

Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:

Luca Sanguinetti - Marco Moretti



Figure 1: uwu

AA 2022 - 2023

Contents

1	Introduzione	3
2	Richiamo Sui Numeri Complessi	4
2.1	Struttura di un numero complesso	4
2.1.1	Forma Cartesiana	4
2.1.2	Forma Polare	4
2.1.3	Complesso Coniugato	4
2.2	Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana	4
2.3	Operazioni	5
2.4	Funzioni Complesse a Variabile Reale	5
3	Introduzione Ai Segnali	6
3.1	Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini	6
4	Segnali Analogici	8
4.1	Grandezze dei segnali Analogici	8
4.1.1	Potenza istantanea	8
4.1.2	Energia	8
4.1.3	Potenza Media	8
4.1.4	Valore Efficace	9
4.1.5	Valore Medio	9
4.2	Analisi energetiche su segnali comuni	9
4.2.1	Costante	9
4.2.2	Cosinusoide	10
4.2.3	Gradino	12
4.2.4	Rettangolo	12
4.2.5	Esponenziale unilatera	13
4.2.6	Esponenziale bilatera	15
4.2.7	segno $\text{sgn}(\mathbf{x}_{(t)})$	15
4.3	Segnal Periodici	16
5	Trasformata Serie Di Fourier	18
5.1	Segnale Periodico	18
5.2	Trasformata Serie Di Fourier	18
5.2.1	Rappresentazione di X_k	18
5.3	Propiet� della TSF	19
5.4	Linearit�	19
5.5	Simmetria Hermitiana	19
5.6	Calcolo dei coefficienti X_k per segnali noti	19
5.6.1	$A \cos(2\pi f_0 t)$	19
5.6.2	$A \sin(2\pi f_0 t)$	20
5.6.3	Treno di rect	21

6	Trasformata Continua Di Fourier	24
6.1	Segnali Aperiodici	24
6.2	Equazioni di Analisi e Sintesi	25
6.2.1	Equazione di Analisi	25
6.2.2	Equazione di Sintesi	25
6.2.3	TCF di una $\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	26
6.3	Propiet�	27
6.3.1	Simmetria hermitiana	28
6.3.2	Parit�	28
6.3.3	Disparit�	28
6.4	Teoremi relativi alla TCF	28
6.4.1	Linearit�	28
6.4.2	Dualit�	29
6.4.3	Ritardo	30
6.4.4	Derivazione	31
6.4.5	Integrazione	32
6.4.6	Derivazione in Frequenza	34
6.4.7	Integrazione in Frequenza	34
6.4.8	Convoluzione	34
6.4.9	Prodotto	36
6.4.10	Calcolo del prodotto di convoluzione	36
6.5	Modulazione di Ampiezza	38
6.5.1	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$	39
6.5.2	Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$	40
6.5.3	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	40
6.5.4	Th. Modulazione con Esponenziale Complesso	42
6.5.5	Demodulazione	42
6.5.6	Funzionamento di un Radar	46
6.6	Delta di Dirac	48
6.6.1	Propiet� del Delta di Dirac	48
6.6.2	TCF della Delta di Dirac	49
7	Teoria Dei Codici	51
8	Formulario	52
8.1	Trigonometria	52
8.1.1	Formule di addizione	52
8.1.2	Formule di duplicazione	52
8.1.3	Formule di bisezione	53
8.2	Segnali Notevoli	53
8.3	Grandezze Fisiche	54
8.4	Varie	54
	Alphabetical Index	56

1 Introduzione

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.

I testi consigliati sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson

2 Richiamo Sui Numeri Complessi

2.1 Struttura di un numero complesso

2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = \text{Re}\{z\}$$

$$\text{Parte Immaginaria: } b = \text{Im}\{z\}$$

$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{j\theta} = \rho \cos(\theta) + j\rho \sin(\theta)$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$

$$\text{Fase: } \theta = \arg(z) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

grafico forma polare-cartesiana

2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana

$$z^* = a - jb$$

- Forma Polare

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$

2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria

$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$

- Modulo

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}$$

- Fase

$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.3 Operazioni

Dati: $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$, $z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

- Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2 = \rho^2$$

2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) = a(t) + jb(t) = \rho(t)e^{j\theta(t)}$$

- Integrale

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b a(t) + jb(t) dt = \int_a^b a(t) dt + j \int_a^b b(t) dt$$

- Derivata

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t)$$

3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto $\forall t$, per ogni istante temporale si conosce il valore del segnale, spesso rappresentati con funzioni analitiche.
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche, ad esempio un rumore.

3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
 - Segnale tempo continuo: $t \in \mathbb{R}$ assume con continuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
 - Segnale a tempo discreto: $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$ T = periodo di campionamento, la variabile temporale assume solo valori discreti

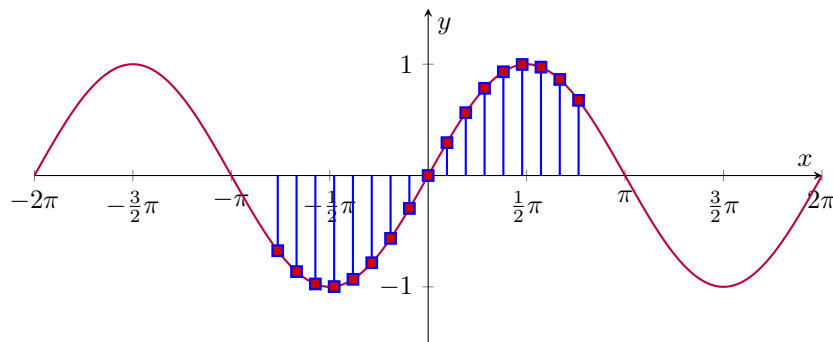


Figure 2: tempo continuo, tempo discreto: $T = 0.3$

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
 - Segnale ad ampiezza continua: $x_{(t)}$ *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
 - Segnale ad ampiezza discreta: $x_{(t)}$ *discreta*, se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica può assumere solo valori discreti

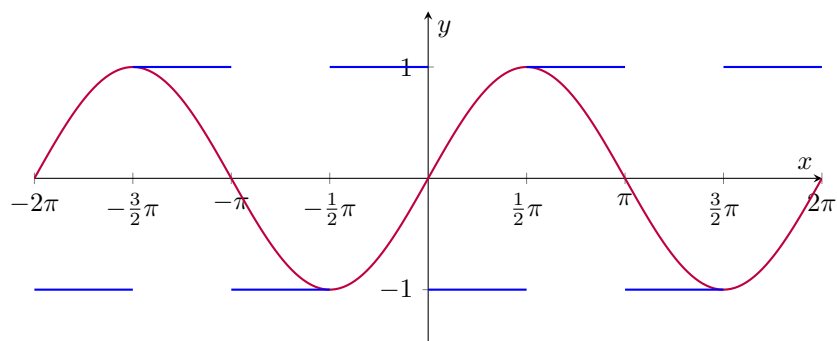


Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Possiamo costruire una tabella per categorizzare le tipologie di segnali:

Segnale	Continuo	Discreto	t
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x(t)$			

4 Segnali Analogici

4.1 Grandezze dei segnali Analogici

4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x(t)|^2$$

$$\text{Se } x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow P_x \triangleq x_{(t)}^2$$

4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{Energia : } \begin{cases} \text{Energia finita} & (\text{Segnali fisici}) \\ \text{Energia infinita} & (\text{Segnali ideali}) \end{cases}$$

4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$T = \text{Periodo di osservazione}$

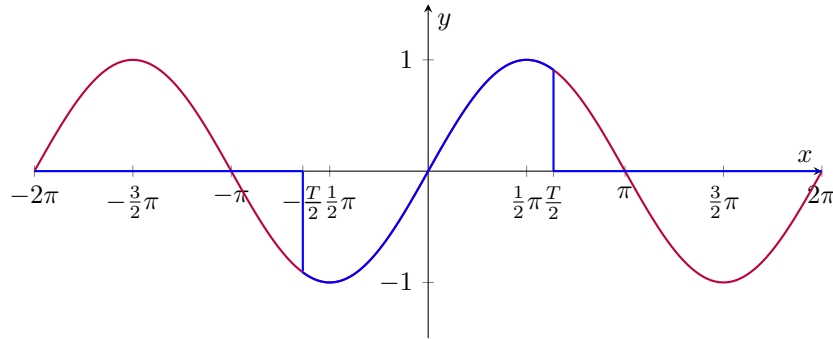


Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

$$E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

dalla quale possiamo ricavare se $T \rightarrow \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$:

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Possiamo ricavare delle proprietà secondo energia e potenza:

- Se $x(t)$ ha $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$
- Se $x(t)$ ha $P_x = k \neq 0 < \infty \Rightarrow E_x = \infty$

4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)_T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$x(t)_T = \text{Segnale troncato}$$

4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

4.2.1 Costante

$$x(t) = A \quad \forall t$$

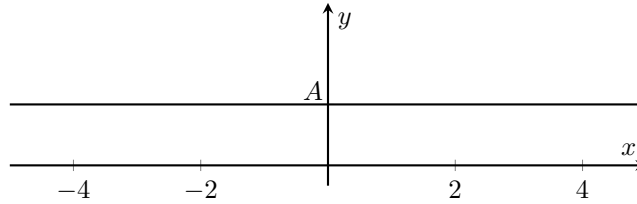


Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

4.2.2 Cosinusoide

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$A = \text{Ampiezza}$, $f_0 = \frac{1}{T} = \text{frequenza}$, $\phi = \text{fase}$

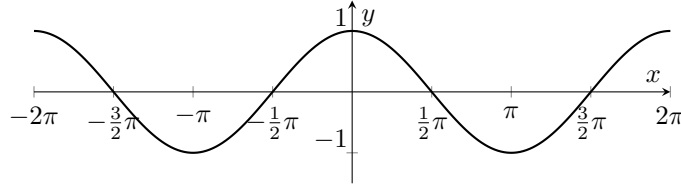


Figure 6: Segnale cosinusoidale ($\phi = 0$)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 8.1 il $\sin^2(\alpha)$ e lo sostituiamo (2.1) 8.1.2

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 + \cos^2(\alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\ &= \frac{A}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

4.2.3 Gradino

$$U(t) = x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

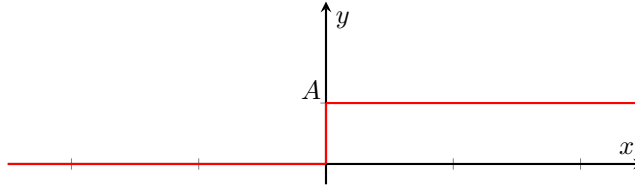


Figure 7: Segnale gradino

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

4.2.4 Rettangolo

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

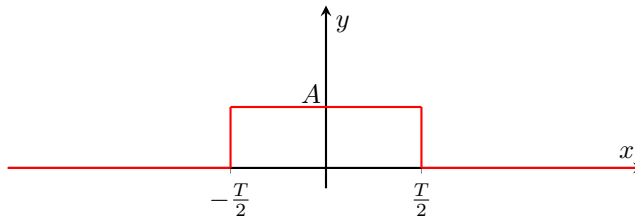


Figure 8: Segnale rettangolo

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = A^2 T$$

- Potenza Media: $T < T_0$ se non fosse cosí avrei una costante

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} A^2 T = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} AT = 0 \end{aligned}$$

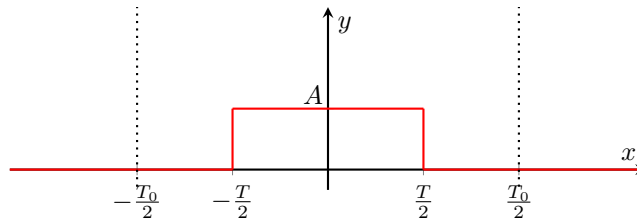


Figure 9

4.2.5 Esponenziale unilatera

$$x(t) = e^{-t} U(t)$$

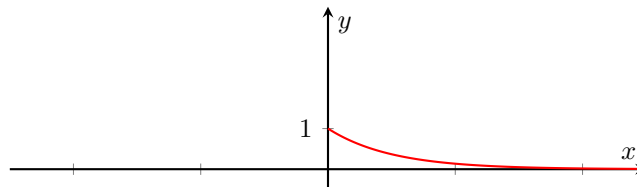


Figure 10: Segnale esponenziale unilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left. \frac{1}{2} e^{-2t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-1) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

4.2.6 Esponenziale bilatera

$$x(t) = e^{-|t|}$$

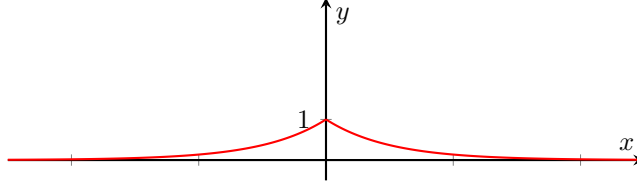


Figure 11: Segnale esponenziale bilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t}U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t}U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-2)e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{2}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} = 0 \end{aligned}$$

4.2.7 segno $\text{sgn}(x(t))$

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

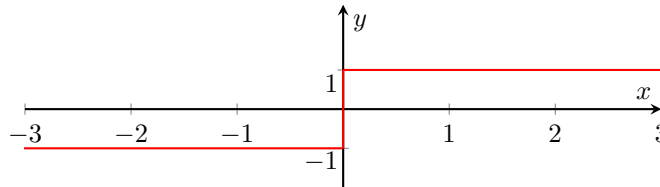


Figure 12: Segnale $\text{sgn}(x)$

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}^2 t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 1$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 1 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

4.3 Segnali Periodici

Un segnale è periodico se:

$$x(t) = x(t - kT_0) \quad k \in \mathbb{Z}, t_0 \in \mathbb{R}^+, T_0 = \text{Periodo del segnale}$$

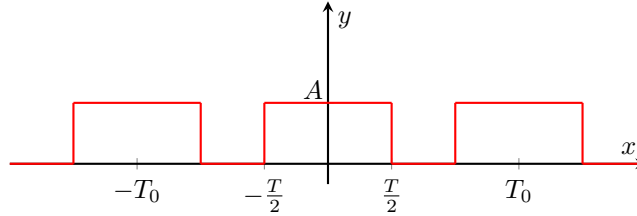


Figure 13: Segnale periodico

Si possono definire le seguenti grandezze:

- Energia di un segnale periodico

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_0}{2} + kT_0}^{\frac{T_0}{2} + kT_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} kX = \infty \end{aligned}$$

Tutti i segnali iperperiodici hanno quindi $E_x = \infty$

- Potenza media di un segnale periodico

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \Rightarrow T = kT_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} |x(t)|^2 dt \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

Posso calcolare la potenza di un singolo periodo:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Valore medio di un segnale periodico

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

5 Trasformata Serie Di Fourier

5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x(t) = x(t - kT_0)$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo T_0 che soddisfa le condizioni di Dirichlet e la sua $E_x < \infty (C.S.)$ può essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k \in \mathbb{C}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

$$x(t) = \dots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

X_0 corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale, inoltre le componenti X_k prendono il nome di armoniche alla frequenza f corrispondente

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocità: $\forall x(t) \exists! X_k$:

$$x(t) \rightleftharpoons X_k$$

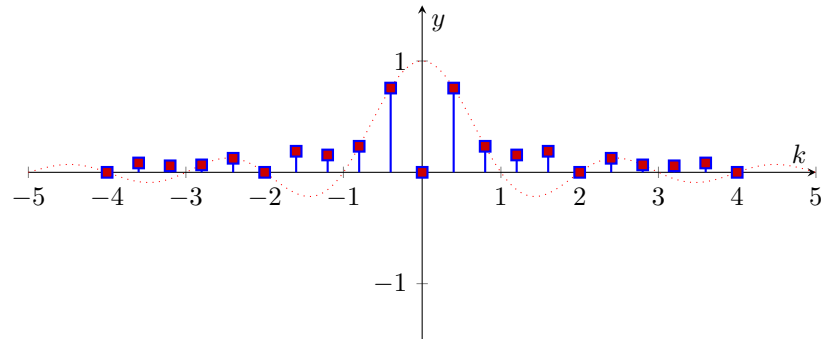
$$Segnale Analogico Periodico \rightleftharpoons Sequenza Complessa$$

5.2.1 Rappresentazione di X_k

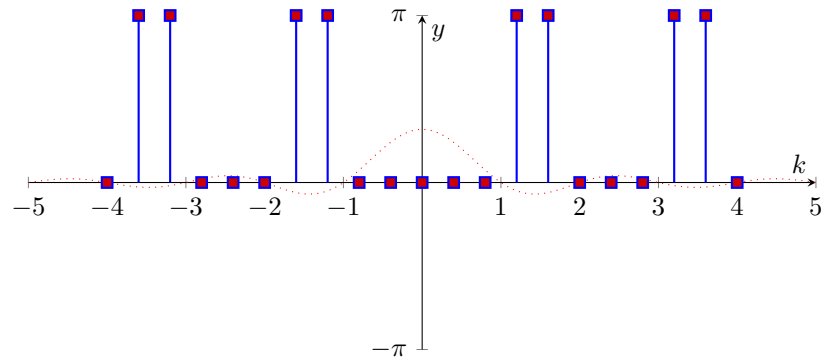
Essendo X_k un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro di un treno di rect

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

5.3 Proprietá della TSF

5.4 Linearitá

5.5 Simmetria Hermitiana

5.6 Calcolo dei coefficienti X_k per segnali noti

5.6.1 $A \cos(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti X_k :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} + X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

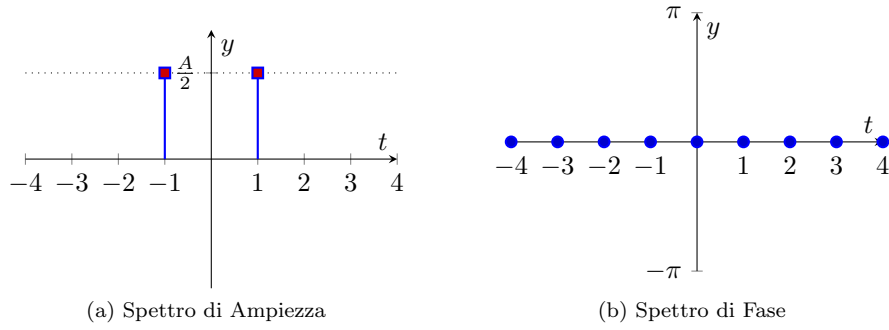


Figure 15: Spettro TSF del coseno $A > 0$

5.6.2 $A \sin(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti X_k :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} - X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$\begin{aligned} X_{-1} &= -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j} \\ |X_k| &= \begin{cases} |\frac{A}{2j}| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ |-\frac{A}{2j}| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle \frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle |-\frac{A}{2j}| = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

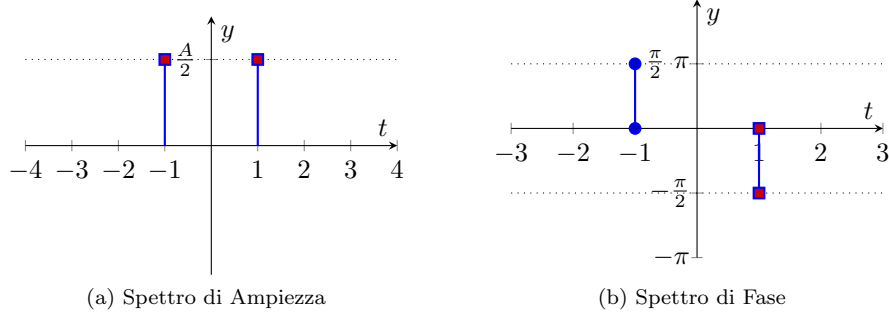


Figure 16: Spettro TSF del seno $A > 0$

5.6.3 Treno di rect

$x_R = A \text{ rect}(\frac{t}{T}) \rightarrow$ Segnale periodico $\rightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$
 $T_0 = \text{periodo}, T = \text{durata} \rightarrow T < T_0$, se così non fosse avremmo una costante

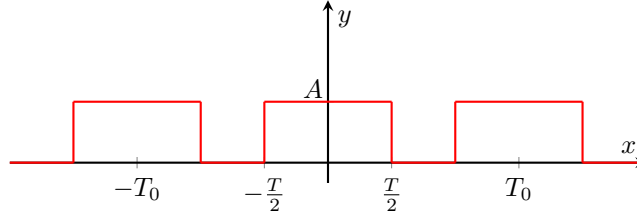
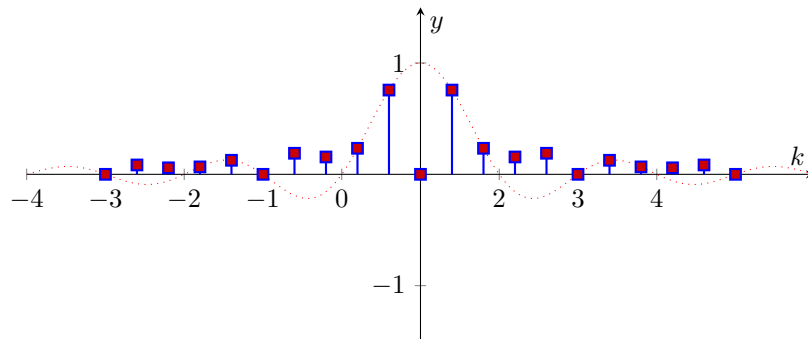


Figure 17: Treno di $A \text{ rect}(\frac{t}{T})$

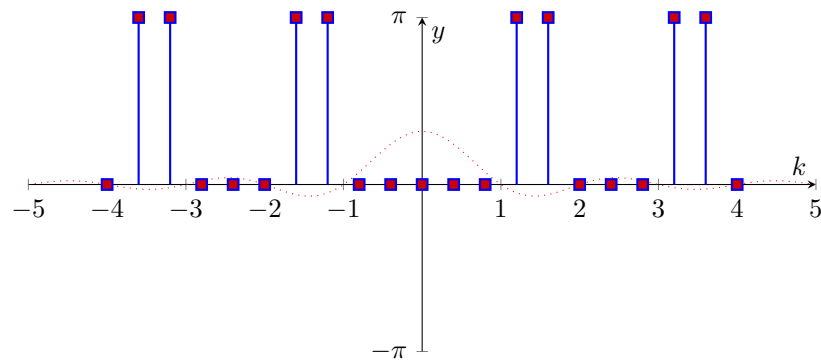
\rightarrow Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da aperiodiche a periodiche e viceversa

$$\begin{aligned}
 ATSF[x(t)] &= ATSF[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)] \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
 &= \frac{AT}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = A f_0 T \text{sinc}(k f_0 T)
 \end{aligned}$$

Tracciamo lo spettro per $f_0 T < 1$:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 18: Spettro TSF del treno di rect con $f_0 T < 1$

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:

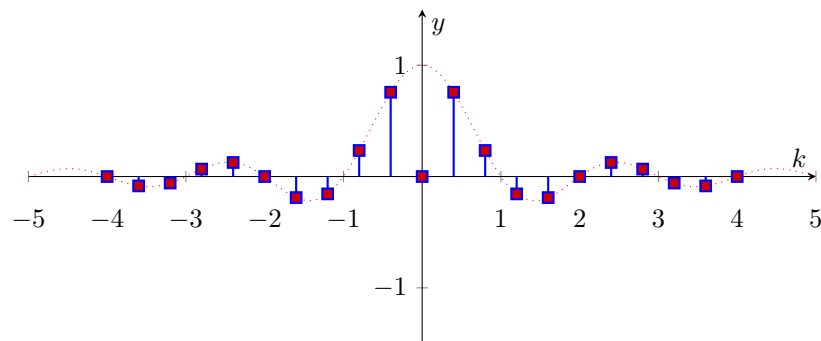


Figure 19: Spettro treno di $A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di ricostruzione dello stesso (script di matlab presenti nel teams):

- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali più alte \rightarrow copre più spettro (espansione spettrale) $T_0 \uparrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse frequenze $T_0 \downarrow$

Se non ho abbastanza passi K non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio né un'analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettamente il segnale. Inoltre in 0 dello spettro ho il Valore medio 4.1.5 del segnale.

Dubbi: non mi torna il campionamento nella $\text{sinc}(x)$, se è definita $\sin(\pi x)/x$ si annulla nelle ascisse intere, quindi io campiono a frazionati?

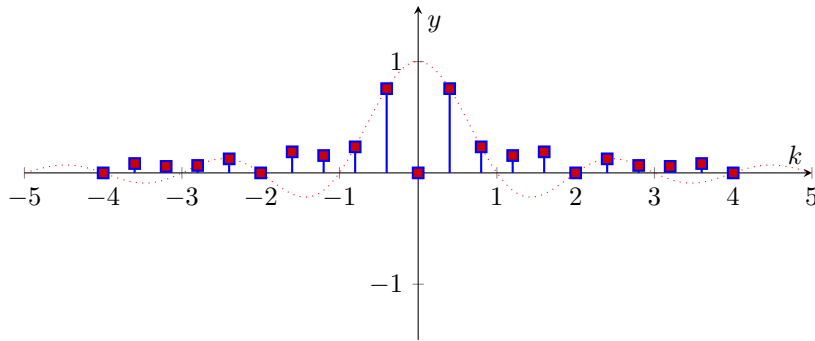
6 Trasformata Continua Di Fourier

6.1 Segnali Aperiodici

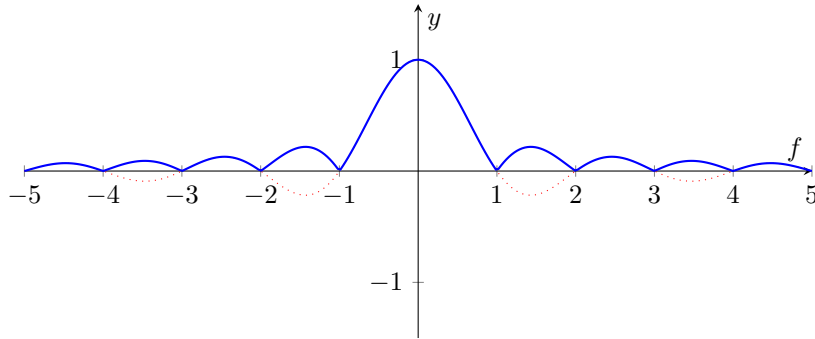
Nel caso di segnali come $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ non posso usare la *TSF* posso però scrivere:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t), \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$$

Passiamo da un'analisi a frequenze discrete ad un'analisi su tutto lo spettro delle frequenze



(a) Spettro di Ampiezza TSF



(b) Spettro di Ampiezza TCF

6.2 Equazioni di Analisi e Sintesi

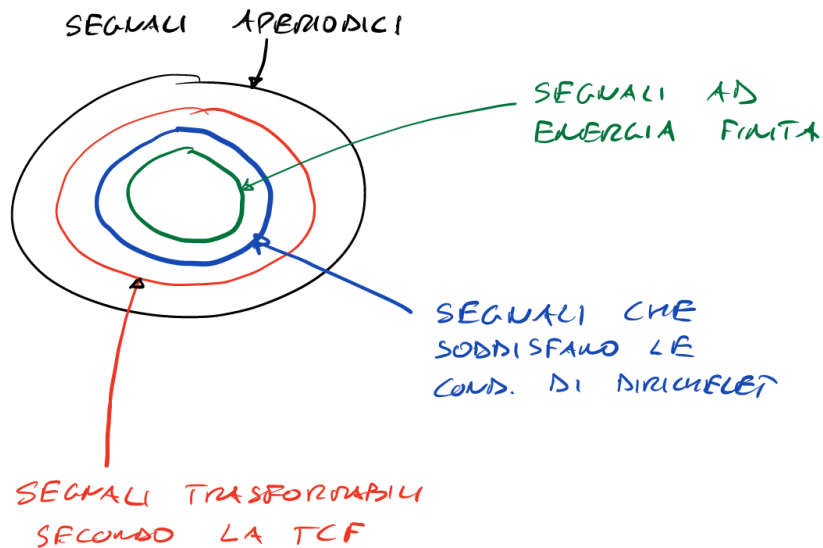


Figure 20: Insiemi dei segnali per tcf

6.2.1 Equazione di Analisi

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{Equazione di analisi}$$

6.2.2 Equazione di Sintesi

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi ft} df \quad \text{Equazione di sintesi}$$

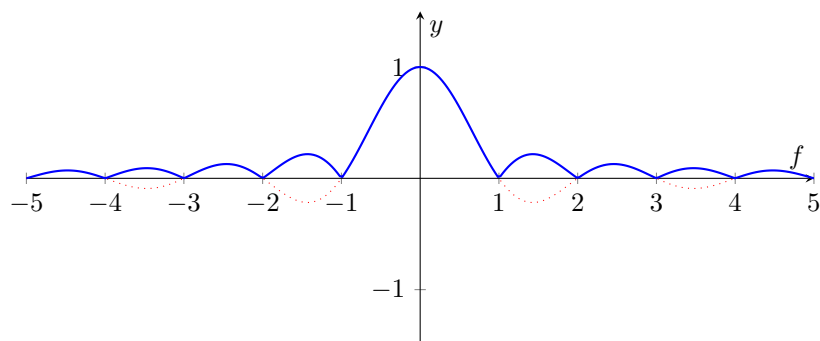
La *TCF* gode della biunivocità

$$x_{(t)} \Rightarrow X_{(f)} \quad X_{(f)} \in \mathbb{C}$$

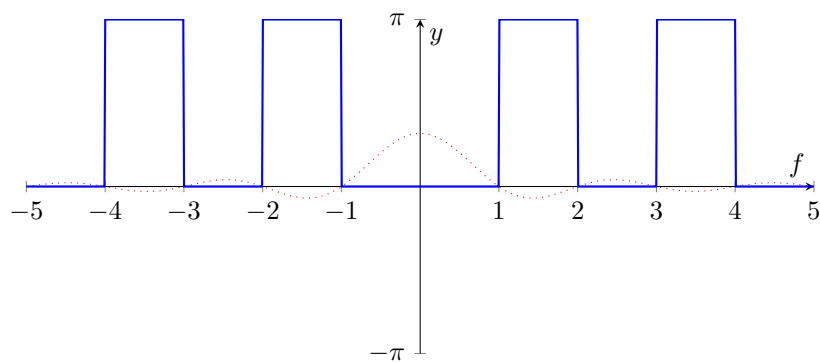
Essendo X_k un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_{(f)} = |X_{(f)}| e^{j\angle X_{(f)}}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 21: Spettro del segnale TCF

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo e continuo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**, questa proprietà é chiamata **Simmetria Hermitiana**

6.2.3 TCF di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$

$$x(t) = A rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

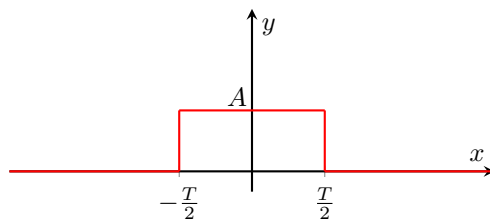


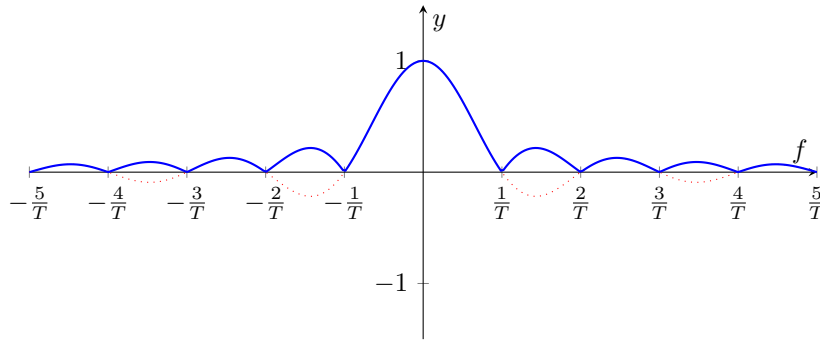
Figure 22: $A rect\left(\frac{t}{T}\right)$

$X_{(f)} = ? :$

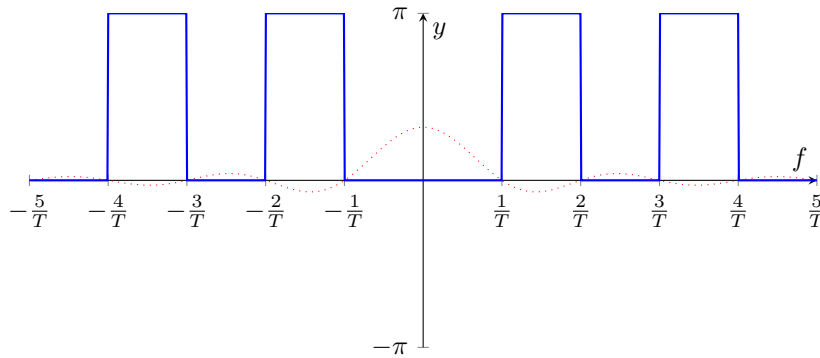
$$\begin{aligned}
 X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) \\
 &= \frac{AT}{\pi f} \left(\frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} \right) = \frac{AT \sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(fT) = X_{(f)}
 \end{aligned}$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow AT \operatorname{sinc}(fT)$$

La sinc si annulla in $\frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo anche come la funzione di partenza sia reale e pari la TCF rispetti 6.3.2(si?):



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

6.3 Proprietá

Come per la TSF vale che al variare del periodo della funzione T :

- Se $T \uparrow$ aumenta $\rightarrow f \downarrow$ diminuisce e si stringe lo spettro
- Se $T \downarrow$ diminuisce $\rightarrow f \uparrow$ aumenta e si allarga lo spettro

Inoltre come si può evincere dal successivo Teorema della Dualità 6.4.2:

- Una funzione limitata (finita) nel tempo ha uno spettro nella frequenza illimitato \rightarrow sono i segnali fisici
- Una funzione illimitata nel tempo ha uno spettro nella frequenza limitato (finito)

6.3.1 Simmetria hermitiana

$Ip : x_{(t)}$ reale

$Th : X_{(f)}$ hermitiana

$$X_{(-f)} = X_{(f)}^* \rightarrow \begin{cases} |X_{(f)}| = |X_{(-f)}| & \text{Simmetria Pari} \\ \angle X_{(-f)} = -\angle X_{(f)} & \text{Simmetria Dispari} \end{cases}$$

6.3.2 Parità

$Ip : x_{(t)}$ reale e pari

$Th : X_{(f)}$ reale e pari

6.3.3 Disparità

$Ip : x_{(t)}$ reale e dispari

$Th : X_{(f)}$ immaginaria e dispari

6.4 Teoremi relativi alla TCF

6.4.1 Linearità

$Ip : x_{(t)} = \alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}$

$Th : X_{(f)} = \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_{1(t)} e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{2(t)} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)} \end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
 x_{(t)} &= A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 X_{(f)} &= AX_{1(f)} + BX_{2(f)} = 2AT \operatorname{sinc}(2Tf) + BT \operatorname{sinc}(Tf) \\
 X_{1(f)} &= \begin{cases} X_{1(f)} = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T'}\right) \stackrel{TCF}{\Leftrightarrow} T' \operatorname{sinc}(T'f) \Rightarrow X_{1(f)} = 2T \operatorname{sinc}(2Tf) \\ T' = 2T \end{cases}
 \end{aligned}$$

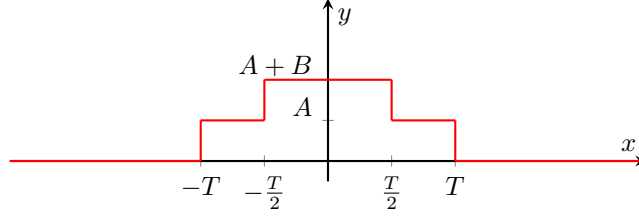


Figure 23: Segnale rettangolo

6.4.2 Dualità

$Ip : x_{(t)} \stackrel{TCF}{\Leftrightarrow} X_{(f)}$
 $Th : X_{(t)} \stackrel{TCF}{\Leftrightarrow} x_{(-f)}$ Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \text{Sost.} \begin{cases} t \rightarrow f \\ f \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(f)} e^{-j2\pi t f} df \\
 &= \text{Sost. } (f' = -f) \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{-j2\pi t (-f')} df' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{j2\pi t f'} df' = ACTF[x_{(-f)}] = c.v.d.
 \end{aligned}$$

Esempio:

$$x_{(t)} = A \operatorname{sinc}(Bt) \Rightarrow X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{sinc}(Bt) e^{-j2\pi f t} dt$$

Applico la dualità:

$$\begin{aligned}
 A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) &\Leftrightarrow AT \operatorname{sinc}(Tf) \\
 AT \operatorname{sinc}(Tt) &\Leftrightarrow A \operatorname{rect}\left(\frac{-f}{T}\right)
 \end{aligned}$$

Se voglio una durata generica:

$$\begin{aligned}
& \text{Sostituisco } B = T \\
& AB\text{sinc}(Bt) \rightleftharpoons A\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \\
& \Downarrow \\
& A\text{sinc}(Bt) \rightleftharpoons \frac{A}{B}\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)
\end{aligned}$$

6.4.3 Ritardo

$$\begin{aligned}
Ip : x(t) &\stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)}, \quad y(t) = x_{(t-t_0)} \\
Th : Y_{(f)} &\stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} y(t) = X_{(f)}e^{-j2\pi ft_0}
\end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-t_0)}e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \text{Sost. } (t' = t - t_0) \Rightarrow Y_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')}e^{-j2\pi f(t'+t_0)}dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')}e^{-j2\pi ft'}e^{-j2\pi ft_0}dt' = X_{(f)}e^{-j2\pi ft_0} \text{ c.v.d.}
\end{aligned}$$

Osservazione:

- Un ritardo nel tempo introduce una componente solo di fase che cresce linearmente con la frequenza
- Un esponenziale nel tempo introduce un ritardo nel dominio della frequenza $x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \mapsto X_{(f-f_0)}$, vedi 6.5.4

Esempio:

$$x_{0(t)} = A\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow x(t) = x_{0(t-t_0)} \quad t_0 = \frac{T}{2}$$

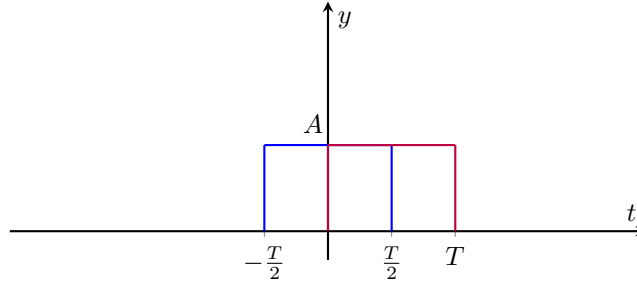


Figure 24: $x_{0(t)}$, $x(t)$

$$X_{(f)} = X_{0(f)} e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = AT \operatorname{sinc}(Tf) e^{-j\pi f T}$$

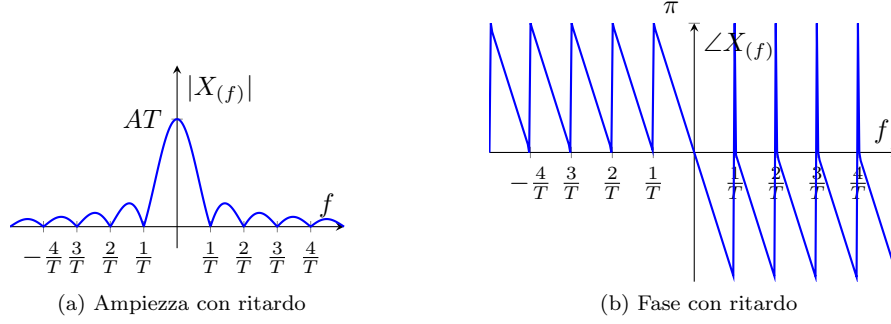


Figure 25: Spettro della *rect* con ritardo

Il \LaTeX sbaglia e aggiunge le spike nelle f positive, il grafico é dispari con andamento come per le f negative.

6.4.4 Derivazione

$$\begin{aligned} Ip : & \begin{cases} x_{(t)} \xrightarrow{TCF} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \frac{d}{dt} x_{(t)} \end{cases} \\ Th : & Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)} \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= \frac{d}{dt} x_{(t)} = \frac{d}{dt} ACTF[x_{(t)}] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi f t} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} j2\pi f e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

Posso Scrivere $y_{(t)}$ come $ACTF[y_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$, se quindi $Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$ l'uguaglianza é valida:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$$

L'operazione di derivata nel dominio della frequenza si traduce in una semplice operazione algebrica, nel tempo avrei dovuto calcolare il rapporto incrementale. Per derivare un segnale posso quindi:

$$x_{(t)} \rightarrow TCF \rightarrow j2\pi f X_{(f)} \rightarrow ACTF \rightarrow y_{(t)}$$

6.4.5 Integrazione

$$Ip : \begin{cases} x(t) \stackrel{TCF}{=} X(f) & (1) \\ y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha & (2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \text{ oppure } X(f)|_{f=0} = 0 \text{ oppure } y(+\infty) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

Dimostrazione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Rightarrow \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} y(t) \Rightarrow^{Th.6.4.4} X(f) = j2\pi f Y(f)$$

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

L'ipotesi 3 é conseguenza della divisione per f e che devo mantenere l'uguaglianza $X(f) = j2\pi f Y(f)$, si nota come nella dimostrazione usando il Th della Derivazione (6.4.4) quando $f = 0$ la funzione nella frequenza deve essere 0, $X(f) = j2\pi f Y(f) = 0$

Esempio: TCF di una piramide

$$x(t) = A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T} \right) \right) rect \left(\frac{t}{2T} \right) \quad X(f) = TCF[x(t)] = ?$$

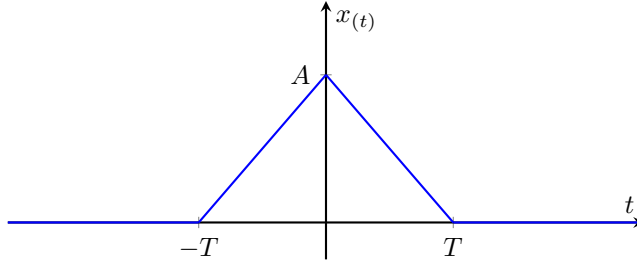


Figure 26: Funzione priamide

$TCF[x(t)] :$

- Utilizzando la classica TCF :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T} \right) \right) rect \left(\frac{t}{2T} \right) dt$$

- Utilizzando il Th dell'Integrazione 6.4.5:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^t y(\alpha) d\alpha \quad 6.4.5(2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt \quad 6.4.5(3)$$

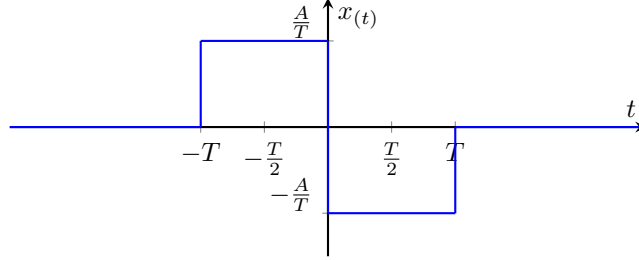


Figure 27: Funzione priamide

$$y(t) = \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - (-\frac{T}{2})}{T}\right) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) = \text{Sono 2 rect con ritardo}$$

$$\Rightarrow y(t) \Rightarrow Y_{(f)} \quad 6.4.5(1) \Rightarrow X_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} \begin{cases} x_{(t-t_0)} \Rightarrow X_{(f)} e^{-j2\pi f t_0} \\ \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow T \text{sinc}(Tf) \end{cases}$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f(-\frac{T}{2})} - \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$= \textcolor{red}{2j} A \text{sinc}(Tf) \frac{e^{j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{\textcolor{red}{2j}} = 2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)$$

$$X_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{j2\pi f} = \frac{\textcolor{red}{A} T \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{\pi f \textcolor{red}{T}}$$

$$= A T \text{sinc}^2(fT)$$

Abbiamo ottenuto la *TCF* del triangolo:

$$A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T}\right)\right) \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \Rightarrow A T \text{sinc}^2(fT)$$

per la dualita 6.4.2 :

$$A B \text{sinc}^2(Bt) \Rightarrow A \left(1 - \left(\frac{|f|}{B}\right)\right) \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

I segni negativi spariscono per il valore assoluto e per la parità della *rect*. Per verificare che i calcoli siano corretti posso colacolare la $X_{(f)}$ in 0 e

vedo quanto é l'area del segnale:

$$T^2 \text{sinc}(Tf) \Big|_0 = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} T \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = T$$

Osservazione: la funzione piramidale varia meno rapidamente nel *tempo* rispetto alla funzione rettangolare quindi lo spettro non occupa le alte frequenze, l'andamento é di $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$, é molto piú contenuto. La rect avendo un gradino varia molto rapidamente nel *tempo* e di conseguenza il suo spettro si estende a frequenze piú alte del segnale piramidale.

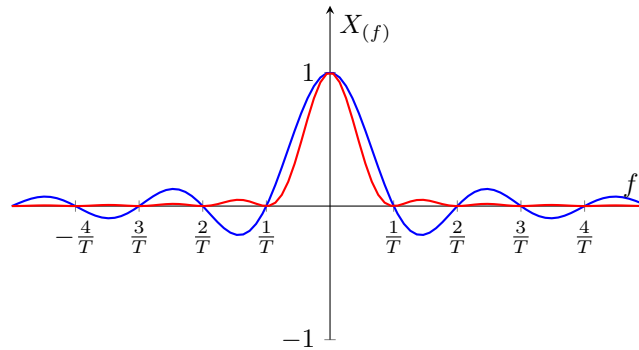


Figure 28: $\frac{\text{sinc}}{x}$, $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$

DOMANDA: ma la fase in tutto questo che ruolo ha? non avrei problemi avere anche sinc che cambiano la fase degli altri segnali? dopotutto si la sinc é brutta perché si estende all'infinito, ma proprio per questo la fase é sempre sporcata? cosa comporta nella ricostruzione del segnale? noi abbiamo visto finora l'ampiezza dopotutto

6.4.6 Derivazione in Frequenza

$$Ip : \left\{ x(t) \rightleftharpoons^{TCF} X(f) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \right.$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.7 Integrazione in Frequenza

$$Ip : \left\{ x(t) \rightleftharpoons^{TCF} X(f) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \right.$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.8 Convoluzione

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \stackrel{TCF}{=} X_{(f)} \\ x_{(t)} \stackrel{TCF}{=} X_{(f)} \\ z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} \end{cases}$$

$$Th : Z_{(f)} = X_{(f)} Y_{(f)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} z_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} e^{-j2\pi ft} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t-\tau)} e^{-j2\pi ft} dt d\tau \Rightarrow^{Th.6.4.3} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} x_{(\tau)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X_{(f)} Y_{(f)} \end{aligned}$$

Proprietà della convoluzione:

- Commutativa:

$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} = y_{(t)} \otimes x_{(t)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} z_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} d\tau \Rightarrow \tau = t - \tau' \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-\tau')} y_{(\tau')} d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(\tau')} x_{(t-\tau')} d\tau' = y_{(t)} \otimes x_{(t)} \end{aligned}$$

- Associativa:

$$(x_{(t)} \otimes y_{(t)}) \otimes z_{(t)} = x_{(t)} \otimes (y_{(t)} \otimes z_{(t)})$$

- Distributiva:

$$x_{(t)} \otimes (y_{(t)} + z_{(t)}) = x_{(t)} \otimes y_{(t)} + x_{(t)} \otimes z_{(t)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} z_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} (y_{(t-\tau)} + z_{(t-\tau)}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} + x_{(\tau)} z_{(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} z_{(t-\tau)} d\tau = x_{(t)} \otimes y_{(t)} + x_{(t)} \otimes z_{(t)} \end{aligned}$$

Tutte le proprietà sono valutate nel dominio del *tempo* ma valgono anche per il dominio della *frequenza*.

6.4.9 Prodotto

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightarrow{TCF} X(f) \\ x(t) \xrightarrow{TCF} X(f) \\ z(t) = x(t)y(t) \end{cases}$$

$$Th : Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) e^{j2\pi \alpha t} d\alpha y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi (f-\alpha)t} dt d\alpha \\ &\Rightarrow^{6.4.3} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) Y(f-\alpha) d\alpha = X(f) \otimes Y(f) \end{aligned}$$

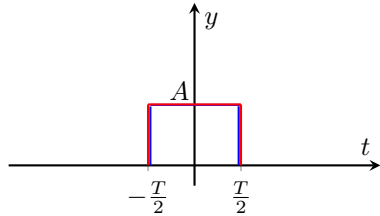
<i>Tempo</i>	<i>Frequenza</i>
<i>Convulsione</i>	<i>Prodotto</i>
<i>Prodotto</i>	<i>Convulsione</i>

6.4.10 Calcolo del prodotto di convoluzione

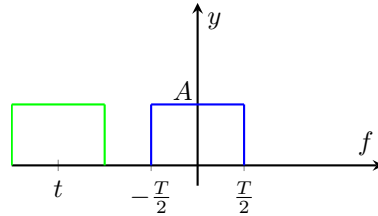
$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad y(-\alpha) \text{ e } y(\alpha) \text{ ruotato}$$

Facciamo un esempio con 2 *rect*:

$$x(t) = y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



(a) Grafico nel tempo, $y(-\alpha)$, $x(\alpha)$



(b) illustrazione dell'integrale al variare di t , $y(t-\alpha)$, $x(\alpha)$

Figure 29: Grafico per il calcolo del prodotto di convoluzione

All'aumentare di t $y(t-\alpha)$ si sposta sull'asse delle ascisse, se:

- $t = -\frac{T}{2}$: si allineano le due *rect* e il valore dell'integrale inizia a aumentare.
- $t = 0$: si ha il valore massimo del prodotto tra le due funzioni (in questo caso $A = 1$), l'integrale vale T .

- $t = \frac{T}{2}$: le due *rect* sono disgiunte, nel raggiungere questa posizione il valore dell'integrale é diminuito fino a 0.

Tracciamo l'andamento dell'integrale:

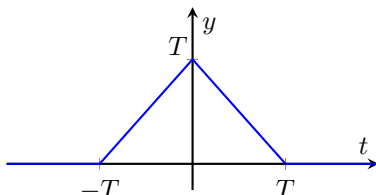
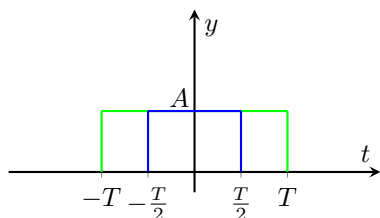


Figure 30: Integrale di convoluzione

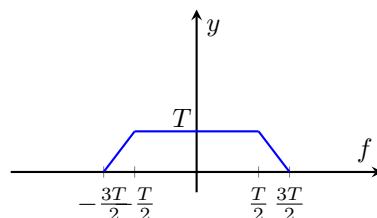
Osservazioni:

- Il prodotto di convoluzione ha come durata la somma delle durate dei segnali $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow [-T, T]$
- In $t = 0$ é l'area il prodotto dei segnali

Esempio con *rect* di durata T e $2T$:



(a) Grafico delle *rect*



(b) Risultato integrale di due *rect* diverse

Figure 31: Integrale di convoluzione di *rect* di durata diversa

Esempio *TCF* di un triangolo:

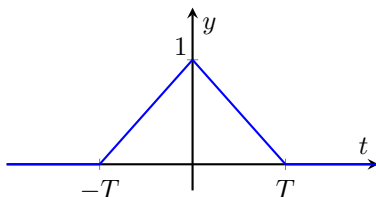


Figure 32: Integrale di convoluzione

Dal Th. di Convoluzione 6.4.8 sappiamo che é il prodotto di convoluzione di 2 rect di durata uguale a T :

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow^{6.4.8} T \text{sinc}(fT) \cdot T \text{sinc}(fT) \\ T^2 \text{sinc}(fT)$$

Esercizio appunti martorella triangoli a sx a dx:

6.5 Modulazione di Ampiezza

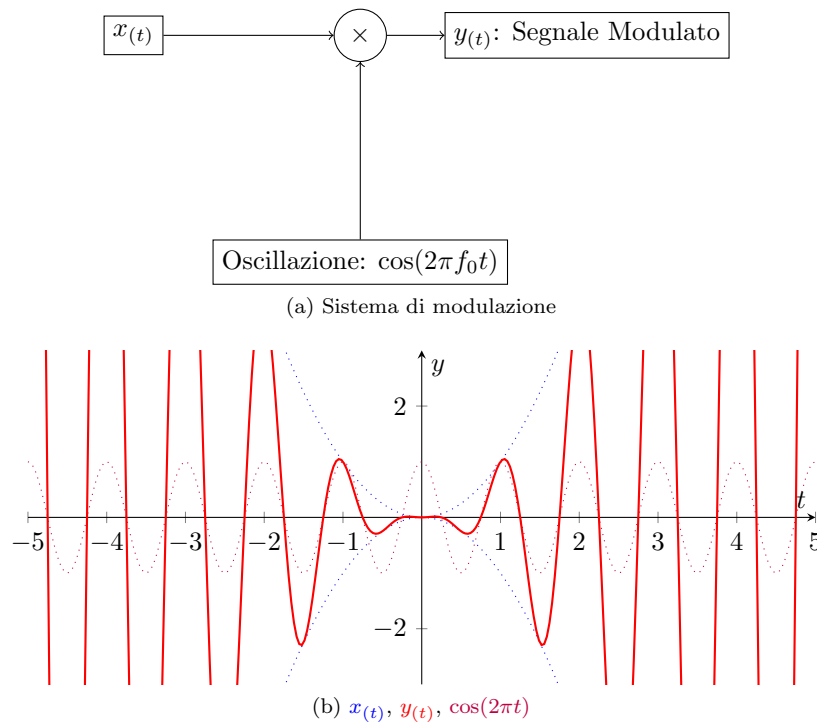


Figure 33: Esempio sistema di modulazione di ampiezza

L'oscillazione introdotta, $\cos(2\pi t)$, segue l'andamento di $x(t)$ Nel dominio della frequenza:

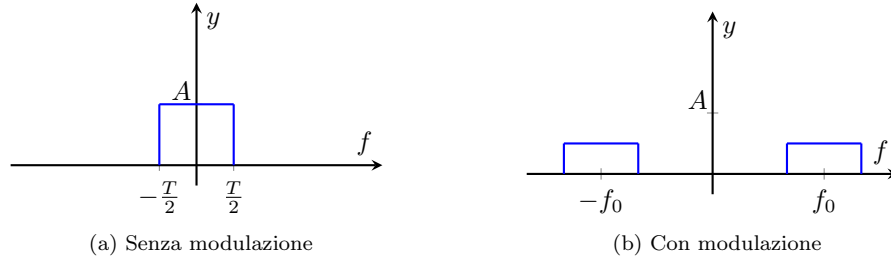


Figure 34: Segnale nel dominio della frequenza modulato e non

Serve per spostare la frequenza (es. di trasmissione) del segnale in modo tale, ad esempio, da non sovrapporre due segnali che sono sulla stessa frequenza. Se il segnale non fosse modulato si dice in **banda base (BB)** se il segnale é modulato si dice in **banda passante(BP)**.

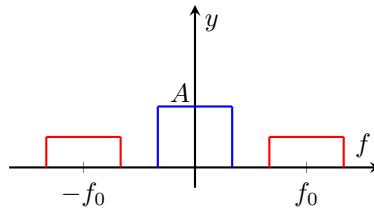


Figure 35: **BB**, **BP**

6.5.1 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xrightarrow{TCF} X(f) \end{cases}$$

/usr/share/codium/resources/app/out/vs/code/electron-sandbox/workbench/workbench.html

$$Th : Y(f) = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} + TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0) \text{ c.v.d} \end{aligned}$$

Esempio:

$$X_{(f)} = \frac{A}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{2B} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \frac{A}{2B} \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)$$

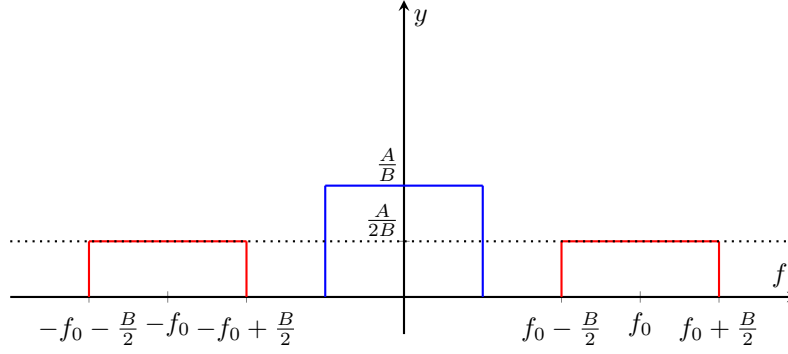


Figure 36: $X_{(f)}$, $Y_{(f)}$

fai cosa ha chiesto lui a fine lezione

6.5.2 Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$

$$Ip: \begin{cases} y(t) = x(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xrightarrow{TCF} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th: Y_{(f)} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} - TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)} \quad c.v.d \end{aligned}$$

6.5.3 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

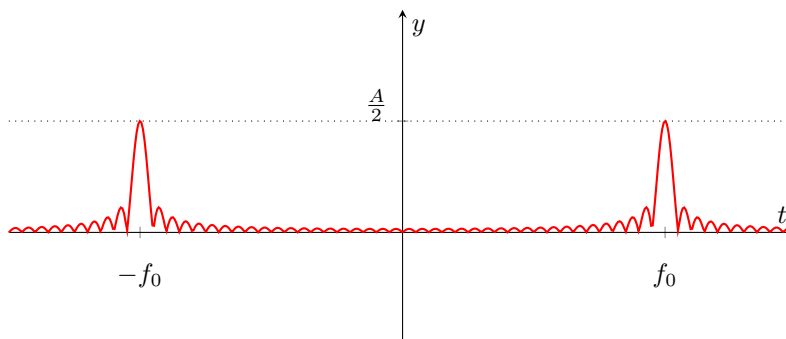
$$Ip: \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ x(t) \xrightarrow{TCF} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th: Y_{(f)} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)}$$

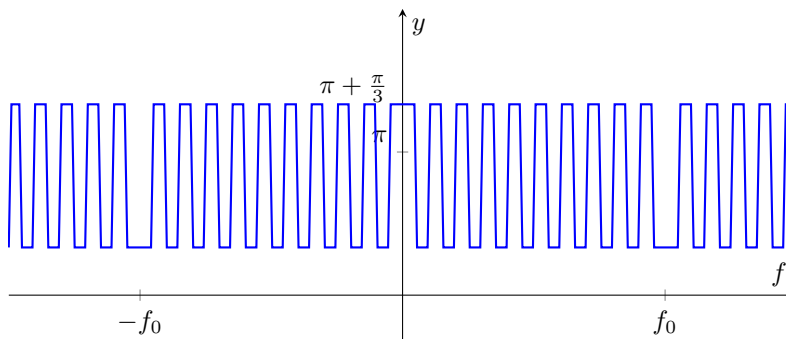
Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \frac{e^{j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
 &= TCF[x_{(t)}] \Big|_{f-f_0} + TCF[x_{(t)}] \Big|_{f+f_0} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d}
 \end{aligned}$$

Esempio:



(a) Ampiezza Mod. generica



(b) fase Mod. generica

Figure 37: Modulazione generica di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$ con $\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3})$

É legale cosa ho scritto sopra della modulazione generica?

6.5.4 Th. Modulazione con Esponenziale Complesso

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \\ x(t) \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = X(f-f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} = X(f-f_0) \end{aligned}$$

Posso notare che:

- Ritardo: $\rightarrow x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{(-j2\pi ft_0)}$
- Modulazione: $\rightarrow x(t)e^{(j2\pi f_0 t)} \rightleftharpoons X(f-f_0)$

Procedimento per la sintesi di un segnale:

- Derivo il segnale
- Verifico le ipotesi del Th. dell'Integrazione 6.4.5
- calcolo la TCF della derivata
- Applico il Th. dell'integrazione per calcolare $X(f)$

6.5.5 Demodulazione

Ci poniamo il problema di riportare il segnale modulato al segnale originale($g(t)$), dato:

$$x(t) = g(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Demoduliamo il segnale con $2 \cos(2\pi f_0 t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) 2 \cos(2\pi f_0 t) = g(t) \cos^2(2\pi f_0 t) \\ &= g(t) \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} = \frac{g(t)}{2} + \frac{g(t) \cos(4\pi f_0 t)}{2} \\ TCF[y(t)] &\Rightarrow^{Th. 6.5.1} \frac{2G(f)}{2} + \frac{2G(f-2f_0)}{2} + \frac{2G(f+2f_0)}{2} \\ &= G(f) + G(f-2f_0) + G(f+2f_0) \end{aligned} \quad (1)$$

Dall'ultima uguaglianza posso quindi usare un filtro in (BB) per rimuovere i segnali alle frequenze $\pm 2f_0$ e ricavare il mio segnale $G(f)$.

DOMANDA: posso anche quindi demodulare con un seno tanto non mi interessa quello che succede alle frequenze spostate, quindi però ritorno sulla fase, non é importante? usando un seno la ribalto praticamente no? ricontroll cio che stai dicendo bro non so se é giusto il ribaltamento

ALTRA DOMANDA: devo anche modulare il segnale abbastanza lontano dalla BB sennó quando demodulo mi autodisturbo il segnale? da qui deriva $\frac{1}{T} < 2BB$

ALTRA DOMANDA: quindi se volessi captare piú segnali mi conviene utilizzare circuiti diversi? oppure posso modulare e demodulare a piacimento i segnali tenendo conto su quali frequenze ho modulato in modo tale da sapere dove vanno a finire i segnali e recuperarli? tanto non mi interessa su quale frequenza finiscano finché non diventino non recuperabili per sovrapposizione giusto?

Riporto un po di esempi di demodulazione di una o piú *rect*: Esempio di Demodulazione

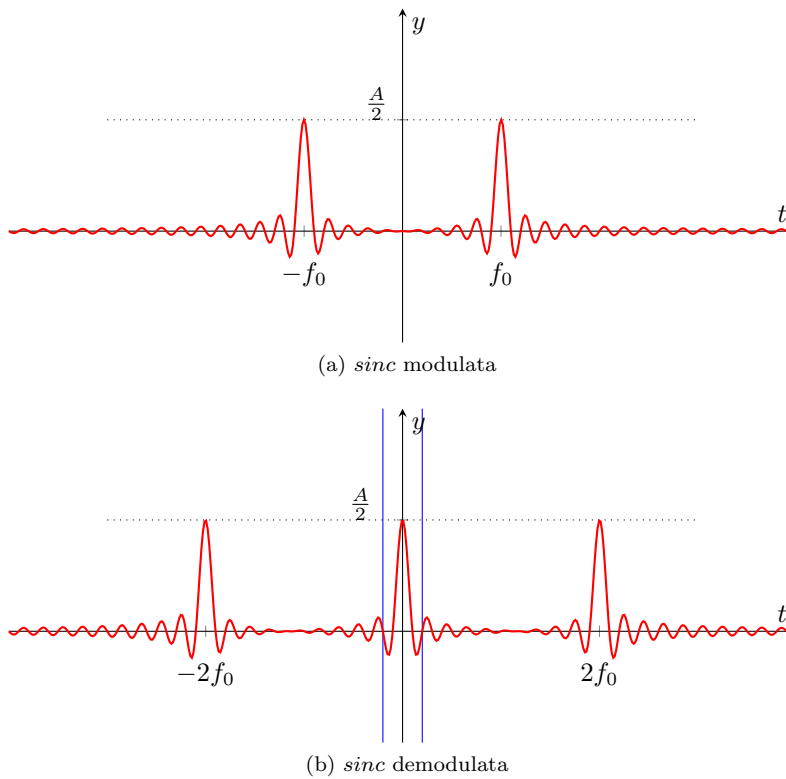
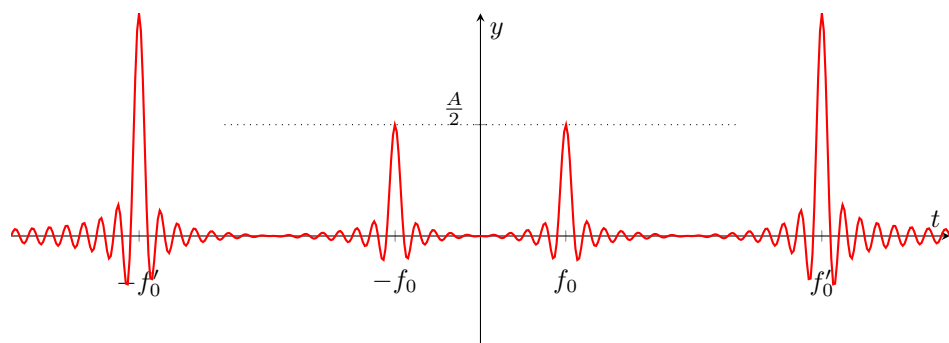
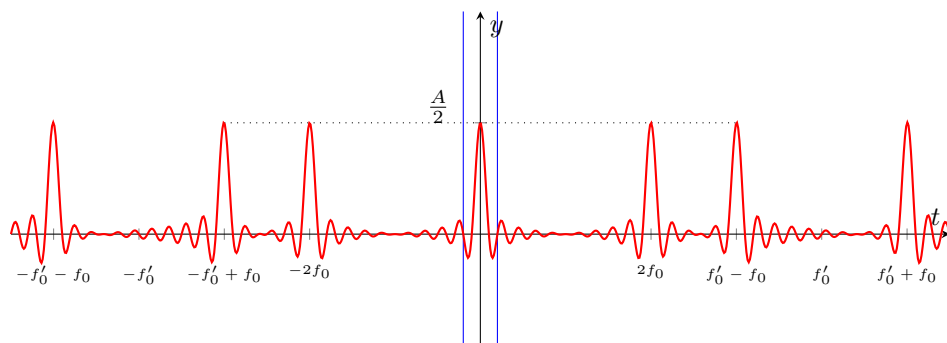


Figure 38: Demodulazione di una *sinc*

Nel caso di piú segnali durante la demodulazione il segnale che voglio recuperare viene spostato in **BB** mentre gli altri segnali presenti sullo spettro vengono a loro volta modulati però con un f_0 diverso rispetto al loro f'_0 :



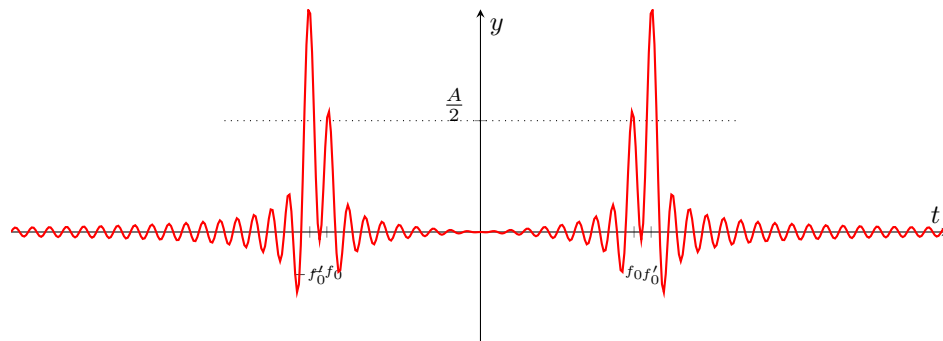
(a) Due *sinc* modulate



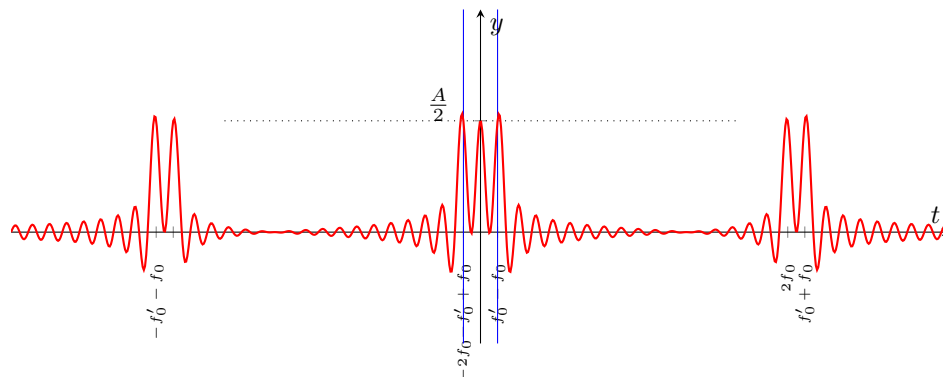
(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 39: Demodulazione di due *sinc*

Potrei però trovarmi in situazioni delle quali non posso recuperare il segnale



(a) Due *sinc* modulate



(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 40: Demodulazione di due *sinc* non recuperabili

Come possiamo vedere nella regione della **BB**, il segnale é molto sporco, magari può essere confuso con un cos e non una sinc. inoltre ora qui ho usato numeri interi per fare il *plot* quindi non si accavallano così male ma si accavallano solo in $\frac{1}{T}$ se usassi altri valori sarebbe ancora più sporco il segnale.

Adesso proviamo a calcolare quanti segnali possiamo trasmettere in una banda:

Ho un segnale rettangolare che dura 5 minuti e una banda di $20MHz = 20 \cdot 10^6 Hz$

$$f_{segnale} = \frac{1}{5 \cdot 60} = \frac{1}{300} Hz$$

$$n^\circ \text{ di segnali} = \frac{20 \cdot 10^6}{f_{segnale}} = 20 \cdot 10^6 \cdot 300 = 6 \cdot 10^9$$

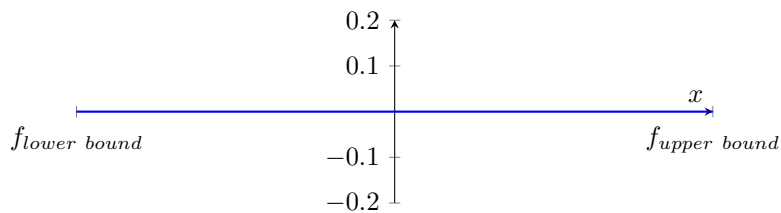


Figure 41: Spettro per la trasmissione

6.5.6 Funzionamento di un Radar

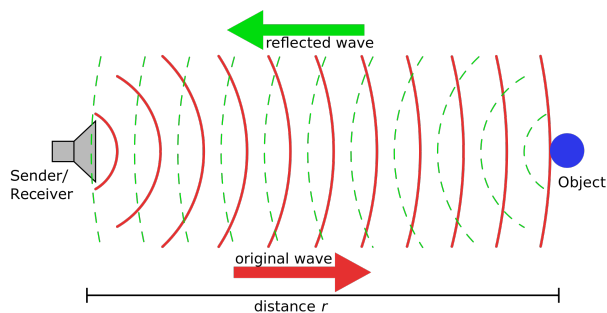


Figure 42: Spettro per la trasmissione

La sorgente emette un'onda continua e passivamente capta per le onde riflesse dagli oggetti. Il calcolo della distanza si basa sulla capacità dei materiali di riflettere le onde, più la frequenza dell'onda è alta più i materiali riescono a riflettere. L'emettitore, in presenza di ostacolo, riceve il segnale riflesso (*eco*) e misura il ritardo dell'*eco* rispetto al segnale originale per poi calcolarne la distanza. Prendiamo un emettitore di onde rettangolari.

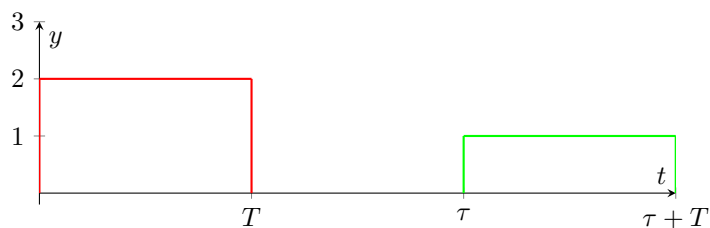


Figure 43: Spettro per la trasmissione

Indichiamo con τ il ritardo di ricezione dell'*eco* e la distanza che separa il radar dall'oggetto d :

$$d = \frac{c\tau}{2}$$

Compare un fattore $\frac{1}{2}$ dovuto al segnale che percorre due volte la distanza tra l'emettitore e l'oggetto. Possiamo notare che l'eco ha ampiezza minore poiché dell'energia è stata assorbita dal materiale o una porzione del segnale originale ha oltrepassato il materiale stesso.

Analizziamo in frequenza cosa succede.

Volgiamo realizzare un radar a onda rettangolare che rileva a un massimo di 15 metri di distanza e a un minimo di 1,5 metri. Possiamo calcolare i valori di ritardo massimo e minimo:

$$\tau_{min} = \frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 0.1 \mu s$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 1.5}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 10 ns$$

Il radar funziona finché $T \ll \tau_{min}$, se avessi un $\tau_{min} > T$ non potrei distinguere il segnale inviato da quello ricevuto.

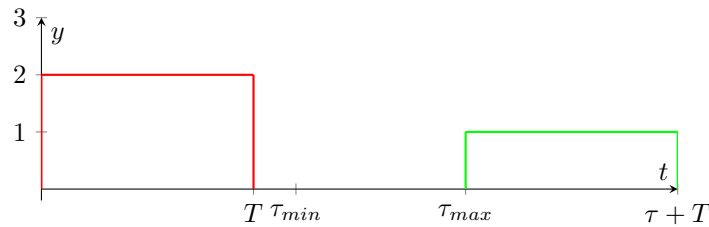


Figure 44: Limiti di ritardo del radar

Nel nostro caso potremmo scegliere un $T \simeq 1 ns \simeq 10^{-9}$ per rispettare i limiti imposti dall'esercizio. Ma analizzando l'intervallo frequenziale della TCF della funzione rettangolo, una $sinc(x)$, il nostro segnale ha componenti frequenziali significative nell'ordine dei GHz, $\frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-9}} = 1 GHz$. I segnali nell'ordine dei GHz oltrepassano con facilità gli ostacoli, basti vedere le bande di funzionamento dei cellulari e il Wi-Fi. Si utilizzano segnali con l'ordine di centinaia se non migliaia di Hz, possiamo vedere come la lunghezza d'onda del segnale giochi un ruolo fondamentale:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$$

$$\lambda_0 = \begin{cases} f_0 = 3GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.1m \\ f_0 = 30GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.01m \\ f_0 = 300GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.001m \\ f_0 = 3000GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.0001m \end{cases}$$

come funzionano il lidar e il sonar? come hanno fatto a rilevare i movimenti con il wifi?

6.6 Delta di Dirac

Si definisce Delta di Dirac $\delta_{(t)} = \frac{d}{dt}U_{(t)}$ con $U_{(t)}$ funzione gradino. Più correttamente si definisce Delta di Dirac la funzione che se integrata restituisce il gradino unitario:

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt \rightarrow U_{(t)}$$

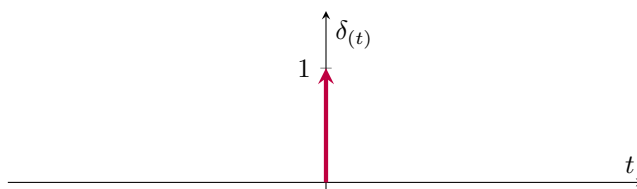


Figure 45: Delta di Dirac

L'ampiezza della funzione é dovuta alla costante moltiplicativa, ma alla fine rimane sempre una funzione impulso.

boh amplia magari

6.6.1 Proprietá del Delta di Dirac

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt = 1$
- Proprietá Campionatrice:
 $Ip: x_{(t)}$ continua in t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \delta_{(t-t_0)} dt = x_{(t_0)}$$

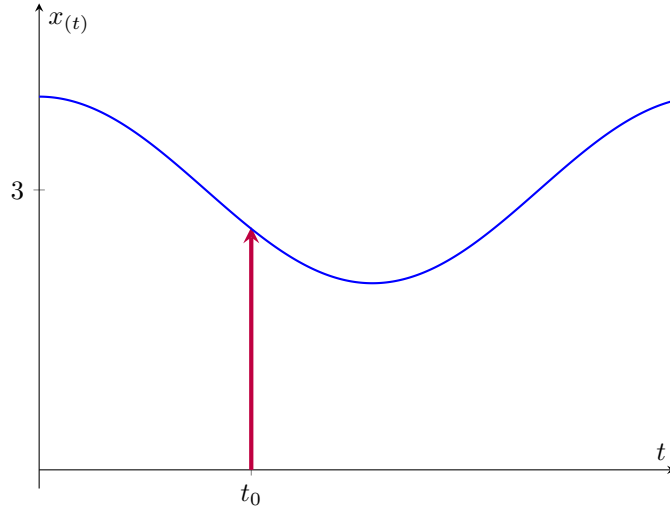


Figure 46: Proprietà Campionatrice

- Parità: $\delta_{(t)} = \delta_{(-t)}$
- $x_{(t)} \delta_{(t-t_0)} dt = x_{(t_0)} \delta_{(t-t_0)}$
- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = x_{(t)}$ Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \delta_{(t-\tau)} d\tau \Rightarrow^{6.6.1} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \delta_{(\tau-t)} d\tau = x_{(t)}$$

- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = x_{(t-t_0)}$ Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \delta_{(t-t_0-\tau)} d\tau \Rightarrow^{6.6.1} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \delta_{(\tau-(t-t_0))} d\tau = x_{(t-t_0)}$$

6.6.2 TCF della Delta di Dirac

$$x_{(t)} = A \delta_{(t)}$$

$$TCF[x_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt \Rightarrow^{6.6.1 t_0=0} e^{-j2\pi f t} \Big|_{t=0} = A$$

$$A \delta_{(t)} \xleftrightarrow{TCF} A$$

Per la dualità 6.4.2 :

$$A \xleftrightarrow{TCF} A \delta_{(-f)} = A \delta_{(f)}$$

Caso con ritardo:

$$A\delta_{(t-t_0)} \xrightarrow{TCF} Ae^{-j2\pi ft_0}$$

Per la dualita 6.4.2 :

$$Ae^{-j2\pi f_0 t} \xrightarrow{TCF} A\delta_{(-f-f_0)} \text{ oppure } A\delta_{(f+f_0)}?$$

7 Teoria Dei Codici

8 Formulario

8.1 Trigonometria

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3. $\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4. $\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ È un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi$:
 $k \in \mathbb{Z}$

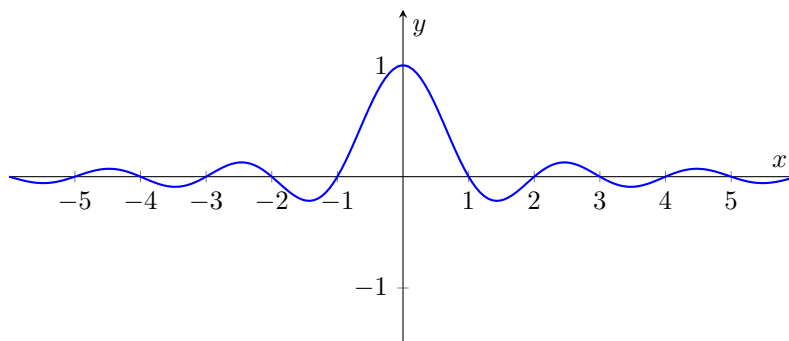


Figure 47: grafico $\text{sinc}(\alpha)$

8.1.1 Formule di addizione

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

8.1.2 Formule di duplicazione

1. $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2 \sin^2(\alpha) \end{cases}$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

8.1.3 Formule di bisezione

$$1. \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$2. \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$3. \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$$

8.2 Segnali Notevoli

$$1. x_R \triangleq A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad T = \text{durata}$$

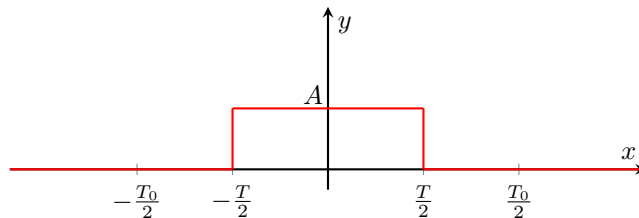


Figure 48: Rappresentazione di $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$2. \operatorname{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

È un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi : k \in \mathbb{Z}$

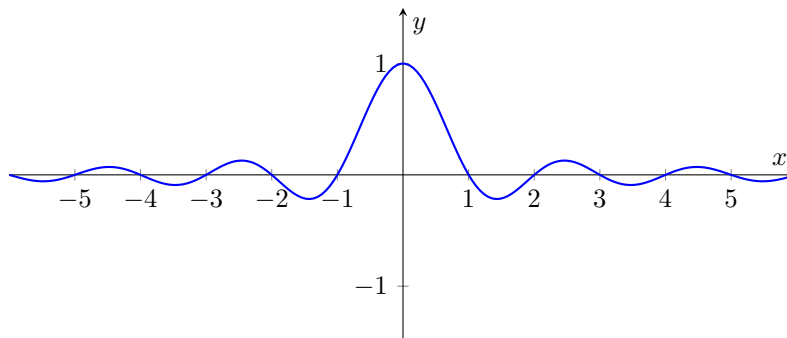


Figure 49: grafico $\operatorname{sinc}(\alpha)$

La banda di una sinc è l'intervallo in cui si annulla $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$, es: se $\text{banda} = 1$ se $T = 1$

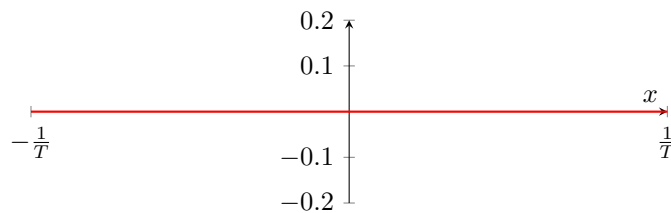


Figure 50: banda

3.

4.

8.3 Grandezze Fisiche

- Hertz

8.4 Varie

- Calcolo della TCF su MATLAB:

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

MATLAB calcola un'approssimazione dell'integrale della TCF con un periodo T :

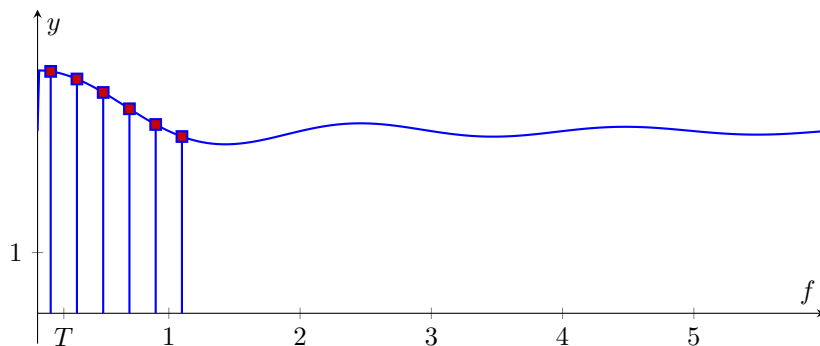


Figure 51: Campionamento MATLAB

$$X_{(f)} = \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi f n T}$$

Ma nella f é una variabile continua, quindi a sua volta bisogna variare f :

$$X_{(fk)} = X_{(k\Delta f)} = \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi \Delta f n T}$$

e la condizione sul Δf é che $\Delta f \ll BB$.

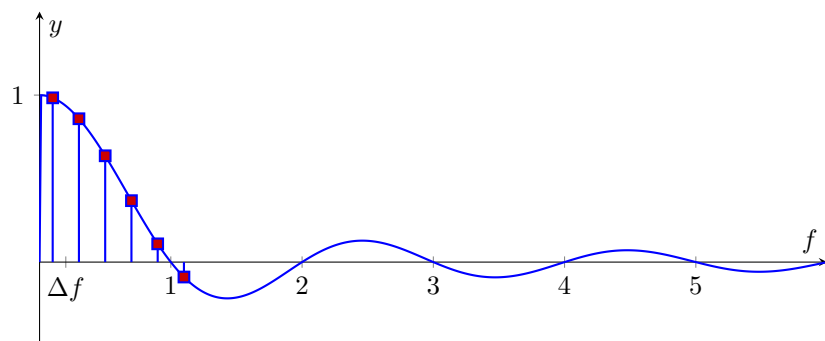


Figure 52: Δf

Alphabetical Index

Segnale Troncato, 8