

# Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:

Luca Sanguinetti - Marco Moretti



Figure 1: uwu

AA 2022 - 2023

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Richiamo Sui Numeri Complessi</b>	<b>4</b>
2.1	Struttura di un numero complesso . . . . .	4
2.1.1	Forma Cartesiana . . . . .	4
2.1.2	Forma Polare . . . . .	4
2.1.3	Complesso Coniugato . . . . .	4
2.2	Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana . . . . .	4
2.3	Operazioni . . . . .	5
2.4	Funzioni Complesse a Variabile Reale . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Introduzione Ai Segnali</b>	<b>6</b>
3.1	Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini . . .	6
<b>4</b>	<b>Segnali Analogici</b>	<b>7</b>
4.1	Grandezze dei segnali Analogici . . . . .	7
4.1.1	Potenza istantanea . . . . .	7
4.1.2	Energia . . . . .	7
4.1.3	Potenza Media . . . . .	7
4.1.4	Valore Efficace . . . . .	7
4.1.5	Valore Medio . . . . .	7
4.2	Analisi energetiche su segnali comuni . . . . .	8
4.2.1	Costante . . . . .	8
4.2.2	Sinusoide . . . . .	8
4.2.3	Gradino . . . . .	9
4.2.4	Rettangolo . . . . .	10
4.2.5	Esponenziale unilatera . . . . .	10
4.2.6	Esponenziale bilatera . . . . .	10
4.2.7	segno $\text{sgn}(\mathbf{x}_{(t)})$ . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Trasformata Serie Di Fourier</b>	<b>11</b>
5.1	Segnale Periodico . . . . .	11
5.2	Trasformata Serie Di Fourier . . . . .	11
5.2.1	Rappresentazione di $X_k$ . . . . .	11
5.3	Calcolo dei coefficienti $X_k$ per segnali noti . . . . .	12
5.3.1	$A \cos(2\pi f_0 t)$ . . . . .	12
5.3.2	$A \sin(2\pi f_0 t)$ . . . . .	12
5.3.3	Treno di rect . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Trasformata Continua Di Fourier</b>	<b>14</b>

<b>7</b>	<b>Formulario</b>	<b>15</b>
7.1	Trigonometria . . . . .	15
7.1.1	Formule di addizione . . . . .	15
7.1.2	Formule di duplicazione . . . . .	15
7.1.3	Formule di bisezione . . . . .	15
7.2	Segnali Comuni . . . . .	16
	<b>Alphabetical Index</b>	<b>17</b>

# **1 Introduzione**

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.

I testi consigliati sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson

## 2 Richiamo Sui Numeri Complessi

### 2.1 Struttura di un numero complesso

#### 2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = \text{Re}\{z\}$$

$$\text{Parte Immaginaria: } b = \text{Im}\{z\}$$

$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

#### 2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{j\theta}$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$

$$\text{Fase: } \theta = \arg(z)$$

grafico forma polare-cartesiana

#### 2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana

$$z^* = a - jb$$

- Forma Polare

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$

### 2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria

$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$

- Modulo

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Fase

$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

## 2.3 Operazioni

Dati:  $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ ,  $z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

- Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2$$

## 2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C} \quad t \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) = a(t) + jb(t) = \rho(t)e^{j\theta(t)}$$

- Integrale

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b a(t) + jb(t) dt = \int_a^b a(t) dt + j \int_a^b b(t) dt$$

- Derivata

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t)$$

### 3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto  $\forall t$
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche

#### 3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
  - Segnale tempo continuo:  $t \in \mathbb{R}$  assume con continuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
  - Segnale a tempo discreto:  $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$   $T$  = periodo di campionamento, la variabile temporale assume solo valori discreti



Figure 2: tempo continuo, tempo discreto

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
  - Segnale ad ampiezza continua:  $x(t)$  continua, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
  - Segnale ad ampiezza discreta:  $x(t)$  discreta, se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica può assumere solo valori discreti



Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Segnale	Cotinuo	Discreto	$t$
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x(t)$			

## 4 Segnali Analogici

### 4.1 Grandezze dei segnali Analogici

#### 4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x(t)|^2$$

#### 4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

#### 4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$T = \text{Periodo di osservazione}$



Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

dalla quale possiamo ricavare se  $T \rightarrow \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$ :

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

#### 4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

#### 4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)_T} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$x_{(t)_T} = \text{Segnale troncato}$



## 4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

### 4.2.1 Costante

$$x(t) = A \quad \forall t$$



Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

### 4.2.2 Sinusoide

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Figure 6: Segnale sinusoidale

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 7.1 il  $\sin^2(\alpha)$  e lo sostituiamo (2.1) 7.1.2  
 $\cos(2\alpha) = \frac{1+\cos^2(\alpha)}{2}$

$$\begin{aligned} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\ &= \frac{A}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

#### 4.2.3 Gradino

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Figure 7: Segnale gradino

#### 4.2.4 Rettangolo

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Figure 8: Segnale rettangolo

#### 4.2.5 Esponenziale unilatera

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Figure 9: Segnale esponenziale unilatera

#### 4.2.6 Esponenziale bilatera

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Figure 10: Segnale esponenziale bilatera

#### 4.2.7 segno $\text{sgn}(x(t))$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Figure 11: Segnale  $\text{sgn}(x)$

## 5 Trasformata Serie Di Fourier

### 5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x(t) = x(t - kT_0)$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

### 5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo  $T_0$  che soddisfa le condizioni di Dirichlet e la sua  $E_x < \infty (C.S.)$  può essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di  $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k \in \mathbb{C}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

$$x(t) = \dots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

$X_0$  corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocità:  $\forall x(t) \exists! X_k$ :

$$x(t) \rightleftharpoons X_k$$

*Segnale Analogico Periodico  $\rightleftharpoons$  Sequenza Complessa*

#### 5.2.1 Rappresentazione di $X_k$

Essendo  $X_k$  un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



Figure 12: Spettro del segnale

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

### 5.3 Calcolo dei coefficienti $X_k$ per segnali noti

#### 5.3.1 $A \cos(2\pi f_0 t)$

$$x_{(t)} A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti  $X_k$ :

$$x_{(t)} = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:



Figure 13: Spettro TSF del coseno

#### 5.3.2 $A \sin(2\pi f_0 t)$

$$x_{(t)} A \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti  $X_k$ :

$$x_{(t)} = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} - X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j}$$

$$|X_k| = \begin{cases} \left|\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ \left|-\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle \frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle \left|-\frac{A}{2j}\right| = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro TSF del seno

### 5.3.3 Treno di rect

## 6 Trasformata Continua Di Fourier

## 7 Formulario

### 7.1 Trigonometria

1.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2.  $\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3.  $\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4.  $\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$  È un  $\sin(\alpha)$  smorzato secondo  $\frac{1}{x}$  che si annulla in  $k\pi$  :  
 $k \in \mathbb{Z}$



Figure 15: grafico  $\text{sinc}(\alpha)$

#### 7.1.1 Formule di addizione

1.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
2.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$
3.  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

#### 7.1.2 Formule di duplicazione

1.  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
2.  $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2 \sin^2(\alpha) \end{cases}$
3.  $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

#### 7.1.3 Formule di bisezione

1.  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$
2.  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$
3.  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} \\ \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \end{cases}$



## 7.2 Segnali Comuni

## Alphabetical Index

Segnale Troncato, 7