Übungstermin: Mittwoch 10:30-12:00

Zijan Wang
Alessandro Santospirito
Serkan Bozkurt
10.11.2025

Mathematische Statistik
Übung 5

Aufgabe 16

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\vartheta)$, wobei $\vartheta > 0$ der Parameter ist. Die Dichte ist gegeben durch

$$f_\vartheta(x) = \vartheta e^{-\vartheta x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Betrachten Sie die Hypothesen

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \vartheta = \vartheta_1 > \vartheta_0.$$

(a) Bestimmen Sie die beobachtete Likelihood-Quotienten-Statistik $\Lambda(x)$.

(b) Konstruieren Sie einen (nicht-randomisierten) UMP-Test $\varphi(x)$ zum Niveau $\alpha \in (0,1)$, der H_0 ablehnt, wenn

$$\sum_{i=1}^n X_i \le \frac{F^{-1}(\alpha)}{2\vartheta_0},$$

wobei $F^{-1}(\alpha)$ das α-Quantil der χ^2_{2n}-Verteilung bezeichnet.

Hinweis: Es gilt $X_1 \sim \frac{1}{2\vartheta}\chi^2_2$.

Lösung

Aufgabe 17 (Vorrechenaufgabe)

Definition 0.1. *Zwei Maße μ und ν auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißen **singulär** (Notation: $\mu \perp \nu$), falls es eine Menge $A \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mu(A) = 0$ und $\nu(A^c) = 0$.*

(a) Beweisen Sie: Sind μ_1, μ_2, μ_3 Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\mu_1 \ll \mu_2$ und $\mu_2 \ll \mu_3$, so gilt $\mu_1 \ll \mu_3$.

(b) Beweisen Sie: Sind τ_1, τ_2, μ Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\tau_1 \ll \mu$ und $\tau_2 \ll \mu$, so gilt $\tau_1 + \tau_2 \ll \mu$.

(c) Seien μ_1, μ_2 Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$, für die weder $\mu_1 \ll \mu_2$ noch $\mu_2 \ll \mu_1$ gilt. Gilt dann notwendigerweise $\mu_1 \perp \mu_2$?

Lösung

(a) Seien μ_1, μ_2, μ_3 Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

$$\mu_1 \ll \mu_2, \quad \mu_2 \ll \mu_3.$$

Behauptung 0.2. *Die absolute Stetigkeit ist transitiv, d.h. $\mu_1 \ll \mu_3$.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu_3(A) = 0$. Aus $\mu_2 \ll \mu_3$ folgt

$$\mu_2(A) = 0,$$

und aus $\mu_1 \ll \mu_2$ folgt $\mu_1(A) = 0$.

Damit gilt für alle $A \in \mathcal{F}$:

$$\mu_3(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0,$$

also $\mu_1 \ll \mu_3$. □

(b) Seien τ_1, τ_2, μ Maße mit $\tau_1 \ll \mu$ und $\tau_2 \ll \mu$.

Behauptung 0.3. *Sind zwei Maße τ_1, τ_2 absolut stetig bezüglich μ, so ist auch ihre Summe absolut stetig bezüglich μ, d.h. $\tau_1 + \tau_2 \ll \mu$.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) = 0$.

Dann folgt aus $\tau_1 \ll \mu$ und $\tau_2 \ll \mu$:

$$\tau_1(A) = 0, \quad \tau_2(A) = 0.$$

Somit

$$(\tau_1 + \tau_2)(A) = \tau_1(A) + \tau_2(A) = 0.$$

Also $\tau_1 + \tau_2 \ll \mu$. □

(c)

Behauptung 0.4. *Aus $\mu_1 \not\ll \mu_2$ und $\mu_2 \not\ll \mu_1$ folgt im Allgemeinen nicht $\mu_1 \perp \mu_2$.*

Beweis. Wir zeigen dies durch ein Gegenbeispiel.

Betrachte $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und das Lebesgue-Maß λ.

Definiere:

$$\mu_1 := \lambda + \delta_0, \quad \mu_2 := \lambda + \delta_1.$$

Dann gilt:

(1) $\mu_1 \not\ll \mu_2$:

$$\mu_2(\{0\}) = \lambda(\{0\}) + \delta_1(\{0\}) = 0,$$
$$\mu_1(\{0\}) = \lambda(\{0\}) + \delta_0(\{0\}) = 1 > 0.$$

(2) $\mu_2 \not\ll \mu_1$:

$$\mu_1(\{1\}) = \lambda(\{1\}) + \delta_0(\{1\}) = 0,$$
$$\mu_2(\{1\}) = \lambda(\{1\}) + \delta_1(\{1\}) = 1 > 0.$$

Also weder $\mu_1 \ll \mu_2$ noch $\mu_2 \ll \mu_1$.

Andererseits sind μ_1 und μ_2 nicht singulär, da beide einen gemeinsamen Lebesgue-Anteil λ auf $\mathbb{R}$ besitzen.

Daher existieren keine disjunkten Mengen A, B mit $A \cup B = \mathbb{R}$, $\mu_1(B) = 0$, $\mu_2(A) = 0$, weil dann $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(A) + \lambda(B) = 0$ gelten müsste – Widerspruch.

Folglich: $\mu_1 \not\ll \mu_2$, $\mu_2 \not\ll \mu_1 \not\Rightarrow \mu_1 \perp \mu_2$. □

Aufgabe 18 (Vorrechenaufgabe)

Theorem 0.5 (Radon-Nikodym)**.** *Seien μ und ν zwei σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\mu \ll \nu$. Dann existiert eine messbare Funktion $Z_0 : \Omega \to [0, \infty)$ mit*

$$\mu(A) = \int_A Z_0 \, d\nu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}.$$

*Die Funktion Z_0 heißt **Radon-Nikodym-Ableitung** von μ bezüglich ν und wird mit $\frac{d\mu}{d\nu}$ bezeichnet. Sie ist ν-fast überall eindeutig bestimmt.*

Überprüfen Sie in den folgenden Fällen, ob eine Dichte Z_0 von μ bezüglich ν existiert, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $(\Omega, \mathcal{F})$ beliebig, ν ist σ-endlich, $A_0 \in \mathcal{F}$ fest, $\mu(A) := \nu(A \cap A_0)$.

(b) $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, μ und ν sind die Maße der Verteilungen $\mathrm{Bin}(n, p)$ bzw. $\mathrm{Bin}(n, q)$ mit $0 < p, q < 1$.

(c) $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, μ ist die Normalverteilung $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, ν ist die Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(b)$ mit $b > 0$.

Lösung

(a) $(\Omega, \mathcal{F})$ beliebig, ν σ-endliches Maß, $A_0 \in \mathcal{F}$ fix, $\mu(A) := \nu(A \cap A_0)$, $A \in \mathcal{F}$.

Behauptung 0.6. *Es gilt $\mu \ll \nu$ und die Radon-Nikodym-Dichte ist $Z_0 = \mathbb{1}_{A_0}$.*

Beweis. Für jedes $A \in \mathcal{F}$ gilt

$$\int_A \mathbb{1}_{A_0} \, d\nu = \nu(A \cap A_0) = \mu(A).$$

Damit ist $Z_0 = \frac{d\mu}{d\nu} = \mathbb{1}_{A_0}$. □

(b) $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,

μ: Maß der Verteilung $\mathrm{Bin}(n, p)$,

ν: Maß der Verteilung $\mathrm{Bin}(n, q)$

mit $p, q \in (0, 1)$.

Behauptung 0.7. *Es existiert eine Radon-Nikodym-Dichte von μ bezüglich ν, gegeben durch*

$$Z_0(k) = \left(\frac{p}{q}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Beweis. Für $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\mu(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$
$$\nu(\{k\}) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}.$$

Da $q \in (0, 1)$ ist $\nu(\{k\}) > 0$ für alle k, somit $\mu \ll \nu$, und die Dichte auf Ω ist

$$Z_0(k) = \frac{\mu(\{k\})}{\nu(\{k\})} = \left(\frac{p}{q}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

□

(c) $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Behauptung 0.8. *Es existiert keine Radon-Nikodym-Dichte von μ bezüglich ν, da $\mu \not\ll \nu$.*

Beweis. Für $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $b > 0$:

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) d\lambda(x),$$
$$\nu(A) = \int_A be^{-bx} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, d\lambda(x).$$

μ ist Normalverteilung $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ (mit Dichte auf ganz $\mathbb{R}$).

ν ist Exponentialverteilung mit Unterstützung $[0, \infty)$.

Für das Intervall $A = (-\infty, 0)$ gilt:

$$\nu(A) = 0, \quad \mu(A) > 0,$$

da die Normalverteilung auf $(-\infty, 0)$ positive Maße besitzt.

Damit ist $\mu \not\ll \nu$ und folglich existiert keine Radon-Nikodym-Dichte $\frac{d\mu}{d\nu}$. □

Aufgabe 19

Es bezeichne λ das Lebesgue-Maß und z das Zählmaß auf $((0,1), \mathcal{B}((0,1)))$.

Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert eine Lebesgue-Zerlegung von z bezüglich λ, d.h. eine eindeutige Zerlegung

$$z = \mu_1 + \mu_2$$

mit $\mu_1 \ll \lambda$ und $\mu_2 \perp \lambda$.

Lösung