

Mathematische Statistik
Übung 7

Aufgabe 25 (Vorrechenaufgabe)

Beweisen Sie das Einsetzungslemma aus der Vorlesung (Lemma 2.4.5).

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in messbaren Räumen (E, \mathcal{E}) bzw. (F, \mathcal{F}) . Sei $g : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $\mathbb{E}|g(X, Y)| < \infty$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}(g(X, Y) \mid X) = h(X) \quad \text{fast sicher,}$$

wobei $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch $h(x) := \mathbb{E}(g(x, Y))$.

Beweis. Wir verifizieren die beiden definierenden Eigenschaften der bedingten Erwartung.

1. Messbarkeit: Die Funktion $h(x) = \mathbb{E}(g(x, Y)) = \int_F g(x, y) \mathbb{P}^Y(dy)$ ist Borell-messbar, denn g ist messbar und das Integral $\int_F g(x, y) \mathbb{P}^Y(dy)$ ist in x messbar (Satz von Tonelli). Damit folgt $h(X)$ ist $\sigma(X)$ -messbar.

2. Integralgleichung: Wir zeigen, dass für alle $A \in \sigma(X)$ gilt:

$$\int_A h(X) d\mathbb{P} = \int_A g(X, Y) d\mathbb{P}.$$

Nach Definition der σ -Algebra existiert für $A \in \sigma(X)$ ein $B \in \mathcal{E}$ mit $A = \{X \in B\} = X^{-1}(B)$.

Der Transformationssatz besagt für messbare h :

$$\int_{\Omega} h(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_E h(x) \mathbb{P}^X(dx),$$

und mit der Definition des Bildmaßes ($\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$) erhalten wir:

$$\int_A h(X) d\mathbb{P} = \int_{X^{-1}(B)} h(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_B h(x) \mathbb{P}^X(dx) = \int_B \left(\int_F g(x, y) \mathbb{P}^Y(dy) \right) \mathbb{P}^X(dx).$$

Als nächstes zeigen wir $\int_B \int_F g(x, y) \mathbb{P}^Y(dy) \mathbb{P}^X(dx) = \int_A g(X, Y) d\mathbb{P}$.

Für die folgende Rechnung halten wir folgendes fest:

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \mathbf{1}_B(X(\omega)) = \mathbf{1}_B(X(\omega)) \cdot \mathbf{1}_F(Y(\omega)) = \mathbf{1}_{B \times F}(X(\omega), Y(\omega)).$$

Es wurde ausgenutzt, dass Y jeden Wert in F annehmen kann. Wir haben:

$$\begin{aligned}
\int_A g(X, Y) d\mathbb{P} &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\omega) g(X(\omega), Y(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{B \times F}(X(\omega), Y(\omega)) g(X(\omega), Y(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{E \times F} \mathbf{1}_{B \times F}(x, y) \cdot g(x, y) \mathbb{P}^{(X, Y)}(d(x, y)) \quad (\text{Transformationsatz}) \\
&= \int_{B \times F} g(x, y) \mathbb{P}^{(X, Y)}(d(x, y)) \\
&= \int_{B \times F} g(x, y) (\mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y)(d(x, y)) \\
&= \int_B \int_F g(x, y) \mathbb{P}^Y(dy) \mathbb{P}^X(dx). \quad (\text{Satz von Fubini})
\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini ist anwendbar, da wir über das Produktmaß $\mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y$ das Integral in zwei ausgeführte Integrale aufteilen können und die Funktion integrierbar ist. Letzteres ist gegeben wegen $\mathbb{E}|g(X, Y)| < \infty$.

Wir haben damit gezeigt, dass $\mathbb{E}(g(X, Y) \mid X) = h(X)$ fast sicher ist. \square

Aufgabe 26 (Vorrechenaufgabe)

Sei $Y^* = bX + \sigma\epsilon$ eine Zufallsvariable mit $\sigma > 0$, $b \in \mathbb{R}$, wobei X eine reellwertige Zufallsvariable sei mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Weiterhin sei ϵ eine Zufallsvariable mit $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$, welche unabhängig von X sei. Für gegebenes $s \in \mathbb{R}$ definiere die Zufallsvariable Y durch

$$Y = \begin{cases} Y^*, & Y^* > s \\ s, & Y^* \leq s \end{cases}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$.

Hinweis: Verwenden Sie das Einsetzungslemma.

Beweis. Sei $g(x, \epsilon) = \max(bx + \sigma\epsilon, s)$, dann erhalten wir mit dem Einsetzungslemma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y \mid X = x) &= \mathbb{E}(g(x, \epsilon)) \\
&= \mathbb{E}((bx + \sigma\epsilon) \cdot \mathbf{1}_{\{bx + \sigma\epsilon > s\}}) + s \cdot \mathbb{P}(bx + \sigma\epsilon \leq s) \\
&= \mathbb{E}((bx + \sigma\epsilon) \cdot \mathbf{1}_{\{\epsilon > \alpha\}}) + s \cdot \mathbb{P}(\epsilon \leq \alpha) \quad \left(\alpha := \frac{s - bx}{\sigma} \right) \\
&= bx \cdot \mathbb{P}(\epsilon > \alpha) + \sigma \cdot \mathbb{E}(\epsilon \cdot \mathbf{1}_{\{\epsilon > \alpha\}}) + s \cdot \Phi(\alpha) \\
&= bx \cdot (1 - \Phi(\alpha)) + s \cdot \Phi(\alpha) + \sigma \cdot \varphi(\alpha).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir folgendes ausgenutzt:

$$\mathbb{E}(\epsilon \cdot \mathbf{1}_{\{\epsilon > \alpha\}}) = \int_{\alpha}^{\infty} t \cdot \varphi(t) dt = [-\varphi(t)]_{\alpha}^{\infty} = \varphi(\alpha).$$

Einsetzen von $\alpha = \frac{s - bx}{\sigma}$ liefert das Endergebnis:

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = bx + (s - bx) \cdot \Phi\left(\frac{s - bx}{\sigma}\right) + \sigma \cdot \varphi\left(\frac{s - bx}{\sigma}\right).$$

\square

Aufgabe 27

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und zwei Zufallsvariablen X, Y auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Zeigen Sie:

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}[Y|X]) + \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X])$$

Beweis.

□

Aufgabe 28

(a) Sei $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ ein Zufallsvektor mit Verteilung $P_{(X,Y)}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ eine λ^2 -Dichte von $P_{(X,Y)}$. Zeigen Sie, dass eine reguläre bedingte Verteilung von X gegeben Y gegeben ist durch

$$p : \mathcal{B} \times \Omega \rightarrow [0, 1], \quad (A, \omega) \mapsto \int_A f_{X|Y}(x, Y(\omega)) d\lambda(x),$$

wobei für $x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$,

$$f_{X|Y}(x, Y(\omega)) := \begin{cases} \frac{f(x, Y(\omega))}{\int_{\mathbb{R}} f(x, Y(\omega)) d\lambda(x)}, & \int_{\mathbb{R}} f(x, Y(\omega)) d\lambda(x) > 0, \\ f_0(x), & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ eine beliebige Lebesgue-Dichte mit $\int_{\mathbb{R}} f_0 d\lambda = 1$ bezeichnet.

Beweis.

□

(b) Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen. Wir bezeichnen mit φ_{μ, σ^2} die λ -Dichte der $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung. Sei $Z = X + Y$. Zeigen Sie: Es gilt

$$P(X \in A|Z)(\omega) = \int_A \varphi_{\frac{Z(\omega)}{2}, \frac{1}{2}}(x) dx$$

für alle $A \in \mathcal{B}$ und fast alle $\omega \in \Omega$.

Beweis.

□