Übungstermin: Mittwoch 10:30-12:00

Zijan Wang
Alessandro Santospirito
Serkan Bozkurt
24.11.2025

Mathematische Statistik
Übung 6

Lemma (Fatou)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge nicht-negativer $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen auf Ω. Dann gilt:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Aufgabe 20

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ eine μ-Dichte von P_n, und es gelte:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f_0(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P_0(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Beweis. □

Aufgabe 21

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), \frac{1}{2}\lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichne. Weiterhin sei X eine durch $X(\omega) = \omega$ definierte Zufallsvariable auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Betrachten Sie die Teil-σ-Algebra

$$\mathcal{A} := \sigma\left(\left[-1, -\frac{1}{2}\right), \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) =: \sigma(A_1, A_2, A_3).$$

Geben Sie eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ an.

Beweis. □

Aufgabe 22

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Weiter sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable mit $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sei $\mathcal{A}$-messbar. Zudem gelte

(i) $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = Y$,

(ii) $\mathbb{E}[X^2|\mathcal{A}] = Y^2$.

Zeigen Sie, dass $X = Y$ fast überall gilt.

Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{E}[(X - Y)^2|\mathcal{A}]$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-Y)^2|\mathcal{A}] &= \mathbb{E}[X^2 - 2XY + Y^2|\mathcal{A}] \\
&= \mathbb{E}[X^2|\mathcal{A}] - 2\mathbb{E}[XY|\mathcal{A}] + \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{A}] \\
&= Y^2 - 2Y \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] + Y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X-Y)^2|\mathcal{A}]] = \mathbb{E}[0] = 0$$

Sei $Z := (X-Y)^2$, eine nicht negative Zufallsvariable mit $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Z \geq 0$ fast überall, dann gilt:

$$\mathbb{E}[Z] = 0 \iff Z = 0 \text{ fast überall.}$$

Da die Funktion $f(x) = x^2$ nur für $x = 0$ den Wert 0 annimmt folgt und aus der Definition von Z:

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = 0 \iff (X-Y)^2 = 0 \text{ fast überall} \Rightarrow (X-Y) = 0 \text{ fast überall}$$

$\square$

Theorem: Bedingte Jensen Ungleichung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Zudem Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F}$-messbare und integrierbare Zufallsvariable. Dann gilt für jede konvexe Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{A}]$$

Sie dürfen dieses Theorem im Folgenden ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 23

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Zudem Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]) \leq \mathrm{Var}(X)$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]]^2 \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{A}]] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 24

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definieren wir

$$d(X,Y) := \sqrt{\mathbb{E}((X-Y)^2)}.$$

Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{A}$-messbare Zufallsvariable Y gilt

$$d(X,Y) \geq d(X, \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ fast überall.

Beweis. Sei $Z := \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$. Dann ist Z $\mathcal{A}$-messbar und da Y $\mathcal{A}$-messbar ist, ist folglich auch $Z - Y$ $\mathcal{A}$-messbar. Bevor wir den Beweis angehen, zeigen wir

$$\mathbb{E}[(X-Z)(Z-Y)] = 0.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-Z)(Z-Y)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X-Z)(Z-Y)|\mathcal{A}]] \\ &= \mathbb{E}[(Z-Y)\cdot \mathbb{E}[(X-Z)|\mathcal{A}]]\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt, da $(Z-Y)$ $\mathcal{A}$-messbar ist und aus dem bedingten Erwartungswert herausgezogen werden kann. Nun gilt:

$$\mathbb{E}[(X-Z)|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] - \mathbb{E}[Z|\mathcal{A}] = Z - Z = 0$$

Also $\mathbb{E}[(Z-Y)\cdot \mathbb{E}[(X-Z)|\mathcal{A}]] = 0$.

Zerlegen wir $X - Y = (X-Z) + (Z-Y)$. Quadrieren wir erhalten:

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \mathbb{E}[(X-Z)^2] + 2\mathbb{E}[(X-Z)(Z-Y)] + \mathbb{E}[(Z-Y)^2]$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}d(X,Y)^2 &= d(X,Z)^2 + \underbrace{d(Z,Y)^2}_{\geq 0} \\ &\geq d(X,Z)^2 \\ \Rightarrow d(X,Y) &\geq d(X,Z)\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $d(Z,Y) = 0$, also $Y = Z$ fast überall.

$\square$