

Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:

Luca Sanguinetti - Marco Moretti



Figure 1: touch me senpai

AA 2022 - 2023

Contents

1	Introduzione	5
2	Richiamo Sui Numeri Complessi	6
2.1	Struttura di un numero complesso	6
2.1.1	Forma Cartesiana	6
2.1.2	Forma Polare	6
2.1.3	Complesso Coniugato	6
2.2	Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana	6
2.3	Operazioni	7
2.4	Funzioni Complesse a Variabile Reale	7
3	Introduzione Ai Segnali	8
3.1	Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini . . .	8
4	Segnali Analogici	10
4.1	Grandezze dei segnali Analogici	10
4.1.1	Potenza istantanea	10
4.1.2	Energia	10
4.1.3	Potenza Media	10
4.1.4	Valore Efficace	11
4.1.5	Valore Medio	11
4.2	Analisi energetiche su segnali comuni	11
4.2.1	Costante	11
4.2.2	Cosinusoide	12
4.2.3	Gradino	14
4.2.4	Rettangolo	14
4.2.5	Esponenziale unilatera	15
4.2.6	Esponenziale bilatera	17
4.2.7	segno $sgn(x(t))$	17
4.3	Segnal Periodici	18
5	Trasformata Serie Di Fourier	20
5.1	Segnale Periodico	20
5.2	Trasformata Serie Di Fourier	20
5.2.1	Rappresentazione di X_k	20
5.3	Proprietà della TSF	21
5.4	Linearità	21
5.5	Simmetria Hermitiana	21
5.6	Calcolo dei coefficienti X_k per segnali noti	21
5.6.1	$A \cos(2\pi f_0 t)$	21
5.6.2	$A \sin(2\pi f_0 t)$	22
5.6.3	Treno di rect	23

6	Trasformata Continua Di Fourier	26
6.1	Segnali Aperiodici	26
6.2	Equazioni di Analisi e Sintesi	27
6.2.1	Equazione di Analisi	27
6.2.2	Equazione di Sintesi	27
6.2.3	TCF di una $\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	28
6.3	Propiet�	29
6.3.1	Simmetria hermitiana	30
6.3.2	Parit�	30
6.3.3	Disparit�	30
6.4	Teoremi relativi alla TCF	30
6.4.1	Linearit�	30
6.4.2	Dualit�	31
6.4.3	Ritardo	32
6.4.4	Derivazione	33
6.4.5	Integrazione	34
6.4.6	Derivazione in Frequenza	36
6.4.7	Integrazione in Frequenza	37
6.4.8	Convoluzione	37
6.4.9	Prodotto	38
6.4.10	Calcolo del prodotto di convoluzione	38
6.5	Modulazione di Ampiezza	41
6.5.1	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$	42
6.5.2	Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$	43
6.5.3	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	43
6.5.4	Th. Modulazione con Esponenziale Complesso	45
6.5.5	Demodulazione	45
6.5.6	Radar	49
6.6	Delta di Dirac	51
6.6.1	Propiet� del Delta di Dirac	51
6.6.2	TCF della Delta di Dirac	52
6.6.3	TCF di segnali periodici FIX?	53
6.7	Relazione tra TSF e TCF	54
6.7.1	TCF di un segnale periodico generico	54
6.7.2	Relazione tra i coefficienti X_k e $X_{(f)}$	56
6.7.3	I^a formula di Poisson	58
6.7.4	Teorema dell'integrazione completo	59
7	Sistemi Monodimensionali	61
7.1	Propiet� dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)	61
7.2	Propiet� dei Sistemi Lineari Stazionari (SLS)	62
7.2.1	Risposta in frequenza	63
7.2.2	Sistemi in cascata e in parallelo	63
7.3	Risposta di un sistema causale e risposta impulsiva	65
7.3.1	Stabilit� BIBO su $h_{(t)}$	66
7.4	Filtri Ideali	66

7.4.1	Filtro Passa Basso di banda B - Low Pass Filter (LP) . .	66
7.4.2	Filtro Passa Alto di banda B - High Pass Filter (HP) . .	70
7.4.3	Filtro Passa Banda di banda B - Band Pass Filter (BP) .	72
7.4.4	Filtro Elimina Banda di banda B - Band Stop Filter (BS)	75
7.4.5	Filtri non distorcenti	77
7.5	Th. di Parseval	79
7.6	Funzione di Correlazione - Segnali Aperiodici	80
7.7	Funzione di Autocorrelazione	80
7.7.1	Propiet� Autocorrelazione	80
8	Trasformata Discreta di Fourier	81
8.0.1	Equazione di Analisi - TDF	81
8.0.2	Equazione di Sintesi - $ATDF$	81
8.0.3	Trasformata di $\delta_{[n]}$	81
8.0.4	Relazione tra TCF e TDF	82
8.1	Teorema del Campionamento - Nyquist Shannon	82
9	Teoria della Probabilit�	89
10	Teoria Dei Codici	90
10.1	Introduzione	90
10.1.1	Esempio codici a blocco: codici a ripetizione	93
10.1.2	Esempio codici a blocco: codici a controllo di parit� . . .	94
10.1.3	Esempio codici a blocco: codice ISBN	95
10.2	Codici a blocco	97
10.2.1	Introduzione ai codici lineari	97
10.2.2	Campi di Galois	97
10.2.3	Codici a blocco lineari su $GF(2)$	98
10.2.4	Propiet� dei codici a blocco lineari	98
10.2.5	Distanza di Hamming	98
10.2.6	Codici a blocco in forma sistematica	99
10.2.7	Matrice di controllo di parit�	101
10.2.8	Propiet� dei codici a blocco	101
10.3	Codici di Hamming	104
10.3.1	Il codice $\mathcal{C}_H(2)$	104
10.3.2	Il codice $\mathcal{C}_H(3)$	104
10.4	Decodifica per codici a blocco	105
10.4.1	Coset	106
10.4.2	Propiet� dei coset	106
10.4.3	Algoritmo di decodifica	107
10.4.4	Decodifica mediante sindrome	107
10.4.5	Decodifica a sindrome: Codici di Hamming $m = 3$	108
10.4.6	Esempio di decodifica	108

11	Formulario	109
11.1	Trigonometria	109
11.1.1	Formule di addizione	109
11.1.2	Formule di duplicazione	109
11.1.3	Formule di bisezione	110
11.2	Segnali Notevoli	110
11.3	Grandezze Fisiche	111
11.4	Varie	111
	Indice Alfabetico	114

1 Introduzione

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.

I testi consigliati sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson

2 Richiamo Sui Numeri Complessi

2.1 Struttura di un numero complesso

2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = \text{Re}\{z\}$$

$$\text{Parte Immaginaria: } b = \text{Im}\{z\}$$

$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{j\theta} = \rho \cos(\theta) + j\rho \sin(\theta)$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$

$$\text{Fase: } \theta = \arg(z) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

grafico forma polare-cartesiana

2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana

$$z^* = a - jb$$

- Forma Polare

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$

2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria

$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$

- Modulo

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}$$

- Fase

$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.3 Operazioni

Dati: $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$, $z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

- Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2 = \rho^2$$

2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) = a(t) + jb(t) = \rho(t)e^{j\theta(t)}$$

- Integrale

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b a(t) + jb(t) dt = \int_a^b a(t) dt + j \int_a^b b(t) dt$$

- Derivata

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t)$$

3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto $\forall t$, per ogni istante temporale si conosce il valore del segnale, spesso rappresentati con funzioni analitiche.
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche, ad esempio un rumore.

3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
 - Segnale tempo continuo: $t \in \mathbb{R}$ assume con continuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
 - Segnale a tempo discreto: $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$ T = periodo di campionamento, la variabile temporale assume solo valori discreti

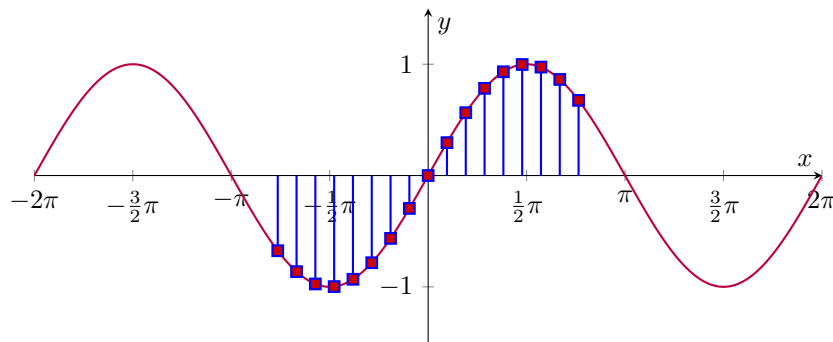


Figure 2: tempo continuo, tempo discreto: $T = 0.3$

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
 - Segnale ad ampiezza continua: $x_{(t)}$ *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
 - Segnale ad ampiezza discreta: $x_{(t)}$ *discreta*, se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica può assumere solo valori discreti

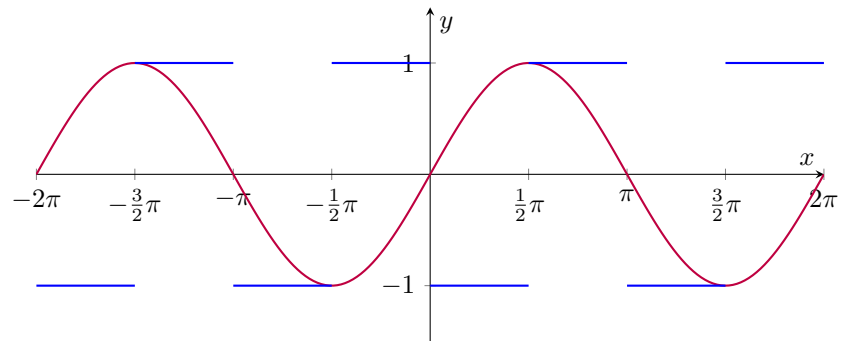


Figure 3: **ampiezza continua**, **ampiezza discreta**

Possiamo costruire una tabella per categorizzare le tipologie di segnali:

Segnale	Continuo	Discreto
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale
Discreta	Quantizzato	Binario

$x(t)$

4 Segnali Analogici

4.1 Grandezze dei segnali Analogici

4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x(t)|^2$$

$$\text{Se } x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow P_x \triangleq x_{(t)}^2$$

4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{Energia : } \begin{cases} \text{Energia finita} & (\text{Segnali fisici}) \\ \text{Energia infinita} & (\text{Segnali ideali}) \end{cases}$$

4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$T = \text{Periodo di osservazione}$

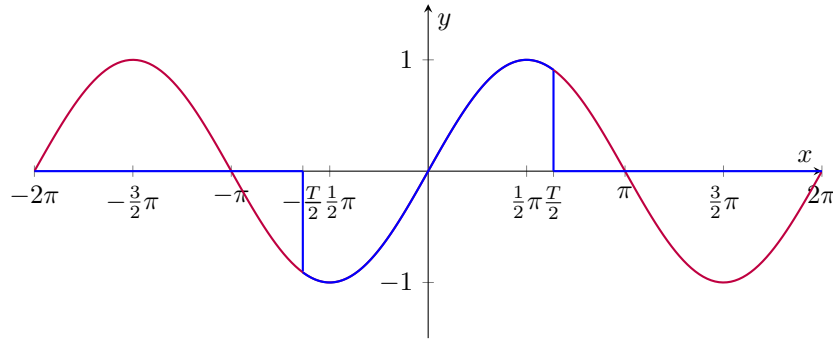


Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

$$E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

dalla quale possiamo ricavare se $T \rightarrow \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$:

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Possiamo ricavare delle proprietà secondo energia e potenza:

- Se $x(t)$ ha $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$
- Se $x(t)$ ha $P_x = k \neq 0 < \infty \Rightarrow E_x = \infty$

4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)_T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$x(t)_T = \text{Segnale troncato}$$

4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

4.2.1 Costante

$$x(t) = A \quad \forall t$$

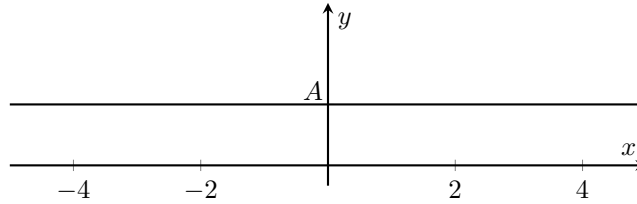


Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

4.2.2 Cosinusoide

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$A = \text{Ampiezza}$, $f_0 = \frac{1}{T} = \text{frequenza}$, $\phi = \text{fase}$

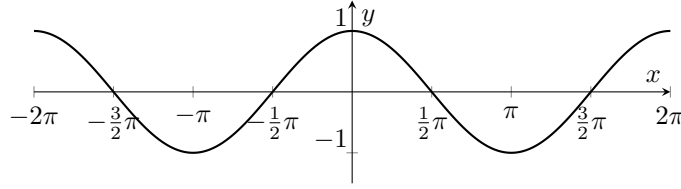


Figure 6: Segnale cosinusoidale ($\phi = 0$)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 11.1 il $\sin^2(\alpha)$ e lo sostituiamo (2.1) 11.1.2

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 + \cos^2(\alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\ &= \frac{A}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

4.2.3 Gradino

$$U(t) = x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

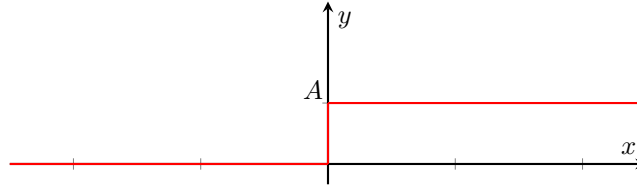


Figure 7: Segnale gradino

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

4.2.4 Rettangolo

$$x(t) = A \text{ rect} \left(\frac{t}{T} \right) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

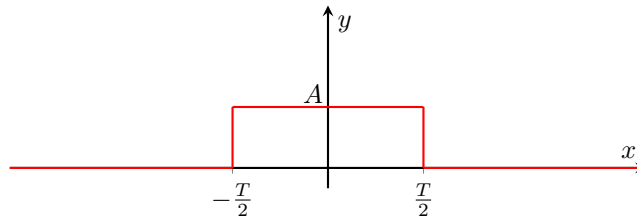


Figure 8: Segnale rettangolo

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = A^2 T$$

- Potenza Media: $T < T_0$ se non fosse così avrei una costante

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} A^2 T = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} AT = 0 \end{aligned}$$

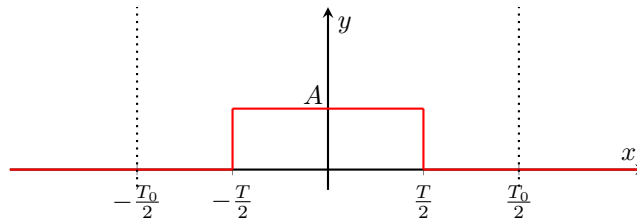


Figure 9

4.2.5 Esponenziale unilatera

$$x(t) = e^{-t} U(t)$$

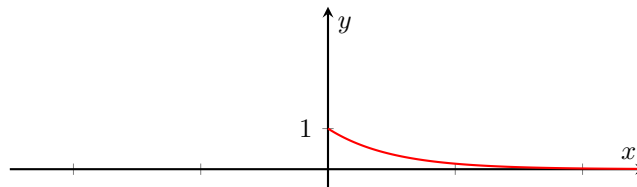


Figure 10: Segnale esponenziale unilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left. \frac{1}{2} e^{-2t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-1) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

4.2.6 Esponenziale bilatera

$$x(t) = e^{-|t|}$$

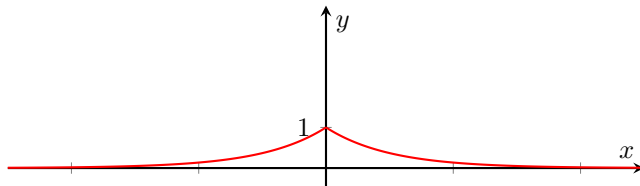


Figure 11: Segnale esponenziale bilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-2) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{2}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} = 0 \end{aligned}$$

4.2.7 segno $sgn(x(t))$

$$x(t) = sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

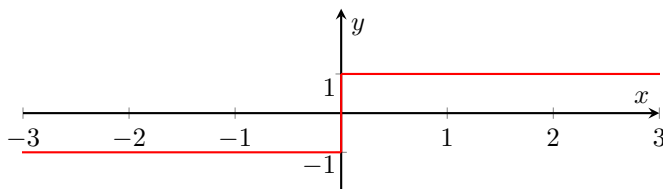


Figure 12: Segnale $sgn(x)$

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}^2 t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 1$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 1 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

4.3 Segnal Periodici

Un segnale é periodico se:

$$x(t) = x(t - kT_0) \quad k \in \mathbb{Z}, t_0 \in \mathbb{R}^+, T_0 = \text{Periodo del segnale}$$

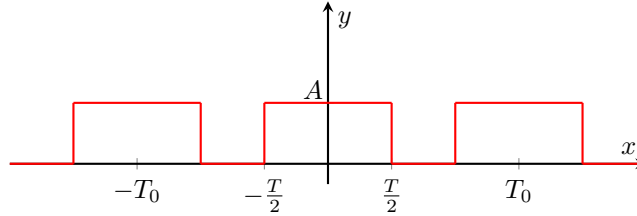


Figure 13: Segnale periodico

Si possono definiscono le seguenti grandezze:

- Energia di un segnale periodico

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_0}{2} + kT_0}^{\frac{T_0}{2} + kT_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} kX = \infty \end{aligned}$$

Tutti i segnal iperperiodici hanno quindi $E_x = \infty$

- Potenza media di un segnale periodico

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \Rightarrow T = kT_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} |x(t)|^2 dt \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

Posso calcolare la potenza di un singolo periodo:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Valore medio di un segnale periodico

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

5 Trasformata Serie Di Fourier

5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x(t) = x(t - kT_0)$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo T_0 che soddisfa le condizioni di Dirichlet e la sua $E_x < \infty (C.S.)$ può essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k \in \mathbb{C}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

$$x(t) = \dots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

X_0 corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale, inoltre le componenti X_k prendono il nome di armoniche alla frequenza f corrispondente

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocità: $\forall x(t) \exists! X_k$:

$$x(t) \xrightleftharpoons[ATSF]{TSF} X_k$$

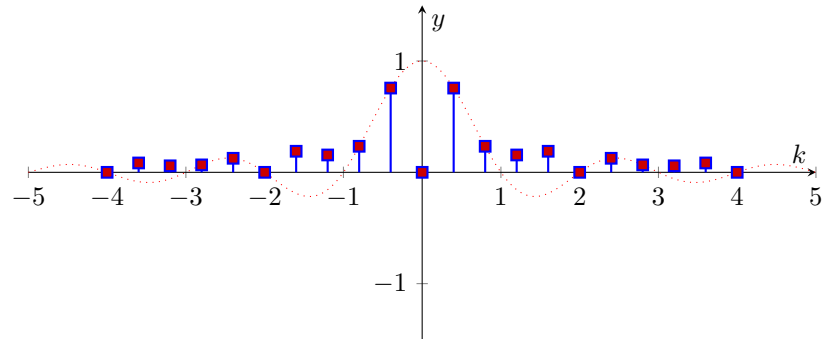
$$Segnale Analogico Periodico \xrightleftharpoons[ATSF]{TSF} Sequenza Complessa$$

5.2.1 Rappresentazione di X_k

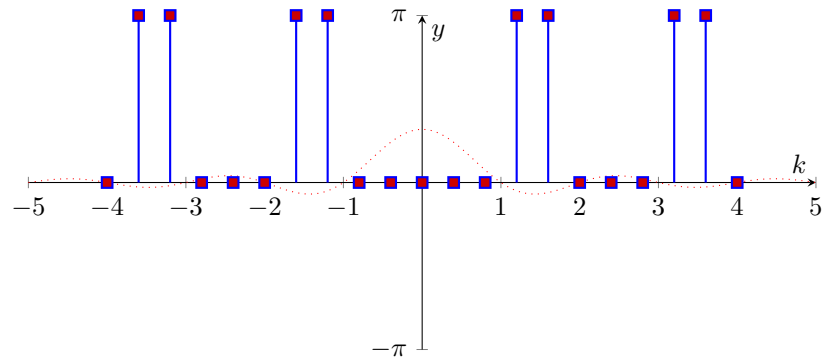
Essendo X_k un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro di un treno di rect

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

5.3 Proprietá della TSF

5.4 Linearitá

5.5 Simmetria Hermitiana

5.6 Calcolo dei coefficienti X_k per segnali noti

5.6.1 $A \cos(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti X_k :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} + X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

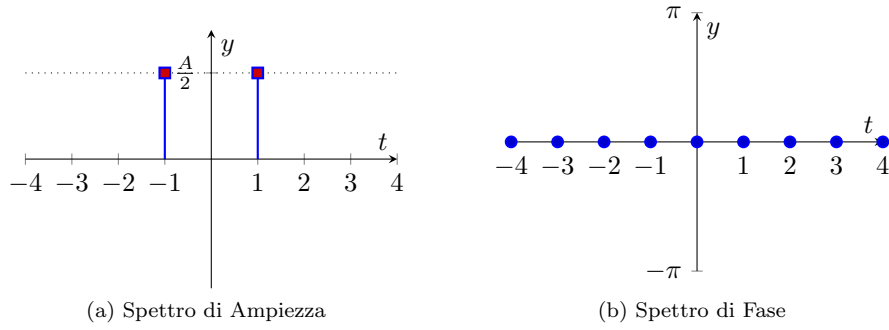


Figure 15: Spettro TSF del coseno $A > 0$

5.6.2 $A \sin(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti X_k :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} - X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$\begin{aligned} X_{-1} &= -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j} \\ |X_k| &= \begin{cases} \left|\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ \left|-\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle \frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle -\frac{A}{2j} = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

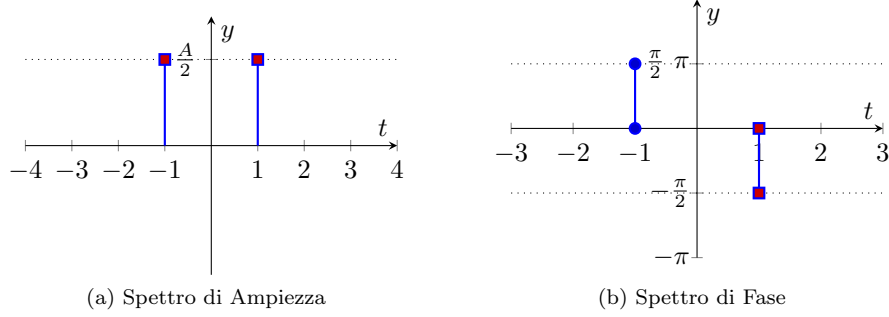


Figure 16: Spettro TSF del seno $A > 0$

5.6.3 Treno di rect

$x_R = A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$ Segnale periodico $\rightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$
 $T_0 = \text{periodo}, T = \text{durata} \rightarrow T < T_0$, se così non fosse avremmo una costante

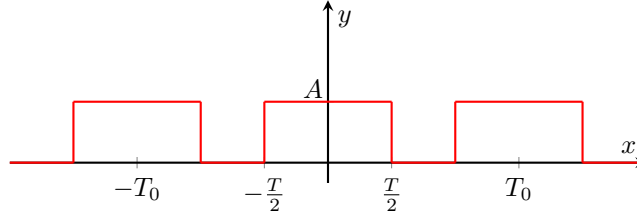
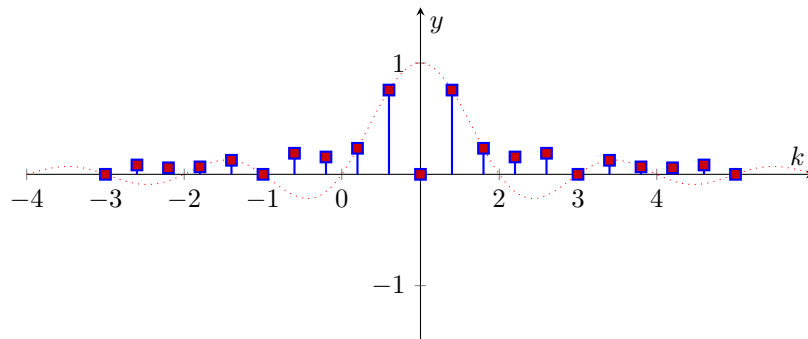


Figure 17: Treno di $A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

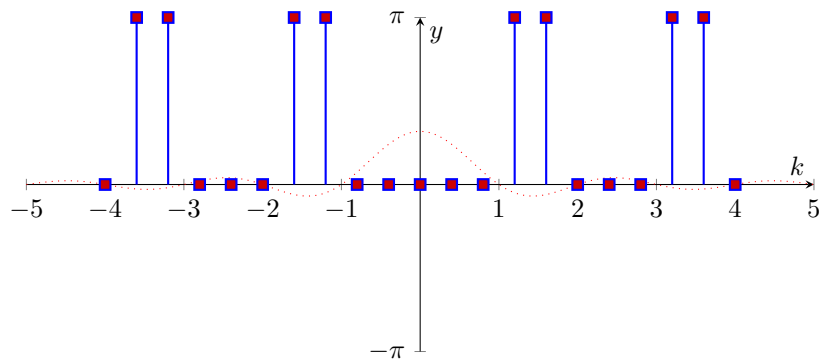
\rightarrow Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da aperiodiche a periodiche e viceversa

$$\begin{aligned}
 ATSF[x(t)] &= ATSF\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)\right] \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
 &= \frac{AT}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = A f_0 T \text{sinc}(k f_0 T)
 \end{aligned}$$

Tracciamo lo spettro per $f_0 T < 1$:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 18: Spettro TSF del treno di rect con $f_0 T < 1$

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:

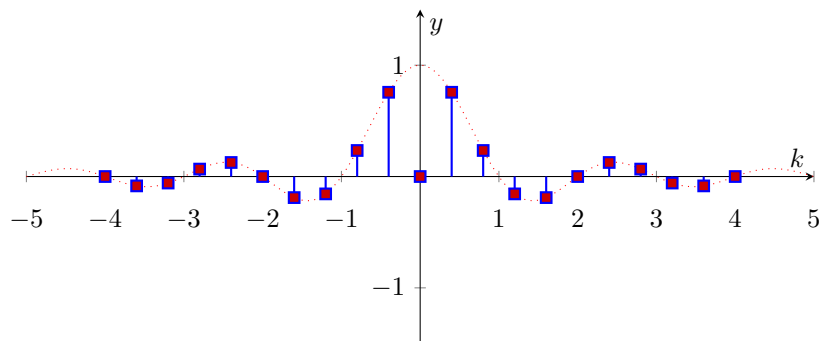


Figure 19: Spettro treno di $A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di ricostruzione dello stesso (script di matlab presenti nel teams):

- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali più alte \rightarrow copre più spettro(espansione spettrale) $T_0 \uparrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse frequenze $T_0 \downarrow$

Se non ho abbastanza passi K non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio né un'analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettamente il segnale. Inoltre in 0 dello spettro ho il Valore medio 4.1.5 del segnale

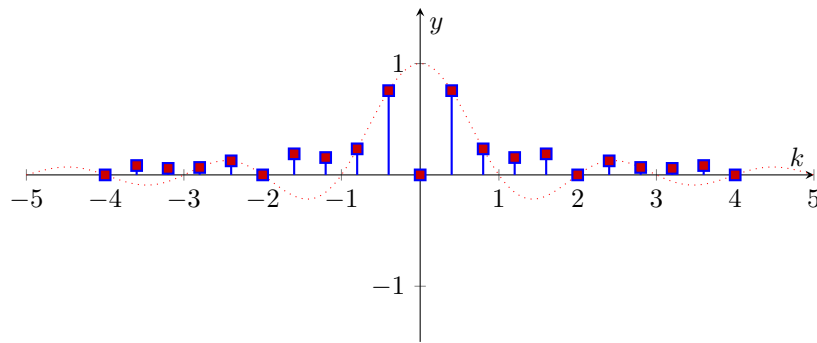
6 Trasformata Continua Di Fourier

6.1 Segnali Aperiodici

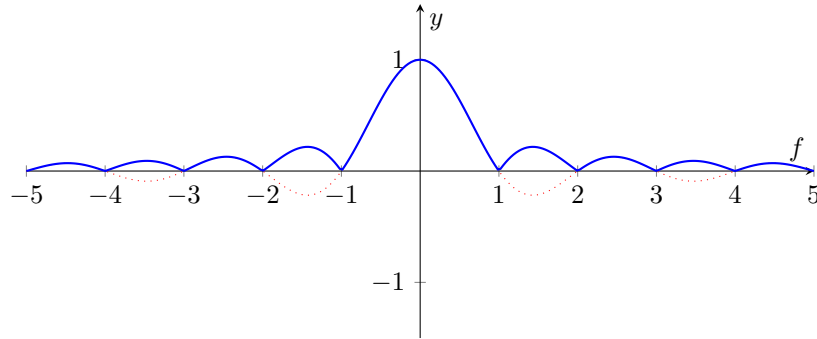
Nel caso di segnali come $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ non posso usare la *TSF* posso però scrivere:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t), \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$$

Passiamo da un'analisi a frequenze discrete ad un'analisi su tutto lo spettro delle frequenze



(a) Spettro di Ampiezza TSF



(b) Spettro di Ampiezza TCF

6.2 Equazioni di Analisi e Sintesi

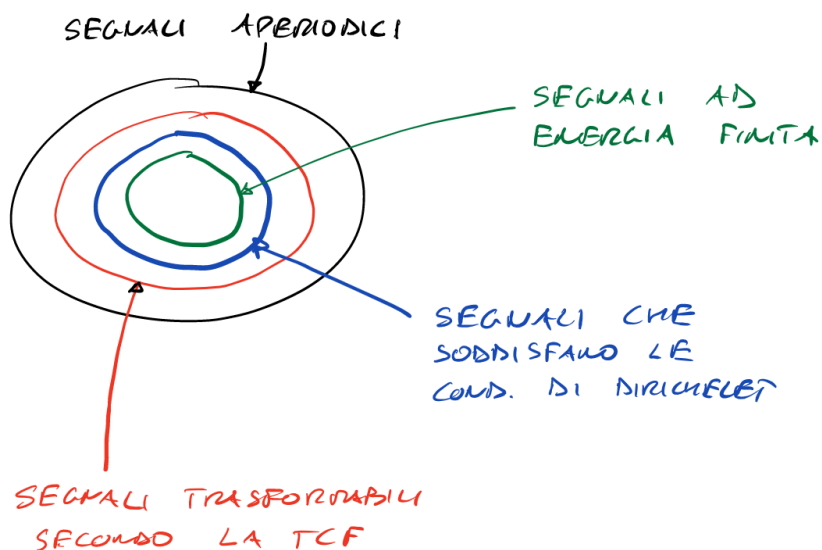


Figure 20: Insiemi dei segnali per tcf

6.2.1 Equazione di Analisi

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{Equazione di analisi}$$

6.2.2 Equazione di Sintesi

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi ft} df \quad \text{Equazione di sintesi}$$

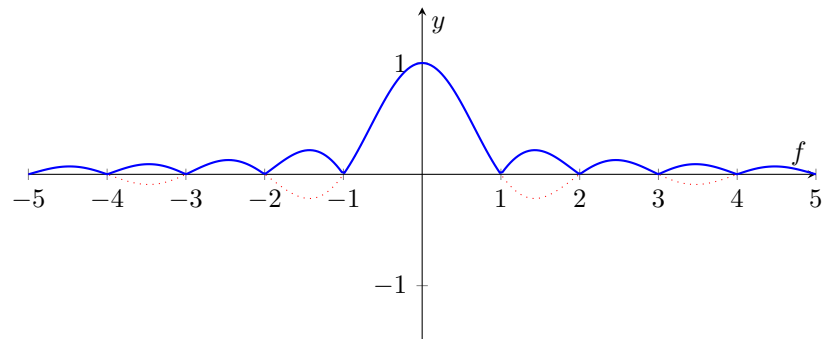
La *TCF* gode della biunivocità

$$x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \quad X_{(f)} \in \mathbb{C}$$

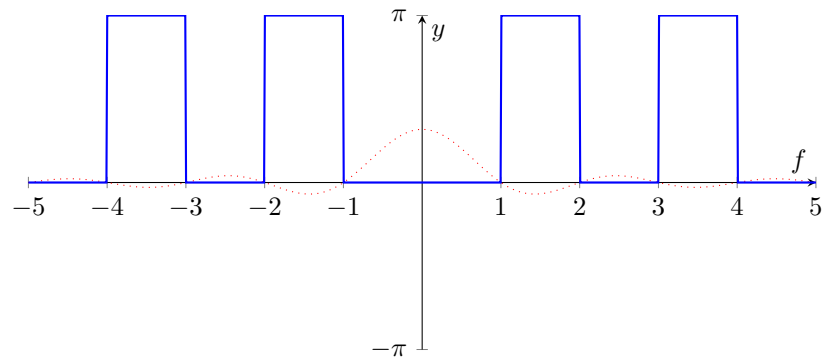
Essendo X_k un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_{(f)} = |X_{(f)}| e^{j\angle X_{(f)}}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 21: Spettro del segnale TCF

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo e continuo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**, questa proprietà é chiamata **Simmetria Hermitiana**

6.2.3 TCF di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$

$$x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

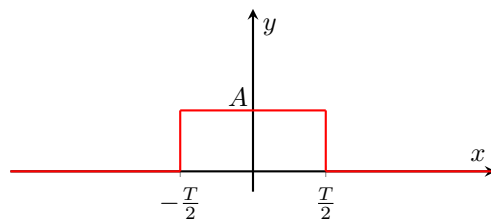


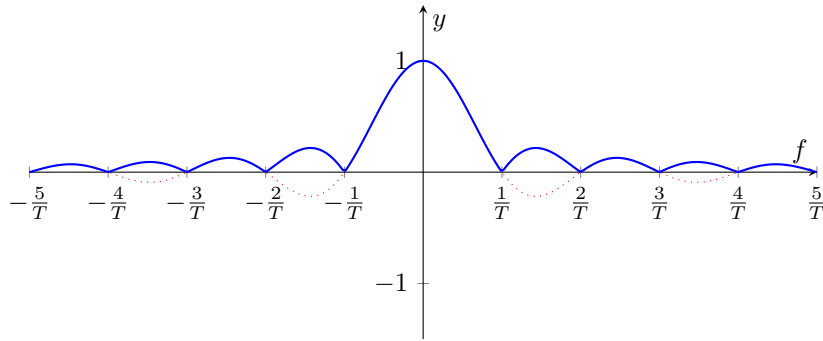
Figure 22: $A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$X_{(f)} = ? :$

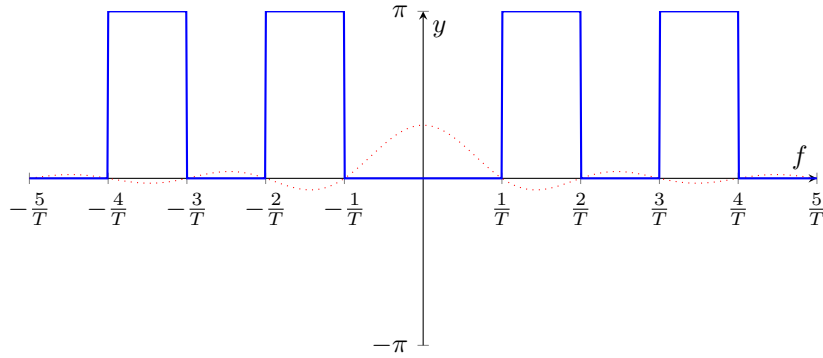
$$\begin{aligned}
 X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) \\
 &= \frac{AT}{\pi f} \left(\frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} \right) = \frac{AT \sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(fT) = X_{(f)}
 \end{aligned}$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} AT \operatorname{sinc}(fT)$$

La sinc si annulla in $\frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo anche come la funzione di partenza sia reale e pari la TCF rispetti 6.3.2(si?):



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

6.3 Proprietá

Come per la TSF vale che al variare del periodo della funzione T :

- Se $T \uparrow$ aumenta $\rightarrow f \downarrow$ diminuisce e si stringe lo spettro
- Se $T \downarrow$ diminuisce $\rightarrow f \uparrow$ aumenta e si allarga lo spettro

Inoltre come si può evincere dal successivo Teorema della Dualità 6.4.2:

- Una funzione limitata (finita) nel tempo ha uno spettro nella frequenza illimitato \rightarrow sono i segnali fisici
- Una funzione illimitata nel tempo ha uno spettro nella frequenza limitato (finito)

Da come vedremo più avanti quindi effettuare troncamenti in frequenza comporta, per alcuni segnali, perdere componenti ad alte frequenze, la scelta dell'intervallo di troncamento è cruciale per la ricostruzione del segnale: se tronchiamo un segnale perdendo le frequenze alte perdiamo le sue variazioni rapide, ad esempio se tronchiamo una $\text{sinc}(f)$ male potremmo non ottenere una buona $\text{rect}(t)$ nel tempo.

6.3.1 Simmetria hermitiana

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} & \text{ reale} \\ Th : X_{(f)} & \text{ hermitiana} \\ X_{(-f)} = X_{(f)}^* & \rightarrow \begin{cases} |X_{(f)}| = |X_{(-f)}| & \text{Simmetria Pari} \\ \angle X_{(-f)} = -\angle X_{(f)} & \text{Simmetria Dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.2 Parità

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} & \text{ reale e pari} \\ Th : X_{(f)} & \text{ reale e pari} \end{aligned}$$

6.3.3 Disparità

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} & \text{ reale e dispari} \\ Th : X_{(f)} & \text{ immaginaria e dispari} \end{aligned}$$

6.4 Teoremi relativi alla TCF

6.4.1 Linearità

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} & = \alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)} \\ Th : X_{(f)} & = \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)} \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_{1(t)} e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{2(t)} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}
\end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
x_{(t)} &= A \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + B \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
X_{(f)} &= AX_{1(f)} + BX_{2(f)} = 2AT \text{sinc}(2Tf) + BT \text{sinc}(Tf) \\
X_{1(f)} &= \begin{cases} X_{1(f)} = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{TCF} T' \text{sinc}(T'f) \Rightarrow X_{1(f)} = 2T \text{sinc}(2Tf) \\ T' = 2T \end{cases}
\end{aligned}$$

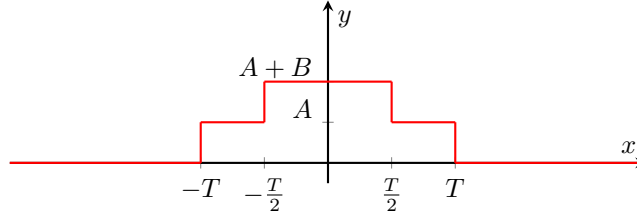


Figure 23: Segnale rettangolo

6.4.2 Dualità

$$Ip : x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)}$$

$$Th : X_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} x_{(-f)} \quad \text{Dimostrazione:}$$

$$\begin{aligned}
X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \text{Sost.} \begin{cases} t \rightarrow f \\ f \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(f)} e^{-j2\pi ft} df \\
&= \text{Sost.} (f' = -f) \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{-j2\pi t(-f')} df' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{j2\pi tf'} df' = ACTF[x_{(-f)}] = c.v.d.
\end{aligned}$$

Esempio:

$$x_{(t)} = A \text{sinc}(Bt) \Rightarrow X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} A \text{sinc}(Bt) e^{-j2\pi ft} dt$$

Applico la dualità:

$$\begin{aligned} \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) &\Leftrightarrow AT \text{sinc}(Tf) \\ AT \text{sinc}(Tt) &\Leftrightarrow \text{Arect}\left(\frac{-f}{T}\right) \end{aligned}$$

Se voglio una durata generica:

$$\begin{aligned} &\text{Sostituisco } B = T \\ AB \text{sinc}(Bt) &\Leftrightarrow \text{Arect}\left(\frac{f}{B}\right) \\ &\Downarrow \\ A \text{sinc}(Bt) &\Leftrightarrow \frac{A}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \end{aligned}$$

6.4.3 Ritardo

$$Ip : x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f), \quad y(t) = x(t-t_0)$$

$$Th : Y(f) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} y(t) = X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \text{Sost. } (t' = t - t_0) \Rightarrow Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j2\pi f (t' + t_0)} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j2\pi f t'} e^{-j2\pi f t_0} dt' = X(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Osservazione:

- Un ritardo nel tempo introduce una componente solo di fase che cresce linearmente con la frequenza
- Un esponenziale nel tempo introduce un ritardo nel dominio della frequenza $x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \mapsto X(f-f_0)$, vedi 6.5.4

Esempio:

$$x_0(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow x(t) = x_0(t-t_0) \quad t_0 = \frac{T}{2}$$

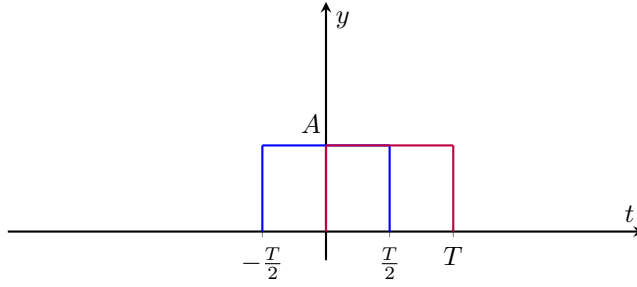


Figure 24: $x_{0(t)}$, $x(t)$

$$X(f) = X_{0(f)} e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = AT \operatorname{sinc}(Tf) e^{-j\pi f T}$$

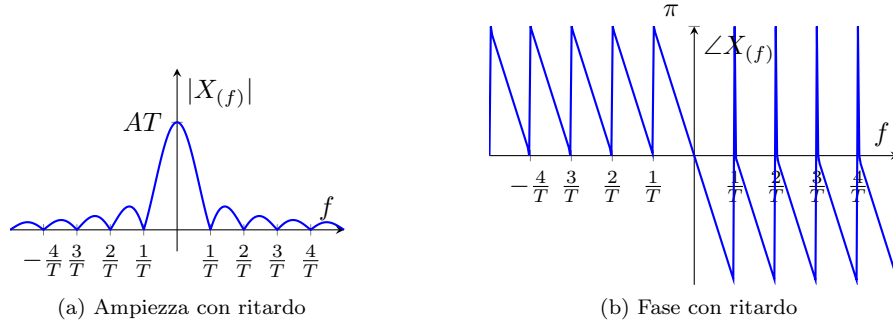


Figure 25: Spettro della *rect* con ritardo

Il \LaTeX sbaglia e aggiunge le spike nelle f positive, il grafico é dispari con andamento come per le f negative.

6.4.4 Derivazione

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightarrow{TCF} X(f) \\ y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} ACTF[x(t)] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) j2\pi f e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

Posso Scrivere $y_{(t)}$ come $ACTF[y_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$, se quindi $Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$ l'uguaglianza é valida:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$$

L'operazione di derivata nel dominio della frequenza si traduce in una semplice operazione algebrica, nel tempo avrei dovuto calcolare il rapporto incrementale. Per derivare un segnale posso quindi:

$$x_{(t)} \rightarrow TCF \rightarrow j2\pi f X_{(f)} \rightarrow ACTF \rightarrow y_{(t)}$$

6.4.5 Integrazione

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} & (1) \\ y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha & (2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} dt \text{ oppure } X_{(f)}|_{f=0} = 0 \text{ oppure } y(+\infty) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Dimostrazione:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha \Rightarrow \frac{d}{dt} x_{(t)} = \frac{d}{dt} y_{(t)} \xrightarrow{Th.6.4.4} X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)}$$

$$Y_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

L'ipotesi 3 é conseguenza della divisione per f e che devo mantenere l'uguaglianza $X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)}$, si nota come nella dimostrazione usando il Th della Derivazione (6.4.4) quando $f = 0$ la funzione nella frequenza deve essere 0, $X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)} = 0$

Esempio: TCF di una piramide

$$x_{(t)} = A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T} \right) \right) rect \left(\frac{t}{2T} \right) \quad X_{(f)} = TCF[x_{(t)}] = ?$$

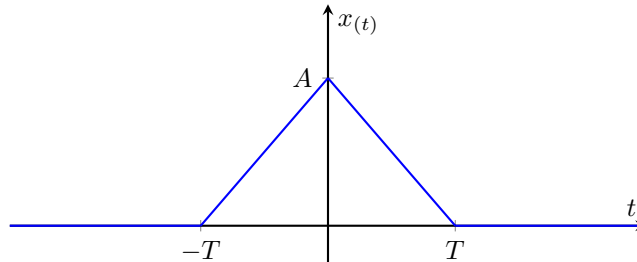


Figure 26: Funzione priamide

$TCF[x(t)] :$

- Utilizzando la classica TCF :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T} \right) \right) \text{rect} \left(\frac{t}{2T} \right) dt$$

- Utilizzando il Th dell'Integrazione 6.4.5:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \implies x(t) = \int_{-\infty}^t y(\alpha) d\alpha \quad 6.4.5(2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt \quad 6.4.5(3)$$

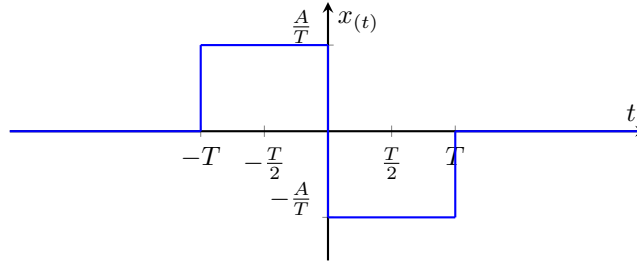


Figure 27: Funzione priamide

$$y(t) = \frac{A}{T} \text{rect} \left(\frac{t - (-\frac{T}{2})}{T} \right) - \frac{A}{T} \text{rect} \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T} \right) = \text{Sono 2 rect con ritardo}$$

$$\Rightarrow y(t) \Leftrightarrow Y(f) \quad 6.4.5(1) \Rightarrow X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} \begin{cases} x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0} \\ \text{rect}(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow T \text{sinc}(Tf) \end{cases}$$

$$Y(f) = \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f (-\frac{T}{2})} - \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2j A \text{sinc}(Tf) (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T})}{2j} = 2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)$$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} = \frac{2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{j2\pi f} = \frac{A T \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$= A T \text{sinc}^2(fT)$$

Abbiamo ottenuto la TCF del triangolo:

$$A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T} \right) \right) \text{rect} \left(\frac{t}{2T} \right) \Rightarrow AT \text{sinc}^2(fT)$$

per la dualità 6.4.2 :

$$AB \text{sinc}^2(Bt) \Rightarrow A \left(1 - \left(\frac{|f|}{B} \right) \right) \text{rect} \left(\frac{f}{2B} \right)$$

I segni negativi spariscono per il valore assoluto e per la parità della rect . Per verificare che i calcoli siano corretti posso collocare la $X_{(f)}$ in 0 e vedo quanto è l'area del segnale:

$$T^2 \text{sinc}(Tf) \Big|_0 = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} T \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = T$$

Osservazione: la funzione piramidale varia meno rapidamente nel tempo rispetto alla funzione rettangolare quindi lo spettro non occupa le alte frequenze, l'andamento è di $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$, è molto più contenuto. La rect avendo un gradino varia molto rapidamente nel tempo e di conseguenza il suo spettro si estende a frequenze più alte del segnale piramidale.

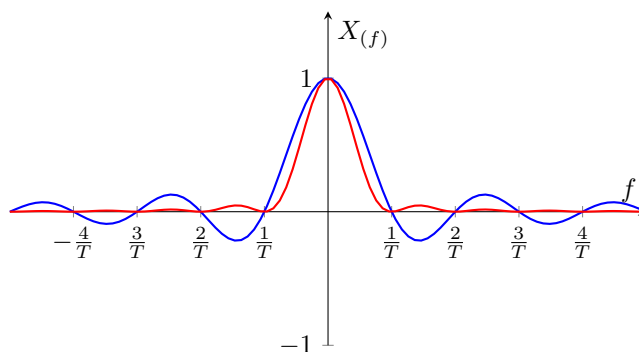


Figure 28: $\frac{\text{sinc}}{x}$, $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$

DOMANDA: ma la fase in tutto questo che ruolo ha? non avrei problemi avere anche sinc che cambiano la fase degli altri segnali? dopotutto si la sinc è brutta perché si estende all'infinito, ma proprio per questo la fase è sempre sporcata? cosa comporta nella ricostruzione del segnale? noi abbiamo visto finora l'ampiezza dopotutto

6.4.6 Derivazione in Frequenza

$$Ip : \left\{ \begin{array}{l} x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt} \end{array} \right.$$

$$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$$

Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.7 Integrazione in Frequenza

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt} \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$$

Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.8 Convoluzione

$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} d\tau$$

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \\ x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \\ z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} \end{cases}$$

$$Th : Z_{(f)} = X_{(f)} Y_{(f)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} z_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} e^{-j2\pi ft} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t-\tau)} e^{-j2\pi ft} dt d\tau \xrightarrow{Th.6.4.3} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} x_{(\tau)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X_{(f)} Y_{(f)} \end{aligned}$$

Proprietà della convoluzione:

- Commutativa:

$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} = y_{(t)} \otimes x_{(t)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} z_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} d\tau \Rightarrow \tau = t - \tau' \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-\tau')} y_{(\tau')} d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(\tau')} x_{(t-\tau')} d\tau' = y_{(t)} \otimes x_{(t)} \end{aligned}$$

- Associativa:

$$(x_{(t)} \otimes y_{(t)}) \otimes z_{(t)} = x_{(t)} \otimes (y_{(t)} \otimes z_{(t)})$$

- Distributiva:

$$x_{(t)} \otimes (y_{(t)} + z_{(t)}) = x_{(t)} \otimes y_{(t)} + x_{(t)} \otimes z_{(t)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)(y(t-\tau) + z(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t) \end{aligned}$$

Tutte le proprietà sono valutate nel dominio del *tempo* ma valgono anche per il dominio della *frequenza*.

6.4.9 Prodotto

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \\ z(t) = x(t)y(t) \end{cases}$$

$$Th : Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)e^{j2\pi\alpha t}d\alpha y(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-\alpha)t}dt d\alpha \\ &\stackrel{Th.6.4.3}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)Y(f-\alpha)d\alpha = X(f) \otimes Y(f) \end{aligned}$$

<i>Tempo</i>	<i>Frequenza</i>
<i>Convoluzione</i>	\iff <i>Prodotto</i>
<i>Prodotto</i>	\iff <i>Convoluzione</i>

6.4.10 Calcolo del prodotto di convoluzione

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad y_{(-\alpha)} \text{ e' } y_{(\alpha)} \text{ ruotato}$$

Facciamo un esempio con 2 *rect*:

$$x(t) = y(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

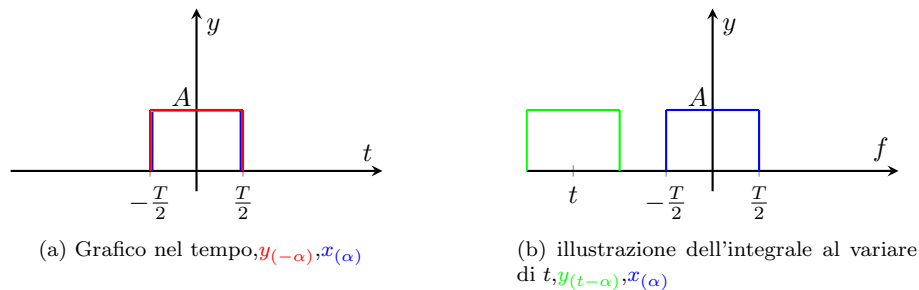


Figure 29: Grafico per il calcolo del prodotto di convoluzione

All'aumentare di t $y(t-\alpha)$ si sposta sull'asse delle ascisse, se:

- $t = -\frac{T}{2}$: si allineano le due *rect* e il valore dell'integrale inizia a aumentare.
- $t = 0$: si ha il valore massimo del prodotto tra le due funzioni (in questo caso $A = 1$), l'integrale vale T .
- $t = \frac{T}{2}$: le due *rect* sono disgiunte, nel raggiungere questa posizione il valore dell'integrale é diminuito fino a 0.

Tracciamo l'andamento dell'integrale:

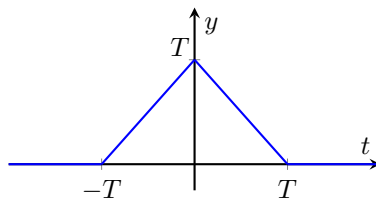
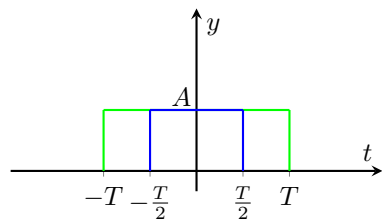


Figure 30: Integrale di convoluzione

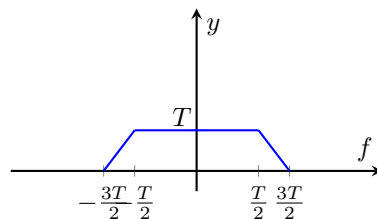
Osservazioni:

- Il prodotto di convoluzione ha come durata la somma delle durate dei segnali $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow [-T, T]$
- In $t = 0$ é l'area il prodotto dei segnali

Esempio con *rect* di durata T e $2T$:



(a) Grafico delle rect



(b) Risultato integrale di due *rect* diverse

Figure 31: Integrale di convoluzione di *rect* di durata diversa

Esempio *TCF* di un triangolo:

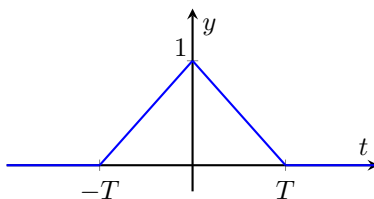


Figure 32: Integrale di convoluzione

Dal Th. di Convoluzione 6.4.8 sappiamo che é il prodotto di convoluzione di 2 *rect* di durata uguale a T :

$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \stackrel{Th. 6.4.8}{\Rightarrow} T \text{sinc}(fT) \cdot T \text{sinc}(fT) \\ T^2 \text{sinc}(fT)$$

Esercizio appunti martorella triangoli a sx a dx:

6.5 Modulazione di Ampiezza

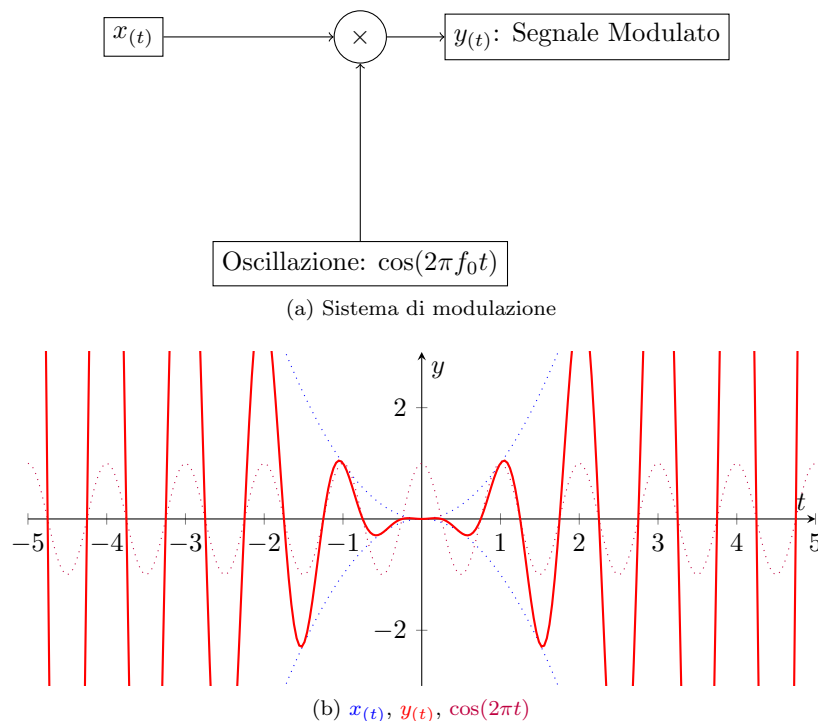


Figure 33: Esempio sistema di modulazione di ampiezza

L'oscillazione introdotta, $\cos(2\pi t)$, segue l'andamento di $x(t)$ Nel dominio della frequenza:

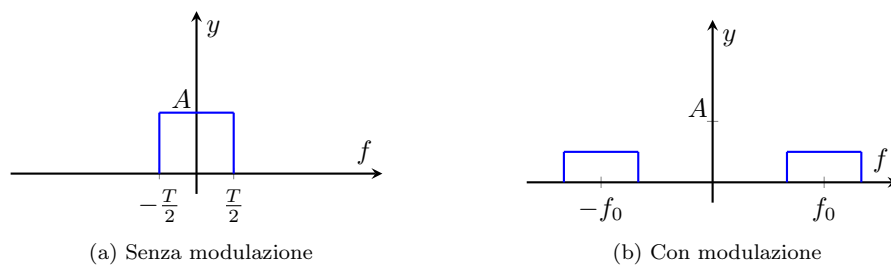


Figure 34: Segnale nel dominio della frequenza modulato e non

Serve per spostare la frequenza (es. di trasmissione) del segnale in modo tale, ad esempio, da non sovrapporre due segnali che sono sulla stessa frequenza. Se il segnale non fosse modulato si dice in **banda base (BB)** se il segnale é modulato

si dice in **banda passante**(BP).

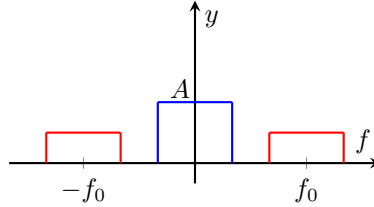


Figure 35: BB, BP

6.5.1 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \\ \xLeftrightarrow[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = \frac{1}{2}X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2}X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} + TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2}X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2}X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d} \end{aligned}$$

Esempio:

$$X_{(f)} = \frac{A}{B} \text{rect} \left(\frac{f}{B} \right)$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{2B} \text{rect} \left(\frac{f-f_0}{B} \right) + \frac{A}{2B} \text{rect} \left(\frac{f+f_0}{B} \right)$$

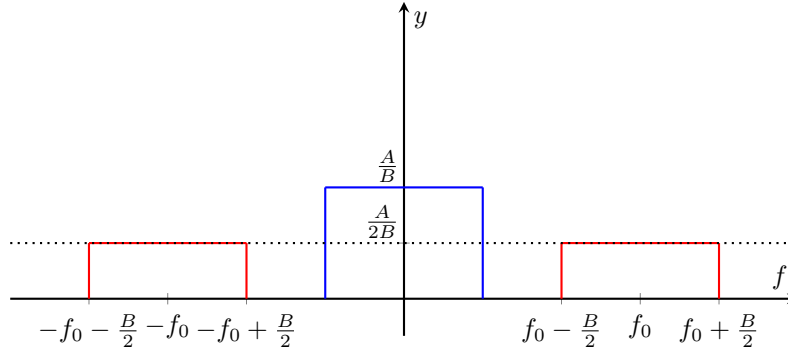


Figure 36: $X_{(f)}$, $Y_{(f)}$

6.5.2 Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} - TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d} \end{aligned}$$

6.5.3 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

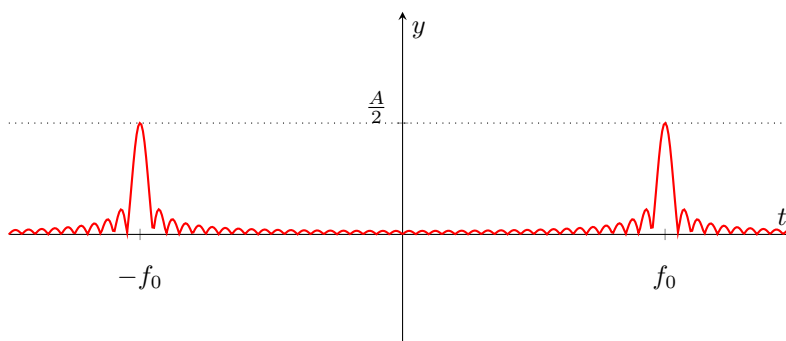
$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)}$$

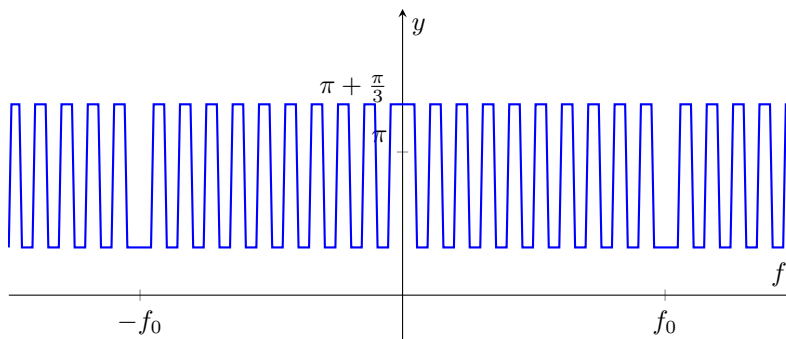
Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \frac{e^{j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
 &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} + TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d}
 \end{aligned}$$

Esempio:



(a) Ampiezza Mod. generica



(b) fase Mod. generica

Figure 37: Modulazione generica di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$ con $\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3})$

É legale cosa ho scritto sopra della modulazione generica?

6.5.4 Th. Modulazione con Esponenziale Complesso

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = X(f-f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} = X(f-f_0) \end{aligned}$$

Posso notare che:

- Ritardo: $\rightarrow x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
- Modulazione: $\rightarrow x(t)e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons X(f-f_0)$

Procedimento per la sintesi di un segnale:

- Derivo il segnale
- Verifico le ipotesi del Th. dell'Integrazione 6.4.5
- calcolo la TCF della derivata
- Applico il Th. dell'integrazione per calcolare $X(f)$

6.5.5 Demodulazione

Ci poniamo il problema di riportare il segnale modulato al segnale originale($g(t)$), dato:

$$x(t) = g(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Demoduliamo il segnale con $2 \cos(2\pi f_0 t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) 2 \cos(2\pi f_0 t) = g(t) \cos^2(2\pi f_0 t) \\ &= g(t) \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} = \frac{g(t)}{2} + \frac{g(t) \cos(4\pi f_0 t)}{2} \\ TCF[y(t)] &\xrightarrow{Th. 6.5.1} \frac{2G(f)}{2} + \frac{2G(f-2f_0)}{2} + \frac{2G(f+2f_0)}{2} \\ &= G(f) + G(f-2f_0) + G(f+2f_0) \end{aligned} \tag{1}$$

Dall'ultima uguaglianza posso quindi usare un filtro in (BB) per rimuovere i segnali alle frequenze $\pm 2f_0$ e ricavare il mio segnale $G(f)$.

DOMANDA: posso anche quindi demodulare con un seno tanto non mi interessa quello che succede alle frequenze spostate, quindi per ritorno sulla fase, non é importante? usando un seno la ribalto praticamente no? ricontroll cio che stai dicendo bro non so se é giusto il ribaltamento

ALTRA DOMANDA: devo anche modulare il segnale abbastanza lontano dalla BB sennó quando demodulo mi autodisturbo il segnale? da qui deriva $\frac{1}{T} < 2BB$
 ALTRA DOMANDA: quindi se volessi captare piú segnali mi conviene utilizzare circuiti diversi? oppure posso modulare e demodulare a piacimento i segnali tenendo conto su quali frequenze ho modulato in modo tale da sapere dove vanno a finire i segnali e recuperarli? tanto non mi interessa su quale frequenza finiscano finché non diventino non recuperabili per sovrapposizione giusto?
 Riporto un po di esempi di demodulazione di una o piú *rect*: Esempio di Demodulazione

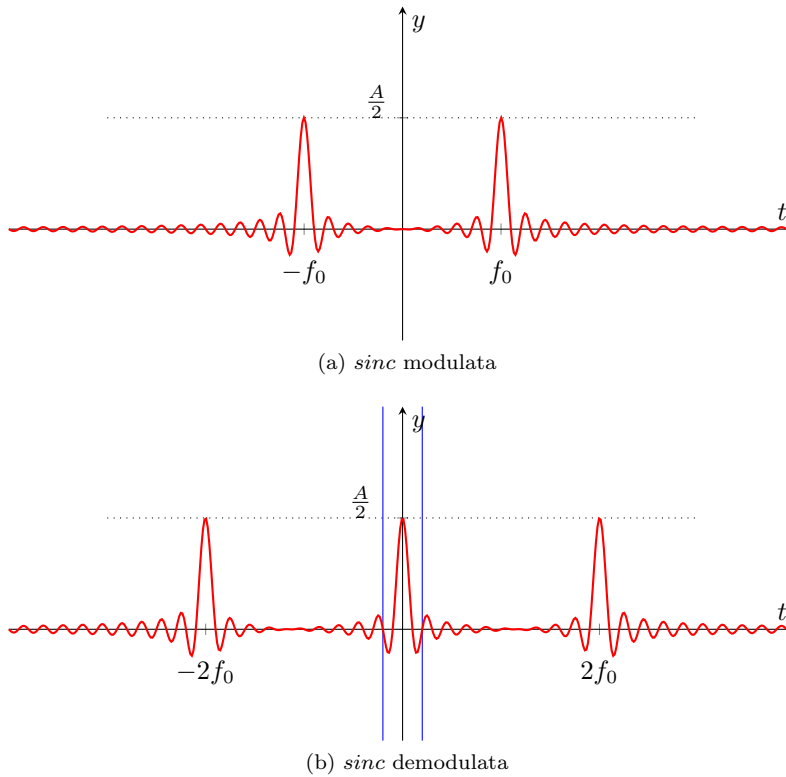
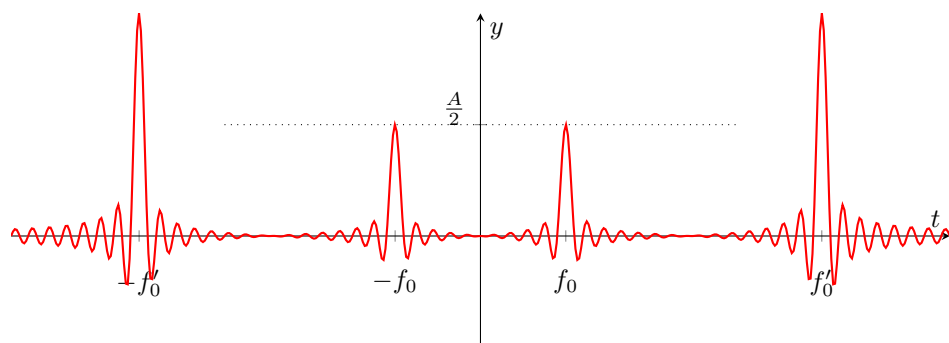
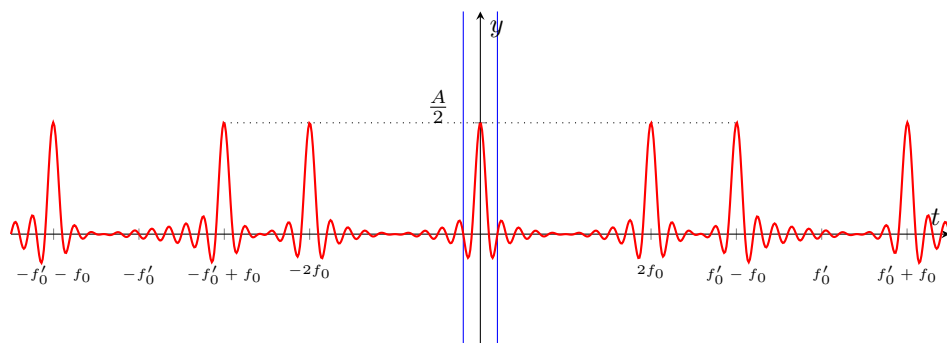


Figure 38: Demodulazione di una *sinc*

Nel caso di piú segnali durante la demodulazione il segnale che voglio recuperare viene spostato in **BB** mentre gli altri segnali presenti sullo spettro vengono a loro volta modulati però con un f_0 diverso rispetto al loro f'_0 :



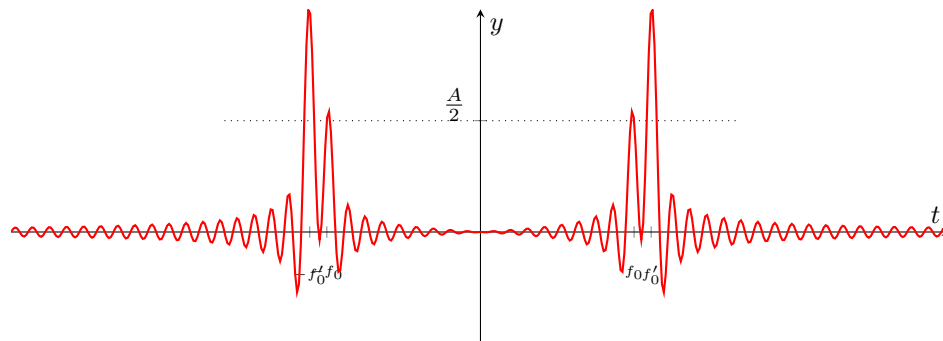
(a) Due *sinc* modulate



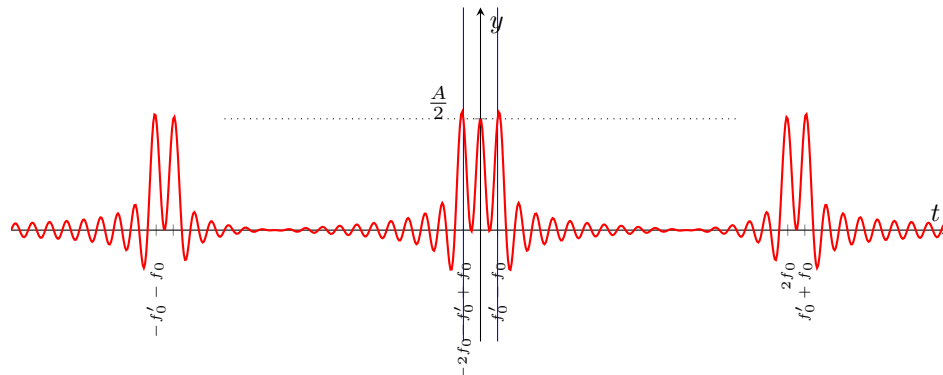
(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 39: Demodulazione di due *sinc*

Potrei però trovarmi in situazioni delle quali non posso recuperare il segnale



(a) Due *sinc* modulate



(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 40: Demodulazione di due *sinc* non recuperabili

Come possiamo vedere nella regione della **BB**, il segnale é molto sporco, magari può essere confuso con un cos e non una sinc. inoltre ora qui ho usato numeri interi per fare il *plot* quindi non si accavallano così male ma si accavallano solo in $\frac{1}{T}$ se usassi altri valori sarebbe ancora più sporco il segnale.

Adesso proviamo a calcolare quanti segnali possiamo trasmettere in una banda:

Ho un segnale rettangolare che dura 5 minuti e una banda di $20MHz = 20 \cdot 10^6 Hz$

$$f_{segnale} = \frac{1}{5 \cdot 60} = \frac{1}{300} Hz$$

$$n^\circ \text{ di segnali} = \frac{20 \cdot 10^6}{f_{segnale}} = 20 \cdot 10^6 \cdot 300 = 6 \cdot 10^9$$

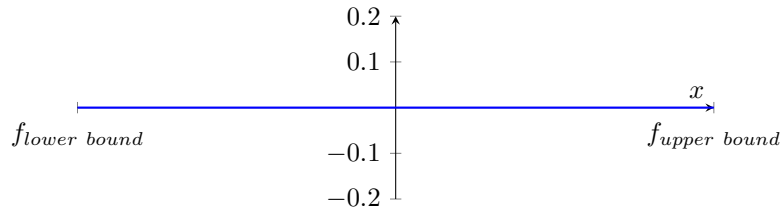


Figure 41: Spettro per la trasmissione

6.5.6 Radar

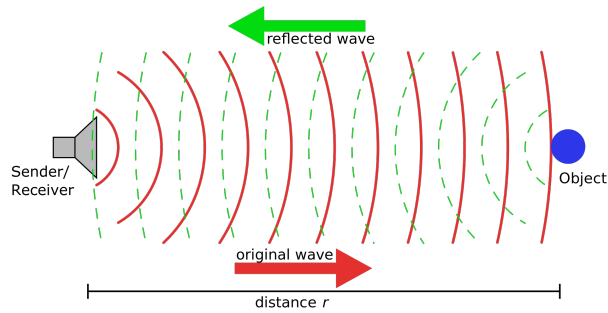


Figure 42: Spettro per la trasmissione

La sorgente emette un'onda continua e passivamente capta per le onde riflesse dagli oggetti. Il calcolo della distanza si basa sulla capacità dei materiali di riflettere le onde, più la frequenza dell'onda è alta più i materiali riescono a riflettere. L'emettitore, in presenza di ostacolo, riceve il segnale riflesso (*eco*) e misura il ritardo dell'*eco* rispetto al segnale originale per poi calcolarne la distanza. Prendiamo un emettitore di onde rettangolari.

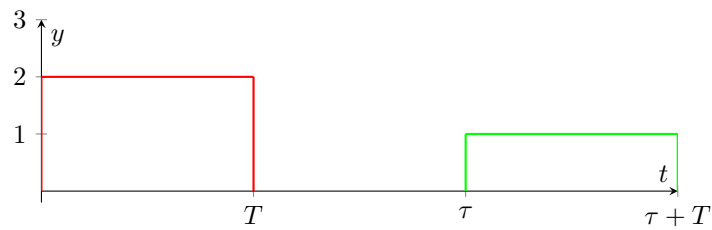


Figure 43: Spettro per la trasmissione

Indichiamo con τ il ritardo di ricezione dell'*eco* e la distanza che separa il radar dall'oggetto d :

$$d = \frac{c\tau}{2}$$

Compare un fattore $\frac{1}{2}$ dovuto al segnale che percorre due volte la distanza tra l'emettitore e l'oggetto. Possiamo notare che l'eco ha ampiezza minore poiché dell'energia è stata assorbita dal materiale o una porzione del segnale originale ha oltrepassato il materiale stesso.

Analizziamo in frequenza cosa succede.

Volgiamo realizzare un radar a onda rettangolare che rileva a un massimo di 15 metri di distanza e a un minimo di 1,5 metri. Possiamo calcolare i valori di ritardo massimo e minimo:

$$\tau_{min} = \frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 0.1 \mu s$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 1.5}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 10 ns$$

Il radar funziona finché $T \ll \tau_{min}$, se avessi un $\tau_{min} > T$ non potrei distinguere il segnale inviato da quello ricevuto.

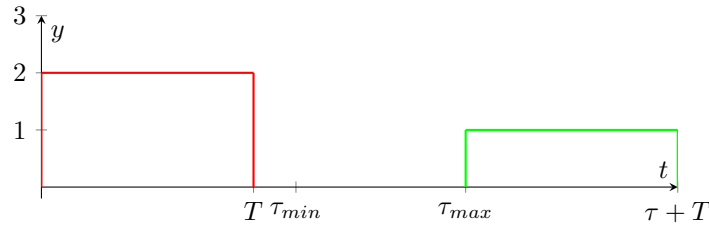


Figure 44: Limiti di ritardo del radar

Nel nostro caso potremmo scegliere un $T \simeq 1 ns \simeq 10^{-9}$ per rispettare i limiti imposti dall'esercizio. Ma analizzando l'intervallo frequenziale della TCF della funzione rettangolo, una $sinc(x)$, il nostro segnale ha componenti frequenziali significative nell'ordine dei GHz, $\frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-9}} = 1 GHz$. I segnali nell'ordine dei GHz oltrepassano con facilità gli ostacoli, basti vedere le bande di funzionamento dei cellulari e il Wi-Fi. Si utilizzano segnali con l'ordine di centinaia se non migliaia di Hz, possiamo vedere come la lunghezza d'onda del segnale giochi un ruolo fondamentale:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$$

$$\lambda_0 = \begin{cases} f_0 = 3GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.1m \\ f_0 = 30GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.01m \\ f_0 = 300GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.001m \\ f_0 = 3000GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.0001m \end{cases}$$

come funzionano il lidar e il sonar? come hanno fatto a rilevare i movimenti con il wifi?

6.6 Delta di Dirac

Si definisce Delta di Dirac $\delta_{(t)} = \frac{d}{dt}U_{(t)}$ con $U_{(t)}$ funzione gradino. Più correttamente si definisce Delta di Dirac la funzione che se integrata restituisce il gradino unitario:

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt \rightarrow U_{(t)}$$

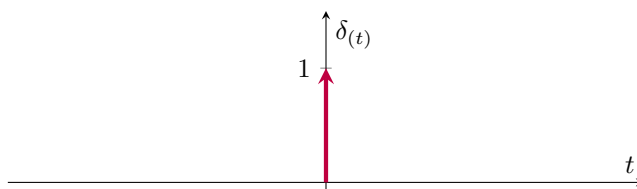


Figure 45: Delta di Dirac

L'ampiezza della funzione é dovuta alla costante moltiplicativa, ma alla fine rimane sempre una funzione impulso.

boh amplia magari

6.6.1 Proprietá del Delta di Dirac

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt = 1$
- Proprietá Campionatrice:
 $Ip: x_{(t)}$ continua in t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \delta_{(t-t_0)} dt = x_{(t_0)}$$

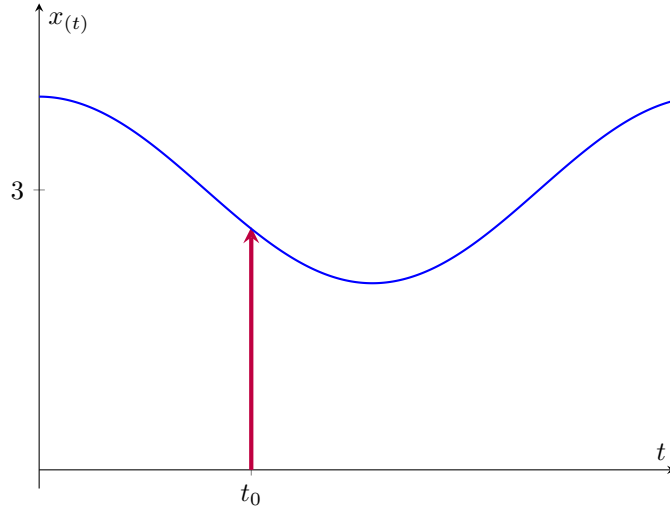


Figure 46: Proprietà Campionatrice

- Parità: $\delta_{(t)} = \delta_{(-t)}$
- $x_{(t)}\delta_{(t-t_0)}dt = x_{(t_0)}\delta_{(t-t_0)}$
- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = x_{(t)}$ Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(t-\tau)}d\tau \xrightarrow{6.6.1} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(\tau-t)}d\tau = x_{(t)}$$

- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = x_{(t-t_0)}$ Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(t-t_0-\tau)}d\tau \xrightarrow{6.6.1} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(\tau-(t-t_0))}d\tau = x_{(t-t_0)}$$

6.6.2 TCF della Delta di Dirac

$$x_{(t)} = A\delta_{(t)}$$

$$TCF[x_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt \xrightarrow{6.6.1, t_0=0} e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} = A$$

$$A\delta_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} A$$

Per la dualità 6.4.2 :

$$A \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} A\delta_{(-f)} = A\delta_{(f)}$$

Caso con ritardo:

$$A\delta_{(t-t_0)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} Ae^{-j2\pi f t_0}$$

Per la dualita 6.4.2 :

$$Ae^{-j2\pi f_0 t} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} A\delta_{(-f-f_0)} = A\delta_{(f+f_0)}$$

6.6.3 TCF di segnali periodici FIX?

Nel caso di segnali periodici, come $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, abbiamo definito la TSF , proviamo a calcolarne la TCF :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} ?$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= TCF[\cos(2\pi f_0 t)] = TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \\ &= TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right] + TCF\left[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \xrightarrow{6.6.2} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2} \\ \cos(2\pi f_0 t) &\underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2} \end{aligned}$$

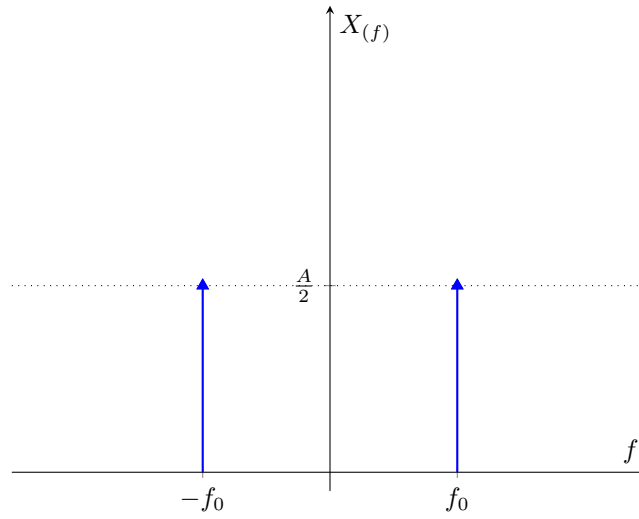


Figure 47: TCF \cos

Praticamente modulo una costante.

Osservazione: Non sono i coefficienti $X_{(k)}$, qui le delta sono funzioni nella TSF

sono numeri complessi.

Caso con $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} ?$$

$$\begin{aligned} X(f) &= TCF[\sin(2\pi f_0 t)] = TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \\ &= TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2j}\right] - TCF\left[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right] \xrightarrow{6.6.2} \frac{\delta(f-f_0)}{2j} - \frac{\delta(f+f_0)}{2j} \\ \sin(2\pi f_0 t) &\xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} \frac{\delta(f-f_0)}{2j} - \frac{\delta(f+f_0)}{2j} \end{aligned}$$

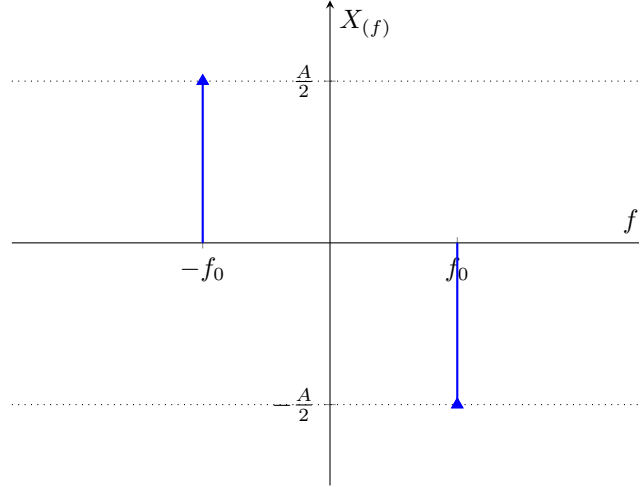


Figure 48: TCF *sin*

6.7 Relazione tra *TSF* e *TCF*

6.7.1 *TCF* di un segnale periodico generico

Dato un generico segnale $y(t)$ posso sempre scriverlo come periodicizzazione di un segnale apreiodico $x(t)$: $x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f)$

$$y(t) = y(t - kT_0) \Rightarrow \begin{cases} TSF[y(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \\ TCF[y(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - \frac{k}{T_0}) \end{cases}$$

La TCF diventa un campionamento con la Delta di Dirac 6.6.1

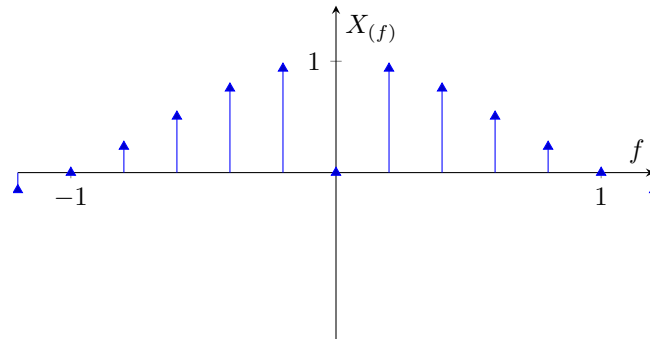


Figure 49: TCF segnale periodico generico

Applichiamolo al Th. della Modulazione 6.5.1:

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \stackrel{6.4.9}{\Rightarrow} X_{(f)} \otimes \left(\frac{\delta(f-f_0)}{2} + \frac{\delta(f+f_0)}{2} \right) \\ \stackrel{6.6.1}{\Rightarrow} \frac{1}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2} X_{(f+f_0)}$$

Esercizio:

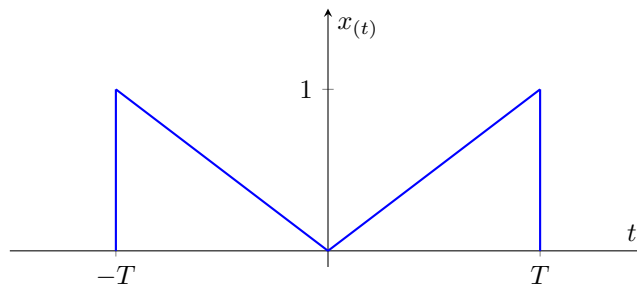


Figure 50: TCF rect meno triangolo

Deriviamo il segnale $y(t)$:

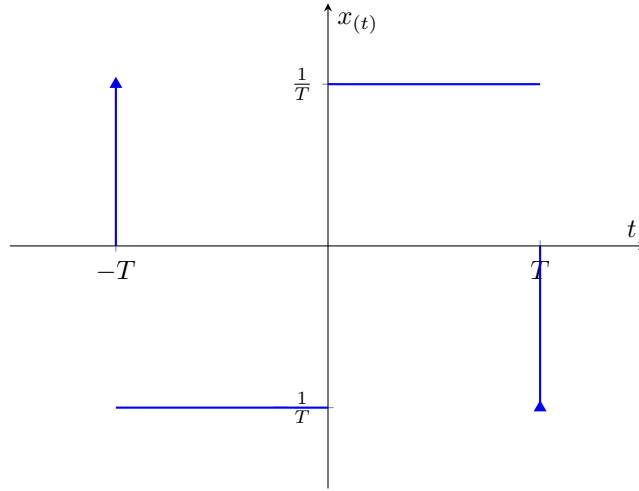


Figure 51: Derivata di $y(t)$

$$y(t) = \delta_{(t-T)} - \delta_{(t+T)} - \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t - (-\frac{T_0}{2})}{T}\right) + \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T}\right)$$

Possiamo applicare il Th dell'integrazione 6.4.5 l'ipotesi (3): $y_{(\infty)} = 0$

$$\begin{aligned} TCF[y(t)] &= e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{T} T \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f \frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T} T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \\ &= \frac{2j}{2j} \left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f \frac{T_0}{2}} + \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \right) \\ &= 2j \sin(2\pi fT) - 2j \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{2j \sin(2\pi fT) - 2j \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{j2\pi f} \\ &= \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{\text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} = \frac{2T}{2T} \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{T}{T} \frac{\text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} \\ &= 2T \text{sinc}(2fT) - T \text{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

Si potrebbe fare sottraendo un triangolo a una rect?

6.7.2 Relazione tra i coefficienti X_k e $X_{(f)}$

$$y(t) = y_{(t-kT_0)} \Rightarrow \text{Periodico in } T_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(t-nT_0)}$$

$x(t)$ Segnale aperiodico

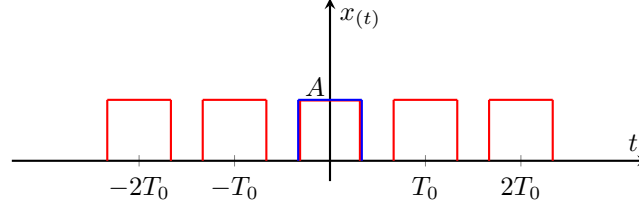


Figure 52: Segnale **aperiodico**, Segnale **periodico**

$$\begin{cases} x(t) \xrightleftharpoons{TCF} X_{(f)} \\ y(t) \xrightleftharpoons{TSF} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{cases} \quad \text{Che relazione intercorre tra } Y_k \text{ e } X_{(f)}$$

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) e^{j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t-nT_0) e^{j2\pi k f_0 t} dt \stackrel{t'=t-nT_0}{=} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 (t'+nT_0)} dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} e^{j2\pi n k f_0 T_0} dt' \\ &\quad \downarrow \forall nk=1 \quad \text{é la fase di un numero sempre intero } nk \in \mathbb{N} \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} dt' \rightarrow TCF \text{ con intervalli disgiunti e adiacenti in } kf_0 \end{aligned}$$

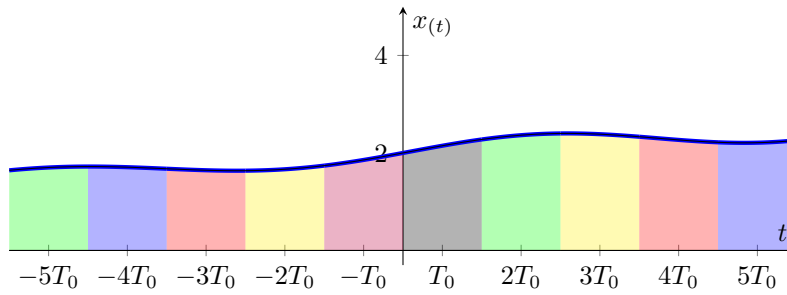


Figure 53: Intervalli adiacenti e disgiunti

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} dt' \Rightarrow Y_k = \frac{1}{T_0} X_{(kf_0)}$$

Sono campionamenti di $X_{(f)}$ a $k f_0$.

6.7.3 I^a formula di Poisson

$$y_{(t)} \stackrel{TSF}{\rightleftharpoons} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X_{(k f_0)} e^{j 2 \pi k f_0 t}$$

Evidenzia che:

Periodicizzazione nel tempo \Rightarrow Campionamento nella frequenza

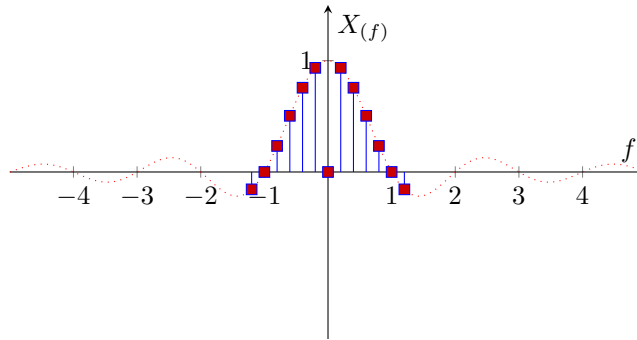


Figure 54: Grafico del campionamento

Esempio:

$$y_{(t)} = |\cos(2\pi f_0 t)| \quad X_k = ?$$

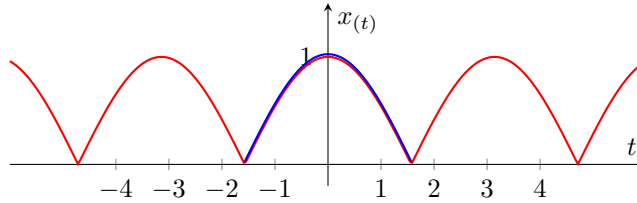


Figure 55: $|\cos(2\pi f_0 t)|$

$y_{(t)} = |\cos(2\pi f_0 t)|$ non é altro che il segnale aperiodico $x_{(t)} = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right)$ con periodo $\frac{T_0}{2}$:

$$\begin{cases} Y_k = \frac{2}{T_0} X_{(k f_0)} = \frac{2}{T_0} X_{(k \frac{T_0}{2})} \\ X_{(f)} = \frac{T_0}{2} \text{sinc}\left(f \frac{T_0}{2}\right) \otimes \left(\frac{\delta(f-f_0)}{2} + \frac{\delta(f+f_0)}{2}\right) \end{cases}$$

Per il calcolo di $X_{(f)}$ si applica il Th della Modulazione con \cos 6.5.1 e la proprietà campionatrice della Delta di Dirac rispetto alla convoluzione 6.6.1.

$$X_{(f)} = \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left((f - f_0) \frac{T_0}{2} \right) + \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left((f + f_0) \frac{T_0}{2} \right)$$

$$Y_k = \frac{2}{T_0} \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left(\left(\frac{2k}{T_0} - f_0 \right) \frac{T_0}{2} \right) + \frac{2}{T_0} \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left(\left(\frac{2k}{T_0} + f_0 \right) \frac{T_0}{2} \right)$$

6.7.4 Teorema dell'integrazione completo

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons{TCF} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{X_{(0)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Prende la nominazione di completo perché risolve il problema di mantenere l'uguaglianza $j2\pi f Y_{(f)} = X_{(f)}$

Per la dimostrazione ci serve definire prima:

- TCF di $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t} \xrightleftharpoons{TSF} \text{sgn}(f)$$

Per la Dualità 6.4.2

$$\text{sgn}(t) \xrightleftharpoons{ATSF} \frac{1}{j\pi f}$$

- TCF del gradino $u_{(t)}$

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(\alpha)} d\alpha \quad u_{(t)} \rightleftharpoons U_{(f)}$$

Non posso applicare il Th dell'integrazione 6.4.5 $\begin{cases} y_{(+\infty)} = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} u_{(t)} dt = 1 \\ X_{(f)} = 1 \end{cases}$ la

terza ipotesi non è mai verificata. Scriviamo la funzione gradino in modo diverso:

$$u_{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

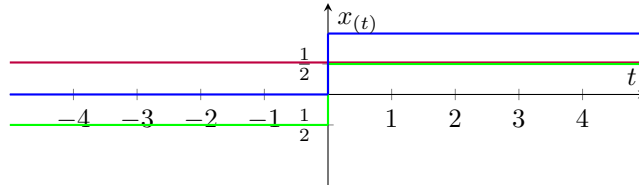


Figure 56: $u_{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$

$$U_{(f)} = TCF[u_{(t)}] = \frac{1}{2}\delta_{(f)} + \frac{1}{2j\pi f}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t) \stackrel{TSF}{\underset{ATSF}{=}} \frac{1}{2}\delta_{(f)} + \frac{1}{2j\pi f}$$

Dimostrazione Th. Integrazione completo:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha$$

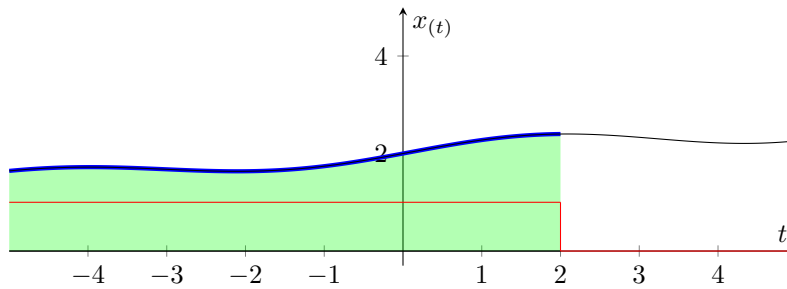


Figure 57: $y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha$, $x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)}$

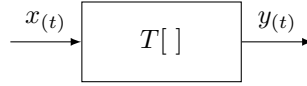
Utilizziamo il gradino per cambiare gli estremi dell'integrale e mantenere il valore di $x_{(t)}$ dopo t a 0. Ci siamo ricondotti all'integrale di convoluzione 6.4.8 nel tempo, quindi nella frequenza diventa un prodotto:

$$Y_{(f)} = X_{(f)} U_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{X_{(0)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Se $X_{(0)}$ fosse 0 avrei il classico Th. dell'integrazione. DOMANDA: ma quindi nella proprietà campionatrice in frequenza rimane la delta????

7 Sistemi Monodimensionali

Definiamo il Sistema Monodimensionale:



Il sistema applica la trasformazione $T[] : y(t) = T[x(t)]$ in generale $y(t) = T[x_{(\alpha)}, t]$.

7.1 Proprietá dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)

- Linearit :

$$x(t) = ax_{1(t)} + bx_{2(t)} \xrightarrow{T[]} y(t) = aT[x_{1(t)}] + bT[x_{2(t)}]$$

Oppure separando la variabile del tempo:

$$x(t) = ax_{1(t)} + bx_{2(t)} \xrightarrow{T[]} y(t) = aT[x_{1(\alpha)}, t] + bT[x_{2(\alpha)}, t]$$

  il principio di linearit  o sovrapposizione degli effetti visto a elettrotecnica.

- Stazionariet :

$$y(t) = T[x(t)] \rightarrow y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$$

- Causalit :

$$y(t) = T[x_{(\alpha)}, \alpha \leq t]$$

L'uscita all'istante t dipende dall'ingresso ad istanti precedenti o al pi  uguali a t , si basa su valori precedenti a t non pu  prevedere il futuro. Ne derivano 2 distinzioni di trasformazioni:

- Real Time: necessariamente causale (  nel presente)
- Virtual time: Causale o Non Causale (es. ho tutto un file al quale posso prevedere i bit o frame successivi per applicarne un post-processing)

- Stabilit  BIBO: Se il segnale $x(t)$ ha ampiezza limitata \rightarrow l'uscita ha ampiezza limitata:

$$|x(t)| \leq M \rightarrow |y(t)| \leq K$$

- Invertibilit :

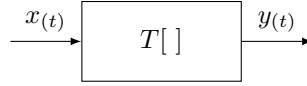
$$y(t) = T[x_{(\alpha)}, t] \xrightarrow{\text{Se} \exists} x(t) = T^{-1}[y_{(\alpha)}, t]$$

- Memoria: Un sistema é:

- Senza memoria: se $y(t) = T[x_{(\alpha)}, \alpha = t]$
- Con Memoria: $y(t) = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha$ l'uscita all'istante t dipende anche da valori dell'ingresso ad istanti diversi da t . Nota bene é l'integrale di convoluzione di $x_{(t)} \otimes u_{(t)}$

7.2 Proprietá dei Sistemi Lineari Stazionari (SLS)

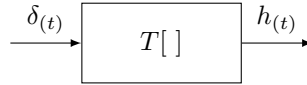
Sono sistemi che godono delle proprietá di Linearitá 7.1 e di Stazionarietá 7.1:



Troviamo la relazione tra ingresso e uscita:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= T[x_{(\alpha)}, t] = T[x_{(t)}] = T[x_{(t)} \otimes \delta_{(t)}] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} \delta_{(t-\alpha)} d\alpha\right] \\
 &\stackrel{7.1}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} T[x_{(\alpha)} \delta_{(t-\alpha)}] d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} T[\delta_{(t-\alpha)}] d\alpha
 \end{aligned}$$

Definiamo la trasformata nota del $\delta_{(t)}$:



Sollecitando il sistema con una Delta di Dirac ho la sua risposta impulsiva. Nel caso dei sistemi *SLS* l'impulso in uscita caratterizza completamente il sistema. Nel nostro caso $T[\delta_{(t-\alpha)}]$ non é altro che una traslazione della $T[\delta_{(t)}]$ per la Stazionarietá 7.1:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha = x_{(t)} \otimes h_{(t)}$$

La trasformata del sistema dipende solo dalla $h_{(t)}$ (risposta impulsiva del sistema). Passando al dominio della frequenza per la proprietá della convoluzione 6.4.8:

$$Y_{(f)} = X_{(f)} \otimes H_{(f)}$$

Dove $H_{(f)} = TCF[h_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt$ é la risposta in frequenza del sistema *SLS*. Esistono vari modi per calcolare $h_{(t)}$:

- Utilizzando un impulso di Dirac e le sue proprietá, ma l'impulso di dirac é difficile da realizzare.

- Calcolo $H_{(f)}$ mandando in ingresso un segnale del quale sia nota la sua risposta e calcolo il rapporto uscita/ingresso $H_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{X_{(f)}}$
- Mandando in ingresso un esponenziale:

$$y_{(t)} = x_{(t)} \otimes h_{(t)}, \quad x_{(t)} = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-\alpha)} h_{(\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\alpha)} e^{j2\pi f_0 (t-\alpha)} d\alpha \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\alpha)} e^{j2\pi f_0 \alpha} d\alpha = x_{(t)} H_{(f_0)} \end{aligned}$$

$$H_{(f_0)} = \frac{y_{(t)}}{x_{(t)}}$$

Posso calcolare la risposta in f_0 , posso variare la frequenza e calcolare $H_{(f)} = \frac{y_{(t)}}{x_{(t)}} \Big|_{x_{(t)}=e^{j2\pi f t}}$

7.2.1 Risposta in frequenza

La risposta in frequenza $H_{(f)} \in \mathbb{C}$:

$$H_{(f)} = |H_{(f)}| e^{j\angle H_{(f)}}$$

- $|H_{(f)}|$: Risposta in ampiezza
- $\angle H_{(f)}$: Risposta in fase

$$Y_{(f)} = X_{(f)} H_{(f)} = \begin{cases} |Y_{(f)}| &= |X_{(f)}| |H_{(f)}| \\ \angle Y_{(f)} &= \angle X_{(f)} + \angle H_{(f)} \end{cases}$$

7.2.2 Sistemi in cascata e in parallelo

- Sistemi in cascata:

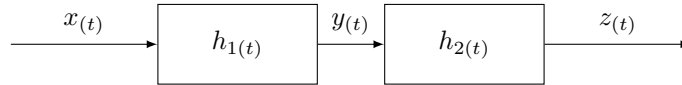


Figure 58: sistemi in cascata

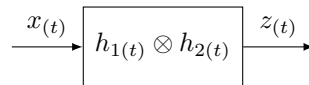


Figure 59: equivalente sistemi in cascata

$$\begin{aligned}
y(t) &= x(t) \otimes h_1(t) \\
z(t) &= y(t) \otimes h_2(t) = [x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) \otimes h_2(t) \\
z(t) &= x(t) \otimes h(t)
\end{aligned}$$

Risposta Impulsiva : $h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$

Risposta in Frequenza : $H(f) = H_1(f)H_2(f)$

- Sistemi in parallelo:

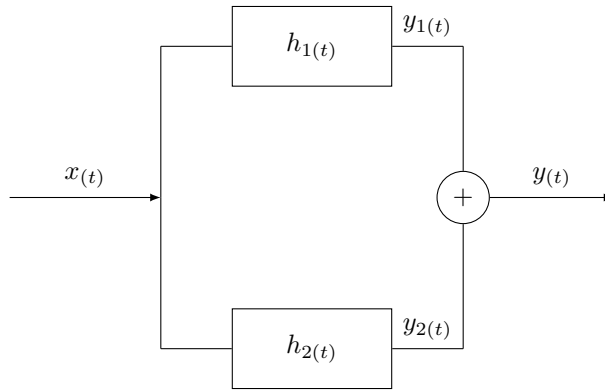


Figure 60: sistemi in cascata

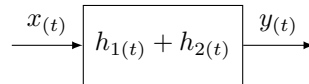


Figure 61: equivalente sistemi in parallelo

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_1(t) \otimes y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) \\
&= x(t) \otimes [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) \otimes h(t)
\end{aligned}$$

Risposta Impulsiva : $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

Risposta in Frequenza : $H(f) = H_1(f) + H_2(f)$

7.3 Risposta di un sistema causale e risposta impulsiva

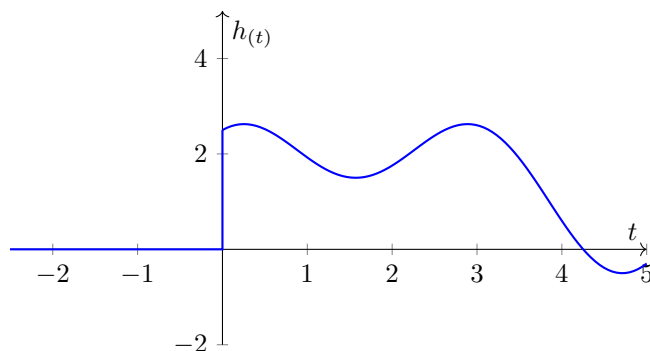


Figure 62: Risposta impulsiva di un sistema

$$h_{(t)} = h_{(t)} \cdot u_{(t)}$$

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= x_{(t)} \otimes h_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha \end{aligned} \quad (1)$$

giungiamo all'integrale che definisce la Causalit  7.1: un sistema   causale se la sua risposta impulsiva   solo definita per $t > 0$.

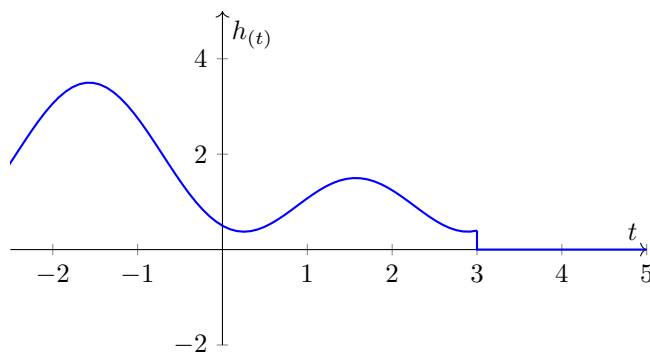


Figure 63: Uscita di un sistema causale

Dal valore 3 in poi la risposta impulsiva rende il sistema causale.

7.3.1 Stabilità BIBO su $h_{(t)}$

$$\begin{aligned} |y_{(t)}| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(\alpha)}| |h_{(t-\alpha)}| d\alpha \\ &\leq M \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t-\alpha)} d\alpha \right| < K \end{aligned}$$

Se l'ingresso $y < M$ allora lo é anche l'uscita. Ne deriva la C.S(Condizione Sufficiente): Assoluta integrabilità della $h_{(t)}$, se il sistema é bounded anche l'integrale deve esserlo. RICONTRILLA TROVA L CONDIZIONE NECES-SARIA SUL LIBRO.

7.4 Filtri Ideali

Banda di un segnale É la porzione di spettro calcolata sul semiasse positivo delle frequenze dove lo spettro é diverso da zero.

$$B = f \cdot H_{(f)} \neq 0, f > 0$$

7.4.1 Filtro Passa Basso di banda B - Low Pass Filter (LP)

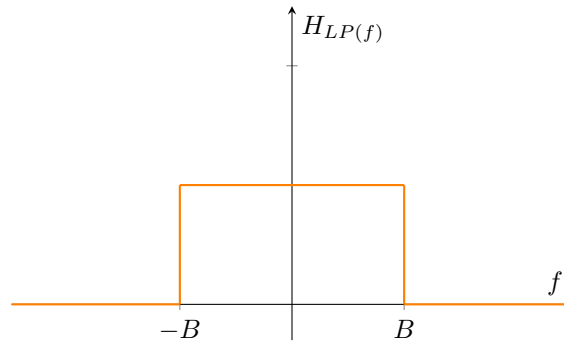


Figure 64: Filtro passa basso ideale: Risposta in frequenza

Risposta in frequenza:

$$H_{LP(f)} \triangleq \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Risposta impulsiva:

$$h_{LP(t)} \triangleq 2B \text{sinc}(2Bt)$$

La risposta impulsiva non é causale, ma posso troncarla e spostarla nel semiasse positivo per renderlo tale, ma non é piú ideale:

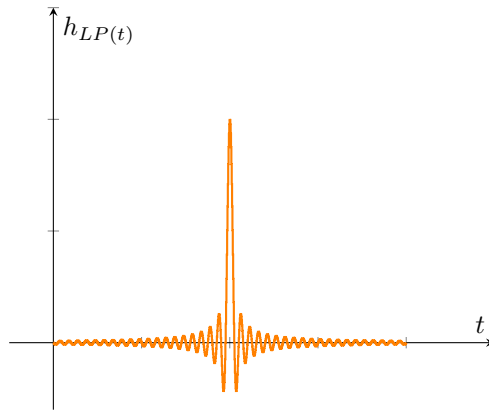


Figure 65: Filtro passa basso causale: risposta impulsiva

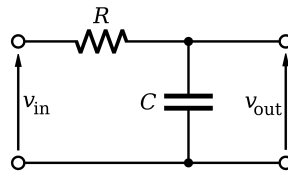


Figure 66: Circuito filtro passa basso ideale

Cricuito Filtro Passa Basso:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_T}}, \quad f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

Possiamo rappresentare in sacala logaritmica il filtro: $|H(f)|_{db} = 10\log\left(\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}\right)$.

Prendiamo la frequenza di riferimento $f_0 : H(f_0) = 1$

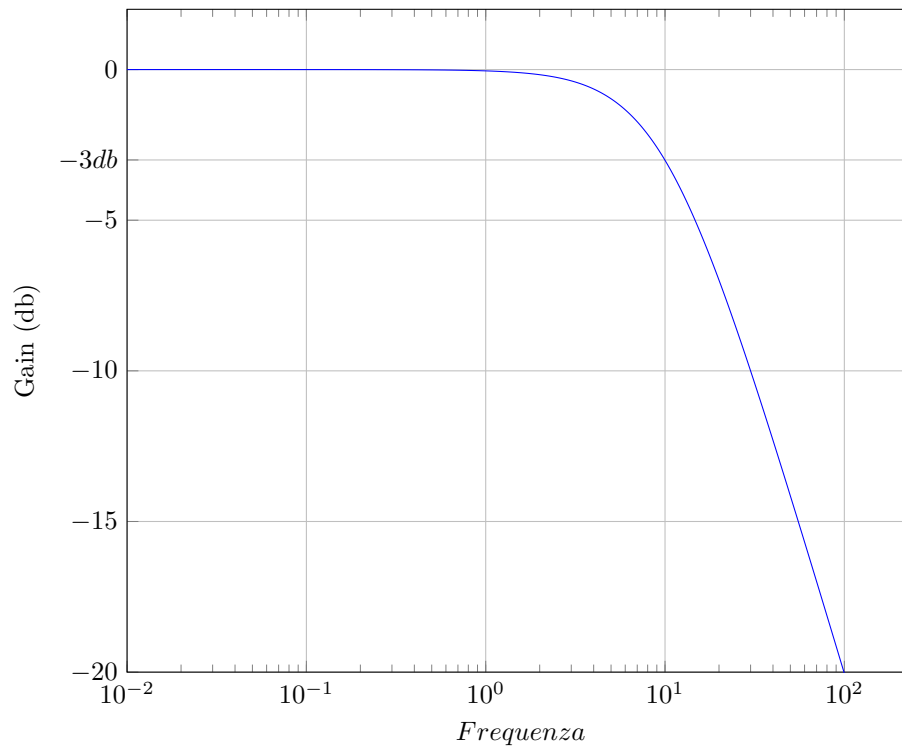


Figure 67: Filtro passa basso ideale in scala logaritmica

Otteniamo la Frequenza di taglio f_T all'ampiezza di $-3db$, in questo caso $f_T = 10$, alla quale il filtro "taglia" o meglio riduce tutte le ampiezze in ingresso verso lo 0.

RIGUARDA SUL LIBRO FORMULA PER IL CALCOLO DI $1/2$ PER IL MODULO DI H_f e le formule di risposta dei circuiti, mhh la fase?

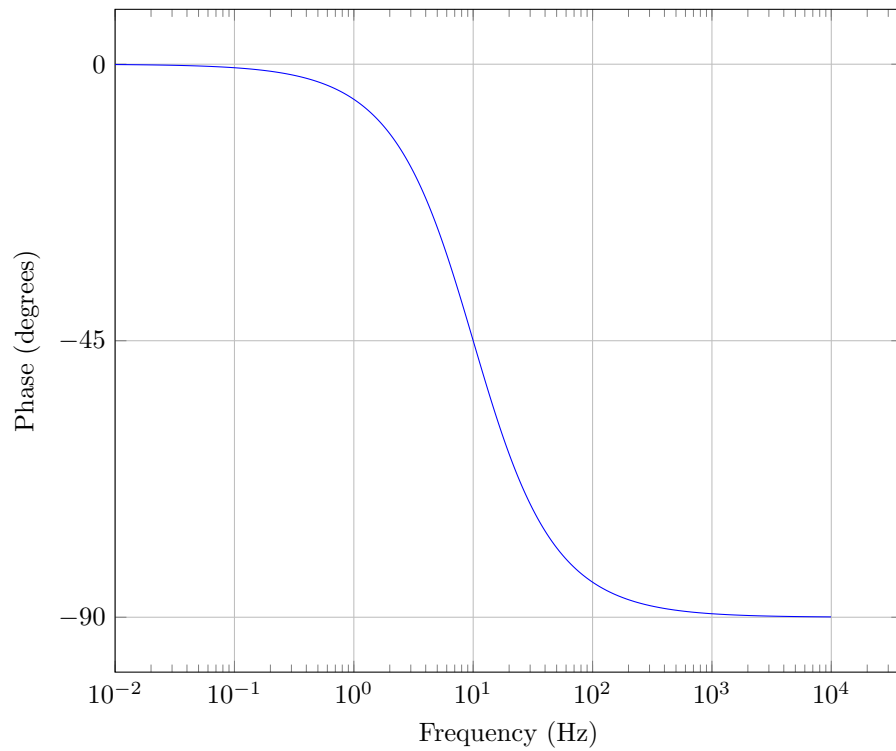


Figure 68: Filtro passa basso ideale fase

Osservazione:

- Al tendere di B a 0 il valore che il filtro fa passare é il valor medio del segnale, tanto da tendere a un filtro LP con spettro $\delta_{(t)}$, ma é difficilmente realizzabile.
- La banda di un filtro é quanto si estende da $0 \rightarrow f^+$ fino a arrivare a $B, [0, B]$
- Se il filtro é un filtro BP la banda é l'ampiezza della banda che lascia passare $[f_0 - B, f_0 + B] = B$

7.4.2 Filtro Passa Alto di banda B - High Pass Filter (HP)

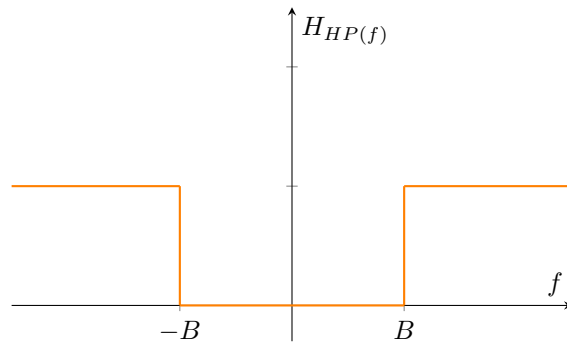


Figure 69: Filtro passa alto ideale: Risposta in frequenza

Risposta in frequenza:

$$H_{HP}(f) \triangleq 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Risposta impulsiva:

$$h_{HP}(t) \triangleq \delta(t) - 2B \text{sinc}(2Bt)$$

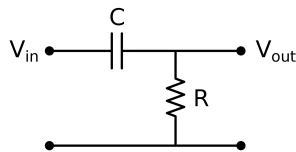


Figure 70: Circuito filtro passa alto ideale

Cricuito Filtro Passa Alto:

$$H(f) = \frac{fRC}{1 + fRC}$$

In scala logaritmica:

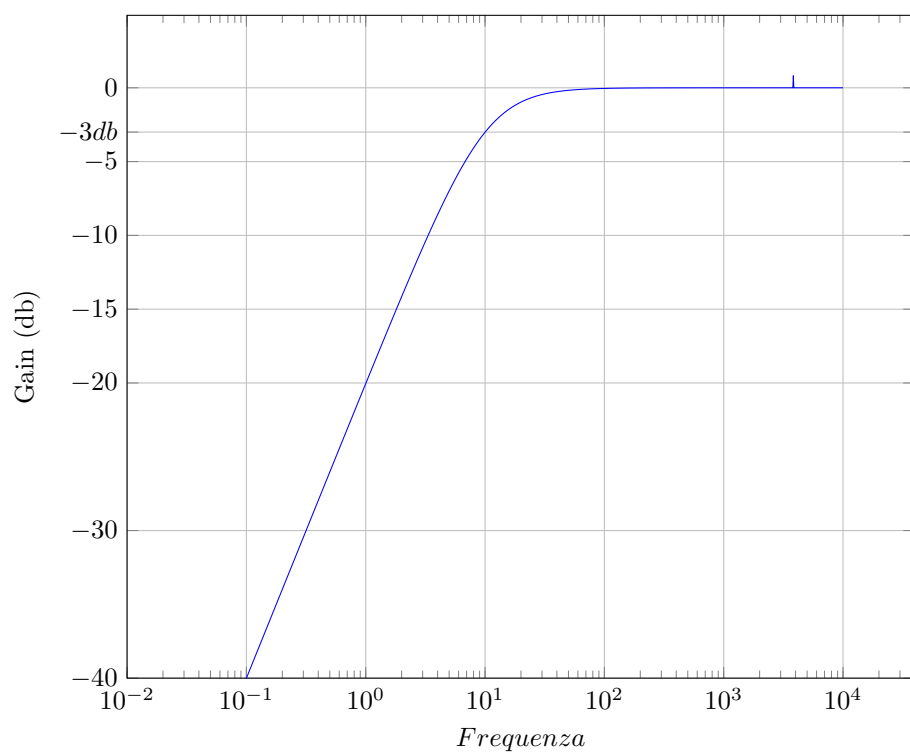


Figure 71: Filtro passa alto ideale in scala logaritmica

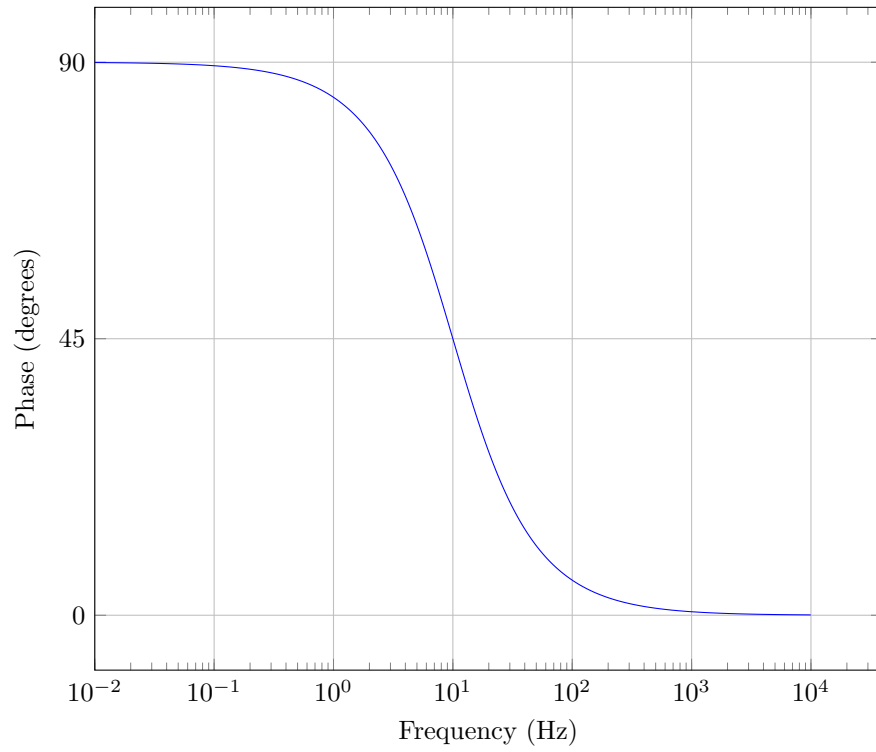


Figure 72: Filtro passa alto ideale fase

Si nota come avendo preso la f_T corrisponde a $RC = 10$.

7.4.3 Filtro Passa Banda di banda B - Band Pass Filter (BP)

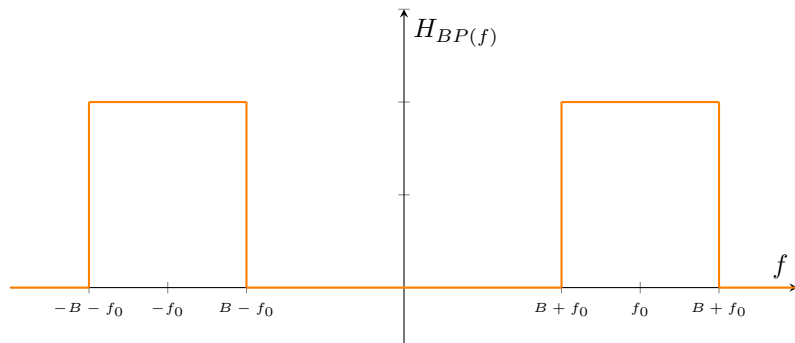


Figure 73: Filtro passa banda ideale: Risposta in frequenza

Risposta in frequenza:

$$H_{BP}(f) \triangleq H_{LP}(f+f_0) + H_{LP}(f-f_0) = \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)$$

Risposta impulsiva:

$$h_{BP}(t) \triangleq 2B \text{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_0 t) = h_{LP}(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

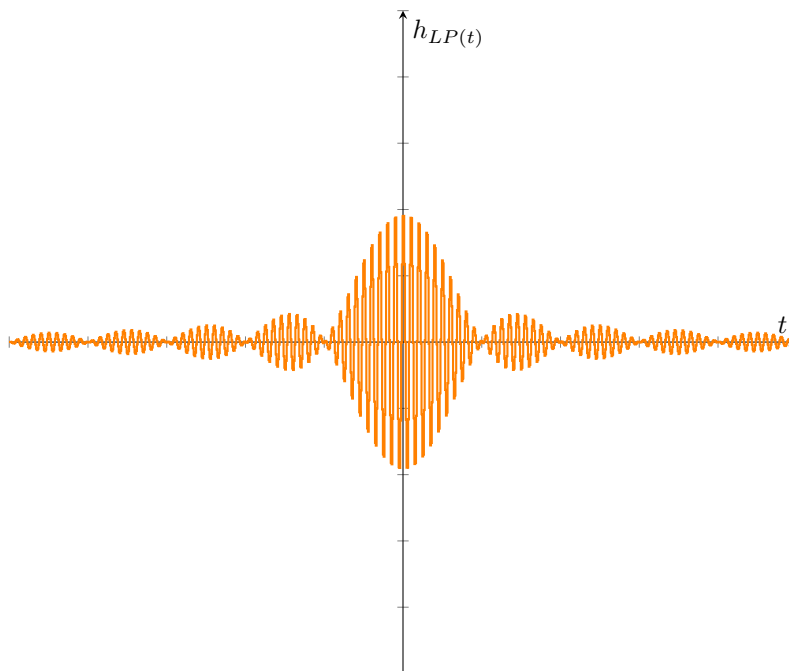


Figure 74: Filtro passa banda: risposta impulsiva

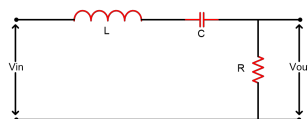


Figure 75: Circuito filtro passa banda ideale

Cricuito Filtro Passa Banda: In scala logaritmica:

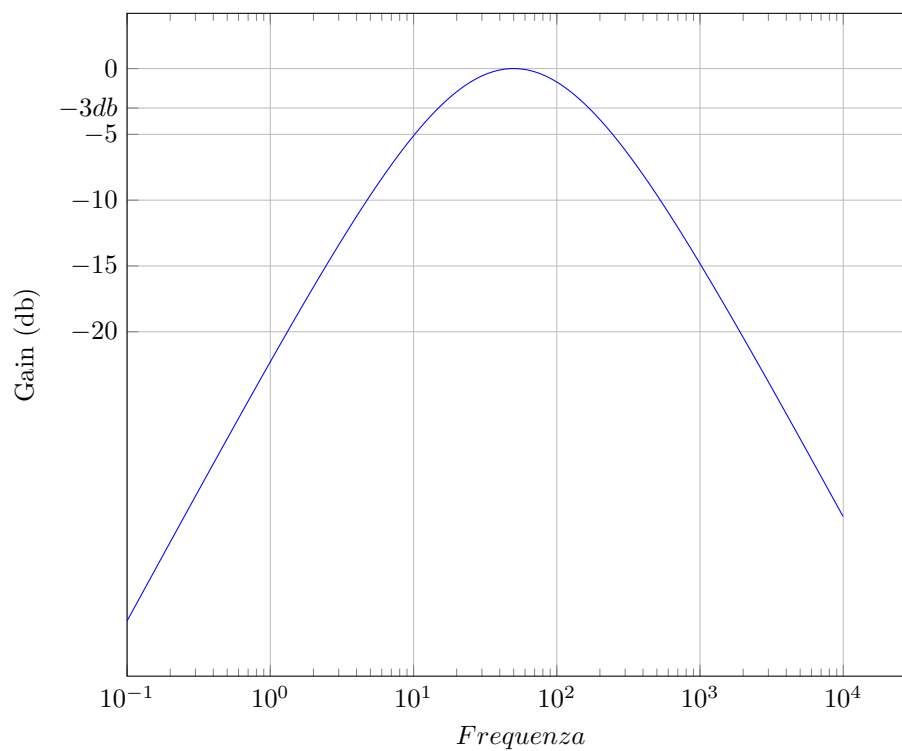


Figure 76: Filtro passa banda ideale in scala logaritmica

Non riesco a fare un grafico con pendenza maggiore ma é per capire che le frequenze sotto il valore di $-3db$ vengono ridotte drasticamente.

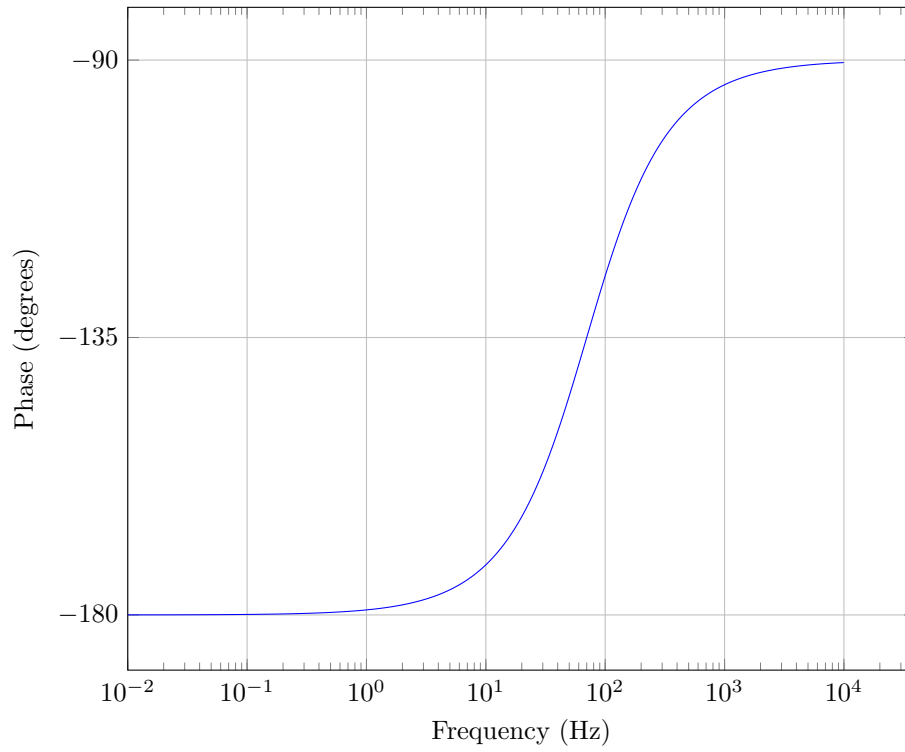


Figure 77: Filtro passa banda ideale fase

7.4.4 Filtro Elimina Banda di banda B - Band Stop Filter (BS)

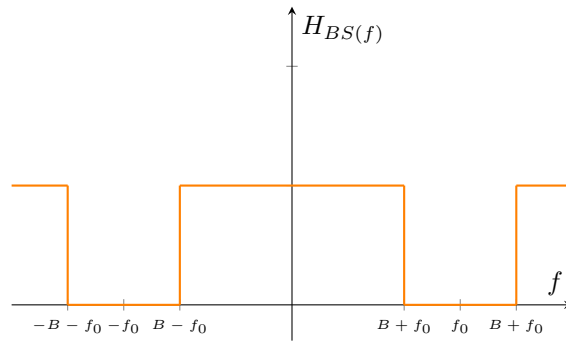


Figure 78: Filtro elimina banda ideale

Risposta in frequenza:

$$H_{BS}(f) \triangleq 1 - (H_{BP}(f+f_0) + H_{BP}(f-f_0)) = 1 - \left[\text{rect} \left(\frac{f-f_0}{2B} \right) + \text{rect} \left(\frac{f+f_0}{2B} \right) \right]$$

Risposta impulsiva:

$$h_{BS(t)} \triangleq \delta_{(t)} - h_{BP(t)} = \delta_{(t)} - 2B \text{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

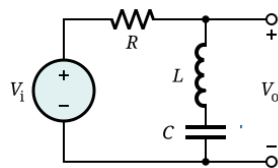


Figure 79: Circuito filtro elimina banda ideale

Cricuito Filtro Elimina Banda:

$$H_{(f)} =$$

In scala logaritmica:

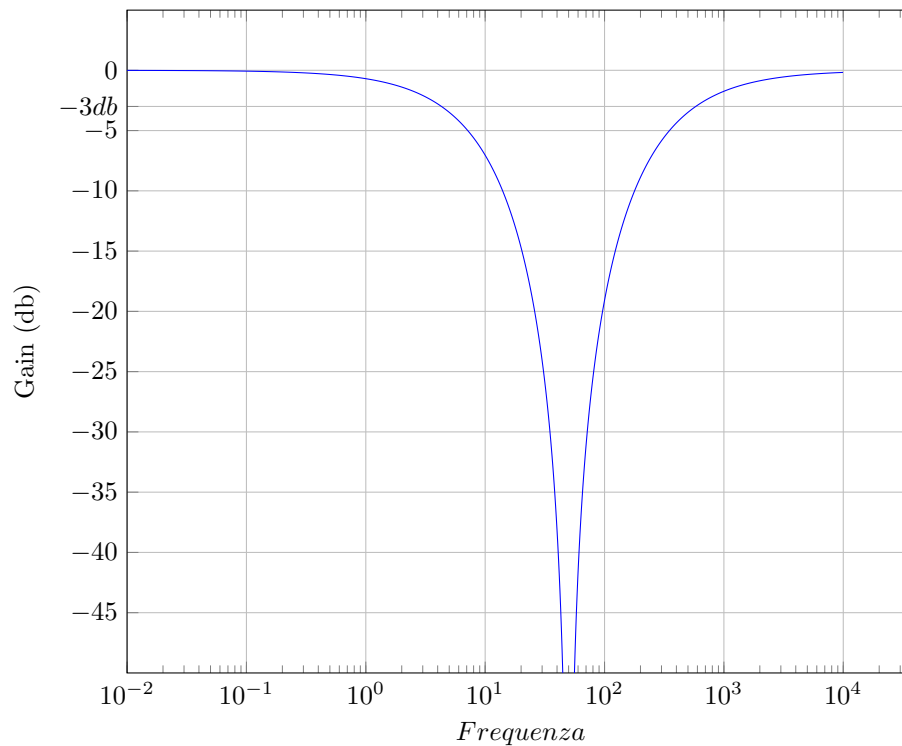


Figure 80: Filtro elimina banda ideale in scala logaritmica

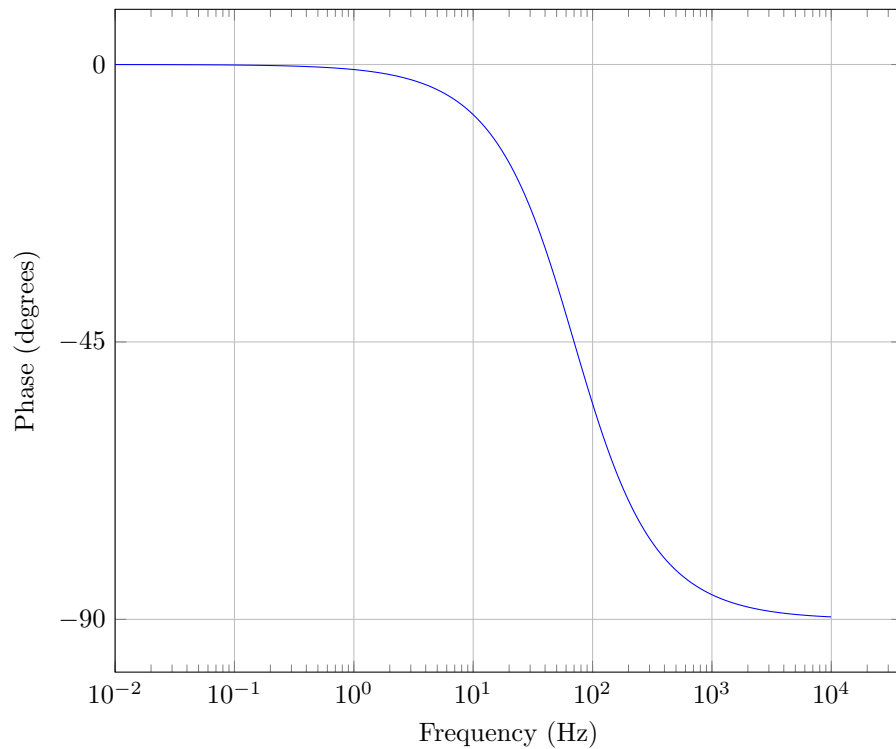


Figure 81: Filtro elimina banda ideale fase

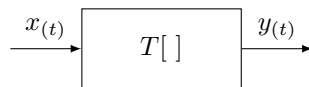
Tutti i filtri possono essere ricavati dal filtro **Low-Pass** 7.4.1 o dal filtro **High-Pass** 7.4.2.

I filtri sono riconducibili a funzioni di trasferimento come quelle viste per il tracciamento di Bode nel corso di fondamenti di automatica.

Sono giusti i grafici di bode? ricontrollare soprattutto la fase

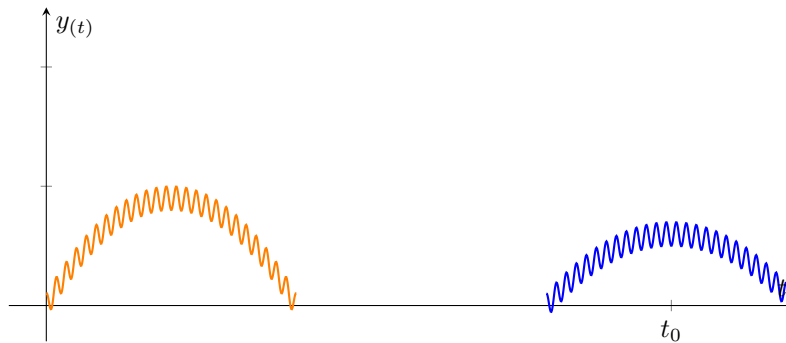
7.4.5 Filtri non distortenti

Definiamo prima cos'è un segnale non distorto:



$y(t)$ è un segnale non distorto di x se: $y(t) \triangleq kx(t-t_0)$ $k \in \mathbb{R}^+$, cioè finché esso rimane una versione ritardata e/o amplificata del segnale $x(t)$, in frequenza:

$$Y_{(f)} = kX_{(f)}e^{-j2\pi ft_0}$$



Analisi del filtro non distortente: Come deve essere realizzato il filtro in modo tale da non distortere il segnale?

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = kx(t-t_0)$$

Per non essere distortente la risposta impulsiva del sistema deve essere $k\delta(t-t_0)$ con risposta in frequenza: $H(f) = ke^{-j2\pi ft_0}$

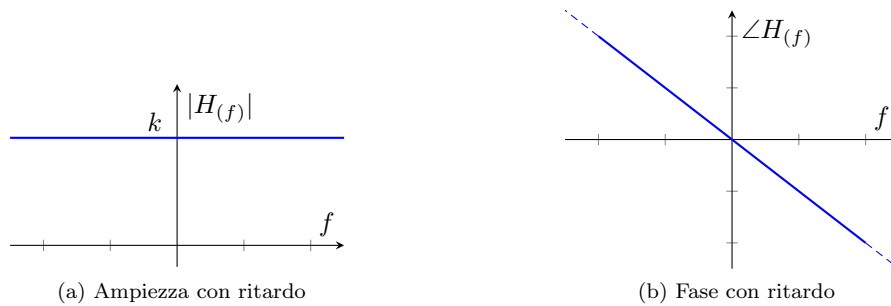


Figure 82: Spettro filtro non distortente

Avere un tale filtro per tutti i segnali é molto restrigente, ci basta che il nostro filtro sia non distortente nella banda che ci interessa.

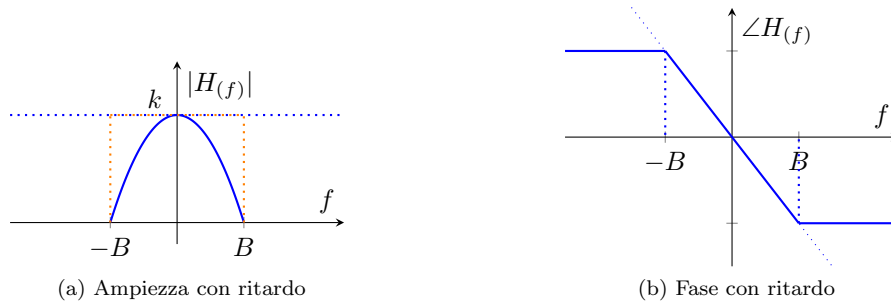


Figure 83: Spettro filtro non distortente limitato alla banda B

Il filtro ci basta che sia qualcosa che si avvicini a una *rect* ad esempio un coseno rialzato 3

7.5 Th. di Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x(f)} df$$

$S_{x(f)} = |X(f)|^2$ é la densità spettrale di energia del segnale, ci mostra come l'energia é distribuita nello spettro.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* e^{-j2\pi f t} df dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

Come capisco quanta % del segnale sto buttando?

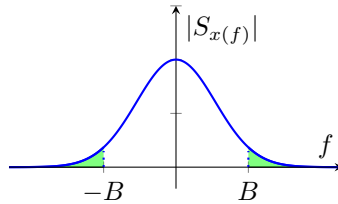


Figure 84: Spettro $S_{x(f)}$

La parte **verde** é l'energia del segnale che perdiamo troncadolo con banda B

7.6 Funzione di Correlazione - Segnali Aperiodici

$$C_{xy} = R_{xy(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y_{(t-\tau)}^* dt$$

D: me quindi é C o R ?

7.7 Funzione di Autocorrelazione

$$C_x = R_{x(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_{(t-\tau)}^* dt$$

Misura la correlazione del segnale con se stesso.

7.7.1 Proprietá Autocorrelazione

- $R_{x(0)} = E_x$

$$R_{x(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_{(t)}^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- Simmetria Hermitiana:

$$R_{x(-\tau)} = R_{x(\tau)}^*$$

- TCF Autocorrelazione:

$$R_{x(\tau)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} S_{x(f)}$$

Posso calcolare la densitá spettrale di energia dall'autocorrelazione.

8 Trasformata Discreta di Fourier

Si definisce Trasformata Discreta di Fourier:

$$x_{[nT]} \xrightleftharpoons[ATDF]{TDF} \overline{X}_{(f)}$$

$$\overline{X}_{(f)} \in \mathbb{C} : \begin{cases} |\overline{X}_{(f)}| \\ \angle \overline{X}_{(f)} \end{cases} \text{ é una funzione periodica di periodo } \frac{1}{T}$$

8.0.1 Equazione di Analisi - TDF

$$\overline{X}_{(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} e^{-j2\pi f n T}$$

8.0.2 Equazione di Sintesi - $ATDF$

$$x_{[nT]} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \overline{X}_{(f)} e^{-j2\pi f n T} df$$

8.0.3 Trasformata di $\delta_{[n]}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(t-nT)} \stackrel{6.7.3}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_{(\frac{k}{T})} e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} \stackrel{\Delta \text{ costante}}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \frac{k}{T} t}$$

$$\Downarrow TCF$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f n T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{(f-\frac{k}{T})}$$

Applicando il ritardo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi (f-\nu) n T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{((f-\nu)-\frac{k}{T})}$$

8.0.4 Relazione tra TCF e TDF

$$\begin{aligned}
\overline{X}_{(f)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} e^{-j2\pi \nu n T} d\nu e^{-j2\pi f n T} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \nu n T} e^{-j2\pi f n T} d\nu \stackrel{8.0.3}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta_{((f-\nu)-\frac{k}{T})} d\nu \\
&\stackrel{6.6.1: \text{parit\acute{a}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(\nu-(f-\frac{k}{T}))} d\nu = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} \delta_{(\nu-(f-\frac{k}{T}))} d\nu \\
&\stackrel{6.6.1: \text{campionatrice}}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}
\end{aligned}$$

quindi la TDF si ottiene periodicizzando la TCF con periodo $\frac{1}{T}$:

$$\overline{X}_{(f)} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}$$

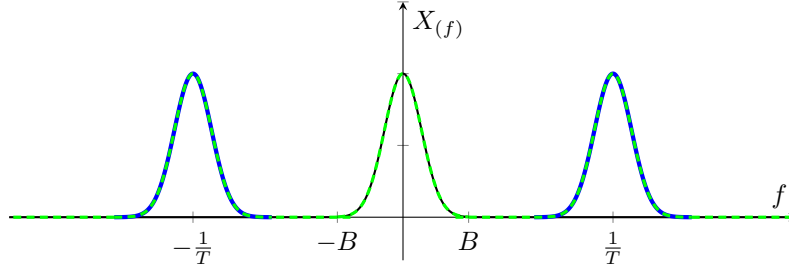


Figure 85: $X_{(f)}$, $X_{(f-\frac{k}{T})}$, $\overline{X}_{(f)}$

8.1 Teorema del Campionamento - Nyquist Shannon

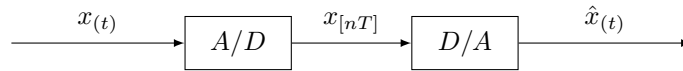


Figure 86: Esempio sistema campionamento e ricostruzione

- A/D: Campionatore, converte da analogico a discreto.
- D/A: interpolatore o filtro p , converte da discreto a analogico.

Il nostro obbiettivo é dimensionare T e l'interpolatore in modo tale da poter ricostruire il segnale \hat{x} : $\hat{x} = x$.

Dimensioniamo l'A/D: Riprendiamo la relazione tra TDF e TCF :

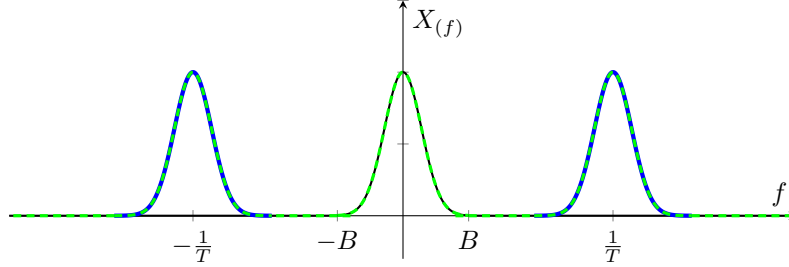


Figure 87: $X(f), X_{(f-\frac{k}{T})}, \bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}$

abbiamo trovato che la TDF non é altro che la periodicizzazione della TCF con periodo $\frac{1}{T}$: se $\frac{1}{T} \geq 2B$ il grafico $X_{(f-\frac{k}{T})}$ sono copie distinte non distorte e periodicizzate di $X(f)$ da cui con un Filtro Passa-Basso 7.4.1 possiamo ricostruire il segnale. Se scegliessi $\frac{1}{T} < 2B$:

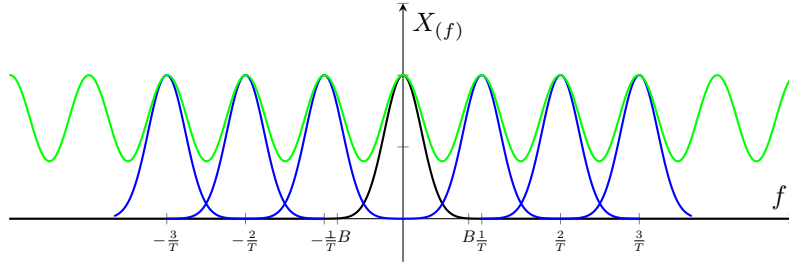


Figure 88: $X(f), X_{(f-\frac{k}{T})}, \bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}$

la sovrapposizione delle copie di $X(f)$ é il fenomeno di Aliasing: la sovrapposizione di segnali che alterano il segnale originale. In entrambi i casi ci troviamo in condizione di un segnale a banda limitata, nel tempo rappresenta un segnale illimitato.

Dimensioniamo il D/A: Partiamo dalla relazione di \hat{x} :

$$\hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} p_{(t-nT)}, \quad p \text{ interpolatore}$$

Il segnale di uscita dal sistema dipende non solo dal periodo di campionamento $\frac{1}{T}$ ma anche dall'interpolatore che utilizziamo:

- Interpolatore a mantenimento: mantiene il valore del segnale $x_{[nT]}$ per un periodo T

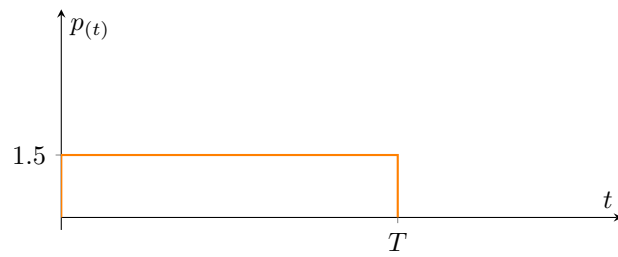


Figure 89: Interpolatore a mantenimento

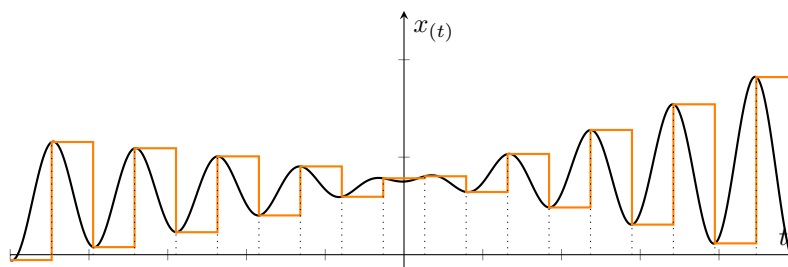


Figure 90: $x(t), \hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]p(t-nT)$

- Interpolatore Lineare: incrementa linearmente il valore di \hat{x} (è corretto la durata T giusto? il prof ha scritto intervallo -T T)

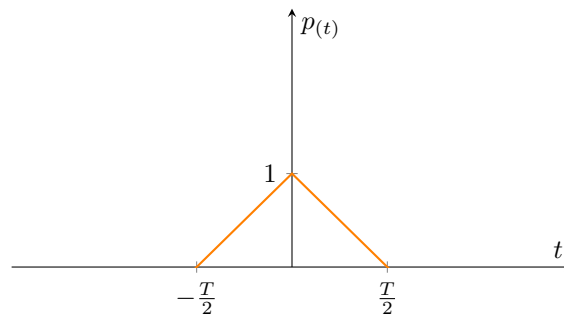


Figure 91: Interpolatore Lineare

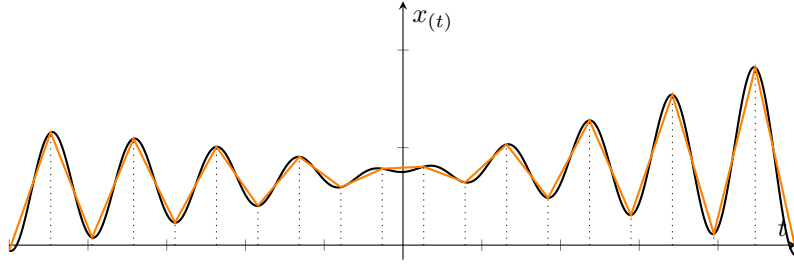


Figure 92: $x(t), \hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]p(t-nT)$

Passiamo alla frequenza:

$$\hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]p(t-nT) \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} \hat{X}_{(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]P_{(f)}e^{-j2\pi fnT}$$

$$\hat{X}_{(f)} = P_{(f)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]e^{-j2\pi fnT} = P_{(f)}\bar{X}_{(f)}$$

$$\text{Se } \hat{x} = x \text{ anche } \hat{X}_{(f)} = X_{(f)}$$

$$\Downarrow 8.0.4$$

$$X_{(f)} \stackrel{!}{=} P_{(f)} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}$$

dobbiamo dimensionare $P_{(f)}$ in modo tale da rendere vera $\hat{X}_{(f)} = X_{(f)}$

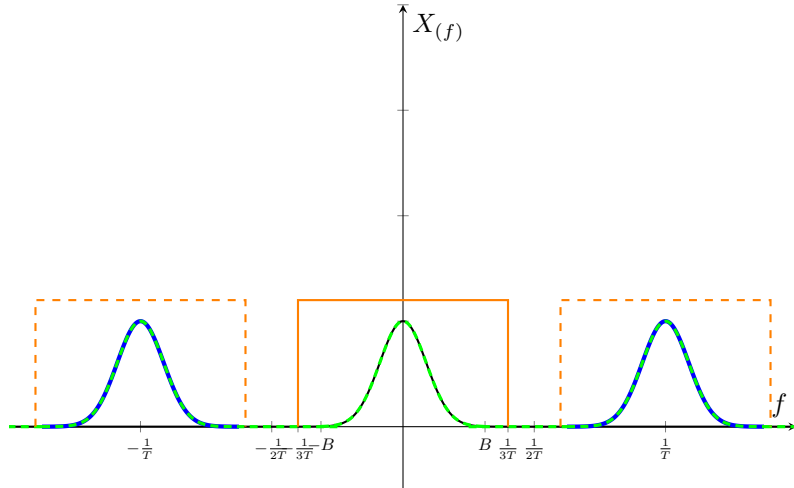


Figure 93: $X_{(f)}, X_{(f-\frac{k}{T})}, P_{(f)}$

Utilizziamo un filtro passa basso che abbia una durata in banda maggiore di $2B$ ma minore di $\frac{1}{2T}$ per lasciarci un pochino di margine e evitare di prendere la copia del segnale successivo/precedente ($2B < T_r \leq \frac{1}{2T_s}$): prendiamo una durata $\frac{1}{2T_s} > 2B$

$$P(f) = T_{\text{rect}}\left(\frac{f}{2\frac{1}{2T}}\right) = T_{\text{rect}}(fT) \stackrel{TCF}{\Leftrightarrow} p(t) = \frac{T}{T} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

D: é giusta la condizione sulla durata? cosi non introduco aliasin da campionamento

Interpolatore a seno cardinale: Si utilizza un interpolatore a seno cardinale

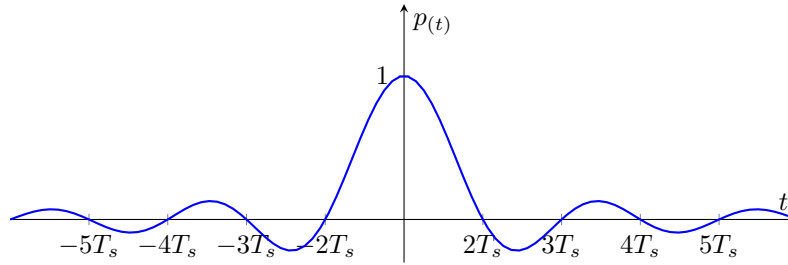


Figure 94: Interpolatore a seno cardinale

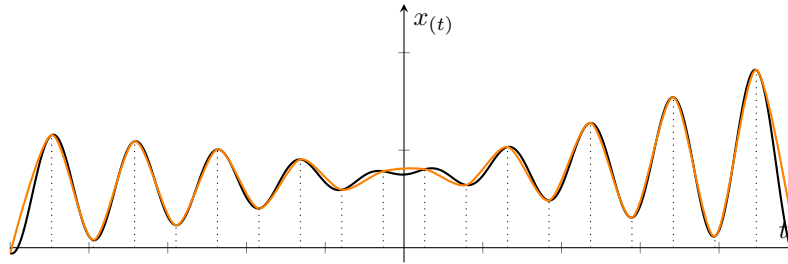


Figure 95: $x(t), \hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]p(t-nT)$

l'interpolatore a seno cardinale non é causale: essendo delle *sinc* a ogni campionamento, non posso conoscere il peso delle *sinc* dei valori della sequenza successivi. Se opero non Real Time (Virtuale), invece ho infiniti campioni a cui posso attingere: Risolvo entrambi i problemi troncando la *sinc* e spostandola a dx, ma per troncarla sto moltiplicando una *sinc* per una *rect* nel tempo, passando alla frequenza la funzione limitata nel tempo diventa illimitata in frequenza andando a influenzare anche le repliche successive.

Teorema del Campionamento: Dato un segnale analogico $x(t)$ la cui banda di frequenze sia limitata e dato $c \in \mathbb{Z}$, il segnale $x(t)$ può essere univocamente ricostruito a partire dai suoi campioni $x_{[nT]}$ presi a frequenza (o periodo) $f_s = \frac{1}{T}$ se $f_s = \frac{1}{T} \geq 2B$ mediante:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} \text{sinc} \left(\frac{t}{T} - n \right)$$

Criticità: (perché la formula sopra è diversa da quelle di wikipedia? la sinc non dovrebbe dipendere da k?)

- Segnale a banda limitata
- Interpolatore dimensionato

Osservazioni: Se utilizzassi un filtro con durata $\frac{1}{T} \gg 2B$ prenderei tantissimi campioni che non servono per ricostruire meglio il segnale: degli esempi di matlab possiamo vedere che ci basta anche solo un periodo uguale a $2B$.

Esempio:

$B = 10\text{KHz}$, $2B = 20\text{KHz}$, Durata filtro = 25KHz ho 5KHz di margine

D: ma quindi la durata del filtro e la frequenza di campionamento sono diverse o uguali?

Esempio: $f_s = \frac{1}{T} = 2B$, $p(t) = \text{sinc}(2Bt)$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} \text{sinc}(2Bt_0 - n)$$

$$\hat{x}(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} \text{sinc}(2Bt_0 - n)$$

$\hat{x}(t_0)$ dipende dal contributo di tutte le *sinc* anche dei valori successivi, per questo si pone il problema del filtro causale.

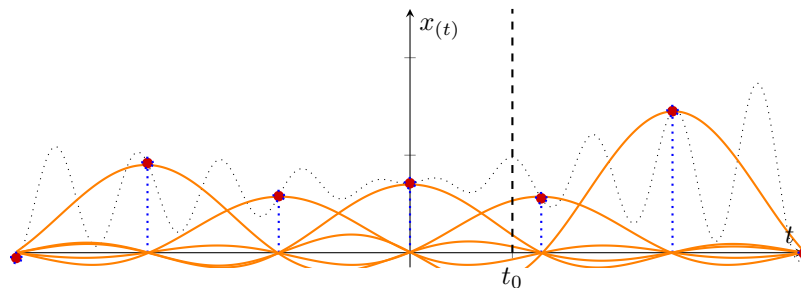


Figure 96: $x(t), \hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} p(t-nT)$

I passi in un sistema A/D/A sono:

- Passo dal tempo in frequenza: $x_{(t)} \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)}$.
- Osservo la banda che occupa il segnale e scelgo B .
- Scelgo una frequenza (periodo) di campionamento f_s e calcolo $x_{[nT]}$.
- Calcolo \hat{x} con un interpolatore a seno cardinale, *sinc*

9 Teoria della Probabilità

10 Teoria Dei Codici

10.1 Introduzione

Ci concentriamo adesso sul trattamento dell'informazione per poterla trasmettere. I messaggi che trasmettiamo possono essere codificati per vari motivi:

- Compressione: $\begin{cases} \text{Lossy: con perdita dell'informazione} \\ \text{Lossless: minima perdita dell'informazione} \end{cases}$
Comprimere l'informazione in eliminando ridondanza e salvando spazio di memoria e banda.
- Crittografia: per nascondere il messaggio ad utenti in ascolto sul canale che non siano il destinatario.
- Rivelazione o correzione di errore: viene aggiunta ridondanza ad hoc per aumentare l'affidabilità del messaggio trasmesso. Si utilizzano **checksum** o **Reed-Solomon(RS)**

Capacità del canale La capacità del canale C indica la massima quantità d'informazione che può essere trasmessa in maniera affidabile su di un dato canale. La capacità dipende dalla banda B del canale e dal rapporto segnale rumore (signal-to-noise ratio, **SNR**):

$$C = B \log(1 + SNR)$$

Canale Gaussiano Il canale Gaussiano può essere modellato come **Binary Symmetric Channel (BSC)** con probabilità di errore p . Assumiamo gli errori tra loro indipendenti ($p_{(a,b)} = p_{(a)} \cdot p_{(b)}$):

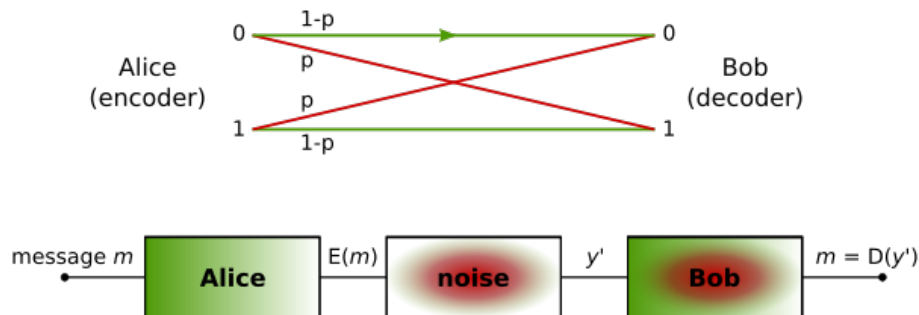


Figure 97: Sistema di trasmissione BSC

$E_{(x)}$: Funzione di codifica
 $D_{(x)}$: Funzione di decodifica
 $E_{(m)}$: Bit dell'informazione codificati
 $y' : E_{(m)} + e \rightarrow$ Informazioni con errore del canale
 $m = D_{(y')}$: Informazione decodificata

Il canale é chiamato simmetrico perché ho la stessa probabilità errore sulla trasmissione di uno dei due bit. Se X é il bit inviato e Y quello ricevuto allora il canale é caratterizzato dalle probabilità:

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0|X = 0) &= 1 - p \\
 P(Y = 0|X = 1) &= p \\
 P(Y = 1|X = 0) &= p \\
 P(Y = 1|X = 1) &= 1 - p
 \end{aligned}$$

Assumiamo che $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, se avessimo $p > \frac{1}{2}$ il ricevitore potrebbe scambiare l'informazione ricevuta (Quando riceve un 1 lo interpreta come 0 e viceversa) e ottenere un canale con probabilità $1 - p \leq \frac{1}{2}$.

Nel corso useremo delle simbologie diverse:

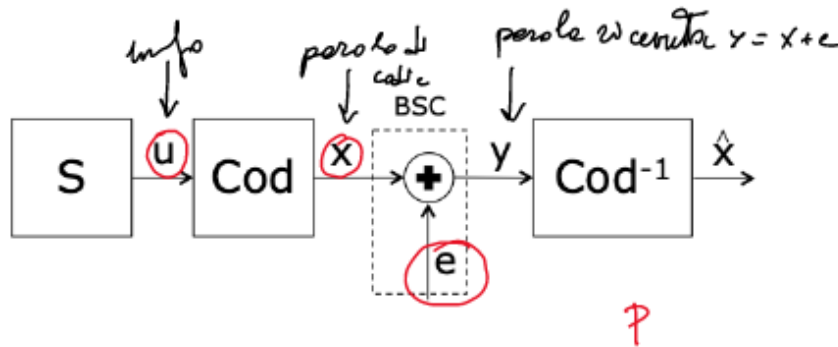


Figure 98: Sistema di trasmissione BSC

u : Informazione
 x : Parole di Codice
 e : Errore del Canale
 $y : x + e \rightarrow$ Informazioni con errore del canale
 \hat{x} : Informazione decodificata

Probabilità di errore BSC La probabilità, per una trasmissione BSC, di sbagliare t bit in una parola di n bit:

$$p_{(t,n)} = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{(n-t)}$$

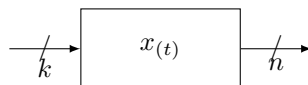
dove il coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

indica tutte le possibili combinazioni di errori di t bit su n bit.

Tassonomia dei codici

- Codici lineari
 - Codici a blocco
 - Codici convoluzionali
- Definizione di un codice a blocco:



Rate del Codice :

$$R = \frac{k}{n}$$

La condizione é che $n > k$ senon fosse cosí avrei perdita d'informazione, da k bit passo a n aggiungendo ridondanza e codificando i miei dati. Possiamo quindi stimare il valore tipico di R

$$R = \frac{k}{n} < 1$$

- Rivelazione di errore: Consiste nella capacità di scoprire la presenza di errori causati dal rumore o da altri fenomeni deterioranti durante una trasmissione di dati (es. tramite il **bit di parità**).
- Correzione di errore: Consiste invece nell'ulteriore abilità di ricostruire i dati originali, eliminando gli errori occorsi durante la trasmissione. Vi sono due differenti schemi di base per la progettazione della codifica di canale e del protocollo per un sistema che corregge gli errori:
 - **Automatic repeat-request (ARQ)**: Il mittente invia i dati ed anche un codice a rilevazione d'errore, che sarà utilizzato in ricezione per individuare gli eventuali errori, ed in tal caso chiedere la ritrasmissione dei dati corrotti. In molti casi la richiesta è implicita; il destinatario invia un acknowledgement (ACK) di corretta ricezione dei dati, ed il mittente re-invia solo quei dati per i quali non ha ricevuto, entro un prefissato tempo limite (timeout), il corrispondente ACK.

- **Forward Error Correction (FEC)**: Il mittente codifica i dati con un codice a correzione d'errore (error correction code, ECC) ed invia il messaggio codificato. Il destinatario non invia mai alcun messaggio verso il mittente; esso decodifica ciò che riceve nella maniera più simile possibile a quella di un certo insieme prefissato di parole accettabili. Tali codici sono realizzati in modo tale che dovrebbe occorrere una quantità "irragionevole" di errori nei dati, affinché il destinatario decodifichi erroneamente, ottenendo finalmente dei dati diversi da quelli effettivamente inviatigli.

In generale un codice a blocco che ha rate $\frac{k}{n}$ mappa k bit su n bit usando 2^k parole di codice di dimensione n

10.1.1 Esempio codici a blocco: codici a ripetizione

É un esempio di codice a correzione d'errore: il funzionamento si basa sulla ripetizione dell'informazione più volte. Il destinatario si accorge di un errore di trasmissione poiché il flusso di dati ricevuto non è la ripetizione di un singolo messaggio e, inoltre, il destinatario può recuperare il messaggio originale guardando il messaggio ricevuto nel flusso di dati che si verifica più spesso.

Nel caso di un codice binario di ripetizione, esistono due parole in codice - tutte uno e tutti zeri - che hanno una lunghezza n . Pertanto, la distanza minima di Hamming (10.2.5) del codice è uguale alla sua lunghezza. Ciò conferisce al codice di ripetizione, con $R = \frac{1}{n}$, una capacità di rivelazione di errori pari a $n - 1$ e correzione degli errori (cioè correggerà fino agli errori in qualsiasi parola del codice) di $\frac{n-1}{2}$ per n dispari (10.1).

Esempio:

$R = \frac{1}{3} \rightarrow$ ha solo 2 parole di codice:

$$u = 0 \rightarrow x = [000]$$

$$u = 1 \rightarrow x = [111]$$

Il ricevitore effettua una decodifica a maggioranza: decide per il bit che compare più volte della parola ricevuta.

$$y = [000] \rightarrow \hat{x} = [000] \rightarrow \hat{u} = 0$$

$$y = [010] \rightarrow \hat{x} = [000] \rightarrow \hat{u} = 0$$

$$y = [101] \rightarrow \hat{x} = [111] \rightarrow \hat{u} = 1$$

Evento errore: l'evento errore per un codice a correzione di errore consiste nel non essere in grado di correggere tutti gli errori introdotti dal canale. Se la probabilità di errore sul bit $p_{e,b}$ è piccola, la probabilità di errore $p_{e,w}$ per il codice può essere approssimata dal primo evento che determina la ricezione errata (nel caso dei codici a ripetizione a $R = \frac{1}{3}$ si verifichino 2 errori).

- $R = \frac{1}{3}$

- Se $p_{e,b} = 0.1 \Rightarrow p_{e,W} \approx 2.7 \cdot 10^{-2}$
 - Se $p_{e,b} = 0.01 \Rightarrow p_{e,W} \approx 2.97 \cdot 10^{-4}$
 - $R = \frac{1}{5}$
 - Se $p_{e,b} = 0.1 \Rightarrow p_{e,W} \approx 8.1 \cdot 10^{-3}$
 - Se $p_{e,b} = 0.01 \Rightarrow p_{e,W} \approx 9.8 \cdot 10^{-6}$, Sviluppiamo i calcoli come esempio:
- $P_r\{\text{codice } R = \frac{1}{5} \text{ non riesce a correggere gli errori introdotti dal canale}\} :$

$$P_r = \sum_{t=3}^5 \binom{5}{t} p^t (1-p)^{5-t}, \quad p = 10^{-2}$$

$$P_r\{3 \text{ errori su } 5\} = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^{5-3} = 10 \cdot 10^{-6} (0.99)^2 = 9.8 \cdot 10^{-6}$$

$$P_r\{3 \text{ errori su } 5\} = \binom{5}{4} p^4 (1-p)^{5-4} = 5 \cdot 10^{-8} (0.99) = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$P_r\{3 \text{ errori su } 5\} = \binom{5}{5} p^5 (1-p)^{5-5} = 1 \cdot 10^{-10} = 10^{-10}$$

10.1.2 Esempio codici a blocco: codici a controllo di parità

Il bit di parità è un codice di controllo d'errore, utilizzato nei calcolatori per prevenire errori nella trasmissione o nella memorizzazione dei dati. Tale codice prevede l'aggiunta di un bit ridondante ai dati, calcolato a seconda che il numero di bit che valgono 1 sia pari o dispari. Ne esistono quindi 2 varietà: bit di parità pari e bit di parità dispari. Quando si usa il bit di parità pari si aggiunge un bit con valore 1 se nella parola inviata il numero di occorrenze di "1" è dispari (portando il numero di occorrenze di "1" a una quantità pari). Quando si usa il bit di parità dispari si aggiunge un bit con valore 1 se nella parola inviata il numero di occorrenze di "1" è pari (portando il numero di occorrenze di "1" a una quantità dispari).

Il codice ha $R = \frac{k}{(k+1)}$: k bit informativi più il bit di parità.

Rilevazione dell'errore: La rilevazione d'errore deriva dalla discordanza del numero di occorrenze di "1", eseguendo lo XOR bit a bit, nel caso del bit di parità pari, se il risultato è 0 non sono avvenuti errori, viceversa se ho un risultato uguale a 1 posso dire che c'è stato uno o una quantità dispari di errori nella trasmissione, questo lo rende solo un codice a rilevazione d'errore e non un codice a correzione d'errore.

Esempio: Trasmetto parole di 11bit con rate $R_b = 10Mb/s$ e probabilità di errore sul bit trasmesso $p_{e,b} = 10^{-8}$:

- Senza controllo di parità é sufficiente che sia sbagliato anche un solo bit per sbagliare tutta la parola:

$$p_{e,W} = \sum_{j=1}^{11} \binom{11}{j} p_{e,b}^j (1 - p_{e,b})^{11-j} = 11p_{e,b}(1 - p_{e,b})^{10} \simeq 11p_{e,b}$$

ed il rate di parole sbagliate al secondo é:

$$R_{e,W} = \frac{R_b}{11} \cdot p_{e,W} \simeq \frac{10^7}{11} \cdot 11p_{e,b} = 0.1 \frac{w}{s}$$

- Aggiungendo un bit di parità, la parola diventa di 12 bit e sbaglio quando faccio almeno 2 errori, il singolo errore viene corretto chiedendo nuovamente la trasmissione del dato:

$$p_{e,W} = \sum_{j=2}^{12} \binom{12}{j} p_{e,b}^j (1 - p_{e,b})^{12-j} = 66p_{e,b}^2(1 - p_{e,b})^{10} \simeq 66p_{e,b}^2$$

ed il rate (frequenza) di parole sbagliate al secondo é:

$$R_{e,W} = \frac{R_b}{12} \cdot p_{e,W} \simeq \frac{10^7}{12} \cdot 66p_{e,b}^2 = 5.5 \cdot 10^{-9} \frac{w}{s}$$

possiamo anche calcolare il periodo $T_{e,W} = \frac{1}{R_{e,W}} = 1.82 \cdot 10^8 s$ che é una parola ogni sei anni circa.

10.1.3 Esempio codici a blocco: codice ISBN

Il codice International Standard Book Number (ISBN) é un codice a controllo di parità per un alfabeto di simboli nonbinari. Ad ogni libro é assegnata una parola di codice di lunghezza $n = 10$ cifre in base decimale. Le prime 9 cifre identificano il libro, la decima é quella di controllo di parità cosí calcolata:

1. Si calcola la grandezza $z = \text{mod}(S, 11)$ con

$$S = \sum_{j=1}^9 (11 - j)x_{(j)}$$

2. La cifra di controllo di arità é il complemento a 11 di z :

$$x_{(10)} = \text{mod}(11 - z, 11)$$

E solo per la cifra di controllo di parità se $x_{(10)} = 10$ si sostituisce con $x_{(10)} = X$

Quando un dispositivo legge il codice lo verifica come segue:

1. Moltiplica ogni cifra per il peso della posizione della stessa cifra e calcola $\text{mod}(S', 11)$ con

$$S' = \sum_{j=1}^{10} (11-j)y_{(j)}$$

2. Assumendo che non ci siano errori su $x_{(10)} = |11 - z|_{11}$, si ha:

$$\begin{aligned} \text{mod}(S', 11) &= \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (11-j)y_{(j)} + \text{mod}(11-z, 11), 11\right) \\ &= \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (11-j)y_{(j)} + \left(11 - \sum_{j=1}^9 (11-j)x_{(j)}\right), 11\right) \\ &= \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (11-j)(y_{(j)} - x_{(j)}), 11\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Se non ci sono errori si ha $y = x$ e quindi il $\text{mod}(S', 11) = 0$

Rivalazione degli errori: Il codice é in grado di rivelare tutti i singoli errori: sia $e_{(k)}$ l'errore in posizione $k, y_{(k)} = x_{(k)} + e_{(k)}$:

$$\text{mod}(S', 11) = \text{mod}((y_{(k)} - x_{(k)})(11-k), 11) + \text{mod}(e_{(k)}(11-k), 11) \neq 0$$

Il codice é in grado di rivelare tutti i casi in cui ci sia uno scambio di 2 cifre del codice. Siano k_1 e k_2 le 2 posizioni scambiate:

$$\begin{aligned} \text{mod}(S', 11) &= \text{mod}((y_{(k_1)} - x_{(k_1)})(11-k_1) + (y_{(k_2)} - x_{(k_2)})(11-k_2), 11) \\ &= \text{mod}((x_{(k_2)} - x_{(k_1)})(11-k_1) + (x_{(k_1)} - x_{(k_2)})(11-k_2), 11) \\ &= \text{mod}((x_{(k_2)} - x_{(k_1)})(k_2 - k_1), 11) \neq 0 \end{aligned}$$

Esempi:

- Senza errore:

$$ISBN = 01 - 333 - 5485 - 7$$

$$|S'|_{11} = 0 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1$$

$$|S'|_{11} = |154|_{11} = 0$$

Il codice é corretto

- Con errore: Scambio le cifre

$$ISBN = 01 - 333 - 5458 - 7$$

$$|S'|_{11} = 0 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 1$$

$$|S'|_{11} = |151|_{11} = 8 \neq 0$$

Il codice non é corretto

10.2 Codici a blocco

10.2.1 Introduzione ai codici lineari

Campo: un campo é una struttura composta da un insieme non vuoto F e da due operazioni binarie interne: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in F$:

- Somma (XOR):

–

$$\alpha + \beta = \theta, \theta \in F$$

- Associativa:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

- Commutativa:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

- Elemento Neutro:

$$0 \in F, \alpha + 0 = \alpha, \alpha - \alpha = 0$$

- Prodotto (AND):

–

$$\alpha \cdot \beta = \theta, \theta \in F$$

- Associativa:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

- Commutativa:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

- Distributiva:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

- Elemento Neutro:

$$1 \in F, \alpha \cdot 1 = \alpha, \forall \alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$$

10.2.2 Campi di Galois

Un campo finito, detto anche campo di Galois, é un campo con un numero finito q di elementi. Il numero di elementi q definisce la categoria del campo: $GF(2)$ é il campo definito su $\{0, 1\}$ con somma modulo 2 (XOR) e prodotto modulo 2 (AND). Definito lo spazio $GF(2)$ si può costruire lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_n = GF(2)^n$, lo spazio di tutti i possibili 2^n vettori di n cifre binarie su cui valgono le operazioni definite per $GF(2)$.

10.2.3 Codici a blocco lineari su $GF(2)$

Sia $u = [u_1, \dots, u_k]$ una generica parola di k cifre binarie. Il codice a blocco lineare $\mathcal{C}(k, n) \subset \mathcal{V}_n$ é l'insieme delle 2^k parole $x = [x_1, \dots, x_n]$ di n cifre binarie ottenute con la trasformazione lineare:

$$x = uG$$

Dove G é la matrice generatrice del codice e ha dimensione $k \times n$ di cifre binarie con $n > k$ poiché al massimo aggiungo informazioni per la trasmissione, per la correzione o rivelazione d'errore.

Siano $g_i, i = [1, \dots, k]$, le righe di G , x é la combinazione lineare delle righe g_i :

$$x = \sum_{i=1}^k u_i g_i$$

Per avere 2^k parole di codice distinte é necessario che G abbia rango k : le righe di G devono essere linearmente indipendenti e costituiscono una *base* per il sottospazio vettoriale $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}_n$.

10.2.4 Proprietá dei codici a blocco lineari

Le proprietá derivano maggiormente dalla proprietá di linearitá dei codici:

- Ogni parola di codice é una combinazione lineare di righe della matrice generatrice.
- Il codice a blocchi é costituito da tutte le possibili combinazioni delle righe della matrice generatrice.
- La somma di due parole di codice é ancora una parola di codice.
- La $n - \text{upla}$ di tutti zeri é sempre una parola di codice.
- Se x é una parola di codice, anche $-x$ é una parola di codice.

10.2.5 Distanza di Hamming

La distanza di Hamming tra due vettori, o stringhe, $d(x_1, x_2)$ di n elementi é il numero di posizioni in cui le due parole sono diverse tra loro. Esempi:

- La distanza di Hamming tra 1011101 e 1001001 é 2.
- La distanza di Hamming tra 2143896 e 2233796 é 3.

Peso di Hamming: Il peso di Hamming, $w(x)$, di una stringa di lunghezza n é la sua distanza di Hamming dal vettore di n zeri, $x_0 \in \mathcal{V}_n$ é:

$$w(x_0) = d(x_0, 0_n)$$

Distanza minima: La distanza minima di un codice \mathcal{C} é la minima distanza di Hamming calcolata fra tutte le possibili parole che appartengono a \mathcal{C} .

$$d_{min}(\mathcal{C}) = \min_{x_1, x_2 \in \mathcal{C}} d(x_1, x_2)$$

Per i codici lineari vale che ciascuna parola di codice ha lo stesso insieme di distanze dalle altre parole di codice. La distanza minima di un codice si può calcolare a partire da qualsiasi parola di codice. La distanza di Hamming é una metrica:

-
-
-
-

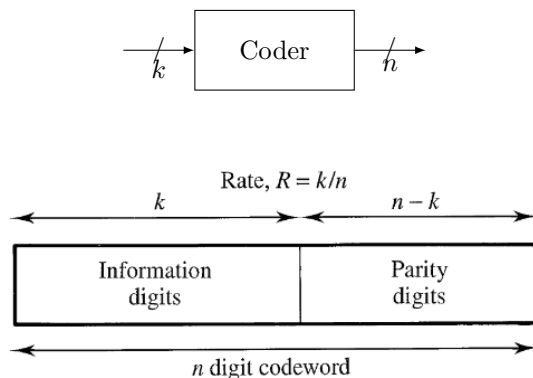
10.2.6 Codici a blocco in forma sistematica

Quando il codice é in forma sistematica la matrice generatrice del codice ha la seguente forma:

$$G = [I_k, P]$$

$$G \in k \times n, \quad I \in k \times k, \quad P \in k \times (n - k)$$

dove la matrice P é la matrice di parità, il suo contenuto dipende da quale algoritmo di parità viene scelto.



Esempio Codice a ripetizione: $R = \frac{1}{3}, \quad k = 1, \quad n = 3$

Bit i ingresso	Parola codificata
0	[000]
1	[111]

La matrice generatrice del codice é $G = [111]$, e la distanza minima $d_{min} = 3$

Esempio Codice a controllo di parità: $R = \frac{7}{8}$, $k = 7$, $n = 8$, ogni 7 bit ne aggiunge uno di controllo di parità, 1 se il numero di "1" é dispari, 0 se il numero di "1" é pari.

La matrice generatrice del codice:

$$G = [I_7, 1_7]$$

La distanza minima é $d_{min} = 2$, se cambio uno dei 7 bit della parola cambio automaticamente il bit di parità, quindi cambiare 1 bit in realtà ne cambia 2.

Il prodotto $u \cdot 1_7 = \sum_{i=1}^7 u_i$, può essere scritto come una somma modulo 2, vale 0 se il numero di occorrenze di "1" é pari e 1 altrimenti. Non facciamo altro che calcolare il bit di parità della parola u .

Definizione: Due codici lineari $\mathcal{C}_1(k, n)$ e $\mathcal{C}_2(k, n)$ in $GF(2)$ sono equivalenti se uno é ottenuto dall'altro attraverso una permutazione delle posizioni del codice.

Teorema: Due matrici generatrici G_1 e G_2 in $GF(2)$ generano due codici equivalenti se una può essere ottenuta dall'altra da una sequenza di operazioni come:

- Permutazione delle righe.
- Combinazione lineare delle righe.
- Permutazione delle colonne.

Teorema: Qualsiasi codice lineare a blocchi é equivalente ad un codice in forma sistematica.

Proprietá degli spazi:

- Dato il sottospazio $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}_n$ di dimensione k , esiste un sottospazio ortogonale (null space) $\mathcal{C}^\perp \subset \mathcal{V}_n$ di dimensione $n - k$ definito da una matrice $H \in (n - k) \times n$:

$$GH^T = 0_{n-k}$$

- La base di \mathcal{C}^\perp é costituita dalle $n - k$ righe della matrice H , per cui ogni elemento $t \in \mathcal{C}^\perp$ può essere rappresentato:

$$t = vH = \sum_{i=1}^{n-k} v_i h_i$$

- Per ogni $x \in \mathcal{C}$ e per ogni $t \in \mathcal{C}^\perp$ si ha:

$$xt^T = uGH^T v^T = 0$$

10.2.7 Matrice di controllo di parità

La matrice H é la matrice di controllo di parità del codice. Per costruzione $\forall x \in \mathcal{C}$ vale:

$$xH^T = uGH^T = 0$$

$$H \in (n - k) \times n$$

La matrice H non é unica, ma se il codice é sistematico posso ricavarla in un'altra forma:

$$H = [P^T, I_{n-k}] = 0$$

$$H \in (n - k) \times n, I \in (n - k) \times (n - k), P^T \in (n - k) \times k$$

Se fosse $\neq 0$ ciò che é stato ricevuto non é una parola di codice.

Esempio codice a ripetizione e controllo di parità: $R = \frac{1}{3}$, $k = 1$, $n = 3$, $n - k = 2$ ho la matrice a controllo di parità:

$$H = [P^T, I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per un codice con $R = \frac{7}{8}$, $k = 7$, $n = 8$, $n - k = 1$ la matrice a controllo di parità:

$$H = [P^T, I_1] = 1_8^T$$

10.2.8 Proprietà dei codici a blocco

Teorema: La distanza minima del codice a blocco $\mathcal{C}(k, n)$ si può calcolare come il peso di Hamming minimo tra tutte le parole di codice:

$$d_{min}(\mathcal{C}) = \min_{x_i, x_j \in \mathcal{C}} d_H(x_i, x_j) = \min_{x_i, x_j \in \mathcal{C}} d_H(x_i + x_j, x_j + x_j)$$

$$= \min_{x_i, x_j \in \mathcal{C}} d_H(x_i + x_j, 0_{1,n}) \stackrel{[x_i + x_j \in \mathcal{C}]}{\Rightarrow} \min_{x_i \in \mathcal{C}} w(x_i)$$

Capacità di rivelare errori (Error Detection): Su un canale BSC senza memoria (??), la $n - upla$ y a valle del decisore può essere rappresentata:

$$y = x + e$$

Dove e é il vettore di errori introdotto dal canale, se il canale non introduce errori: $e = 0_{1,n}$. Sia x la parola di codice trasmessa e $y = x + e$ la corrispondente sequenza di n bit ricevuta. supponiamo che il canale introduca un numero di errori: $w(e) > 0$, si dice:

- Errore Rivelabile: se y non é una parola di codice, $y \notin \mathcal{C}(k, n)$
- Errore Non Rivelabile: se y é una parola di codice ma non quella trasmessa, $w(e) \geq d_{min}$

Teorema: Il codice $\mathcal{C}(k, n)$ é in grado di rivelare con certezza fino a $d_{min} - 1$ errori.

- Se $d(x, y) < d_{min}$: y non può essere una parola di codice, altrimenti vorrebbe dire che esistono due parole di codice la cui distanza é minore di d_{min} .
- Se $d(x, y) = d_{min}$: esiste almeno una parola di codice $c \in \mathcal{C}(k, n)$, $c \neq x$ tale che $d(x, c) = d_{min}$, se $y = c$ l'errore non può essere rivelato.

Strategia di decodifica a massima verosomiglianza: Sia y il vettore ricevuto a seguito della trasmissione su BSC , la strategia di decodifica a massima verosomiglianza (ML, maximum likelihood) consiste nel trovare il vettore \hat{x} che, tra tutte le 2^k possibili parole di codice x , massimizza la probabilità condizionata $P(y|x)$:

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathcal{C}} P(y|x)$$

Poiché gli eventi di errore sono indipendenti da bit a bit, posso riscrivere la probabilità condizionata come il prodotto delle probabilità condizionate ottenute per ciascun bit trasmesso:

$$P(y|x) = \prod_{\ell=1}^n P(y_\ell|x_\ell)$$

Lavorando in $GF(2)$ la probabilità $P(y_\ell|x_\ell)$ può assumere solo 2 valori:

$$P(y_\ell|x_\ell) = \begin{cases} 1-p & \text{se } P(y_\ell = x_\ell|x_\ell) \\ p & \text{se } P(y_\ell \neq x_\ell|x_\ell) \end{cases}$$

Osservazione: La distanza di Hamming $d_H(x, y)$ misura il numero di posizioni diverse tra x e y , quindi $n - d_H(x, y)$ misura il numero di posizioni uguali tra x e y .

La probabilità $P(y|x)$ si calcola:

$$P(y|x) = p^{d_H(x,y)}(1-p)^{n-d_H(x,y)} = (1-p)^n \left(\frac{p}{1-p} \right)^{d_H(x,y)}$$

Mi interessa scegliere un x che massimizza $\left(\frac{p}{1-p} \right)^{d_H(x,y)}$, é un valore < 1 :

- RICONtROLLA LEIZONE Se ho la $d_H(x, y)$ piccola ho la probabilità minore di errore.
- Se ho la $d_H(x, y)$ alta ho la probabilità di errore alta.

Decisione a massima verosomiglianza: La parola di codice decisa \hat{x} é quella che minimizza la distanza dalla parola y ricevuta:

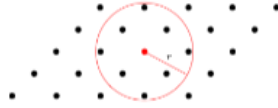
$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathcal{C}} P(y|x) = \arg \min_{x \in \mathcal{C}} d_H(y, x)$$

Scelgo x tale che mi dia la minima distanza ma RICONtROLLA LEIZONE

Ricevitore ML ottimo: Il ricevitore ML ottimo é il ricevitore a distanza minima, il ricevitore che associa alla sequenza di n bit ricevuta y , la parola di codice x che minimizza la $d_H(y, x)$.

Ricevitore ML error correction: Il ricevitore ML é in grado di correggere con successo tutti quegli errori e per cui la parola ricevuta $y = x + e$ é comunque piú vicina alla parola trasmessa x che a qualsiasi altra parola del codice.

Per ogni vettore $v \in \mathcal{V}_n$ e un raggio r esiste una "sfera" di raggio r i cui elementi sono tutti quei vettori in \mathcal{V}_n che hanno distanza di Hamming da v minore o uguale a r



Se adottiamo un ricevitore ML, il numero massimo di errori che il codice $\mathcal{C}(k, n)$ é in grado di correggere é il massimo raggio t per cui le sfere centrate nelle parole di codice di $\mathcal{C}(k, n)$ sono tutte tra loro disgiunte.

Capacità di correggere errori (Error Correction):

Teorema: Un codice lineare a blocco può correggere fino a $t_{max} = \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$ errori: $2t_{max} + 1 \leq d_{min} \leq 2t_{max} + 2$.

La condizione per cui le sfere di raggio t che circondano le parole di codice siano disgiunte é che $2t_{max} < d_{min} \Rightarrow t_{max} < \frac{d_{min}}{2}$. Altrimenti se fosse $2t_{max} \geq d_{min}$ ci sarebbero almeno due parole x_1 e x_2 la cui distanza $d_H(x_1, x_2) = d_{min} < 2t_{max}$ e le due sfere di raggio t avrebbero almeno un punto in comune.

Consideriamo il codice $\mathcal{C}(k, n)$ che ha una certa d_{min} e t_{max} tale che $2t_{max} + 1 \leq d_{min}$. Sia $x \in \mathcal{C}(k, n)$ la parola trasmessa, $y = x + e$ la corrispondente sequenza di n bit ricevuta e $c \in \mathcal{C}(k, n)$ un'altra generica parola di codice. Grazie alla disuguaglianza triangolare ho:

$$d_H(x, y) + d_H(c, y) \geq d_H(x, c) \Rightarrow d_H(c, y) \leq d_H(x, c) - d_H(x, y)$$

per ipotesi ho anche:

$$d_H(x, c) \geq d_{min} \geq 2t_{max} + 1$$

Supponiamo che il canale introduca un certo numero di errori $t \leq t_{max}$, così da avere $d_H(x, y) = t$:

$$d_H(c, y) \geq 2t_{max} + 1 - t > t_{max} \geq t = d_H(x, y)$$

10.3 Codici di Hamming

I codici di Hamming $\mathcal{C}_H(m)$ sono definiti a partire da un parametro: $m \geq 2$

$$n = 2^m - 1, \quad k = 2^m - m - 1 = n - m$$

Matrice di controllo di parità: per definizione la matrice $H \in (n-k) \times n$, ma per i codici di Hamming la matrice H ha dimensione: $H \in m \times (2^m - 1)$.

Matrice di parità: Per un codice di Hamming sistematico la matrice di parità $P \in k \times m$ viene costruita così che le colonne di $H = [P^T, I_{n-k}]$ siano tutte le possibili $2^m - 1$ combinazioni di m bit (esclusa la $n - \text{upla}$ di tutti 0)

10.3.1 Il codice $\mathcal{C}_H(2)$

Il codice a ripetizione $R = \frac{1}{3}$ con $m = 2 \Rightarrow n = 3, k = 1$ ha come matrice di controllo di parità H :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Che é la matrice corrispondente a un codice di Hamming $\mathcal{C}_H(2)$, poiché rappresenta tutte le possibili combinazioni di 2 bit

10.3.2 Il codice $\mathcal{C}_H(3)$

$$m = 3, \quad n = 7, \quad k = 4, \quad R = \frac{4}{7}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Posso ricavare la matrice generatrice G scrivendo la matrice H come se l'avessi ottenuta da una matrice $G \in k \times n$ di un codice sistematico (10.2.7):

$$H = [P^T, I_{n-k}] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La cui matrice generatrice con $I \in k \times k$ é:

$$G = [I_k, P] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Possiamo vedere come la matrice di parità faccia controlli su combinazioni diverse di bit in ingresso $p = uP$:

$$\begin{aligned}p_1 &= u_1 + u_2 + u_4 \\p_2 &= u_1 + u_3 + u_4 \\p_3 &= u_2 + u_3 + u_4\end{aligned}$$

Il vettore di uscita dal codificatore sarà quindi $x = uG = [u, p_1, p_2, p_3]$, tale matrice di parità ci permette di aumentare la distanza di Hamming tra le parole

Distanza minima: La distanza minima di un qualsiasi codice di Hamming $\mathcal{C}_H(m)$ è $d_{min}(\mathcal{C}_H(m)) = 3$.
Dimostrazione:

1. $d_{min} = \min_{x \in \mathcal{C}} w(x)$
2. $x \in \mathcal{C}$ se $xH^T = 0$ e le colonne di H sono tutte le possibili combinazioni dei bit m bit

Perché 3 è il numero minimo di colonne che mi permette di ottenere 0 (2), quindi $d_{min}(\mathcal{C}_H(m)) = 3$.

10.4 Decodifica per codici a blocco

Dato il vettore ricevuto:

$$y = x + e$$

Il decisore ottimo seleziona la parola di codice \hat{x} :

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathcal{C}} P(y|x) = \arg \min_{x \in \mathcal{C}} d_H(y, x)$$

Per ottenere \hat{x} è necessario fare 2^k confronti tra il vettore ricevuto y e tutte le parole di codice $\mathcal{C}(k, n)$, la complessità cresce esponenzialmente con k .

Un approccio alternativo è quello di osservare il vettore errore e la probabilità condizionata:

$$\begin{aligned}y = x + e &\Rightarrow x = y + e, \quad e = y - x \\P(x|y) &= P(x + e|x) = P(e|y + e \in \mathcal{C})\end{aligned}$$

Posso ottenere la stima di x come:

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathcal{C}} P(y|x) = y + \arg \max_e P(e|y + e \in \mathcal{C})$$

Invece di stimare \hat{x} si stima il vettore \hat{e} più probabile

$$\begin{aligned}\hat{e} &= \arg \max_e P(e|y + e \in \mathcal{C}) = \arg \max_{e|y+e \in \mathcal{C}} p^{w(e)}(1-p)^{n-w(e)} \\&= \arg \max_{e|y+e \in \mathcal{C}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-w(e)} = \arg \min_{e|y+e \in \mathcal{C}} w(e)\end{aligned}$$

La decodifica sceglie tra tutti i possibili vettori errore e tali che $y + e \in \mathcal{C}$ quello che ha il peso di Hamming minimo, cioè il minimo numero di errori (Massima Verosomiglianza). Una volta stimato \hat{e} :

$$\hat{x} = y - \hat{e} = y + \hat{e} = x + (\hat{e} + e) = \begin{cases} x & \text{se } \hat{e} = e \\ x_1 \neq x & \text{se } \hat{e} \neq e \end{cases}$$

10.4.1 Coset

Sia $\mathcal{C}(k, n)$ un codice a blocco e sia $v \in \mathcal{V}_n$ un vettore di n cifre binarie, si definisce *coset* di $\mathcal{C}(k, n)$ individuato da v l'insieme:

$$C_v = C + v = \{x + v : x \in \mathcal{C}\}$$

10.4.2 Proprietá dei coset

1. Qualsiasi vettore in \mathcal{V}_n appartiene a un coset di $\mathcal{C}(k, n)$
2. Ciascun coset contiene 2^k elementi
3. Due coset o sono coincidenti o hanno intersezione nulla
4. Ci sono 2^{n-k} coset distinti
5. Se v_1 e v_2 appartengono all'ostesso coset, $v_1 + v_2 \in \mathcal{C}(k, n)$ é una parola di codice

Esempio di coset: Sia $\mathcal{C}(2, 3) = \{000, 101, 010, 111\}$. I coset di $\mathcal{C}(2, 3)$:

$$\mathcal{C} + 000 = \{000, 101, 010, 111\} = \mathcal{C}_0 \quad (1)$$

$$\mathcal{C} + 001 = \{001, 100, 011, 110\} = \mathcal{C}_1 \quad (2)$$

$$\mathcal{C} + 010 = \{010, 111, 000, 101\} = \mathcal{C}_0 \quad (3)$$

$$\mathcal{C} + 011 = \{011, 110, 001, 100\} = \mathcal{C}_1 \quad (4)$$

$$\mathcal{C} + 100 = \{100, 001, 110, 011\} = \mathcal{C}_1 \quad (5)$$

$$\mathcal{C} + 101 = \{101, 000, 111, 010\} = \mathcal{C}_0 \quad (6)$$

$$\mathcal{C} + 110 = \{110, 011, 100, 001\} = \mathcal{C}_1 \quad (7)$$

$$\mathcal{C} + 111 = \{111, 010, 101, 000\} = \mathcal{C}_0 \quad (8)$$

Il numero di coset é $2^{n-k} = 2^{3-2} = 2$.

Si possono applicare i coset per la decodifica: $y = x + e$ dalla definizione di coset discende che i vettori e e y appartengono allo stesso coset \mathcal{C}_y e che i coset \mathcal{C}_e e \mathcal{C}_x sono coincidenti. Grazie alla proprietá dei coset la somma di qualsiasi elemento di \mathcal{C}_y con y individua una parola di codice. Il vettore e va scelto fra gli elementi di \mathcal{C}_y , la regola di decisione diveta:

$$\hat{e} = \arg \max_e P(e|y + e \in \mathcal{C}) = \arg \max_{e \in \mathcal{C}_y} P(e) = \arg \max_{v \in \mathcal{C}_y} w(v)$$

Tra tutti i 2^k possibili vettori di \mathcal{C}_y , il principio di massima verosomiglianza dice che devo scegliere quello di peso minimo.

10.4.3 Algoritmo di decodifica

1. Avendo ricevuto il vettore y si trova un coset di appartenenza \mathcal{C}_y .
2. Si identifica il coset leader, la parola di peso minimo del coset \mathcal{C}_y , che é anche la parola di peso minimo del coset di \mathcal{C}_e .
3. Il coset leader é la stima del vettore di errore \hat{e}

Esempio di decodifica utilizzando i coset: Sia $\mathcal{C}(2, 4) = \{0000, 1011, 0101, 1110\}$ con $d_{min} = 2$, ho i coset:

$$\mathcal{C} + 0000 = \{0000, 1011, 0101, 1110\} \quad (1)$$

$$\mathcal{C} + 0001 = \{0001, 1010, 0100, 1111\} \quad (2)$$

$$\mathcal{C} + 0010 = \{0010, 1001, 0111, 1100\} \quad (3)$$

$$\mathcal{C} + 1000 = \{1000, 0011, 1101, 0110\} \quad (4)$$

Il numero di coset é $2^{n-k} = 2^{4-2} = 4$. Il coset (2) non so quale coset leader scegliere hanno lo stesso peso di Hamming, ci troviamo in questo poiché la d_{min} é molto bassa e ho il 50% di possibilità di sbagliare se il codice ricevuto capita in questo coset. Decodifichiamo:

- $y = [1101] \Rightarrow y \in (4)$, coset leader: $[1000]$ $\hat{x} = y + 1000 = 0101$
- $y = [1111] \Rightarrow y \in (2)$, coset leader: $[0001] \vee [0100]$ $\hat{x} = y + 0001 = 1110$

10.4.4 Decodifica mediante sindrome

Si definisce sindrome di y il vettore s ottenuto dal prodotto di y con la matrice di controllo di parità:

$$s = yH^T = (x + e)H^T = xH^T + eH^T = eH^T$$

Propietá:

- Tutti i membri di uno stesso coset hanno la stessa sindrome
- $s \in 1 \times (n - k)$
- Le 2^{n-k} sindromi sono associate ai $2^n - k$ diversi coset del codice $\mathcal{C}(k, n)$
- Ciascuna sindrome é associata ai 2^k pattern di errore appartenenti allo stesso coset.

Procedura di decodifica:

1. Calcola la sindrome $s = yH^T$
2. Associa la sindrome al coset leader corrispondente $s \rightarrow e_{CL}(s)$
3. Corregge l'errore sommando il coset leader alla $n - upla$ y

La parola \hat{x} é una parola di codice:

$$\hat{x}H^T = (y + e_{CL}(s))H^T = s + s = 0$$

e per costruzione la parola di codice \hat{x} minimizza la distanza di Hamming da y

10.4.5 Decodifica a sindrome: Codici di Hamming $m = 3$

Il codice ha $d_{min} = 3$ ed é in grado di correggere esattamente un errore: $t_{max} = \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor = 1$. Si sceglie la matrice H in maniera che la tabella di decodifica associ alla sindrome il pattern di errore a peso 1 in cui il bit messo a 1 sia nella posizione corrispondente alla conversione della sindrome in decimale.

Sindrome	Coset Leader
[000]	[0000000]
[100]	[1000000]
[010]	[0100000]
[110]	[0010000]
[001]	[0001000]
[101]	[0000100]
[011]	[0000010]
[111]	[0000001]

(a) Codice non sistematico

Sindrome	Coset Leader
[000]	[0000000]
[100]	[0000100]
[010]	[0000010]
[110]	[1000000]
[001]	[0000001]
[101]	[0100000]
[011]	[0010000]
[111]	[0001000]

(b) Codice sistematico

10.4.6 Esempio di decodifica

Un codice lineare a blocchi ha la seguente matrice di controllo di parità:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determinare la matrice generatrice:
2. Decodificare la parola $y = [110110]$ ed identificare la parola di codice trasmessa:

11 Formulario

11.1 Trigonometria

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3. $\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4. $\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ È un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi$:
 $k \in \mathbb{Z}$

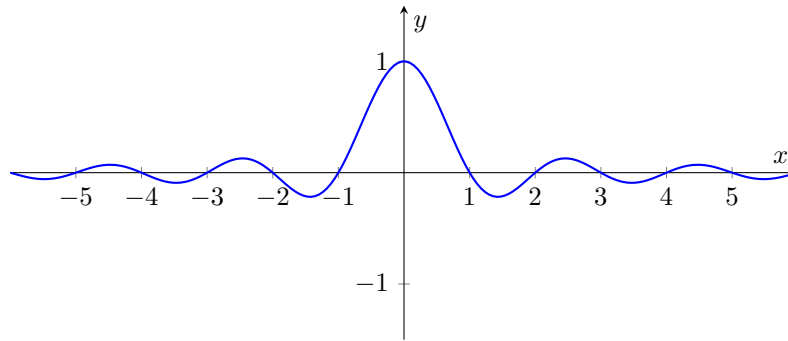


Figure 99: grafico $\text{sinc}(\alpha)$

11.1.1 Formule di addizione

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

11.1.2 Formule di duplicazione

1. $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2 \sin^2(\alpha) \end{cases}$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

11.1.3 Formule di bisezione

$$1. \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$2. \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$3. \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$$

11.2 Segnali Notevoli

$$1. x_R \triangleq A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad T = \text{durata}$$

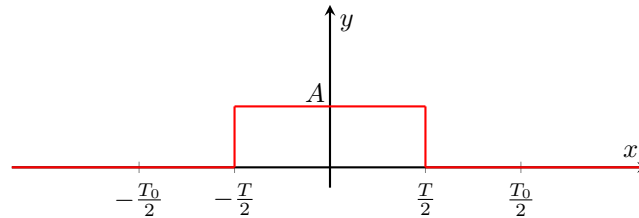


Figure 100: Rappresentazione di $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$2. \operatorname{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

È un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi : k \in \mathbb{Z}$

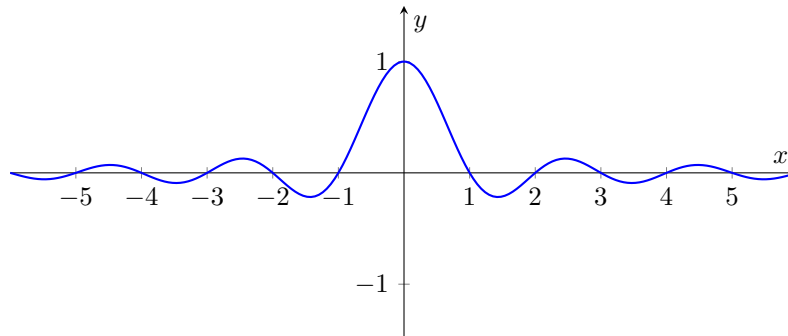


Figure 101: grafico $\operatorname{sinc}(\alpha)$

La banda di una sinc è l'intervallo in cui si annulla $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$, es: se $\text{banda} = 1$ se $T = 1$

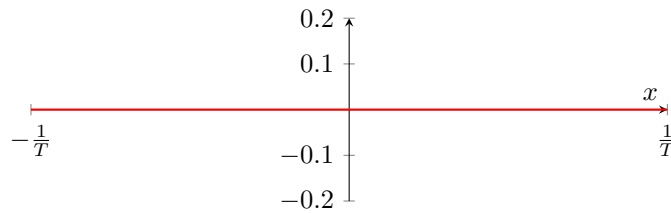


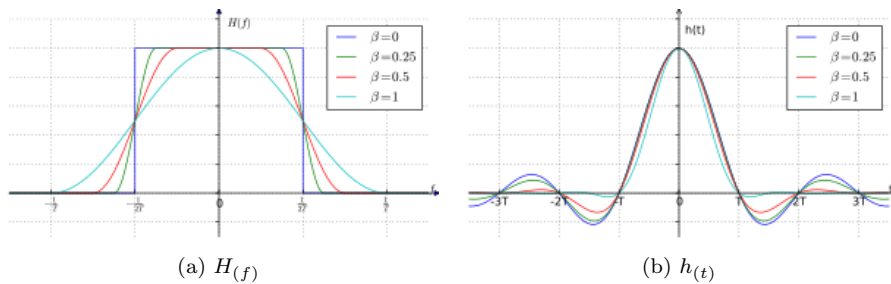
Figure 102: banda

3. Filtro a Coseno Rialzato

$$H(f) = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi T}{\beta} \left[|f| - \frac{1-\beta}{2T} \right] \right) \right], \frac{1-\beta}{2T} < |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$0 \leq \beta \leq 1$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \operatorname{sinc} \left(\frac{1}{2\beta} \right) & t = \pm \frac{T}{2\beta} \\ \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{T} \right) \frac{\cos \left(\frac{\pi \beta t}{T} \right)}{1 - \left(\frac{2\beta t}{T} \right)^2} & \text{altrove} \end{cases}$$



4.

11.3 Grandezze Fisiche

- Hertz

11.4 Varie

- Calcolo della TCF su MATLAB:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

MATLAB calcola un'approssimazione dell'integrale della TCF con un periodo T :

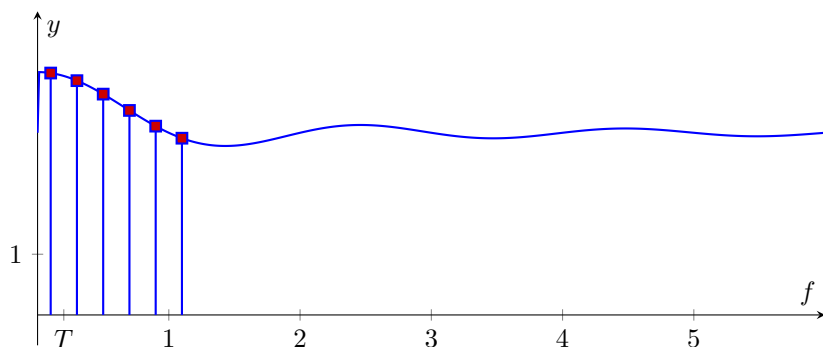


Figure 103: Campionamento MATLAB

$$X_{(f)} \cong T \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi f nT}$$

Ma nella f é una variabile continua, quindi a sua volta bisogna variare f :

$$X_{(fk)} = X_{(k\Delta f)} = \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi \Delta f nT} T$$

e la condizione sul Δf é che $\Delta f \ll BB$.

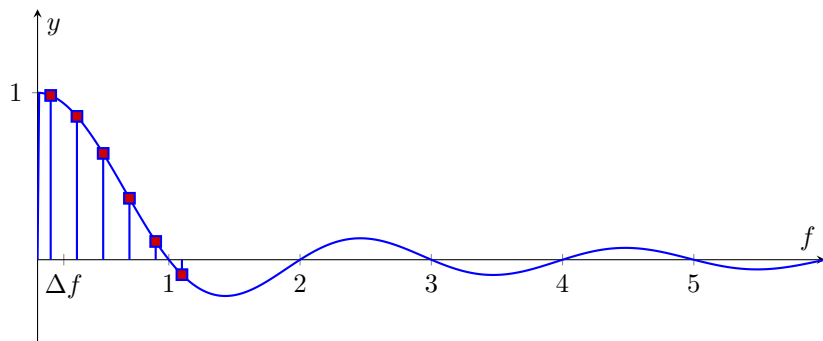


Figure 104: Δf

Si può utilizzare anche la FFT = Fast Fourier Transform

- Scala Logarimica: $x|_{db} = 10\log_{10}(x)$

x	db
2	3
4	6
8	9
10	10
1	0
100	20
200	23
50	17

Possiamo calcolare :

- $100|_{db} = 10\log_{10}(100) = 10\log_{10}(10 \cdot 10) = 10\log_{10}(10) + 10\log_{10}(10) = 20db$
- $200|_{db} = 10\log_{10}(100 \cdot 2) = 10\log_{10}(100) + 10\log_{10}(2) = 23db$
- $50|_{db} = 10\log_{10}(10 \cdot 5) = 10\log_{10}(10) + 10\log_{10}(5) = 17db$

Indice Alfabetico

Assoluta integrabilità $h_{(t)}$, 66

Canale Gaussiano, 90

Capacità del canale, 90

Correzione di errore, 92

Decisione a massima

verosomiglianza, 102

Distanza di Hamming, 98

Distanza minima, 99

Errore Non Rivelabile, 101

Errore Rivelabile, 101

Frequenza di taglio, 68

Matrice di controllo di parità, 101

Peso di Hamming, 98

Probabilità di errore BSC, 92

Proprietà Campionatrice del Delta
di Dirac, 51

Rate del Codice, 92

Ricevitore ML error correction, 103

Ricevitore ML ottimo, 103

Risposta Impulsiva, 62

Rivelazione di errore, 92

Segnale Troncato, 10

TCF di segnali periodici, 53

TCF di un cos, 53

TCF di un segnale periodico
generico, 54

TCF di un sin, 54

Teorema dell'integrazione
completo, 59