# Probabilidade Bayesiana

Flávio Luiz Seixas[1]

Instituto de Computação
fseixas@ic.uff.br, http://www.ic.uff.br/ fseixas

## 1 Paradigmas Frequentista e Bayesiano

O paradigma frequentista admite a probabilidade num contexto restrito a fenômenos que podem ser medidos por frequências relativas. O paradigma Bayesiano entende-se que a probabilidade é uma medida racional e condicional de incerteza. Uma medida do grau de plausibilidade de proposições quaisquer, as quais não precisam necessariamente estar associadas a fenômenos medidos por frequência relativa. Por exemplo, no paradigma Bayesiano admite-se falar da probabilidade de extinção de uma espécie, o que não seria admissível sob o paradigma frequentista.

A inferência estatística é o processo formal utilizado para fazer afirmações genéricas com base em informações parciais. Essas afirmações sáo probabilísticas pois se caracterizam por incluir componentes de incerteza.

Na perspectiva bayesiana, a inferência estatística sobre qualquer quantidade de interesse é descrita como a modificação que se processa nas incertezas à luz de novas evidências.

A conceituação frequentista admite falar em probabilidades somente no contexto de frequências relativas. Em contraste, na conceituação bayesiana, probabilidades quantificam as plausibilidades de proposições ou eventos. Ao atribuir plausibilidades diferenciadas a proposições, a formalização bayesiana de probabilidade estende a lógica dedutiva, restrita a classificar proposições em verdadeiras (probabilidade igual a 1) ou falsas (probabilidade igual a zero), para um conjunto de possibilidades entre estes dois extremos.

O rápido crescimento do uso do paradigma bayesiano em ciências aplicadas ao longo das últimas décadas foi facilitado pelo surgimento de vários programas para efetuar as computações estatísticas. Entre esses, destaca-se o R (programa de livre distribuições e de código aberto).

## 2 As Regras de Probabilidade

A probabilidade será um número real e função de dois argumentos: o evento incerto $E$ e a premissa $H$. Utilizaremos o símbolo $Pr(E|H)$ lido como probabilidade de $E$ dado que $H$ é fato, ou a probabilidade de $E$ condicionada ao fato $H$.

**A Lei da convexidade**

A probabilidade de um evento qualquer $E$, condicionado a $H$ é um número real no intervalo $[0, 1]$

$$0 < Pr(E|H) < 1 \tag{1}$$

**A Lei da adição**

Se $E_1$ e $E_2$ são eventos exclusivos sob $H$, então a probabilidade da união lógica de $E_1 + E_2$ é igual a soma aritmética das suas probabilidades individuais condicionadas a $H$.

$$Pr(E_1 + E_2|H) = Pr(E_1|H) + Pr(E_2|H) \tag{2}$$

**A Lei do produto**

Se $E_1$ e $E_2$ são eventos quaisquer então a probabilidade do produto lógico $E_1E_2$ condicionado a $H$ é o produto da probabilidade de $E_1$ condicionado a $H$ multiplicado pela probabilidade de $E_2$ condicionado a $E_1H$

$$Pr(E_1E_2|H) = Pr(E_1|H) \bullet Pr(E_2|E_1H) \tag{3}$$

Nos casos em que estamos tratando de eventos independentes, a lei do produto pode ser reescrita como:

$$Pr(E_1E_2|H) = Pr(E_1|H) \bullet Pr(E_2|H) \tag{4}$$

## 3 O Teorema de Bayes

Mutas propriedades do cálculo de probabilidades podem ser deduzidas a partir das três leis básicas indicadas na seção anterior. Depois teoremas adicionais merecem especial destaque, o Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes.

**Teorema da Probabilidade Total**

Seja $E_1; j = 1, ..., m$ um conjunto de $m$ eventos exclusivos e exaustivos sob $H$, e seja $A$ outro evento qualquer. Então $Pr(A|H)$ pode ser reescrito estendendo a conversa para a inclusão dos $E_j$.

$$Pr(A|H) = \sum_{j=1}^{m} Pr(A|E_jH) \bullet Pr(E_j|H) \tag{5}$$

**Teorema de Bayes**

Sejam $E$ e $F$ dois eventos quaisquer e $Pr(E|H) > 0$, então:

$$Pr(F|EH) = \frac{Pr(E|FH) \bullet Pr(F|H)}{Pr(E|H)} \tag{6}$$

### 3.1 Exemplo

Um estudo de uma mamografia no diagnóstico de câncer é apresentado na Tabela 1. Os dados foram obtidos experimentalmente sobre a efetividade do exame na detecção de um tumor de mama maligno ou benigno. Por exemplo, se um tumor é maligno $Ca$, a probabilidade de que o exame resulte positivo é $Pr(Pos|Ca) = 0,792$, ou seja, 79,2%. De forma similar temos $Pr(Neg|Ca') = 0,904$ como a probabilidade de que o exame resulte negativo se o tumor não é maligno ($Ca'$). Os percentuais para faltos positivos e falsos negativos são 9,6% e 20,8%, respectivamente.

**Table 1.** Resultados dos testes de câncer de mamas

| Resultado do teste | Realidade | |
|---|---|---|
| | $Ca$ (Tumor maligno) | $Ca'$ (Tumor benigno) |
| $Pos$ (Positivo) | 0,792 | 0,096 |
| $Neg$ (Negativo) | 0,208 | 0,904 |

Com essa tabela, fez-se a seguinte pergunta: ”Suponha que uma paciente pertença a uma população (mesmo grupo etário, hábito alimentar, etc.) na qual a incidência geral de câncer de mama é de 1%. Detectado um nódulo no seio desta paciente, pede-se uma mamografia para avaliar a possibilidade de que se trate de um tumor maligno; o resultado é positivo. De posse deste conjunto de informações, qual é, em sua opinião, a probabilidade de tratar-se de um tumor maligno?”

Pelo Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} Pr(Ca|Pos) &= \frac{Pr(Pos|Ca) \bullet Pr(Ca)}{Pr(Pos)} \\ &= \frac{Pr(Pos|Ca) \bullet Pr(Ca)}{P(Pos|Ca) \bullet P(Ca) + Pr(Pos|Ca') \bullet Pr(P(Ca')} \\ &= \frac{0,792 \bullet 0,01}{0,792 \bullet 0,01 + 0,096 \bullet 0,99} = 0,077 \end{aligned} \tag{7}$$