiesta di analiticità

## generalizzazione esempio di Lewy

- 1 traslare il problema del teorema ?? in modo da ricondursi al caso di un generico punto  $(x_0, y_0, t_0)$ , usando come forzante la funzione  $g(x, y, t) = f(t - 2xy_0 + 2x_0y)$ ;
- 2 costruire una funzione  $S_a \in C^\infty$  per ogni  $a \in I^\infty$ ;
- 3 costruire degli insiemi  $E_{j,n} \subseteq I^\infty$  chiusi e senza parte interna sfruttando  $S_a$  e il teorema di Ascoli-Arzelà;
- 4 concludere la dimostrazione del teorema ?? utilizzando i lemmi appena citati per ricavare, con un ragionamento per assurdo, l'uguaglianza  $I^\infty = \bigcup E_{j,n}$ , grazie alla quale si può applicare l'argomento di Baire.

# Esempio di Kovalevskaya

Importanza superfici non caratteristiche

# Esempio di Hadamard

Nessuna garanzia della stabilità della soluzione

# Versione classica

Enunciato, può essere visto come corollario di un teorema più astratto.



# Versione astratta

Premessa

$$E_s = H(\overline{\mathcal{O}_s}; \mathbb{C}^m)$$

con  $s \in [0, 1]$ , costante  $C$

# Enunciato

## Dimostrazione esistenza

## Dimostrazione unicità

# Versioni "olomorfe"

Si può rifare tutto con  $t$  variabile complessa e i teoremi non cambiano. Lo stesso vale anche per la versione invariante normale.

Le conseguenze di questo teorema si osservano in vari campi, tra cui i principali sono:

- teoria delle equazioni differenziali
- fisica matematica, dove ha fatto emergere numerose domande (cosa succede nella realtà quando esiste una soluzione analitica locale?)
- geometria differenziale
- teoria economica

Impatto sulla teoria delle equazioni differenziali:

- teorema di Holmgren
- Treves e Nierenberg per la ricerca di condizioni necessarie e/o sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali
- Hormander la teoria degli operatori differenziali lineari (con particolare attenzione alla condizioni necessarie)

# Teorema di Holmgren

Enunciato astratto, si dimostra utilizzando la versione astratta di CK



## Enunciato concreto

## Sketch della dimostrazione

# Teorema di Cartan-Kahler

Per quanto riguarda geometria differenziale e teoria economica  
abbiamo un risultato che seguire dal teorema di CK  
Enunciato e applicazione al campo economico

Indagare cose che danno risultati deludenti e limitatamente applicabili non è inutile  
Come funziona il processo della ricerca in matematica (che in un corso non si può fare)  
Esempio principe della matematica al femminile