

Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:

Luca Sanguinetti - Marco Moretti



Figure 1: uwu

AA 2022 - 2023

Contents

1	Introduzione	3
2	Richiamo Sui Numeri Complessi	4
2.1	Struttura di un numero complesso	4
2.1.1	Forma Cartesiana	4
2.1.2	Forma Polare	4
2.1.3	Complesso Coniugato	4
2.2	Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana	4
2.3	Operazioni	5
2.4	Funzioni Complesse a Variabile Reale	5
3	Introduzione Ai Segnali	6
3.1	Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini	6
4	Segnali Analogici	7
4.1	Grandezze dei segnali Analogici	7
4.1.1	Potenza istantanea	7
4.1.2	Energia	7
4.1.3	Potenza Media	7
4.1.4	Valore Efficace	7
4.1.5	Valore Medio	7
4.2	Analisi energetiche su segnali comuni	8
4.2.1	Costante	8
4.2.2	Sinusoide	8
4.2.3	Gradino	10
4.2.4	Rettangolo	10
4.2.5	Esponenziale unilatera	11
4.2.6	Esponenziale bilatera	13
4.2.7	segno $\text{sgn}(\mathbf{x}_{(t)})$	13
5	Trasformata Serie Di Fourier	15
5.1	Segnale Periodico	15
5.2	Trasformata Serie Di Fourier	15
5.2.1	Rappresentazione di X_k	15
5.3	Calcolo dei coefficienti X_k per segnali noti	16
5.3.1	$A \cos(2\pi f_0 t)$	16
5.3.2	$A \sin(2\pi f_0 t)$	16
5.3.3	Treno di rect	17
6	Trasformata Continua Di Fourier	19
6.1	Segnali Aperiodici	19
6.2	Equazioni di Analisi e Sintesi	19
6.2.1	Equazione di Analisi	19
6.2.2	Equazione di Sintesi	19

6.2.3	TCF di una $\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	20
6.3	Propiet�	21
6.3.1	Simmetria hermitiana	21
6.3.2	Parit�	21
6.3.3	Disparit�	21
6.4	Teoremi relativi alla TCF	22
6.4.1	Linearit�	22
6.4.2	Dualit�	22
6.4.3	Ritardo	22
6.4.4	Derivazione	23
6.4.5	Integrazione	23
6.4.6	Derivazione in Frequenza	23
6.4.7	Integrazione in Frequenza	23
6.4.8	Convoluzione	23
6.4.9	Prodotto	23
6.5	Modulazione di Ampiezza	23
6.5.1	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$	24
6.5.2	Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$	25
6.5.3	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	25
6.5.4	Th. Modulazione con Esponenziale Complesso	26
7	Formulario	27
7.1	Trigonometria	27
7.1.1	Formule di addizione	27
7.1.2	Formule di duplicazione	27
7.1.3	Formule di bisezione	27
7.2	Segnali Comuni	28
	Alphabetical Index	29

1 Introduzione

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.

I testi consigliati sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson

2 Richiamo Sui Numeri Complessi

2.1 Struttura di un numero complesso

2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = \text{Re}\{z\}$$

$$\text{Parte Immaginaria: } b = \text{Im}\{z\}$$

$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{j\theta}$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$

$$\text{Fase: } \theta = \arg(z)$$

grafico forma polare-cartesiana

2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana

$$z^* = a - jb$$

- Forma Polare

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$

2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria

$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$

- Modulo

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Fase

$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.3 Operazioni

Dati: $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$, $z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

- Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2$$

2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C} \quad t \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) = a(t) + jb(t) = \rho(t)e^{j\theta(t)}$$

- Integrale

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b a(t) + jb(t) dt = \int_a^b a(t) dt + j \int_a^b b(t) dt$$

- Derivata

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t)$$

3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto $\forall t$
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche

3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
 - Segnale tempo continuo: $t \in \mathbb{R}$ assume con continuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
 - Segnale a tempo discreto: $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$ T = periodo di campionamento, la variabile temporale assume solo valori discreti



Figure 2: tempo continuo, tempo discreto

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
 - Segnale ad ampiezza continua: $x(t)$ continua, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
 - Segnale ad ampiezza discreta: $x(t)$ discreta, se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica può assumere solo valori discreti



Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Segnale	Cotinuuo	Discreto	t
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x(t)$			

4 Segnali Analogici

4.1 Grandezze dei segnali Analogici

4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x(t)|^2$$

4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$T = \text{Periodo di osservazione}$



Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

dalla quale possiamo ricavare se $T \rightarrow \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$:

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)_T} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$x_{(t)_T} = \text{Segnale troncato}$

4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

4.2.1 Costante

$$x(t) = A \quad \forall t$$



Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

4.2.2 Sinusoide

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Figure 6: Segnale sinusoidale

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 7.1 il $\sin^2(\alpha)$ e lo sostituiamo (2.1) 7.1.2
 $\cos(2\alpha) = \frac{1+\cos^2(\alpha)}{2}$

$$\begin{aligned} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\ &= \frac{A}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

4.2.3 Gradino

$$U(t) = x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



Figure 7: Segnale gradino

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

4.2.4 Rettangolo

$$x(t) = A \operatorname{rect} \left(\frac{t}{T} \right) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$



Figure 8: Segnale rettangolo

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \operatorname{rect}^2 \left(\frac{t}{T} \right) dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = A^2 T$$

- Potenza Media: $T < T_0$ se non fosse così avrei una costante

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} A^2 T = 0$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} AT = 0$$

4.2.5 Esponenziale unilatera

$$x(t) = e^{-t}U(t)$$



Figure 9: Segnale esponenziale unilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t}U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned}
 x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U_{(t)} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-1)e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0
 \end{aligned}$$

4.2.6 Esponenziale bilatera

$$x(t) = e^{-|t|}$$



Figure 10: Segnale esponenziale bilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-2) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{2}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} = 0 \end{aligned}$$

4.2.7 segno $\text{sgn}(x(t))$

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Figure 11: Segnale $\text{sgn}(x)$

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}^2 t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 1$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 1 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

5 Trasformata Serie Di Fourier

5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x(t) = x(t - kT_0)$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo T_0 che soddisfa le condizioni di Dirichlet e la sua $E_x < \infty (C.S.)$ può essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k \in \mathbb{C}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

$$x(t) = \dots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

X_0 corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale, inoltre le componenti X_k prendono il nome di armoniche alla frequenza f corrispondente

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocità: $\forall x(t) \exists! X_k$:

$$x(t) \rightleftharpoons X_k$$

$$Segnale Analogico Periodico \rightleftharpoons Sequenza Complessa$$

5.2.1 Rappresentazione di X_k

Essendo X_k un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



Figure 12: Spettro del segnale

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

5.3 Calcolo dei coefficienti X_k per segnali noti

5.3.1 $A \cos(2\pi f_0 t)$

$$x_{(t)} = A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti X_k :

$$x_{(t)} = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:



Figure 13: Spettro TSF del coseno

5.3.2 $A \sin(2\pi f_0 t)$

$$x_{(t)} = A \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti X_k :

$$x_{(t)} = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} - X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j}$$

$$|X_k| = \begin{cases} \left|\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ \left|-\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle \frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle \left|-\frac{A}{2j}\right| = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:



Figure 14: Spettro TSF del seno

5.3.3 Treno di rect

$x_R = A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$ Segnale periodico $\rightarrow x_{(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$
 $T_0 = \text{periodo}, T = \text{durata} \rightarrow T < T_0$, se così non fosse avremmo una costante



Figure 15: Treno di $A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

\rightarrow Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da

aperiodiche a periodiche e viceversa

$$\begin{aligned}
 ATSF[x(t)] &= ATSF\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)\right] \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \\
 &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
 &= \frac{AT}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = Af_0 T \text{sinc}(kf_0 T)
 \end{aligned}$$



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 16: Spettro TSF del treno di rect

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:



Figure 17: Spettro treno di $A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di ricostruzione dello stesso (script di matlab presenti nel teams):

- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali più alte \rightarrow copre più spettro (espansione spettrale) $T_0 \uparrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse frequenze $T_0 \downarrow$

Se non ho abbastanza passi K non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio né un'analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettamente il segnale

6 Trasformata Continua Di Fourier

6.1 Segnali Aperiodici

Nel caso di segnali come $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ non posso usare la *TSF* posso però scrivere:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t), \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$$

Passiamo da un'analisi a frequenze discrete ad un'analisi su tutto lo spettro delle frequenze



(a) Spettro di Ampiezza TSF



(b) Spettro di Ampiezza TCF

6.2 Equazioni di Analisi e Sintesi



Figure 18: Insieme dei segnali per tcf

6.2.1 Equazione di Analisi

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt \quad \text{Equazione di analisi}$$

6.2.2 Equazione di Sintesi

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi f t} df \quad \text{Equazione di sintesi}$$

La *TCF* gode della biunivocità

$$x_{(t)} \rightleftharpoons X_{(f)} \quad X_{(f)} \in \mathbb{C}$$

Essendo X_k un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_{(f)} = |X_{(f)}| e^{j\angle X_{(f)}}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



Figure 19: Spettro del segnale TCF

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo e continuo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**, questa proprietà é chiamata **Simmetria Hermitiana**

6.2.3 TCF di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



Figure 20: $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$X(f) = ? :$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}) \\ &= \frac{AT}{\pi f} \left(\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j} \right) = \frac{AT \sin(\pi fT)}{\pi f} = AT \operatorname{sinc}(fT) = X(f) \end{aligned}$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow AT \operatorname{sinc}(fT)$$

La sinc si annulla in $\frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo anche come la funzione di partenza sia reale e pari la TCF rispetti 6.3.2(si?):



(a) Spettro di Ampiezza TCF *rect*



(b) Spettro di Fase TCF *rect*

6.3 Proprietá

Come per la TSF vale che al variare del periodo della funzione T :

- Se $T \uparrow$ aumenta $\rightarrow f \downarrow$ diminuisce e si stringe lo spettro
- Se $T \downarrow$ diminuisce $\rightarrow f \uparrow$ aumenta e si allarga lo spettro

Inoltre come si può evincere dal successivo Teorema della Dualitá 6.4.2:

- Una funzione limitata (finita) nel tempo ha uno spettro nella frequenza illimitato \rightarrow sono i segnali fisici
- Una funzione illimitata nel tempo ha uno spettro nella frequenza limitato (finito)

6.3.1 Simmetria hermitiana

$Ip : x_{(t)}$ reale

$Th : X_{(f)}$ hermitiana

$$X_{(-f)} = X_{(f)}^* \rightarrow \begin{cases} |X_{(f)}| = |X_{(-f)}| & \text{Simmetria Pari} \\ \angle X_{(-f)} = -\angle X_{(f)} & \text{Simmetria Dispari} \end{cases}$$

6.3.2 Paritá

$Ip : x_{(t)}$ reale e pari

$Th : X_{(f)}$ reale e pari

6.3.3 Disparitá

$Ip : x_{(t)}$ reale e dispari

$Th : X_{(f)}$ immaginaria e dispari

6.4 Teoremi relativi alla TCF

6.4.1 Linearit 

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} &= \alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)} \\ Th : X_{(f)} &= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)} \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_{1(t)} e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{2(t)} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)} \end{aligned}$$

Esempio: esempio del martorella rect su rect

6.4.2 Dualit 

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} &\stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)} \\ Th : X_{(t)} &\stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} x_{(-f)} \end{aligned} \text{ Dimostrazione:}$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \text{Sost.} \begin{cases} t \rightarrow f \\ f \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(f)} e^{-j2\pi tf} df \\ &= \text{Sost.} (f' = -f) \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{-j2\pi t(-f')} df' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{j2\pi tf'} df' = ACTF[x_{(-f)}] = c.v.d. \end{aligned}$$

Esempio: esempio del martorella sinc dualit 

6.4.3 Ritardo

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} &\stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)}, \quad y_{(t)} = x_{(t-t_0)} \\ Th : Y_{(f)} &\stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} y_{(t)} = X_{(f)} e^{-j2\pi ft_0} \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-t_0)} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \text{Sost.} (t' = t - t_0) \Rightarrow Y_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')} e^{-j2\pi f(t'+t_0)} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')} e^{-j2\pi ft'} e^{-j2\pi ft_0} dt' = X_{(f)} e^{-j2\pi ft_0} \quad c.v.d. \end{aligned}$$

Osservazione:

- Un ritardo nel tempo introduce una componente solo di fase che cresce linearmente con la frequenza

- Un esponenziale nel tempo introduce un ritardo nel dominio della frequenza $x_{(t)}e^{-j2\pi f_0 t} \mapsto X_{(f-f_0)}$, vedi 6.5.4

Esempio: esempio del martorella rect ritardata eheh

6.4.4 Derivazione

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} &= \\ Th : X_{(f)} &= \end{aligned}$$

6.4.5 Integrazione

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} &= \\ Th : X_{(f)} &= \end{aligned}$$

6.4.6 Derivazione in Frequenza

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} &= \\ Th : X_{(f)} &= \end{aligned}$$

6.4.7 Integrazione in Frequenza

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} &= \\ Th : X_{(f)} &= \end{aligned}$$

6.4.8 Convoluzione

$$\begin{aligned} Ip : x_{(t)} &= \\ Th : X_{(f)} &= \end{aligned}$$

Proprietà della convoluzione:

- 1
- 2
- 3

6.4.9 Prodotto

6.5 Modulazione di Ampiezza

$$y_{(t)} = x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t)$$



Figure 21: Esempio sistema di modulazione di ampiezza

Nel dominio della frequenza:



Figure 22: Segnale nel dominio della frequenza modulato e non

Serve per spostare la frequenza (es. di trasmissione) del segnale in modo tale, ad esempio, da non sovrapporre due segnali che sono sulla stessa frequenza. Se il segnale non fosse modulato si dice in **banda base** (BB) se il segnale é modulato si dice in **banda passante** (BP)



Figure 23: BB, BP

6.5.1 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xrightarrow{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}] \Big|_{f-f_0} + TCF[x_{(t)}] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d}
\end{aligned}$$

Esempio: esempio modulazione di una rect fai cosa ha chiesto lui a fine lezione

6.5.2 Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$

$$Ip: \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} \sin(2\pi f_0 t) \\ x_{(t)} \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th: Y_{(f)} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}] \Big|_{f-f_0} - TCF[x_{(t)}] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d}
\end{aligned}$$

6.5.3 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

$$Ip: \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ x_{(t)} \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th: Y_{(f)} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \frac{e^{j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}] \Big|_{f-f_0} + TCF[x_{(t)}] \Big|_{f+f_0} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d}
\end{aligned}$$

Come cambiano i grafici



Figure 24: Modulatione generica

6.5.4 Th. Modulatione con Esponenziale Complesso

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \\ x(t) \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = X(f-f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} = X(f-f_0) \end{aligned}$$

Posso notare che:

- Ritardo: $\rightarrow x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{(-j2\pi ft_0)}$
- Modulazione: $\rightarrow x(t)e^{(j2\pi f_0 t)} \rightleftharpoons X(f-f_0)$

tabellina sul procedimento di sintesi di un segnale

7 Formulario

7.1 Trigonometria

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3. $\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4. $\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ È un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi$:
 $k \in \mathbb{Z}$



Figure 25: grafico $\text{sinc}(\alpha)$

7.1.1 Formule di addizione

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

7.1.2 Formule di duplicazione

1. $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2 \sin^2(\alpha) \end{cases}$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

7.1.3 Formule di bisezione

1. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$
2. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$
3. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} \\ \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \end{cases}$

7.2 Segnali Comuni

1. $x_R = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) T = \text{durata}$



Figure 26: Rappresentazione di $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

2. $\operatorname{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$
 È un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi : k \in \mathbb{Z}$



Figure 27: grafico $\operatorname{sinc}(\alpha)$

3.

4.

Alphabetical Index

Segnale Troncato, 7