

Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:

Luca Sanguinetti - Marco Moretti



Figure 1: uwu

AA 2022 - 2023

Contents

1	Introduzione	3
2	Richiamo Sui Numeri Complessi	4
2.1	Struttura di un numero complesso	4
2.1.1	Forma Cartesiana	4
2.1.2	Forma Polare	4
2.1.3	Complesso Coniugato	4
2.2	Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana	4
2.3	Operazioni	5
2.4	Funzioni Complesse a Variabile Reale	5
3	Introduzione Ai Segnali	6
3.1	Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini	6
4	Segnali Analogici	8
4.1	Grandezze dei segnali Analogici	8
4.1.1	Potenza istantanea	8
4.1.2	Energia	8
4.1.3	Potenza Media	8
4.1.4	Valore Efficace	9
4.1.5	Valore Medio	9
4.2	Analisi energetiche su segnali comuni	9
4.2.1	Costante	9
4.2.2	Cosinusoide	10
4.2.3	Gradino	12
4.2.4	Rettangolo	12
4.2.5	Esponenziale unilatera	13
4.2.6	Esponenziale bilatera	15
4.2.7	segno $\text{sgn}(\mathbf{x}_{(t)})$	15
4.3	Segnal Periodici	16
5	Trasformata Serie Di Fourier	18
5.1	Segnale Periodico	18
5.2	Trasformata Serie Di Fourier	18
5.2.1	Rappresentazione di X_k	18
5.3	Propiet� della TSF	19
5.4	Linearit�	19
5.5	Simmetria Hermitiana	19
5.6	Calcolo dei coefficienti X_k per segnali noti	19
5.6.1	$A \cos(2\pi f_0 t)$	19
5.6.2	$A \sin(2\pi f_0 t)$	20
5.6.3	Treno di rect	21

6	Trasformata Continua Di Fourier	24
6.1	Segnali Aperiodici	24
6.2	Equazioni di Analisi e Sintesi	25
6.2.1	Equazione di Analisi	25
6.2.2	Equazione di Sintesi	25
6.2.3	TCF di una $\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	26
6.3	Proprietá	27
6.3.1	Simmetria hermitiana	28
6.3.2	Paritá	28
6.3.3	Disparitá	28
6.4	Teoremi relativi alla TCF	28
6.4.1	Linearitá	28
6.4.2	Dualitá	29
6.4.3	Ritardo	30
6.4.4	Derivazione	31
6.4.5	Integrazione	32
6.4.6	Derivazione in Frequenza	34
6.4.7	Integrazione in Frequenza	34
6.4.8	Convoluzione	35
6.4.9	Prodotto	35
6.5	Modulazione di Ampiezza	35
6.5.1	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$	36
6.5.2	Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$	37
6.5.3	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	37
6.5.4	Th. Modulazione con Esponenziale Complesso	39
6.5.5	Demodulazione	39
7	Teoria Dei Codici	42
8	Formulario	43
8.1	Trigonometria	43
8.1.1	Formule di addizione	43
8.1.2	Formule di duplicazione	43
8.1.3	Formule di bisezione	44
8.2	Segnali Notevoli	44
	Alphabetical Index	46

1 Introduzione

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.

I testi consigliati sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson

2 Richiamo Sui Numeri Complessi

2.1 Struttura di un numero complesso

2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = \text{Re}\{z\}$$

$$\text{Parte Immaginaria: } b = \text{Im}\{z\}$$

$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{j\theta} = \rho \cos(\theta) + j\rho \sin(\theta)$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$

$$\text{Fase: } \theta = \arg(z) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

grafico forma polare-cartesiana

2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana

$$z^* = a - jb$$

- Forma Polare

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$

2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria

$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$

- Modulo

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}$$

- Fase

$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.3 Operazioni

Dati: $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$, $z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

- Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2 = \rho^2$$

2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) = a(t) + jb(t) = \rho(t)e^{j\theta(t)}$$

- Integrale

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b a(t) + jb(t) dt = \int_a^b a(t) dt + \int_a^b jb(t) dt$$

- Derivata

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} a(t) + jb(t) = \frac{d}{dt} a(t) + \frac{d}{dt} jb(t)$$

3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto $\forall t$, per ogni istante temporale si conosce il valore del segnale, spesso rappresentati con funzioni analitiche.
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche, ad esempio un rumore.

3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
 - Segnale tempo continuo: $t \in \mathbb{R}$ assume con continuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
 - Segnale a tempo discreto: $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$ T = periodo di campionamento, la variabile temporale assume solo valori discreti

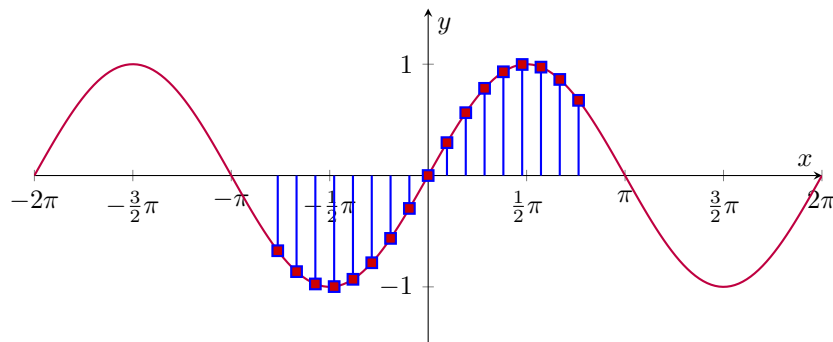


Figure 2: tempo continuo, tempo discreto: $T = 0.3$

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
 - Segnale ad ampiezza continua: $x_{(t)}$ *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
 - Segnale ad ampiezza discreta: $x_{(t)}$ *discreta*, se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica può assumere solo valori discreti

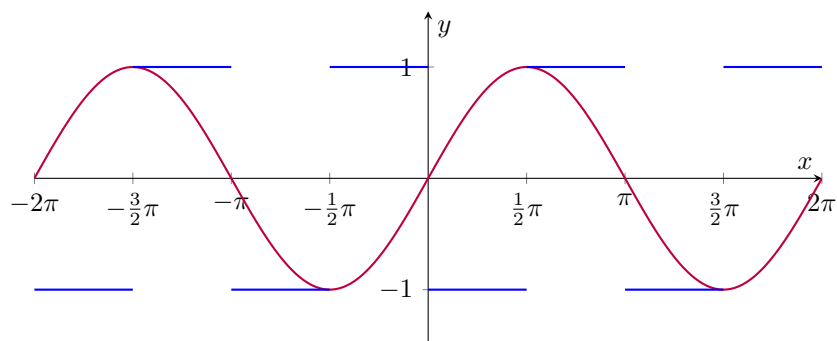


Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Possiamo costruire una tabella per categorizzare le tipologie di segnali:

Segnale	Continuo	Discreto	t
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x(t)$			

4 Segnali Analogici

4.1 Grandezze dei segnali Analogici

4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x(t)|^2$$

$$\text{Se } x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow P_x \triangleq x_{(t)}^2$$

4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{Energia} : \begin{cases} \text{Energia finita} & (\text{Segnali fisici}) \\ \text{Energia infinita} & (\text{Segnali ideali}) \end{cases}$$

4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$T = \text{Periodo di osservazione}$

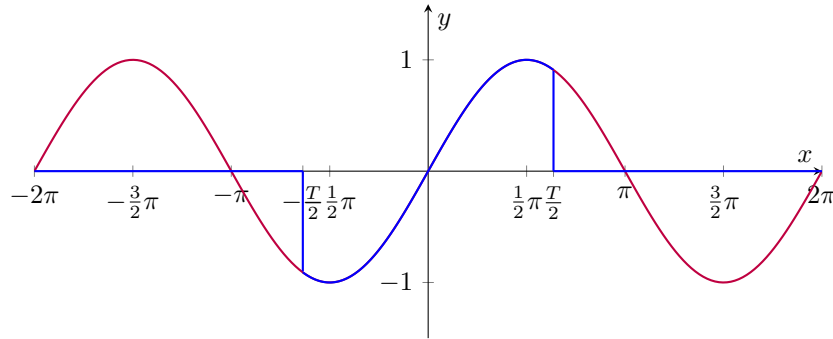


Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

$$E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

dalla quale possiamo ricavare se $T \rightarrow \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$:

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Possiamo ricavare delle proprietà secondo energia e potenza:

- Se $x(t)$ ha $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$
- Se $x(t)$ ha $P_x = k \neq 0 < \infty \Rightarrow E_x = \infty$

4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)_T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$x(t)_T = \text{Segnale troncato}$$

4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

4.2.1 Costante

$$x(t) = A \quad \forall t$$

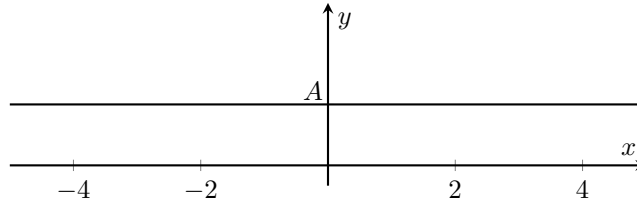


Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

4.2.2 Cosinusoide

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$A = \text{Ampiezza}$, $f_0 = \frac{1}{T} = \text{frequenza}$, $\phi = \text{fase}$

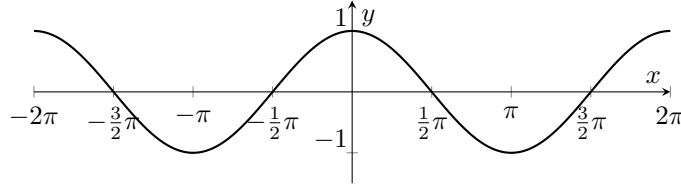


Figure 6: Segnale cosinusoidale ($\phi = 0$)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 8.1 il $\sin^2(\alpha)$ e lo sostituiamo (2.1) 8.1.2

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 + \cos^2(\alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\ &= \frac{A}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

4.2.3 Gradino

$$U(t) = x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

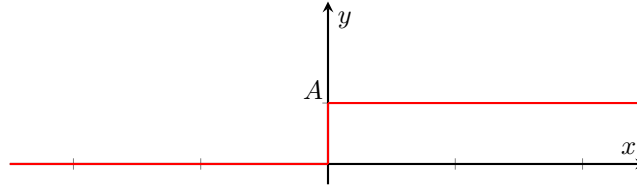


Figure 7: Segnale gradino

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

4.2.4 Rettangolo

$$x(t) = A \text{ rect} \left(\frac{t}{T} \right) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

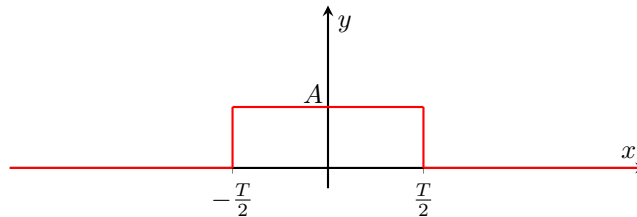


Figure 8: Segnale rettangolo

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = A^2 T$$

- Potenza Media: $T < T_0$ se non fosse così avrei una costante

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} A^2 T = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} AT = 0 \end{aligned}$$

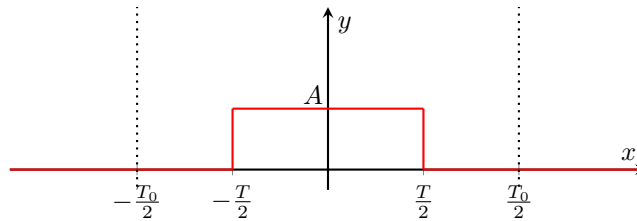


Figure 9

4.2.5 Esponenziale unilatera

$$x(t) = e^{-t} U(t)$$

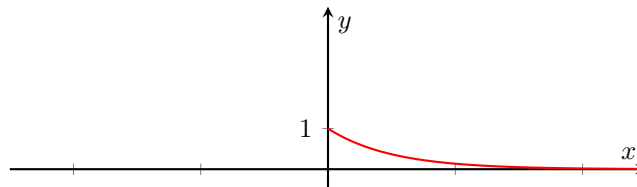


Figure 10: Segnale esponenziale unilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left. \frac{1}{2} e^{-2t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-1) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

4.2.6 Esponenziale bilatera

$$x(t) = e^{-|t|}$$

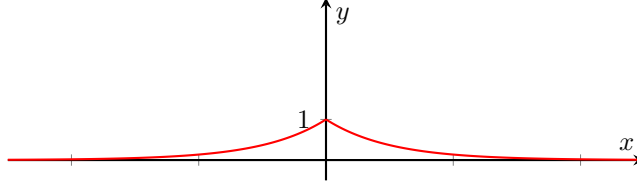


Figure 11: Segnale esponenziale bilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t}U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t}U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-2)e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{2}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} = 0 \end{aligned}$$

4.2.7 segno $\text{sgn}(x(t))$

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

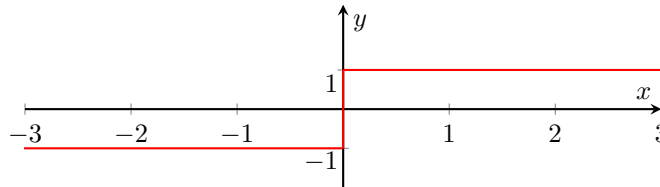


Figure 12: Segnale $\text{sgn}(x)$

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}^2 t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 1$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 1 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

4.3 Segnali Periodici

Un segnale è periodico se:

$$x(t) = x(t - kT_0) \quad k \in \mathbb{Z}, t_0 \in \mathbb{R}^+, T_0 = \text{Periodo del segnale}$$

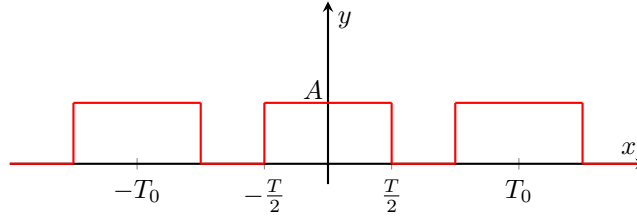


Figure 13: Segnale periodico

Si possono definire le seguenti grandezze:

- Energia di un segnale periodico

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_0}{2} + kT_0}^{\frac{T_0}{2} + kT_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} kX = \infty \end{aligned}$$

Tutti i segnali iperperiodici hanno quindi $E_x = \infty$

- Potenza media di un segnale periodico

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \Rightarrow T = kT_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} |x(t)|^2 dt \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

Posso calcolare la potenza di un singolo periodo:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Valore medio di un segnale periodico

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

5 Trasformata Serie Di Fourier

5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x(t) = x(t - kT_0)$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo T_0 che soddisfa le condizioni di Dirichlet e la sua $E_x < \infty (C.S.)$ può essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k \in \mathbb{C}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

$$x(t) = \dots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

X_0 corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale, inoltre le componenti X_k prendono il nome di armoniche alla frequenza f corrispondente

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocità: $\forall x(t) \exists! X_k$:

$$x(t) \rightleftharpoons X_k$$

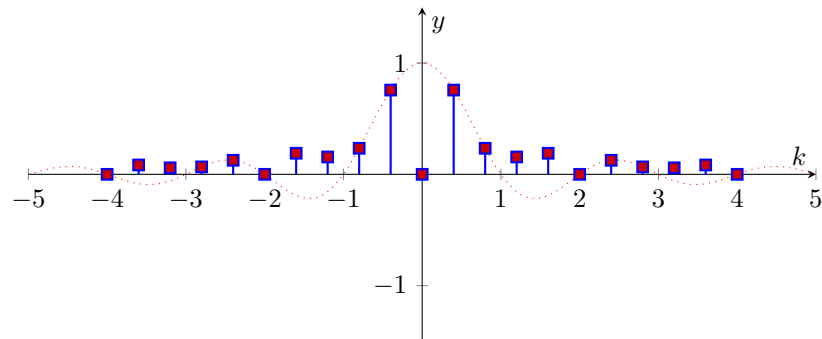
$$Segnale Analogico Periodico \rightleftharpoons Sequenza Complessa$$

5.2.1 Rappresentazione di X_k

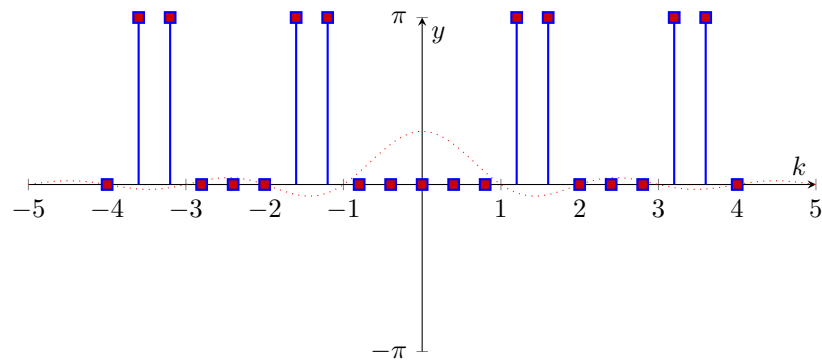
Essendo X_k un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro di un treno di rect

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

5.3 Proprietá della TSF

5.4 Linearitá

5.5 Simmetria Hermitiana

5.6 Calcolo dei coefficienti X_k per segnali noti

5.6.1 $A \cos(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti X_k :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} + X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

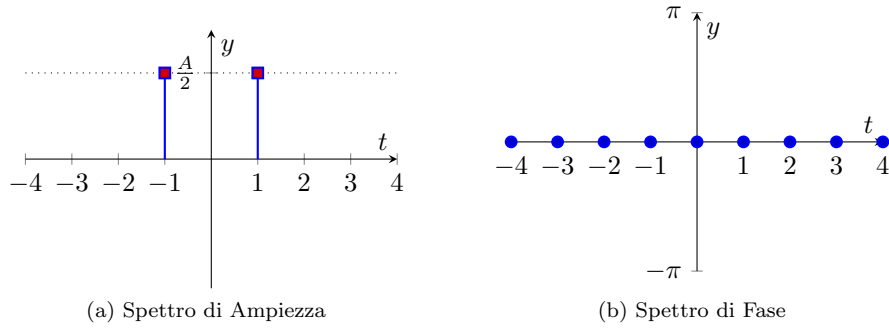


Figure 15: Spettro TSF del coseno $A > 0$

5.6.2 $A \sin(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti X_k :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} - X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$\begin{aligned} X_{-1} &= -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j} \\ |X_k| &= \begin{cases} \left|\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ \left|-\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle \frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle -\frac{A}{2j} = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

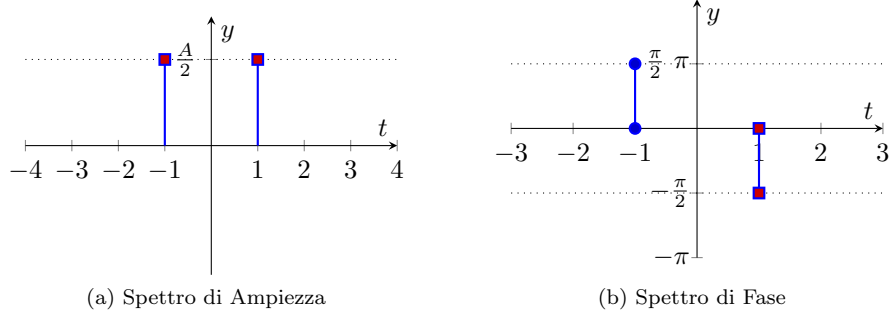


Figure 16: Spettro TSF del seno $A > 0$

5.6.3 Treno di rect

$x_R = A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$ Segnale periodico $\rightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$
 $T_0 = \text{periodo}, T = \text{durata} \rightarrow T < T_0$, se così non fosse avremmo una costante

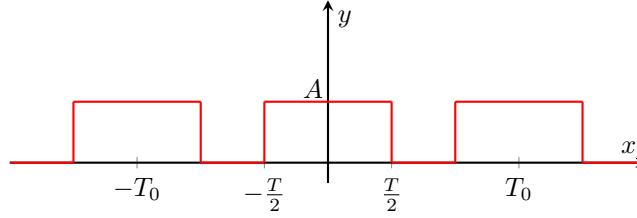
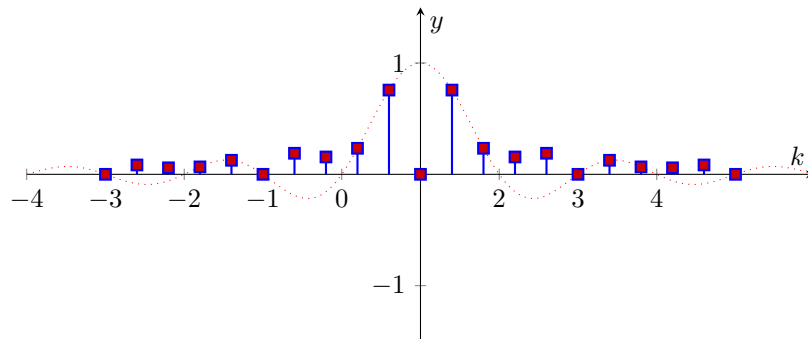


Figure 17: Treno di $A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

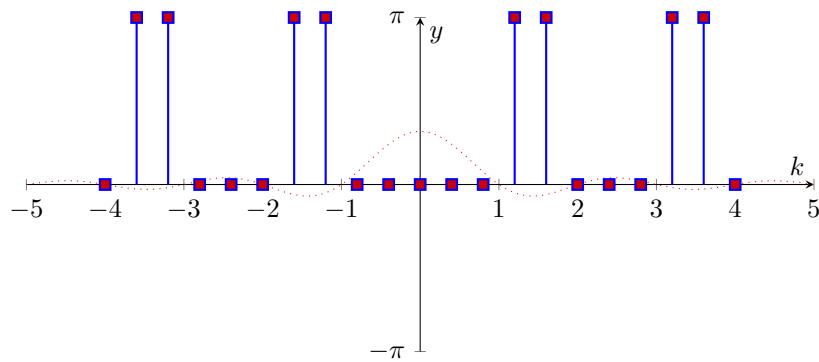
\rightarrow Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da aperiodiche a periodiche e viceversa

$$\begin{aligned}
 ATSF[x(t)] &= ATSF\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)\right] \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
 &= \frac{AT}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = A f_0 T \text{sinc}(k f_0 T)
 \end{aligned}$$

Tracciamo lo spettro per $f_0 T < 1$:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 18: Spettro TSF del treno di rect con $f_0 T < 1$

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:

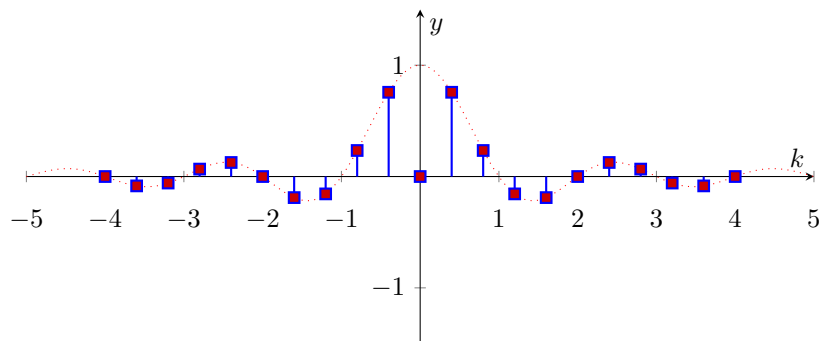


Figure 19: Spettro treno di $A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di ricostruzione dello stesso (script di matlab presenti nel teams):

- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali più alte \rightarrow copre più spettro (espansione spettrale) $T_0 \uparrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse frequenze $T_0 \downarrow$

Se non ho abbastanza passi K non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio né un'analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettamente il segnale. Inoltre in 0 dello spettro ho il Valore medio 4.1.5 del segnale.

Dubbi: non mi torna il campionamento nella $\text{sinc}(x)$, se è definita $\sin(\pi x)/x$ si annulla nelle ascisse intere, quindi io campiono a frazionati?

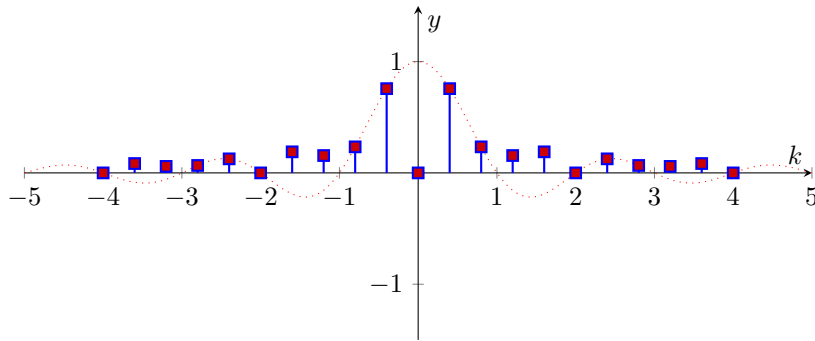
6 Trasformata Continua Di Fourier

6.1 Segnali Aperiodici

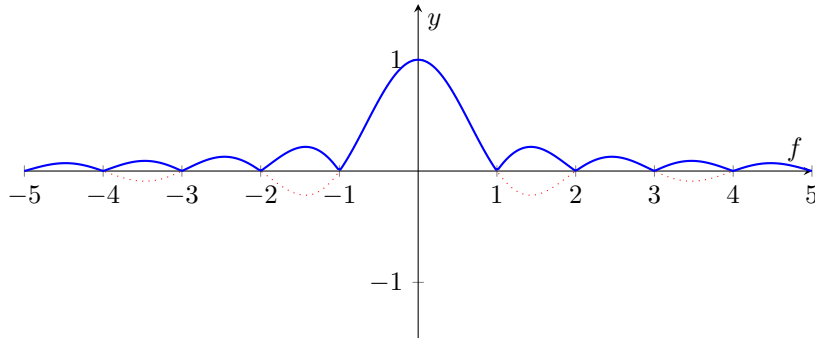
Nel caso di segnali come $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ non posso usare la *TSF* posso però scrivere:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t), \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$$

Passiamo da un'analisi a frequenze discrete ad un'analisi su tutto lo spettro delle frequenze



(a) Spettro di Ampiezza TSF



(b) Spettro di Ampiezza TCF

6.2 Equazioni di Analisi e Sintesi

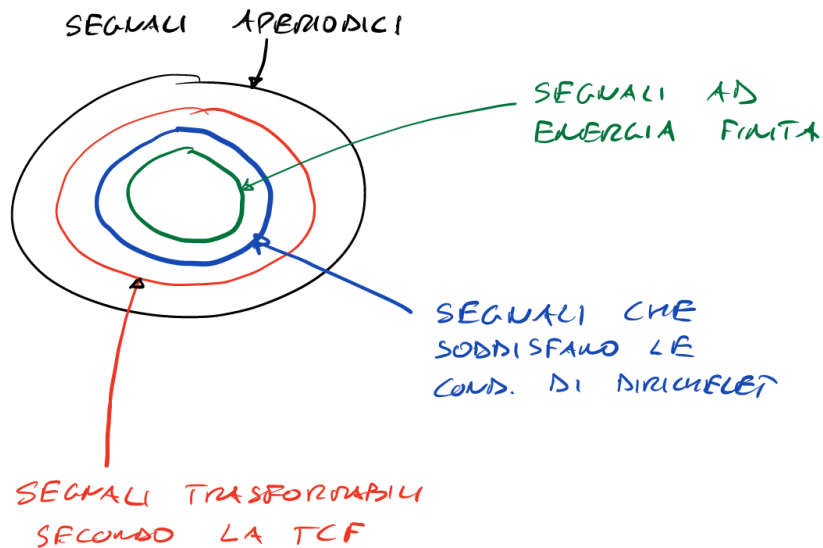


Figure 20: Insiemi dei segnali per tcf

6.2.1 Equazione di Analisi

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{Equazione di analisi}$$

6.2.2 Equazione di Sintesi

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi ft} df \quad \text{Equazione di sintesi}$$

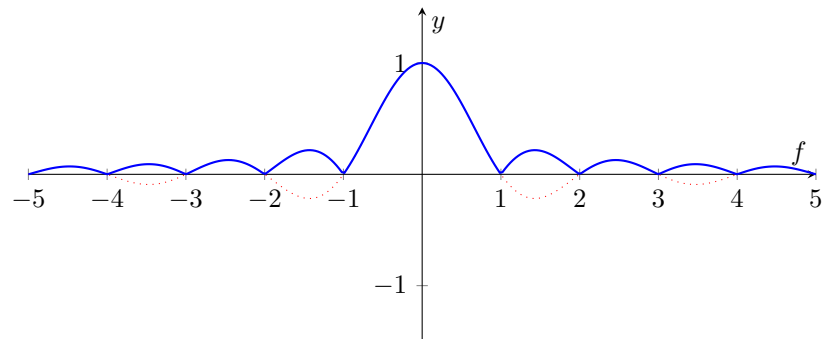
La *TCF* gode della biunivocità

$$x_{(t)} \Rightarrow X_{(f)} \quad X_{(f)} \in \mathbb{C}$$

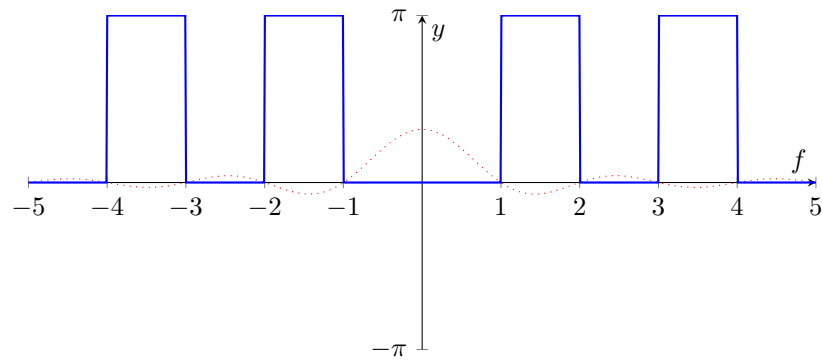
Essendo X_k un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_{(f)} = |X_{(f)}| e^{j\angle X_{(f)}}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 21: Spettro del segnale TCF

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo e continuo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**, questa proprietà é chiamata **Simmetria Hermitiana**

6.2.3 TCF di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

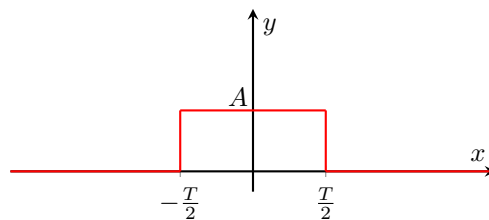


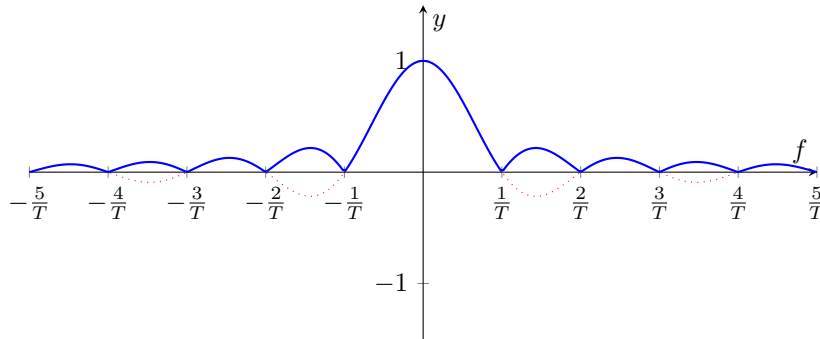
Figure 22: $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$X_{(f)} = ? :$

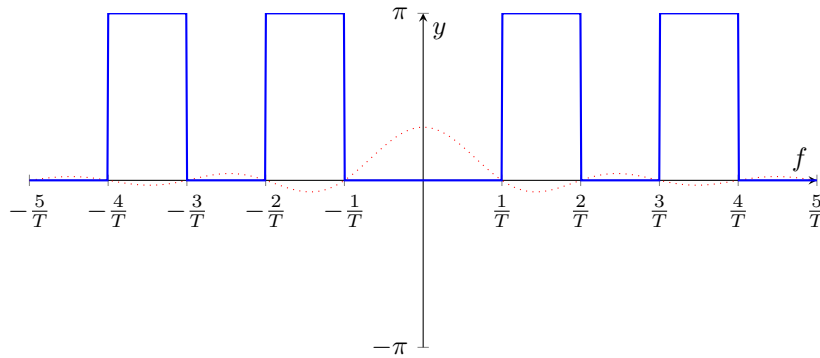
$$\begin{aligned}
 X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) \\
 &= \frac{AT}{\pi f} \left(\frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} \right) = \frac{AT \sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(fT) = X_{(f)}
 \end{aligned}$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow AT \operatorname{sinc}(fT)$$

La sinc si annulla in $\frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo anche come la funzione di partenza sia reale e pari la TCF rispetti 6.3.2(si?):



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

6.3 Proprietá

Come per la TSF vale che al variare del periodo della funzione T :

- Se $T \uparrow$ aumenta $\rightarrow f \downarrow$ diminuisce e si stringe lo spettro
- Se $T \downarrow$ diminuisce $\rightarrow f \uparrow$ aumenta e si allarga lo spettro

Inoltre come si può evincere dal successivo Teorema della Dualità 6.4.2:

- Una funzione limitata (finita) nel tempo ha uno spettro nella frequenza illimitato \rightarrow sono i segnali fisici
- Una funzione illimitata nel tempo ha uno spettro nella frequenza limitato (finito)

6.3.1 Simmetria hermitiana

$Ip : x_{(t)}$ reale

$Th : X_{(f)}$ hermitiana

$$X_{(-f)} = X_{(f)}^* \rightarrow \begin{cases} |X_{(f)}| = |X_{(-f)}| & \text{Simmetria Pari} \\ \angle X_{(-f)} = -\angle X_{(f)} & \text{Simmetria Dispari} \end{cases}$$

6.3.2 Parità

$Ip : x_{(t)}$ reale e pari

$Th : X_{(f)}$ reale e pari

6.3.3 Disparità

$Ip : x_{(t)}$ reale e dispari

$Th : X_{(f)}$ immaginaria e dispari

6.4 Teoremi relativi alla TCF

6.4.1 Linearità

$Ip : x_{(t)} = \alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}$

$Th : X_{(f)} = \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_{1(t)} e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{2(t)} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)} \end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
 x_{(t)} &= A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 X_{(f)} &= AX_{1(f)} + BX_{2(f)} = 2AT \operatorname{sinc}(2Tf) + BT \operatorname{sinc}(Tf) \\
 X_{1(f)} &= \begin{cases} X_{1(f)} = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T'}\right) \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} T' \operatorname{sinc}(T'f) \Rightarrow X_{1(f)} = 2T \operatorname{sinc}(2Tf) \\ T' = 2T \end{cases}
 \end{aligned}$$

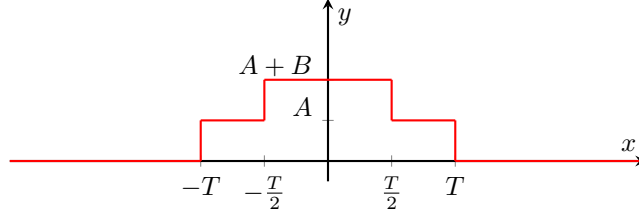


Figure 23: Segnale rettangolo

6.4.2 Dualità

$Ip : x_{(t)} \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)}$
 $Th : X_{(t)} \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} x_{(-f)}$ Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \text{Sost.} \begin{cases} t \rightarrow f \\ f \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(f)} e^{-j2\pi t f} df \\
 &= \text{Sost. } (f' = -f) \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{-j2\pi t (-f')} df' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{j2\pi t f'} df' = ACTF[x_{(-f)}] = c.v.d.
 \end{aligned}$$

Esempio:

$$x_{(t)} = A \operatorname{sinc}(Bt) \Rightarrow X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{sinc}(Bt) e^{-j2\pi f t} dt$$

Applico la dualità:

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT \operatorname{sinc}(Tf)$$

$$AT \operatorname{sinc}(Tt) \rightleftharpoons A \operatorname{rect}\left(\frac{-f}{T}\right)$$

Se voglio una durata generica:

$$\begin{aligned}
 & \text{Sostituisco } B = T \\
 & AB\text{sinc}(Bt) \rightleftharpoons A\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \\
 & \Downarrow \\
 & A\text{sinc}(Bt) \rightleftharpoons \frac{A}{B}\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)
 \end{aligned}$$

6.4.3 Ritardo

$$Ip : x(t) \xLeftrightarrow{TCF} X_{(f)}, \quad y(t) = x(t-t_0)$$

$$Th : Y_{(f)} \xLeftrightarrow{TCF} y(t) = X_{(f)} e^{-j2\pi f t_0}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \text{Sost. } (t' = t - t_0) \Rightarrow Y_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j2\pi f (t' + t_0)} dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j2\pi f t'} e^{-j2\pi f t_0} dt' = X_{(f)} e^{-j2\pi f t_0} \quad c.v.d.
 \end{aligned}$$

Osservazione:

- Un ritardo nel tempo introduce una componente solo di fase che cresce linearmente con la frequenza
- Un esponenziale nel tempo introduce un ritardo nel dominio della frequenza $x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \mapsto X_{(f-f_0)}$, vedi 6.5.4

Esempio:

$$x_0(t) = A\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow x(t) = x_0(t-t_0) \quad t_0 = \frac{T}{2}$$

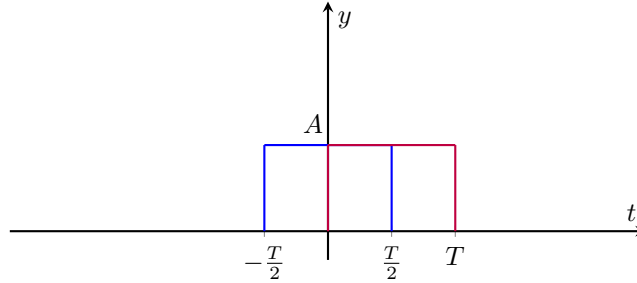


Figure 24: $x_0(t)$, $x(t)$

$$X_{(f)} = X_{0(f)} e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = AT \operatorname{sinc}(Tf) e^{-j\pi f T}$$

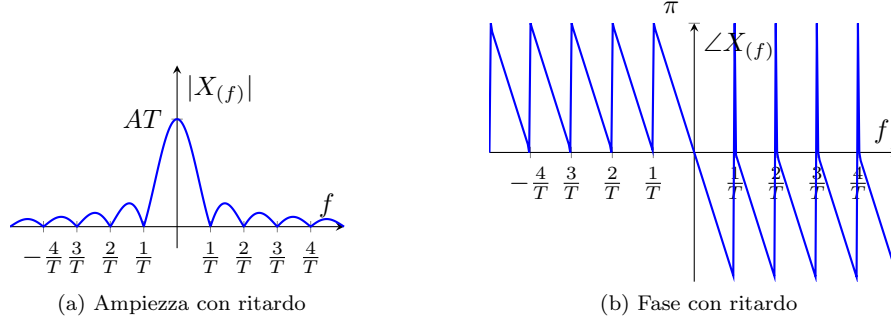


Figure 25: Spettro della *rect* con ritardo

Il \LaTeX sbaglia e aggiunge le spike nelle f positive, il grafico é dispari con andamento come per le f negative.

6.4.4 Derivazione

$$\begin{aligned} Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightarrow{TCF} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \frac{d}{dt} x_{(t)} \end{cases} \\ Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)} \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= \frac{d}{dt} x_{(t)} = \frac{d}{dt} ACTF[x_{(t)}] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi f t} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} j2\pi f e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

Posso Scrivere $y_{(t)}$ come $ACTF[y_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$, se quindi $Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$ l'uguaglianza é valida:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$$

L'operazione di derivata nel dominio della frequenza si traduce in una semplice operazione algebrica, nel tempo avrei dovuto calcolare il rapporto incrementale. Per derivare un segnale posso quindi:

$$x_{(t)} \rightarrow TCF \rightarrow j2\pi f X_{(f)} \rightarrow ACTF \rightarrow y_{(t)}$$

6.4.5 Integrazione

$$Ip : \begin{cases} x(t) \stackrel{TCF}{=} X(f) & (1) \\ y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha & (2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \text{ oppure } X(f)|_{f=0} = 0 \text{ oppure } y(+\infty) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

Dimostrazione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Rightarrow \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} y(t) \Rightarrow^{Th.6.4.4} X(f) = j2\pi f Y(f)$$

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

L'ipotesi 3 é conseguenza della divisione per f e che devo mantenere l'uguaglianza $X(f) = j2\pi f Y(f)$, si nota come nella dimostrazione usando il Th della Derivazione (6.4.4) quando $f = 0$ la funzione nella frequenza deve essere 0, $X(f) = j2\pi f Y(f) = 0$

Esempio: TCF di una piramide

$$x(t) = A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T} \right) \right) rect \left(\frac{t}{2T} \right) \quad X(f) = TCF[x(t)] = ?$$

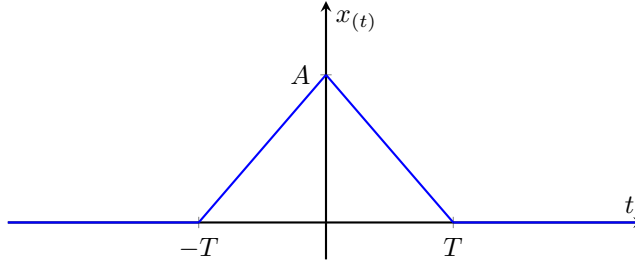


Figure 26: Funzione priamide

$TCF[x(t)] :$

- Utilizzando la classica TCF :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T} \right) \right) rect \left(\frac{t}{2T} \right) dt$$

- Utilizzando il Th dell'Integrazione 6.4.5:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^t y(\alpha) d\alpha \quad 6.4.5(2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt \quad 6.4.5(3)$$

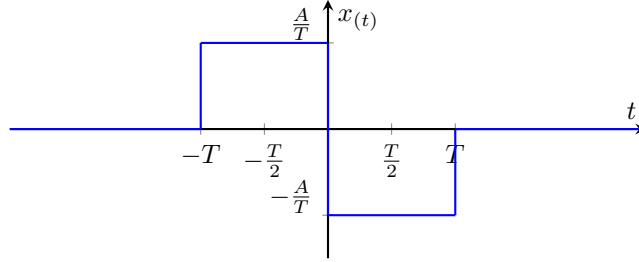


Figure 27: Funzione priamide

$$y(t) = \frac{A}{T} \text{rect} \left(\frac{t - (-\frac{T}{2})}{T} \right) - \frac{A}{T} \text{rect} \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T} \right) = \text{Sono 2 rect con ritardo}$$

$$\Rightarrow y(t) \Rightarrow Y_{(f)} \quad 6.4.5(1) \Rightarrow X_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} \begin{cases} x(t-t_0) \Rightarrow X_{(f)} e^{-j2\pi f t_0} \\ \text{rect}(\frac{t}{T}) \Rightarrow T \text{sinc}(Tf) \end{cases}$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f(-\frac{T}{2})} - \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$= \textcolor{red}{2j} A \text{sinc}(Tf) \frac{e^{j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{\textcolor{red}{2j}} = 2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)$$

$$X_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{j2\pi f} = \frac{A \textcolor{red}{T} \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{\pi f \textcolor{red}{T}} \\ = AT \text{sinc}^2(fT)$$

Abbiamo ottenuto la *TCF* del triangolo:

$$A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T} \right) \right) \text{rect} \left(\frac{t}{2T} \right) \Rightarrow AT \text{sinc}^2(fT)$$

per la dualita 6.4.2 :

$$AB \text{sinc}^2(Bt) \Rightarrow A \left(1 - \left(\frac{|f|}{B} \right) \right) \text{rect} \left(\frac{f}{2B} \right)$$

I segni negativi spariscono per il valore assoluto e per la parità della *rect*. Per verificare che i calcoli siano corretti posso colcolare la $X_{(f)}$ in 0 e

vedo quanto é l'area del segnale:

$$T^2 \text{sinc}(Tf) \Big|_0 = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} T \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = T$$

Osservazione: la funzione piramidale varia meno rapidamente nel *tempo* rispetto alla funzione rettangolare quindi lo spettro non occupa le alte frequenze, l'andamento é di $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$, é molto piú contenuto. La rect avendo un gradino varia molto rapidamente nel *tempo* e di conseguenza il suo spettro si estende a frequenze piú alte del segnale piramidale.

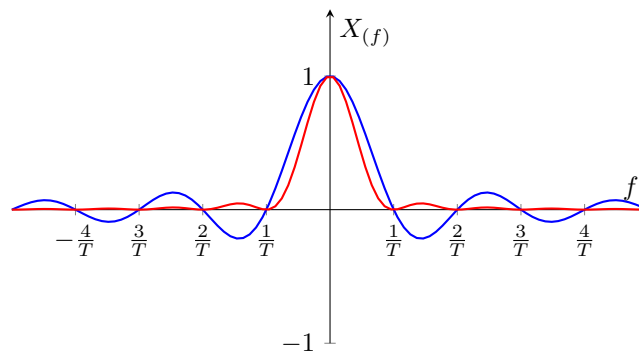


Figure 28: $\frac{\text{sinc}}{x}$, $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$

DOMANDA: ma la fase in tutto questo che ruolo ha? non avrei problemi avere anche sinc che cambiano la fase degli altri segnali? dopotutto si la sinc é brutta perché si estende all'infinito, ma proprio per questo la fase é sempre sporcata? cosa comporta nella ricostruzione del segnale? noi abbiamo visto finora l'ampiezza dopotutto

6.4.6 Derivazione in Frequenza

$$Ip : \left\{ x(t) \xRightarrow{TCF} X(f) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \right.$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.7 Integrazione in Frequenza

$$Ip : \left\{ x(t) \xRightarrow{TCF} X(f) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \right.$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.8 Convoluzione

$$Ip: \left\{ x_{(t)} \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt} \right.$$

$$Th: Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$$

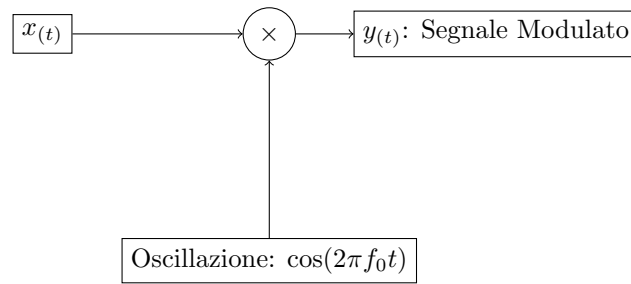
Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

Proprietà della convoluzione:

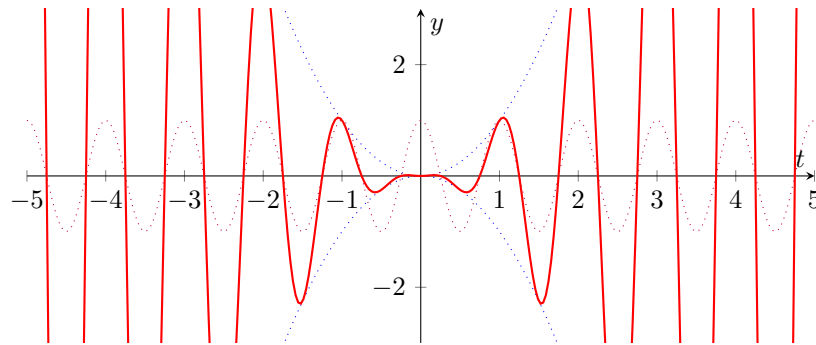
- 1
- 2
- 3

6.4.9 Prodotto

6.5 Modulazione di Ampiezza



(a) Sistema di modulazione



(b) $x(t)$, $y(t)$, $\cos(2\pi t)$

Figure 29: Esempio sistema di modulazione di ampiezza

L'oscillazione introdotta, $\cos(2\pi t)$, segue l'andamento di $x_{(t)}$ Nel dominio della frequenza:

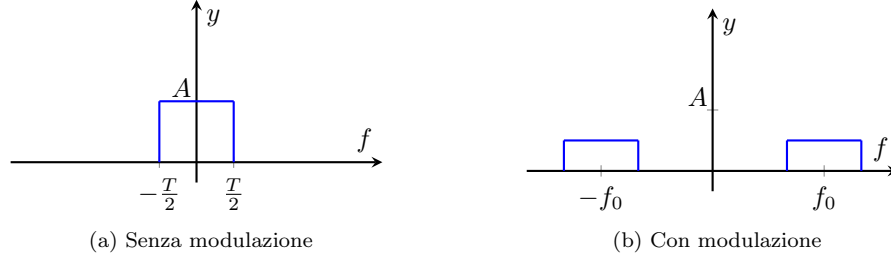


Figure 30: Segnale nel dominio della frequenza modulato e non

Serve per spostare la frequenza (es. di trasmissione) del segnale in modo tale, ad esempio, da non sovrapporre due segnali che sono sulla stessa frequenza. Se il segnale non fosse modulato si dice in **banda base (BB)** se il segnale é modulato si dice in **banda passante(BP)**.

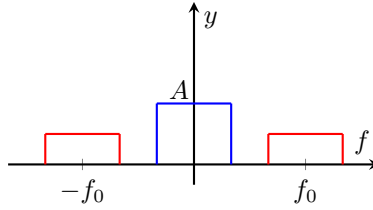


Figure 31: **BB**, **BP**

6.5.1 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xleftrightarrow{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} + TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0) \text{ c.v.d} \end{aligned}$$

Esempio:

$$X_{(f)} = \frac{A}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{2B} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \frac{A}{2B} \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)$$

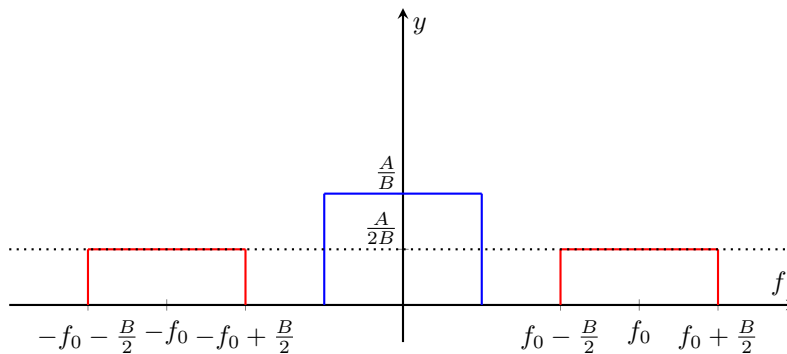


Figure 32: $X_{(f)}$, $Y_{(f)}$

fai cosa ha chiesto lui a fine lezione

6.5.2 Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$

$$Ip: \begin{cases} y(t) = x(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xLeftrightarrow{TCF} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th: Y_{(f)} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} - TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)} \quad c.v.d \end{aligned}$$

6.5.3 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

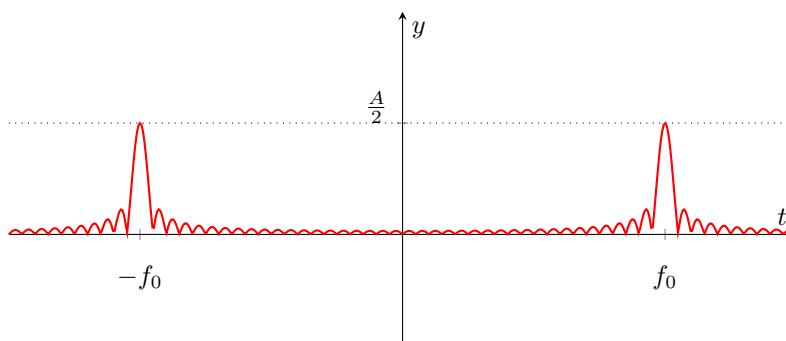
$$Ip: \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ x(t) \xLeftrightarrow{TCF} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th: Y_{(f)} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)}$$

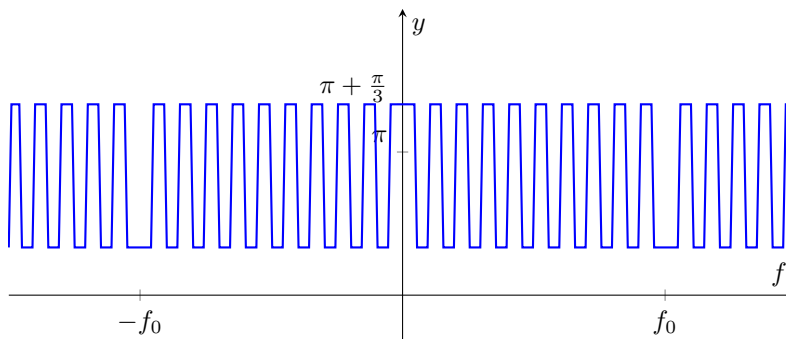
Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \frac{e^{j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
 &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} + TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d}
 \end{aligned}$$

Esempio:



(a) Ampiezza Mod. generica



(b) fase Mod. generica

Figure 33: Modulazione generica di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$ con $\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3})$

É legale cosa ho scritto sopra della modulazione generica?

6.5.4 Th. Modulazione con Esponenziale Complesso

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \\ x(t) \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = X(f-f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} = X(f-f_0) \end{aligned}$$

Posso notare che:

- Ritardo: $\rightarrow x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{(-j2\pi f t_0)}$
- Modulazione: $\rightarrow x(t)e^{(j2\pi f_0 t)} \rightleftharpoons X(f-f_0)$

Procedimento per la sintesi di un segnale:

- Derivo il segnale
- Verifico le ipotesi del Th. dell'Integrazione 6.4.5
- calcolo la TCF della derivata
- Applico il Th. dell'integrazione per calcolare $X(f)$

6.5.5 Demodulazione

Ci poniamo il problema di riportare il segnale modulato al segnale originale $g(t)$, dato:

$$x(t) = g(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Demoduliamo il segnale con $2 \cos(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) 2 \cos(2\pi f_0 t) = g(t) \cos^2(2\pi f_0 t) \\ &= g(t) \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} = \frac{g(t)}{2} + \frac{g(t) \cos(4\pi f_0 t)}{2} \\ TCF[y(t)] &\Rightarrow^{Th. 6.5.1} \frac{2G(f)}{2} + \frac{2G(f-2f_0)}{2} + \frac{2G(f+2f_0)}{2} \end{aligned}$$

Dall'ultima uguaglianza posso quindi usare un filtro in (BB) per rimuovere i segnali alle frequenze $\pm f_0$ e ricavare il mio segnale $G(f)$.

DOMANDA: posso anche quindi demodulare con un seno tanto non mi interessa quello che succede alle frequenze spostate, quindi però ritorno sulla fase, non è importante? usando un seno la ribalto praticamente no? ricontrolla ciò che stai dicendo bro non so se è giusto il ribaltamento

ALTRA DOMANDA: devo anche modulare il segnale abbastanza lontano dalla BB sennò quando demodulo mi autodisturbo il segnale? da qui deriva $\frac{1}{T} < 2BB$

ALTRA DOMANDA: quindi se volessi captare piú segnali mi conviene utilizzare circuiti diversi? oppure posso modulare e demodulare a piacimento i segnali tenendo conto su quali frequenze ho modulato in modo tale da sapere dove vanno a finire i segnali e recuperarli? tanto non mi interessa su quale frequenza finiscano finche non diventino non recuperabili per sovrapposizione giusto? Riporto un po di esempi di demodulazione di una o piú *rect*: Esempio di Demodulazione

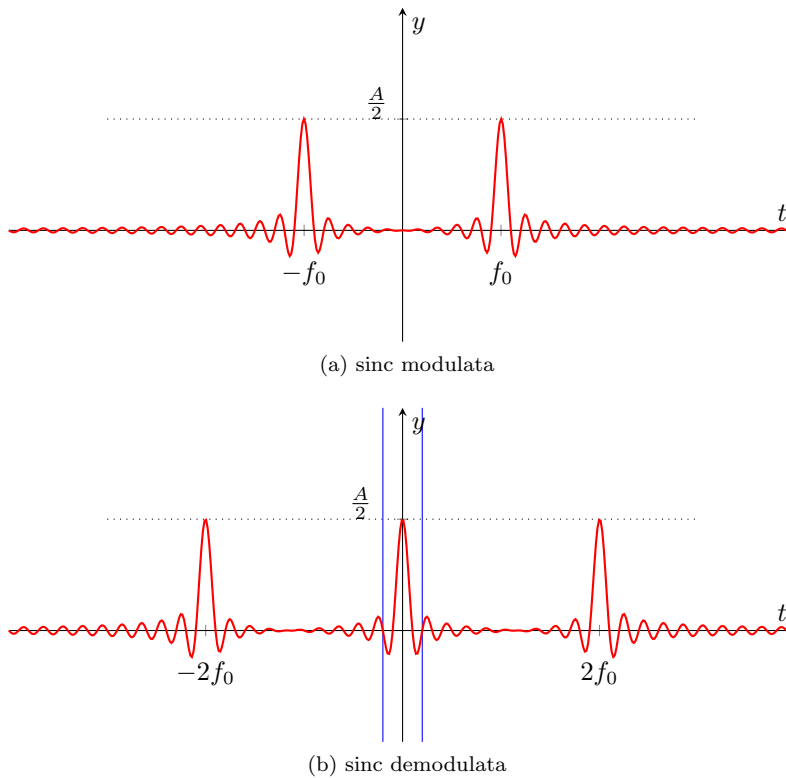
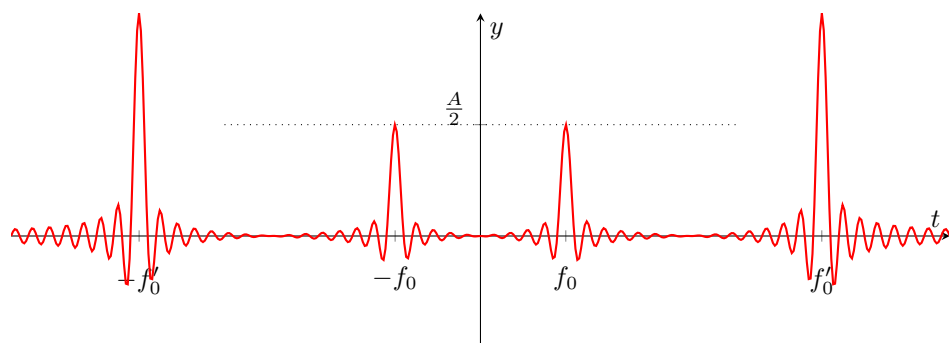
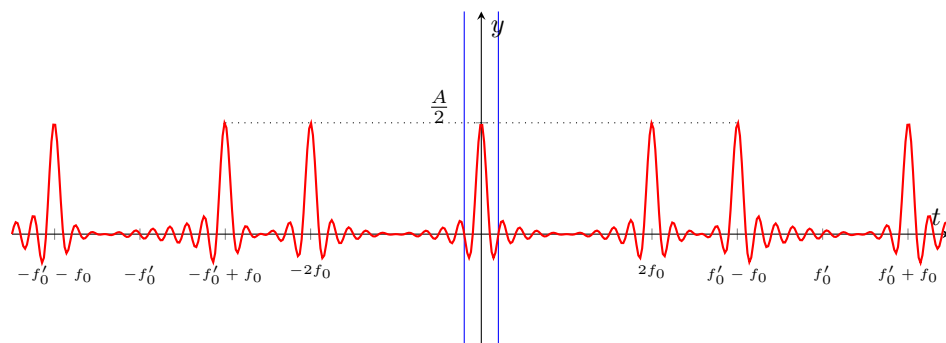


Figure 34: Demodulazione di una *sinc*, rincontrolla l'ampiezza dei grafi

Nel caso di piú segnali durante la demodulazione il segnale che voglio recuperare viene spostato in BB mentre gli altri segnali presenti sullo spettro vengono a loro volta modulati però con un f_0 diverso rispetto al loro f'_0 :



(a) sinc modulata



(b) sinc demodulata

Figure 35: Demodulazione di due *sinc*

esempio in cui non posso ricavare il segnale le sinc si accavallano
Esempio di esercizio occupazione dello spettro:

7 Teoria Dei Codici

8 Formulario

8.1 Trigonometria

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3. $\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4. $\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ È un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi$:
 $k \in \mathbb{Z}$

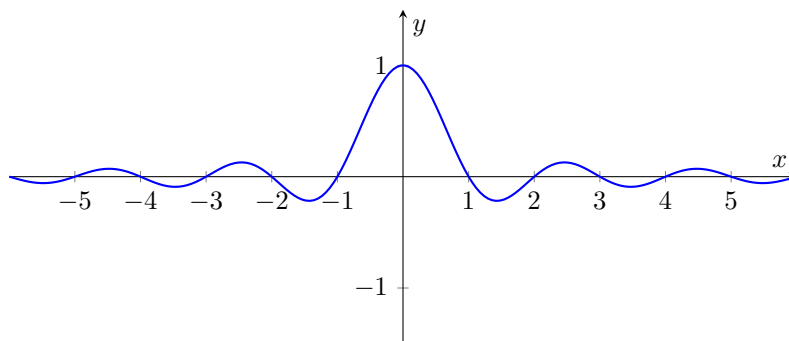


Figure 36: grafico $\text{sinc}(\alpha)$

8.1.1 Formule di addizione

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

8.1.2 Formule di duplicazione

1. $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2 \sin^2(\alpha) \end{cases}$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

8.1.3 Formule di bisezione

$$1. \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$2. \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$3. \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$$

8.2 Segnali Notevoli

$$1. x_R \triangleq A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad T = \text{durata}$$

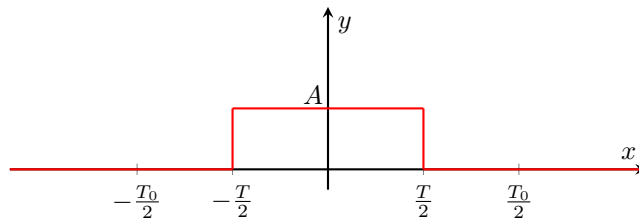


Figure 37: Rappresentazione di $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$2. \operatorname{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

È un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi : k \in \mathbb{Z}$

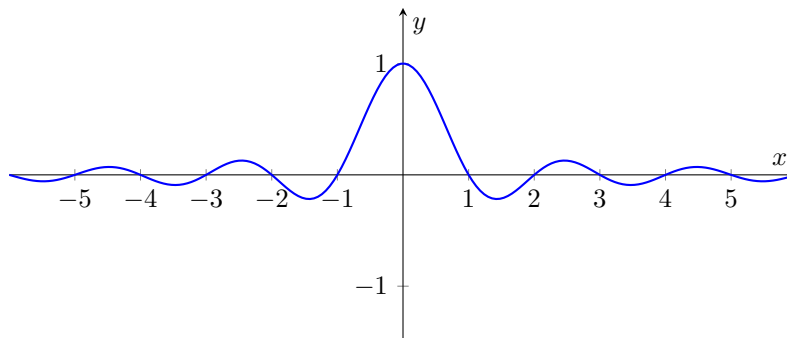


Figure 38: grafico $\operatorname{sinc}(\alpha)$

La banda di una sinc è l'intervallo in cui si annulla $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$, es: se $\text{banda} = 1$ se $T = 1$

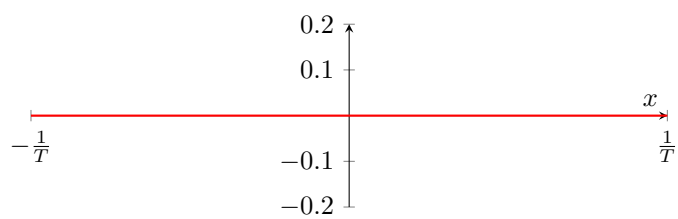


Figure 39: banda

3.

4.

Alphabetical Index

Segnale Troncato, 8