

Progetto di inferenza statistica: regressione lineare

Maria Chiara Menicucci, Alessandro Pedone,
Arianna Perotti, Leonardo Pascotto

Politecnico di Milano

25 giugno 2024

Indice

- 1 Dati e domanda di ricerca
- 2 Modello lineare
- 3 Cross-validation e previsione

Dataset

Indagine OECD PISA 2022:

<https://www.oecd.org/pisa/data/2022database/>

Estraiamo i dati relativi all'Italia:

- 6920 osservazioni
- 8 covariate continue
- 7 covariate categoriche

Domanda di ricerca

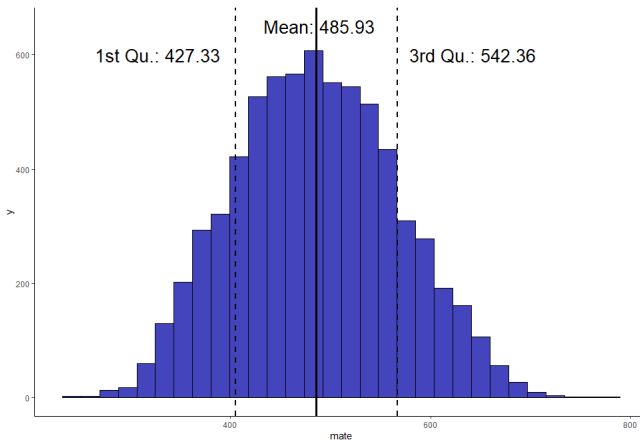
Vogliamo fare una regressione lineare per spiegare i risultati del test di matematica (mate) in termini di:

- caratteristiche personali dello studente
- contesto familiare
- impegno individuale
- ambiente scolastico

Utilità del modello:

- comprendere quali fattori influenzano il rendimento in matematica
- supporto a decisioni concrete che le scuole devono prendere

Risposta

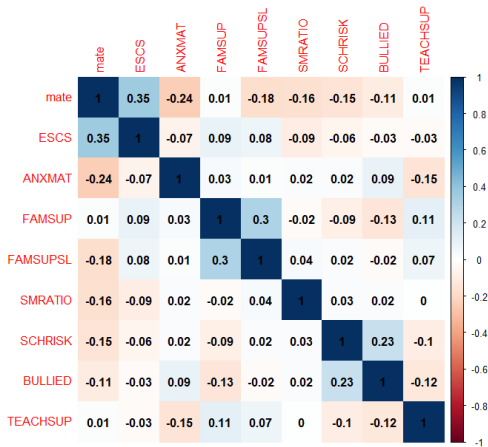


Covariate

- ESCS : index of economic, social and cultural status
- FAMSUP : family support
- FAMSUPSL : family support for self-directed learning
- ANXMAT : mathematics anxiety
- SCHRISK : school safety risks
- BULLIED : being bullied
- TEACHSUP : mathematics teacher support
- SMRATIO : student-mathematics teacher ratio

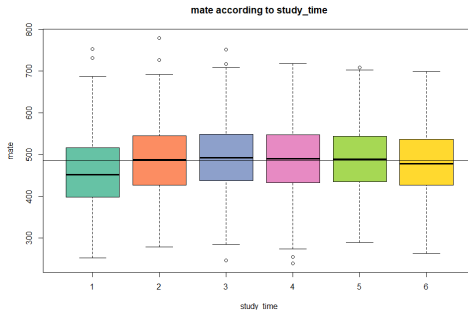
- grade : prima, seconda e terza superiore
- gender : 0 (M), 1 (F)
- immig : 0 (no) e 1 (sì)
- EXERPRAC : 0 – 10 sessioni settimanali di attività fisica
- MACTIV : 0 – 5 attività extracurr. legate alla matematica
- mathtime : 1 – 6 studio della matematica
- studytime : 1 – 6 studio in generale

Visualizzazione delle correlazioni



ANOVA

Per ridurre il numero di categorie delle covariate categoriche sfruttiamo ANOVA. A titolo d'esempio¹, concentriamoci su `studytime`:



¹Si è seguito un procedimento analogo per `mathtime` e `EXERPRAC`

ANOVA

Non è opportuno usare un test ANOVA perché non è verificata la gaussianità intragruppo dei dati:

```
> tapply(d$mate, d$study_time, function(x) shapiro.test(x)$p)
```

1	2	3	4	5	6
1.170236e-07	2.231728e-04	8.137330e-03	1.811259e-03	1.460014e-02	2.547258e-01

Kruskal-Wallis

Usiamo allora il test non parametrico di Kruskal-Wallis:

Kruskal-Wallis Test (alpha = 0.001)

```
data : mate and as.factor(study_time)
```

```
statistic  : 138.3999
```

```
parameter  : 5
```

```
p.value    : 3.915209e-28
```

```
Result      : Difference is statistically significant.
```

Dunn

Usiamo ora il test di Dunn con la correzione di Bonferroni:

```
> dunn.test(d$mate, as.factor(d$study_time), method = "bonferroni")
```

Comparison of x by group

(Bonferroni)

Col Mean-					
Row Mean	1	2	3	4	5
2	-8.043896 0.0000*				
3	-10.73415 0.0000*	-1.631907 0.7702			
4	-9.824431 0.0000*	-0.887767 1.0000	0.836093 1.0000		
5	-8.715361 0.0000*	-0.487160 1.0000	1.125403 1.0000	0.368950 1.0000	
6	-5.865791 0.0000*	1.907300 0.4236	3.700865 0.0016*	2.953865 0.0235*	2.418035 0.1170

Concludiamo che non c'è differenza significativa tra le classi da 2 a 5 e ha quindi senso raggrupparle nella stessa categoria.

Generiamo il primo modello lineare per `mate`:

Call:

```
lm(formula = mate ~ ., data = d)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-226.927	-42.596	0.921	43.919	213.392

Residual standard error: 64.05 on 6900 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.3741, Adjusted R-squared: 0.3723

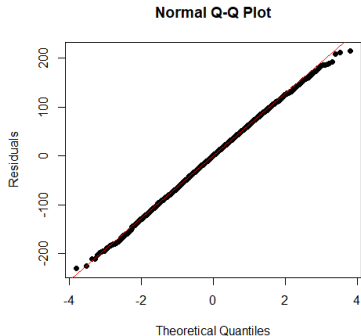
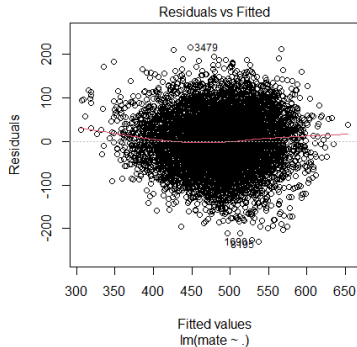
F-statistic: 217 on 19 and 6900 DF, p-value: < 2.2e-16

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	437.84550	4.78263	91.549	< 2e-16	***
grade2~	32.19034	2.68624	11.983	< 2e-16	***
grade3~	37.57639	4.20207	8.942	< 2e-16	***
genderF	-28.79189	1.65279	-17.420	< 2e-16	***
immigY	-2.31421	2.67021	-0.867	0.38615	
ESCS	23.63258	0.94335	25.052	< 2e-16	***
FAMSUP	1.62449	0.87919	1.848	0.06468	.
FAMSUPSL	-16.79813	0.89940	-18.677	< 2e-16	***
ANXMAT	-14.38726	0.76020	-18.926	< 2e-16	***
math_timeabbastanza	-6.84174	3.26140	-2.098	0.03596	*
math_timetanto	-32.80510	7.33830	-4.470	7.93e-06	***
study_time1	21.01705	2.35324	8.931	< 2e-16	***
study_time2	18.03680	3.34725	5.389	7.34e-08	***
EXERPRACpoco	16.93088	2.25220	7.517	6.29e-14	***
EXERPRACtanto	-13.41004	2.42980	-5.519	3.53e-08	***
SCHRISK	-7.65098	0.97760	-7.826	5.78e-15	***
BULLIED	-2.86359	0.90977	-3.148	0.00165	**
TEACHSUP	-0.58218	0.71107	-0.819	0.41297	
SMRATIO	-0.20457	0.03374	-6.063	1.41e-09	***
MACTIV	12.58951	0.60931	20.662	< 2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Validazione del modello



Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: m\$residuals

D = 0.0087536, p-value = 0.664

alternative hypothesis: two-sided

Pulizia del dataset

Analizzando i punti influenti individuiamo 362 osservazioni, in particolare suggerite dal criterio della distanza di Cook, corrispondenti a profili di studenti molto peculiari.

Rimuoviamo queste osservazioni e ripetiamo il fit del modello:

Call:

```
lm(formula = mate ~ ., data = dc)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-208.732	-39.754	0.427	40.747	186.572

Residual standard error: 57.21 on 6538 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.4454, Adjusted R-squared: 0.4438

F-statistic: 276.3 on 19 and 6538 DF, p-value: < 2.2e-16

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	438.90613	4.43227	99.025	< 2e-16 ***
grade2~	34.34865	2.50746	13.699	< 2e-16 ***
grade3~	38.64076	4.05337	9.533	< 2e-16 ***
genderF	-28.48306	1.51639	-18.783	< 2e-16 ***
immigY	-4.27368	2.48070	-1.723	0.0850 .
ESCS	24.72479	0.86930	28.442	< 2e-16 ***
FAMSUP	1.09726	0.81749	1.342	0.1796
FAMSUPSL	-18.12601	0.84071	-21.560	< 2e-16 ***
ANXMAT	-15.90400	0.71002	-22.399	< 2e-16 ***
math_time1	-4.14156	3.09585	-1.338	0.1810
math_time2	-33.92921	8.17806	-4.149	3.38e-05 ***
study_time1	19.80758	2.18930	9.047	< 2e-16 ***
study_time2	15.84059	3.12187	5.074	4.00e-07 ***
EXERPRACpoco	15.76601	2.08100	7.576	4.05e-14 ***
EXERPRACtanto	-15.16094	2.24528	-6.752	1.58e-11 ***
SCHRISK	-7.83478	0.90879	-8.621	< 2e-16 ***
BULLIED	-1.64090	0.84658	-1.938	0.0526 .
TEACHSUP	0.17820	0.65791	0.271	0.7865
SMRATIO	-0.20343	0.03094	-6.576	5.21e-11 ***
MACTIV	13.18464	0.56113	23.497	< 2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Selezione manuale delle covariate

Rimuoviamo immig:

Call:

```
lm(formula = mate ~ ., data = dc)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-208.632	-39.856	0.183	40.696	187.078

Residual standard error: 57.21 on 6539 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.4451, Adjusted R-squared: 0.4436

F-statistic: 291.4 on 18 and 6539 DF, p-value: < 2.2e-16

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	437.92500	4.39619	99.615	< 2e-16	***
grade2~	35.30556	2.44553	14.437	< 2e-16	***
grade3~	39.75482	4.00206	9.934	< 2e-16	***
genderF	-28.53831	1.51628	-18.821	< 2e-16	***
ESCS	25.08317	0.84418	29.713	< 2e-16	***
FAMSUP	1.15757	0.81686	1.417	0.1565	
FAMSUPSL	-18.09845	0.84068	-21.528	< 2e-16	***
ANXMAT	-15.95861	0.70942	-22.495	< 2e-16	***
math_time1	-4.25476	3.09562	-1.374	0.1694	
math_time2	-34.30694	8.17635	-4.196	2.75e-05	***
study_time1	19.65679	2.18788	8.984	< 2e-16	***
study_time2	15.74661	3.12186	5.044	4.68e-07	***
EXERPRA Cpoco	15.79103	2.08126	7.587	3.72e-14	***
EXERPRA Ctanto	-15.14688	2.24560	-6.745	1.66e-11	***
SCHRISK	-7.89359	0.90828	-8.691	< 2e-16	***
BULLIED	-1.66334	0.84660	-1.965	0.0495	*
TEACHSUP	0.16107	0.65794	0.245	0.8066	
SMRATIO	-0.20371	0.03094	-6.584	4.93e-11	***
MACTIV	13.12360	0.56009	23.431	< 2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Rimuoviamo FAMSUP:

Call:

```
lm(formula = mate ~ ., data = dc)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-207.665	-39.997	0.385	40.773	185.698

Residual standard error: 57.22 on 6540 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.4449, Adjusted R-squared: 0.4435

F-statistic: 308.4 on 17 and 6540 DF, p-value: < 2.2e-16

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	437.43138	4.38270	99.809	< 2e-16	***
grade2^	35.40735	2.44466	14.484	< 2e-16	***
grade3^	40.00901	3.99834	10.006	< 2e-16	***
genderF	-28.45379	1.51522	-18.779	< 2e-16	***
ESCS	25.13894	0.84332	29.809	< 2e-16	***
FAMSUPSL	-17.74475	0.80284	-22.103	< 2e-16	***
ANXMAT	-15.91695	0.70887	-22.454	< 2e-16	***
math_time1	-4.26707	3.09585	-1.378	0.1682	
math_time2	-34.39386	8.17675	-4.206	2.63e-05	***
study_time1	19.87020	2.18286	9.103	< 2e-16	***
study_time2	16.07646	3.11341	5.164	2.49e-07	***
EXERPRACpoco	15.81812	2.08134	7.600	3.38e-14	***
EXERPRACtanto	-15.04230	2.24456	-6.702	2.23e-11	***
SCHRISK	-7.93690	0.90784	-8.743	< 2e-16	***
BULLIED	-1.79323	0.84169	-2.131	0.0332	*
TEACHSUP	0.23848	0.65572	0.364	0.7161	
SMRATIO	-0.20419	0.03094	-6.599	4.45e-11	***
MACTIV	13.16073	0.55952	23.521	< 2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Rimuoviamo TEACHSUP:

CCall:

```
lm(formula = mate ~ ., data = dc)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-207.722	-40.002	0.245	40.710	185.655

Residual standard error: 57.21 on 6541 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.4449, Adjusted R-squared: 0.4436

F-statistic: 327.7 on 16 and 6541 DF, p-value: < 2.2e-16

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	437.39354	4.38118	99.835	< 2e-16	***
grade2^	35.37684	2.44306	14.481	< 2e-16	***
grade3^	40.00389	3.99805	10.006	< 2e-16	***
genderF	-28.45443	1.51512	-18.780	< 2e-16	***
ESCS	25.12462	0.84235	29.827	< 2e-16	***
FAMSUPSL	-17.72026	0.79996	-22.152	< 2e-16	***
ANXMAT	-15.95472	0.70117	-22.754	< 2e-16	***
math_time1	-4.29282	3.09483	-1.387	0.1655	
math_time2	-34.47894	8.17286	-4.219	2.49e-05	***
study_time1	19.91440	2.17933	9.138	< 2e-16	***
study_time2	16.14122	3.10811	5.193	2.13e-07	***
EXERPRACpoco	15.80951	2.08106	7.597	3.46e-14	***
EXERPRACtanto	-15.05149	2.24427	-6.707	2.16e-11	***
SCHRISK	-7.95912	0.90572	-8.788	< 2e-16	***
BULLIED	-1.81946	0.83854	-2.170	0.0301	*
SMRATIO	-0.20415	0.03094	-6.599	4.48e-11	***
MACTIV	13.15504	0.55927	23.522	< 2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

La forward e backward selection con il BIC rimuove anche BULLIED:

```
> step(m0, direction = "both", scope=formula(m1), trace = F, k = log(n))
```

Call:

```
lm(formula = mate ~ ESCS + MACTIV + ANXMAT + FAMSUPSL + EXERPRAC +  
    gender + grade + SCHRISK + study_time + SMRATIO + math_time,  
    data = dc)
```

Coefficients:

(Intercept)	ESCS	MACTIV	ANXMAT	FAMSUPSL
437.6584	25.0999	13.1822	-16.1007	-17.6605
EXERPRACpoco	EXERPRACtanto	genderF	grade2^	grade3^
15.9298	-14.9732	-28.4018	35.8370	40.7948
SCHRISK	study_time1	study_time2	SMRATIO	math_time1
-8.3807	20.0084	16.0899	-0.2045	-4.5003
math_time2				
-35.0074				

Modello finale

Call:

```
lm(formula = mate ~ ., data = dc)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-208.527	-39.948	0.447	40.738	186.789

Residual standard error: 57.23 on 6542 degrees of freedom

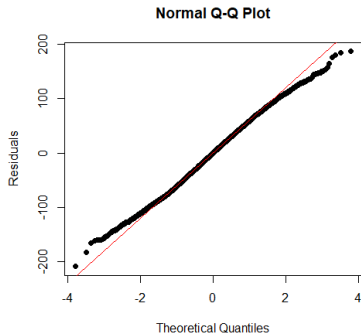
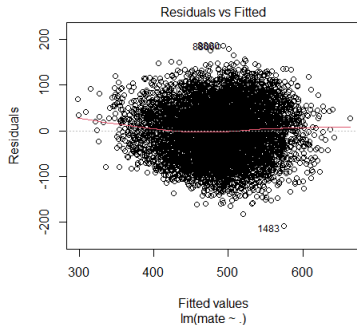
Multiple R-squared: 0.4445, Adjusted R-squared: 0.4433

F-statistic: 349 on 15 and 6542 DF, p-value: < 2.2e-16

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	437.65842	4.38072	99.906	< 2e-16	***
grade2^	35.83704	2.43453	14.720	< 2e-16	***
grade3^	40.79485	3.98253	10.243	< 2e-16	***
genderF	-28.40179	1.51535	-18.743	< 2e-16	***
ESCS	25.09988	0.84251	29.792	< 2e-16	***
FAMSUPSL	-17.66053	0.79971	-22.084	< 2e-16	***
ANXMAT	-16.10067	0.69814	-23.062	< 2e-16	***
math_time1	-4.50026	3.09423	-1.454	0.146	
math_time2	-35.00740	8.17154	-4.284	1.86e-05	***
study_time1	20.00839	2.17952	9.180	< 2e-16	***
study_time2	16.08990	3.10890	5.175	2.34e-07	***
EXERPRACpoco	15.92976	2.08092	7.655	2.21e-14	***
EXERPRACtanto	-14.97317	2.24462	-6.671	2.75e-11	***
SCHRISK	-8.38074	0.88488	-9.471	< 2e-16	***
SMRATIO	-0.20447	0.03095	-6.607	4.23e-11	***
MACTIV	13.18222	0.55929	23.570	< 2e-16	***

Validazione del modello



```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  m5$residuals
D = 0.01684, p-value = 0.04849
alternative hypothesis: two-sided
```

Calcoliamo i GVIF: non ci sono problemi di collinearità.

	GVIF	Df	$GVIF^{1/(2 \cdot Df)}$
grade	1.060765	2	1.014857
gender	1.145016	1	1.070054
SCHRISK	1.059812	1	1.029472
ANXMAT	1.078297	1	1.038411
math_time	1.124445	2	1.029756
study_time	1.224041	2	1.051838
EXERPRAC	1.104871	2	1.025246
ESCS	1.103309	1	1.050385
FAMSUPSL	1.035756	1	1.017721
MACTIV	1.141020	1	1.068185
SMRATIO	1.065693	1	1.032324

Cross-validation

MSE sul training set reale (ovvero il dataset del modello finale):

```
> mean(glm$residuals**2)
[1] 3267.384
```

Facciamo la cross-validation con 10 fold:

```
> cv.err = cv.glm(dc, glm, K = 10)
> cv.err$delta[1]
[1] 3282.943
```

Miglioramento di precisione rispetto alla previsione effettuata semplicemente con la media campionaria:

```
> var(d$mate)/cv.err$delta[1]
[1] 1.990963
```


Facciamo la leave-one-out cross-validation ($n = 6558$ fold):

```
> cv.err = cv.glm(dc, glm, K = n)
> cv.err$delta[1]
[1] 3281.561
```

Miglioramento di precisione rispetto alla previsione effettuata semplicemente con la media campionaria:

```
> var(d$mate)/cv.err$delta[1]
[1] 1.991802
```

Intervalli di confidenza

A titolo di esempio costruiamo degli intervalli di confidenza per il valore atteso di `mate` con 5 osservazioni (`sample`) estratte casualmente

```
> predict(g, sample, interval = "confidence")
      fit      lwr      upr
1511 555.7920 549.9492 561.6348
2472 394.0471 386.2020 401.8922
8917 453.4244 446.9008 459.9481
2793 492.9529 487.6467 498.2590
5304 522.8707 519.3652 526.3761
```

Intervalli di predizione

A titolo di esempio costruiamo degli intervalli di predizione per
mate con le stesse osservazioni

```
> predict(g, sample, interval = "prediction")  
           fit      lwr      upr  
1511  555.7920 443.4487 668.1353  
2472  394.0471 281.5819 506.5123  
8917  453.4244 341.0437 565.8052  
2793  492.9529 380.6362 605.2695  
5304  522.8707 410.6247 635.1167
```

Osservazioni

- La stima del valore atteso è piuttosto precisa
- La previsione del valore della variabile ha invece un'incertezza molto ampia
- Quest'ultima si potrebbe utilizzare per identificare risultati "improbabili" relativi a uno studente