MODELLI MULTILIVELLO

➲ CASI PARTICOLARI DI MODELLO MULTILIVELLO

Considerata una struttura gerarchica di dati a due livelli, nella quale n_j unità di 1° livello (ad es., studenti) sono annidate (o raggruppate o classificate) nell'unità *j*-esima di 2° livello (ad es., scuola), con $j = 1, \ldots, J$, si hanno i seguenti casi particolari:

- Modello ANOVA ad una via (*Empty Model*):

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + U_{0j} + \varepsilon_{ij},$$

dove U_{0j} è l'effetto casuale (errore di 2° livello) e ε_{ij} è l'errore di 1° livello. In generale, si assumono le seguenti ipotesi: $U_{0j} \sim N(0, \tau_{00})$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, $\mathrm{Cov}(U_{0j}, \varepsilon_{ij}) = 0$, per $i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, J$.
Posto:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + U_{0j}, \qquad (*)$$

si ha:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \varepsilon_{ij},$$

così che l'*empty model* può essere visto come un caso particolare di *random-intercept model*, ossia di modello ad intercetta casuale.

- Modello ad intercetta casuale con una variabile esplicativa X di 1° livello:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{ij} + \varepsilon_{ij},$$

dove β_{0j} è data dalla relazione (*).

- Modello ad intercetta e coefficienti di regressione casuali (*random-coefficients model*):

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} x_{1ij} + \ldots + \beta_{Kj} x_{Kij} + \varepsilon_{ij} ,$$

dove β_{0j} è data dalla relazione (*) e analogamente:

$$\beta_{kj} = \gamma_{0k} + U_{kj} , \qquad \text{per } k = 1, \ldots, K .$$

In particolare: $\mathrm{Var}(U_{kj}) = \tau_{kk}$ e $\mathrm{Cov}(U_{tj}, U_{kj}) = \tau_{tk}$, per $j = 1, \ldots, J$ e per $t, k = 0, \ldots, K$, $t \neq k$.
Inoltre, fissato j, si assume che gli effetti casuali $U_{0j}, U_{1j}, \ldots, U_{kj}, \ldots, U_{Kj}$ abbiano distribuzione normale multivariata con vettore delle medie nullo e matrice di varianze-covarianze data da: $\mathbf{T} = [\tau_{tk}]_{t,k=0,1,\ldots,K}$. Infine, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ e $\mathrm{Cov}(U_{kj}, \varepsilon_{ij}) = 0$, per $k = 0,1, \ldots, K$, $i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, J$.

- Modello con interazioni fra livelli (*cross-level interaction model*):

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} x_{1ij} + \ldots + \beta_{Kj} x_{Kij} + \varepsilon_{ij} , \tag{**}$$

dove: $\beta_{kj} = \gamma_{0k} + \gamma_{1k} w_j + U_{kj}$, per $j = 1, \ldots, J$ e $k = 0,1, \ldots, K$, essendo W variabile esplicativa di secondo livello. Tenendo presenti le relazioni appena scritte riguardanti i parametri casuali β_{kj}, l'equazione (**) si può riscrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \gamma_{00} + \gamma_{10} w_j + U_{0j} + (\gamma_{01} + \gamma_{11} w_j + U_{1j}) x_{1ij} + \ldots + \\ &\quad + (\gamma_{0K} + \gamma_{1K} w_j + U_{Kj}) x_{Kij} + \varepsilon_{ij} = \\ &= \gamma_{00} + \gamma_{01} x_{1ij} + \ldots + \gamma_{0K} x_{Kij} + \gamma_{10} w_j + \\ &\quad + (\gamma_{11} w_j x_{1ij} + \ldots + \gamma_{1K} w_j x_{Kij}) + (U_{0j} + U_{1j} x_{1ij} + \ldots + U_{Kj} x_{Kij}) + \varepsilon_{ij} . \end{aligned}$$

I parametri γ_{1k}, essendo associati ai prodotti $w_j x_{kij}$, rappresentano l’entità delle interazioni fra le variabili esplicative relative ai due livelli della struttura gerarchica.