

# Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

AA 2022 - 2023



Figure 1: touch me senpai

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Richiamo Sui Numeri Complessi</b>	<b>8</b>
2.1	Struttura di un numero complesso . . . . .	8
2.1.1	Forma Cartesiana . . . . .	8
2.1.2	Forma Polare . . . . .	8
2.1.3	Complesso Coniugato . . . . .	8
2.2	Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana . . . . .	8
2.3	Operazioni . . . . .	9
2.4	Funzioni Complesse a Variabile Reale . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Introduzione Ai Segnali</b>	<b>10</b>
3.1	Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini . . . .	10
<b>4</b>	<b>Segnali Analogici</b>	<b>12</b>
4.1	Grandezze dei segnali Analogici . . . . .	12
4.1.1	Potenza istantanea . . . . .	12
4.1.2	Energia . . . . .	12
4.1.3	Potenza Media . . . . .	12
4.1.4	Valore Efficace . . . . .	13
4.1.5	Valore Medio . . . . .	13
4.2	Analisi energetiche su segnali comuni . . . . .	13
4.2.1	Costante . . . . .	13
4.2.2	Cosinusoide . . . . .	14
4.2.3	Gradino . . . . .	16
4.2.4	Rettangolo . . . . .	16
4.2.5	Esponenziale unilatera . . . . .	17
4.2.6	Esponenziale bilatera . . . . .	19
4.2.7	segno $sgn(x(t))$ . . . . .	19
4.3	Segnal Periodici . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Trasformata Serie Di Fourier</b>	<b>22</b>
5.1	Segnale Periodico . . . . .	22
5.2	Trasformata Serie Di Fourier . . . . .	22
5.2.1	Rappresentazione di $X_k$ . . . . .	22
5.3	Propiet� della TSF . . . . .	23
5.4	Linearit� . . . . .	23
5.5	Simmetria Hermitiana . . . . .	23
5.6	Calcolo dei coefficienti $X_k$ per segnali noti . . . . .	23
5.6.1	$A \cos(2\pi f_0 t)$ . . . . .	23
5.6.2	$A \sin(2\pi f_0 t)$ . . . . .	24
5.6.3	Treno di rect . . . . .	25

<b>6</b>	<b>Trasformata Continua Di Fourier</b>	<b>28</b>
6.1	Segnali Aperiodici . . . . .	28
6.2	Equazioni di Analisi e Sintesi . . . . .	29
6.2.1	Equazione di Analisi . . . . .	29
6.2.2	Equazione di Sintesi . . . . .	29
6.2.3	TCF di una $\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$ . . . . .	30
6.3	Propiet� . . . . .	31
6.3.1	Simmetria hermitiana . . . . .	32
6.3.2	Parit� . . . . .	32
6.3.3	Disparit� . . . . .	32
6.4	Teoremi relativi alla TCF . . . . .	32
6.4.1	Linearit� . . . . .	32
6.4.2	Dualit� . . . . .	33
6.4.3	Ritardo . . . . .	34
6.4.4	Derivazione . . . . .	35
6.4.5	Integrazione . . . . .	36
6.4.6	Derivazione in Frequenza . . . . .	38
6.4.7	Integrazione in Frequenza . . . . .	39
6.4.8	Convoluzione . . . . .	39
6.4.9	Prodotto . . . . .	40
6.4.10	Calcolo del prodotto di convoluzione . . . . .	40
6.5	Modulazione di Ampiezza . . . . .	43
6.5.1	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$ . . . . .	44
6.5.2	Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$ . . . . .	45
6.5.3	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ . . . . .	45
6.5.4	Th. Modulazione con Esponenziale Complesso . . . . .	46
6.5.5	Demodulazione . . . . .	47
6.5.6	Radar . . . . .	51
6.6	Delta di Dirac . . . . .	53
6.6.1	Propiet� del Delta di Dirac . . . . .	53
6.6.2	TCF della Delta di Dirac . . . . .	54
6.6.3	TCF di segnali periodici . . . . .	55
6.7	Relazione tra $TSF$ e $TCF$ . . . . .	56
6.7.1	TCF di un segnale periodico generico . . . . .	56
6.7.2	Relazione tra i coefficienti $X_k$ e $X_{(f)}$ . . . . .	58
6.7.3	$I^a$ formula di Poisson . . . . .	60
6.7.4	Teorema dell'integrazione completo . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Sistemi Monodimensionali</b>	<b>63</b>
7.1	Propiet� dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) . . . . .	63
7.2	Propiet� dei Sistemi Lineari Stazionari (SLS) . . . . .	64
7.2.1	Risposta in frequenza . . . . .	65
7.2.2	Sistemi in cascata e in parallelo . . . . .	65
7.3	Risposta di un sistema causale e risposta impulsiva . . . . .	67
7.3.1	Stabilit� BIBO su $h_{(t)}$ . . . . .	68
7.4	Filtri Ideali . . . . .	68

7.4.1	Filtro Passa Basso di banda B - Low Pass Filter (LP)	68
7.4.2	Filtro Passa Alto di banda B - High Pass Filter (HP)	72
7.4.3	Filtro Passa Banda di banda B - Band Pass Filter (BP)	74
7.4.4	Filtro Elimina Banda di banda B - Band Stop Filter (BS)	77
7.4.5	Filtri non distorcenti	79
7.5	Th. di Parseval	81
7.6	Funzione di Correlazione - Segnali Aperiodici	82
7.7	Funzione di Autocorrelazione	82
7.7.1	Propiet� Autocorrelazione	82
<b>8</b>	<b>Trasformata Discreta di Fourier</b>	<b>83</b>
8.0.1	Equazione di Analisi - $TDF$	83
8.0.2	Equazione di Sintesi - $ATDF$	83
8.0.3	Trasformata di $\delta_{[n]}$	83
8.0.4	Relazione tra $TCF$ e $TDF$	84
8.1	Teorema del Campionamento - Nyquist Shannon	84
<b>9</b>	<b>Teoria della Probabilit�</b>	<b>90</b>
9.1	Introduzione	90
9.1.1	Tipi di modelli matematici	91
9.2	Algebra dei Set (insiemi)	92
9.2.1	Operazioni booleane su set	92
9.2.2	Operazioni algebriche su set	93
9.3	Modelli probabilistici	94
9.3.1	Assiomi della probabilit�	94
9.3.2	Probabilit� condizionata	95
9.3.3	Regola di Bayes	95
9.3.4	Indipendenza	95
9.3.5	Legge della probabilit� totale	95
9.3.6	Problemi esempio:	96
9.3.7	Coefficiente binomiale	98
9.4	Variabili Aleatorie - Random Variables	100
9.4.1	Funzioni di Distribuzione - Distribution Functions	101
9.4.2	Funzione Densit� di Probabilit� - Probability Density Function (pdf)	101
9.4.3	Funzione Probabilit� di massa - Probability Mass Function (pmf)	102
9.4.4	- Multiple Random Variables	103
9.4.5	Funzione Densit� di Probabilit� Condizionata - Conditional Probability Density Function	103
9.4.6	Somma di Variabili Aleatorie Indipendenti	104
9.4.7	Valore medio delle Variabili Aleatorie - Mean Value of Random Variables (Expectation)	104
9.4.8	Varianza - Variance	106
9.4.9	Covarianza - Covariance	106
9.4.10	Distribuzione Gaussiana	107

9.4.11	Funzione $Q_{(x)}$ . . . . .	108
9.4.12	Teorema del Limite Centrale - Central Limit Theorem . .	110
9.4.13	Calcolo probabilità di errore di un sistema . . . . .	110
<b>10</b>	<b>Processi Stocastici</b>	<b>117</b>
10.1	Valore medio . . . . .	117
10.2	Autocorrelazione . . . . .	117
10.2.1	Proprietà della autocorrelazione $R_x$ . . . . .	118
10.2.2	Sigificato fisico dell'autocorrelazione . . . . .	118
10.3	Sitemi Stazionari in Senso Lato (SSL) . . . . .	118
10.3.1	Trasmissione di un SSL in un sistema LTI-Filter . . . . .	119
10.3.2	Densità di potenza spettrale . . . . .	120
10.4	Processo Gaussiano . . . . .	120
10.4.1	Rumore Bianco . . . . .	121
10.4.2	Filtro passa basso ideale per rumore bianco . . . . .	122
<b>11</b>	<b>Sistemi di Comunicazione</b>	<b>124</b>
11.1	Phase Amplitude Modulation - PAM . . . . .	126
11.1.1	Mappatore . . . . .	126
11.1.2	Modulatore . . . . .	127
11.1.3	Densità spettrale di potenza . . . . .	129
11.1.4	Potenza . . . . .	130
11.1.5	Potenza e Energia - caso IID . . . . .	131
11.1.6	Schema completo di un sistema di comunicazione PAM .	132
11.1.7	Rimozione dell'ISI . . . . .	134
11.2	Impulso a coseno rialzato . . . . .	140
11.3	Filtro adattato . . . . .	142
11.3.1	Progettazione dei filtri di ricezione e trasmissione . . . . .	144
11.4	Circuito decisore . . . . .	145
11.4.1	Zone di decisione . . . . .	147
11.4.2	Calcolo della SER per un sistema PAM M-ario . . . . .	149
11.4.3	Efficienza spettrale ed efficienza energetica . . . . .	154
11.4.4	Codifica GRAY nel sistema PAM . . . . .	156
11.5	QAM . . . . .	157
11.5.1	Inviluppo complessso . . . . .	157
11.5.2	Trasmettitore - QAM . . . . .	158
11.5.3	Densità spettrale di potenza - QAM . . . . .	159
11.5.4	Ricevitore - QAM . . . . .	160
11.6	Modulazione Amplitude Shift Keyring - ASK . . . . .	161
11.7	Modulazione Quadrature Amplitude Modulation - QAM . . . . .	163
11.8	Modulazione Phase Shift Keyring - PSK . . . . .	166
11.8.1	Prestazioni di un sistema PSK . . . . .	166

<b>12 Teoria Dei Codici</b>	<b>167</b>
12.1 Introduzione . . . . .	167
12.1.1 Esempio codici a blocco: codici a ripetizione . . . . .	170
12.1.2 Esempio codici a blocco: codici a controllo di parità . . . . .	171
12.1.3 Esempio codici a blocco: codice ISBN . . . . .	172
12.2 Codici a blocco . . . . .	174
12.2.1 Introduzione ai codici lineari . . . . .	174
12.2.2 Campi di Galois . . . . .	174
12.2.3 Codici a blocco lineari su $GF(2)$ . . . . .	175
12.2.4 Proprietà dei codici a blocco lineari . . . . .	175
12.2.5 Distanza di Hamming . . . . .	175
12.2.6 Codici a blocco in forma sistematica . . . . .	176
12.2.7 Matrice di controllo di parità . . . . .	178
12.2.8 Proprietà dei codici a blocco . . . . .	178
12.3 Codici di Hamming . . . . .	181
12.3.1 Il codice $\mathcal{C}_H(2)$ . . . . .	181
12.3.2 Il codice $\mathcal{C}_H(3)$ . . . . .	181
12.4 Decodifica per codici a blocco . . . . .	182
12.4.1 Coset . . . . .	183
12.4.2 Proprietà dei coset . . . . .	183
12.4.3 Algoritmo di decodifica . . . . .	184
12.4.4 Decodifica mediante sindrome . . . . .	184
12.4.5 Decodifica a sindrome: Codici di Hamming $m = 3$ . . . . .	185
12.4.6 Esempio di decodifica . . . . .	185
12.5 Codici Ciclici . . . . .	187
12.5.1 Definizione di Codice Ciclico . . . . .	187
12.5.2 Rappresentazione algebrica di un codice ciclico . . . . .	188
12.5.3 Polinomio generatore di un codice ciclico . . . . .	189
12.5.4 Teorema fondamentale generatore di un codice ciclico . . . . .	190
12.5.5 Matrice generatrice di un codice ciclico . . . . .	191
12.5.6 Controllo di parità per un codice ciclico . . . . .	192
12.5.7 Metodo alternativo per il calcolo della sindrome . . . . .	193
12.5.8 Decodifica a sindrome per codici ciclici . . . . .	194
12.6 Codici Convoluzionali . . . . .	197
12.6.1 Codificatore codice convoluzionale . . . . .	197
12.6.2 Generatori di un codice convoluzionale . . . . .	197
12.6.3 Rappresentazione come macchina a stati . . . . .	199
12.6.4 Diagramma di Stato . . . . .	199
12.6.5 Diagramma a traliccio . . . . .	200
12.6.6 Distanza colonna . . . . .	201
12.6.7 Distanza libera . . . . .	201
12.6.8 Strategia di decodifica a massima verosomiglianza . . . . .	201
12.6.9 Algoritmo di Viterbi . . . . .	202
12.7 Prestazioni sistemi codificati . . . . .	207
12.8 Codici a blocco . . . . .	207
12.9 Codici convoluzionali . . . . .	209

<b>13</b>	<b>Formulario</b>	<b>211</b>
13.1	Trigonometria . . . . .	211
13.1.1	Formule di addizione . . . . .	211
13.1.2	Formule di duplicazione . . . . .	211
13.1.3	Formule di bisezione . . . . .	212
13.2	Segnali Notevoli . . . . .	212
13.3	Grandezze Fisiche . . . . .	213
13.4	Varie . . . . .	213
	<b>Indice Alfabetico</b>	<b>217</b>

# 1 Introduzione

I seguenti appunti sono scritti seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.

I testi consigliati per l'anno 2022-2023 sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson



## 2 Richiamo Sui Numeri Complessi

### 2.1 Struttura di un numero complesso

#### 2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = \text{Re}\{z\}$$

$$\text{Parte Immaginaria: } b = \text{Im}\{z\}$$

$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

#### 2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{j\theta} = \rho \cos(\theta) + j\rho \sin(\theta)$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$

$$\text{Fase: } \theta = \arg(z) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

grafico forma polare-cartesiana

#### 2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana

$$z^* = a - jb$$

- Forma Polare

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$

### 2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria

$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$

- Modulo

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}$$

- Fase

$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

## 2.3 Operazioni

Dati:  $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ ,  $z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

- Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2 = \rho^2$$

## 2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) = a(t) + jb(t) = \rho(t)e^{j\theta(t)}$$

- Integrale

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b a(t) + jb(t) dt = \int_a^b a(t) dt + \int_a^b jb(t) dt$$

- Derivata

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} a(t) + jb(t) = \frac{d}{dt} a(t) + \frac{d}{dt} jb(t)$$

### 3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto  $\forall t$ , per ogni istante temporale si conosce il valore del segnale, spesso rappresentati con funzioni analitiche.
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche, ad esempio un rumore.

#### 3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
  - Segnale tempo continuo:  $t \in \mathbb{R}$  assume con continuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
  - Segnale a tempo discreto:  $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$   $T$  = periodo di campionamento, la variabile temporale assume solo valori discreti

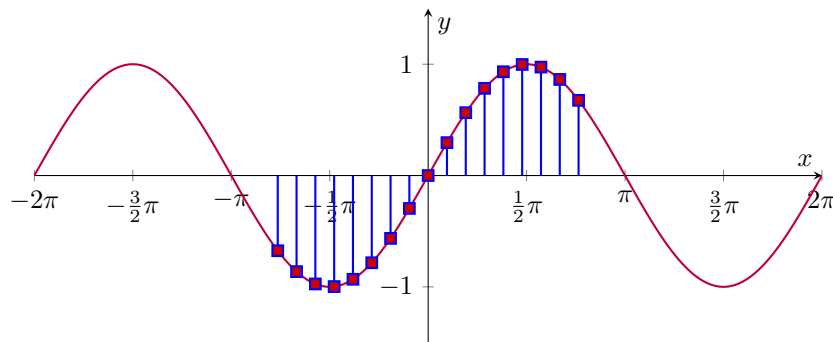


Figure 2: tempo continuo, tempo discreto:  $T = 0.3$

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
  - Segnale ad ampiezza continua:  $x(t)$  *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
  - Segnale ad ampiezza discreta:  $x(t)$  *discreta*, se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica può assumere solo valori discreti

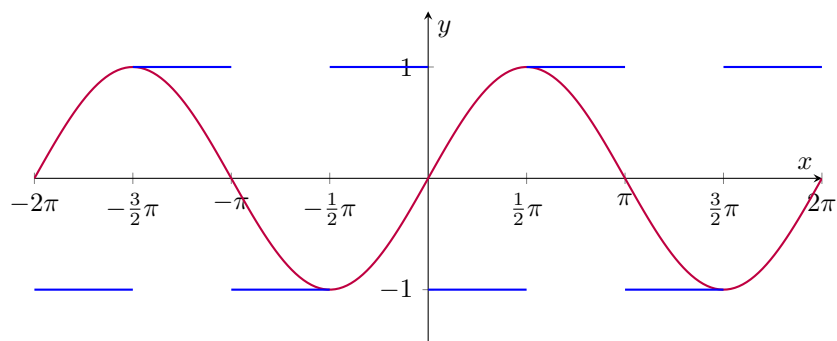


Figure 3: **ampiezza continua**, **ampiezza discreta**

Possiamo costruire una tabella per categorizzare le tipologie di segnali:

Segnale	Continuo	Discreto
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale
Discreta	Quantizzato	Binario

$x(t)$

## 4 Segnali Analogici

### 4.1 Grandezze dei segnali Analogici

#### 4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x(t)|^2$$

$$\text{Se } x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow P_x \triangleq x_{(t)}^2$$

#### 4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{Energia : } \begin{cases} \text{Energia finita} & (\text{Segnali fisici}) \\ \text{Energia infinita} & (\text{Segnali ideali}) \end{cases}$$

#### 4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$T = \text{Periodo di osservazione}$

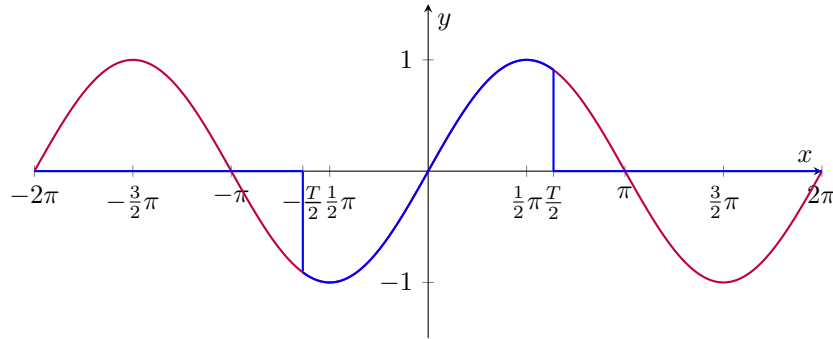


Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

$$E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

dalla quale possiamo ricavare se  $T \rightarrow \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$ :

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Possiamo ricavare delle proprietà secondo energia e potenza:

- Se  $x(t)$  ha  $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$
- Se  $x(t)$  ha  $P_x = k \neq 0 < \infty \Rightarrow E_x = \infty$

#### 4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

#### 4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)_T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$x(t)_T = \text{Segnale troncato}$$

## 4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

### 4.2.1 Costante

$$x(t) = A \quad \forall t$$

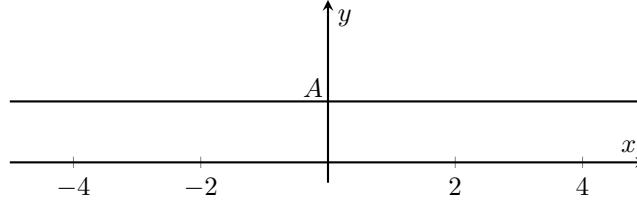


Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

#### 4.2.2 Cosinusoide

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$A = \text{Ampiezza}$ ,  $f_0 = \frac{1}{T} = \text{frequenza}$ ,  $\phi = \text{fase}$

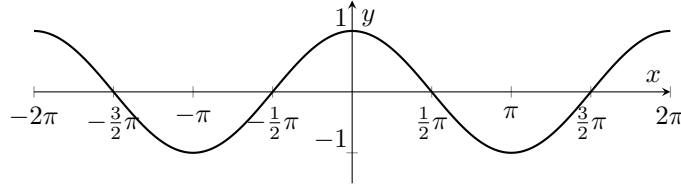


Figure 6: Segnale cosinusoidale ( $\phi = 0$ )

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 13.1 il  $\sin^2(\alpha)$  e lo sostituiamo (2.1) 13.1.2

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 + \cos^2(\alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\ &= \frac{A}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$



### 4.2.3 Gradino

$$U(t) = x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

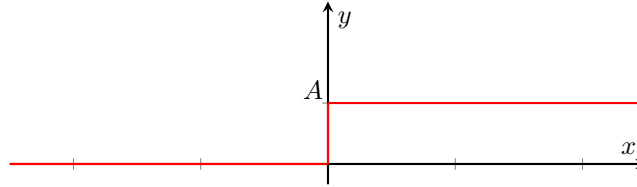


Figure 7: Segnale gradino

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

### 4.2.4 Rettangolo

$$x(t) = A \text{ rect} \left( \frac{t}{T} \right) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

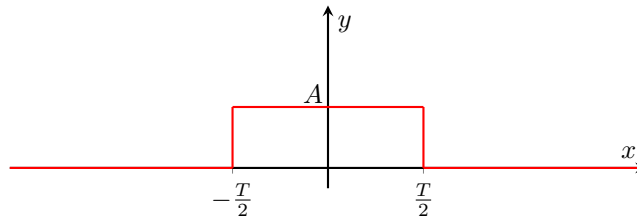


Figure 8: Segnale rettangolo

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = A^2 T$$

- Potenza Media:  $T < T_0$  se non fosse così avrei una costante

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} A^2 T = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} AT = 0 \end{aligned}$$

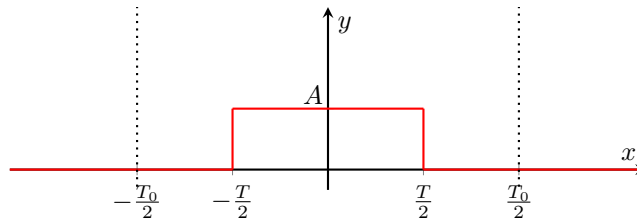


Figure 9

#### 4.2.5 Esponenziale unilatera

$$x(t) = e^{-t} U(t)$$

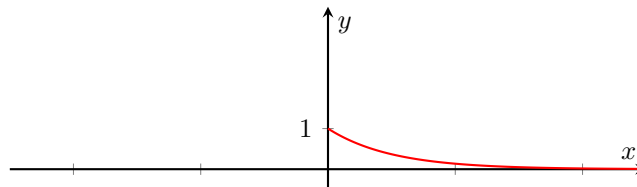


Figure 10: Segnale esponenziale unilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left. \frac{1}{2} e^{-2t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-1) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

#### 4.2.6 Esponenziale bilatera

$$x(t) = e^{-|t|}$$

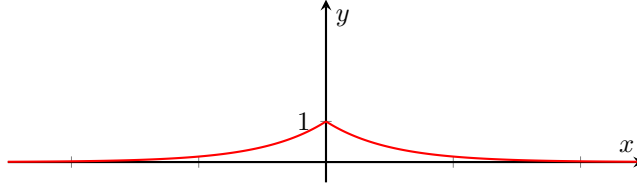


Figure 11: Segnale esponenziale bilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 2 \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-2) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{2}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} = 0 \end{aligned}$$

#### 4.2.7 segno $sgn(x(t))$

$$x(t) = sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

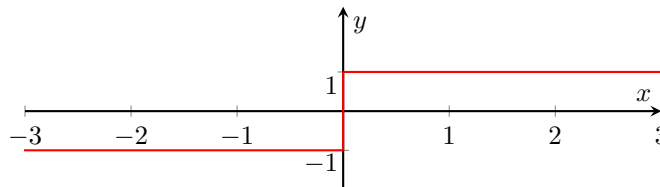


Figure 12: Segnale sgn(x)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}^2 t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 1$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 1 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( -\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

### 4.3 Segnali Periodici

Un segnale è periodico se:

$$x(t) = x(t - kT_0) \quad k \in \mathbb{Z}, t_0 \in \mathbb{R}^+, T_0 = \text{Periodo del segnale}$$

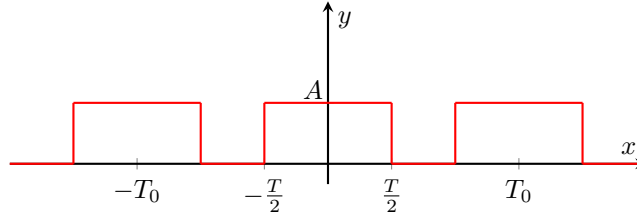


Figure 13: Segnale periodico

Si possono definire le seguenti grandezze:

- Energia di un segnale periodico

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_0}{2} + kT_0}^{\frac{T_0}{2} + kT_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} kX = \infty \end{aligned}$$

Tutti i segnali iperperiodici hanno quindi  $E_x = \infty$

- Potenza media di un segnale periodico

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \Rightarrow T = kT_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} |x(t)|^2 dt \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

Posso calcolare la potenza di un singolo periodo:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Valore medio di un segnale periodico

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

## 5 Trasformata Serie Di Fourier

### 5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x(t) = x(t - kT_0)$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

### 5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo  $T_0$  che soddisfa le condizioni di Dirichlet e la sua  $E_x < \infty (C.S.)$  può essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di  $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k \in \mathbb{C}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

$$x(t) = \dots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

$X_0$  corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale, inoltre le componenti  $X_k$  prendono il nome di armoniche alla frequenza  $f$  corrispondente

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocità:  $\forall x(t) \exists! X_k$ :

$$x(t) \xrightleftharpoons[ATSF]{TSF} X_k$$

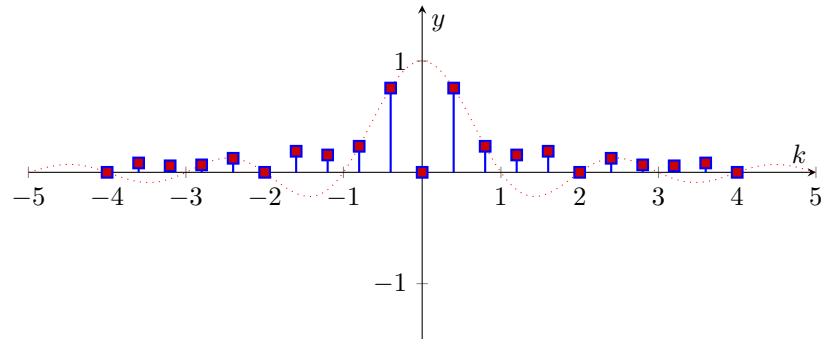
$$Segnale Analogico Periodico \xrightleftharpoons[ATSF]{TSF} Sequenza Complessa$$

#### 5.2.1 Rappresentazione di $X_k$

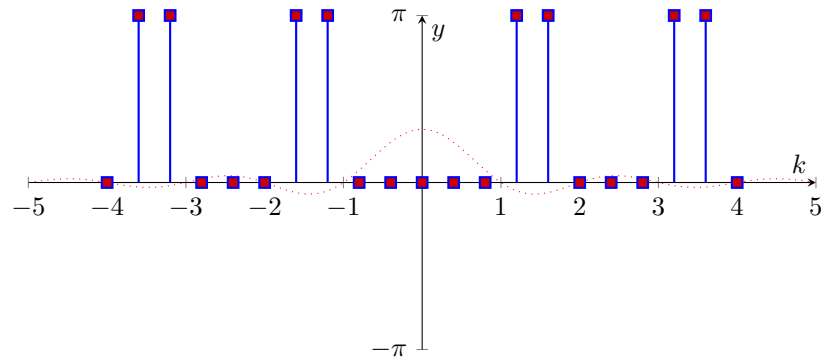
Essendo  $X_k$  un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro di un treno di rect

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

### 5.3 Proprietá della TSF

### 5.4 Linearitá

### 5.5 Simmetria Hermitiana

### 5.6 Calcolo dei coefficienti $X_k$ per segnali noti

#### 5.6.1 $A \cos(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$



Utilizzando la composizione dei coefficienti  $X_k$ :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} + X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

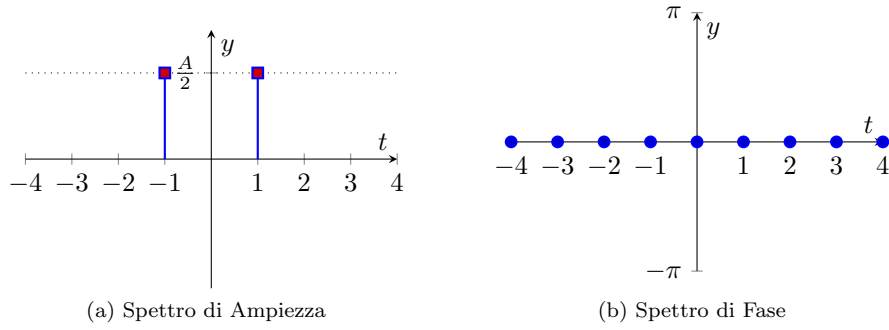


Figure 15: Spettro TSF del coseno  $A > 0$

### 5.6.2 $A \sin(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti  $X_k$ :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} - X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$\begin{aligned} X_{-1} &= -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j} \\ |X_k| &= \begin{cases} \left|\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ \left|-\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle \frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle -\frac{A}{2j} = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

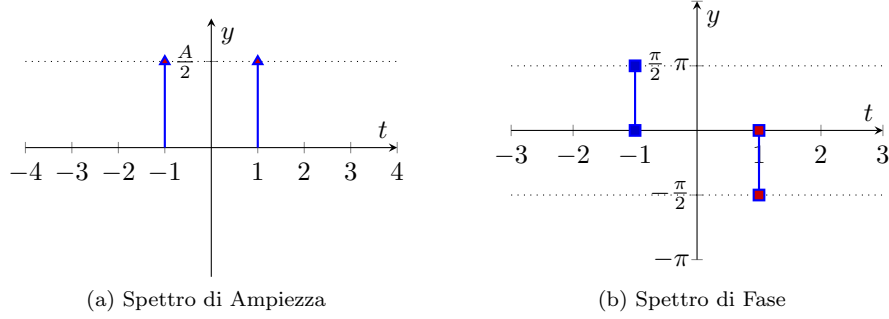


Figure 16: Spettro TSF del seno  $A > 0$

### 5.6.3 Treno di rect

$x_R = A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$  Segnale periodico  $\rightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$   
 $T_0 = \text{periodo}, T = \text{durata} \rightarrow T < T_0$ , se così non fosse avremmo una costante

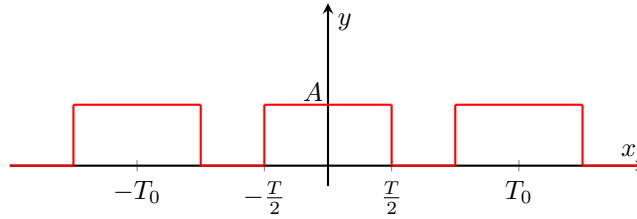
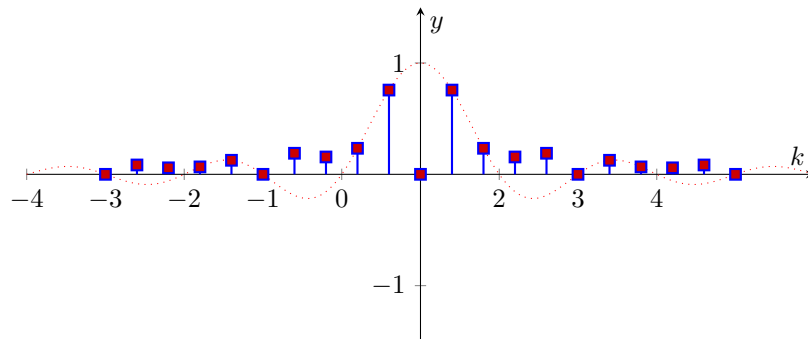


Figure 17: Treno di  $A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

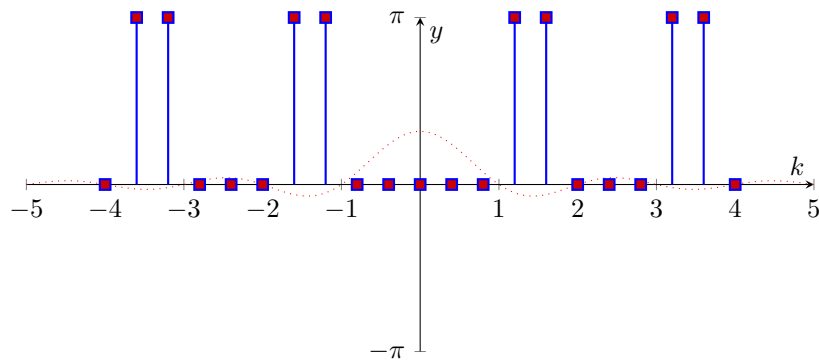
$\rightarrow$  Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da aperiodiche a periodiche e viceversa

$$\begin{aligned}
 ATSF[x(t)] &= ATSF\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)\right] \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
 &= \frac{AT}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = A f_0 T \text{sinc}(k f_0 T)
 \end{aligned}$$

Tracciamo lo spettro per  $f_0 T < 1$ :



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 18: Spettro TSF del treno di rect con  $f_0 T < 1$

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:

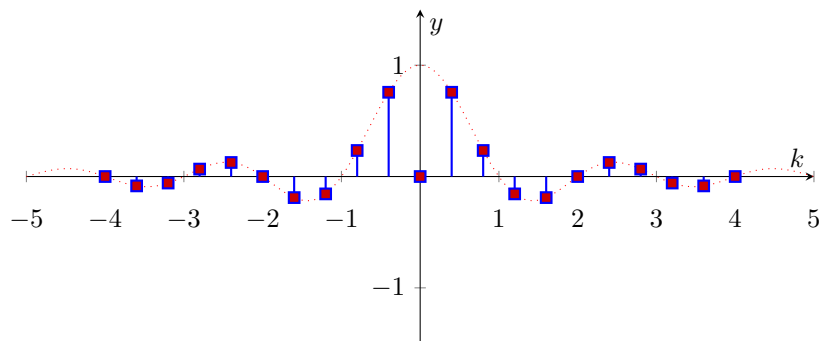


Figure 19: Spettro treno di  $A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di ricostruzione dello stesso (script di matlab presenti nel teams):

- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali più alte  $\rightarrow$  copre più spettro(espansione spettrale)  $T_0 \downarrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse frequenze  $T_0 \uparrow$

Se non ho abbastanza passi  $K$  non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio né un'analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettamente il segnale. Inoltre in 0 dello spettro ho il Valore medio 4.1.5 del segnale

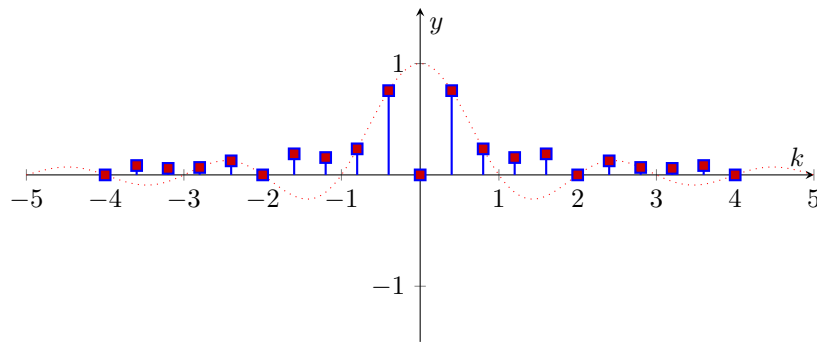
## 6 Trasformata Continua Di Fourier

### 6.1 Segnali Aperiodici

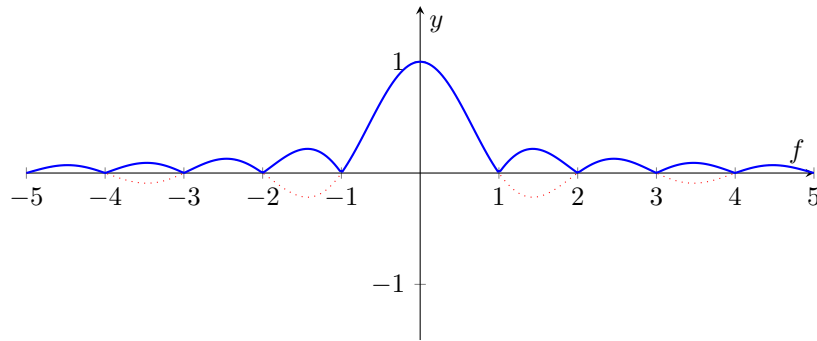
Nel caso di segnali come  $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$  non posso usare la *TSF* posso però scrivere:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t), \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$$

Passiamo da un'analisi a frequenze discrete ad un'analisi su tutto lo spettro delle frequenze



(a) Spettro di Ampiezza TSF



(b) Spettro di Ampiezza TCF

## 6.2 Equazioni di Analisi e Sintesi

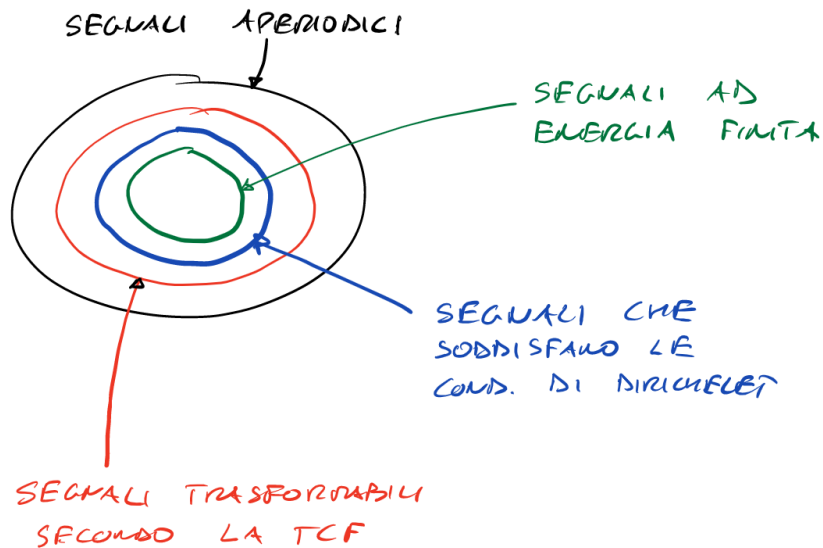


Figure 20: Insiemi dei segnali per tcf

### 6.2.1 Equazione di Analisi

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{Equazione di analisi}$$

### 6.2.2 Equazione di Sintesi

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi ft} df \quad \text{Equazione di sintesi}$$

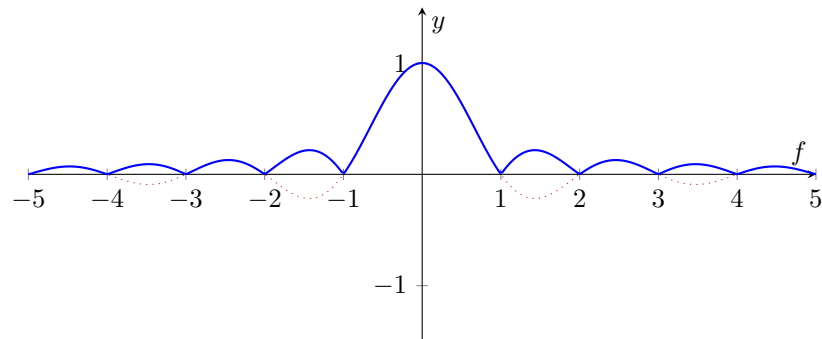
La *TCF* gode della biunivocità

$$x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \quad X_{(f)} \in \mathbb{C}$$

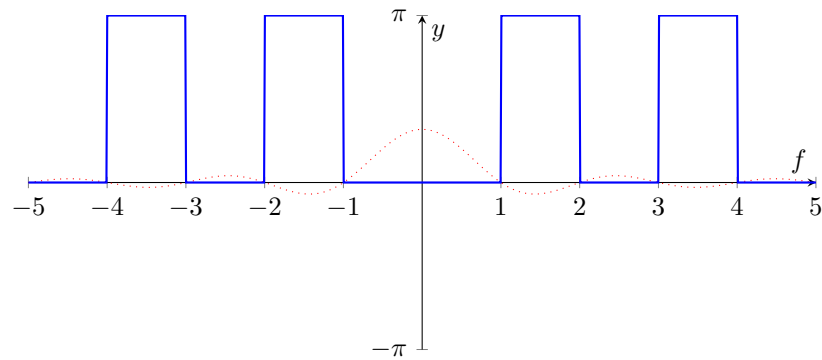
Essendo  $X_{(f)}$  un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_{(f)} = |X_{(f)}| e^{j\angle X_{(f)}}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 21: Spettro del segnale TCF

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo e continuo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**, questa proprietà é chiamata **Simmetria Hermitiana**

### 6.2.3 TCF di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

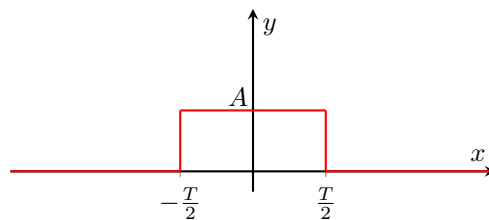
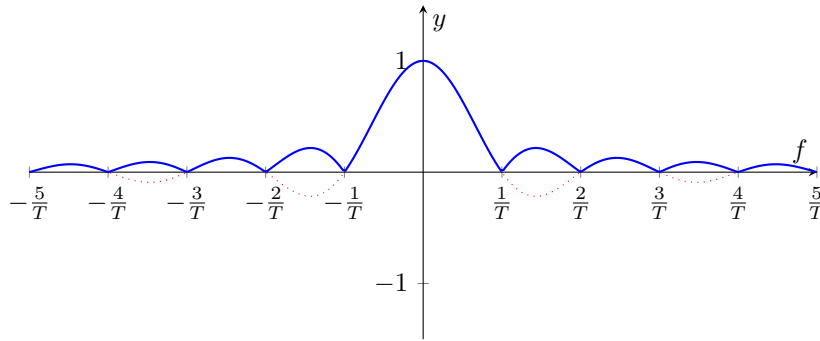


Figure 22:  $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

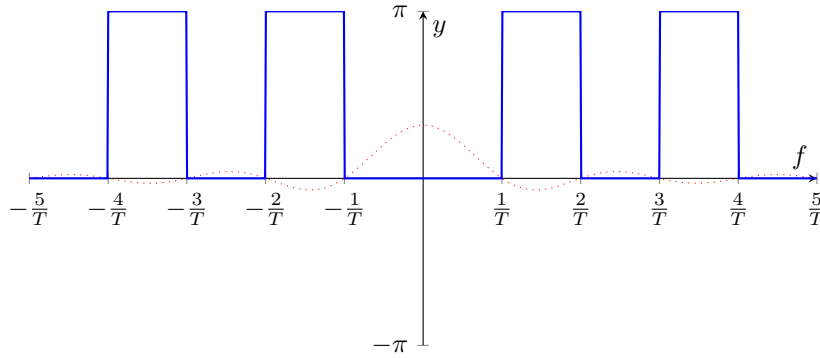
$X_{(f)} = ? :$

$$\begin{aligned}
 X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) \\
 &= \frac{AT}{\pi f} \left( \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} \right) = \frac{AT \sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(fT) = X_{(f)} \\
 A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) &\stackrel{TCF}{\underset{ATCF}{\rightleftharpoons}} AT \operatorname{sinc}(fT)
 \end{aligned}$$

La sinc si annulla in  $\frac{k}{T}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Notiamo anche come la funzione di partenza sia reale e pari la TCF rispetti 6.3.2(si?):



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

### 6.3 Propriet 

Come per la TSF vale che al variare del periodo della funzione  $T$ :



- Se  $T \uparrow$  aumenta  $\rightarrow f \downarrow$  diminuisce e si stringe lo spettro
- Se  $T \downarrow$  diminuisce  $\rightarrow f \uparrow$  aumenta e si allarga lo spettro

Inoltre come si può evincere dal successivo Teorema della Dualità 6.4.2:

- Una funzione limitata (finita) nel tempo ha uno spettro nella frequenza illimitato  $\rightarrow$  sono i segnali fisici
- Una funzione illimitata nel tempo ha uno spettro nella frequenza limitato (finito)

Da come vedremo più avanti quindi effettuare troncamenti in frequenza comporta, per alcuni segnali, perdere componenti ad alte frequenze, la scelta dell'intervallo di troncamento è cruciale per la ricostruzione del segnale: se tronchiamo un segnale perdendo le frequenze alte perdiamo le sue variazioni rapide, ad esempio se tronchiamo una  $\text{sinc}(f)$  male potremmo non ottenere una buona  $\text{rect}(t)$  nel tempo.

### 6.3.1 Simmetria hermitiana

$$\begin{aligned}
 &Ip : x_{(t)} \text{ reale} \\
 &Th : X_{(f)} \text{ hermitiana} \\
 &X_{(-f)} = X_{(f)}^* \rightarrow \begin{cases} |X_{(f)}| = |X_{(-f)}| & \text{Simmetria Pari} \\ \angle X_{(-f)} = -\angle X_{(f)} & \text{Simmetria Dispari} \end{cases}
 \end{aligned}$$

### 6.3.2 Parità

$$\begin{aligned}
 &Ip : x_{(t)} \text{ reale e pari} \\
 &Th : X_{(f)} \text{ reale e pari}
 \end{aligned}$$

### 6.3.3 Disparità

$$\begin{aligned}
 &Ip : x_{(t)} \text{ reale e dispari} \\
 &Th : X_{(f)} \text{ immaginaria e dispari}
 \end{aligned}$$

## 6.4 Teoremi relativi alla TCF

### 6.4.1 Linearità

$$\begin{aligned}
 &Ip : x_{(t)} = \alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)} \\
 &Th : X_{(f)} = \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}
 \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_{1(t)} e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{2(t)} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}
\end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
x_{(t)} &= A \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + B \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
X_{(f)} &= AX_{1(f)} + BX_{2(f)} = 2AT \text{sinc}(2Tf) + BT \text{sinc}(Tf) \\
X_{1(f)} &= \begin{cases} X_{1(f)} = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{TCF} T' \text{sinc}(T'f) \Rightarrow X_{1(f)} = 2T \text{sinc}(2Tf) \\ T' = 2T \end{cases}
\end{aligned}$$

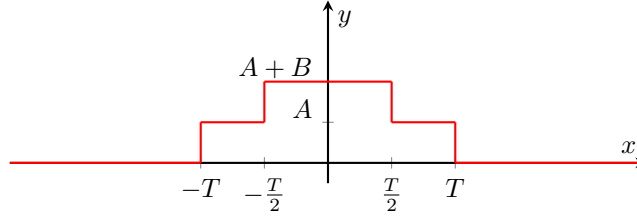


Figure 23: Segnale rettangolo

#### 6.4.2 Dualità

$$Ip : x_{(t)} \xrightarrow[ATCF]{TCF} X_{(f)}$$

$$Th : X_{(t)} \xrightarrow[ATCF]{TCF} x_{(-f)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \text{Sost.} \begin{cases} t \rightarrow f \\ f \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(f)} e^{-j2\pi ft} df \\
&= \text{Sost.} (f' = -f) \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{-j2\pi t(-f')} df' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{j2\pi tf'} df' = ACTF[x_{(-f)}] = c.v.d.
\end{aligned}$$

Esempio:

$$x_{(t)} = A \text{sinc}(Bt) \Rightarrow X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} A \text{sinc}(Bt) e^{-j2\pi ft} dt$$

Applico la dualità:

$$\begin{aligned} \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) &\Leftrightarrow AT \text{sinc}(Tf) \\ AT \text{sinc}(Tt) &\Leftrightarrow \text{Arect}\left(\frac{-f}{T}\right) \end{aligned}$$

Se voglio una durata generica:

$$\begin{aligned} &\text{Sostituisco } B = T \\ AB \text{sinc}(Bt) &\Leftrightarrow \text{Arect}\left(\frac{f}{B}\right) \\ &\Downarrow \\ A \text{sinc}(Bt) &\Leftrightarrow \frac{A}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \end{aligned}$$

### 6.4.3 Ritardo

$$\begin{aligned} Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \\ y_{(t)} = x_{(t-t_0)} \end{cases} \\ Th : Y_{(f)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} y_{(t)} = X_{(f)} e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-t_0)} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \text{Sost. } (t' = t - t_0) \Rightarrow Y_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')} e^{-j2\pi f (t' + t_0)} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')} e^{-j2\pi f t'} e^{-j2\pi f t_0} dt' = X_{(f)} e^{-j2\pi f t_0} \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

*Osservazione:*

- Un ritardo nel tempo introduce una componente solo di fase che cresce linearmente con la frequenza
- Un esponenziale nel tempo introduce un ritardo nel dominio della frequenza  $x_{(t)} e^{-j2\pi f_0 t} \mapsto X_{(f-f_0)}$ , vedi 6.5.4

Esempio:

$$x_{0(t)} = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow x_{(t)} = x_{0(t-t_0)} \quad t_0 = \frac{T}{2}$$

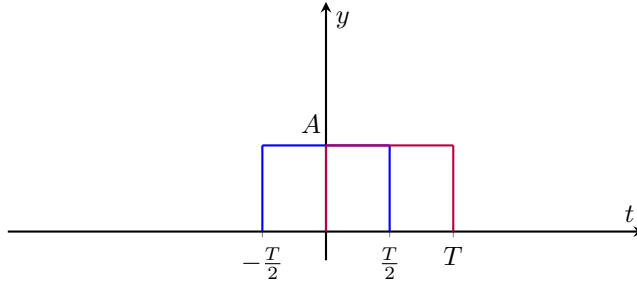


Figure 24:  $x_{0(t)}$ ,  $x(t)$

$$X(f) = X_{0(f)} e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = AT \operatorname{sinc}(Tf) e^{-j\pi f T}$$

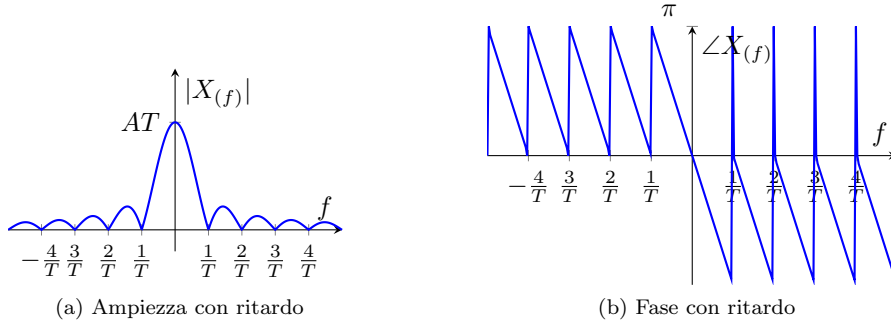


Figure 25: Spettro della *rect* con ritardo

Il  $\text{\LaTeX}$  sbaglia e aggiunge le spike nelle  $f$  positive, il grafico é dispari con andamento come per le  $f$  negative.

#### 6.4.4 Derivazione

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightarrow{TCF} X(f) \\ y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} ACTF[x(t)] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) j2\pi f e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

Posso Scrivere  $y_{(t)}$  come  $ACTF[y_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$ , se quindi  $Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$  l'uguaglianza é valida:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$$

L'operazione di derivata nel dominio della frequenza si traduce in una semplice operazione algebrica, nel tempo avrei dovuto calcolare il rapporto incrementale. Per derivare un segnale posso quindi:

$$x_{(t)} \rightarrow TCF \rightarrow j2\pi f X_{(f)} \rightarrow ACTF \rightarrow y_{(t)}$$

#### 6.4.5 Integrazione

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} & (1) \\ y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha & (2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} dt \text{ oppure } X_{(f)}|_{f=0} = 0 \text{ oppure } y(+\infty) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Dimostrazione:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha \Rightarrow \frac{d}{dt} x_{(t)} = \frac{d}{dt} y_{(t)} \xrightarrow{Th.6.4.4} X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)}$$

$$Y_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

L'ipotesi 3 é conseguenza della divisione per  $f$  e che devo mantenere l'uguaglianza  $X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)}$ , si nota come nella dimostrazione usando il Th della Derivazione (6.4.4) quando  $f = 0$  la funzione nella frequenza deve essere 0,  $X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)} = 0$

Esempio:  $TCF$  di una piramide

$$x_{(t)} = A \left( 1 - \left( \frac{|t|}{T} \right) \right) rect \left( \frac{t}{2T} \right) \quad X_{(f)} = TCF[x_{(t)}] = ?$$

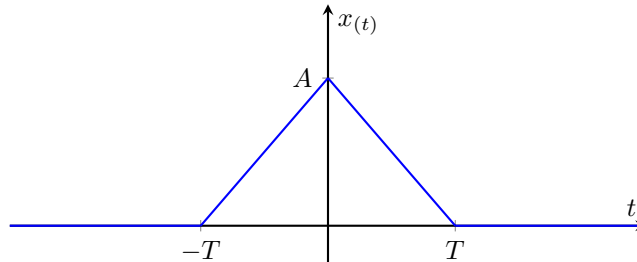


Figure 26: Funzione priamide

$TCF[x(t)] :$

- Utilizzando la classica  $TCF$ :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \left( 1 - \left( \frac{|t|}{T} \right) \right) \text{rect} \left( \frac{t}{2T} \right) dt$$

- Utilizzando il Th dell'Integrazione 6.4.5:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \implies x(t) = \int_{-\infty}^t y(\alpha) d\alpha \quad 6.4.5(2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt \quad 6.4.5(3)$$

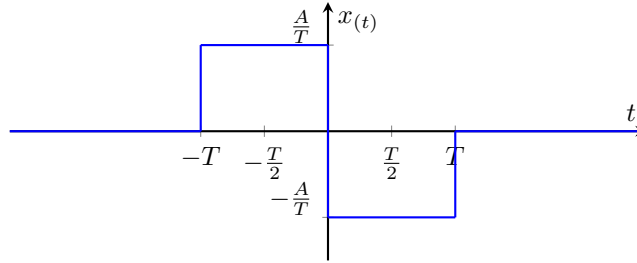


Figure 27: Funzione priamide

$$y(t) = \frac{A}{T} \text{rect} \left( \frac{t - (-\frac{T}{2})}{T} \right) - \frac{A}{T} \text{rect} \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{T} \right) = \text{Sono 2 rect con ritardo}$$

$$\Rightarrow y(t) \Leftrightarrow Y(f) \quad 6.4.5(1) \Rightarrow X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} \begin{cases} x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0} \\ \text{rect}(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow T \text{sinc}(Tf) \end{cases}$$

$$Y(f) = \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f (-\frac{T}{2})} - \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2j A \text{sinc}(Tf) (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T})}{2j} = 2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)$$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} = \frac{2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{j2\pi f} = \frac{A T \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$= A T \text{sinc}^2(fT)$$

Abbiamo ottenuto la  $TCF$  del triangolo:

$$A \left( 1 - \left( \frac{|t|}{T} \right) \right) \text{rect} \left( \frac{t}{2T} \right) \Rightarrow AT \text{sinc}^2(fT)$$

per la dualità 6.4.2 :

$$AB \text{sinc}^2(Bt) \Rightarrow A \left( 1 - \left( \frac{|f|}{B} \right) \right) \text{rect} \left( \frac{f}{2B} \right)$$

I segni negativi spariscono per il valore assoluto e per la parità della  $\text{rect}$ . Per verificare che i calcoli siano corretti posso collocare la  $X_{(f)}$  in 0 e vedo quanto è l'area del segnale:

$$T^2 \text{sinc}(Tf) \Big|_0 = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} T \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = T$$

*Osservazione:* la funzione piramidale varia meno rapidamente nel *tempo* rispetto alla funzione rettangolare quindi lo spettro non occupa le alte frequenze, l'andamento è di  $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$ , è molto più contenuto. La  $\text{rect}$  avendo un gradino varia molto rapidamente nel *tempo* e di conseguenza il suo spettro si estende a frequenze più alte del segnale piramidale.

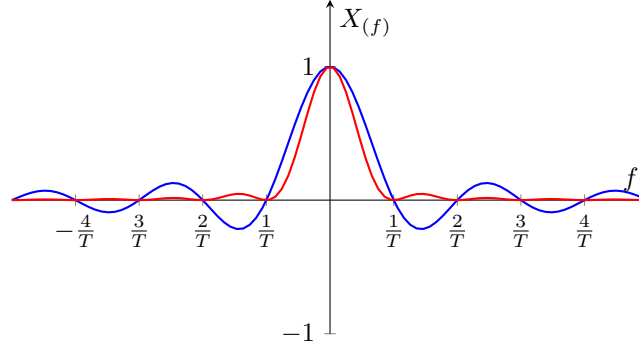


Figure 28:  $\frac{\text{sinc}}{x}$ ,  $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$

#### 6.4.6 Derivazione in Frequenza

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons{ATCF} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt} \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$$

#### 6.4.7 Integrazione in Frequenza

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \\ y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

#### 6.4.8 Convoluzione

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \\ z(t) = x(t) \otimes y(t) \end{cases}$$

$$Th : Z(f) = X(f) Y(f)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt d\tau \xrightarrow{Th.6.4.3} \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X(f) Y(f) \end{aligned}$$

Propriet  della convoluzione:

- Commutativa:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \Rightarrow \tau = t - \tau' \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau') y(\tau') d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau') x(t-\tau') d\tau' = y(t) \otimes x(t) \end{aligned}$$

- Associativa:

$$(x(t) \otimes y(t)) \otimes z(t) = x(t) \otimes (y(t) \otimes z(t))$$

- Distributiva:

$$x(t) \otimes (y(t) + z(t)) = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t)$$



Dimostrazione:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)(y(t-\tau) + z(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t) \end{aligned}$$

Tutte le proprietà sono valutate nel dominio del *tempo* ma valgono anche per il dominio della *frequenza*.

#### 6.4.9 Prodotto

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \\ z(t) = x(t)y(t) \end{cases}$$

$$Th : Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)e^{j2\pi\alpha t}d\alpha y(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-\alpha)t}dt d\alpha \\ &\stackrel{Th.6.4.3}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)Y(f-\alpha)d\alpha = X(f) \otimes Y(f) \end{aligned}$$

<i>Tempo</i>	<i>Frequenza</i>
<i>Convoluzione</i>	$\iff$ <i>Prodotto</i>
<i>Prodotto</i>	$\iff$ <i>Convoluzione</i>

#### 6.4.10 Calcolo del prodotto di convoluzione

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad y(-\tau) \text{ e' } y(\tau) \text{ ruotato}$$

Facciamo un esempio con 2 *rect*:

$$x(t) = y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

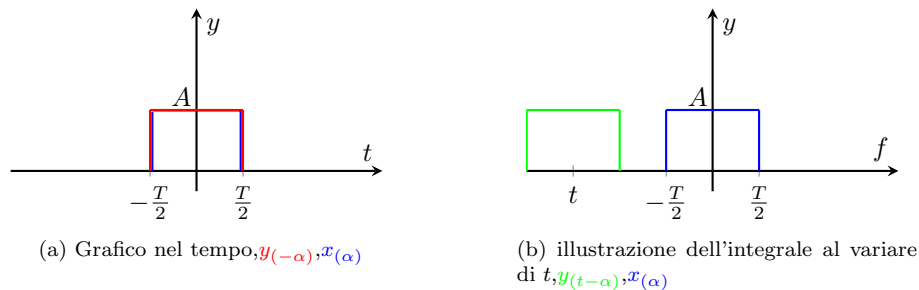


Figure 29: Grafico per il calcolo del prodotto di convoluzione

All'aumentare di  $t$   $y(t-\alpha)$  si sposta sull'asse delle ascisse, se:

- $t = -\frac{T}{2}$ : si allineano le due *rect* e il valore dell'integrale inizia a aumentare.
- $t = 0$ : si ha il valore massimo del prodotto tra le due funzioni (in questo caso  $A = 1$ ), l'integrale vale  $T$ .
- $t = \frac{T}{2}$ : le due *rect* sono disgiunte, nel raggiungere questa posizione il valore dell'integrale é diminuito fino a 0.

Tracciamo l'andamento dell'integrale:

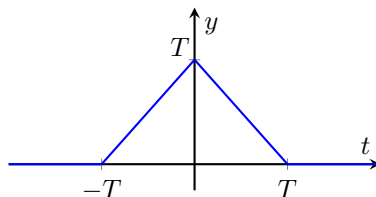


Figure 30: Integrale di convoluzione

*Osservazioni:*

- Il prodotto di convoluzione ha come durata la somma delle durate dei segnali  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow [-T, T]$
- In  $t = 0$  é l'area il prodotto dei segnali

Esempio con *rect* di durata  $T$  e  $2T$ :

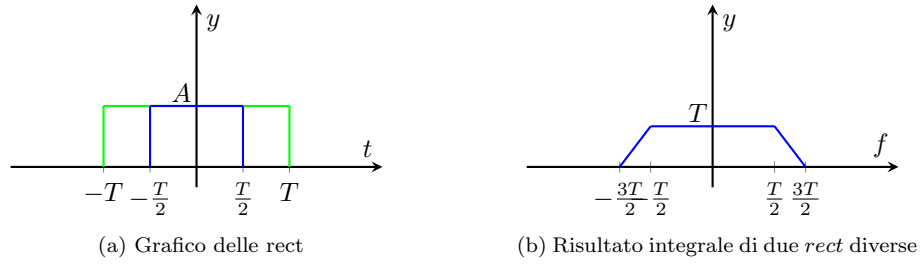


Figure 31: Integrale di convoluzione di *rect* di durata diversa

Esemptio *TCF* di un triangolo:

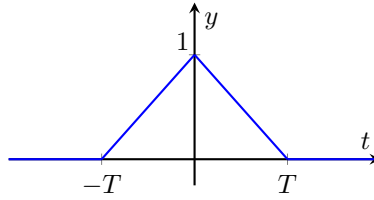


Figure 32: Integrale di convoluzione

Dal Th. di Convoluzione 6.4.8 sappiamo che é il prodotto di convoluzione di 2 *rect* di durata uguale a  $T$ :

$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \stackrel{Th. 6.4.8}{\Rightarrow} T \text{sinc}(fT) \cdot T \text{sinc}(fT) \\ T^2 \text{sinc}(fT)$$

## 6.5 Modulazione di Ampiezza

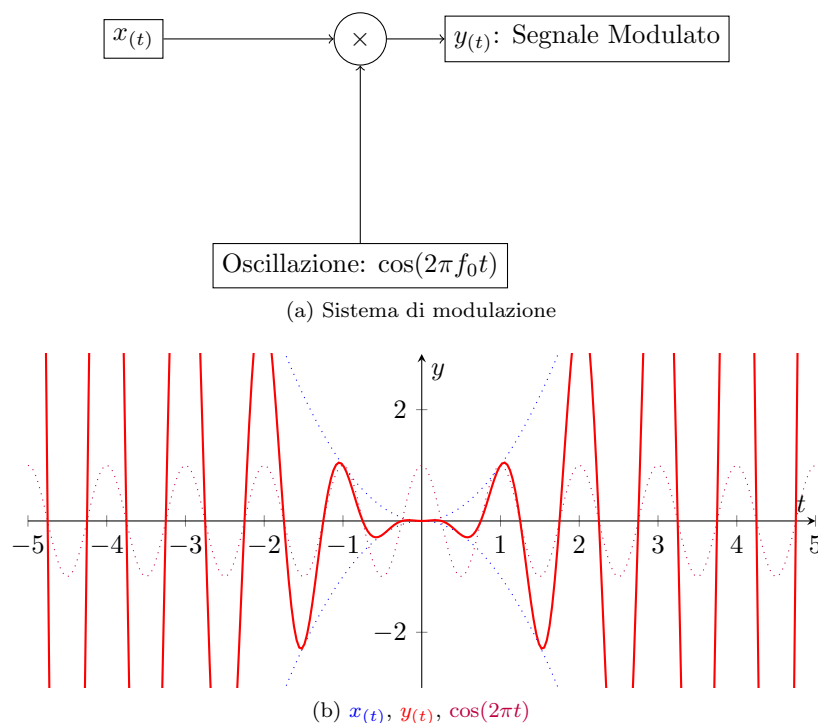


Figure 33: Esempio sistema di modulazione di ampiezza

L'oscillazione introdotta,  $\cos(2\pi t)$ , segue l'andamento di  $x(t)$  Nel dominio della frequenza:

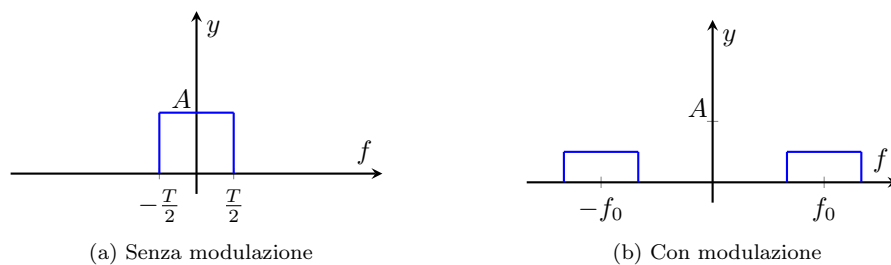


Figure 34: Segnale nel dominio della frequenza modulato e non

Serve per spostare la frequenza (es. di trasmissione) del segnale in modo tale, ad esempio, da non sovrapporre due segnali che sono sulla stessa frequenza. Se il segnale non fosse modulato si dice in **banda base (BB)** se il segnale é modulato

si dice in **banda passante**(BP).

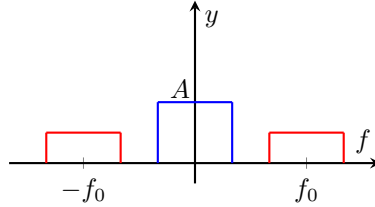


Figure 35: BB, BP

### 6.5.1 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \\ \xLeftrightarrow[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = \frac{1}{2}X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2}X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} + TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2}X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2}X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d} \end{aligned}$$

Esempio:

$$X_{(f)} = \frac{A}{B} \text{rect} \left( \frac{f}{B} \right)$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{2B} \text{rect} \left( \frac{f-f_0}{B} \right) + \frac{A}{2B} \text{rect} \left( \frac{f+f_0}{B} \right)$$

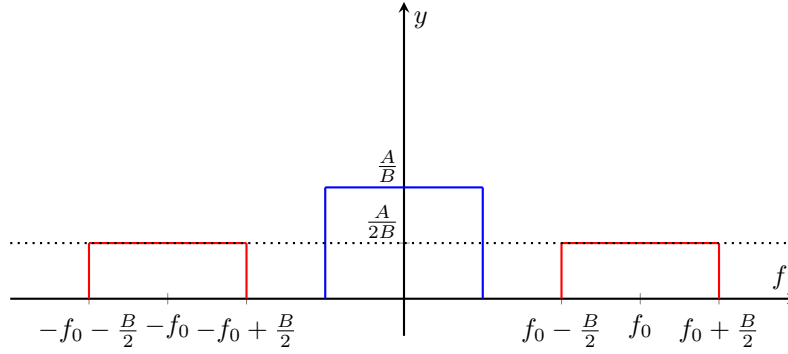


Figure 36:  $X_{(f)}$ ,  $Y_{(f)}$

### 6.5.2 Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} - TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d} \end{aligned}$$

### 6.5.3 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

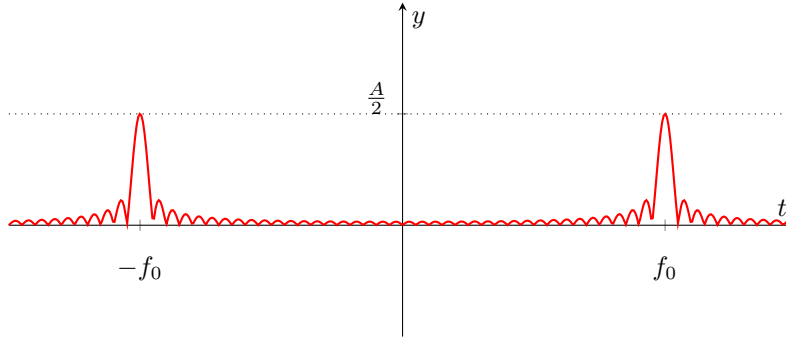
$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)}$$

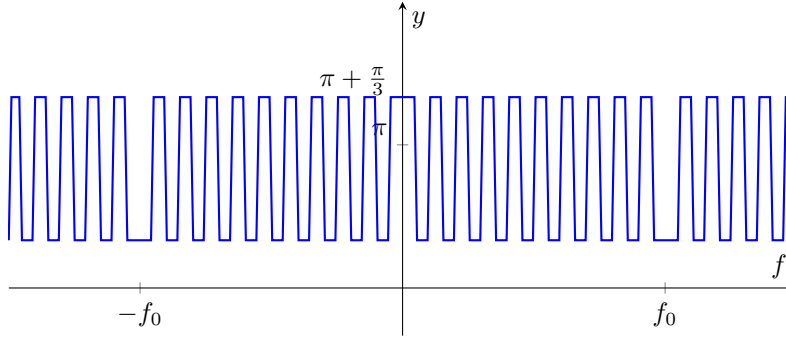
Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi) e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\
&= \frac{e^{j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}] \Big|_{f-f_0} + TCF[x_{(t)}] \Big|_{f+f_0} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d}
\end{aligned}$$

Esempio:



(a) Ampiezza Mod. generica



(b) fase Mod. generica

Figure 37: Modulazione generica di una  $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$  con  $\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3})$

#### 6.5.4 Th. Modulazione con Esponenziale Complesso

$$\begin{aligned}
Ip : \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} e^{j2\pi f_0 t} \\ x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \end{cases} \\
Th : Y_{(f)} = X_{(f-f_0)}
\end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = TCF[x_{(t)}] \Big|_{f-f_0} = X_{(f-f_0)} \end{aligned}$$

Posso notare che:

- Ritardo:  $\rightarrow x_{(t-t_0)} \rightleftharpoons X_{(f)} e^{(-j2\pi f t_0)}$
- Modulazione:  $\rightarrow x_{(t)} e^{(j2\pi f_0 t)} \rightleftharpoons X_{(f-f_0)}$

Procedimento per la sintesi di un segnale:

- Derivo il segnale
- Verifico le ipotesi del Th. dell'Integrazione 6.4.5
- calcolo la TCF della derivata
- Applico il Th. dell'integrazione per calcolare  $X_{(f)}$

### 6.5.5 Demodulazione

Ci poniamo il problema di riportare il segnale modulato al segnale originale( $g_{(t)}$ ), dato:

$$x_{(t)} = g_{(t)} \cos(2\pi f_0 t)$$

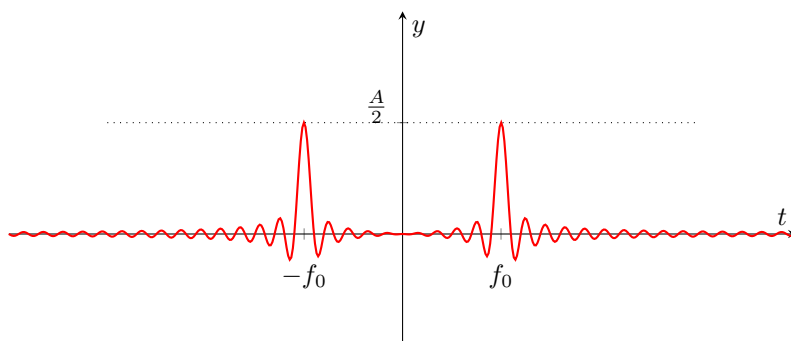
Demoduliamo il segnale con  $2 \cos(2\pi f_0 t)$ :

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= x_{(t)} 2 \cos(2\pi f_0 t) = g_{(t)} \cos^2(2\pi f_0 t) \\ &= g_{(t)} \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} = \frac{g_{(t)}}{2} + \frac{g_{(t)} \cos(4\pi f_0 t)}{2} \\ TCF[y_{(t)}] &\stackrel{Th. 6.5.1}{\Rightarrow} \frac{2G_{(f)}}{2} + \frac{2G_{(f-2f_0)}}{2} + \frac{2G_{(f+2f_0)}}{2} \\ &= G_{(f)} + G_{(f-2f_0)} + G_{(f+2f_0)} \end{aligned} \quad (1)$$

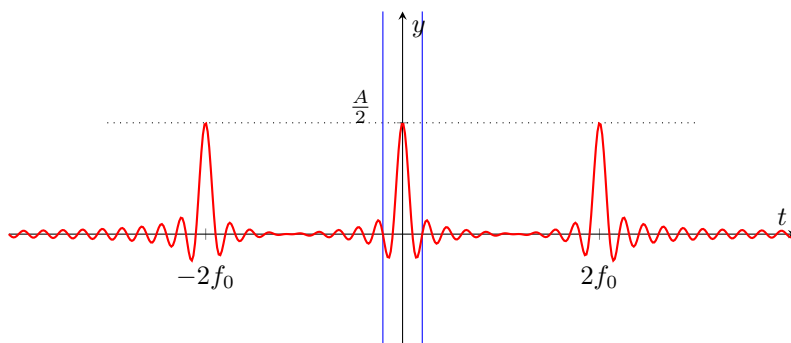
Dall'ultima uguaglianza posso quindi usare un filtro in (BB) per rimuovere i segnali alle frequenze  $\pm 2f_0$  e ricavare il mio segnale  $G_{(f)}$ .

Riporto un po di esempi di demodulazione di una o più *rect*: Esempio di Demodulazione





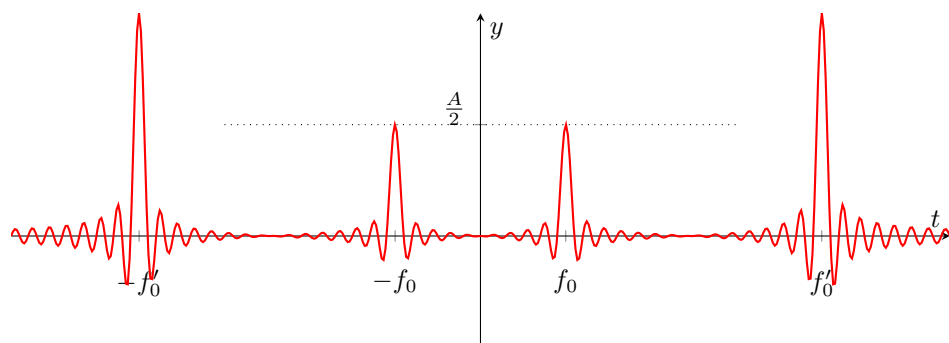
(a) *sinc* modulata



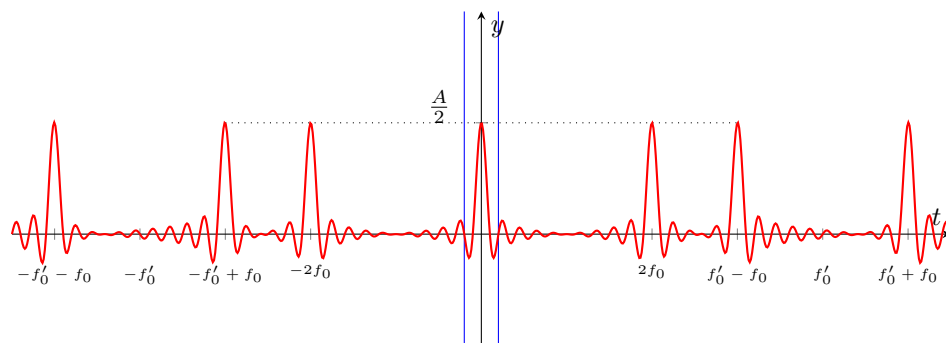
(b) *sinc* demodulata

Figure 38: Demodulazione di una *sinc*

Nel caso di piú segnali durante la demodulazione il segnale che voglio recuperare viene spostato in **BB** mentre gli altri segnali presenti sullo spettro vengono a loro volta modulati però con un  $f_0$  diverso rispetto al loro  $f'_0$ :



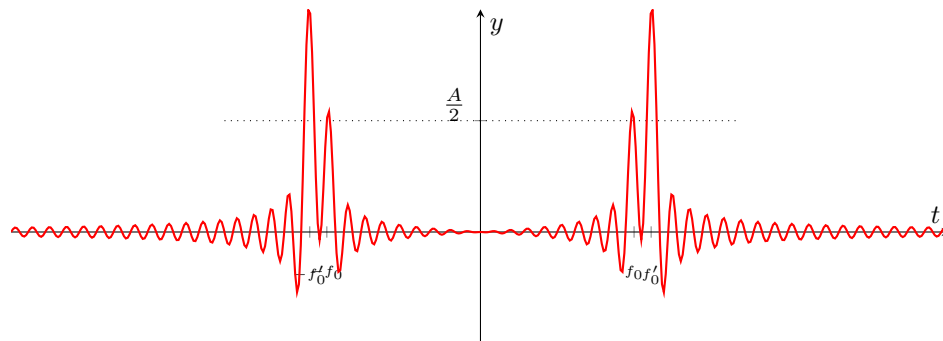
(a) Due *sinc* modulate



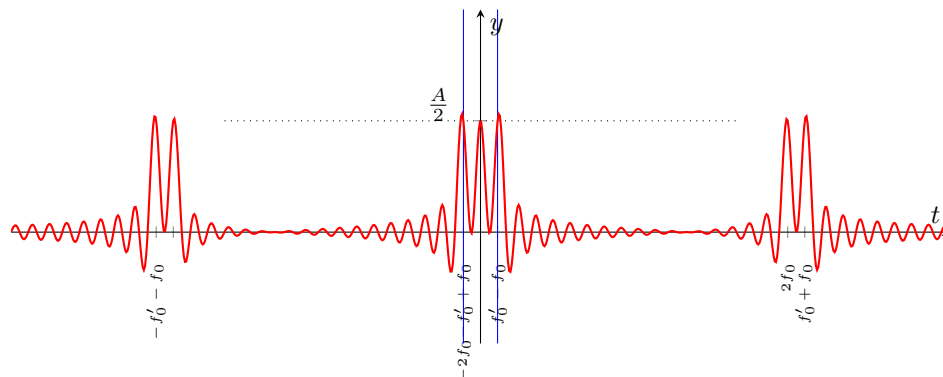
(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 39: Demodulazione di due *sinc*

Potrei però trovarmi in situazioni delle quali non posso recuperare il segnale



(a) Due *sinc* modulate



(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 40: Demodulazione di due *sinc* non recuperabili

Come possiamo vedere nella regione della **BB**, il segnale é molto sporco, magari può essere confuso con un cos e non una sinc. inoltre ora qui ho usato numeri interi per fare il *plot* quindi non si accavallano così male ma si accavallano solo in  $\frac{1}{T}$  se usassi altri valori sarebbe ancora più sporco il segnale.

Adesso proviamo a calcolare quanti segnali possiamo trasmettere in una banda:

Ho un segnale rettangolare che dura 5 minuti e una banda di  $20MHz = 20 \cdot 10^6 Hz$

$$f_{segnale} = \frac{1}{5 \cdot 60} = \frac{1}{300} Hz$$

$$n^\circ \text{ di segnali} = \frac{20 \cdot 10^6}{f_{segnale}} = 20 \cdot 10^6 \cdot 300 = 6 \cdot 10^9$$

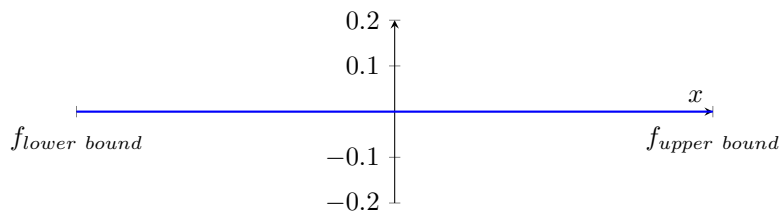


Figure 41: Spettro per la trasmissione

### 6.5.6 Radar

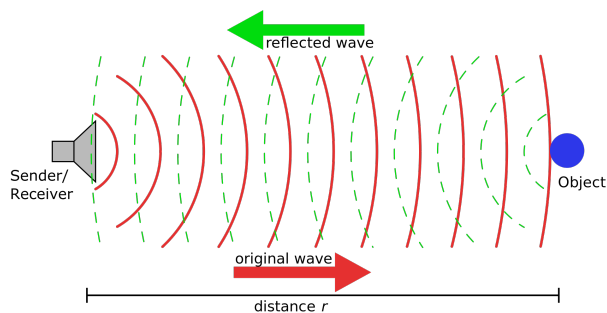


Figure 42: Spettro per la trasmissione

La sorgente emette un'onda continua e passivamente capta per le onde riflesse dagli oggetti. Il calcolo della distanza si basa sulla capacità dei materiali di riflettere le onde, più la frequenza dell'onda è alta più i materiali riescono a riflettere. L'emettitore, in presenza di ostacolo, riceve il segnale riflesso (*eco*) e misura il ritardo dell'*eco* rispetto al segnale originale per poi calcolarne la distanza. Prendiamo un emettitore di onde rettangolari.

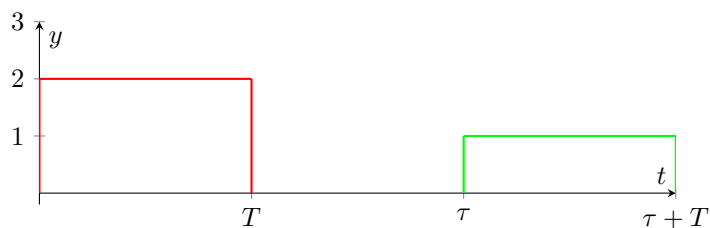


Figure 43: Spettro per la trasmissione

Indichiamo con  $\tau$  il ritardo di ricezione dell'*eco* e la distanza che separa il radar dall'oggetto  $d$ :

$$d = \frac{c\tau}{2}$$

Compare un fattore  $\frac{1}{2}$  dovuto al segnale che percorre due volte la distanza tra l'emettitore e l'oggetto. Possiamo notare che l'eco ha ampiezza minore poiché dell'energia è stata assorbita dal materiale o una porzione del segnale originale ha oltrepassato il materiale stesso.

Analizziamo in frequenza cosa succede.

Volgiamo realizzare un radar a onda rettangolare che rileva a un massimo di 15 metri di distanza e a un minimo di 1,5 metri. Possiamo calcolare i valori di ritardo massimo e minimo:

$$\tau_{min} = \frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 0.1 \mu s$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 1.5}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 10 ns$$

Il radar funziona finché  $T \ll \tau_{min}$ , se avessi un  $\tau_{min} > T$  non potrei distinguere il segnale inviato da quello ricevuto.

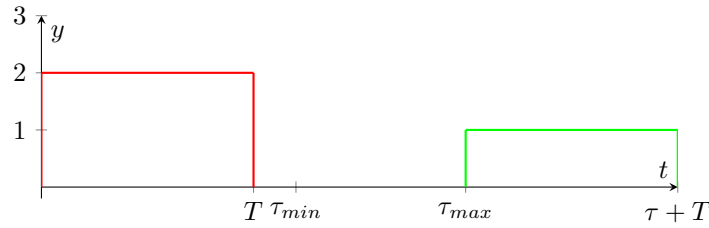


Figure 44: Limiti di ritardo del radar

Nel nostro caso potremmo scegliere un  $T \simeq 1 ns \simeq 10^{-9}$  per rispettare i limiti imposti dall'esercizio. Ma analizzando l'intervallo frequenziale della  $TCF$  della funzione rettangolo, una  $sinc(x)$ , il nostro segnale ha componenti frequenziali significative nell'ordine dei GHz,  $\frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-9}} = 1 GHz$ . I segnali nell'ordine dei GHz oltrepassano con facilità gli ostacoli, basti vedere le bande di funzionamento dei cellulari e il Wi-Fi. Si utilizzano segnali con l'ordine di centinaia se non migliaia di Hz, possiamo vedere come la lunghezza d'onda del segnale giochi un ruolo fondamentale:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$$

$$\lambda_0 = \begin{cases} f_0 = 3GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.1m \\ f_0 = 30GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.01m \\ f_0 = 300GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.001m \\ f_0 = 3000GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.0001m \end{cases}$$

## 6.6 Delta di Dirac

Si definisce Delta di Dirac  $\delta_{(t)} = \frac{d}{dt}U_{(t)}$  con  $U_{(t)}$  funzione gradino. Più correttamente si definisce Delta di Dirac la funzione che se integrata restituisce il gradino unitario:

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt \rightarrow U_{(t)}$$

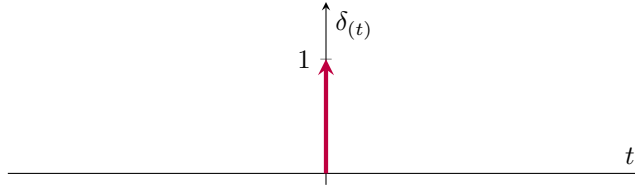


Figure 45: Delta di Dirac

L'ampiezza della funzione é dovuta alla costante moltiplicativa, ma alla fine rimane sempre una funzione impulso.

### 6.6.1 Proprietá del Delta di Dirac

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt = 1$
- Proprietá Campionatrice:  
 $Ip: x_{(t)}$  continua in  $t_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \delta_{(t-t_0)} dt = x_{(t_0)}$$

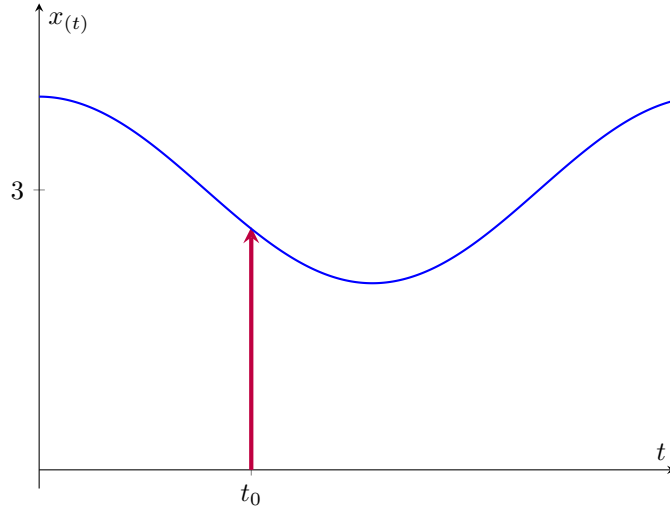


Figure 46: Proprietà Campionatrice

- Parità:  $\delta_{(t)} = \delta_{(-t)}$
- $x_{(t)} \delta_{(t-t_0)} dt = x_{(t_0)} \delta_{(t-t_0)}$
- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = x_{(t)}$

Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \delta_{(t-\tau)} d\tau \xrightarrow{6.6.1} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \delta_{(\tau-t)} d\tau = x_{(t)}$$

- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = x_{(t-t_0)}$

Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \delta_{(t-t_0-\tau)} d\tau \xrightarrow{6.6.1} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} \delta_{(\tau-(t-t_0))} d\tau = x_{(t-t_0)}$$

### 6.6.2 TCF della Delta di Dirac

$$x_{(t)} = A \delta_{(t)}$$

$$TCF[x_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt \xrightarrow{6.6.1 t_0=0} e^{-j2\pi f t} \Big|_{t=0} = A$$

$$A \delta_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} A$$

Per la dualità 6.4.2 :

$$A \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} A \delta_{(-f)} = A \delta_{(f)}$$

Caso con ritardo:

$$A\delta_{(t-t_0)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} Ae^{-j2\pi f t_0}$$

Per la dualita 6.4.2 :

$$Ae^{-j2\pi f_0 t} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} A\delta_{(-f-f_0)} = A\delta_{(f+f_0)}$$

### 6.6.3 TCF di segnali periodici

Nel caso di segnali periodici, come  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , abbiamo definito la  $TSF$ , proviamo a calcolarne la  $TCF$ :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} ?$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= TCF[\cos(2\pi f_0 t)] = TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \\ &= TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right] + TCF\left[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \xrightarrow{6.6.2} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2} \\ \cos(2\pi f_0 t) &\underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2} \end{aligned}$$

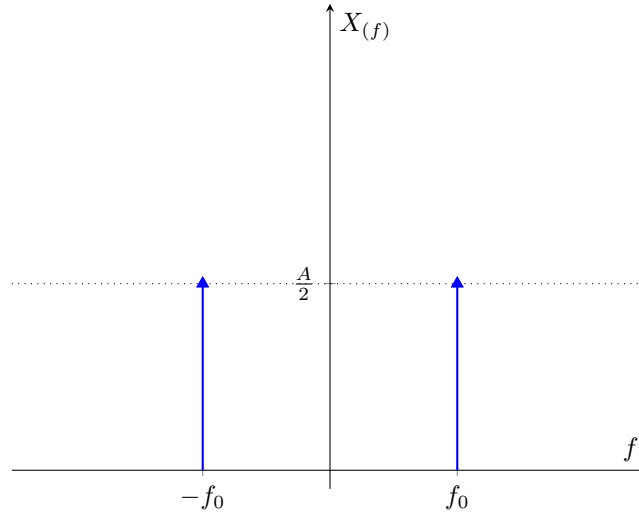


Figure 47: TCF  $\cos$

Praticamente modulo una costante.

Osservazione: Non sono i coefficienti  $X_{(k)}$ , qui le delta sono funzioni nella  $TSF$



sono numeri complessi.

Caso con  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} ?$$

$$\begin{aligned} X(f) &= TCF[\sin(2\pi f_0 t)] = TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \\ &= TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2j}\right] - TCF\left[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right] \xrightarrow{6.6.2} \frac{\delta(f-f_0)}{2j} - \frac{\delta(f+f_0)}{2j} \\ \sin(2\pi f_0 t) &\xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} \frac{\delta(f-f_0)}{2j} - \frac{\delta(f+f_0)}{2j} \end{aligned}$$

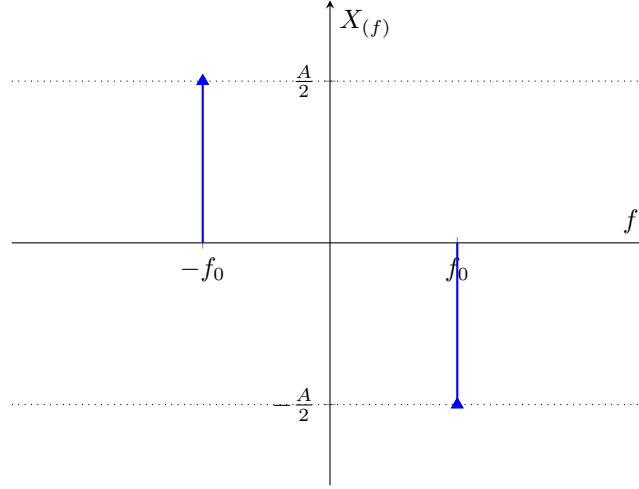


Figure 48: TCF *sin*

## 6.7 Relazione tra *TSF* e *TCF*

### 6.7.1 *TCF* di un segnale periodico generico

Dato un generico segnale  $y(t)$  posso sempre scriverlo come periodicizzazione di un segnale apreiodico  $x(t)$ :  $x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f)$

$$y(t) = y(t - kT_0) \Rightarrow \begin{cases} TSF[y(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \\ TCF[y(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - \frac{k}{T_0}) \end{cases}$$

La TCF diventa un campionamento con la Delta di Dirac 6.6.1

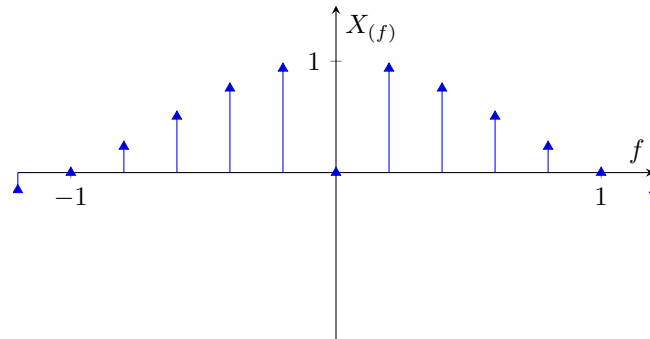


Figure 49: TCF segnale periodico generico

Applichiamolo al Th. della Modulazione 6.5.1:

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \stackrel{6.4.9}{\Rightarrow} X_{(f)} \otimes \left( \frac{\delta(f-f_0)}{2} + \frac{\delta(f+f_0)}{2} \right) \\ \stackrel{6.6.1}{\Rightarrow} \frac{1}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2} X_{(f+f_0)}$$

Esercizio:

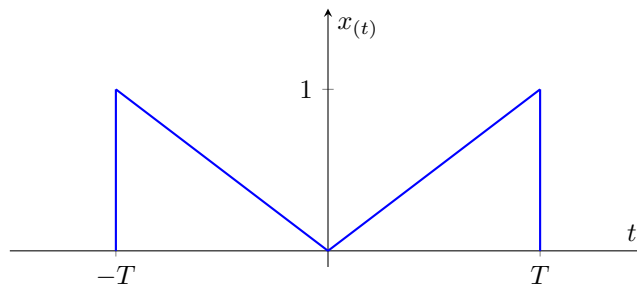


Figure 50: TCF rect meno triangolo

Deriviamo il segnale  $y(t)$ :

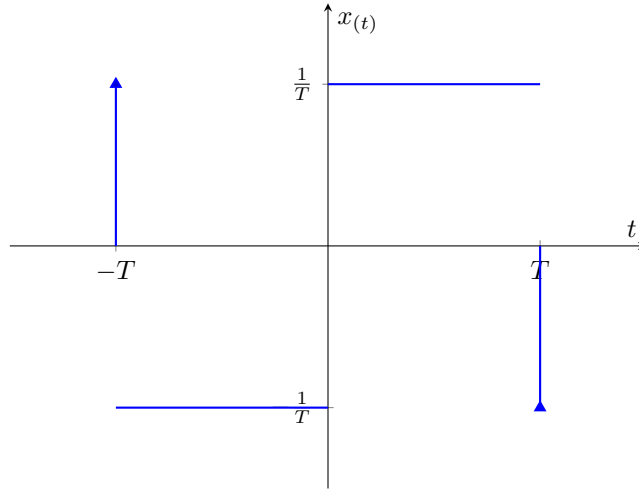


Figure 51: Derivata di  $y(t)$

$$y(t) = \delta_{(t-T)} - \delta_{(t+T)} - \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t - (-\frac{T_0}{2})}{T}\right) + \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T}\right)$$

Possiamo applicare il Th dell'integrazione 6.4.5 l'ipotesi (3):  $y_{(\infty)} = 0$

$$\begin{aligned} TCF[y(t)] &= e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{T} T \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f \frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T} T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \\ &= \frac{2j}{2j} \left( e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f \frac{T_0}{2}} + \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \right) \\ &= 2j \sin(2\pi fT) - 2j \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{2j \sin(2\pi fT) - 2j \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{j2\pi f} \\ &= \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{\text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} = \frac{2T}{2T} \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{T}{T} \frac{\text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} \\ &= 2T \text{sinc}(2fT) - T \text{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

Si potrebbe fare sottraendo un triangolo a una rect?

### 6.7.2 Relazione tra i coefficienti $X_k$ e $X_{(f)}$

$$y(t) = y_{(t-kT_0)} \Rightarrow \text{Periodico in } T_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(t-nT_0)}$$

$x(t)$  Segnale aperiodico

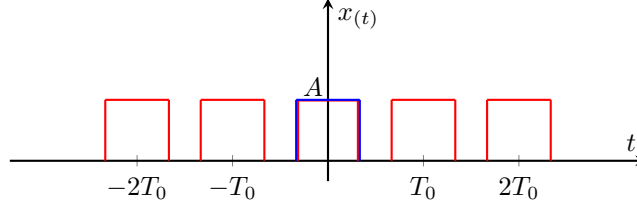


Figure 52: Segnale **aperiodico**, Segnale **periodico**

$$\begin{cases} x(t) \xrightleftharpoons{TCF} X_{(f)} \\ y(t) \xrightleftharpoons{TSF} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{cases} \quad \text{Che relazione intercorre tra } Y_k \text{ e } X_{(f)}$$

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) e^{j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t-nT_0) e^{j2\pi k f_0 t} dt \stackrel{t'=t-nT_0}{=} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 (t'+nT_0)} dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} e^{j2\pi n k f_0 T_0} dt' \\ &\quad \downarrow \forall nk=1 \quad \text{é la fase di un numero sempre intero } nk \in \mathbb{N} \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} dt' \rightarrow TCF \text{ con intervalli disgiunti e adiacenti in } kf_0 \end{aligned}$$

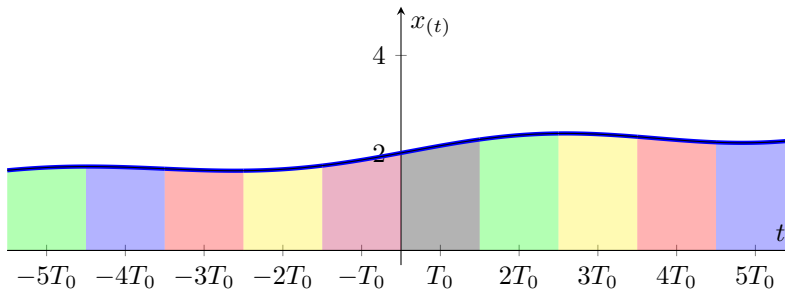


Figure 53: Intervalli adiacenti e disgiunti

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} dt' \Rightarrow Y_k = \frac{1}{T_0} X_{(kf_0)}$$

Sono campionamenti di  $X_{(f)}$  a  $k f_0$ .

### 6.7.3 I<sup>a</sup> formula di Poisson

$$y_{(t)} \stackrel{TSF}{\rightleftharpoons} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X_{(k f_0)} e^{j 2 \pi k f_0 t}$$

Evidenzia che:

*Periodicizzazione nel tempo  $\Rightarrow$  Campionamento nella frequenza*

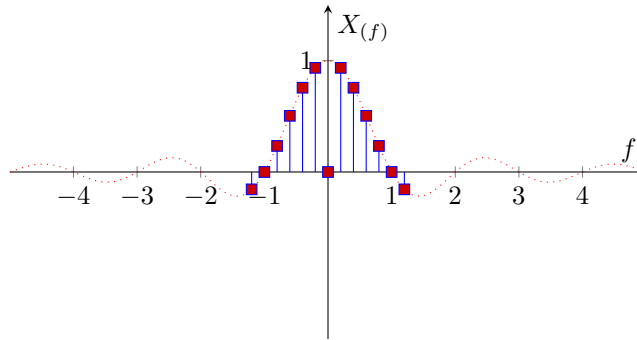


Figure 54: Grafico del campionamento

Esempio:

$$y_{(t)} = |\cos(2\pi f_0 t)| \quad X_k = ?$$

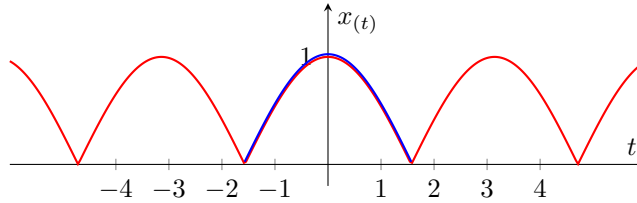


Figure 55:  $|\cos(2\pi f_0 t)|$

$y_{(t)} = |\cos(2\pi f_0 t)|$  non é altro che il segnale aperiodico  $x_{(t)} = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right)$  con periodo  $\frac{T_0}{2}$ :

$$\begin{cases} Y_k = \frac{2}{T_0} X_{(k f_0)} = \frac{2}{T_0} X_{(k \frac{2}{T_0})} \\ X_{(f)} = \frac{T_0}{2} \text{sinc}(f \frac{T_0}{2}) \otimes \left( \frac{\delta(f-f_0)}{2} + \frac{\delta(f+f_0)}{2} \right) \end{cases}$$

Per il calcolo di  $X_{(f)}$  si applica il Th della Modulazione con  $\cos$  6.5.1 e la proprietà campionatrice della Delta di Dirac rispetto alla convoluzione 6.6.1.

$$X_{(f)} = \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left( (f - f_0) \frac{T_0}{2} \right) + \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left( (f + f_0) \frac{T_0}{2} \right)$$

$$Y_k = \frac{2}{T_0} \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left( \left( \frac{2k}{T_0} - f_0 \right) \frac{T_0}{2} \right) + \frac{2}{T_0} \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left( \left( \frac{2k}{T_0} + f_0 \right) \frac{T_0}{2} \right)$$

#### 6.7.4 Teorema dell'integrazione completo

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{X_{(0)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Prende la nominazione di completo perché risolve il problema di mantenere l'uguaglianza  $j2\pi f Y_{(f)} = X_{(f)}$

Per la dimostrazione ci serve definire prima:

- $TCF$  di  $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t} \xrightleftharpoons[ATSF]{TSF} \text{sgn}(f)$$

Per la Dualità 6.4.2

$$\text{sgn}(t) \xrightleftharpoons[ATSF]{TSF} \frac{1}{j\pi f}$$

- $TCF$  del gradino  $u_{(t)}$

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(\alpha)} d\alpha \quad u_{(t)} \rightleftharpoons U_{(f)}$$

Non posso applicare il Th dell'integrazione 6.4.5  $\begin{cases} y_{(+\infty)} = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} u_{(t)} dt = 1 \\ X_{(f)} = 1 \end{cases}$  la

terza ipotesi non è mai verificata. Scriviamo la funzione gradino in modo diverso:

$$u_{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

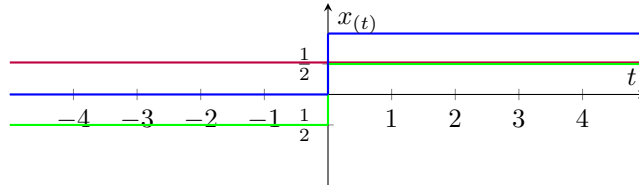


Figure 56:  $u_{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$

$$U_{(f)} = TCF[u_{(t)}] = \frac{1}{2}\delta_{(f)} + \frac{1}{2j\pi f}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t) \stackrel{TSF}{\underset{ATSF}{=}} \frac{1}{2}\delta_{(f)} + \frac{1}{2j\pi f}$$

Dimostrazione Th. Integrazione completo:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha$$

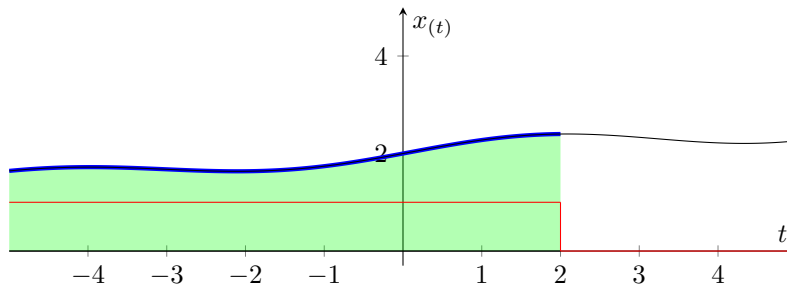


Figure 57:  $y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha$ ,  $x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)}$

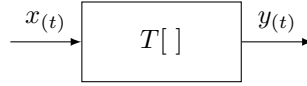
Utilizziamo il gradino per cambiare gli estremi dell'integrale e mantenere il valore di  $x_{(t)}$  dopo  $t$  a 0. Ci siamo ricondotti all'integrale di convoluzione 6.4.8 nel tempo, quindi nella frequenza diventa un prodotto:

$$Y_{(f)} = X_{(f)} U_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{X_{(0)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Se  $X_{(0)}$  fosse 0 avrei il classico Th. dell'integrazione.

## 7 Sistemi Monodimensionali

Definiamo il Sistema Monodimensionale:



Il sistema applica la trasformazione  $T[ ] : y(t) = T[x(t)]$  in generale  $y(t) = T[x_{(\alpha)}, t]$ .

### 7.1 Proprietá dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)

- Linearit :

$$x(t) = ax_{1(t)} + bx_{2(t)} \xrightarrow{T[ ]} y(t) = aT[x_{1(t)}] + bT[x_{2(t)}]$$

Oppure separando la variabile del tempo:

$$x(t) = ax_{1(t)} + bx_{2(t)} \xrightarrow{T[ ]} y(t) = aT[x_{1(\alpha)}, t] + bT[x_{2(\alpha)}, t]$$

  il principio di linearit  o sovrapposizione degli effetti visto a elettrotecnica.

- Stazionariet :

$$y(t) = T[x(t)] \rightarrow y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$$

- Causalit :

$$y(t) = T[x_{(\alpha)}, \alpha \leq t]$$

L'uscita all'istante  $t$  dipende dall'ingresso ad istanti precedenti o al pi  uguali a  $t$ , si basa su valori precedenti a  $t$  non pu  prevedere il futuro. Ne derivano 2 distinzioni di trasformazioni:

- Real Time: necessariamente causale (  nel presente)
- Virtual time: Causale o Non Causale (es. ho tutto un file al quale posso prevedere i bit o frame successivi per applicarne un post-processing)

- Stabilit  BIBO: Se il segnale  $x(t)$  ha ampiezza limitata  $\rightarrow$  l'uscita ha ampiezza limitata:

$$|x(t)| \leq M \rightarrow |y(t)| \leq K$$

- Invertibilit :

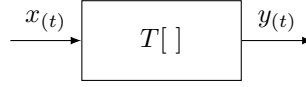
$$y(t) = T[x_{(\alpha)}, t] \xrightarrow{\text{Se} \exists} x(t) = T^{-1}[y_{(\alpha)}, t]$$



- Memoria: Un sistema é:
  - Senza memoria: se  $y(t) = T[x_{(\alpha)}, \alpha = t]$
  - Con Memoria:  $y(t) = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha$  l'uscita all'istante  $t$  dipende anche da valori dell'ingresso ad istanti diversi da  $t$ . Nota bene é l'integrale di convoluzione di  $x_{(t)} \otimes u_{(t)}$

## 7.2 Proprietá dei Sistemi Lineari Stazionari (SLS)

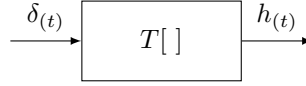
Sono sistemi LTI che godono delle proprietá di Linearitá 7.1 e di Stazionarietá 7.1:



Troviamo la relazione tra ingresso e uscita:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= T[x_{(\alpha)}, t] = T[x_{(t)}] = T[x_{(t)} \otimes \delta_{(t)}] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} \delta_{(t-\alpha)} d\alpha\right] \\
 &\stackrel{7.1}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} T[x_{(\alpha)} \delta_{(t-\alpha)}] d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} T[\delta_{(t-\alpha)}] d\alpha
 \end{aligned}$$

Definiamo la trasformata nota del  $\delta_{(t)}$ :



Sollecitando il sistema con una Delta di Dirac ho la sua risposta impulsiva. Nel caso dei sistemi *SLS* l'impulso in uscita caratterizza completamente il sistema. Nel nostro caso  $T[\delta_{(t-\alpha)}]$  non é altro che una traslazione della  $T[\delta_{(t)}]$  per la Stazionarietá 7.1:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha = x_{(t)} \otimes h_{(t)}$$

La trasformata del sistema dipende solo dalla  $h_{(t)}$  (risposta impulsiva del sistema). Passando al dominio della frequenza per la proprietá della convoluzione 6.4.8:

$$Y_{(f)} = X_{(f)} \otimes H_{(f)}$$

Dove  $H_{(f)} = TCF[h_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt$  é la risposta in frequenza del sistema *SLS*. Esistono vari modi per calcolare  $h_{(t)}$ :

- Utilizzando un impulso di Dirac e le sue proprietá, ma l'impulso di dirac é difficile da realizzare.

- Calcolo  $H_{(f)}$  mandando in ingresso un segnale del quale sia nota la sua risposta e calcolo il rapporto uscita/ingresso  $H_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{X_{(f)}}$
- Mandando in ingresso un esponenziale:

$$y_{(t)} = x_{(t)} \otimes h_{(t)}, \quad x_{(t)} = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-\alpha)} h_{(\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\alpha)} e^{j2\pi f_0 (t-\alpha)} d\alpha \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\alpha)} e^{j2\pi f_0 \alpha} d\alpha = x_{(t)} H_{(f_0)} \end{aligned}$$

$$H_{(f_0)} = \frac{y_{(t)}}{x_{(t)}}$$

Posso calcolare la risposta in  $f_0$ , posso variare la frequenza e calcolare  $H_{(f)} = \frac{y_{(t)}}{x_{(t)}} \Big|_{x_{(t)}=e^{j2\pi f t}}$

### 7.2.1 Risposta in frequenza

La risposta in frequenza  $H_{(f)} \in \mathbb{C}$ :

$$H_{(f)} = |H_{(f)}| e^{j\angle H_{(f)}}$$

- $|H_{(f)}|$ : Risposta in ampiezza
- $\angle H_{(f)}$ : Risposta in fase

$$Y_{(f)} = X_{(f)} H_{(f)} = \begin{cases} |Y_{(f)}| &= |X_{(f)}| |H_{(f)}| \\ \angle Y_{(f)} &= \angle X_{(f)} + \angle H_{(f)} \end{cases}$$

### 7.2.2 Sistemi in cascata e in parallelo

- Sistemi in cascata:

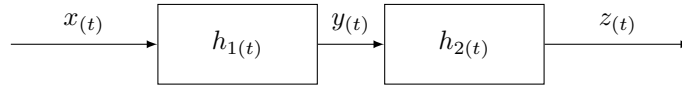


Figure 58: sistemi in cascata

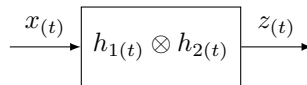


Figure 59: equivalente sistemi in cascata

$$\begin{aligned}
y(t) &= x(t) \otimes h_1(t) \\
z(t) &= y(t) \otimes h_2(t) = [x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) \otimes h_2(t) \\
z(t) &= x(t) \otimes h(t)
\end{aligned}$$

Risposta Impulsiva :  $h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$

Risposta in Frequenza :  $H(f) = H_1(f)H_2(f)$

- Sistemi in parallelo:

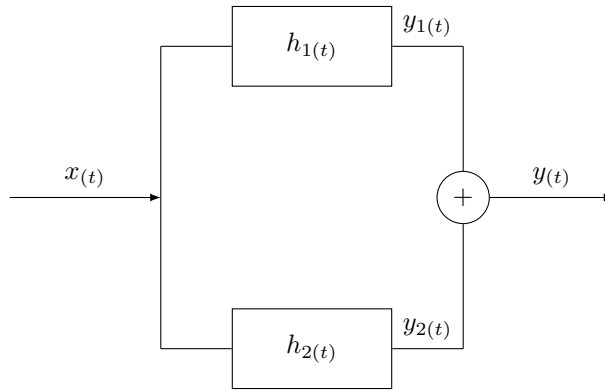


Figure 60: sistemi in cascata

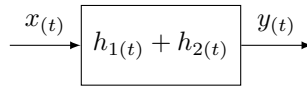


Figure 61: equivalente sistemi in parallelo

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_1(t) \otimes y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) \\
&= x(t) \otimes [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) \otimes h(t)
\end{aligned}$$

Risposta Impulsiva :  $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

Risposta in Frequenza :  $H(f) = H_1(f) + H_2(f)$

### 7.3 Risposta di un sistema causale e risposta impulsiva

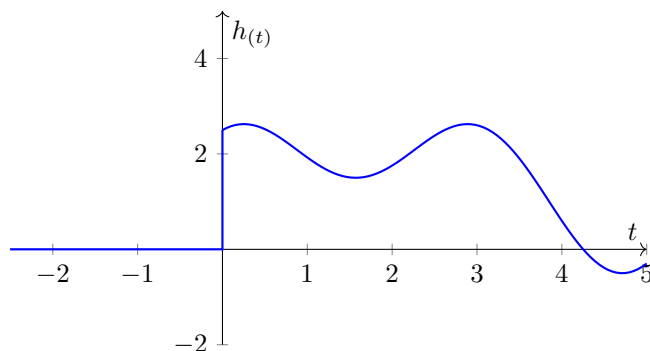


Figure 62: Risposta impulsiva di un sistema

$$h_{(t)} = h_{(t)} \cdot u_{(t)}$$

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= x_{(t)} \otimes h_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha \end{aligned} \quad (1)$$

giungiamo all'integrale che definisce la Causalit  7.1: un sistema   causale se la sua risposta impulsiva   solo definita per  $t > 0$ .

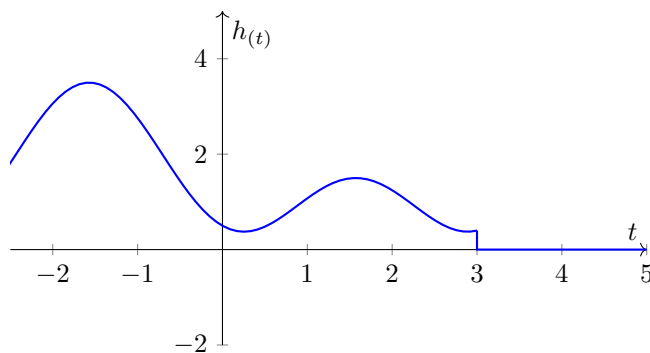


Figure 63: Uscita di un sistema causale

Dal valore 3 in poi la risposta impulsiva rende il sistema causale.

### 7.3.1 Stabilità BIBO su $h(t)$

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) h_{(t-\alpha)} d\alpha \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\alpha)| |h_{(t-\alpha)}| d\alpha \\ &\leq M \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t-\alpha)} d\alpha \right| < K \end{aligned}$$

Se l'ingresso  $y < M$  allora lo é anche l'uscita. Ne deriva la C.S(Condizione Sufficiente): Assoluta integrabilità della  $h(t)$  , se il sistema é bounded anche l'integrale deve esserlo.(To DO: cercare la condizione necessaria sul libro)

## 7.4 Filtri Ideali

**Banda di un segnale** É la porzione di spettro calcolata sul semiasse positivo delle frequenze dove lo spettro é diverso da zero.

$$B = f \cdot H_{(f)} \neq 0, f > 0$$

### 7.4.1 Filtro Passa Basso di banda B - Low Pass Filter (LP)

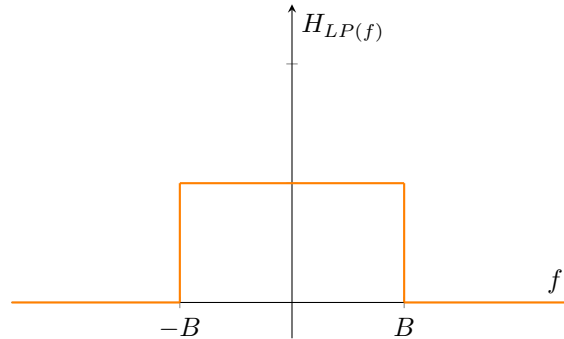


Figure 64: Filtro passa basso ideale: Risposta in frequenza

**Risposta in frequenza:**

$$H_{LP(f)} \triangleq \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

**Risposta impulsiva:**

$$h_{LP(t)} \triangleq 2B \text{sinc}(2Bt)$$

La risposta impulsiva non é causale, ma posso troncarla e spostarla nel semiasse positivo per renderlo tale, ma non é piú ideale:

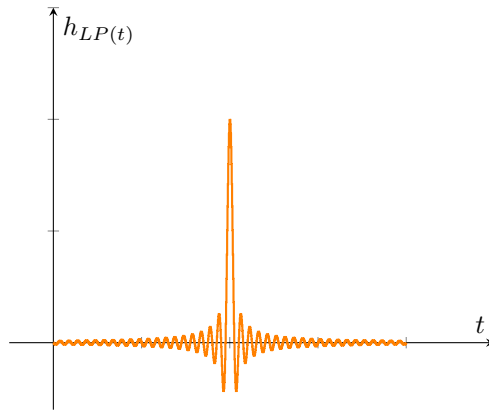


Figure 65: Filtro passa basso causale: risposta impulsiva

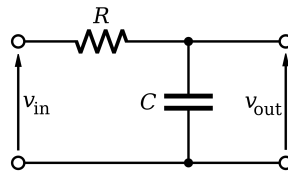


Figure 66: Circuito filtro passa basso ideale

#### Cricuito Filtro Passa Basso:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_T}}, \quad f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

Possiamo rappresentare in sacala logaritmica il filtro:  $|H(f)|_{db} = 10\log\left(\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}\right)$ .

Prendiamo la frequenza di riferimento  $f_0 : H(f_0) = 1$

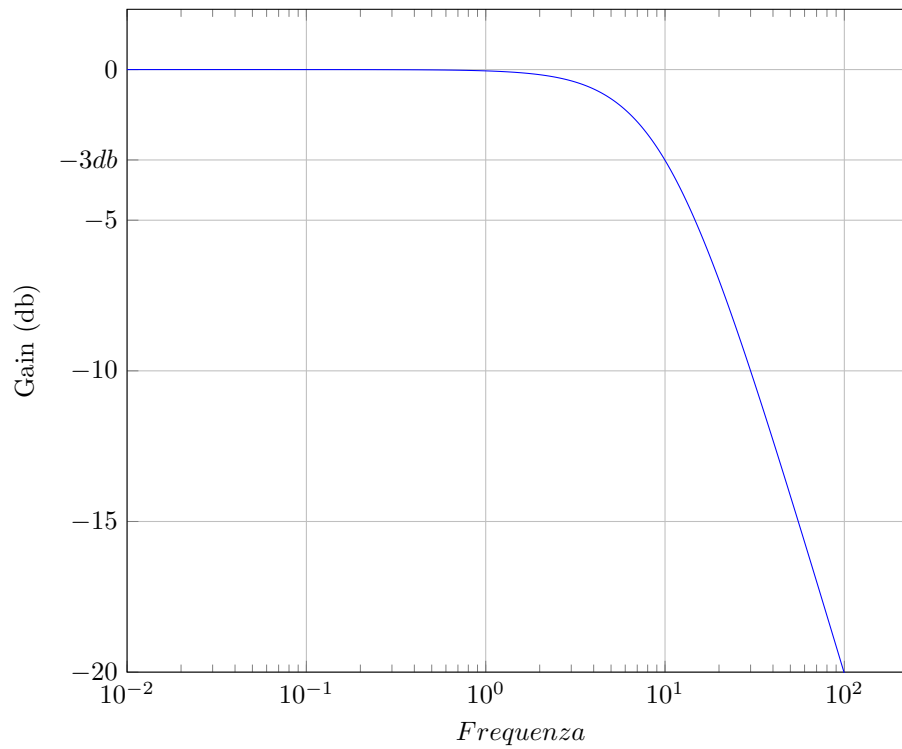


Figure 67: Filtro passa basso ideale in scala logaritmica

Otteniamo la Frequenza di taglio  $f_T$  all'ampiezza di  $-3db$ , in questo caso  $f_T = 10$ , alla quale il filtro "taglia" o meglio riduce tutte le ampiezze in ingresso verso lo 0. (To DO: controllare sul libro la formula per il calcolo di  $H_f$ )

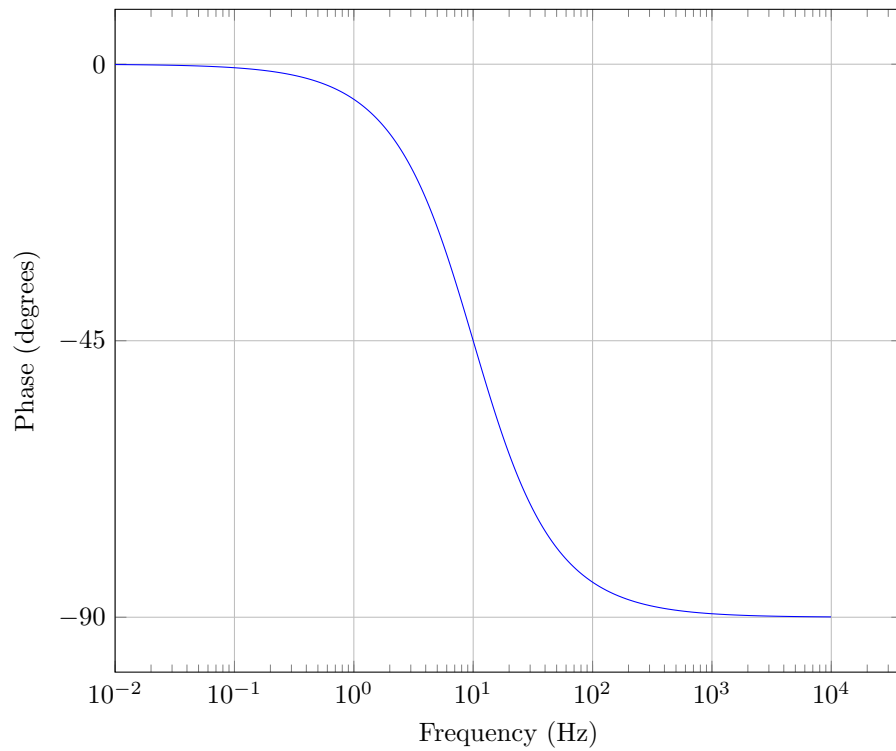


Figure 68: Filtro passa basso ideale fase

*Osservazione:*

- Al tendere di  $B$  a 0 il valore che il filtro fa passare é il valor medio del segnale, tanto da tendere a un filtro  $LP$  con spettro  $\delta_{(t)}$ , ma é difficilmente realizzabile.
- La banda di un filtro é quanto si estende da  $0 \rightarrow f^+$  fino a arrivare a  $B, [0, B]$
- Se il filtro é un filtro  $BP$  la banda é l'ampiezza della banda che lascia passare  $[f_0 - B, f_0 + B] = B$



### 7.4.2 Filtro Passa Alto di banda B - High Pass Filter (HP)

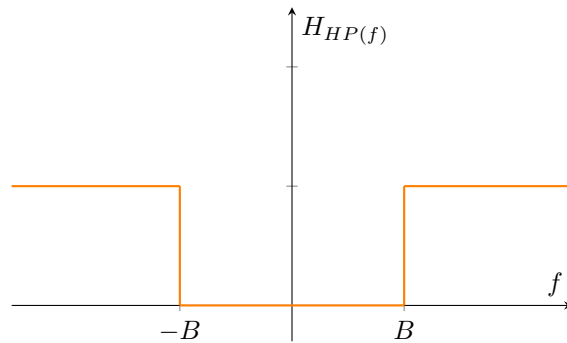


Figure 69: Filtro passa alto ideale: Risposta in frequenza

**Risposta in frequenza:**

$$H_{HP}(f) \triangleq 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

**Risposta impulsiva:**

$$h_{HP}(t) \triangleq \delta(t) - 2B \text{sinc}(2Bt)$$

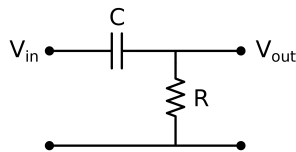


Figure 70: Circuito filtro passa alto ideale

**Cricuito Filtro Passa Alto:**

$$H(f) = \frac{fRC}{1 + fRC}$$

In scala logaritmica:

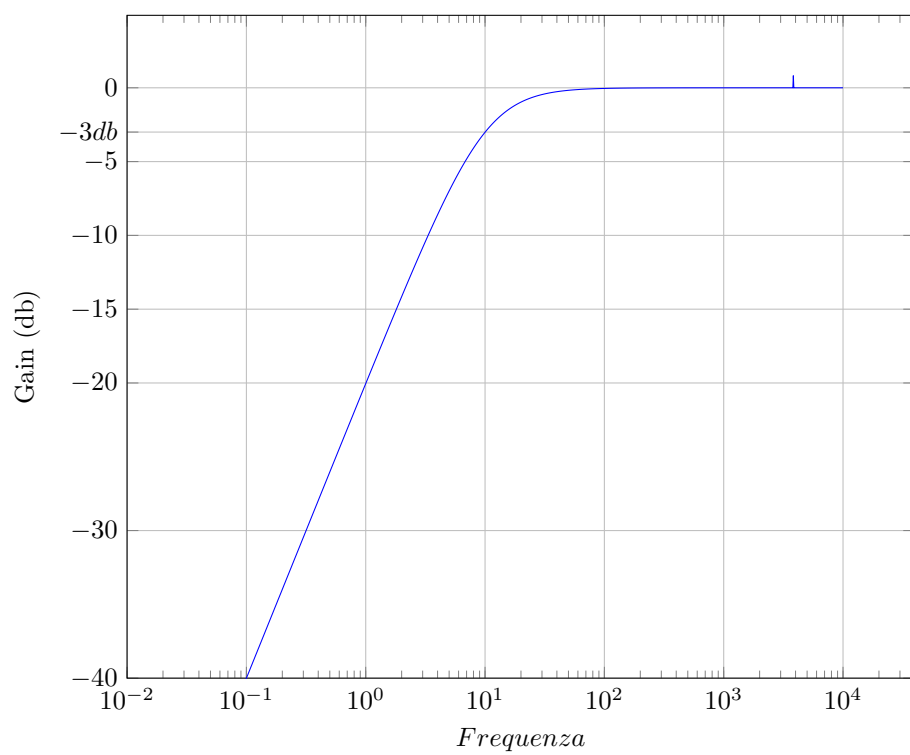


Figure 71: Filtro passa alto ideale in scala logaritmica

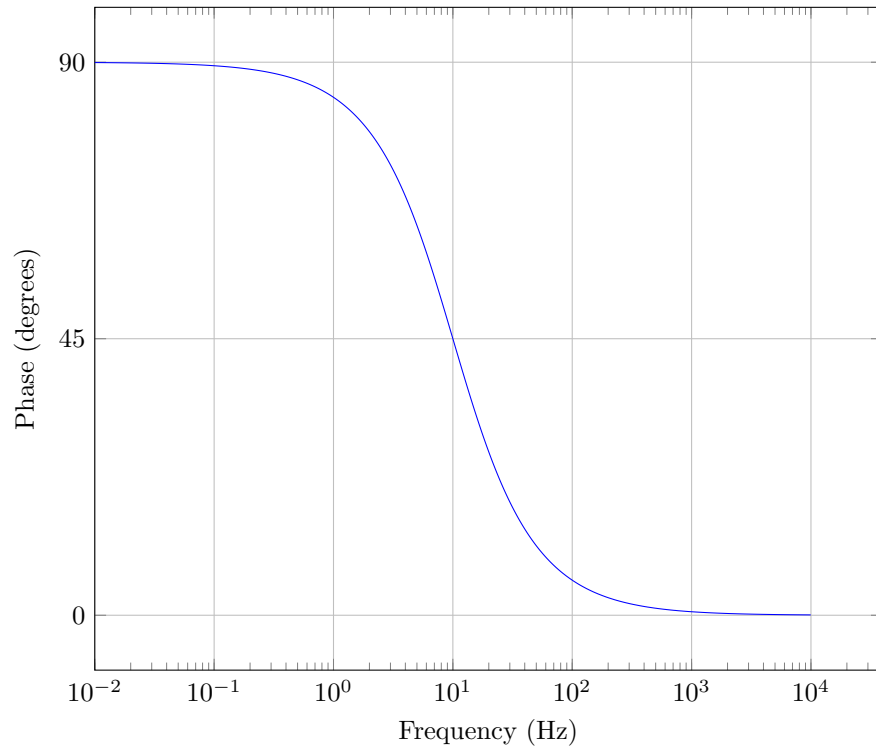


Figure 72: Filtro passa alto ideale fase

Si nota come avendo preso la  $f_T$  corrisponde a  $RC = 10$ .

#### 7.4.3 Filtro Passa Banda di banda B - Band Pass Filter (BP)

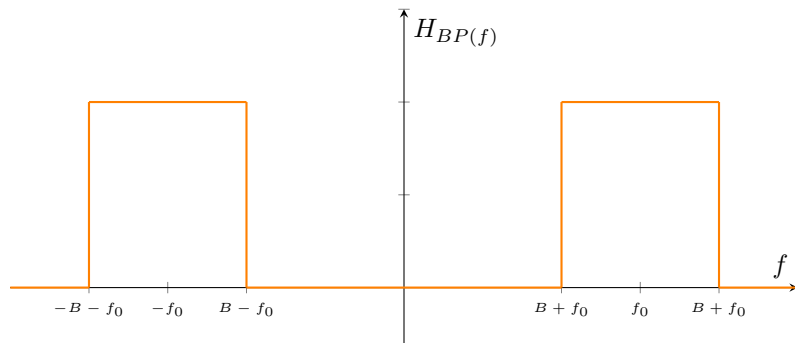


Figure 73: Filtro passa banda ideale: Risposta in frequenza

**Risposta in frequenza:**

$$H_{BP}(f) \triangleq H_{LP}(f+f_0) + H_{LP}(f-f_0) = \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)$$

**Risposta impulsiva:**

$$h_{BP}(t) \triangleq 2B \text{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_0 t) = h_{LP}(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

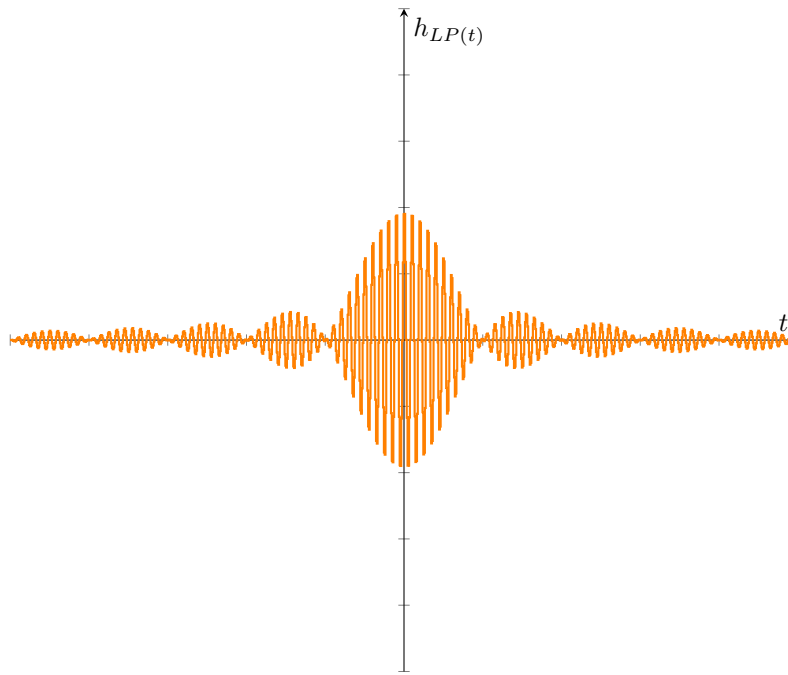


Figure 74: Filtro passa banda: risposta impulsiva

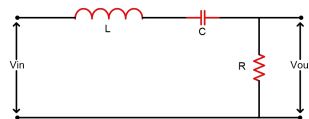


Figure 75: Circuito filtro passa banda ideale

**Cricuito Filtro Passa Banda:** In scala logaritmica:

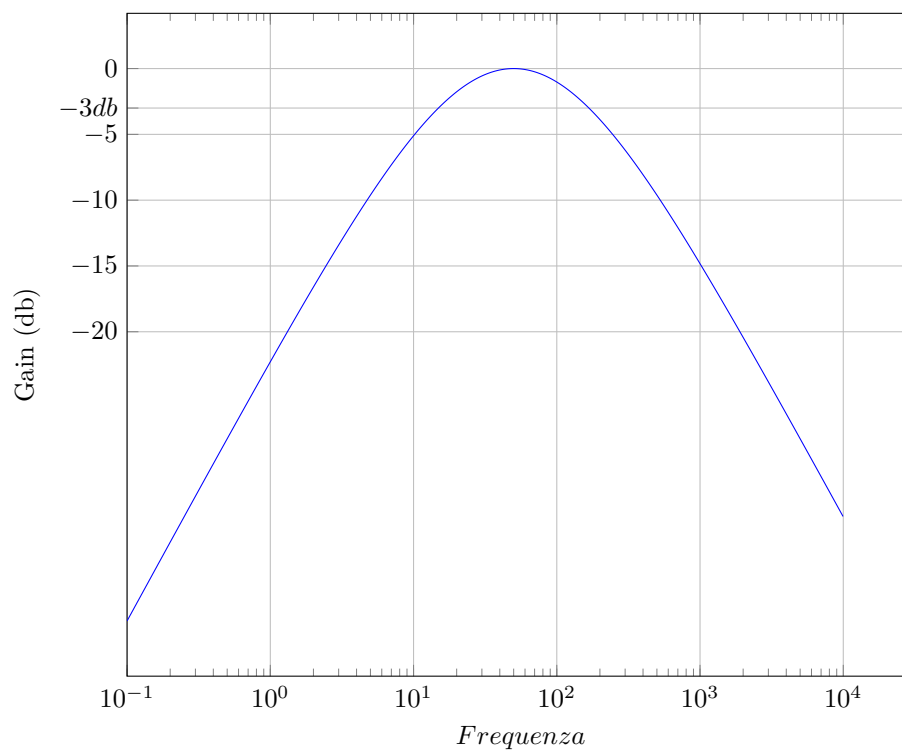


Figure 76: Filtro passa banda ideale in scala logaritmica

Non riesco a fare un grafico con pendenza maggiore ma é per capire che le frequenze sotto il valore di  $-3db$  vengono ridotte drasticamente.

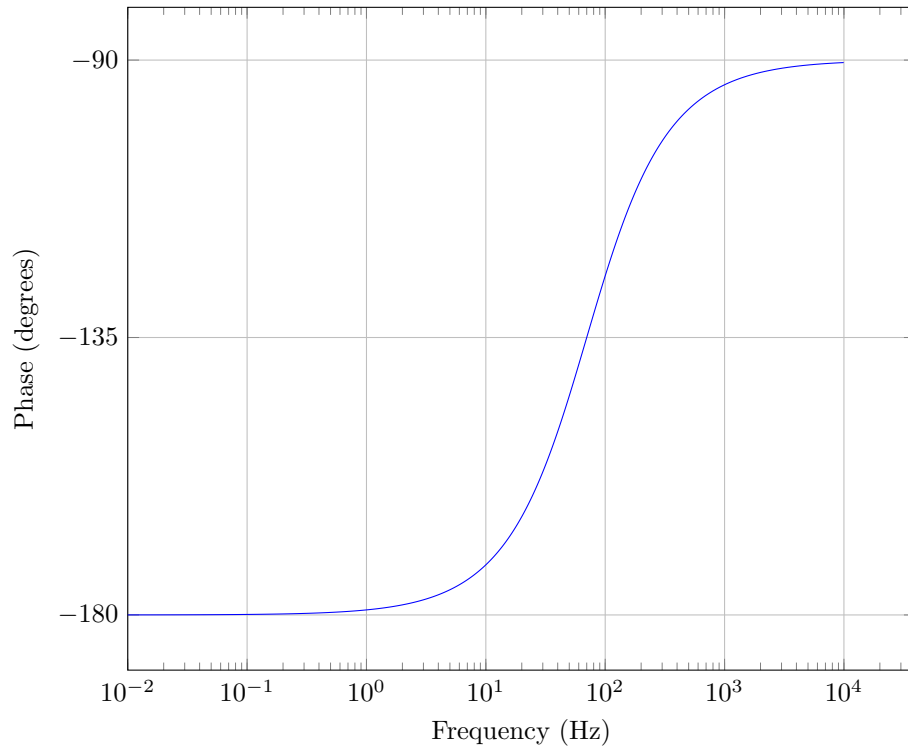


Figure 77: Filtro passa banda ideale fase

#### 7.4.4 Filtro Elimina Banda di banda B - Band Stop Filter (BS)

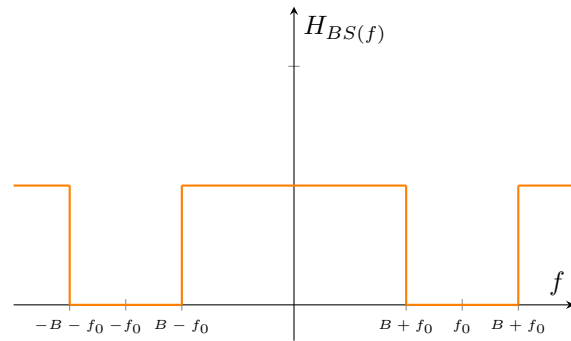


Figure 78: Filtro elimina banda ideale

**Risposta in frequenza:**

$$H_{BS}(f) \triangleq 1 - (H_{BP}(f+f_0) + H_{BP}(f-f_0)) = 1 - \left[ \text{rect} \left( \frac{f-f_0}{2B} \right) + \text{rect} \left( \frac{f+f_0}{2B} \right) \right]$$

**Risposta impulsiva:**

$$h_{BS(t)} \triangleq \delta_{(t)} - h_{BP(t)} = \delta_{(t)} - 2B \text{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

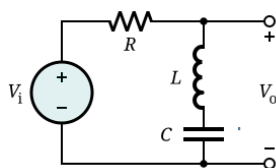


Figure 79: Circuito filtro elimina banda ideale

**Cricuito Filtro Elimina Banda:**

$$H_{(f)} =$$

In scala logaritmica:

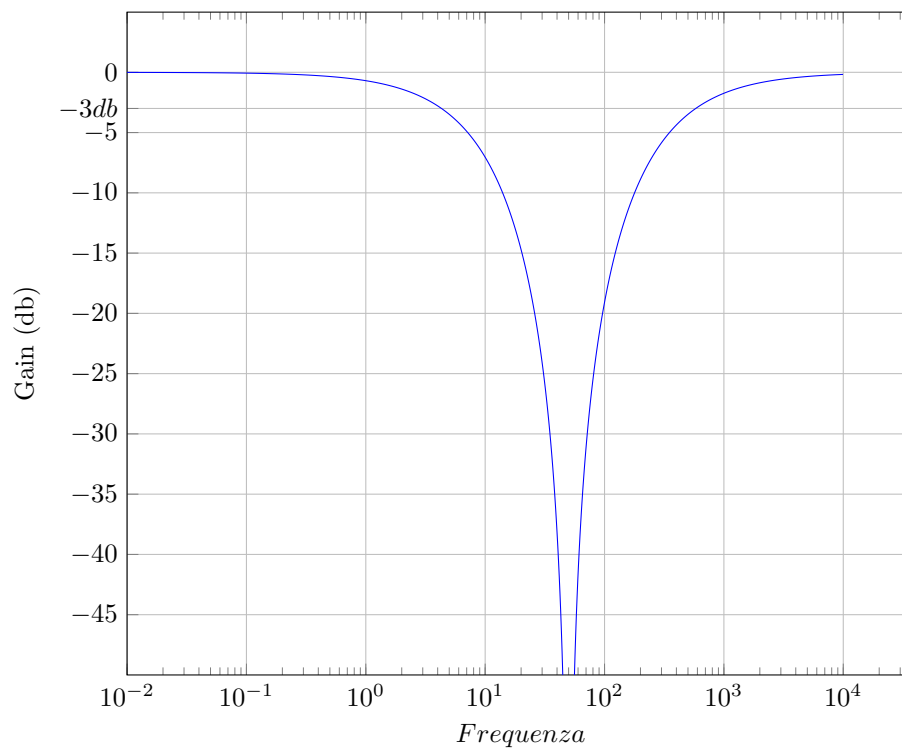


Figure 80: Filtro elimina banda ideale in scala logaritmica

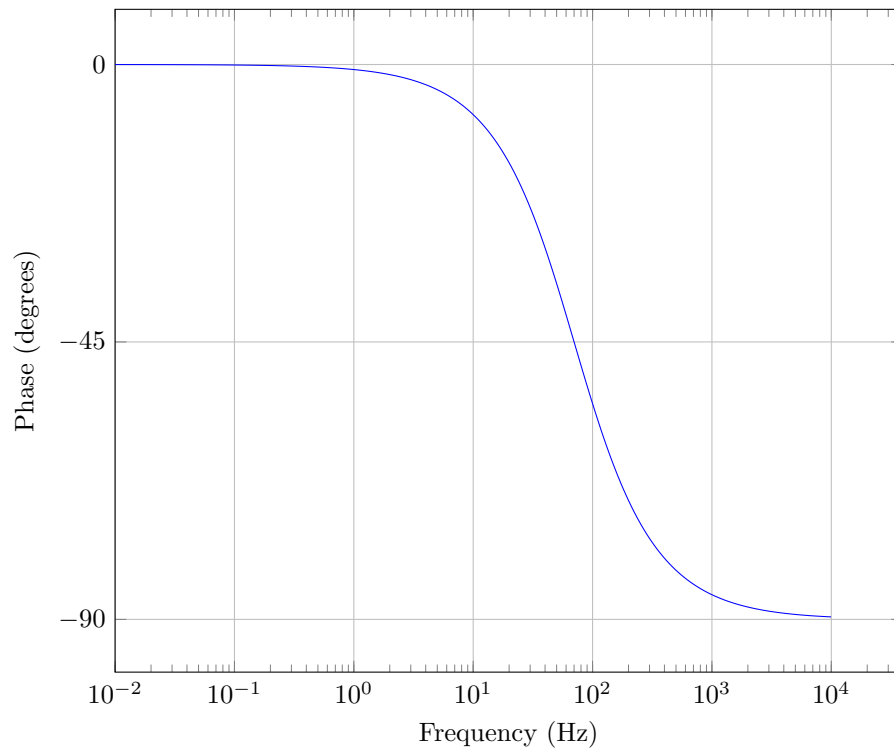


Figure 81: Filtro elimina banda ideale fase

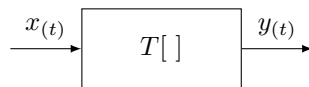
Tutti i filtri possono essere ricavati dal filtro **Low-Pass** 7.4.1 o dal filtro **High-Pass** 7.4.2.

I filtri sono riconducibili a funzioni di trasferimento come quelle viste per il tracciamento di Bode nel corso di fondamenti di automatica.

Sono giusti i grafici di bode? ricontrollare soprattutto la fase

#### 7.4.5 Filtri non distortenti

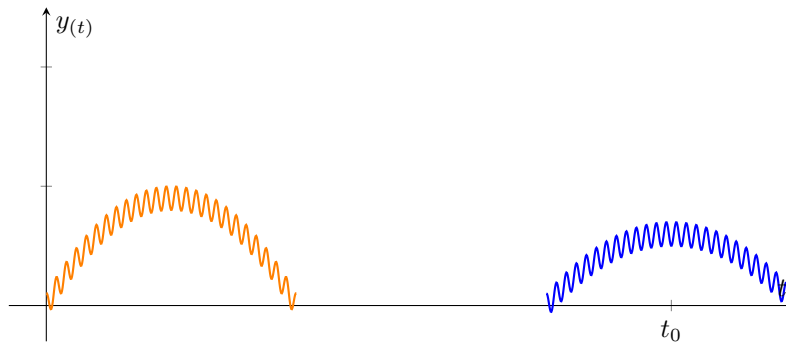
Definiamo prima cos'è un segnale non distorto:



$y(t)$  è un segnale non distorto di  $x$  se:  $y(t) \triangleq kx_{(t-t_0)}$   $k \in \mathbb{R}^+$ , cioè finché esso rimane una versione ritardata e/o amplificata del segnale  $x(t)$ , in frequenza:

$$Y_{(f)} = kX_{(f)}e^{-j2\pi ft_0}$$





**Analisi del filtro non distortente:** Come deve essere realizzato il filtro in modo tale da non distortere il segnale?

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = kx(t-t_0)$$

Per non essere distortente la risposta impulsiva del sistema deve essere  $k\delta(t-t_0)$  con risposta in frequenza:  $H(f) = ke^{-j2\pi ft_0}$

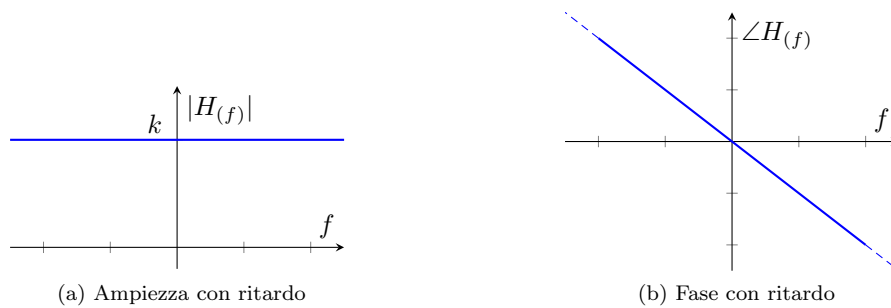


Figure 82: Spettro filtro non distortente

Avere un tale filtro per tutti i segnali é molto restrigente, ci basta che il nostro filtro sia non distortente nella banda che ci interessa.

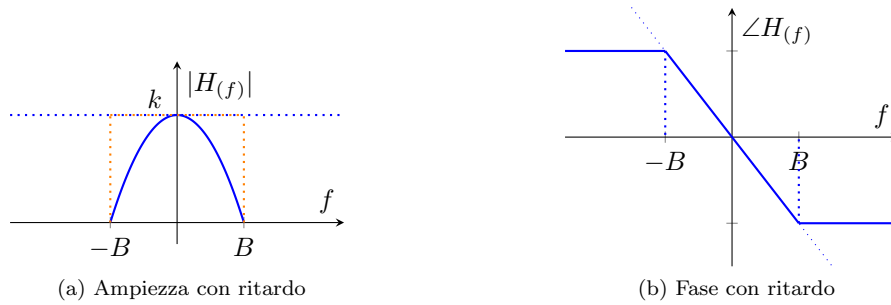


Figure 83: Spettro filtro non distortente limitato alla banda  $B$

Il filtro ci basta che sia qualcosa che si avvicini a una *rect* ad esempio un coseno rialzato 3

## 7.5 Th. di Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x(f)} df$$

$S_{x(f)} = |X(f)|^2$  é la densità spettrale di energia del segnale, ci mostra come l'energia é distribuita nello spettro.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* e^{-j2\pi ft} df dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

Come capisco quanta % del segnale sto buttando?

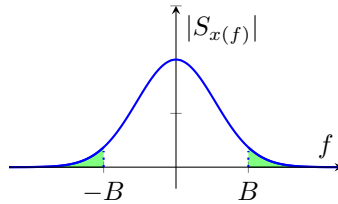


Figure 84: Spettro  $S_{x(f)}$

La parte **verde** é l'energia del segnale che perdiamo troncadolo con banda  $B$

## 7.6 Funzione di Correlazione - Segnali Aperiodici

$$C_{xy} = R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y_{(t-\tau)}^* dt$$

## 7.7 Funzione di Autocorrelazione

$$C_x = R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_{(t-\tau)}^* dt$$

Misura la correlazione del segnale con se stesso.

### 7.7.1 Proprietà Autocorrelazione

- $R_{x(0)} = E_x$

$$R_{x(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_{(t)}^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- Simmetria Hermitiana:

$$R_{x(-\tau)} = R_{x(\tau)}^*$$

- $TCF$  Autocorrelazione:

$$R_{x(\tau)} \stackrel{TCF}{\underset{ATCF}{=}} S_{x(f)}$$

Posso calcolare la densità spettrale di energia dall'autocorrelazione.

## 8 Trasformata Discreta di Fourier

Si definisce Trasformata Discreta di Fourier:

$$x_{[nT]} \xrightleftharpoons[ATDF]{TDF} \overline{X}_{(f)}$$

$$\overline{X}_{(f)} \in \mathbb{C} : \begin{cases} |\overline{X}_{(f)}| \\ \angle \overline{X}_{(f)} \end{cases} \text{ é una funzione periodica di periodo } \frac{1}{T}$$

### 8.0.1 Equazione di Analisi - $TDF$

$$\overline{X}_{(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} e^{-j2\pi f n T}$$

### 8.0.2 Equazione di Sintesi - $ATDF$

$$x_{[nT]} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \overline{X}_{(f)} e^{-j2\pi f n T} df$$

### 8.0.3 Trasformata di $\delta_{[n]}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(t-nT)} \stackrel{6.7.3}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_{(\frac{k}{T})} e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} \stackrel{\Delta \text{ costante}}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \frac{k}{T} t}$$

$$\Downarrow TCF$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f n T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{(f-\frac{k}{T})}$$

Applicando il ritardo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi (f-\nu) n T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{((f-\nu)-\frac{k}{T})}$$

#### 8.0.4 Relazione tra TCF e TDF

$$\begin{aligned}
\overline{X}_{(f)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} e^{-j2\pi f nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} e^{-j2\pi \nu nT} d\nu e^{-j2\pi f nT} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \nu nT} e^{-j2\pi f nT} d\nu \stackrel{8.0.3}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta_{((f-\nu)-\frac{k}{T})} d\nu \\
&\stackrel{6.6.1: \text{parit\acute{a}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(\nu-(f-\frac{k}{T}))} d\nu = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\nu)} \delta_{(\nu-(f-\frac{k}{T}))} d\nu \\
&\stackrel{6.6.1: \text{campionatrice}}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}
\end{aligned}$$

quindi la TDF si ottiene periodicizzando la TCF con periodo  $\frac{1}{T}$ :

$$\overline{X}_{(f)} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}$$

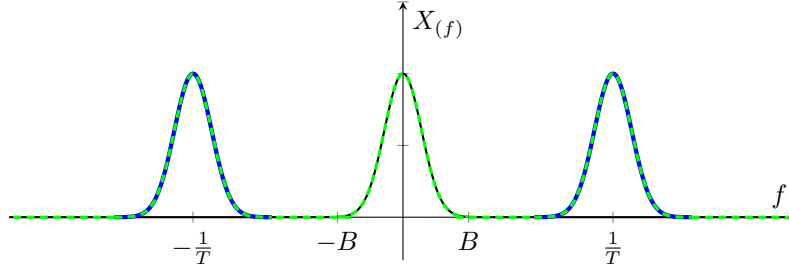


Figure 85:  $X_{(f)}$ ,  $X_{(f-\frac{k}{T})}$ ,  $\overline{X}_{(f)}$

### 8.1 Teorema del Campionamento - Nyquist Shannon

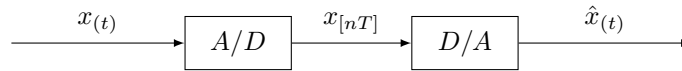


Figure 86: Esempio sistema campionamento e ricostruzione

- A/D: Campionatore, converte da analogico a discreto.
- D/A: interpolatore o filtro  $p$ , converte da discreto a analogico.

Il nostro obbiettivo é dimensionare  $T$  e l'interpolatore in modo tale da poter ricostruire il segnale  $\hat{x}$  :  $\hat{x} = x$ .

**Dimensioniamo l'A/D:** Riprendiamo la relazione tra  $TDF$  e  $TCF$ :

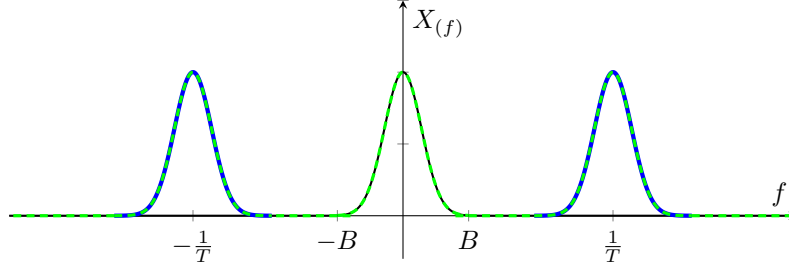


Figure 87:  $X_{(f)}, X_{(f-\frac{k}{T})}, \bar{X}_{(f)} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}$

abbiamo trovato che la  $TDF$  non é altro che la periodicizzazione della  $TCF$  con periodo  $\frac{1}{T}$ : se  $\frac{1}{T} \geq 2B$  il grafico  $X_{(f-\frac{k}{T})}$  sono copie distinte non distorte e periodicizzate di  $X_{(f)}$  da cui con un Filtro Passa-Basso 7.4.1 possiamo ricostruire il segnale. Se scegliessi  $\frac{1}{T} < 2B$ :

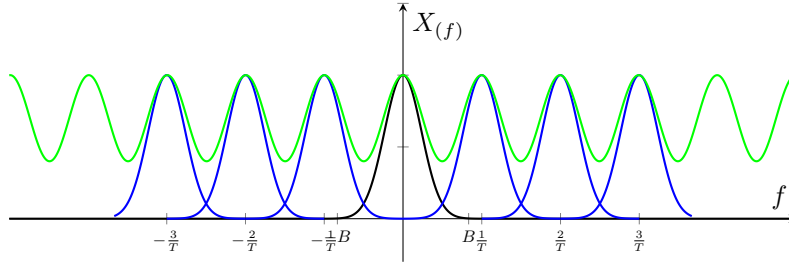


Figure 88:  $X_{(f)}, X_{(f-\frac{k}{T})}, \bar{X}_{(f)} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}$

la sovrapposizione delle copie di  $X_{(f)}$  é il fenomeno di Aliasing: la sovrapposizione di segnali che alterano il segnale originale. In entrambi i casi ci troviamo in condizione di un segnale a banda limitata, nel tempo rappresenta un segnale illimitato.

**Dimensioniamo il D/A:** Partiamo dalla relazione di  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} p_{(t-nT)}, \quad p \text{ interpolatore}$$

Il segnale di uscita dal sistema dipende non solo dal periodo di campionamento  $\frac{1}{T}$  ma anche dall'interpolatore che utilizziamo:

- Interpolatore a mantenimento: mantiene il valore del segnale  $x_{[nT]}$  per un periodo  $T$

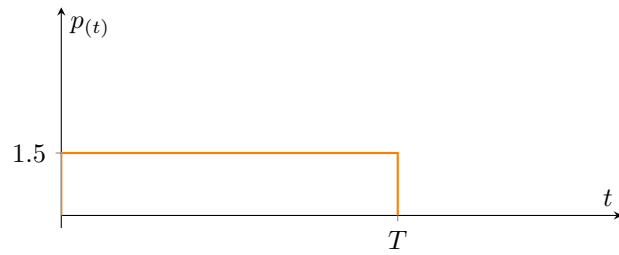


Figure 89: Interpolatore a mantenimento

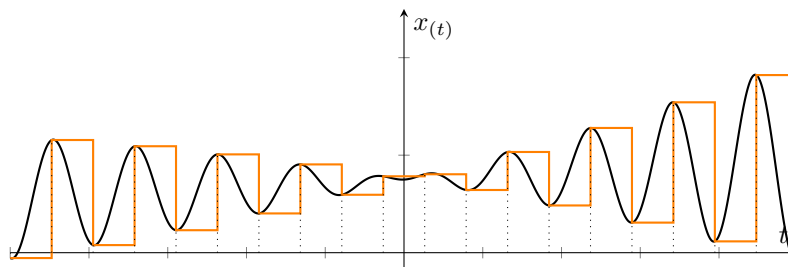


Figure 90:  $x(t), \hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]p(t-nT)$

- Interpolatore Lineare: incrementa linearmente il valore di  $\hat{x}$

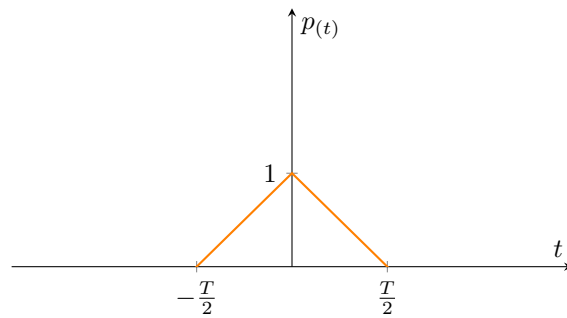


Figure 91: Interpolatore Lineare

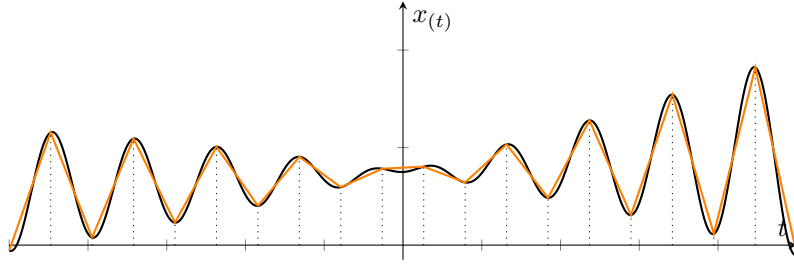


Figure 92:  $x(t), \hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]p(t-nT)$

Passiamo alla frequenza:

$$\hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]p(t-nT) \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} \hat{X}_{(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]P_{(f)}e^{-j2\pi fnT}$$

$$\hat{X}_{(f)} = P_{(f)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]e^{-j2\pi fnT} = P_{(f)}\bar{X}_{(f)}$$

$$\text{Se } \hat{x} = x \text{ anche } \hat{X}_{(f)} = X_{(f)}$$

$$\Downarrow 8.0.4$$

$$X_{(f)} \stackrel{!}{=} P_{(f)} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{(f-\frac{k}{T})}$$

dobbiamo dimensionare  $P_{(f)}$  in modo tale da rendere vera  $\hat{X}_{(f)} = X_{(f)}$

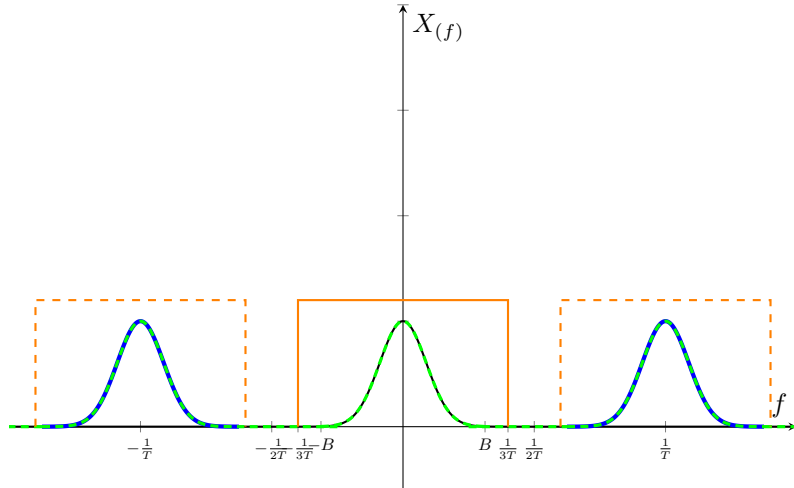


Figure 93:  $X_{(f)}, X_{(f-\frac{k}{T})}, P_{(f)}$



Utilizziamo un filtro passa basso che abbia una durata in banda maggiore di  $2B$  ma minore di  $\frac{1}{2T}$  per lasciarci un pochino di margine e evitare di prendere la copia del segnale successivo/precedente ( $2B < T_r \leq \frac{1}{2T_s}$ ): prendiamo una durata  $\frac{1}{2T_s} > 2B$

$$P(f) = T \text{rect} \left( \frac{f}{2\frac{1}{2T}} \right) = T \text{rect}(fT) \stackrel{TCF}{\Leftrightarrow} p(t) = \frac{T}{T} \text{sinc} \left( \frac{t}{T} \right)$$

**Interpolatore a seno cardinale:** Si utilizza un interpolatore a seno cardinale

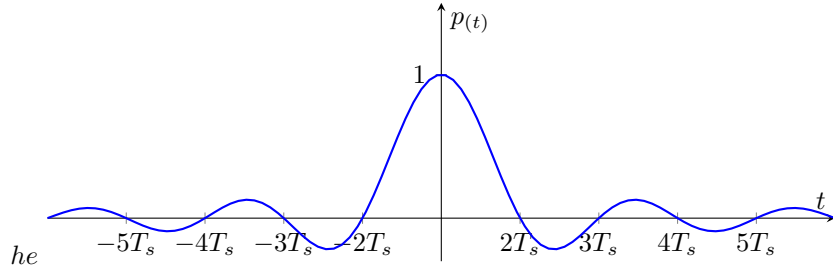


Figure 94: Interpolatore a seno cardinale

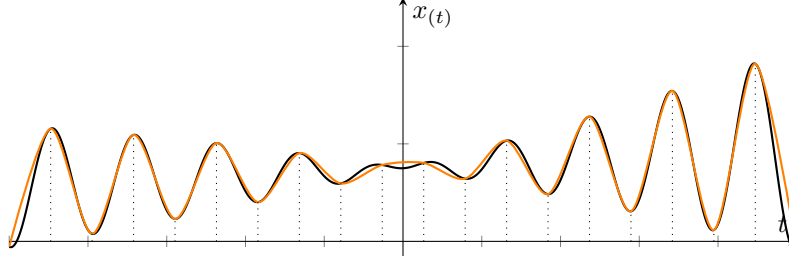


Figure 95:  $x(t), \hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]p(t-nT)$

l'interpolatore a seno cardinale non é causale: essendo delle *sinc* a ogni campionamento, non posso conoscere il peso delle *sinc* dei valori della sequenza successivi. Se opero non Real Time (Virtuale), invece ho infiniti campioni a cui posso attingere: Risolvo entrambi i problemi troncando la *sinc* e spostandola a dx, ma per troncarla sto moltiplicando una *sinc* per una *rect* nel tempo, passando alla frequenza la funzione limitata nel tempo diventa illimitata in frequenza andando a influenzare anche le repliche successive.

**Teorema del Campionamento:** Dato un segnale analogico  $x(t)$  la cui banda di frequenze sia limitata e dato  $c \in \mathbb{Z}$ , il segnale  $x(t)$  può essere univocamente ricostruito a partire dai suoi campioni  $x[nT]$  presi a frequenza (o periodo)  $f_s = \frac{1}{T}$

se  $f_s = \frac{1}{T} \geq 2B$  mediante:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right)$$

Criticità

- Segnale a banda limitata
- Interpolatore dimensionato

Osservazioni: Se utilizzassi una filtro con durata  $\frac{1}{T} \gg 2B$  prenderei tantissimi campioni che non servono per ricostruire meglio il segnale: degli esempi di matlab possiamo vedere che ci basta anche solo un periodo uguale a  $2B$ .

Esempio:

$B = 10KHz$ ,  $2B = 20KHz$ , Durata filtro =  $25KHz$  ho  $5KHz$  di margine

Esempio:  $f_s = \frac{1}{T} = 2B$ ,  $p(t) = \text{sinc}(2Bt)$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} \text{sinc}(2Bt_0 - n)$$

$$\hat{x}(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} \text{sinc}(2Bt_0 - n)$$

$\hat{x}(t_0)$  dipende dal contributo di tutte le  $\text{sinc}$  anche dei valori successivi, per questo si pone il problema del filtro causale.

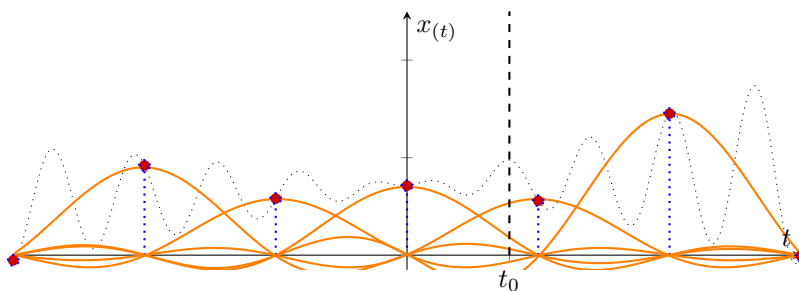


Figure 96:  $x(t), \hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[nT]} p(t-nT)$

I passi in un sistema A/D/A sono:

- Passo dal tempo in frequenza:  $x(t) \xrightarrow{TCF} X(f)$ .
- Osservo la banda che occupa il segnale e scelgo  $B$ .
- Scelgo una frequenza (periodo) di campionamento  $f_s$  e calcolo  $x_{[nT]}$ .
- Calcolo  $\hat{x}$  con un interpolatore a seno cardinale,  $\text{sinc}$

## 9 Teoria della Probabilità

### 9.1 Introduzione

Perché abbiamo bisogno della teoria della probabilità? Prendiamo un sistema di comunicazione:



Figure 97: Esempio sistema di comunicazione

Analizziamo la parte di trasmissione  $TX$ :

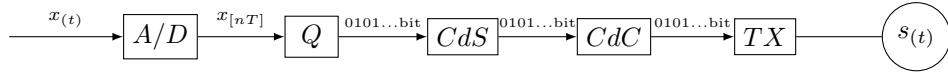


Figure 98: Esempio sistema di trasmettitore

- Convertitore Analogico/Digitale ( $A/D$ ): Campiona con frequenza  $f_s$  e crea la sequenza  $x_{[nT]}$ .
- Quantizzatore ( $Q$ ): Converte i valori della sequenza  $x_{[nT]}$  in informazioni, bit. Ho sempre perdita di informazione a questo livello, per quanti livelli di quantizzazione io metta il quantizzatore introdurrà sempre un'approssimazione.
- Nei blocchi sotto elencati è dove entra in gioco la Teoria dei Codici, ci permettono di comprimere i dati e proteggerli dagli errori del canale:
  - Codici di Sorgente ( $CdS$ ): Comprimonano i bit in ingresso dal quantizzatore eliminando la ridondanza.
  - Codifica di Canale ( $CdC$ ): Aggiunge ridondanza ai dati da trasmettere per proteggere i dati dagli errori del canale.
- Trasmettitore ( $TX$ ): Si occupa di rendere il segnale trasmissibile sul canale di interesse e trasmettere il risultato  $s(t)$ .

Analizziamo la parte di Ricezione  $RX$ :

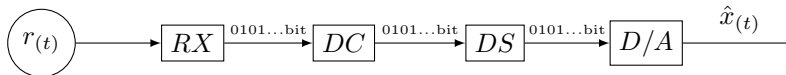


Figure 99: Esempio sistema di ricevitore

- Ricevitore ( $RX$ ): Si occupa della ricezione del segnale trasmesso  $r(t)$ .

- La Teoria dei Codici si applica anche in ricezione per la decodifica:
  - Decodifica Canale ( $DC$ ): .
  - Decodifica Sorgente( $DS$ ): .
- Convertitore Digitale/Analogico ( $D/A$ ): Ricostruisce il segnale  $\hat{x}_{(t)}$ .

Analizziamo il canale di trasmissione:

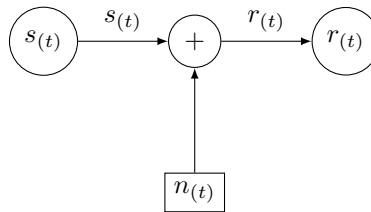


Figure 100: Esempio sistema di canale con errore

Durante la trasmissione di  $s_{(t)}$  viene introdotto dell'errore  $n_{(t)}$ .  $n_{(t)}$  é un segnale completamente aleatorio di varia natura:

- Termico
- Interferenze
- Fading
- ...

di conseguenza  $r_{(t)} = s_{(t)} + e_{(t)}$  diventa un segnale aleatorio.

I segnali che analizzo sono tutte quantità aleatorie: ho bisogno della probabilità per analizzare la tipologia di segnali, anche per la sorgente potrei averne bisogno se non sono nel caso di segnali deterministici.

### 9.1.1 Tipi di modelli matematici

Esistono vari tipi di modelli matematici:

- Deterministico: se esiste certezza e ne possiamo calcolare il valore a ogni istante del tempo (Es. sistemi lineari tempo invarianti)
- Probabilistico (Aleatorio): se non conosciamo la certezza con cui l'evento può verificarsi ma ne possiamo dare una valutazione probabilistica.

Introduciamo quindi i

## 9.2 Algebra dei Set (insiemi)

Un set é una collezione di elementi che condividono un criterio oggettivo per decidere se appartengono al set o no. Prendiamo come set  $A$  e come elemento del set  $A$   $x$ :

- Se l'elemento appartiene al set:  $x \in A$ , viceversa se non appartiene:  $x \notin A$
- Se un set é vuoto:  $A = \{\emptyset\} = \emptyset$
- Se  $x_1, \dots, x_n$  sono elementi di  $A$  allora:

$$A = \{x_1, \dots, x_n\}$$

### 9.2.1 Operazioni booleane su set

- Unione ( $A \cup B$ ): l'unione di due set  $A$  e  $B$  é a sua volta un set composto dagli elementi che appartengono a  $A$  o  $B$ , o entrambi.
- Intersezione ( $A \cap B$ ): l'intersezione di due set  $A$  e  $B$  é a sua volta un set composto dagli elementi che appartengono a  $A$  e  $B$ .

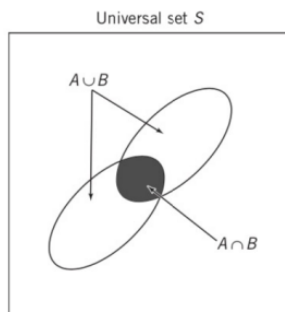


Figure 101: Unione e Intersezione

- Disgiunzione: é una relazione tra due set  $A$  e  $B$ , essi sono disgiunti se tra loro non hanno elementi comuni ( $A \cap B = \emptyset$ ).
- Partizione ( $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ): la partizione di un insieme  $A$  é una divisione dell'insieme stesso in subset disgiunti.

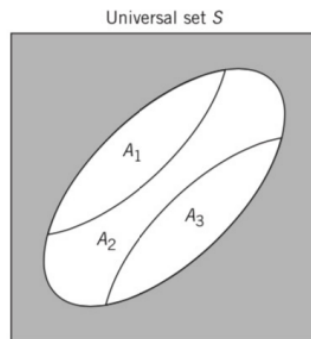


Figure 102: Disgiunzione e Partizione

- Complemento ( $A^c$ ): dati due set  $A$  e  $B$  :  $A \subset B$  il complemento del set  $A$  é il set contenente gli elementi di  $B$  non appartenenti ad  $A$ .

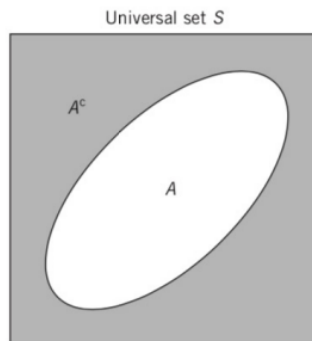


Figure 103: Complemento

### 9.2.2 Operazioni algebriche su set

- Idempotenza

$$(A^c)^c = A$$

- Proprietá commutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Proprietá associativa

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B$$

$$(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B$$

- Proprietá distributiva

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

### 9.3 Modelli probabilistici

La descrizione di un esperimento con risultati incerti é chiamato *modello probabilistico*, la costruzione del modello richiede:

- Spazio dei campioni o set universale  $S$ : nel quale sono presenti tutti i possibili risultati dell'esperimento.
- Una classe di eventi  $A$  che sia un subset di  $S$ .
- Legge della Probabilità: alla quale una quantità non negativa  $P[A]$  viene assegnata ad  $A$ .  $P[A]$  viene detta probabilità dell'evento  $A$ : rappresenta con quale occorrenza potrebbe verificarsi il risultato dell'esperimento  $A$ .

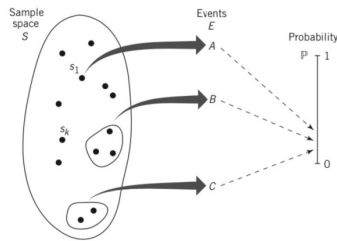


Figure 104: Modello Probabilistico

Un evento può avere come risultato un singolo risultato o un subset di risultati di  $S$ .

#### 9.3.1 Assiomi della probabilità

1. Non Negatività: la probabilità di  $A$  é un numero non negativo:

$$0 \leq P[A] \leq 1, \forall \text{ evento } A$$

2. Additività: se  $A$  e  $B$  sono due eventi disgiunti, allora la probabilità dell'unione é:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

3. Normalizzazione: la probabilità del set universale  $S$  é  $P[S] = 1$

Si sviluppano alcune proprietà della probabilità:

- La probabilità di un evento impossibile è zero. Dimostrazione:
- $P[A^c] = 1 - P[A]$  Dimostrazione:
- Se un evento  $A$  è un subset di un evento  $B$  allora:  $P[A] \leq P[B]$ . Dimostrazione:
- Se due eventi  $A$  e  $B$  non sono disgiunti allora:  
 $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$   
 Dimostrazione:

### 9.3.2 Probabilità condizionata

Prendiamo in esempio un esperimento che implica due eventi  $A$  e  $B$ :  $P[A|B]$  sia la probabilità che un evento  $A$  si verifichi dato il verificarsi dell'evento  $B$ ,  $P[A|B]$  è detta probabilità condizionata di  $A$  dato  $B$ , assumendo  $P[B] \neq 0$ :

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

### 9.3.3 Regola di Bayes

Supponiamo che si possano ricavare facilmente le probabilità  $P[A|B]$ ,  $P[A]$  e  $P[B]$  e vogliamo trovare la probabilità condizionata  $P[B|A]$ :

$$P[B|A] = \frac{P[A|B]P[B]}{P[A]}$$

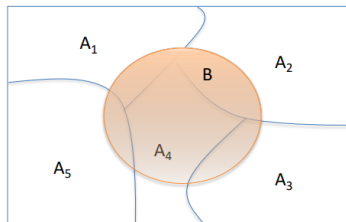
### 9.3.4 Indipendenza

Supponiamo che l'occorrenza di un evento  $A$  non fornisca nessuna informazione sull'evento  $B$ ,  $P[B|A] = 0$ . Dalla regola di Bayes abbiamo  $P[A|B] = P[A]$ , i due eventi sono indipendenti e occorre che:

$$P[A \cap B] = P[A]P[B]$$

### 9.3.5 Legge della probabilità totale

Supponiamo  $\{A_n = 1, \dots, N\}$  è un insieme di eventi disgiunti:





$$P[B] = \sum_{n=1}^N P[B \cap A_n]$$

### 9.3.6 Problemi esempio:

**Radar Detection Problem:** Nel problema del rilevamento vogliamo analizzare in particolare tre tipi di probabilità:

- *Probabilità a priori*  $P[A]$ : probabilità che il bersaglio sia nell'area.
- *Probabilità di rivelazione*  $P[B|A]$ : probabilità che il radar riveli il bersaglio, quando effettivamente il bersaglio é presente nell'area.
- *Probabilità di falso allarme*  $P[B|A^c]$ : probabilità che il radar riveli il bersaglio, ma il bersaglio non é effettivamente presente nell'area.

Dati i dati delle relative probabilità:

$$\begin{aligned} P[A] &= 0.02 \\ P[B|A] &= 0.99 \\ P[B|A^c] &= 0.01 \end{aligned}$$

$A^c$  indica che il bersaglio non é presente. Il problema richiede di calcolare la probabilità condizionata  $P[A|B]$ , la quale definisce la probabilità che il bersaglio sia presente nell'area e il radar l'abbia rivelata. Soluzione:

$$\stackrel{9.3.3}{\Rightarrow} P[A|B] = \frac{P[A]P[B|A]}{P[B]}$$

Devo solo calcolare  $P[B]$ :

$$\begin{aligned} \stackrel{9.3.5}{\Rightarrow} P[B] &= \sum_{n=1}^2 P[B \cap A_n] = \sum_{n=1}^2 P[B|A_n]P[A_n] \\ P[B] &= P[B|A]P[A] + P[B|A^c]P[A^c] \\ &= 0.99 \cdot 0.02 + 0.01 \cdot 0.098 = 0.0296 \cong 0.03 \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $P[A^c] = 1 - P[A]$ , nel nostro caso il problema si risolve facilmente applicando il Th della probabilità totale su due set disgiunti  $A$  e  $A^c$ . Possiamo quindi calcolare la probabilità condizionata:

$$P[A|B] = \frac{P[A]P[B|A]}{P[B]} = \frac{0.02 \cdot 0.99}{0.03} = 0.66$$

**Communication Problem:** In un sistema di comunicazione ho:

- 1 é trasmesso con probabilità  $P[1] = 0.3$  e 0 con probabilità  $P[0] = 1 - P[1] = 0.7$
- la probabilità di errore é  $P_e = 0.01$

Richiesta: assumendo che venga ricevuto 0, calcolare la probabilità che questo sia stato effettivamente trasmesso. Soluzione: Definiamo i set di interesse:

- $A = \{0 \text{ é stato trasmesso}\}$ ,  $A^c = \{1 \text{ é stato trasmesso}\}$
- $B = \{0 \text{ é stato ricevuto}\}$ ,  $B^c = \{1 \text{ é stato ricevuto}\}$

$$\stackrel{9.3.3}{\Rightarrow} P[A|B] = \frac{P[A]P[B|A]}{P[B]}$$

$P[B|A]$  non é altro che il probabilità di corretta ricezione ( $P[c]$ ), posso calcolarla dalla probabilità di errore:

$$P[e] = P[B^c|A] = P[B|A^c] = 0.01, \text{ probabilità di errore}$$

$$P[c] = P[B|A] = P[B^c|A^c] = 1 - P[e] = 0.99, \text{ probabilità di corretta ricezione}$$

Calcoliamo  $P[B]$ :

$$\begin{aligned} \stackrel{9.3.5}{\Rightarrow} P[B] &= \sum_{n=1}^2 P[B \cap A_n] = \sum_{n=1}^2 P[B|A_n]P[A_n] \\ P[B] &= P[B|A]P[A] + P[B|A^c]P[A^c] \\ &= 0.99 \cdot 0.7 + 0.01 \cdot 0.3 = 0.696 \end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare la probabilità condizionata:

$$P[A|B] = \frac{P[A]P[B|A]}{P[B]} = \frac{0.7 \cdot 0.99}{0.696} = 0.995$$

**Esempio palline:** Eventi: Pesca una pallina dall'urna *pippo* e la metto nell'urna *pluto*, infine pesca una pallina dall'urna *pluto*. Calcolare la probabilità di pescare una pallina bianca dall'urna *pluto* ( $P[\text{pesco 1 bianca da } \textit{pluto}] = P[A]$ ).



Definiamo per prima cosa i set del problema:

- $A = \{\text{pesco una pallina bianca da } \textit{pluto}\}$
- $B = \{\text{pesco una pallina bianca da } \textit{pippo}\}$

- $B^c = C = \{\text{pescounapallinaneradapippo}\}$

Calcoliamo  $P[A]$ :

$$\begin{aligned} \stackrel{9.3.5}{\Rightarrow} P[A] &= \sum_{n=1}^2 P[A \cap B_n] = \sum_{n=1}^2 P[A|B_n]P[B_n] \\ P[A] &= P[A|B]P[B] + P[A|C]P[C] \\ &= \frac{3}{4} \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- $P[A|B]$ : pesco bianco da *pluto* avendo inserito una bianca da *pippo*
- $P[A|C]$ : pesco bianco da *pluto* avendo inserito una nera da *pippo*

**Aggiungiamo due palline da *pippo* in *pluto*:** Cambia il Th della probabilità totale:

- $P[B]$ : pesco due bianche da *pippo*  $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$
- $P[A|B]$ : pesco due bianche da *pluto* avendo inserito due bianche da *pippo*  $= \frac{4}{5}$
- $P[C]$ : pesco una bianca e una nera da *pippo*  $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$
- $P[A|C]$ : pesco bianco da *pluto* avendo inserito una bianca e una nera da *pippo*  $= \frac{3}{5}$
- $P[D]$ : pesco due nere da *pippo*, é un evento impossibile  $P[D] = 0$
- $P[A|D]$ : pesco bianco da *pluto* avendo inserito due nere da *pippo*  $P[D] = 0$
- $P[E]$ : una nera e una bianca da *pippo*  $= \frac{1}{3} \cdot 1$
- $P[A|E]$ : pesco bianco da *pluto* avendo inserito una nera e una bianca da *pippo*  $= \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} \stackrel{9.3.5}{\Rightarrow} P[A] &= \sum_{n=1}^4 P[A \cap B_n] = \sum_{n=1}^4 P[A|B_n]P[B_n] \\ P[A] &= P[A|B]P[B] + P[A|C]P[C] + P[A|D]P[D] + P[A|E]P[E] \\ &= \frac{4}{5} \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \frac{1}{3} + 0 + \frac{3}{5} \frac{1}{3} = \frac{10}{15} \end{aligned}$$

### 9.3.7 Coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale  $\binom{n}{k}$  é un numero intero non negativo che fornisce le combiazioni semplici di  $n$  elementi di classe  $k$ , definito da:

$$\binom{n}{k} = C(n; k) = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Possiamo usarli per calcolare la probabilità di errore su eventi ripetuti in unione con la distribuzione di bernulli 12.1.

**Esempio su sistema di comunicazione binario:** Prendiamo in esempio un trasmettitore di codice binario a ripetizione con  $R = \frac{1}{3} \begin{cases} 0 = [000] \\ 1 = [111] \end{cases}$ . Calcolare la probabilità di errore del sistema,  $P[E]$ , sapendo che la probabilità di errore sul bit è  $P[e] = 0.01$ . Soluzione: Scelgo la mia regola di decisione per la decodifica dei bit, a maggioranza:

1  $\rightarrow$  Se ho la maggioranza di uno nel codice, nel nostro caso 2 su 3

0  $\rightarrow$  Se ho la maggioranza di zero nel codice, nel nostro caso 2 su 3

sbaglio il codice in trasmissione se ho sbagliato tre o due bit. Calcoliamo la probabilità del canale,  $P[E] \stackrel{9.3.5}{=} P[E|0]P[0] + P[E|1]P[1]$ :

- $P[E|0]$ : Osserviamo tutti i casi possibili di trasmissione del codice di 0 = [000]

Messaggio	Errore
[000]	
[001]	
[010]	
[011]	$E_1$
[100]	
[101]	$E_2$
[110]	$E_3$
[111]	$E_4$

Applichiamo la legge della probabilità totale (9.3.5):

$$P[E|0] = \sum_{n=1}^4 P[E_n|0] = P[E_1|0] + P[E_2|0] + P[E_3|0] + P[E_4|0]$$

–  $P[E_1|0] = P[E_2|0] = P[E_3|0] = P[e]P[e]P[c], P[c] = 1 - P[e]$  corretta trasmissione, sono uguali poiché non ci interessa l'ordine con cui appare l'errore

$$- P[E_4|0] = P[e]P[e]P[e]$$

$$\begin{aligned} P[E|0] &= 3P^2[e](1 - P[e]) + P^3[e] = 3P^2[e] - 3P^3[e] + P^3[e] \\ &= 3P^2[e] - 2P^3[e] \cong 3P^2[e] \end{aligned}$$

- $P[E|1]$ : Usiamo la probabilità di errore sul canale 12.1

$$P[E|1] = \binom{3}{3}P^3[e] + \binom{3}{2}P^2[e](1 - P[e]) \cong 3P^2[e]$$

Abbiamo quindi:

$$P[E] = P[E|0]P[0] + P[E|1]P[1] = 3P^2[e]P[0] + 3P^2[e]P[1] \cong 3P^2[e]$$

**Caso**  $R = \frac{1}{5}$ :

$$\begin{aligned} P[E] &= \sum_{n=3}^5 \binom{5}{n} P^n[e](1 - P[e])^{5-n} \\ &= \binom{5}{3} P^3[e](1 - P[e])^2 + \binom{5}{4} P^4[e](1 - P[e])^1 + \binom{5}{5} P^5[e](1 - P[e])^0 \end{aligned}$$

**Esempio prove ripetute:** Abbiamo 2 monete, una regolare ( $r$ ) e una truccata ( $t$ ) con le seguenti probabilità:

$$\begin{cases} P_r[T] = \frac{1}{2} \\ P_r[C] = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} P_t[T] = \frac{8}{10} \\ P_t[C] = \frac{2}{10} \end{cases}$$

Calcolare la probabilità di aver scelto la moneta regolare se: scelgo a caso una monetina tra le due e la lancio 10 volte osservando che esce 5 volte croce e 5 volte testa. Soluzione: la probabilità da calcolare é

$$P[A|B] = ? \Rightarrow \begin{cases} A = \text{ho scelto la moneta regolare} \\ A^c = C = \text{scelgo la moneta truccata} \\ B = \text{esce 5 volte testa e 5 volte croce} \end{cases}$$

$$\stackrel{9.3.3}{\Rightarrow} P[A|B] = \frac{P[A]P[B|A]}{P[B]}, \quad P[B|A] = ? \text{ e } P[B] = ?$$

$$\begin{aligned} P[B] &\stackrel{9.3.5}{=} P[B|A]P[A] + P[B|C]P[C] \\ P[B|A] &= \binom{10}{5} P_r[T]^5 P_r[C]^5 = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ P[B|C] &= \binom{10}{5} P_r[T]^5 P_r[C]^5 = \binom{10}{5} \left(\frac{8}{10}\right)^5 \left(\frac{2}{10}\right)^5 \end{aligned}$$

inserendo dentro bayes il risultato dovrebbe essere 0.9.

## 9.4 Variabili Aleatorie - Random Variables

Una *variabile aleatoria*  $X$  é una funzione il cui dominio é un insieme, di numeri reali, dello spazio degli esiti di un esperimento. ogni spazio degli esiti ha la sua probabilità associata.

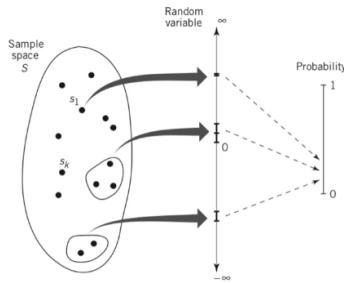


Figure 105: Esperimento  $\rightarrow$  Intervallo  $\rightarrow$  Probabilità dell'Intervallo

Una variabile aleatoria può essere continua o discreta. Le variabili aleatorie si indicano con le lettere maiuscole

#### 9.4.1 Funzioni di Distribuzione - Distribution Functions

Considera la variabile aleatoria  $X$  e la probabilità dell'evento  $X \leq x$ , per convenzione si indica con  $P[X \leq x]$ , che può essere scritto come:

$$F_{X(x)} \triangleq P[X \leq x] \forall x$$

La funzione  $F_{X(x)}$  è chiamata la *funzione distribuzione* della variabile  $X$ , si può notare che è funzione di  $x$  non di  $X$ .

##### Proprietà:

- Limitata - Boundedness: è limitata tra zero e uno, essendo una probabilità.
- Monotona - Monotonicity: la funzione è una funzione monotona *non decrescente* (può rimanere costante) di  $x$ .

#### 9.4.2 Funzione Densità di Probabilità - Probability Density Function (pdf)

La variabile aleatoria  $X$  è continua se la funzione distribuzione  $F_{X(x)}$  è differenziabile:

$$f_{X(x)} = \frac{d}{dx} F_{X(x)} \forall x$$

$f_{X(x)}$  è detta *funzione di densità di probabilità* (pdf).

##### Proprietà:

- Non negativa
- Normalization: l'area totale della *pdf* è unitaria.

•

$$\begin{aligned} P[x_1 < X < x_2] &= P[X \leq x_2] - P[X \leq x_1] = F_{X(x_2)} - F_{X(x_1)} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f_{X(x)} dx \end{aligned}$$

se non avessi un estremo:

$$\begin{aligned} - P[X \leq x_2] &= \int_{-\infty}^{x_2} \\ - P[X \leq x_1] &= 1 - \int_{-\infty}^{x_1} \end{aligned}$$

**Esempio - Distribuzione Uniforme:** Proviamo le proprietà della funzione distribuzione  $F_{X(x)}$  e la funzione densità di probabilità  $f_{X(x)}$  per una variabile aleatoria continua:

$$f_{X(x)} = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Integrandola troviamo:

$$F_{X(x)} = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

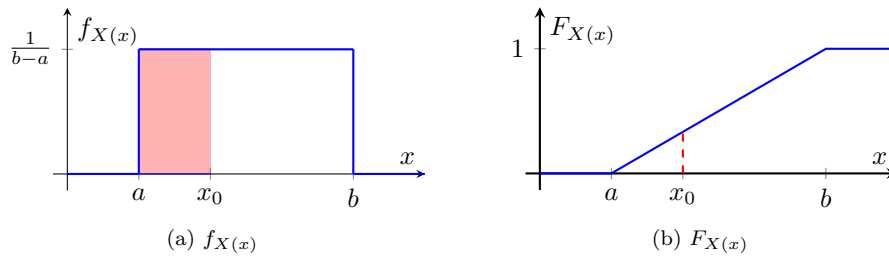


Figure 106: Distribuzione Uniforme

### 9.4.3 Funzione Probabilità di massa - Probability Mass Function (pmf)

Consideriamo il caso di una variabile aleatoria discreta  $X$ , la quale può assumere un numero finito o infinito di valori. La funzione distribuzione  $F_{X(x)}$  si applica anche alle variabili discrete, ma non è differenziabile per come l'abbiamo definita. Definiamo la funzione probabilità di massa  $p_{X(x)}$ :

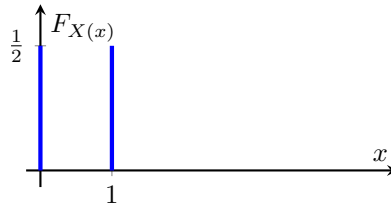
$$p_{X(x)} \triangleq P[X = x]$$

è la probabilità di un evento  $X = x$ , che consiste in tutti i possibili risultati di un esperimento i quali hanno un valore di  $X$  uguale a  $x$ .

**Esempio di Bernulli** Consideriamo l'esperimento probabilistico che assume uno di due valori:

- il valore 1 con probabilità  $p$
- il valore 0 con probabilità  $1 - p$

Tale variabile aleatoria é chiamata *variabile aleatoria di Bernulli*:



#### 9.4.4 - Multiple Random Variables

Consideriamo due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ :

- La funzione distribuzione  $F_{X,Y}(x,y)$  é la probabilità che  $X$  sia minore o uguale a un valore specifico  $x$  e che  $Y$  sia minore o uguale a un'altro valore specifico  $y$ :

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

- La funzione densità di probabilità  $f_{X,Y}(x,y)$  contiene tutto quello che ci serve per fare una completa analisi della probabilità di più variabili aleatorie:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{d^2 F_{X,Y}(x,y)}{dxdy}$$

#### 9.4.5 Funzione Densità di Probabilità Condizionata - Conditional Probability Density Function

Supponendo che  $X$  e  $Y$  siano due variabili aleatorie continue con  $f_{X,Y}(x,y)$ , la funzione densità di probabilità condizionata di  $Y$  con  $X = x$ , é definita da:

$$f_{Y(y|x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_{X(x)}}$$

Supponendo che le due variabili siano indipendenti: allora  $f_{Y(y|x)}$  si riduce alla densità marginale  $f_{Y(y)}$  e la funzione densità di probabilità diventa  $f_{X(x)}f_{Y(y)}$ , se così fosse le due variabili si dicono *statisticamente indipendenti*.



#### 9.4.6 Somma di Variabili Aleatorie Indipendenti

Consideriamo due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  statisticamente indipendenti e continue con funzioni di densità di probabilità  $f_{X(x)}$  e  $f_{Y(y)}$  si definisce  $Z = X + Y$  la cui pdf  $f_{Z(z)}$  é:

$$f_{Z(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X(x)} f_{Y(z-y)} dx = f_{X(x)} \otimes f_{Y(y)}$$

La somma di due variabili aleatorie indipendenti e continue é la convoluzione delle funzioni di densità di probabilità. Dimostrazione: (To DO: sul libro)

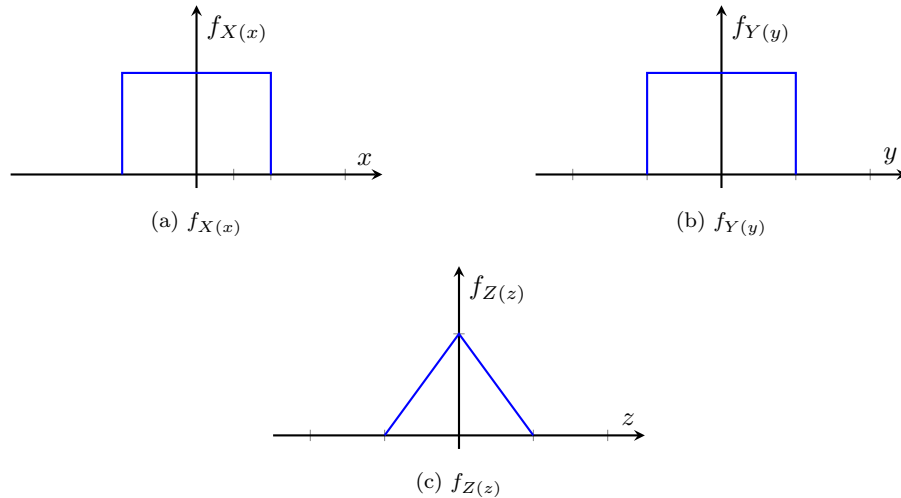


Figure 107: Somma di Variabili Aleatorie

#### 9.4.7 Valore medio delle Variabili Aleatorie - Mean Value of Random Variables (Expectation)

L'expectation o il valore medio di una variabile aleatoria continua  $X$  é formalmente definito da:

- Caso Continuo:

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(x)} dx$$

- Caso Discreto:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x p_{X(x)}$$

é la media pesata delle variabili aleatorie, può anche essere un valore che non gli appartiene.

### Proprietá

- Linearitá - Linearity:  $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ .
- Indipendenza Statistica - Statistical Independence:  $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$  se  $X$  e  $Y$  sono statisticamente indipendenti.  
Dimostrazione:

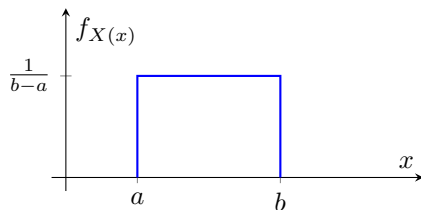
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy \stackrel{\text{Indipendenza}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

- Teorema del valore medio dell'expectation:

$$\mathbb{E}[g(x)] \stackrel{Y=g(x)}{=} \mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

### Esempi:

1. Calcolare il valore medio ( $\mu_X$ ) di:



$$\begin{aligned}\mu_X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}\end{aligned}$$

2. Calcoliamo il valore quadratico medio della distribuzione unitaria ( $\mathbb{E}[x^2]$ ):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}\end{aligned}$$

#### 9.4.8 Varianza - Variance

La varianza  $\sigma_x^2$  di una variabile aleatoria  $X$  é definita:

$$var[X] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_X)^2 f_{X(x)} dx$$

$$\begin{aligned} var[X] &= \sigma_x^2 \stackrel{9.4.7}{=} \mathbb{E}[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu_X \mathbb{E}[X] + \mu_X^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2 \end{aligned}$$

$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(x)} dx$  mentre  $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X(x)} dx$ , l'expectation é il peso che diamo alla funzione  $f_{X(x)}$ . Misura la "randomicitá" di una variabile aleatoria, meno é randomica piú sono vicino al mio valor medio.

$$P[|X - \mu_X| \geq \mathcal{E}] \leq \frac{\sigma_X^2}{\mathcal{E}^2}$$

**Deviazione Standard:**  $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$  si dice Deviazione Standard

#### 9.4.9 Covarianza - Covariance

Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie, si definisce covarianza:

$$\begin{aligned} cov[XY] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

Il *coefficiente di correlazione* di  $X$  e  $Y$  é:

$$\rho_{(X,Y)} = \frac{cov[XY]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

misura la somiglianza tra  $X$  e  $Y$ . Le due variabili si dicono:

- Incorrelate: se la  $cov[XY] = 0$ , ciò non implica l'indipendenza delle variabili.
- Ortogonali: se  $\mathbb{E}[XY] = 0$

#### 9.4.10 Distribuzione Gaussiana

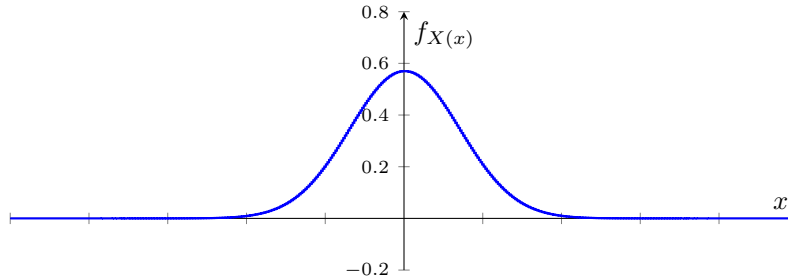


Figure 108: Gaussiana

Una variabile aleatoria  $X$  é detta Gaussiana se la funzione distribuzione di probabilità ,pdf, ha la forma:

$$f_{X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{\left[-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]}$$

##### Propiet :

- Definita unicamente da valore medio di  $X$  e la varianza  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ .
- La propriet  di Gaussianit  é preservata dalle trasformazioni lineari.  $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2) : Y = \alpha X + \beta$ , calcoliamo come variano valor medio e varianza:

– Valor medio:

$$\mathbb{E}[Y] = \mu_Y = \mathbb{E}[\alpha X + \beta] \stackrel{9.4.7}{=} \alpha \mathbb{E}[X] + \beta$$

– Varianza:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[(\alpha X + \beta)^2] - (\alpha \mathbb{E}[X] + \beta)^2 \\ &= \mathbb{E}[\alpha^2 X^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta X] - (\alpha^2 \mathbb{E}[X]^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \mathbb{E}[X]) \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}[X^2] + \beta^2 + 2\alpha\beta \mathbb{E}[X] - \alpha^2 \mathbb{E}[X]^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \mathbb{E}[X] \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}[X^2] - \alpha^2 \mathbb{E}[X]^2 = \alpha^2 (\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2) \\ &= \alpha^2 (\mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2) = \alpha^2 \sigma_X^2 \end{aligned}$$

la costante  $\beta$  non influisce la varianza.

- La somma  $Z = X + Y$  di variabili aleatorie Gaussiane indipendenti é anche essa na variabile aleatoria Gaussiana, con:
  - $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
  - $\text{var}[Z] = \text{var}[X] + \text{var}[Y]$

**Distribuzione Gaussiana Standard** Si dice forma Gaussiana Standard se:  
 $\mathbb{E}[X] = 0$  e  $\text{var}[X] = 1$ ,  $\mathcal{N}(0, 1)$ :

$$f_{X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$F_{X(x)} = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_{X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)} dt$$

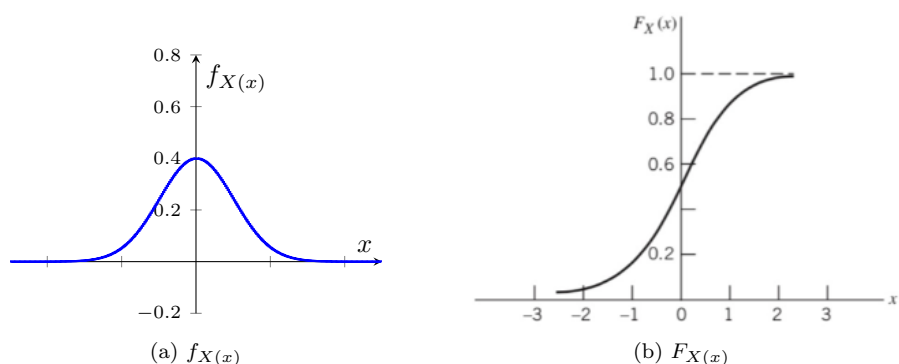


Figure 109: Distribuzione Gaussiana Standard

Osservazioni: la varianza permette di modificare la spancatura della gaussiana, mentre il valor medio shifta sull'asse x la gaussiana.

Posso utilizzare la forma standard della gaussiana e le trasformazioni lineari per rappresentare qualsiasi altro tipo di gaussiana:

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_Y^2) \rightarrow Y = \sigma_Y X + \mu_y$$

Calcoliamo  $\mu_Y$  e  $\sigma_Y^2$ :

- $\mathbb{E}[Y] = \mu_Y$
- $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \sigma_Y^2$

#### 9.4.11 Funzione $Q_{(x)}$

Per calcolare la funzione distribuzione di probabilità ( $F_{X(x)}$ ) non calcoliamo l'integrale della funzione distribuzione di probabilità, ma utilizziamo la funzione  $Q_{(x)}$  così definita:

$$Q_{(x)} = 1 - F_{X(x)} = P[X \geq x]$$

formalmente è così definita:

$$Q_{(x)} = 1 - F_{X(x)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)} dt$$

é l'area sottesa dalla funzione di distribuzione Gaussiana da  $x$  all'infinito

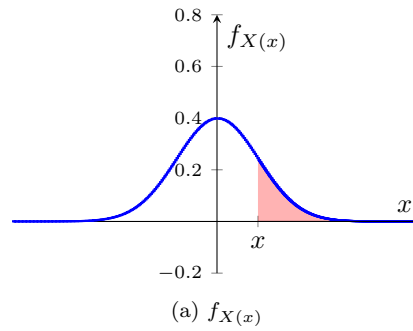


Figure 110:  $Q(x)$

**Propiet :**

- $Q(x) = 1 - Q(-x)$

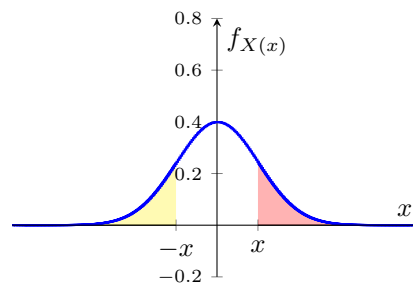


Figure 111:  $Q(x), 1 - Q(-x)$

- $Q(\infty) = 0$
- $Q(-\infty) = 1$
- $Q(0) = \frac{1}{2}$

utilizziamo la tavola della funzione  $Q$

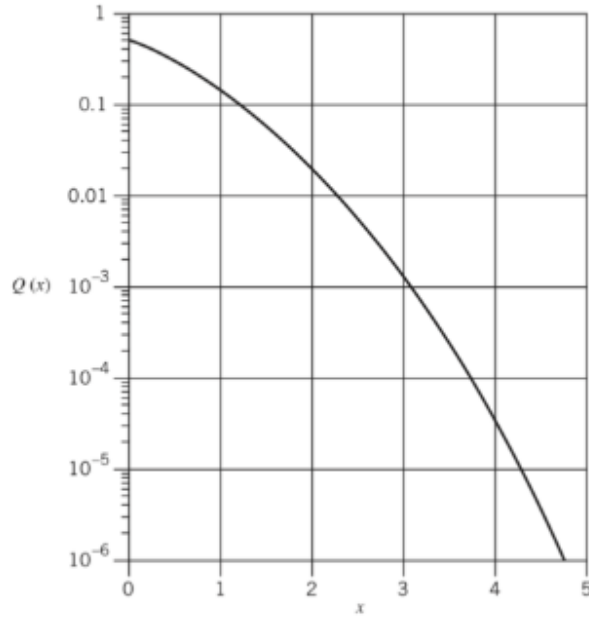


Figure 112: Grafico  $Q(x)$

#### 9.4.12 Teorema del Limite Centrale - Central Limit Theorem

Siano  $X_1, \dots, X_n$  una sequenza di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con valore medio  $\mu$  e varianza  $\sigma$ :

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right)$$

al tendere di  $n$  all'infinito,  $Y_n$  converge alla variabile aleatoria Gaussiana standard:

$$F_{Y(y)} = P[Y \leq y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

#### 9.4.13 Calcolo probabilità di errore di un sistema

Dato un sistema binario di comunicazione ( $S \in \{0, 1\}$ ), dopo il campionamento ho:  $Y = \sqrt{p}S + n$ .  $p$  è la potenza e  $n$  è il rumore gaussiano  $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ . Voglio calcolarne la probabilità di errore:

$$P_e \stackrel{9.3.5}{=} P_r(\hat{S} = 1|S = -1)P(S = -1) + P_r(\hat{S} = -1|S = 1)P(S = 1)$$

analizziamo il caso generico in cui  $P(S = 1) = q, P(S = -1) = 1 - q$ , nel caso equiprobabile sarebbero  $\frac{1}{2}$ : dobbiamo calcolare  $P_r(\hat{S} = 1|S = -1)$  e  $P_r(\hat{S} = -1|S = 1)$

- $P_r(\hat{S} = 1|S = -1)$ :

$$Y \Big|_{S=-1} = -\sqrt{p} + n \sim \mathcal{N}(-\sqrt{p}, \sigma_Y = \sigma_n^2)$$

al rumore viene solo aggiunta una costante, quindi rimane tale e con distribuzione:

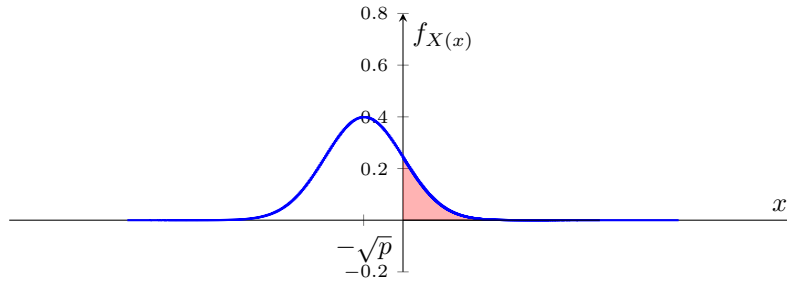


Figure 113:  $P[Y \geq 0|S = -1]$

posso basare la decisione di errore se ricevo qualcosa di positivo quando il simbolo inviato é negativo,  $P[Y \geq 0|S = -1]$ .

**Calcolo errore di un sistema:** Posso generalizzare la mia soglia di decisione su di un valore  $\lambda$

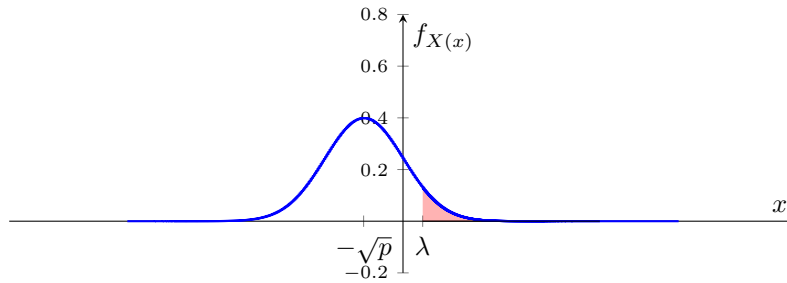


Figure 114:  $P[Y \geq \lambda|S = -1]$

di conseguenza la probabilità viene descritta come:

$$P_r[\hat{S} = 1|S = -1] = P_r[Y > \lambda|S = -1] = P_r[-\sqrt{p} + n > \lambda] = P_r[n > \lambda + \sqrt{p}]$$

posso calcolare la  $P_r[-\sqrt{p} + n > \lambda]$  oppure  $P_r[n > \lambda + \sqrt{p}]$ , calcoliamo



$P_r[n > \lambda + \sqrt{p}]$ :

$$\begin{aligned}
Q_{(x)} &= \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \int_{\lambda + \sqrt{p}}^\infty f_{N(n)} dn \text{ senza sapere se } \acute{\text{e}} \text{ gaussiana o meno} \\
&\stackrel{\text{é Gaussiana}}{=} \int_{\lambda + \sqrt{p}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} dn \stackrel[t = \frac{n}{\sigma_n}]{dt = \frac{dn}{\sigma_n}} \int_{\frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_n}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= Q\left(\frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_n}\right) = P_r[n > \lambda + \sqrt{p}]
\end{aligned}$$

generalizzando la potenza del segnale ottengo l'errore:

$$Q\left(\frac{\lambda - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) = P_r[n > \lambda + \mu_Y]$$

- Calcoliamo  $P_r(\hat{S} = -1 | S = 1)$  applicando la formula dell'errore sopra trovata:

$$S = 1 \Rightarrow Y = \sqrt{p} + n \sim \mathcal{N}(\sqrt{p}, \sigma_n^2)$$

calcolando la probabilità:

$$\begin{aligned}
P_r[\hat{S} = -1 | S = 1] &= 1 - P_r[\hat{S} = 1 | S = -1] = 1 - Q\left(\frac{\lambda - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \\
&= 1 - Q\left(\frac{\lambda - \sqrt{p}}{\sigma_n}\right)
\end{aligned}$$

sottraggo a 1 la probabilità per la definizione della  $Q_{(x)}$  é l'integrale della zona a dx e a me interessa l'area a sinistra:

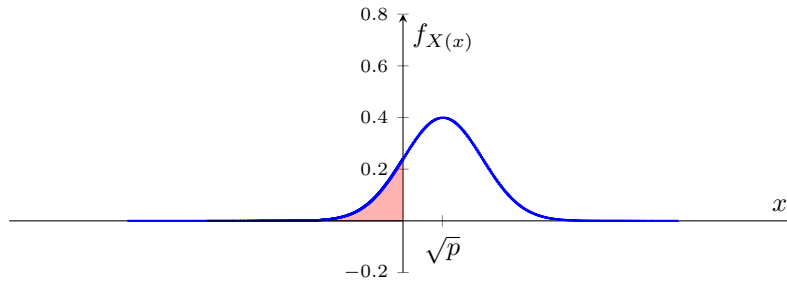


Figure 115:  $P[\hat{S} = -1 | S = 1]$

La probabilità totale di errore del sistema é:

$$\begin{aligned}
 P_e &= Q\left(\frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_n}\right) P[S = -1] + \left(1 - Q\left(\frac{\lambda - \sqrt{p}}{\sigma_n}\right)\right) P[S = 1] \\
 &= Q\left(\frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_n}\right) (1 - q) + \left(1 - Q\left(\frac{\lambda - \sqrt{p}}{\sigma_n}\right)\right) q = g(\lambda)
 \end{aligned} \tag{1}$$

se volessi calcolare il  $\lambda$  ottimo derivo la funzione e la pongo uguale a zero:  
 $\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = 0$

**Caso con simboli equiprobabili:**  $q = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{1}{2} Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_n}\right)\right) \\
 Q_x &\stackrel{Q_x = 1 - Q(-x)}{=} Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_n}\right) = Q(\sqrt{SNR})
 \end{aligned}$$

si definisce  $SNR = \text{Signal To Noise Ratio} = \frac{\mu^2}{\sigma_n^2}$  é il rapporto tra potenza e varianza, in generale calcolo:

$$Z = \frac{Y}{\sqrt{p}} = S + \frac{n}{\sqrt{p}} \sim \mathcal{N}(\pm 1, \frac{\sigma_n^2}{p})$$

da cui calcolandone la probabilità di errore:

$$P_e = Q\left(\frac{1}{\frac{\sigma_n}{\sqrt{p}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{p}{\sigma_n^2}}\right)$$

**Esempio:** Ho bisogno di una  $P_e = 10^{-3}$ , quale rapporto  $SNR$  devo utilizzare?

$$Q_{\sqrt{SNR}} = 10^{-3}$$

Controllando la tabella della funzione  $Q_{(x)}$ :

$$\sqrt{SNR} = 3 \Rightarrow SNR = 9$$

Passando alla scala in decibel:

$$SNR \Big|_{db} = 10 \log_{10}(9) = 9.5db$$

**Caso con rumore complesso:**  $Y = \sqrt{p}S + n$ :

$$n \sim \mathcal{N}_c(0, \sigma_n^2) \rightarrow n = n_{Re} + jn_{Im}$$

$$n_{Re}, n_{Im} \sim \mathcal{N}_c(0, \frac{\sigma_n^2}{2})$$

Verifichiamo che la varianza delle singole componenti reali e immaginarie sia giusta:

$$var[n] = \mathbb{E}[|n|^2] - \mu_n^2 = var[n_{Re}] + var[n_{Im}] = \frac{\sigma_n^2}{2} + \frac{\sigma_n^2}{2} = \sigma_n^2$$

il procedimento é uguale escludiamo la parte immaginaria del rumore e prendiamo solo quella reale (cambia solo il valore della varianza), poiché il simbolo ha solo parti reali:

$$Y \in \mathbb{C} \begin{cases} Re\{Y\} = Y_{Re} = \sqrt{p}S_{Re} + n_{Re} \\ Im\{Y\} = Y_{Im} = n_{Im} \end{cases}$$

e baso la mia decisione del simbolo ricevuto solo con la parte reale:

$$\hat{S} = \begin{cases} 1 & Re\{Y\} \geq \lambda \\ -1 & Re\{Y\} < \lambda \end{cases} = \begin{cases} 1 & Re\{Y\} \geq 0 \\ -1 & Re\{Y\} < 0 \end{cases}$$

calcoliamo la probabilità di errore:

$$Z_r = \frac{Y_{Re}}{\sqrt{p}} = S + \frac{n}{\sqrt{p}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma^2 = \frac{\sigma_n^2}{2p}$$

$$P_e = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2p}{\sigma_n^2}}\right) = Q_{\sqrt{2SNR}}$$

se  $P_e = 10^{-3}$ :

$$SNR = 4,5 \xRightarrow{db} SNR_{db} = 6,53db$$

se  $P_e = 10^{-5}$ :

$$SNR = 8 \xRightarrow{db} SNR_{db} = 9,03db$$

Nel caso del rumore complesso ho solo metà del disturbo dovuto ad esso poiché il simbolo non dipende dalla parte immaginaria.

**Caso con rumore e simboli complessi:**  $Y = \sqrt{p}S + n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ :

$$Y \in \mathbb{C} \begin{cases} Re\{Y\} = Y_{Re} = \sqrt{p}S_{Re} + n_{Re} \\ Im\{Y\} = Y_{Im} = \sqrt{p}S_{Im} + n_{Im} \end{cases}$$

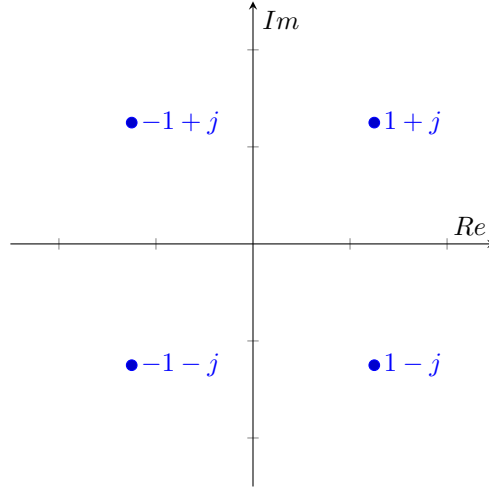


Figure 116: Simboli complessi

basiamo la decisione del simbolo ricevuto rispetto al quadrante in cui cade, la probabilità di errore del sistema  $P_e$  è costituita dalla probabilità di scegliere un quadrante del simbolo diverso da quello inviato:

$$P_e = \sum_{k=1}^4 P_r[\hat{S} \neq S_k | S_k] P[S_k]$$

si noti come la probabilità che il simbolo ricada in un quadrante diverso da quello inviato è identica per tutti i casi, quindi basta calcolarne solo una:

$$P_e = P_r[\hat{S} \neq S_1 | S = S_1] \sum_{k=1}^4 P[S_k] = P_r[\hat{S} \neq S_1 | S = S_1]$$

la somma delle probabilità di trasmissione dei simboli è 1, diventa praticamente la probabilità di aver trasmesso un simbolo e quello lo faccio sempre. Calcoliamo  $P_r[\hat{S} \neq S_1 | S = S_1]$ :

$$P_r[\hat{S} \neq S_1 | S = S_1] \stackrel{P[\text{corr. ricezione}]}{=} 1 - P_r[\hat{S} = S_1 | S = S_1] = 1 - P_r[Y_{Re}, Y_{Im} \in I^o]$$

la parte reale e immaginaria sono tra loro indipendenti e gaussiane data la composizione del rumore  $n$ , posso calcolare:

$$P_r[Y_{Re}, Y_{Im} \in I^o] = P_r[Y_{Re} > 0] P_r[Y_{Im} > 0]$$

dall'esercizio sopra con rumore e simboli reali sappiamo che la probabilità di corretta ricezione è  $1 - Q_{(\sqrt{2SNR})}$ :

$$P_r[Y_{Re}, Y_{Im} \in I^o] = P_r[Y_{Re} > 0] P_r[Y_{Im} > 0] = \left(1 - Q_{(\sqrt{2SNR})}\right)^2$$

possiamo calcolare adesso la probabilità del sistema:

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - \left(1 - Q_{(\sqrt{2SNR})}\right)^2 = 1 - \left(1 - 2Q_{(\sqrt{2SNR})} + Q_{(\sqrt{2SNR})}^2\right)^2 \\ &= 2Q_{(\sqrt{2SNR})} - Q_{(\sqrt{2SNR})}^2 \simeq 2Q_{(\sqrt{2SNR})} \end{aligned}$$

il risultato é l'applicazione del secondo assioma in caso di eventi non disgiunti (2):

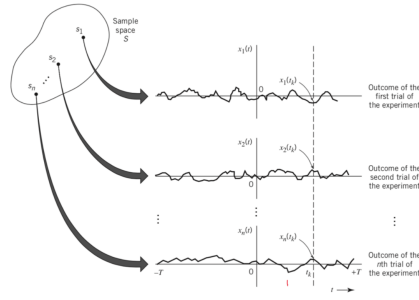
$$\underbrace{P_e}_{P[A \cap B]} = \underbrace{2Q_{(\sqrt{2SNR})}}_{P[A] + P[B]} - \underbrace{Q_{(\sqrt{2SNR})}^2}_{-P[A \cup B]}$$

## 10 Processi Stocastici

I *processi stocastici* sono segnali continui ma aleatori: é un set di variabili aleatorie indicizzate nel tempo.

### Propiet :

- Sono funzione del tempo.
- Sono funzioni aleatorie, non possiamo predire, prima di condurre l'esperimento, l'andamento del segnale ma possiamo analizzarne un andamento probabilistico tramite degli indici come: potenza media, funzioni di correlazione e spettro dell'energia



al campionamento  $t_k$  ho un set di variabili aleatorie. L'aleatoriet  pu  essere derivante da uno o pi  fattori, ad esempio in una funzione cosinusoidale  $A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$  possono essere aleatorie ampiezza, frequenza e fase.

### 10.1 Valore medio

Consideriamo un processo stocastico reale  $X(t)$ , il valore medio   l'expectation della variabile aleatoria ottenuta campionando il processo al tempo  $t$ :

$$\mu_{X(t)} = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(t) dt$$

ad ogni istante di tempo  $t$  ho una nuova variabile aleatoria per questo   funzione del tempo.

### 10.2 Autocorrelazione

Consideriamo un processo stocastico reale  $X(t)$  e due variabili aleatorie associate  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$ . L'autocorrelazione   l'expectation del prodotto delle due variabili aleatorie:

$$R_{XX(t_1, t_2)} = \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

### 10.2.1 Proprietá della autocorrelazione $R_x$

- Parità:  $R_{X(\tau)} = R_{X(-\tau)}$
- $R_{X(0)} \geq \underbrace{|R_{X(\tau)}|}_{\text{Val. Massimo}} : \text{Cosa rappresenta?}$

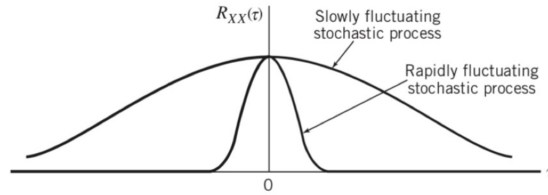
$$R_{X(\tau)} = \mathbb{E}[X_{(t_1)}X_{(t_2)}] = \mathbb{E}[X_{(t)}X_{(t-\tau)}] \Big|_{\tau=0}$$

$$R_{X(0)} = \underbrace{\mathbb{E}[|X|^2]}_{\text{Potenza}} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X_{(t)}(t)} dx$$

coincide con la potenza del processo SSL.

### 10.2.2 Sigificato fisico dell'autocorrelazione

La funzione di autocorrelazione ci fornisce la possibilità di descrivere l'indipendenza di due variabili aleatorie ottenute dal campionamento del processo stocastico  $X_{(t)}$  a tempi diversi. Più il processo stocastico  $X_{(t)}$  cambia nel tempo, più rapidamente la funzione di autocorrelazione scenderà dal suo massimo  $R_{XX(0)}$



## 10.3 Sistemi Stazionari in Senso Lato (SSL)

Un processo stocastico  $X_{(t)}$  si dice Stazionario in Senso Lato (SSL) se:

- Il valore medio del processo  $X_{(t)}$  è costante  $\forall t$ :

$$\mu_{X(t)} = \mathbb{E}[X_{(t)}] \stackrel{SSL}{\Rightarrow} \mu_X$$

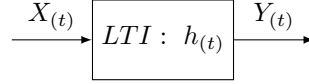
- La funzione di autocorrelazione del processo  $X_{(t)}$  dipende solamente dalla differenza tra due tempi qualsiasi al quale il processo è campionato:

$$R_{XX(t_1, t_2)} = \mathbb{E}[X_{(t_1)}X_{(t_2)}] \stackrel{SSL}{\Rightarrow} R_{X(t_1-t_2)} = R_{X(\tau)}$$

Se il processo dipende solo da  $\tau$  posso farne la TCF e analizzarne la densità spettrale.

### 10.3.1 Trasmissione di un SSL in un sistema LTI-Filter

Supponiamo di avere un processo stocastico  $X_{(t)}$  in ingresso ad un sistema LTI-Filter di risposta  $h_{(t)}$ , producendo un nuovo processo stocastico  $Y_{(t)}$



l'uscita  $Y_{(t)}$  si calcola con la convoluzione:

$$Y_{(t)} = X_{(t)} \otimes h_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha$$

Calcolaimone gli indici:

- Valore medio:

$$\begin{aligned} \mu_Y = \mathbb{E}[Y_{(t)}] &= \mathbb{E}[X_{(t)} \otimes h_{(t)}] = \mathbb{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha \right] \\ &\stackrel{9.4.7}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X_{(\alpha)}] h_{(t-\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{X_{(\alpha)}} h_{(t-\alpha)} d\alpha \\ &= \mu_{X_{(t)}} \otimes h_{(t)} \end{aligned}$$

- Autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_{YY(t_1, t_2)} &= \mathbb{E}[Y_{(t_1)} Y_{(t_2)}] = \mathbb{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\alpha_1)} h_{(t_1-\alpha_1)} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\alpha_2)} h_{(t_2-\alpha_2)} d\alpha_2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X_{(\alpha_1)} X_{(\alpha_2)}] h_{(t_1-\alpha_1)} h_{(t_2-\alpha_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &\stackrel{C.Var.}{=} R_{X(t_1, t_2)} \otimes h_{(t_1)} \otimes h_{(t_2)} \end{aligned}$$

Supponiamo adesso che il processo  $X_{(t)}$  sia SSL, verifichiamo se anche  $Y_{(t)}$  é SSL:

**Valore Medio:**

$$\begin{aligned} \mu_Y = \mathbb{E}[Y_{(t)}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X_{(\alpha)}] h_{(t-\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{X_{(\alpha)}} h_{(t-\alpha)} d\alpha \\ &= \mu_{X_{(\alpha)}} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t-\alpha)} d\alpha \stackrel{\beta=t-\alpha}{\underset{d\beta=-d\alpha}{=}} \mu_{X_{(\alpha)}} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\beta)} d\beta \\ &= \mu_X H_{(0)} \end{aligned}$$

si  $H_{(0)}$  é proprio il grande ritorno di una  $TCF$ , viene fuori perché se calcoliamo la  $TCF$  in 0

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{(\beta)} e^{-j2\pi f\beta} d\beta \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\beta)} d\beta = H_{(0)}$$

il quale coincide con il valore medio.



**Autocorrelazione:**

$$\begin{aligned} R_{Y(t_1, t_2)} &= R_{X(\tau)} \otimes h_{(\tau)} \otimes h_{(-\tau)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\tau_1)} h_{(\tau_2)} R_{XX(\tau+\tau_1-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

### 10.3.2 Densità di potenza spettrale

Supponiamo di voler caratterizzare l'output di  $Y_{(t)}$  usando il dominio della frequenza:

$$\mathbb{E}[Y_{(t)}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{(f)}|^2 S_{XX(f)} df$$

dove  $S_{XX(f)}$  é la Densità di potenza spettrale:

$$S_{XX(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX(\tau)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

ma perché menziona la potenza?

$$\begin{aligned} P_x &= \mathbb{E}[X^2] = R_{X(0)} \stackrel{ATCF[S_{X(f)}]}{=} \int_{-\infty}^{\infty} S_{X(f)} e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{X(f)} df \end{aligned}$$

trovo la relazione per l'uscita  $Y_{(t)}$ :

$$\frac{X_{(t)}}{S_{X(t)}} \rightarrow \boxed{LTI : h_{(t)}} \frac{X_{(t)}}{S_{Y(t)}}$$

$$\begin{aligned} S_{Y(f)} &= TCF[R_X] = TCF[R_{X(\tau)} \otimes h_{(\tau)} \otimes h_{(-\tau)}] \stackrel{6.4.8}{=} S_{X(f)} H_{(f)} H_{(-f)} \\ &\stackrel{6.3.1}{=} S_{X(f)} H_{(f)} H_{(f)}^* = S_{X(f)} |H_{(f)}|^2 \end{aligned}$$

trovo che la densità spettrale di potenza di  $Y_{(t)}$  é la densità spettrale di potenza di  $X_{(t)}$  per il modulo quadro della risposta del filtro e la sua misura é in watt per hertz ( $W/Hz$ ).

## 10.4 Processo Gaussiano

Un processo  $Y_{(t)}$  é detto processo Gaussiano se la variabile aleatoria  $Y$  é una variabile aleatoria a distribuzione Gaussiana:

$$f_{Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

### Proprietá:

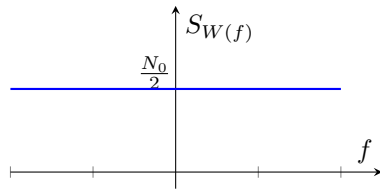
- Il processo stocastico creato da un fenomeno fisico solitamente é possibile ricondurlo a un modello Gaussiano.
- L'uso di un modello Gaussiano per un fenomeno fisico é spesso confermato dagli esperimenti.
- Il teorema del limite centrale (9.4.12) fornisce una giustificazione matematica per la distribuzione Gaussiana.

#### 10.4.1 Rumore Bianco

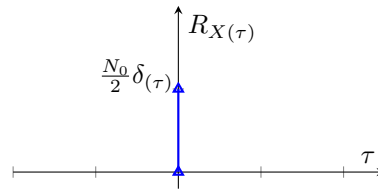
É una sorgente di rumore idealizzata in modo tale da rendere lo spettro di densità di potenza costante ( $\frac{N_0}{2}$ ), cioè indipendente dalla frequenza a cui operiamo. L'aggettivo "Bianco" deriva dall'ottica: un segnale di luce bianca contiene in ugual maniera tutte le frequenze all'interno dello spettro visivo. Ne possiamo dare una definizione approssimativa:

Il rumore bianco, identificato da  $W(t)$  é un processo stazionario con densità di potenza spettrale  $S_{W(f)}$  con valore costante in tutto l'intervallo delle frequenze:

$$S_{WW(f)} = \frac{N_0}{2} \quad \forall f$$



(a) Densità di potenza spettrale



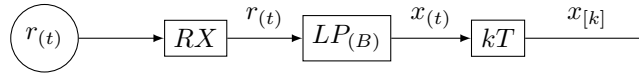
(b) Autocorrelazione

### Proprietá:

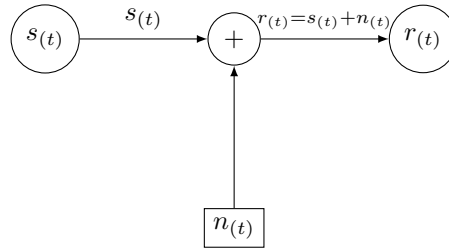
- Dato che  $R_{W(\tau)} = 0 \quad \forall \tau \neq 0$  ne segue che due differenti campionamenti del rumore bianco sono completamente incorrelati tra loro
- Se il rumore bianco é Gaussiano allora due campioni sono statisticamente indipendenti.
- Finché la banda di un processo del rumore in ingresso al sistema é ampiamente maggiore della banda del sistema stesso, allora possiamo modellare il rumore come un processo a rumore bianco.

### 10.4.2 Filtro passa basso ideale per rumore bianco

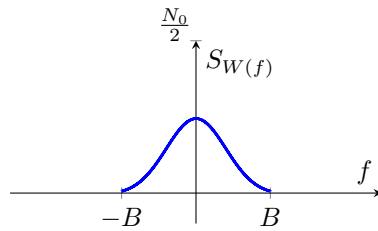
Supponiamo di avere un ricevitore:



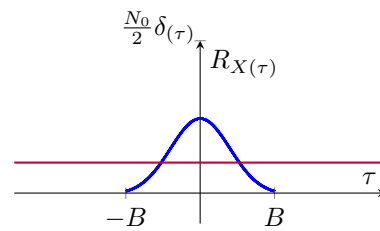
e un rumore additivo:



inviando un segnale  $s(t)$  con banda  $B$ :



(c) Trasmettitore



(d) Ricevitore:  $s(t) + n(t)$

il ricevitore si occupa adesso del filtraggio con un filtro passa basso di banda  $B$  ( $LP_{(B)}$ ), ritrovando il segnale originale ma con il rumore additivo:

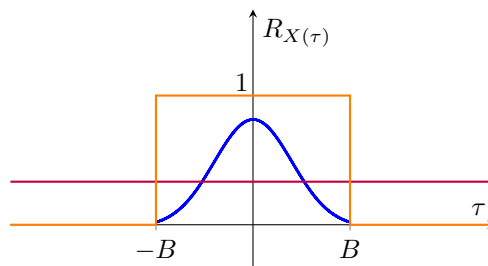


Figure 117:  $s(t)$ ,  $n(t)$ ,  $LP - filter$

in uscita dal filtro ho  $x_{(t)} = s_{(t)} + n_{(t)} \otimes h_{(t)}$  con la densità spettrale del rumore:

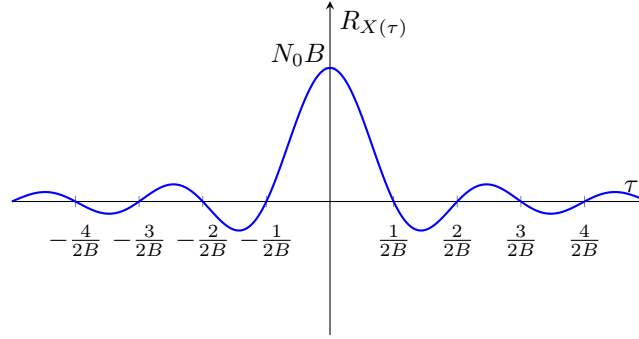
$$S_{W(f)} = S_{n(f)} |H_{(f)}|^2 = S_{n(f)}$$

Per ricostruire il segnale devo campionare con una  $f_s = \frac{1}{T_s} = 2B$  ( $kT$ ):

$$x[k] = x_{(t=kT)} = s[k] + w[k]$$

Cosa succede al rumore? Nel dominio della frequenza lo spettro di rumore filtrato,  $w[k]$ , è una somma di delta di dirac ho quindi  $S_{w(f)} = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$  trasformandola nel dominio del tempo, cioè calcolando la sua autocorrelazione per  $ATCF[S_{w(f)}] = R_{w(\tau)}$  ottengo  $R_{w(\tau)} = 2B\tau \text{sinc}(2B\tau)$ , campionandola con rispetto alla banda del filtro  $B$  in  $\frac{k}{2B}$  la *sinc* è sempre 0 rendendo le variabili del rumore Gaussiano statisticamente indipendenti a valore medio nullo e varianza  $N_0B$ .

$$R_{w(\tau)} \Big|_{\tau=kT} = \mathbb{E}[w_{(t)}w_{(t-\tau)}] \Big|_{\tau=kT} \stackrel{T=\frac{1}{2B}}{=} 0$$



per questo il modello  $Y = S + n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  è giusto per approssimare il rumore. Calcoliamone il valor medio e varianza:

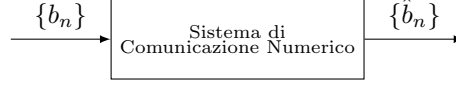
$$w_{(t)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$$

$$\sigma_w^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu_w = \mathbb{E}[X^2] = R_{w(0)} = N_0B$$

Ne segue che più la banda è elevata più rumore entra nel sistema.

## 11 Sistemi di Comunicazione

Un sistema di comunicazione numerico può essere approssimato a



Dove all'interno del sistema sono racchiusi il Trasmettitore ( $Tx$ ), il canale di trasmissione ( $c$ ) e il Ricevitore ( $Rx$ ). il sistema prende in ingresso dei bit, o un segnale analogico opportunamente nuemrizzato, e li trasmette su di un canale numerico inviandoli ad un ricevitore. Analizziamo la parte di trasmissione:

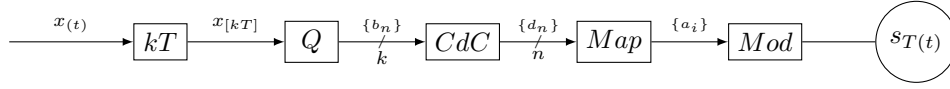


Figure 118: Esempio sistema di trasmettitore

- CdC: Codifica di Canale, si occupa di aggiungere ridondanza ai bit in ingresso per proteggerli da eventuali errori del canale di trasmissione ho di conseguenza che  $k < n$ , può essere preceduto da un eventuale codifica di sorgente.

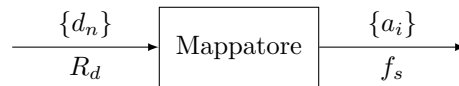


$R_b = \frac{1}{T_b}$  é il Bit Rate a cui i bit sono generati in ingresso mentre,  $R_d = \frac{1}{T_d}$  é il Bit Rate di uscita. Volendo trvare la relazione tra ingresso e uscita:

$$kT_b = nT_d \Rightarrow \frac{R_b}{R_d} = \frac{k}{n}$$

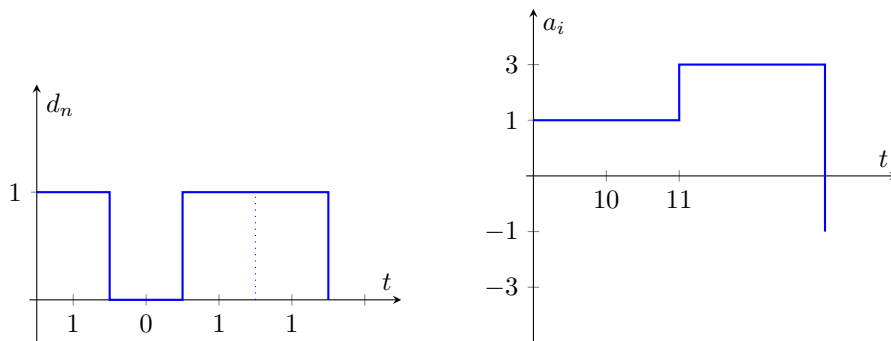
il quale é compreso tra  $0 < \frac{R_b}{R_d} \leq 1$  se cosí non fosse non introdurrei ridondanza, il rate in ingresso deve essere inferiore a quello di uscita o non potrei introdurre bit aggiuntivi.

- Map: Mappatore ( $M$ ), trasforma una *sequenza* di bit di codice  $\{d_n\}$  in una sequenza di simboli  $\{a_i\}$  appartenenti ad un alfabeto  $A$  costituito da  $M$  diversi simboli, dove  $M$  é tipicamente una potenza del 2. Ponendo  $M = 2^q$  il mappatore associa un simbolo di modulazione a ciascun blocco di  $Q$  bit di canale.



Ad esempio una mappa quaternaria:

$\{d_n\}$	$\{a_i\}$
00	-3
01	-1
10	1
11	3



il periodo  $T$  tra due *simboli* adiacenti viene detto "Intervallo di Segnalazione". Se  $M = 2^q$  allora:

$$T = qT_d = T_d \log_2(M)$$

la velocità di trasmissione dei simboli  $f_s = \frac{1}{T}$  è legata al rate  $R_d$  da:

$$f_s = \frac{R_d}{Q} = \frac{R_d}{\log_2(M)}$$

devo caricare velocemente i simboli in ingresso al mappatore per poter completare la sequenza da mappare. Si nota anche come all'aumentare della cardinalità  $M$  la velocità diminuisca, la sua misura è fatta in  $BAUD = \frac{\text{simboli}}{\text{sec}}$

- Mod: Modulatore converte la sequenza dei simboli  $\{a_i\}$  in un segnale analogico  $s_{T(t)}$  in modo tale da poter essere trasmesso sul canale di comunicazione. Può essere una modulazione **BB** o **BP**, in ogni caso la banda impiegata sarà:

$$B_T \simeq \frac{1}{T}$$

volendolo esprimere in relazione ai vari bit rate:

$$B_T = \frac{1}{T} \stackrel{T=qT_d}{=} \frac{1}{qT_d} = \frac{1}{T_d \log_2(M)} = \frac{R_b}{\frac{n}{k} \log_2(M)}$$

osserviamo come aumentando la cardinalità  $M$  della mappa riduco la banda, ciò é molto utile per poter occupare uno spettro limitato ma ridurla troppo comporta un aumento dell'errore. Invece un rate del codice  $\frac{n}{k}$  basso diminuisce le possibilità di errore ma aumenta la banda occupata, si tendono a usare codici che abbiano un rate vicino all'1.

Analizziamo la parte del ricevitore:



Figure 119: Esempio sistema ricevitore

Il segnale ricevuto  $r(t)$  viene demodulato dal demodulatore numerico, il quale ha il compito di fornire una stima dei simboli  $\{\hat{a}_i\}$  trasmessi. In seguito vengono demappati in modo da ottenere una stima di  $\{\hat{d}_n\}$  dei bit di codice. Infine passano nel decodificatore di canale la quale uscita fornisce una stima dei  $\{\hat{b}_n\}$  bit di informazione.

I vantaggi di un sistema di comunicazione numerico rispetto ad uno analogico sono:

- Una maggiore resistenza al rumore, dovuta all'alfabeto dei simboli limitato, che consente di prendere decisioni affidabili.
- La possibilità di utilizzare ripetizioni rigenerative anziché ripetizioni che amplificano semplicemente il segnale ricevuto, amplificando quindi sia il segnale utile che il rumore.
- La possibilità di utilizzare codici a correzione d'errore inserendo ridondanza nella sequenza di bit informativi.

## 11.1 Phase Amplitude Modulation - PAM

É una tipologia di sistema di comunicazione in [Banda Base](#), il cui segnale trasmesso  $s_{T(t)}$  ha densità spettrale di potenza centrata in 0. Il sistema PAM riceve in ingresso simboli di modulazione  $\{a_i\}$  provenienti dal mappaggio dei bit  $\{d_n\}$

### 11.1.1 Mappatore

Il mappatore ha come cardinalità una potenza del 2, abbiamo PAM con mappatura: binaria, quaternaria o ottale

$\{d_n\}$	$\{a_i\}$
0	-1
1	+1

(a) Mappa Binaria

$\{d_n\}$	$\{a_i\}$
00	-3
01	-1
10	+1
11	+3

(b) Mappa Quaternaria

$\{d_n\}$	$\{a_i\}$
000	-7
001	-5
010	-3
011	-1
100	+1
101	+3
110	+5
111	+7

(c) Mappa Ottale

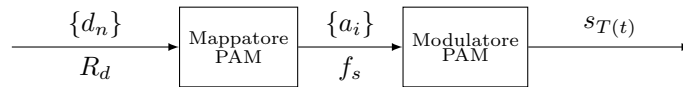
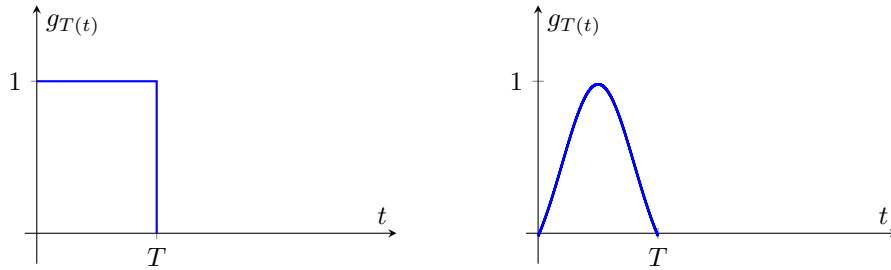


Figure 120: Sistema PAM

### 11.1.2 Modulatore

Il segnale PAM é una serie di impulsi che si susseguono in successione con un intervallo  $T = \frac{1}{f_s}$  e modulatori in ampiezza dei simboli  $\{a_i\}$ . Possiamo usare un qualsiasi impulso, che chiamiamo  $g_T(t)$ , basta che sia di durata finita:



se il segnale non fosse di durata finita  $T$  avrei sovrapposizione dei segnali (un po' come nella TDF 8.1 se campiono male), il modulatore calcola ad ogni istante il segnale

$$s_T(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)$$

nello schema a blocchi si riduce a



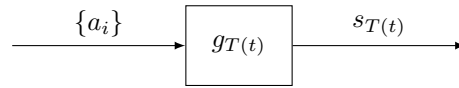
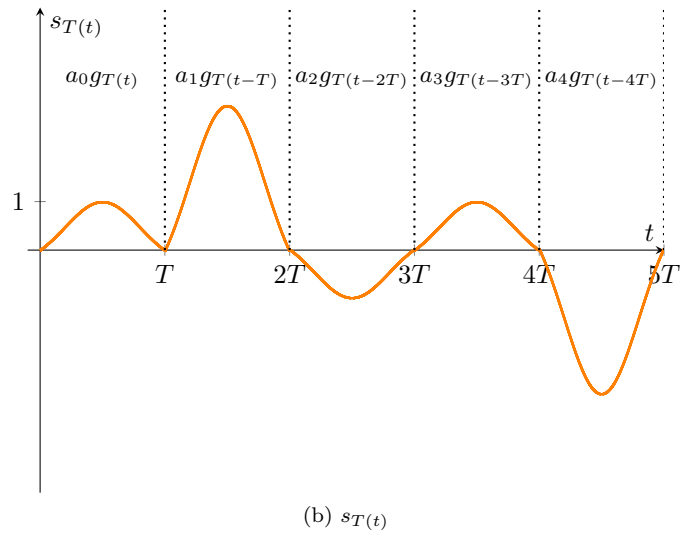
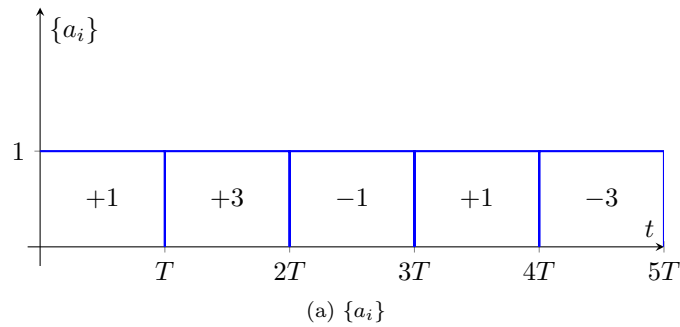
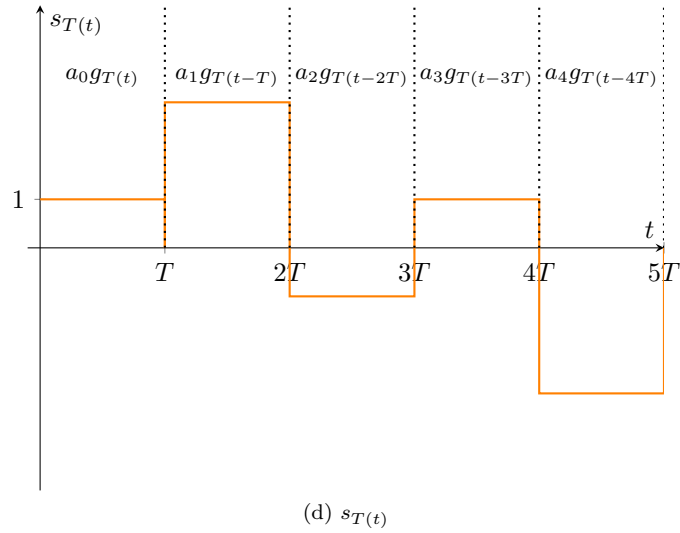
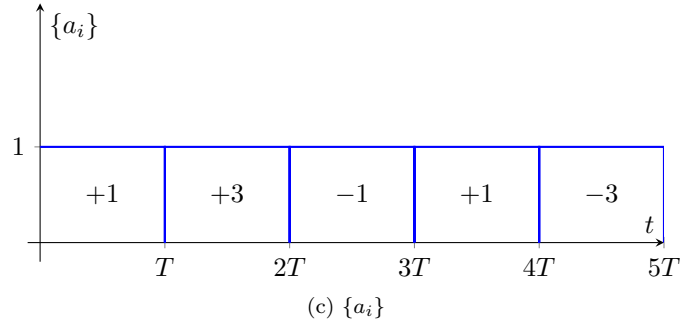


Figure 121: Modulatore PAM

ne possiamo fare un esempio con una sequenza di simboli  $\{a_i\} = \{+1, +3, -1, +1, -3\}$  e un impulso  $g_T(t)$  del secondo tipo:



se invece utilizzassimo delle funzioni  $g_T(t)$  rettangolari il segnale in uscita diventerebbe



dovendo analizzare il dominio frequenziale di  $s_{T(t)}$  sarebbero tutte delle *sinc* in [BB](#)

### 11.1.3 Densità spettrale di potenza

Volendo analizzare la banda del segnale in uscita al modulatore PAM potremmo pensare di utilizzare la *TCF*:

$$s_{T(t)} \stackrel{TCF6.6.3}{\rightleftharpoons} S_{T(f)}$$

$$s_{T(t)} = \sum_i a_i g_{T(t-iT)} \stackrel{TCF6.6.3}{\rightleftharpoons} \sum_i a_i G_{T(f)} e^{-j2\pi f iT}$$

ma non posso analizzare con la *TCF* le variabili aleatorie  $a_i$ . Posso allora calcolare la Densità spettrale di potenza (10.3.2). Ammettiamo che la sequenza di simboli di modulazione  $\{a_i\}$  sia SSL 10.3. La sua media é

$$\mu_a = \eta_a = \mathbb{E}[a_i]$$

e la sua funzione di autocorrelazione

$$R_{a(m)} = \mathbb{E}[a_i a_{i+m}]$$

ho la densità spettrale di potenza come

$$S_{s(f)} = \frac{1}{T} S_{a(f)} |G_{T(f)}|^2$$

$$S_{a(f)} = \sum_m R_{a(m)} e^{-j2\pi f m T}$$

la cui formula finale ricorda quella di un processo SSL  $S_{Y(f)} = S_{X(f)} |H_{(f)}|^2$ , in questo caso dipende dalla  $TCF$  del segnale  $g_{T(t)}$  e dalla autocorrelazione dei simboli.

#### 11.1.4 Potenza

Possiamo esprimere la potenza del segnale PAM come

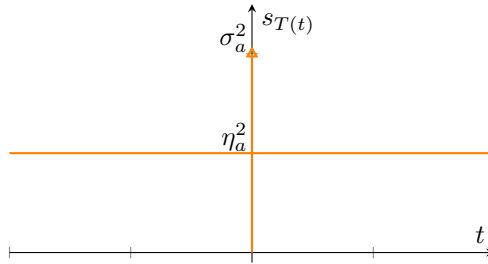
$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_{s(f)} df = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} S_{a(f)} |G_{T(f)}|^2 df$$

se i simboli  $\{a_i\}$  sono incorrelati ho:

$$R_{a(m)} = \begin{cases} \mathbb{E}\{a_i\} = \sigma_a^2 + \eta_a^2 & \text{se } m = 0 \\ \mathbb{E}\{a_i\} \mathbb{E}\{a_{i+m}\} = \eta_a^2 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$$

semplificando la notazione della funzione autocorrelazione diventa banalmente

$$R_{a(m)} = \eta_a^2 + \sigma_a^2 \delta_{(m)}$$



dalla quale possiamo ricavare la densità spettrale di potenza dei simboli

$$S_{a(f)} = \sigma_a^2 + \eta_a^2 \sum_m e^{-j2\pi f m T} \stackrel{8.0.4}{=} \sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T} \sum_k \delta_{(f - \frac{k}{T})}$$

mentre la densità spettrale di potenza del segnale

$$\begin{aligned}
S_{s(f)} &= \frac{1}{T} \left[ \sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T} \sum_k \delta_{(f - \frac{k}{T})} \right] |G_{T(f)}|^2 \\
&= \frac{1}{T} \sigma_a^2 |G_{T(f)}|^2 + \frac{\eta_a^2}{T^2} \sum_k \delta_{(f - \frac{k}{T})} |G_{T(f)}|^2 \\
&\stackrel{6.6.1}{=} \frac{1}{T} \sigma_a^2 |G_{T(f)}|^2 + \frac{\eta_a^2}{T^2} \sum_k \left| G_{T(\frac{k}{T})} \right|^2
\end{aligned}$$

la potenza si calcola quindi con

$$P_s = \frac{\sigma_a^2}{T} E_{g_T} + \frac{\eta_a^2}{T^2} \sum_k \left| G_{T(\frac{k}{T})} \right|^2$$

dove  $E_{g_T}$  per il Teorema di Parseval (7.5):

$$E_{g_T} = \int_{-\infty}^{\infty} |G_{T(f)}|^2 df$$

Possiamo osservare come una parte della potenza dipenda da una parte continua,  $\frac{\sigma_a^2}{T} E_{g_T}$ , e una parte discreta composta da un pettine di Delta di Dirac,  $\frac{\eta_a^2}{T^2} \sum_k \left| G_{T(\frac{k}{T})} \right|^2$ . nel caso di simboli incorrelati ( $\eta_a = 0$ ), e la parte continua dipende dal filtro con banda dimensionata rispetto a  $\frac{1}{T}$ , la banda del segnale trasmesso sarà quindi  $B_T \simeq \frac{1}{T}$ . La densità spettrale di potenza in caso  $\eta_a = 0$  diventa

$$S_{s(f)} = \frac{\sigma_a^2}{T} |G_{T(f)}|^2 = \frac{\mathbb{E}[a_i^2]}{T} |G_{T(f)}|^2 = \frac{R_{a(0)}}{T} |G_{T(f)}|^2$$

e di conseguenza la potenza

$$P_s = \frac{\sigma_a^2}{T} E_{g_T} = \frac{\mathbb{E}[a_i^2]}{T} E_{g_T} = \frac{R_{a(0)}}{T} E_{g_T}$$

#### 11.1.5 Potenza e Energia - caso IID

Consideriamo adesso un sistema PAM con simboli indipendenti ed identicamente distribuiti (IID)

$$\eta_a = 0 \quad \sigma_a^2 = \mathbb{E}[a_i^2] = \frac{M^2 - 1}{3}$$

con  $M$  la cardinalità del mappatore, risultano

- Densità spettrale di potenza:

$$S_{s(f)} = \frac{M^2 - 1}{3T} |G_{T(f)}|^2$$

- Potenza:

$$P_s = \frac{M^2 - 1}{3T} E_{gT}$$

- Energia media per simbolo: dato che l'energia é calcolata in un  $\Delta t$  posso ricavare l'energia del simbolo moltiplicando la potenza per  $T$

$$E_S = P_s T = \frac{M^2 - 1}{3} E_{gT}$$

- Energia media per bit: dato che l'energia é calcolata in un  $\Delta t$  posso ricavare l'energia del bit da trasmettere moltiplicando la potenza per  $T_d$

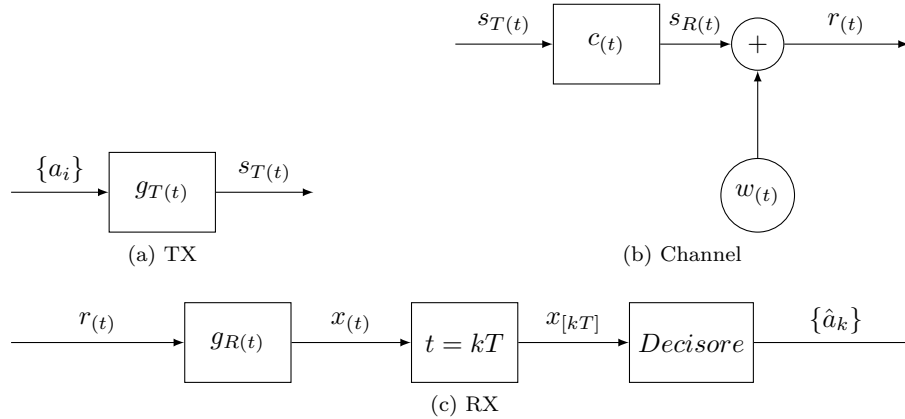
$$E_d = P_s T_d = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2(M)} E_{gT}$$

#### 11.1.6 Schema completo di un sistema di comunicazione PAM



Figure 122: Sistema PAM generico

i singoli componenti racchiudono



- $\{a_i\}$ : sequenza di simboli di modulazione, generati con frequenza  $f_s = \frac{1}{T}$  e appartenenti all'alfabeto

$$A = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1), \}$$

- $g_{T(t)}$ : impulso di trasmissione

- $c_{(t)}$ : risposta impulsiva del canale
- $w_{(t)}$ : rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza

$$S_{w(f)} = \frac{N_0}{2}$$

- $g_{T(t)}$ : filtro di ricezione
- $\{\hat{a}_k\}$ : stima dei simboli

Analizziamo come varia il segnale al passaggio dei vari stadi:

- Segnale trasmesso:

$$s_{T(t)} = \sum_i a_i g_{T(t-iT)}$$

- Segnale utile ricevuto:

$$s_{R(t)} = s_{T(t)} \otimes c_{(t)} = \sum_i a_i g_{TC(t-iT)}$$

con

$$g_{TC(t)} = g_{T(t)} \otimes c_{(t)}$$

- Segnale ricevuto:

$$r_{(t)} = s_{R(t)} + w_{(t)}$$

- Segnale in uscita dal filtro di ricezione:

$$x_{(t)} = r_{(t)} \otimes g_{R(t)} = \sum_i a_i g_{(t-iT)} + n_{(t)}$$

dove  $g_{(t)}$  é la risposta impulsiva globale del sistema

$$g_{(t)} = g_{TC(t)} \otimes g_{R(t)} = g_{T(t)} \otimes c_{(t)} \otimes g_{R(t)}$$

e la componente del rumore

$$n_{(t)} = w_{(t)} \otimes g_{R(t)}$$

esso é un processo Gaussiano a media nulla e densità spettrale di potenza

$$S_{n(f)} = \frac{N_0}{2} |G_{R(f)}|^2$$

- Componente ricevuta:

$$x_{[kT]} = \sum_i a_i g_{[(n-i)T]} + n_{[k]}$$

dove  $n_{[k]}$  é una variabile aleatoria Gaussiana a media nulla e varianza

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{R(f)}|^2 df = \frac{N_0}{2} E_{g_R}$$

essendo  $E_{g_R}$  l'energia di  $g_{R(t)}$ , con il cambio d'indice  $k-i = m$  il campione in uscita dal filtro di ricezione assume la forma

$$x_{[kT]} = \sum_m a_{k-m} g_{[mT]} + n_{[k]}$$

isolando il termine relativo  $m = 0$

$$x_{[kT]} = a_K g_{(0)} + \sum_{m \neq 0} a_{k-m} g_{[mT]} + n_{[k]}$$

Il campione  $x_{[kT]}$  viene utilizzato per prendere una decisione sul simbolo  $a_k$  il termine utile nella espressione di  $x_{[kT]}$  é

$$a_K g_{(0)}$$

il secondo termine che appare é il contributo di tutti i simboli di modulazione diversi da  $a_k$  e rappresenta un disturbo che si sovrappone al termine utile. Il disturbo descritto prende il nome di *Interferenza Intersimbolica* (ISI)

$$ISI = \sum_{m \neq 0} a_{k-m} g_{[mT]}$$

Notiamo come noi possiamo operare su:

- $g_T$  e  $g_R$  per agire in modo congiunto sull'interferenza intersimbolica con l'obbiettivo di renderla nulla
- $g_R$  agisce sul rumore termico  $S_{n(f)} = \frac{N_0}{2} |G_{R(f)}|^2$

Infine  $n_k$  é il contributo del rumore termico. Rispetto ai sistemi di comunicazione analogici nei sistemi di comunicazione numerici é presente un'altra forma di disturbo l'ISI, normalmente l'ISI ha ordini di grandezza molto superiori al rumore termico per cui bisogna eliminarlo.

### 11.1.7 Rimozione dell'ISI

Riprendendo l'equazione dell'ISI

$$ISI = \sum_{m \neq 0} a_{k-m} g_{[mT]}$$

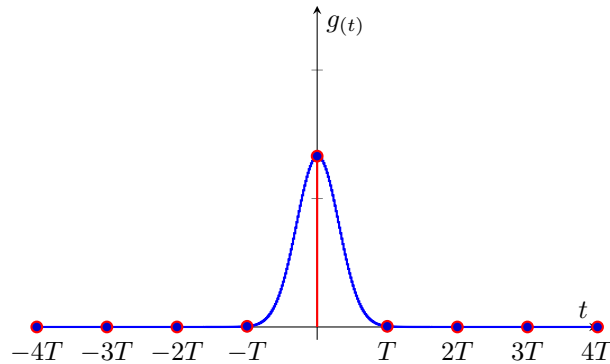
si nota come il suo completo annullamento é possibile imponendo le condizioni di Nyquist nel dominio del tempo

$$g_{[mT]} = \begin{cases} 1 & \text{per } m = 0 \\ 0 & \text{per } m \neq 0 \end{cases}$$

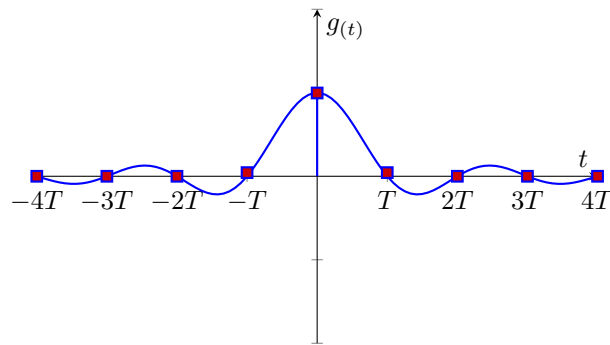
ricordiamo che  $g(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$ , allora l'espressione delle componenti ricevute diventa

$$x_{[kT]} = a_k + n_{[k]}$$

costituita dal simbolo trasmesso  $a_k$  e dal rumore  $n_k$ . Un impulso che soddisfa tali condizioni si dice *Impulso di Nyquist*. Sono quindi condizioni sufficienti, per  $g(t)$ , che sia nullo agli estremi dell'intervallo  $[-kT, kT]$  e che sia non nulla in  $t = 0$  allora soddisfano le condizioni di Nyquist



ma le condizioni ci dicono che anche un segnale che si annulla a intervalli di  $kT$  soddisfa le condizioni



ad esempio prendiamo  $g_R = g_T = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$  e il canale  $c(t) = \delta(t)$



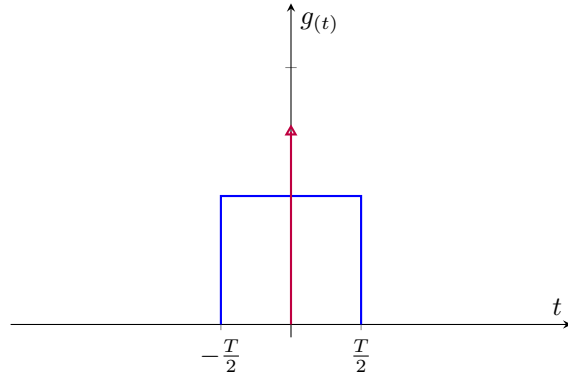


Figure 123:  $g_R = g_T, c(t)$

se ne calcolo il prodotto di convoluzione

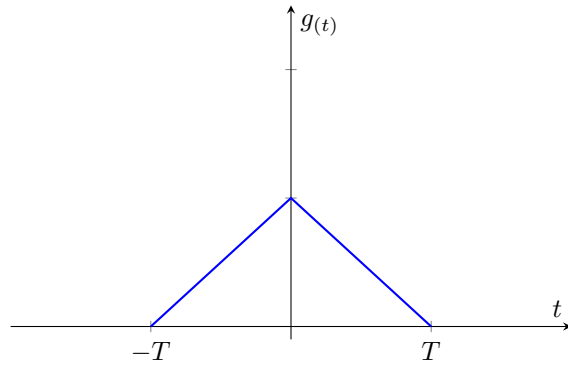


Figure 124:  $g(t)$

la quale  $g(t)$  soddisfa le condizioni di Nyquist.

**Condizioni di Nyquist - Dominio della frequenza** Traduciamo le condizioni di Nyquist nel dominio della frequenza. Partendo dalla trasformata di Fourier di  $g(t)$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

e la trasformata di  $g_{[mT]}$

$$\overline{G(f)} \stackrel{??}{=} \sum_m g_{[mT]} e^{-j2\pi f m T}$$

per le relazioni tra  $TCF$  e  $TDF$  (8.0.4)

$$\overline{G(f)} \stackrel{??}{=} \frac{1}{T} \sum_k G(f - \frac{k}{T})$$

se sono valide le condizioni di Nyquist

$$\begin{cases} g_{(0)} & m = 0 \\ 0 & \end{cases} \Rightarrow \overline{G_{(f)}} = g_{(0)}$$

ho solo il termine per  $m = 0$  e di conseguenza ho ISI nullo. Questo vuol dire che finché la somma delle ripetizioni della  $G_{(f)}$  a intervalli di  $\frac{1}{T}$  è uguale a una costante su tutto l'asse delle frequenze l'ISI è nullo. Un esempio con  $G_{(f)} = \text{triangoli}$ ,  $g_{(t)} = \text{sinc}^2$  con durata  $\frac{1}{2T}$

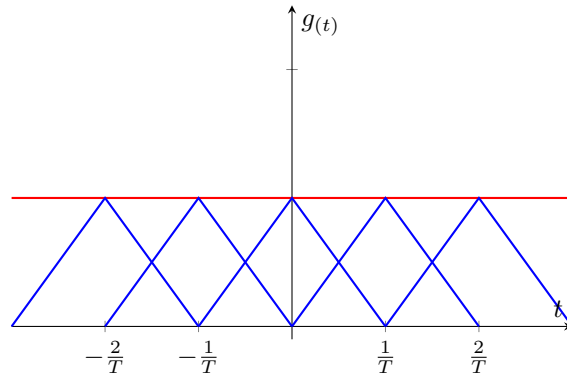


Figure 125:  $g_{(t)}$

ma non tutte le tipologie di triangoli ad esempio vanno bene, ad esempio se la durata fosse inferiore

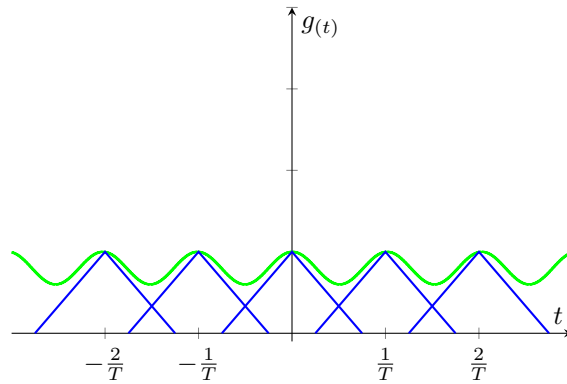


Figure 126:  $g_{(t)}$

**Banda Minima di Nyquist:** Le condizioni di Nyquist nel dominio della frequenza

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{(f-\frac{k}{T})} = T$$

indicano che una condizione *necessaria*, ma non sufficiente, affinché un impulso  $g(t)$  sia di Nyquist é che la sua trasformata di Fourier  $G_{(f)}$  abbia banda almeno pari a  $\frac{1}{2T}$ . Se cosí non fosse le ripetizioni della trasformata  $G_{(f)}$  nel dominio della frequenza sarebbe nulla in  $f = \frac{1}{2T}$  e non sarebbero piú soddisfatte le condizioni di Nyquist nel dominio della frequenza come ad esempio

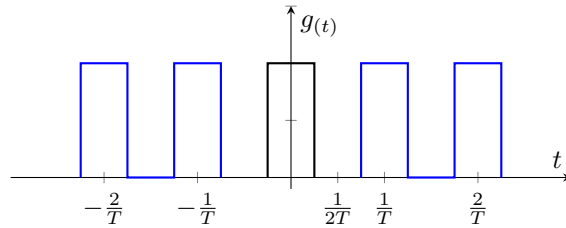
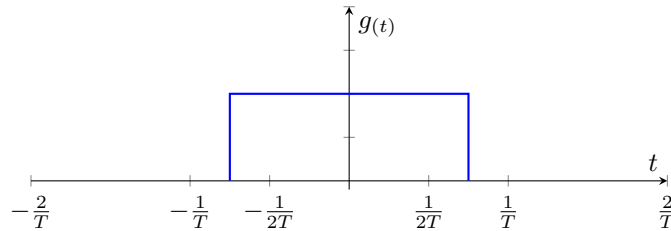
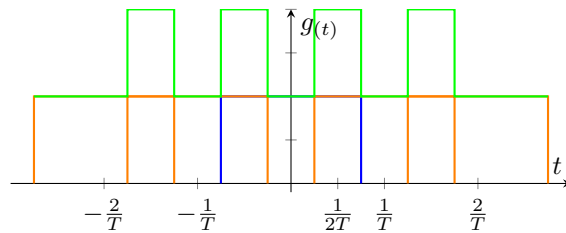


Figure 127:  $g(t)$

la banda  $B_N = \frac{1}{2T}$  é detta banda minima di Nyquist, é un condizione necessaria ma non sufficiente, per l'eliminazione di ISI, poiché se gli impulsi sono di banda maggiore a  $B_N$  la somma delle ripetizioni di  $G_{(f)}$  non é una costante



(a)  $g(t)$



(b)  $\sum G_{(f-\frac{k}{T})}$

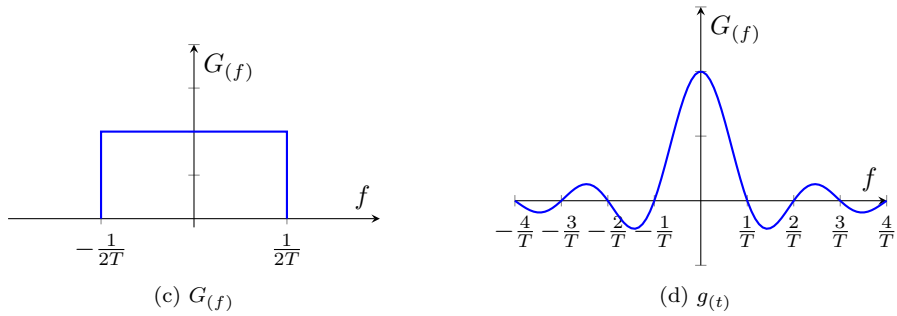
l'impulso quindi deve avere banda minima di Nyquist di solito viene identi-

ficato da una funzione con trasformata di Fourier rettangolare

$$G_{(f)} = g_{(0)} \text{rect}(fT)$$

e nel tempo

$$g_{(t)} = g_{(0)} \frac{1}{T} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$



**Dimensionamento di  $g_{(t)}$**  Riprendiamo il segnale in ricezione di un sistema PAM

$$x_{[k]} = \sum_m a_{k-m} g_{[mT]} + n_{[k]}$$

con

$$g_{(t)} = g_T(t) \otimes c_{(t)} \otimes g_R(t)$$

$$n_{[k]} = n_{(t=mT)} : S_{n(f)} = \frac{N_0}{2} |G_R(f)|^2$$

il decisore si basa sulla variabile  $a_k$

$$x_{[k]} = a_k g_{(0)} + \sum_{m \neq 0} a_{k-m} g_{[mT]}$$

dove:

- $a_k g_{(0)}$  é la componente utile
- $\sum_{m \neq 0} a_{k-m} g_{[mT]}$  é l'ISI, il quale si annulla per le condizioni di Nyquist:
  - Nel tempo:

$$g_{(mT)} = \begin{cases} g_{(0)} & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

- Nella Frequenza: faccio la  $TDF$  delle condizioni nel tempo

$$\overline{G_{(f)}} = g_{(0)} = \sum_k \frac{1}{T} G_{(f - \frac{k}{T})}$$

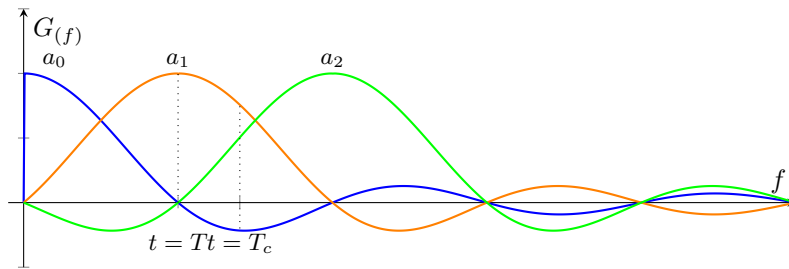
la quale é vera se la banda minima,  $B_{min}$ , di  $G_{(f)}$  é  $\frac{1}{2T}$ . La funzione che soddisfa tali condizioni é una *rect* che nel dominio del tempo é una *sinc*

in realtà non uso la *rect/sinc* per realizzare il dimensionamento della  $g(t)$

- In frequenza la *rect* é discontinua, é difficile realizzare le 2 spike a  $\pm \frac{1}{2T}$
- Nel dominio del tempo ho una *sinc* che é infinita, ed un eventuale errore di sincronizzazione (11.1.7) introduce ISI

Le ipotesi che abbiamo fatto fino ad ora implicano che il ricevitore riesca a campionare a istanti di tempo  $T$ , ma il  $T$  é un parametro che sceglie il trasmettitore, di conseguenza i due dispositivi si devono sincronizzare e decidere un  $T$ . Il ricevitore comunque non riesce a campionare precisamente a  $T$ , per motivi di trasmissione o non si sincronizza perfettamente, avrò un leggero delta di campionamento

$$T_c = T + \tau$$



se non campiono più a  $T$  ma a  $T_c$  avrò ISI. Per risolvere tali problemi si introduce l'impulso a coseno rialzato.

## 11.2 Impulso a coseno rialzato

Abbiamo visto come l'impulso rettangolare sia perfetto per soddisfare le Condizioni di Nyquist (11.1.7), in generale non viene realizzato tale impulso:

- Non é facilmente implementabile vista la discontinuità che  $G_{(f)}$  presenta in  $f = \pm \frac{1}{2T}$
- Ha lobi molto pronunciati nel dominio del tempo rendendo il sistema molto sensibile a errori di Sincronizzazione 11.1.7

per rimediare a tali problemi si utilizzano gli impulsi a coseno rialzato o detti Raised Cosine Roll-off (RCR). Essi costituiscono una famiglia di impulsi caratterizzati da un parametro  $\alpha \in [0, 1]$  detto *fattore di Roll-off*. La trasformata

di Fourier si presenta cosí

$$G_{RCR} = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi T}{\alpha} \left[ |f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right] \right) \right] & \frac{1-\alpha}{2T} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

una parte piatta di valore  $T$  che si estende fino alla frequenza  $\pm \frac{1-\alpha}{2T}$ . Dopo la parte piatta segue una zona di Roll-off che si estende nell'intervallo  $\frac{1-\alpha}{2T} < f \leq \pm \frac{1+\alpha}{2T}$  fino a scendere a 0. A  $f = \frac{1}{2T}$  il valore é sempre indipendente da  $\alpha$ :  $G_{RCR}(f) = \frac{T}{2}$ , mentre al variare di  $\alpha$ :

$$G_{RCR} = \begin{cases} \alpha = 0 & \text{É una rect } B_{\alpha=0} = \frac{1}{2T} \\ \alpha = 1 & \text{É un triangolo } B_{\alpha=1} = \frac{1}{T} \\ \alpha \neq \{0, 1\} & \text{Altro} \end{cases}$$

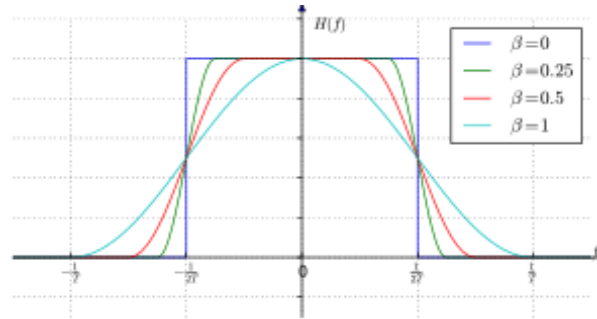


Figure 128: Funzione coseno rialzato:  $G_{RCR}(f)$

all'aumentare di  $\alpha$  la banda di nel dominio del tempo il coseno rialzato ha la forma

$$g_{RCR}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \frac{\cos\left(\alpha\pi \frac{t}{T}\right)}{1 - \frac{2\alpha t^2}{T^2}}$$

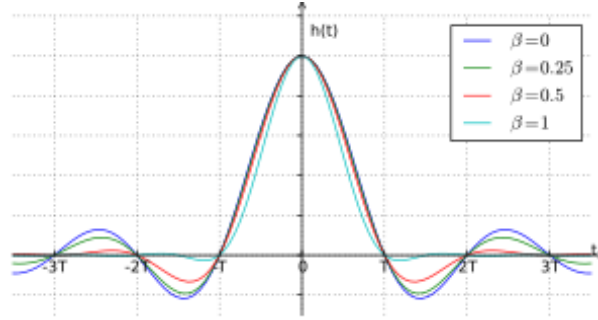


Figure 129: Funzione coseno rialzato:  $g_{RCR}(t)$

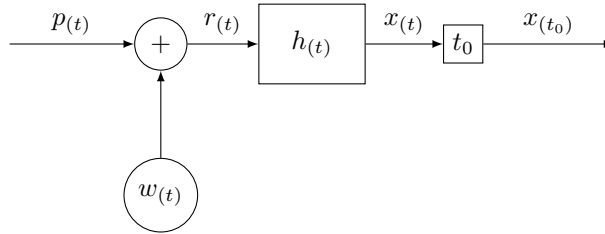
ricordando una *sinc* ma con lobi molto smorzati man mano che  $\alpha$  tende a 1.

Si sceglie il fattore di Roll-off tenendo conto sia della efficienza spettrale che migliora al decrescere di  $\alpha$ , dal dominio del tempo bisogna invece tener conto della sensibilità all'ISI che diminuisce al crescere di  $\alpha$ . Inoltre una proprietà del coseno rialzato é

$$g_{RCR(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{RCR(f)} df = 1$$

### 11.3 Filtro adattato

Ci poniamo adesso il problema del dimensionamento di  $g(t)$  in forma estesa, cioè dimensionando i filtri  $g_T(t), g_R(t)$  nelle ipotesi che il canale sia  $c(t) = \delta(t)$ . Il nostro obbiettivo é ridurre al minimo, se non eliminare, sia l'ISI che il rumore, per ottenere ciò si introduce il filtro adattato (Matched Filter). Il filtro risolve il seguente problema: preso un impulso  $p(t)$  di forma nota, immerso in rumore additivo bianco  $w(t)$  (anche non Gaussiano) con densità spettrale di potenza  $S_{w(f)} = \frac{N_0}{2}$ . Il segnale é inviato in ingresso ad un sistema lineare e tempo invariante con risposta impulsiva  $h(t)$  e campionato ad un istante  $t_0$ , ottenendo il campione  $x(t_0)$  come nel sistema di ricezione



Volgiamo quindi determinare  $h(t)$  in modo che sia massimo il rapporto seg-

nale/rumore (SNR) sul campione  $x_{t_0}$ . Abbiamo nel sistema

$$x(t) = p(t) \otimes h(t) + w(t) \otimes h(t) = s(t) \otimes n(t)$$

$$x(t) \Big|_{t=t_0} = s(t_0) + n(t_0)$$

esplicitando i valori

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\tau} p_{(t_0-\tau)} d\tau$$

$$n(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\tau} w_{(t_0-\tau)} d\tau$$

ricordiamo che  $n_0$  é una variabile aleatoria e calcolando l'SNR:

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{s_{t_0}^2}{\mathbb{E}[n_{(t_0)}^2]}$$

dove

$$\mathbb{E}[n_{(t_0)}^2] = R_{n(0)} \stackrel{TCF}{=} S_{n(f)} = S_{w(f)} |H_{(f)}|^2 = \frac{N_0}{2} |H_{(f)}|^2$$

$$\stackrel{ATCF}{=} \int_{-\infty}^{\infty} S_{n(f)} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H_{(f)}|^2 df$$

essendo  $H_{(f)}$  la trasformata di fourier di  $h_{(t)}$  e tenendo conto del teorema di Parseval ho

$$\mathbb{E}[n_{(t_0)}^2] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)}^2 dt$$

invece calcolando  $s_{(t_0)}^2$  lo dobbiamo scegliere  $h_{(t)}$  per massimizzare l'SNR e ridurre al minimo l'errore

$$SNR = \frac{s_{t_0}^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)}^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h_{\tau} p_{(t_0-\tau)} d\tau}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)}^2 dt}$$

$$\stackrel{Dsg.Swartz}{\leq} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h_{\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} p_{(t_0-\tau)} d\tau}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)}^2 dt} = \frac{2}{N_0} E_p$$

l'uguaglianza si ha se  $h_{(t)} = k p_{(t_0-t)}$  con  $k$  numero reale non nullo, ecco perché si chiama filtro adattato, poiché si adatta all'impulso  $p_{(t)}$  e massimizza il rapporto segnale rumore all'istante  $t_0$  quando il rumore é bianco e la risposta impulsiva del filtro é

$$h_{(t)} = p_{(t_0-t)}$$

cioé una versione del segnale  $p_{(t)}$  ribaltata e traslata di  $t_0$  come ad esempio

body

(a)

$p_{(t)}$

body

(b)

$p_{(t_0-t)}$



Si può ricavare la componente utile del segnale in uscita dal sistema

$$s_{(t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t_0 - t) dt = E_p$$

e la risposta in frequenza del filtro adattato

$$H_{(f)} = TCF[p_{(t_0-t)}] = P_{(f)}^* e^{-j2\pi f t_0}$$

con  $P_{(f)} = TCF[p_{(t)}]$ . Il modulo del filtro é

$$|H_{(f)}| = |P_{(f)}|$$

si osserva come nel dominio della frequenza il filtro adattato amplifichi le zone frequenziali dove  $|P_{(f)}|$  é maggiore (zona rapporto segnale rumore elevato) e attenui le zone frequenziali dove  $|P_{(f)}|$  é minore (zone a basso rapporto segnale rumore), si adatta al segnale.

### 11.3.1 Progettazione dei filtri di ricezione e trasmissione

Nella realtà il canale  $c_{(t)}$  é un canale distorcente diverso quindi da  $\delta_{(t)}$ , il dimensionamento di  $g_{T(t)}$  e  $g_{R(t)}$ . Tipicamente in pratica per il dimensionamento di  $g_{T(t)}$  e  $g_{R(t)}$  consiste nell'assumere il canale come  $c_{(t)} = \delta_{(t)}$  in modo tale che quando il canale non é distorcente il segnale venga trasmesso correttamente mentre se il canale diventa distorcente si prendereanno delle precauzioni al ricevitore per mitigare tali distorsioni. Supponiamo quindi che il canale sia  $c_{(t)} = \delta_{(t)}$  gli impulsi in ingresso al filtro di ricezione saranno del tipo

$$g_{TC(t)} = g_{T(t)} \otimes c_{(t)} = g_{T(t)}$$

e la risposta impulsiva globale del sistema PAM

$$g_{(t)} = g_{TC(t)} \otimes g_{R(t)} = g_{T(t)} \otimes g_{R(t)}$$

abbiamo 2 variabili,  $g_{T(t)}$  e  $g_{R(t)}$ , e dobbiamo rispettare 2 condizioni (é un problema di ricerca dell'ottimo):

1. Annullamento dell'ISI: Dobbiamo fare in modo che  $g_{(t)}$  sia un impulso che soddisfi le condizioni di Nyquist, tipicamente un impulso a coseno rialzato

$$G_{(f)} = G_{T(f)} \otimes G_{R(f)} = G_{RCR(f)}$$

2. Massimizzare il rapporto Segnale/Rumore sul campionario in uscita dal filtro di ricezione: si deve fare in modo che il filtro in ricezione  $g_{R(t)}$  sia adattato agli impulsi presenti al suo ingresso

$$g_{R(t)} = g_{T(-t)} \Rightarrow G_{R(f)} = G_{T(f)}^*$$

in caso il canale fosse  $c_{(t)} \neq \delta_{(t)}$

$$G_{R(f)} = G_{T(f)}^* = [G_{T(f)} C_{(f)}]^*$$

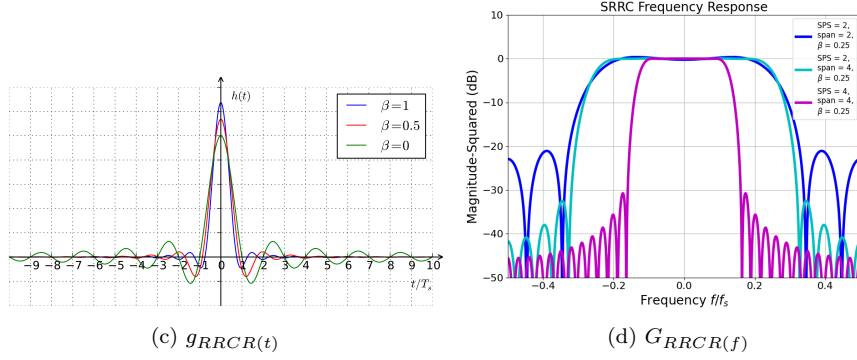
unendo le due condizioni

$$G_{RCCR}(f) = G_{T(f)} G_{T(f)}^* = |G_{T(f)}|^*$$

dato che la funzione coseno rialzato é reale e non negativa posso esprimere la  $G_{T(f)}$  come

$$G_{T(f)} = \sqrt{G_{RCCR}(f)} = G_{R(f)}$$

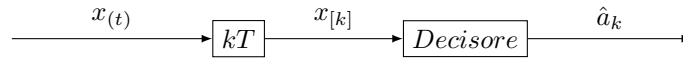
cioé le risposte in frequenza dei filtri in trasmissione e ricezione coincidono con la radice quadrata della funzione coseno rialzato. I corrispondenti impulsi nel dominio del tempo  $g_{T(t)}$  e  $g_{R(t)}$  sono detti *impulsi a radice di coseno rialzato* e con l'acronimo RRCR (Root raised cosine Roll-off). Si può notare come non siano impulsi di Nyquist ma la loro convoluzione invece si.



ha gli stessi punti di discesa e valori della funzione a coseno rialzato.

## 11.4 Circuito decisore

Siamo giunti al decisore del nostro sistema di comunicazione



il decisore riceve al suo ingresso il campione  $x[k]$  e lo utilizza per prendere una decisione sul simbolo trasmesso  $a_k$  usando il criterio di ottimalità.

**Criterio MAP** Il criterio che minimizza la probabilità di errore sul simbolo  $a_k$  é detto criterio MAP (Maximum A-posterior Probability), secondo tale criterio il simbolo da scegliere all'interno dell'alfabeto  $\mathcal{A} = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(M)}\}$  é quello che ha la massima probabilità a posteriori di essere stato trasmesso, cioè dopo aver osservato il campione  $x[k]$ . Il criterio MAP sancisce quindi

$$P_r[a_k = a^{(i)} | x[k]]$$

la probabilità di aver trasmesso  $\hat{a}_k = a^{(i)}$  nell'ipotesi di aver ricevuto  $x_{[k]}$ , questa sarà

$$P_r[a_k = a^{(i)}|x_{[k]}] \leq P_r[a_k = a^{(\ell)}|x_{[k]}] \quad \forall i \neq \ell \in \{1, 2, \dots, M\}$$

é minore della probabilità di scegliere un simbolo  $a^{(\ell)}$  sbagliato. Voglio massimizzare la probabilità di corretta ricezione

$$P_r[a_k = a^{(i)}|x_{[k]}] = \frac{f_x[x_{[k]}|a_k = a^{(i)}]P_r[a_k = a^{(i)}]}{f_x[x_{[k]}]}$$

dove  $f_x[x_{[k]}]$  é la funzione densità di probabilità del campione  $x_{[k]}$ , é come la probabilità di Bayes (9.3.3) ma con la densità di probabilità ( $f_{dp}$ ). Posso analizzare solo il numeratore poiché dipende dal simbolo trasmesso, definisco quindi

$$\gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})} = f_x[x_{[k]}|a_k = a^{(i)}]P_r[a_k = a^{(i)}]$$

ho  $\hat{a}_k = a^{(i)}$  se

$$\gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})} > \gamma_{(a^{(\ell)}, x_{[k]})}$$

se il numeratore della probabilità di corretta ricezione é maggiore di quello di sbagliata ricezione, analizzo i due numratori nelle ipotesi di

- ISI= 0
- $c_{(t)} = \delta_{(t)}$  oppure  $c_{(t)} = A\delta_{(t-\tau)}$ , non cambia tra i due il secondo tipo di canale campiona a  $kT + \tau$  che é il segnale ritardato
- $g_{(t)} = g_{TxRCR(t)} \otimes g_{RxRCR(t)} + n_{[k]}$

Ho quindi

$$x_{[k]} \stackrel{ISI=0}{=} a_k g_{(0)} + n_{[k]} = a_k + (n_{[k]} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2))$$

dove

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{n(f)} df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{R(f)}| df = \frac{N_0}{2}$$

e la funzione densità di probabilit 

$$f_x[x_{[k]}|a_k = a^{(i)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(x_{[k]} - a^{(i)})^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$x_{[k]}|a_k = a^{(i)} \sim \mathcal{N}(a^{(i)}, \sigma_n^2)$$

$$f_x[x_{[k]}|a_k = a^{(i)}] = \Gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})}$$

massimizziamo adesso  $\gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})}$  con l'ipotesi che i simboli siano equiprobabili  $P_r[a^{(i)}] = \frac{1}{M}$ . Allora nache il termine  $P_r[a_k = a^{(i)}]$  diventa trascurabile per la massimizzazione, ne rimane quindi solo da massimizzare

$$\Gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})} > \Gamma_{(a^{(\ell)}, x_{[k]})}$$

essendo funzioni monotone decrescenti posso farne il logaritmo naturale

$$\begin{aligned} \ln \left( \Gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})} \right) &> \ln \left( \Gamma_{(a^{(\ell)}, x_{[k]})} \right) \\ -\frac{(x_{[k]} - a^{(i)})^2}{2\sigma_n^2} - \ln \left( \sqrt{2\pi}\sigma_n \right) &> -\frac{(x_{[k]} - a^{(\ell)})^2}{2\sigma_n^2} - \ln \left( \sqrt{2\pi}\sigma_n \right) \\ \left( x_{[k]} - a^{(i)} \right)^2 &< \left( x_{[k]} - a^{(\ell)} \right)^2 \end{aligned}$$

il risultato trovato é la distanza euclidea del simbolo ricevuto minore della distanza euclidea da qualsiasi altro simbolo. Se questa disuguaglianza é vera, é il criterio chiamato a distanza minima euclidea o a massima verosomiglianza, valido solo se i simboli sono equiprobabili. Ho due criteri

$$MAP \xrightarrow{\text{Se equiprobabili}} \text{Massima verosomiglianza}$$

nel caso MAP massimizzo la funzione  $\gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})}$ , nel caso a massima verosomiglianza massimizzo la  $\Gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})}$ . In caso di simboli non equiprobabili si arriva alla funzione

$$\Gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})} = \left[ x_{[k]} - a^{(i)} \right]^2 - 2\sigma^2 \ln(P_i)$$

con  $P_i$  probabilità a priori del simbolo  $a^{(i)}$

#### 11.4.1 Zone di decisione

Il criterio MAP suddivide l'asse reale in *zone di decisione*, ciascuna associata a un determinato simbolo dell'alfabeto  $\mathcal{A}$ . Indichiamo con  $\mathcal{Z}^{(m)}$  la zona di decisione associata al simbolo  $a^{(m)} \in \mathcal{A}$ , essa é definita come

$$\mathcal{Z}^{(m)} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \Gamma_{(a^{(m)}, x_{[k]})} < \Gamma_{(a^{(\ell)}, x_{[k]})}, a^{(\ell)} \in \mathcal{A} \vee a^{(\ell)} \neq a^{(m)} \right\}$$

per cui la decisione  $\hat{a}_k$  viene presa a favore del simbolo  $a^{(i)}$  solo se  $x_{[k]} \in \mathcal{Z}^{(i)}$ . Il decisore altro non é che un comparatore di  $x_{[k]}$  con delle soglie in modo da individuare la zona di decisione di  $x_{[k]}$ .

**Esempio PAM**  $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$  Prendiamo in esempio una PAM con alfabeto  $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$  e sia

$$p = P_r[a_k = -1] \text{ e } 1 - p = P_r[a_k = +1]$$

scegliamo il decisore sulla base del criterio MAP e ipotizziamo di dover scegliere per il simbolo  $\hat{a}_k = +1$  se

$$\Gamma_{(+1, x_{[k]})} < \Gamma_{(-1, x_{[k]})}$$

svolvendo i calcoli nel caso di simboli non equiprobabili

$$\begin{aligned} [x_{[k]} - 1]^2 - 2\sigma^2 \ln(1-p) &< [x_{[k]} + 1]^2 - 2\sigma^2 \ln(p) \\ x_{[k]} &> \frac{\sigma^2}{2} \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \lambda \end{aligned}$$

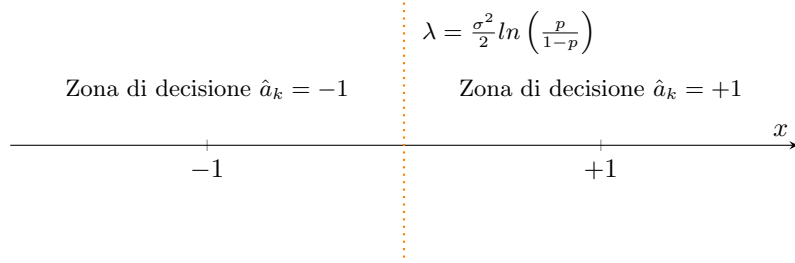
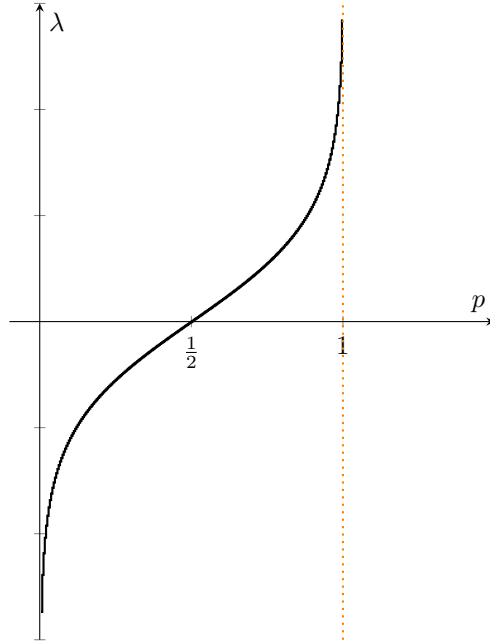


Figure 130: Zone di decisione PAM  $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$

l'asse é stato suddiviso in due zone di decisione e la soglia  $\lambda$  dipende da  $\sigma^2$  e  $p$ . Possiamo anche analizza l'andamento di  $\lambda$  al variare di  $p$  fissato un valore di  $\sigma$



come si vede nel caso di simboli equiprobabili  $p = \frac{1}{2}$  la soglia vale  $\lambda = 0$ , mentre assume valori positivi se la probabilità del simbolo  $\hat{a}_k = -1$  é  $p > \frac{1}{2}$  ha

maggiore probabilità a priori di essere trasmesso. Il decisore tende a privilegiare la decisione sul simbolo che ha maggiore probabilità a priori di essere trasmesso, allargandone opportunamente la relativa zona di decisione.

Consideriamo il caso pratico in cui i simboli dall'alfabeto  $\mathcal{A} = \{a^{(1)}, \dots, a^{(M)}\}$  siano equiprobabili

$$P_m = \frac{1}{M} \quad m = 1, \dots, M$$

in questo caso il termine  $-2\sigma^2 \ln(P_m)$  non dipende da  $a^{(m)}$  e diventa trascurabile per la decisione di  $a_k$ , il criterio di decisione si riduce alle distanze euclidee e il criterio a *massima verosomiglianza*,  $\hat{a}_k = a^{(i)}$  se

$$\Gamma_{(a^{(i)}, x_{[k]})} < \Gamma_{(a^{(\ell)}, x_{[k]})}$$

che diventano

$$\left(x_{[k]} - a^{(i)}\right)^2 < \left(x_{[k]} - a^{(\ell)}\right)^2$$

in caso di simboli equiprobabili possiamo notare che le soglie di decisione siano posizionate esattamente a metà tra i due simboli adiacenti dell'alfabeto, ad esempio in un sistema PAM quaternario

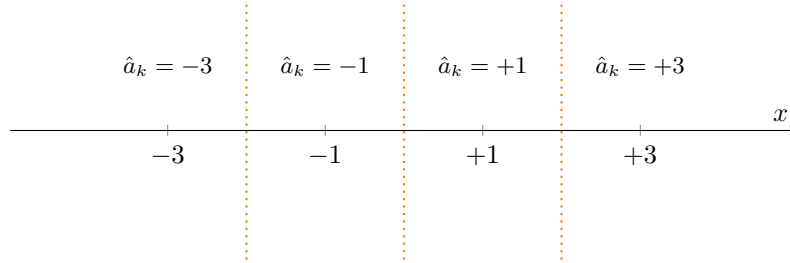


Figure 131: Zone di decisione 4-PAM  $\mathcal{A} = \{-3, -1, +1, +3\}$

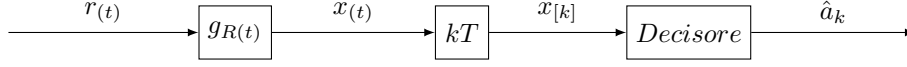
il simbolo deciso dall'alfabeto  $\mathcal{A}$  sarà pertanto quello che ha distanza euclidea minore rispetto al campione  $x_{[k]}$  ricevuto. Il criterio a massima verosomiglianza quindi minimizza l'errore in caso di simboli equiprobabili e a discapito della conoscenza di  $\sigma$  e la probabilità dei simboli, possiamo anche utilizzarlo in caso di simboli non equiprobabili fornendoci una soluzione sub-ottima.

#### 11.4.2 Calcolo della SER per un sistema PAM M-ario

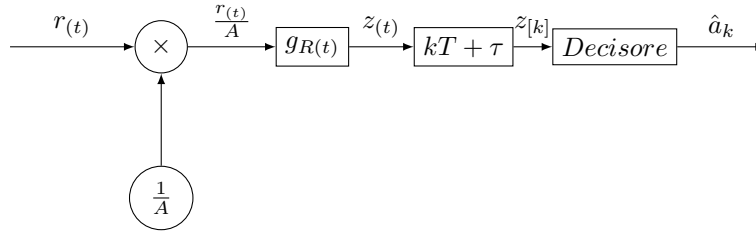
Consideriamo un sistema PAM con alfabeto M-ario

$$\mathcal{A} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

il sistema M-PAM ottiene  $x_{[k]} = Aa_k + n_{[k]}$ , vogliamo calcolare la probabilità media di errore sul simbolo deciso ammettendo che i simboli siano equiprobabili, in assenza di ISI all'ingresso del ricevitore così fatto



supponiamo che i filtri in trasmissione e ricezione siano entrambi a radice di coseno rialzato. Il problema di questa approssimazione del sistema é che si suppone un canale di trasmissione  $\delta(t)$  quando in realtà si approssima meglio con  $A\delta(t-\tau)$ , dobbiamo quindi campionare a  $kT + \tau$  e scalare per  $A$ , valori che saranno opportunamente ricevuti al momento della sincronizzazione, il sistema diventa



dove  $z[k] = \frac{x[k]}{A} = a_k + \frac{n[k]}{A}$  il rumore é quindi  $\simeq \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{A^2})$ , se calcoliamo la varianza nel caso della PAM con simboli indipendenti

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{A^2} = \frac{N_0}{2} \frac{M^2 - 1}{3E_s} = \frac{M^2 - 1}{6(\frac{E_s}{N_0})}$$

Se non scalassi per il fattore  $A$  le zone di decisione dovrebbero adattarsi al valore di  $A$ . Il decisore suddivide l'asse  $x$  in zone di decisione, come mostrato in figura 131, con le soglie poste esattamente a metà tra due simboli adiacenti nel caso di simboli equiprobabili

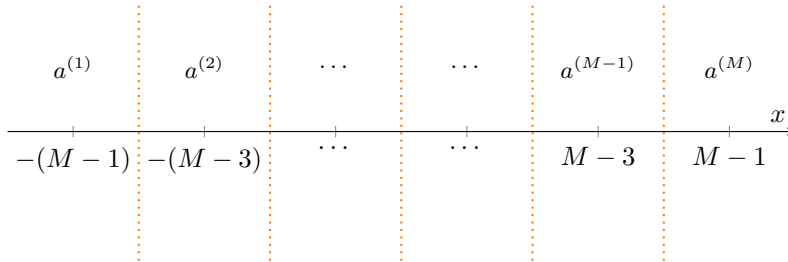


Figure 132: Zone di decisione M-PAM  $\mathcal{A} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$

usando il teorema della probabilità totale possiamo esprimere la SER (Symbol Error Rate)

$$SER = \sum_{i=1}^M P[e|a^{(m)}] P_r[a_k = a^{(i)}]$$

dove

$$P[e|a^{(m)}] = P_r[\hat{a}_k \neq a_k | a_k = a^{(m)}]$$

nell'ipotesi di simboli equiprobabili

$$SER = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P[e|a^{(m)}]$$

restan quidi da calcolare le  $M$  probabilità condizionate  $P[r|a^{(m)}]$  per  $m = 1, \dots, M$ . L'analisi dell'alfabeto  $\mathcal{A}$  e le zone di decisione si può eveincere come i simboli nelle zone di decisioni esterne ( $\pm(M-1)$ ) abbiano la stessa probabilità, come anche i simboli interni  $\{\pm 1, \dots, \pm(M-3)\}$  abbiano tra di loro la stessa probabilità. Ne segue che possiamo calcolare solo due probabilità, ad esempio

$$P[e|a^{(m)}] = P[e|a_k = 1] \text{ se } a^{(m)} \in \{\pm 1, \dots, \pm(M-3)\}$$

$$P[e|a_k = -M+1] = P[e|a_k = M-1] \text{ se } a^{(m)} \in \{\pm(M-1)\}$$

da cui ricaviamo la SER finale del sistema

$$SER = \frac{M-2}{M} P[e|a_k = 1] + \frac{2}{M} P[e|a_k = M-1]$$

dove i coefficienti moltiplicativi sono quanti simboli hanno la relativa probabilità, ricordiamoci che possiamo fare così solo perché la costellazione lo permette, magari in casi diversi potrei avere più termini. Il nostro simbolo trasmesso é quindi caratterizzato da

$$z[k] = a[k] + \eta[k]$$

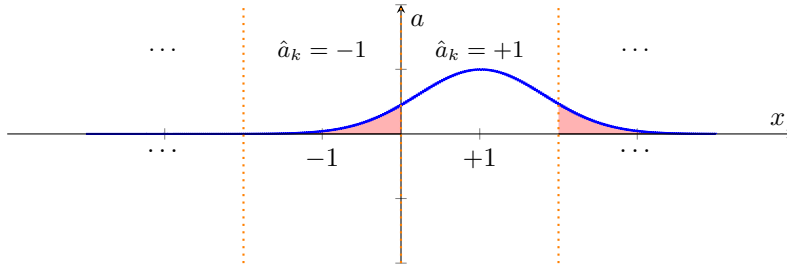
con  $\eta[k] = \frac{n[k]}{A} \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{A^2}) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$ , per un generico simbolo la sua probabilità di errore é espressa come

$$P_{err} = Q\left(\frac{\lambda - a^{(m)}}{\sigma}\right)$$

dove  $\lambda - a^{(m)}$  indica la distanza dalla soglia. Calcoliamo le probabilità di errore condizionale:

1. Calcolo di  $P[e|a_k = 1]$  Supponiamo sia stato inviato il simbolo  $a_k = 1$  il campione ricevuto é

$$z[k] = 1 + \eta[k]$$





notiamo come l'errore é presente quando il simbolo non é compreso all'interno dell'intervallo

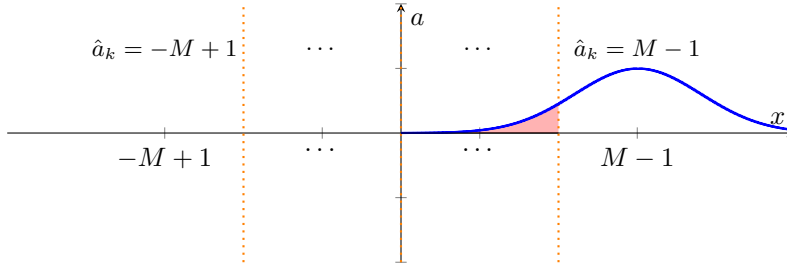
$$\begin{aligned} P[e|a_k = 1] &= P_r[z_{[k]} < 0 \cup z_{[k]} > 2] = P_r[1 + \eta_{[k]} < 0 \cup 1 + \eta_{[k]} > 2] \\ &= P_r[\eta_{[k]} < -1 \cup \eta_{[k]} > 1] \end{aligned}$$

potremmo calcolare l'integrale della distribuzione di probabilità ma utilizziamo la funzione  $Q$ , gli intervalli di errore esterni sono uguali quindi possiamo calcolare  $Q$  solo nel punto destro

$$P[e|a_k = 1] = 2Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right)$$

2. Calcolo di  $P[e|a_k = M - 1]$  Supponiamo di aver trasmesso il simbolo  $a_k = M - 1$ , il campione é caratterizzato da

$$z_{[k]} = M - 1 + \eta_{[k]}$$



ho errore quando il simbolo non rientra nella semiretta  $[M - 2, +\infty]$

$$\begin{aligned} P[e|a_k = M - 1] &= P_r[z_{[k]} < M - 2] = P_r[M - 1 + \eta_{[k]} < M - 2] = P_r[\eta_{[k]} < -1] \\ &= P_r[\eta_{[k]} > 1] \end{aligned}$$

dalla figura possiamo ricavare la probabilità di errore

$$\begin{aligned} P[e|a_k = M - 1] &= 1 - Q\left(\frac{\lambda - a^{(m)}}{\sigma_\eta}\right) = 1 - Q\left(-\frac{1}{\sigma_\eta}\right) \\ &= Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right) \end{aligned}$$

Sostituendo i risultati ottenuti nella formula della SER

$$\begin{aligned} SER &= \frac{M-2}{M} 2Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right) + \frac{2}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right) \\ &= \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right) \end{aligned}$$

se la vogliamo esprimere in funzione del valore di  $\sigma_\eta = \frac{\sigma_n^2}{A^2} = \frac{N_0}{2A^2}$

$$SER = \frac{2(M-1)}{M} Q \left( \sqrt{\frac{2A^2}{N_0}} \right)$$

Vogliamo adesso esprimere la SER in funzione dell'energia del segnale ricevuto, prendiamo il segnale ricevuto non filtrato

$$r(t) = S_{R(t)} + w(t) = \sum_i A a_i g_{T(t-iT)} + w(t)$$

la cui densità spettrale di potenza é espressa come

$$S_{R(f)} = \frac{A}{T} S_{a(f)} |G_{T(f)}|^2$$

se i simboli sono indipendenti ed equiprobabili e sono nel caso di una PAM posso esprimere densità spettrale di potenza dei simboli come

$$\begin{aligned} S_{a(f)} &= \sum_m R_{a(m)} e^{-j2\pi f m T} = R_{a(0)} \\ &= E[a_m^2] = \frac{M^2 - 1}{3} \end{aligned}$$

allora  $S_{R(f)}$  diventa

$$S_{R(f)} = \frac{A}{T} \frac{M^2 - 1}{3} |G_{T(f)}|^2$$

dalla quale possiamo calcolare l'energia dei simboli moltiplicando per  $T$  o dei bit moltiplicando per  $T_d$

$$E_{simboli} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{R(f)} df \stackrel{11.2}{=} A^2 \frac{M^2 - 1}{3}$$

$A$  può essere quindi espresso in funzione dell'energia dei simboli

$$A^2 = \frac{3E_{simboli}}{M^2 - 1}$$

la SER espressa tramite l'energia del simbolo ricevuto é

$$SER = \frac{2(M-1)}{M} Q \left( \sqrt{\frac{6E_{simboli}}{(M^2 - 1)N_0}} \right)$$

nel caso di una PAM binaria

$$SER \stackrel{M=2}{=} Q \left( \sqrt{\frac{2E_{simboli}}{N_0}} \right)$$

### 11.4.3 Efficienza spettrale ed efficienza energetica

Abbiamo visto come l'impulso di trasmissione  $g_{T(t)}$  impiegato in un sistema PAM sia tipicamente un impulso a Radice di Coseno Rialzato (3). Nel caso di simboli indipendenti ed equiprobabili, la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso é

$$S_{s(f)} = \frac{M^2 - 1}{3T} |G_{T(f)}|^2 = \frac{M^2 - 1}{3T} G_{RCR(f)}$$

per cui la banda impiegata dal segnale PAM é

$$B_s = \frac{1 + \alpha}{2T}$$

e dipende sia dal fattore di Roll-off,  $\alpha$ , che dalla frequenza di segnalazione  $f_s = \frac{1}{T}$

**Efficienza Spettrale:** l'efficienza spettrale del sistema PAM é definita da

$$\eta_{sp} = \frac{R_d}{B_T} \left[ \frac{bit}{Hz} \right]$$

dove  $R_d = \frac{\log_2(M)}{T}$  é il bit-rate, ho quindi nel caso di impulsi  $RCR$  nella PAM

$$\eta_{sp} = \frac{2\log_2(M)}{1 + \alpha} \left[ \frac{bit}{Hz} \right]$$

questo indica come l'efficienza spettrale del sistema aumenta al crescere della cardinalità  $M$  dell'alfabeto.

**Efficienza Energetica:** Per valutare l'efficienza energetica del sistema occorre analizzare le curve della SER al variare del rapporto  $\frac{E_{simboli}}{N_0}$ .



Figure 133: Scala logaritmica SER

La SER é espressa in scala logaritmica ed il rapporto  $\frac{E_{simboli}}{N_0}$  é espresso in  $db$ . Viene solitamente fissata una probabilità di errore obbiettivo stabilita in base all'applicazione, il rapporto  $\frac{E_{simboli}}{N_0}$  richiesto per raggiungere la SER obbiettivo cresce al crescere della cardinalità  $M$ . Questo riduce come l'efficienza energetica del sistema diminuisca al crescere di  $M$ , entra più rumore. Concludiamo che la scelta dell'alfabeto  $\mathcal{A}$  é vincolata da due esigenze contrastanti: da un

lato sarebbe bene scegliere una carinalità  $M$  elevata per aumentarne l'efficienza spettrale, dall'altro lato la scelta di un valore  $M$  elevato peggiora l'efficienza energetica del sistema.

**Perdita Energetica:** Si definisce perdita energetica di un sistema di comunicazione numerico  $A$  rispetto ad un sistema  $B$  l'aumento (in  $db$ ) del rapporto  $\frac{E_{simboli}}{N_0}$  necessario al sistema  $A$  per raggiungere la stessa SER del sistema  $B$ . Un esempio mostrato in figura evince la perdita del sistema 4-PAM rispetto al sistema 2-PAM.



Figure 134: differenza log 4PAM e 2PAM

Calcoliamo la perdita in modo analitico basta eguagliare le SER della 4-PAM e della 2-PAM ottenendo

$$\frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{M=4}}\right) = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{M=2}}\right)$$

solitamente si tende a trascurare eventuali coefficienti moltiplicativi, potendo così confrontare direttamente l'argomento della funzione  $Q$

$$\frac{4}{5}\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{M=4} = 2\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{M=2}$$

la perdita del sistema 4-PAM rispetto al sistema 2-PAM é in  $db$

$$L\Big|_{db} = 10\log_{10}\left(\frac{\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{M=4}}{\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{M=2}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 4db$$

cioé comporta che la curva di SER per la 4-PAM é praticamente la stessa del sistema 2-PAM, salvo una traslazione di circa  $4db$  verso destra.

#### Esempio sistema 4-PAM

#### 11.4.4 Codifica GRAY nel sistema PAM

Abbiamo visto come la SER in un sistema PAM dipende dal rapporto  $\frac{E_s}{N_0}$  e dalla cardinalità  $M$  dell'alfabeto  $\mathcal{A}$ . Come sappiamo i simboli di modulazione  $\{a_i\}$  in un sistema PAM sono il risultato della mappatura dei bit di codice  $\{d_n\}$ . Per l'utente finale sarebbe quindi più utile conoscere al posto della SER la probabilità di errore sui bit  $\{d_n\}$ , chiamata Bit Error Rate (BER)

$$BER = P_r[\hat{d}_n \neq d_n]$$

in generale il calcolo della BER in un sistema PAM è un valore difficilmente calcolabile poiché oltre a dipendere dal rapporto  $\frac{E_s}{N_0}$  e da  $M$ , dipende anche dalla legge di mappatura. È però possibile individuare facilmente un intervallo di valori entro quale siamo sicuri che si trovi la BER. Per individuare tale intervallo, supponiamo di utilizzare una trasmissione PAM usando un alfabeto M-ario e siano

$N_s$  = Numero di simboli trasmessi

$N_d$  = Numero di bit trasmessi

$N_{se}$  = Numero di simboli ricevuti errati

$N_{de}$  = Numero di bit ricevuti errati

Si tenga presente che ogni simbolo PAM è ottenuto mappando un blocco di  $\log_2(M)$  bit, ho quindi

$$N_d = N_s \log_2(M)$$

inoltre ogni volta che un simbolo viene ricevuto con errore il numero dei corrispondenti bit sbagliati varia da 1 a  $\log_2(M)$ . Si ha pertanto

$$N_{se} \leq N_{de} \leq N_{se} \log_2(M)$$

dividendo i termini della precedente relazione per  $N_d$  si trova

$$\frac{N_{se}}{N_s \log_2(M)} \leq \frac{N_{de}}{N_d} \leq \frac{N_{se} \log_2(M)}{N_s \log_2(M)}$$

e passando al limite per  $N_s$  e  $N_b$  tendendo all'infinito

$$\frac{SER}{\log_2(M)} \leq BER \leq SER$$

da cui si vede che la BER non può mai superare la SER. A seconda della legge di mappatura impiegata, la BER può assumere valori più vicini a  $\frac{SER}{\log_2(M)}$  o a SER. Vale la pena notare che la BER coinciderebbe con il valore  $\frac{SER}{\log_2(M)}$  solo se, ogni volta che un simbolo ricevuto contiene un errore, sol uno dei bit corrispondenti a quel simbolo è sbagliato. Questa osservazione è utile per individuare quale sia la mappa ottima. Infatti, tenendo conto che quando un simbolo è

ricevuto con errore molto probabilmente viene frainteso con un simbolo adiacente nell'alfabeto  $\mathcal{A}$ , la mappa ottima é quella che associa a simboli adiacenti di  $\mathcal{A}$  blocchi di  $\log_2(M)$  bit che differiscono per un solo bit. Una tale mappa é nota come "Mappa GRAY", ed é quella che minimizza la BER per un prefissato valore della SER. Se in un sistema PAM viene utilizzata la mappadi GRAY, la BER é espressa da

$$BER \simeq \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left( \sqrt{\frac{6 \log_2(M)}{M^2 - 1}} \frac{E_d}{N_0} \right)$$

## 11.5 QAM

É un sistema di comunicazione in **banda passante** in cui il segnale trasmesso  $s_{T(t)}$  ha densità spettrale di potenza di tipo passa-banda, centrate su una frequenza  $f_0$  detta frequenza portante.

### 11.5.1 Involuppo complesso

l'involuppo complesso del segnale trasmesso é

$$\tilde{s}_{(t)} = I_{(t)} + jQ_{(t)}$$

e il segnale trasmesso

$$s_{T(t)} = \text{Re}\{\tilde{s}_{(t)} e^{j\omega_0 t}\}$$

con  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,  $\tilde{s}_{(t)} \in \mathbb{C}$ ,  $I_{(t)} \in \mathbb{R}$  detta parte in fase e  $Q_{(t)} \in \mathbb{R}$  detta parte in quadratura del segnale  $s_{T(t)}$  il quale può quindi essere espresso come

$$s_{T(t)} = I_{(t)} \cos(\omega_0 t) + jQ_{(t)} \sin(\omega_0 t)$$

e le singole parti possono essere espresse come

$$I_{(t)} = \sum_i a_i g_{T(t-iT)}$$

$$Q_{(t)} = \sum_i b_i g_{T(t-iT)}$$

in cui  $g_{T(t)}$  é l'impulso di trasmissione,  $T$  é l'intervallo di segnalazione,  $\{a_i\}$  e  $\{b_i\}$  sono i simboli di modulazione, ottenuti dal mappaggio di bit del codice  $\{d_n\}$ . La mappa ha cardinalità  $M$  ed é di tipo bidimensionale, nel senso che ad ogni stringa di  $\log_2(M)$  bit di codice fa corrispondere una coppia  $(a_i, b_i)$  disponibili nell'alfabeto impiegato.  $M$  é il numero possibile di coppie  $(a_i, b_i)$  disponibili nell'alfabeto. Nel caso di mappe bidimensionali l'alfabeto é costituito da punti  $(a_i, b_i)$  nel iano cartesiano, ed é detto *costellazione*. Un esempio di costellazione quaternaria é mostrata nella figura seguente



Figure 135: Costellazione quaternaria

### 11.5.2 Trasmettitore - QAM

Il trasmettitore usa un modulatore  $I/Q$  come illustrato di seguito, dove  $g_T(t)$  é un impulso a radice di coseno rialzato come quello impiegato in un sistema PAM.



Figure 136: Trasmettitore QAM

L'involuppo complesso del segnale trasmesso é espresso da

$$\tilde{s}(t) = I(t) + jQ(t) = \sum_i c_i g_{T(t-iT)}$$

avendo definito i simboli complessi come

$$c_i = a_i + jb_i$$

e si vede che  $\tilde{s}(t)$  é in pratica un segnale PAM con simboli complessi. L'equivalente in banda base del trasmettitore é



Figure 137: Equivalente in Banda Base

### 11.5.3 Densità spettrale di potenza - QAM

Per il calcolo della densità spettrale di potenza del segnale  $s_{T(t)}$ , si ricorda che essa é legata a quella dell'involuppo complesso  $\tilde{s}_{(t)}$  dalla relazione

$$S_{s(f)} = \frac{1}{4} [S_{\tilde{s}(f-f_0)} + S_{\tilde{s}(-f-f_0)}]$$

per cui é sufficiente calcolare la densità spettrale di potenza  $S_{\tilde{s}(f)}$ . Ammettiamo che la sequenza dei simboli  $\{c_i\}$  sia stazionaria in senso lato con valore medio

$$\eta_c = \mathbb{E}[c_i]$$

e funzione di autocorrelazione

$$R_{c(m)} = \mathbb{E}[c_{i+m}c_i^*]$$

la densità spettrale di potenza di  $\tilde{s}_{T(t)}$  é la trasformata di Fourier di  $R_{\tilde{s}(f-f_0)}$  ed é espressa da

$$S_{\tilde{s}(f)} = \frac{1}{T} f_{c(f)} |G_{T(f)}|^2$$

dove

$$f_{c(f)} = \sum_m R_{c(m)} e^{-j2\pi f m T}$$

é la densità spettrale di potenza dei simboli complessi  $\{c_i\}$ . La potenza di  $s_{T(t)}$  é quindi esprimibile come

$$P_s = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f_{c(f)} |G_{T(f)}|^2 df$$

Poiché  $g_{T(t)}$  é un impulso tipicamente a radice di coseno rialzato, la banda di  $\tilde{s}_{T(t)}$  é

$$B_{\tilde{s}} = \frac{1 + \alpha}{2T}$$

la banda del segnale trasmesso  $s_{T(t)}$

$$B_T = 2B_{\tilde{s}} = \frac{1 + \alpha}{T}$$



e l'efficienza spettrale del sistema risulta

$$\eta_{sp} = \frac{R_d}{B_T} = \frac{\log_2(M)}{1 + \alpha}$$

avendo tenuto conto che  $R_d = \frac{\log_2(M)}{T}$ . Si osservi come l'efficienza spettrale del sistema aumenti all'aumentare della cardinalità  $M$  della costellazione.

#### 11.5.4 Ricevitore - QAM

Supponiamo che il canale sia non distorcente ed aggiunga solo rumore termico. In tale ipotesi, il segnale ricevuto é espresso da

$$r(t) = s_{T(t)} + w(t)$$

con  $w(t)$  rumore Gaussiano bianco avente densità spettrale di potenza  $\frac{N_0}{2}$ . Il ricevitore ha la struttura mostrata in figura seguente



Figure 138: Ricevitore QAM

Il segnale ricevuto viene inviato a un filtro passa-banda(7.4.3) con frequenza centrale  $f_0$  e tale da non distorcere il segnale utile. Esso serve a selezionare il segnale utile e ad eliminare il rumore fuori banda. Dopo la demodulazione  $I/Q$ , il segnale passa attraverso il filtro di ricezione  $g_{R(t)}$ , tipicamente a radice di coseno rialzato, che sostituisce il passa-basso presente nel demodulatore di  $I/Q$ . I segnali  $x_{c(t)}$  e  $x_{s(t)}$  in uscita dal filtro di ricezione sono espressi da

$$x_{c(t)} = \sum_i a_i g(t-iT) + n_{c(t)}$$

$$x_{s(t)} = \sum_i b_i g(t-iT) + n_{s(t)}$$

dove  $g(t) = g_{(T(t))} \otimes g_{(R(t))}$  é un impulso a coseno rialzato, mentre  $n_{c(t)}$  e  $n_{s(t)}$  sono processi di rumore Gaussiano, a media nulla e a densità spettrale di potenza

$$S_{n_c(f)} = S_{n_s(f)} = N_0 |G_{R(f)}|^2$$

Qualora il filtro passa-banda sia simmetrico intorno a  $f_0$  i processi  $n_{c(t)}$  e  $n_{s(t)}$  sono anche incorrelati, e quindi indipendenti essendo congiuntamente Gaussiani. Dopo il campionatore abbiamo i campioni  $x_{c[k]}$  e  $x_{s[k]}$  espressi da

$$\begin{aligned}x_{c[k]} &= a[k] + n_{c[k]} \\x_{s[k]} &= b[k] + n_{s[k]}\end{aligned}$$

dove si é tenuto conto che  $g_{(t)}$  sia un impulso di Nyquist. Le variabili aleatorie  $n_{c[k]}$  e  $n_{s[k]}$  sono Gaussiane, a media nulla con varianza

$$\sigma^2 = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |G_{R(f)}|^2 df = N_0 g_{RCR(0)} = N_0$$

l'equivalente in banda base del ricevitore é



Figure 139: Equivalente ricevitore in banda base

dove

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{[k]} &= c_{[k]} + \tilde{n}_{[k]} \\ \tilde{n}_{[k]} &= n_{c[k]} + j n_{s[k]}\end{aligned}$$

## 11.6 Modulazione Amplitude Shift Keyring - ASK

In questo tipo di modulazione, i simboli  $b_i$  sono posti a zero, risulta quindi  $Q_{(t)} = 0$ . Il segnale trasmesso risulta

$$s_{T(t)} = I_{(t)} \cos(\omega_0 t)$$

dove  $I_{(t)}$  é un segnale PAM

$$I_{(t)} = \sum_i a_i g_{T(t-iT)}$$

con simboli  $\{a_i\}$  appartenenti all'alfabeto M-ario  $\mathcal{A} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$ . Pertanto il segnale ASK non é altro che un segnale PAM traslato in frequenza mediante modulazione classica. Lo schema trasmettitore é riportato in figura



Figure 140: Trasmittitore ASK

e si vede che é composto solo dal ramo relativo a  $I_{(t)}$ . Nel caso di simboli indipendenti ed equiprobabili, la densità spettrale di potenza dell'impulso complesso é

$$S_{\tilde{s}(f)} = \frac{M^2 - 1}{3T} |G_{T(f)}|^2$$

e l'energia media per simbolo trasmesso é

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2} T \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{s}(f)} df \\ &= \frac{M^2 - 1}{6} E_{g_T} \end{aligned}$$

essendo  $E_{g_T}$  l'energia di  $g_{T(t)}$ . Qualora  $g_{T(t)}$  sia un impulso a radice di coseno rialzato, l'efficienza spettrale del sistema ASK é

$$\eta_{sp} = \frac{\log_2(M)}{1 + \alpha}$$

ed é la metà di quella del corrispondente segnale PAM trasmesso in banda base. Il ricevitore é costituito da un demodulatore seguito da un ricevitore per segnali PAM, secondo quanto riportato nella figura seguente



Figure 141: Ricevitore ASK

Ricordando che il guadagno di demodulazione é pari a 1, é facile capire che le prestazioni in termini di SER e BER per un sistema ASK M-ario coincidono

con quelle di un sistema PAM. In particolare continua a valere che aumentando la cardinalità  $M$  dell'alfabeto si ha una diminuzione dell'efficienza energetica a favore di un aumento in quella spettrale, a parità di  $M$  l'efficienza spettrale del sistema ASK é la metà di quella del corrispondente sistema PAM.

## 11.7 Modulazione Quadrature Amplitude Modulation - QAM

In questo tipo di modulazione, la cardinalità  $M$  della costellazione é una potenza di 4, e i simboli  $\{a_i\}$  e  $\{b_i\}$  vengono generati da due mappe PAM a  $\sqrt{M}$  livelli che operano indipendentemente su bit diversi.



Figure 142: Modulatore QAM

come possiamo vedere in figura i bit  $\{d_n\}$  entrano in un convertitore Serie/Parallelo ( $S/P$ ) che divide il flusso in due sottoflussi distinti. Ciascun sottoflusso entra in un mappatore PAM a  $\sqrt{M}$  livelli con alfabeto  $\mathcal{A} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(\sqrt{M} - 1)\}$  da cui escono i simboli  $\{a_i\}$  e  $\{b_i\}$ , che vengono poi usati per generare i segnali PAM  $I(t)$  e  $Q(t)$ . Il segnale QAM equivale a una coppia di segnali PAM con simboli indipendenti trasmessi contemporaneamente sul canale mediante due oscillazioni in quadratura. Nel caso di mappe PAM bianche si ha un segnale 4-QAM aventi seguente costellazione



Figure 143: Costellazione QAM

in cui a ciascun simbolo  $c_i = a_i + jb_i$  é associata una coppia di bit. Se le mappe PAM sono quaternarie si ha un sistema 16-QAM in cui 4 bit vengono

mappati su di un simbolo complesso  $c_i$ , in tal caso la costellazione diventa la seguente



Figure 144: Costellazione 16-QAM

in caso di simboli indipendenti ed equiprobabili, la densità spettrale di potenza dell'involuppo complesso é

$$S_{\tilde{s}(f)} = \frac{C_2}{T} |G_{T(f)}|^2$$

dove

$$C_2 = \mathbb{E}[|c_i|^2] = \frac{2}{3}(M-1)$$

é la potenza media dei simboli trasmessi. Possiamo calcolare l'energia media per simbolo trasmesso

$$E_s = \frac{1}{2}T \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{s}(f)} df = \frac{M-1}{3} E_{g_T}$$

con  $E_{g_T}$  energia di  $g_{T(t)}$ . Qualora  $g_{T(t)}$  sia un impulso a radice di coseno rialzato, l'efficienza spettrale del sistema QAM diventa

$$\eta_{sp} = \frac{\log_2(M)}{1 + \alpha}$$

ed é uguale a quella di ciascuno dei segnali PAM presenti sul ramo  $I_{(t)}$  e sul ramo  $Q_{(t)}$  del trasmettitore. Il ricevitore é costituito da un demodulatore  $I/Q$  seguito da due ricevitori per segnali PAM



Figure 145: Ricevitore QAM

Come possiamo vedere la decisione non é presa sul simbolo complesso  $c_k$ , ma sui simboli  $a_k$  e  $b_k$  in modo indipendente mediante un decisore PAM a  $\sqrt{M}$  livelli. Possiamo anche rappresentare il sistema nel suo equivalente in banda base nel caso sia presente un errore di fase  $\phi$  durante la demodulazione  $I/Q$



Figure 146: Equivalente in banda base ricevitore QAM

In tal caso, assumendo l'assenza di ISI, il campione in uscita dal filtro di ricezione é

*formula*

con le componenti

$x_c$

$x_s$

come si vede sul campione  $x_{c[k]}$  é presente l'interferenza dovuta al simbolo  $b_k$ , mentre su  $x_{s[k]}$  é presente l'interferenza dovuta al simbolo  $a_k$ . É quindi necessario effettuare una buona sincronizzazione, perché altrimenti sui campioni  $x_{c[k]}$  e  $x_{s[k]}$  avremo interferenza nonostante sia rispettata la condizione di Nyquist per l'annullamento dell'ISI. L'errore di fase  $\phi$  ha l'effetto di ruotare il campione ricevuto  $\tilde{x}_{[k]}$ , con il rischio di portare  $\tilde{x}_{[k]}$  fuori dalla zona di decisione relativa al simbolo trasmesso. In figura mostra le zone di decisione per una 4-QAM e 16-QAM



(a) 4-QAM



(b) 16-QAM

per quanto riguarda la costellazione 4-QAM, le zone di decisione sono i 4 quadranti del piano complesso, mentre la costellazione 16-QAM si ha una griglia di quadranti 4x4. La costellazione 16-QAM é piu sensibile all'errore di fase rispetto alla costellazione 4-QAM. Per portare un simbolo fuori dalla propria zona di decisione (in assenza di rumore) occorre una rotazione di  $45^\circ$  per un

sistema 4-QAM, mentre basta una rotazione di meno di  $20^\circ$  per un sistema 16-QAM.

Nell'ipotesi di assenza di ISI e di perfetto sincronismo, le prestazioni di un sistema QAM in termini di BER sono perfettamente analoghe a quelli di un sistema PAM a  $\sqrt{M}$  livelli che costituiscono il segnale QAM. In presenza di codifica di GRAY, la BER é espressa approssimativamente da

$$BER \simeq \frac{4(\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M} \log_2(M)} Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M - 1} \frac{E_d}{N_0}} \right)$$

Possiamo pertanto concludere che il sistema QAM ha stessa efficienza energetica e stessa efficienza spettrale di due segnali PAM a  $\sqrt{M}$  livelli che siano trasmessi sul ramo  $I_{(t)}$  e  $Q_{(t)}$ . Rispetto al sistema ASK, ha la stessa efficienza energetica, ma efficienza spettrale doppia in quanto il segnale QAM é costituito da due segnali ASK modulati con frequenze portanti in quadratura e trasmessi sulla stessa banda.

## 11.8 Modulazione Phase Shift Keyring - PSK

### 11.8.1 Prestazioni di un sistema PSK

## 12 Teoria Dei Codici

### 12.1 Introduzione

Ci concentriamo adesso sul trattamento dell'informazione per poterla trasmettere. I messaggi che trasmettiamo possono essere codificati per vari motivi:

- Compressione:  $\begin{cases} \text{Lossy: con perdita dell'informazione} \\ \text{Lossless: minima perdita dell'informazione} \end{cases}$   
Comprimere l'informazione in eliminando ridondanza e salvando spazio di memoria e banda.
- Crittografia: per nascondere il messaggio ad utenti in ascolto sul canale che non siano il destinatario.
- Rivelazione o correzione di errore: viene aggiunta ridondanza ad hoc per aumentare l'affidabilità del messaggio trasmesso. Si utilizzano **checksum** o **Reed-Solomon(RS)**

**Capacità del canale** La capacità del canale  $C$  indica la massima quantità d'informazione che può essere trasmessa in maniera affidabile su di un dato canale. La capacità dipende dalla banda  $B$  del canale e dal rapporto segnale rumore (signal-to-noise ratio, **SNR**):

$$C = B \log(1 + SNR)$$

**Canale Gaussiano** Il canale Gaussiano può essere modellato come **Binary Symmetric Channel (BSC)** con probabilità di errore  $p$ . Assumiamo gli errori tra loro indipendenti ( $p_{(a,b)} = p_{(a)} \cdot p_{(b)}$ ):

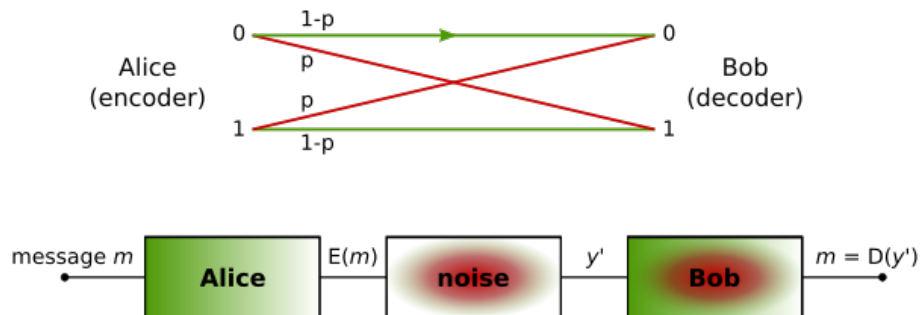


Figure 147: Sistema di trasmissione BSC



$E_{(x)}$  : Funzione di codifica  
 $D_{(x)}$  : Funzione di decodifica  
 $E_{(m)}$  : Bit dell'informazione codificati  
 $y' : E_{(m)} + e \rightarrow$  Informazioni con errore del canale  
 $m = D_{(y')}$  : Informazione decodificata

Il canale é chiamato simmetrico perché ho la stessa probabilità errore sulla trasmissione di uno dei due bit. Se  $X$  é il bit inviato e  $Y$  quello ricevuto allora il canale é caratterizzato dalle probabilità:

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0|X = 0) &= 1 - p \\
 P(Y = 0|X = 1) &= p \\
 P(Y = 1|X = 0) &= p \\
 P(Y = 1|X = 1) &= 1 - p
 \end{aligned}$$

Assumiamo che  $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ , se avessimo  $p > \frac{1}{2}$  il ricevitore potrebbe scambiare l'informazione ricevuta (Quando riceve un 1 lo interpreta come 0 e viceversa) e ottenere un canale con probabilità  $1 - p \leq \frac{1}{2}$ .

Nel corso useremo delle simbologie diverse:

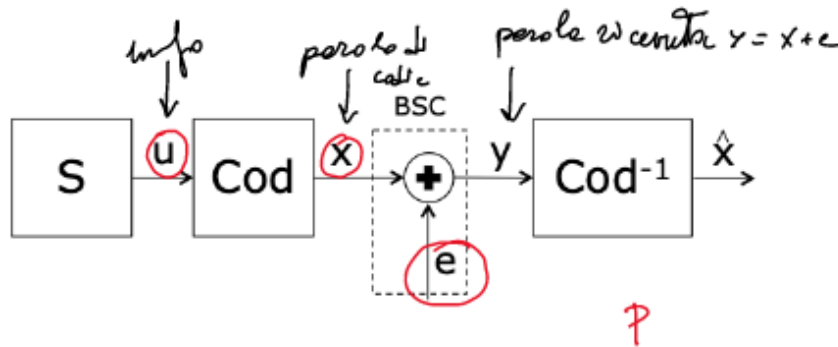


Figure 148: Sistema di trasmissione BSC

$u$  : Informazione  
 $x$  : Parole di Codice  
 $e$  : Errore del Canale  
 $y : x + e \rightarrow$  Informazioni con errore del canale  
 $\hat{x}$  : Informazione decodificata

**Probabilità di errore BSC** La probabilità, per una trasmissione BSC, di sbagliare  $t$  bit in una parola di  $n$  bit:

$$p_{(t,n)} = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{(n-t)}$$

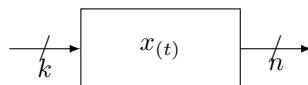
dove il coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

indica tutte le possibili combinazioni di errori di  $t$  bit su  $n$  bit.

### Tassonomia dei codici

- Codici lineari
  - Codici a blocco
  - Codici convoluzionali
- Definizione di un codice a blocco:



**Rate del Codice** :

$$R = \frac{k}{n}$$

La condizione é che  $n > k$  senon fosse cosí avrei perdita d'informazione, da  $k$  bit passo a  $n$  aggiungendo ridondanza e codificando i miei dati. Possiamo quindi stimare il valore tipico di  $R$

$$R = \frac{k}{n} < 1$$

- Rivelazione di errore: Consiste nella capacità di scoprire la presenza di errori causati dal rumore o da altri fenomeni deterioranti durante una trasmissione di dati (es. tramite il **bit di parità**).
- Correzione di errore: Consiste invece nell'ulteriore abilità di ricostruire i dati originali, eliminando gli errori occorsi durante la trasmissione. Vi sono due differenti schemi di base per la progettazione della codifica di canale e del protocollo per un sistema che corregge gli errori:
  - **Automatic repeat-request (ARQ)**: Il mittente invia i dati ed anche un codice a rilevazione d'errore, che sarà utilizzato in ricezione per individuare gli eventuali errori, ed in tal caso chiedere la ritrasmissione dei dati corrotti. In molti casi la richiesta è implicita; il destinatario invia un acknowledgement (ACK) di corretta ricezione dei dati, ed il mittente re-invia solo quei dati per i quali non ha ricevuto, entro un prefissato tempo limite (timeout), il corrispondente ACK.

- **Forward Error Correction (FEC)**: Il mittente codifica i dati con un codice a correzione d'errore (error correction code, ECC) ed invia il messaggio codificato. Il destinatario non invia mai alcun messaggio verso il mittente; esso decodifica ciò che riceve nella maniera più simile possibile a quella di un certo insieme prefissato di parole accettabili. Tali codici sono realizzati in modo tale che dovrebbe occorrere una quantità "irragionevole" di errori nei dati, affinché il destinatario decodifichi erroneamente, ottenendo finalmente dei dati diversi da quelli effettivamente inviatigli.

In generale un codice a blocco che ha rate  $\frac{k}{n}$  mappa  $k$  bit su  $n$  bit usando  $2^k$  parole di codice di dimensione  $n$

### 12.1.1 Esempio codici a blocco: codici a ripetizione

É un esempio di codice a correzione d'errore: il funzionamento si basa sulla ripetizione dell'informazione più volte. Il destinatario si accorge di un errore di trasmissione poiché il flusso di dati ricevuto non è la ripetizione di un singolo messaggio e, inoltre, il destinatario può recuperare il messaggio originale guardando il messaggio ricevuto nel flusso di dati che si verifica più spesso.

Nel caso di un codice binario di ripetizione, esistono due parole in codice - tutte uno e tutti zeri - che hanno una lunghezza  $n$ . Pertanto, la distanza minima di Hamming (12.2.5) del codice è uguale alla sua lunghezza. Ciò conferisce al codice di ripetizione, con  $R = \frac{1}{n}$ , una capacità di rivelazione di errori pari a  $n - 1$  e correzione degli errori (cioè correggerà fino agli errori in qualsiasi parola del codice) di  $\frac{n-1}{2}$  per  $n$  dispari (12.1).

Esempio:

$R = \frac{1}{3} \rightarrow$  ha solo 2 parole di codice:

$$u = 0 \rightarrow x = [000]$$

$$u = 1 \rightarrow x = [111]$$

Il ricevitore effettua una decodifica a maggioranza: decide per il bit che compare più volte della parola ricevuta.

$$y = [000] \rightarrow \hat{x} = [000] \rightarrow \hat{u} = 0$$

$$y = [010] \rightarrow \hat{x} = [000] \rightarrow \hat{u} = 0$$

$$y = [101] \rightarrow \hat{x} = [111] \rightarrow \hat{u} = 1$$

**Evento errore:** l'evento errore per un codice a correzione di errore consiste nel non essere in grado di correggere tutti gli errori introdotti dal canale. Se la probabilità di errore sul bit  $p_{e,b}$  è piccola, la probabilità di errore  $p_{e,w}$  per il codice può essere approssimata dal primo evento che determina la ricezione errata (nel caso dei codici a ripetizione a  $R = \frac{1}{3}$  si verifichino 2 errori).

- $R = \frac{1}{3}$

- Se  $p_{e,b} = 0.1 \Rightarrow p_{e,W} \approx 2.7 \cdot 10^{-2}$
  - Se  $p_{e,b} = 0.01 \Rightarrow p_{e,W} \approx 2.97 \cdot 10^{-4}$
  - $R = \frac{1}{5}$ 
    - Se  $p_{e,b} = 0.1 \Rightarrow p_{e,W} \approx 8.1 \cdot 10^{-3}$
    - Se  $p_{e,b} = 0.01 \Rightarrow p_{e,W} \approx 9.8 \cdot 10^{-6}$ , Sviluppiamo i calcoli come esempio:
- $P_r\{\text{codice } R = \frac{1}{5} \text{ non riesce a correggere gli errori introdotti dal canale}\} :$

$$P_r = \sum_{t=3}^5 \binom{5}{t} p^t (1-p)^{5-t}, \quad p = 10^{-2}$$

$$P_r\{3 \text{ errori su } 5\} = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^{5-3} = 10 \cdot 10^{-6} (0.99)^2 = 9.8 \cdot 10^{-6}$$

$$P_r\{3 \text{ errori su } 5\} = \binom{5}{4} p^4 (1-p)^{5-4} = 5 \cdot 10^{-8} (0.99) = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$P_r\{3 \text{ errori su } 5\} = \binom{5}{5} p^5 (1-p)^{5-5} = 1 \cdot 10^{-10} = 10^{-10}$$

### 12.1.2 Esempio codici a blocco: codici a controllo di parità

Il bit di parità è un codice di controllo d'errore, utilizzato nei calcolatori per prevenire errori nella trasmissione o nella memorizzazione dei dati. Tale codice prevede l'aggiunta di un bit ridondante ai dati, calcolato a seconda che il numero di bit che valgono 1 sia pari o dispari. Ne esistono quindi 2 varietà: bit di parità pari e bit di parità dispari. Quando si usa il bit di parità pari si aggiunge un bit con valore 1 se nella parola inviata il numero di occorrenze di "1" è dispari (portando il numero di occorrenze di "1" a una quantità pari). Quando si usa il bit di parità dispari si aggiunge un bit con valore 1 se nella parola inviata il numero di occorrenze di "1" è pari (portando il numero di occorrenze di "1" a una quantità dispari).

Il codice ha  $R = \frac{k}{(k+1)}$ :  $k$  bit informativi più il bit di parità.

**Rilevazione dell'errore:** La rilevazione d'errore deriva dalla discordanza del numero di occorrenze di "1", eseguendo lo XOR bit a bit, nel caso del bit di parità pari, se il risultato è 0 non sono avvenuti errori, viceversa se ho un risultato uguale a 1 posso dire che c'è stato uno o una quantità dispari di errori nella trasmissione, questo lo rende solo un codice a rilevazione d'errore e non un codice a correzione d'errore.

Esempio: Trasmetto parole di 11bit con rate  $R_b = 10Mb/s$  e probabilità di errore sul bit trasmesso  $p_{e,b} = 10^{-8}$ :

- Senza controllo di parità é sufficiente che sia sbagliato anche un solo bit per sbagliare tutta la parola:

$$p_{e,W} = \sum_{j=1}^{11} \binom{11}{j} p_{e,b}^j (1 - p_{e,b})^{11-j} = 11p_{e,b}(1 - p_{e,b})^{10} \simeq 11p_{e,b}$$

ed il rate di parole sbagliate al secondo é:

$$R_{e,W} = \frac{R_b}{11} \cdot p_{e,W} \simeq \frac{10^7}{11} \cdot 11p_{e,b} = 0.1 \frac{w}{s}$$

- Aggiungendo un bit di parità, la parola diventa di 12 bit e sbaglio quando faccio almeno 2 errori, il singolo errore viene corretto chiedendo nuovamente la trasmissione del dato:

$$p_{e,W} = \sum_{j=2}^{12} \binom{12}{j} p_{e,b}^j (1 - p_{e,b})^{12-j} = 66p_{e,b}^2(1 - p_{e,b})^{10} \simeq 66p_{e,b}^2$$

ed il rate (frequenza) di parole sbagliate al secondo é:

$$R_{e,W} = \frac{R_b}{12} \cdot p_{e,W} \simeq \frac{10^7}{12} \cdot 66p_{e,b}^2 = 5.5 \cdot 10^{-9} \frac{w}{s}$$

possiamo anche calcolare il periodo  $T_{e,W} = \frac{1}{R_{e,W}} = 1.82 \cdot 10^8 s$  che é una parola ogni sei anni circa.

### 12.1.3 Esempio codici a blocco: codice ISBN

Il codice International Standard Book Number (ISBN) é un codice a controllo di parità per un alfabeto di simboli nonbinari. Ad ogni libro é assegnata una parola di codice di lunghezza  $n = 10$  cifre in base decimale. Le prime 9 cifre identificano il libro, la decima é quella di controllo di parità cosí calcolata:

1. Si calcola la grandezza  $z = \text{mod}(S, 11)$  con

$$S = \sum_{j=1}^9 (11 - j)x_{(j)}$$

2. La cifra di controllo di arità é il complemento a 11 di  $z$ :

$$x_{(10)} = \text{mod}(11 - z, 11)$$

E solo per la cifra di controllo di parità se  $x_{(10)} = 10$  si sostituisce con  $x_{(10)} = X$

Quando un dispositivo legge il codice lo verifica come segue:

1. Moltiplica ogni cifra per il peso della posizione della stessa cifra e calcola  $\text{mod}(S', 11)$  con

$$S' = \sum_{j=1}^{10} (11-j)y_{(j)}$$

2. Assumendo che non ci siano errori su  $x_{(10)} = |11 - z|_{11}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \text{mod}(S', 11) &= \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (11-j)y_{(j)} + \text{mod}(11-z, 11), 11\right) \\ &= \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (11-j)y_{(j)} + \left(11 - \sum_{j=1}^9 (11-j)x_{(j)}\right), 11\right) \\ &= \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (11-j)(y_{(j)} - x_{(j)}), 11\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Se non ci sono errori si ha  $y = x$  e quindi il  $\text{mod}(S', 11) = 0$

**Rivalazione degli errori:** Il codice é in grado di rivelare tutti i singoli errori: sia  $e_{(k)}$  l'errore in posizione  $k, y_{(k)} = x_{(k)} + e_{(k)}$ :

$$\text{mod}(S', 11) = \text{mod}((y_{(k)} - x_{(k)})(11-k), 11) + \text{mod}(e_{(k)}(11-k), 11) \neq 0$$

Il codice é in grado di rivelare tutti i casi in cui ci sia uno scambio di 2 cifre del codice. Siano  $k_1$  e  $k_2$  le 2 posizioni scambiate:

$$\begin{aligned} \text{mod}(S', 11) &= \text{mod}((y_{(k_1)} - x_{(k_1)})(11-k_1) + (y_{(k_2)} - x_{(k_2)})(11-k_2), 11) \\ &= \text{mod}((x_{(k_2)} - x_{(k_1)})(11-k_1) + (x_{(k_1)} - x_{(k_2)})(11-k_2), 11) \\ &= \text{mod}((x_{(k_2)} - x_{(k_1)})(k_2 - k_1), 11) \neq 0 \end{aligned}$$

Esempi:

- Senza errore:

$$ISBN = 01 - 333 - 5485 - 7$$

$$|S'|_{11} = 0 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1$$

$$|S'|_{11} = |154|_{11} = 0$$

Il codice é corretto

- Con errore: Scambio le cifre

$$ISBN = 01 - 333 - 5458 - 7$$

$$|S'|_{11} = 0 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 1$$

$$|S'|_{11} = |151|_{11} = 8 \neq 0$$

Il codice non é corretto

## 12.2 Codici a blocco

### 12.2.1 Introduzione ai codici lineari

**Campo:** un campo é una struttura composta da un insieme non vuoto  $F$  e da due operazioni binarie interne:  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in F$ :

- Somma ( $XOR$ ):

–

$$\alpha + \beta = \theta, \theta \in F$$

– Associativa:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

– Commutativa:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

– Elemento Neutro:

$$0 \in F, \alpha + 0 = \alpha, \alpha - \alpha = 0$$

- Prodotto ( $AND$ ):

–

$$\alpha \cdot \beta = \theta, \theta \in F$$

– Associativa:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

– Commutativa:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

– Distributiva:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

– Elemento Neutro:

$$1 \in F, \alpha \cdot 1 = \alpha, \forall \alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \cdot \alpha^{-1} = 0$$

### 12.2.2 Campi di Galois

Un campo finito, detto anche campo di Galois, é un campo con un numero finito  $q$  di elementi. Il numero di elementi  $q$  definisce la categoria del campo:  $GF(2)$  é il campo definito su  $\{0, 1\}$  con somma modulo 2 ( $XOR$ ) e prodotto modulo 2 ( $AND$ ). Definito lo spazio  $GF(2)$  si può costruire lo spazio vettoriale  $\mathcal{V}_n = GF(2)^n$ , lo spazio di tutti i possibili  $2^n$  vettori di  $n$  cifre binarie su cui valgono le operazioni definite per  $GF(2)$ .

### 12.2.3 Codici a blocco lineari su $GF(2)$

Sia  $u = [u_1, \dots, u_k]$  una generica parola di  $k$  cifre binarie. Il codice a blocco lineare  $\mathcal{C}(k, n) \subset \mathcal{V}_n$  é l'insieme delle  $2^k$  parole  $x = [x_1, \dots, x_n]$  di  $n$  cifre binarie ottenute con la trasformazione lineare:

$$x = uG$$

Dove  $G$  é la matrice generatrice del codice e ha dimensione  $k \times n$  di cifre binarie con  $n > k$  poiché al massimo aggiungo informazioni per la trasmissione, per la correzione o rivelazione d'errore.

Siano  $g_i, i = [1, \dots, k]$ , le righe di  $G$ ,  $x$  é la combinazione lineare delle righe  $g_i$ :

$$x = \sum_{i=1}^k u_i g_i$$

Per avere  $2^k$  parole di codice distinte é necessario che  $G$  abbia rango  $k$ : le righe di  $G$  devono essere linearmente indipendenti e costituiscono una *base* per il sottospazio vettoriale  $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}_n$ .

### 12.2.4 Proprietá dei codici a blocco lineari

Le proprietá derivano maggiormente dalla proprietá di linearitá dei codici:

- Ogni parola di codice é una combinazione lineare di righe della matrice generatrice.
- Il codice a blocchi é costituito da tutte le possibili combinazioni delle righe della matrice generatrice.
- La somma di due parole di codice é ancora una parola di codice.
- La  $n - \text{upla}$  di tutti zeri é sempre una parola di codice.
- Se  $x$  é una parola di codice, anche  $-x$  é una parola di codice.

### 12.2.5 Distanza di Hamming

La distanza di Hamming tra due vettori, o stringhe,  $d(x_1, x_2)$  di  $n$  elementi é il numero di posizioni in cui le due parole sono diverse tra loro. Esempi:

- La distanza di Hamming tra 1011101 e 1001001 é 2.
- La distanza di Hamming tra 2143896 e 2233796 é 3.

**Peso di Hamming:** Il peso di Hamming,  $w(x)$ , di una stringa di lunghezza  $n$  é la sua distanza di Hamming dal vettore di  $n$  zeri,  $x_0 \in \mathcal{V}_n$  é:

$$w(x_0) = d(x_0, 0_n)$$



**Distanza minima:** La distanza minima di un codice  $\mathcal{C}$  é la minima distanza di Hamming calcolata fra tutte le possibili parole che appartengono a  $\mathcal{C}$ .

$$d_{min}(\mathcal{C}) = \min_{x_1, x_2 \in \mathcal{C}} d(x_1, x_2)$$

Per i codici lineari vale che ciascuna parola di codice ha lo stesso insieme di distanze dalle altre parole di codice. La distanza minima di un codice si può calcolare a partire da qualsiasi parola di codice. La distanza di Hamming é una metrica:

- 
- 
- 
- 

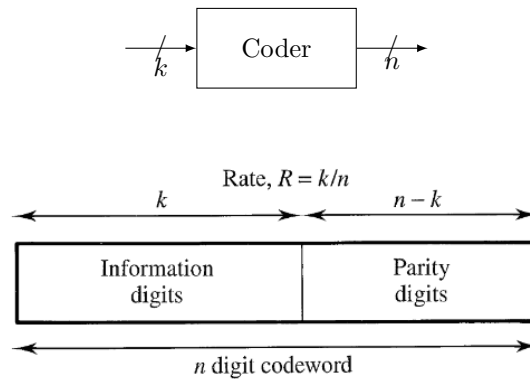
### 12.2.6 Codici a blocco in forma sistematica

Quando il codice é in forma sistematica la matrice generatrice del codice ha la seguente forma:

$$G = [I_k, P]$$

$$G \in k \times n, \quad I \in k \times k, \quad P \in k \times (n - k)$$

dove la matrice  $P$  é la matrice di parità, il suo contenuto dipende da quale algoritmo di parità viene scelto.



**Esempio Codice a ripetizione:**  $R = \frac{1}{3}, \quad k = 1, \quad n = 3$

Bit i ingresso	Parola codificata
0	[000]
1	[111]

La matrice generatrice del codice é  $G = [111]$ , e la distanza minima  $d_{min} = 3$

**Esempio Codice a controllo di parità:**  $R = \frac{7}{8}$ ,  $k = 7$ ,  $n = 8$ , ogni 7 bit ne aggiunge uno di controllo di parità, 1 se il numero di "1" é dispari, 0 se il numero di "1" é pari.

La matrice generatrice del codice:

$$G = [I_7, 1_7]$$

La distanza minima é  $d_{min} = 2$ , se cambio uno dei 7 bit della parola cambio automaticamente il bit di parità, quindi cambiare 1 bit in realtà ne cambia 2.

Il prodotto  $u \cdot 1_7 = \sum_{i=1}^7 u_i$ , può essere scritto come una somma modulo 2, vale 0 se il numero di occorrenze di "1" é pari e 1 altrimenti. Non facciamo altro che calcolare il bit di parità della parola  $u$ .

**Definizione:** Due codici lineari  $\mathcal{C}_1(k, n)$  e  $\mathcal{C}_2(k, n)$  in  $GF(2)$  sono equivalenti se uno é ottenuto dall'altro attraverso una permutazione delle posizioni del codice.

**Teorema:** Due matrici generatrici  $G_1$  e  $G_2$  in  $GF(2)$  generano due codici equivalenti se una può essere ottenuta dall'altra da una sequenza di operazioni come:

- Permutazione delle righe.
- Combinazione lineare delle righe.
- Permutazione delle colonne.

**Teorema:** Qualsiasi codice lineare a blocchi é equivalente ad un codice in forma sistematica.

**Proprietá degli spazi:**

- Dato il sottospazio  $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}_n$  di dimensione  $k$ , esiste un sottospazio ortogonale (null space)  $\mathcal{C}^\perp \subset \mathcal{V}_n$  di dimensione  $n - k$  definito da una matrice  $H \in (n - k) \times n$ :

$$GH^T = 0_{n-k}$$

- La base di  $\mathcal{C}^\perp$  é costituita dalle  $n - k$  righe della matrice  $H$ , per cui ogni elemento  $t \in \mathcal{C}^\perp$  può essere rappresentato:

$$t = vH = \sum_{i=1}^{n-k} v_i h_i$$

- Per ogni  $x \in \mathcal{C}$  e per ogni  $t \in \mathcal{C}^\perp$  si ha:

$$xt^T = uGH^T v^T = 0$$

### 12.2.7 Matrice di controllo di parità

La matrice  $H$  é la matrice di controllo di parità del codice. Per costruzione  $\forall x \in \mathcal{C}$  vale:

$$xH^T = uGH^T = 0$$

$$H \in (n-k) \times n$$

La matrice  $H$  non é unica, ma se il codice é sistematico posso ricavarla in un'altra forma:

$$H = [P^T, I_{n-k}] = 0$$

$$H \in (n-k) \times n, I \in (n-k) \times (n-k), P^T \in (n-k) \times k$$

Se fosse  $\neq 0$  ciò che é stato ricevuto non é una parola di codice.

**Esempio codice a ripetizione e controllo di parità:**  $R = \frac{1}{3}$ ,  $k = 1$ ,  $n = 3$ ,  $n - k = 2$  ho la matrice a controllo di parità:

$$H = [P^T, I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per un codice con  $R = \frac{7}{8}$ ,  $k = 7$ ,  $n = 8$ ,  $n - k = 1$  la matrice a controllo di parità:

$$H = [P^T, I_1] = 1_8^T$$

### 12.2.8 Proprietà dei codici a blocco

**Teorema:** La distanza minima del codice a blocco  $\mathcal{C}(k, n)$  si può calcolare come il peso di Hamming minimo tra tutte le parole di codice:

$$d_{min}(\mathcal{C}) = \min_{x_i, x_j \in \mathcal{C}} d_H(x_i, x_j) = \min_{x_i, x_j \in \mathcal{C}} d_H(x_i + x_j, x_j + x_j)$$

$$= \min_{x_i, x_j \in \mathcal{C}} d_H(x_i + x_j, 0_{1,n}) \stackrel{[x_i + x_j \in \mathcal{C}]}{\Rightarrow} \min_{x_i \in \mathcal{C}} w(x_i)$$

**Capacità di rivelare errori (Error Detection):** Su un canale  $BSC$  senza memoria (??), la  $n - upla$   $y$  a valle del decisore può essere rappresentata:

$$y = x + e$$

Dove  $e$  é il vettore di errori introdotto dal canale, se il canale non introduce errori:  $e = 0_{1,n}$ . Sia  $x$  la parola di codice trasmessa e  $y = x + e$  la corrispondente sequenza di  $n$  bit ricevuta. supponiamo che il canale introduca un numero di errori:  $w(e) > 0$ , si dice:

- Errore Rivelabile: se  $y$  non é una parola di codice,  $y \notin \mathcal{C}(k, n)$
- Errore Non Rivelabile: se  $y$  é una parola di codice ma non quella trasmessa,  $w(e) \geq d_{min}$

**Teorema:** Il codice  $\mathcal{C}(k, n)$  é in grado di rivelare con certezza fino a  $d_{min} - 1$  errori.

- Se  $d(x, y) < d_{min}$ :  $y$  non può essere una parola di codice, altrimenti vorrebbe dire che esistono due parole di codice la cui distanza é minore di  $d_{min}$ .
- Se  $d(x, y) = d_{min}$ : esiste almeno una parola di codice  $c \in \mathcal{C}(k, n)$ ,  $c \neq x$  tale che  $d(x, c) = d_{min}$ , se  $y = c$  l'errore non può essere rivelato.

**Strategia di decodifica a massima verosomiglianza:** Sia  $y$  il vettore ricevuto a seguito della trasmissione su  $BSC$ , la strategia di decodifica a massima verosomiglianza (ML, maximum likelihood) consiste nel trovare il vettore  $\hat{x}$  che, tra tutte le  $2^k$  possibili parole di codice  $x$ , massimizza la probabilità condizionata  $P(y|x)$ :

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathcal{C}} P(y|x)$$

Poiché gli eventi di errore sono indipendenti da bit a bit, posso riscrivere la probabilità condizionata come il prodotto delle probabilità condizionate ottenute per ciascun bit trasmesso:

$$P(y|x) = \prod_{\ell=1}^n P(y_\ell|x_\ell)$$

Lavorando in  $GF(2)$  la probabilità  $P(y_\ell|x_\ell)$  può assumere solo 2 valori:

$$P(y_\ell|x_\ell) = \begin{cases} 1-p & \text{se } P(y_\ell = x_\ell|x_\ell) \\ p & \text{se } P(y_\ell \neq x_\ell|x_\ell) \end{cases}$$

Osservazione: La distanza di Hamming  $d_H(x, y)$  misura il numero di posizioni diverse tra  $x$  e  $y$ , quindi  $n - d_H(x, y)$  misura il numero di posizioni uguali tra  $x$  e  $y$ .

La probabilità  $P(y|x)$  si calcola:

$$P(y|x) = p^{d_H(x,y)}(1-p)^{n-d_H(x,y)} = (1-p)^n \left( \frac{p}{1-p} \right)^{d_H(x,y)}$$

Mi interessa scegliere un  $x$  che massimizza  $\left( \frac{p}{1-p} \right)^{d_H(x,y)}$ , é un valore  $< 1$ :

- Se ho la  $d_H(x, y)$  piccola ho la probabilità minore di errore.
- Se ho la  $d_H(x, y)$  alta ho la probabilità di errore alta.

**Decisione a massima verosomiglianza:** La parola di codice decisa  $\hat{x}$  é quella che minimizza la distanza dalla parola  $y$  ricevuta:

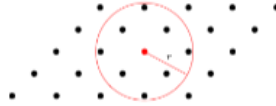
$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathcal{C}} P(y|x) = \arg \min_{x \in \mathcal{C}} d_H(y, x)$$

Scelgo  $x$  tale che mi dia la minima distanza

**Ricevitore ML ottimo:** Il ricevitore ML ottimo é il ricevitore a distanza minima, il ricevitore che associa alla sequenza di  $n$  bit ricevuta  $y$ , la parola di codice  $x$  che minimizza la  $d_H(y, x)$ .

**Ricevitore ML error correction:** Il ricevitore ML é in grado di correggere con successo tutti quegli errori  $e$  per cui la parola ricevuta  $y = x + e$  é comunque piú vicina alla parola trasmessa  $x$  che a qualsiasi altra parola del codice.

Per ogni vettore  $v \in \mathcal{V}_n$  e un raggio  $r$  esiste una "sfera" di raggio  $r$  i cui elementi sono tutti quei vettori in  $\mathcal{V}_n$  che hanno distanza di Hamming da  $v$  minore o uguale a  $r$



Se adottiamo un ricevitore ML, il numero massimo di errori che il codice  $\mathcal{C}(k, n)$  é in grado di correggere é il massimo raggio  $t$  per cui le sfere centrate nelle parole di codice di  $\mathcal{C}(k, n)$  sono tutte tra loro disgiunte.

### Capacità di correggere errori (Error Correction):

**Teorema:** Un codice lineare a blocco può correggere fino a  $t_{max} = \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$  errori:  $2t_{max} + 1 \leq d_{min} \leq 2t_{max} + 2$ .

La condizione per cui le sfere di raggio  $t$  che circondano le parole di codice siano disgiunte é che  $2t_{max} < d_{min} \Rightarrow t_{max} < \frac{d_{min}}{2}$ . Altrimenti se fosse  $2t_{max} \geq d_{min}$  ci sarebbero almeno due parole  $x_1$  e  $x_2$  la cui distanza  $d_H(x_1, x_2) = d_{min} < 2t_{max}$  e le due sfere di raggio  $t$  avrebbero almeno un punto in comune.

Consideriamo il codice  $\mathcal{C}(k, n)$  che ha una certa  $d_{min}$  e  $t_{max}$  tale che  $2t_{max} + 1 \leq d_{min}$ . Sia  $x \in \mathcal{C}(k, n)$  la parola trasmessa,  $y = x + e$  la corrispondente sequenza di  $n$  bit ricevuta e  $c \in \mathcal{C}(k, n)$  un'altra generica parola di codice. Grazie alla disuguaglianza triangolare ho:

$$d_H(x, y) + d_H(c, y) \geq d_H(x, c) \Rightarrow d_H(c, y) \leq d_H(x, c) - d_H(x, y)$$

per ipotesi ho anche:

$$d_H(x, c) \geq d_{min} \geq 2t_{max} + 1$$

Supponiamo che il canale introduca un certo numero di errori  $t \leq t_{max}$ , così da avere  $d_H(x, y) = t$ :

$$d_H(c, y) \geq 2t_{max} + 1 - t > t_{max} \geq t = d_H(x, y)$$

## 12.3 Codici di Hamming

I codici di Hamming  $\mathcal{C}_H(m)$  sono definiti a partire da un parametro:  $m \geq 2$

$$n = 2^m - 1, \quad k = 2^m - m - 1 = n - m$$

**Matrice di controllo di parità:** per definizione la matrice  $H \in (n-k) \times n$ , ma per i codici di Hamming la matrice  $H$  ha dimensione:  $H \in m \times (2^m - 1)$ .

**Matrice di parità:** Per un codice di Hamming sistematico la matrice di parità  $P \in k \times m$  viene costruita così che le colonne di  $H = [P^T, I_{n-k}]$  siano tutte le possibili  $2^m - 1$  combinazioni di  $m$  bit (esclusa la  $n - \text{upla}$  di tutti 0)

### 12.3.1 Il codice $\mathcal{C}_H(2)$

Il codice a ripetizione  $R = \frac{1}{3}$  con  $m = 2 \Rightarrow n = 3, k = 1$  ha come matrice di controllo di parità  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Che é la matrice corrispondente a un codice di Hamming  $\mathcal{C}_H(2)$ , poiché rappresenta tutte le possibili combinazioni di 2 bit

### 12.3.2 Il codice $\mathcal{C}_H(3)$

$$m = 3, \quad n = 7, \quad k = 4, \quad R = \frac{4}{7}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Posso ricavare la matrice generatrice  $G$  scrivendo la matrice  $H$  come se l'avessi ottenuta da una matrice  $G \in k \times n$  di un codice sistematico (12.2.7):

$$H = [P^T, I_{n-k}] = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La cui matrice generatrice con  $I \in k \times k$  é:

$$G = [I_k, P] = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Possiamo vedere come la matrice di parità faccia controlli su combinazioni diverse di bit in ingresso  $p = uP$ :

$$p_1 = u_1 + u_2 + u_4$$

$$p_2 = u_1 + u_3 + u_4$$

$$p_3 = u_2 + u_3 + u_4$$

Il vettore di uscita dal codificatore sarà quindi  $x = uG = [u, p_1, p_2, p_3]$ , tale matrice di parità ci permette di aumentare la distanza di Hamming tra le parole

**Distanza minima:** La distanza minima di un qualsiasi codice di Hamming  $\mathcal{C}_H(m)$  è  $d_{min}(\mathcal{C}_H(m)) = 3$ .

Dimostrazione:

$$1. d_{min} = \min_{x \in \mathcal{C}} w(x)$$

$$2. x \in \mathcal{C} \text{ se } xH^T = 0 \text{ e le colonne di } H \text{ sono tutte le possibili combinazioni dei bit } m \text{ bit}$$

Perché 3 è il numero minimo di colonne che mi permette di ottenere 0 (2), quindi  $d_{min}(\mathcal{C}_H(m)) = 3$ .

## 12.4 Decodifica per codici a blocco

Dato il vettore ricevuto:

$$y = x + e$$

Il decisore ottimo seleziona la parola di codice  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathcal{C}} P(y|x) = \arg \min_{x \in \mathcal{C}} d_H(y, x)$$

Per ottenere  $\hat{x}$  è necessario fare  $2^k$  confronti tra il vettore ricevuto  $y$  e tutte le parole di codice  $\mathcal{C}(k, n)$ , la complessità cresce esponenzialmente con  $k$ .

Un approccio alternativo è quello di osservare il vettore errore e la probabilità condizionata:

$$y = x + e \Rightarrow x = y + e, \quad e = y - x$$

$$P(x|y) = P(x + e|x) = P(e|y + e \in \mathcal{C})$$

Posso ottenere la stima di  $x$  come:

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathcal{C}} P(y|x) = y + \arg \max_e P(e|y + e \in \mathcal{C})$$

Invece di stimare  $\hat{x}$  si stima il vettore  $\hat{e}$  più probabile

$$\hat{e} = \arg \max_e P(e|y + e \in \mathcal{C}) = \arg \max_{e|y+e \in \mathcal{C}} p^{w(e)}(1-p)^{n-w(e)}$$

$$= \arg \max_{e|y+e \in \mathcal{C}} \left( \frac{1-p}{p} \right)^{-w(e)} = \arg \min_{e|y+e \in \mathcal{C}} w(e)$$

La decodifica sceglie tra tutti i possibili vettori errore  $e$  tali che  $y + e \in \mathcal{C}$  quello che ha il peso di Hamming minimo, cioè il minimo numero di errori (Massima Verosomiglianza). Una volta stimato  $\hat{e}$ :

$$\hat{x} = y - \hat{e} = y + \hat{e} = x + (\hat{e} + e) = \begin{cases} x & \text{se } \hat{e} = e \\ x_1 \neq x & \text{se } \hat{e} \neq e \end{cases}$$

#### 12.4.1 Coset

Sia  $\mathcal{C}(k, n)$  un codice a blocco e sia  $v \in \mathcal{V}_n$  un vettore di  $n$  cifre binarie, si definisce *coset* di  $\mathcal{C}(k, n)$  individuato da  $v$  l'insieme:

$$C_v = C + v = \{x + v : x \in \mathcal{C}\}$$

#### 12.4.2 Proprietá dei coset

1. Qualsiasi vettore in  $\mathcal{V}_n$  appartiene a un coset di  $\mathcal{C}(k, n)$
2. Ciascun coset contiene  $2^k$  elementi
3. Due coset o sono coincidenti o hanno intersezione nulla
4. Ci sono  $2^{n-k}$  coset distinti
5. Se  $v_1$  e  $v_2$  appartengono all'ostesso coset,  $v_1 + v_2 \in \mathcal{C}(k, n)$  é una parola di codice

**Esempio di coset:** Sia  $\mathcal{C}(2, 3) = \{000, 101, 010, 111\}$ . I coset di  $\mathcal{C}(2, 3)$ :

$$\mathcal{C} + 000 = \{000, 101, 010, 111\} = \mathcal{C}_0 \quad (1)$$

$$\mathcal{C} + 001 = \{001, 100, 011, 110\} = \mathcal{C}_1 \quad (2)$$

$$\mathcal{C} + 010 = \{010, 111, 000, 101\} = \mathcal{C}_0 \quad (3)$$

$$\mathcal{C} + 011 = \{011, 110, 001, 100\} = \mathcal{C}_1 \quad (4)$$

$$\mathcal{C} + 100 = \{100, 001, 110, 011\} = \mathcal{C}_1 \quad (5)$$

$$\mathcal{C} + 101 = \{101, 000, 111, 010\} = \mathcal{C}_0 \quad (6)$$

$$\mathcal{C} + 110 = \{110, 011, 100, 001\} = \mathcal{C}_1 \quad (7)$$

$$\mathcal{C} + 111 = \{111, 010, 101, 000\} = \mathcal{C}_0 \quad (8)$$

Il numero di coset é  $2^{n-k} = 2^{3-2} = 2$ .

Si possono applicare i coset per la decodifica:  $y = x + e$  dalla definizione di coset discende che i vettori  $e$  e  $y$  appartengono allo stesso coset  $\mathcal{C}_y$  e che i coset  $\mathcal{C}_e$  e  $\mathcal{C}_x$  sono coincidenti. Grazie alla proprietá dei coset la somma di qualsiasi elemento di  $\mathcal{C}_y$  con  $y$  individua una parola di codice. Il vettore  $e$  va scelto fra gli elementi di  $\mathcal{C}_y$ , la regola di decisione diveta:

$$\hat{e} = \arg \max_e P(e|y + e \in \mathcal{C}) = \arg \max_{e \in \mathcal{C}_y} P(e) = \arg \max_{v \in \mathcal{C}_y} w(v)$$



Tra tutti i  $2^k$  possibili vettori di  $\mathcal{C}_y$ , il principio di massima verosomiglianza dice che devo scegliere quello di peso minimo.

### 12.4.3 Algoritmo di decodifica

1. Avendo ricevuto il vettore  $y$  si trova un coset di appartenenza  $\mathcal{C}_y$ .
2. Si identifica il coset leader, la parola di peso minimo del coset  $\mathcal{C}_y$ , che é anche la parola di peso minimo del coset di  $\mathcal{C}_e$ .
3. Il coset leader é la stima del vettore di errore  $\hat{e}$

**Esempio di decodifica utilizzando i coset:** Sia  $\mathcal{C}(2, 4) = \{0000, 1011, 0101, 1110\}$  con  $d_{min} = 2$ , ho i coset:

$$\mathcal{C} + 0000 = \{0000, 1011, 0101, 1110\} \quad (1)$$

$$\mathcal{C} + 0001 = \{0001, 1010, 0100, 1111\} \quad (2)$$

$$\mathcal{C} + 0010 = \{0010, 1001, 0111, 1100\} \quad (3)$$

$$\mathcal{C} + 1000 = \{1000, 0011, 1101, 0110\} \quad (4)$$

Il numero di coset é  $2^{n-k} = 2^{4-2} = 4$ . Il coset (2) non so quale coset leader scegliere hanno lo stesso peso di Hamming, ci troviamo in questo poiché la  $d_{min}$  é molto bassa e ho il 50% di possibilità di sbagliare se il codice ricevuto capita in questo coset. Decodifichiamo:

- $y = [1101] \Rightarrow y \in (4)$ , coset leader:  $[1000]$   $\hat{x} = y + 1000 = 0101$
- $y = [1111] \Rightarrow y \in (2)$ , coset leader:  $[0001] \vee [0100]$   $\hat{x} = y + 0001 = 1110$

### 12.4.4 Decodifica mediante sindrome

Si definisce sindrome di  $y$  il vettore  $s$  ottenuto dal prodotto di  $y$  con la matrice di controllo di parità:

$$s = yH^T = (x + e)H^T = xH^T + eH^T = eH^T$$

#### Propietá:

- Tutti i membri di uno stesso coset hanno la stessa sindrome
- $s \in 1 \times (n - k)$
- Le  $2^{n-k}$  sindromi sono associate ai  $2^n - k$  diversi coset del codice  $\mathcal{C}(k, n)$
- Ciascuna sindrome é associata ai  $2^k$  pattern di errore appartenenti allo stesso coset.

**Procedura di decodifica:**

1. Calcola la sindrome  $s = yH^T$
2. Associa la sindrome al coset leader corrispondente  $s \rightarrow e_{CL}(s)$
3. Corregge l'errore sommando il coset leader alla  $n - \text{upla}$   $y$

La parola  $\hat{x}$  é una parola di codice:

$$\hat{x}H^T = (y + e_{CL}(s))H^T = s + s = 0$$

e per costruzione la parola di codice  $\hat{x}$  minimizza la distanza di Hamming da  $y$

**12.4.5 Decodifica a sindrome: Codici di Hamming  $m = 3$** 

Il codice ha  $d_{min} = 3$  ed é in grado di correggere esattamente un errore:  $t_{max} = \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor = 1$ . Si sceglie la matrice  $H$  in maniera che la tabella di decodifica associ alla sindrome il pattern di errore a peso 1 in cui il bit messo a 1 sia nella posizione corrispondente alla conversione della sindrome in decimale.

Sindrome	Coset Leader
[000]	[0000000]
[100]	[1000000]
[010]	[0100000]
[110]	[0010000]
[001]	[0001000]
[101]	[0000100]
[011]	[0000010]
[111]	[0000001]

(d) Codice non sistematico

Sindrome	Coset Leader
[000]	[0000000]
[100]	[0000100]
[010]	[0000010]
[110]	[1000000]
[001]	[0000001]
[101]	[0100000]
[011]	[0010000]
[111]	[0001000]

(e) Codice sistematico

**12.4.6 Esempio di decodifica**

Un codice lineare a blocchi ha la seguente matrice di controllo di parità:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determinare la matrice generatrice:

- Ci accorgiamo che il codice é in forma sistematica: abbiamo la matrice identica

$$H = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Allora la forma  $H = [P^T, I_{n-k}]$ , e la matrice parità ha forma  $G = [I_k, P]$ :

$$G = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2. Decodificare la parola  $y = [110110]$  ed identificare la parola di codice trasmessa:

- Verifichiamo se é stato introdotto errore, calcoliamo la sindrome  $s = yH^T$  e calcoliamone il prodotto in  $G(2)$ :

$$yH^T = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1]$$

- Essendo il codice diverso da 0 é stato introdotto un errore, devo trovare la stima dell'errore:  $y = x + e$  sia una parola di codice. La sindrome identifica un coset e di conseguenza l'errore a esso associato. Ma mi accorgo che  $[011]$  (sindrome) corrisponde a una riga della matrice di controllo di parità  $H$ , quindi posso selezionare la riga moltiplicandola per un vettore riga composto da zeri tranne un uno per la riga che voglio selezionare (questo avrà peso 1):

$$\hat{x} = y + \hat{e} = (y + \hat{e})H^T = yH^T + \hat{e}H^T = s + s = 0$$

$$[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \hat{y} &= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \\ \hat{e} &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ \hat{x} &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$

$$xH^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

- Abbiamo decodificato e siamo arrivati a una parola di codice. Evviva!  
UwU ti meriti un bacino.

**Esempio con codici di Hamming:**

## 12.5 Codici Ciclici

**Shift Ciclico:** Dato il vettore  $v = [v_0, \dots, v_{n-1}] \in \mathcal{V} = G(2)^n$  indichiamo con  $v^{(i)}$  il vettore ottenuto da  $v$  applicando uno *shift ciclico* di  $i$  posizioni a destra:

$$v^{(i)} = [v_{n-i}, v_{n-i+1}, \dots, v_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-i-1}]$$

### 12.5.1 Definizione di Codice Ciclico

Un codice lineare  $\mathcal{C}(k, n)$  si definisce *ciclico* se data una generica parola di codice  $x \in \mathcal{C}(k, n)$  ogni suo shift ciclico  $x^{(i)} \in \mathcal{C}(k, n)$ . Sono codici a correzione d'errore che hanno proprietà algebriche che rendono sia la rivelazione che la correzione di errore efficienti.

**Esempi - Codici Ciclici:**

- $\mathcal{C}(2, 3) = \{000, 110, 101, 011\}$
- $\mathcal{C}(2, 4) = \{0000, 1010, 0101, 1111\}$
- $\mathcal{C}(4, 7)$ :

Messaggio	Vettori di Codice	Polinomi di codice
[0000]	[0000000]	$0 = 0 \cdot g_{(D)}$
[1000]	[1101000]	$1 + D + D^3 = 1 \cdot g_{(D)}$
[0100]	[0110100]	$D + D^2 + D^4 = D \cdot g_{(D)}$
[1100]	[1011100]	$1 + D^2 + D^3 + D^4 = (1 + D) \cdot g_{(D)}$
[0010]	[0011010]	$D^2 + D^3 + D^5 = D^2 \cdot g_{(D)}$
[1010]	[1110010]	$1 + D + D^2 + D^5 = (1 + D^2) \cdot g_{(D)}$
[0110]	[0101110]	$D + D^3 + D^4 + D^5 = (D + D^2) \cdot g_{(D)}$
[1110]	[1000110]	$1 + D^4 + D^5 = (1 + D + D^2) \cdot g_{(D)}$
[0001]	[0001101]	$D^3 + D^4 + D^6 = D^3 \cdot g_{(D)}$
[1001]	[1100101]	$1 + D + D^4 + D^6 = (1 + D^3) \cdot g_{(D)}$
[0101]	[0111001]	$D + D^2 + D^3 + D^6 = (D + D^3) \cdot g_{(D)}$
[1101]	[1010001]	$1 + D^2 + D^6 = (1 + D + D^3) \cdot g_{(D)}$
[0011]	[0010111]	$D^2 + D^4 + D^5 + D^6 = (D^2 + D^3) \cdot g_{(D)}$
[1011]	[1111111]	$1 + D + D^2 + D^3 + D^4 + D^5 + D^6 = (1 + D^2 + D^3) \cdot g_{(D)}$
[1111]	[1001011]	$1 + D^3 + D^5 + D^6 = (1 + D + D^2 + D^3) \cdot g_{(D)}$

### 12.5.2 Rappresentazione algebrica di un codice ciclico

A ciascun vettore  $v = [v_0, \dots, v_{n-1}] \in \mathcal{V}$  é possibile associare un polinomio definito in  $GF(2)$ :

$$v_{(D)} = v_0 + v_1 D + \dots + v_{n-1} D^{n-1}$$

**Definizione:** se  $x_{(D)} \rightleftharpoons x \in \mathcal{C}(k, n) \Rightarrow$  si dice che  $x_{(D)}$  é in  $\mathcal{C}(k, n)$

**Propiet :** Uno *shift ciclico* 12.5 di  $i$  posizioni del vettore  $v$  é equivalente a moltiplicare il polinomio  $v_{(D)}$  per  $D^i$  modulo  $(D^n - 1)$ :

$$v^{(i)} \rightleftharpoons \text{mod } \{D^i v_{(D)}, (D^n - 1)\}$$

il modulo tra polinomi é il resto della divisione tra polinomi, il grado quindi sar  sempre minore o uguale a  $n$ . Fissando  $i = 1$  il polinomio diventa:

$$\begin{aligned} Dv_{(D)} &= v_0 D + v_1 D^2 + \dots + v_{n-1} D^n \\ &\stackrel{\pm v_{n-1}}{=} v_{n-1} + v_0 D + v_1 D^2 + \dots + \underbrace{v_{n-1} D^n - v_{n-1}}_{v_{n-1}(D^n - 1)} \\ &= v_{n-1} + v_0 D + v_1 D^2 + \dots + v_{n-2} D^{n-1} + v_{n-1}(D^n - 1) \end{aligned}$$

facendone il modulo:

$$\text{mod } \{D^i v_{(D)}, (D^n - 1)\} = v_{n-1} + v_0 D + v_1 D^2 + \dots + v_{n-2} D^{n-1} \rightleftharpoons v^{(1)}$$

ho ottenuto il codice shiftato di una posizione, analogamente si pu  dimostrare che:

$$D^i v_{(D)} = q_{(D)}(D^n - 1) + v_{n-i} + v_0 D + v_1 D^2 + \dots + v_{n-i-1} D^{n-1}$$

quindi il modulo ci fornisce lo shift:

$$\text{mod } \{D^i v_{(D)}, (D^n - 1)\} \rightleftharpoons v^{(i)}$$

**Teorema:** Sia  $g_{(D)} = g_0 + g_1 D + \dots + g_r D^r$  il polinomio di grado minimo associato ad una parola di codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$  allora:  $g_0 = 1$  e  $g_{(D)}$  é unico. Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che  $g_0 = 0$ :

$$g_{(D)} = g_1 D + \dots + g_r D^r = D(g_1 + \dots + g_r D^{r-1}) = Dg'_{(D)}$$

ma questo entra in contraddizione con le ipotesi:  $\mathcal{C}(k, n)$  é ciclico e quindi  $g'_{(D)}$  é in  $\mathcal{C}(k, n)$  ma il grado di  $g'_{(D)}$  é minore di  $r$ . Un ragionamento analogo simile si pu  fare per  $g_r = 0$ . Supponiamo che esistano due polinomi di grado minimo  $g_{1(D)}$  e  $g_{2(D)}$  in  $\mathcal{C}(k, n)$  allora:  $g_{3(D)} = g_{1(D)} g_{2(D)}$  é ancora in  $\mathcal{C}(k, n)$  e per quanto visto il grado di  $g_{3(D)}$  sarebbe minore di  $r$  e questo é impossibile.

### 12.5.3 Polinomio generatore di un codice ciclico

Il polinomio generatore di un codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$  é il polinomio

$$g_{(D)} = 1 + g_1 D + \cdots + D^r$$

non nullo e di grado minimo in  $\mathcal{C}(k, n)$ .

**Esempi:**

•

$$\mathcal{C}(2, 3) = \{000, \underbrace{110}_{1+D}, \underbrace{101}_{1+D^2}, \underbrace{011}_{D+D^2}\} \rightarrow g_{(D)} = 1 + D$$

•

$$\mathcal{C}(2, 4) = \{0000, \underbrace{1010}_{1+D^2}, \underbrace{0101}_{D+D^2}, \underbrace{1111}_{1+D+D^2+D^3}\} \rightarrow g_{(D)} = 1 + D^2$$

- Il codice  $\mathcal{C}(4, 7)$  dalla tabella sopra costruita (12.5.1) scegliamo il polinomio generatore:

$$g_{(D)} = 1 + D + D^3$$

**Teorema:** Un polinomio  $x_{(D)}$  é in  $\mathcal{C}(k, n) \Leftrightarrow x_{(D)}$  é un multiplo di  $g_{(D)}$ . Dimostrazione: Ogni multiplo di  $g_{(D)}$  é in  $\mathcal{C}(k, n)$ . Poiché  $\mathcal{C}(k, n)$  é ciclico i polinomi  $Dg_{(D)}, D^2g_{(D)}, \dots, D^{n-r-1}g_{(D)}$  sono in  $\mathcal{C}(k, n)$  e lo é anche qualsiasi loro combinazione lineare:

$$x_D = u_{(D)}g_{(D)} = u_0g_{(D)} + u_1Dg_{(D)} + \cdots + u_{n-r-1}D^{n-r-1}g_{(D)}$$

Ogni polinomio in  $\mathcal{C}(k, n)$  può essere espresso come multiplo di  $g_{(D)}$ . Per assurdo assumiamo che  $x_{(D)}$  sia in  $\mathcal{C}(k, n)$  ma non multiplo di  $g_{(D)}$  allora:

$$x_{(D)} = a_{(D)}g_{(D)} + b_{(D)} \Rightarrow b_{(D)} = x_{(D)} - a_{(D)}g_{(D)}$$

poiché sia  $x_{(D)}$  che  $a_{(D)}g_{(D)}$  appartengono a  $\mathcal{C}(k, n)$ , per la linearità del codice anche  $b_{(D)}$  é in  $\mathcal{C}(k, n)$  ma questo é impossibile perché  $b_{(D)}$  essendo il resto della divisione tra  $x_{(D)}$  e  $g_{(D)}$  é di grado minore di  $g_{(D)}$ .

**Corollario:** l'insieme degli  $n - r$  polinomi

$$\{g_{(D)}, Dg_{(D)}, \dots, D^{n-r-1}g_{(D)}\}$$

costituisce una base per  $\mathcal{C}(k, n)$

**Corollario:** Se il polinomio generatore  $g_{(D)}$  del codice  $\mathcal{C}(k, n)$  ha grado  $r$  allora il numero di parole del codice é  $2^{n-r}$  e  $r = n - k$ . Dimostrazione: Tutte le possibili combinazioni in  $GF(2)$  degli  $n - r$  polinomi che costituiscono una base per  $\mathcal{C}(k, n)$  sono  $2^{n-r}$  e quindi le parole di codice sono  $2^{n-r} \Rightarrow k = n - r$ .

**Corollario:** Il grado del polinomio generatore  $g_{(D)}$  del codice  $\mathcal{C}(k, n)$  é uguale al numero di bit di controllo di parit .

#### 12.5.4 Teorema fondamentale generatore di un codice ciclico

Un polinomio  $g_{(D)}$ , il cui grado é  $n - k$ , é un generatore di un codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n) \Leftrightarrow g_{(D)}$  é un divisore di  $D^n - 1$ . Dimostrazione: Il polinomio  $g_{(D)}$  é un generatore di  $\mathcal{C}(k, n)$  allora  $g_{(D)}$  é un divisore di  $D^n - 1$ , poich   $g_{(D)}$  é di grado  $n - k$  si ha che:

$$\begin{aligned} D^k g_{(D)} &= (D^n - 1) + g_{(D)}^{(k)} \\ (D^n - 1) &= D^k g_{(D)} - g_{(D)}^{(k)} = (D^k - a_{(D)}) g_{(D)} \end{aligned}$$

Se il polinomio  $g_{(D)}$  di grado  $n - k$  é divisore di  $D^n - 1$  allora  $g_{(D)}$  é generatore di un codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$ . Qualsiasi polinomio nella forma:

$$x_{(D)} = u_0 g_{(D)} + u_1 D g_{(D)} + \cdots + u_{k-1} D^{k-1} g_{(D)} = u_{(D)} g_{(D)}$$

ha grado pari o inferiore a  $n - 1$  ed é multiplo di  $g_{(D)}$ . Poich   $u_{(D)}$  pu  assumere  $2^k$  valori allora linsieme dei  $2^k$  vettori forma un codice lineare  $\mathcal{C}(k, n)$ . Sia

$$v_{(D)} = v_0 + v_1 D + \cdots + v_{n-1} D^{n-1} = a_{(D)} g_{(D)} \in \mathcal{C}(k, n)$$

allora:

$$\begin{aligned} Dv_{(D)} &= v_0 D + v_1 D^2 + \cdots + v_{n-1} D^n \\ &= v_{n-1} (D^n - 1) + (v_{n-1} + v_0 D + v_1 D^2 + \cdots + v_{n-2} D^{n-1}) \\ &= v_{n-1} (D^n - 1) + v_{(D)}^{(1)} \end{aligned}$$

Poich   $g_{(D)}$  é divisore di  $D^n - 1$  per ipotesi e di  $Dv_{(D)} = Da_{(D)} g_{(D)}$  anche  $v_{(D)}^{(1)}$  é multiplo di  $g_{(D)}$  allora  $\mathcal{C}(k, n)$  é ciclico.

**Esempi di divisione tra polinomi in  $GF(2)$**  Ricordiamoci in  $GF(2)$  aggiungere o togliere é la stessa cosa il risultato non varia

- $\mathcal{C}(2, 3) = \{000, 110, 101, 011\} \Rightarrow g_{(D)} = 1 + D$

$$\frac{D^3 - 1}{1 + D} = D^2 + D + 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & +1 \\ -x^3 - x^2 & \\ \hline & -x^2 \\ & x^2 + x \\ \hline & x + 1 \\ & -x - 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

- $\mathcal{C}(2, 4) = \{0000, 1010, 0101, 1111\} \Rightarrow g_{(D)} = 1 + D^2$

$$\frac{D^4 - 1}{1 + D^2} = D^2 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +1 \\ -x^4 - x^2 & \\ \hline & -x^2 + 1 \\ & x^2 + 1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

- $\mathcal{C}(2, 4) \Rightarrow g_{(D)} = 1 + D + D^3$

$$\frac{D^7 - 1}{1 + D + D^3} = D^4 + D^2 + D + 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^7 & +1 \\ -x^7 - x^5 - x^4 & \\ \hline & -x^5 - x^4 \\ & x^5 + x^3 + x^2 \\ \hline & -x^4 + x^3 + x^2 \\ & x^4 + x^2 + x \\ \hline & x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ & -x^3 - x - 1 \\ \hline & 2x^2 \end{array}$$

- Il polinomio  $D^6 - 1$  può essere fattorizzato in molte maniere diverse. Ad ogni fattore corrisponde un polinomio generatore  $g_{(D)}$  diverso e quindi un codice ciclico diverso.

$$D^6 - 1 = (1 + D^2)^2(1 + D + D^2)^2 s$$

### 12.5.5 Matrice generatrice di un codice ciclico

Dato il codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$  con polinomio genratore  $g_{(D)}$  dal momento che l'insieme dei polinomi

$$\{g_{(D)}, Dg_{(D)}, \dots, D^{k-1}g_{(D)}\}$$

costituisce una base per il codice, la matrice generatrice del codice é

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_{n-k} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & g_{n-k} & \dots & g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

considerato che  $g_0 = 1$  le righe possono essere sommate tra loro per ottenere la matrice generatrice del codice equivalente in forma sistematica  $G = [I_k, P]$ .



### 12.5.6 Controllo di parit  per un codice ciclico

Dato il codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$  con polinomio generatore  $g_{(D)}$  esiste sempre un polinomio  $h_{(D)} = h_0 + h_1D + \dots + h_{(k)}D^k$  tale che

$$h_{(D)} = \frac{(D^n - 1)}{g_{(D)}} \Rightarrow g_{(D)}h_{(D)} = D^n - 1$$

Sia  $x_{(D)} = u_{(D)}g_{(D)} \in \mathcal{C}(k, n)$  allora:

$$\begin{aligned} v_{(D)} &= x_{(D)}h_{(D)} = u_{(D)}g_{(D)}h_{(D)} \\ &= u_{(D)}(D^n - 1) = D^n u_{(D)} - u_{(D)} \end{aligned}$$

Poich   $u_{(D)}$    un polinomio di grado massimo  $k - 1$  e  $D^n u_{(D)}$    di grado minimo  $n$ , sappiamo per certo che, se  $x_{(D)}$    in  $\mathcal{C}(k, n)$ , gli  $n - k$  coefficienti con indici  $k, k + 1, \dots, n - 1$  del polinomio  $v_{(D)}$  devono essere 0.

Poich     $v_{(D)} = x_{(D)}h_{(D)}$  il coefficiente  $m$ -esimo del polinomio  $v_{(D)}$  si ottiene come la somma di tutti i coefficienti che moltiplicano  $D^m$

$$D^m = v_m = x_0h_m + x_1h_{m-1} + \dots + x_mh_0 = \sum_{j=0}^{n-1} x_{(j)}h_{(m-j)}$$

Abbiamo un set di  $n - k$  equazioni del tipo

$$v_m = \sum_{j=0}^{n-1} x_{(j)}h_{(m-j)} = 0 \quad m = k, k + 1, \dots, n - 1$$

le equazioni possono essere riassunte nella forma matriciale

$$xH^T = 0_{n-k}$$

dove la matrice  $H$  di dimensioni  $(n - k) \times n$    la matrice controllo di parit  del codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$

$$H = \begin{bmatrix} h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix}$$

il calcolo della sindrome pu  essere effettuato mediante:

$$s = yH^T$$

**Esempio calcolo di matrice generatrice e controllo di parit ** Dato il codice ciclico  $\mathcal{C}(k = 4, n = 7)$  con polinomio generatore  $g_{(D)} = 1 + D + D^3$  con coefficienti

$$g_0 = 1, \quad g_1 = 1, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 1,$$

la matrice generatrice é

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in forma sistematica

$$G = [I_k, P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcoliamo la matrice di controllo parità, il vettore

$$h_{(D)} = \frac{D^n - 1}{g_{(D)}} = 1 + D + D^2 + D^4$$

i coefficienti del polinomio sono

$$h_0 = 1, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 0, h_4 = 1,$$

da cui la matrice di controllo di parità

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in forma sistematica

$$H = [P^T, I_{n-k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 12.5.7 Metodo alternativo per il calcolo della sindrome

La sindrome associata alla matrice di controllo di parità sistematica si può calcolare usando un metodo alternativo. Al ricevitore si ha

$$y = x + e \Rightarrow y_{(D)} = x_{(D)} + e_{(D)}$$

la sindrome può essere calcolata come il resto della divisione tra polinomi

$$\frac{y_{(D)}}{g_{(D)}} \Rightarrow y_{(D)} = a_{(D)}g_{(D)} + s_{(D)}$$

poiché il grado di  $s_{(D)}$  é *minore* del grado di  $g_{(D)}$ , il grado massimo di  $s_{(D)}$  é  $n - k - 1$

- Se  $e_{(D)} = 0$  il canale non introduce errori ed é

$$s_{(D)} = \text{mod}\{x_{(D)}, g_{(D)}\} = \text{mod}\{u_{(D)}g_{(D)}, g_{(D)}\} = 0$$

- Se  $e_{(D)} \neq 0$  la sindrome diventa

$$\begin{aligned} s_{(D)} &= \text{mod}\{x_{(D)} + e_{(D)}, g_{(D)}\} = \text{mod}\{x_{(D)}, g_{(D)}\} + \text{mod}\{e_{(D)}, g_{(D)}\} \\ &= \text{mod}\{e_{(D)}, g_{(D)}\} \stackrel{\deg(e_{(D)}) < \deg(g_{(D)})}{=} e_{(D)} \end{aligned}$$

$s_{(D)}$  corrisponde alla sindrome ottenuta con la matrice di controllo parità in forma sistematica.

### 12.5.8 Decodifica a sindrome per codici ciclici

Esistono due metodi possibili per effettuare la decodifica dei codici ciclici:

- Utilizzando l'approccio classico dei codici a blocco: la sindrome  $s_{(D)}$  mappa un polinomio di grado  $n - 1$  su uno di grado  $n - k - 1$ . Una volta calcolata la sindrome, si identifica un coset ed il pattern di errore dal coset leader. É svantaggioso la complessità di associare tutti i vettori in  $\mathcal{V}$  ad uno specifico coset
- Posso sfruttare le proprietà dei codici ciclici per derivare un metodo alternativo

**Teorema:** Dato il codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$  con polinomio generatore  $g_{(D)}$  e distanza minima  $d_{min}$ , sia  $s_{(D)}$  la sindrome associata al vettore ricevuto  $y$ , se

$$w_{(s_{(D)})} \leq \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor \Rightarrow \hat{e}_{(D)} = s_{(D)}$$

Dimostrazione: Per costruzione  $s_{(D)}$  e  $y_{(D)}$  sono nello stesso coset  $C_y = C_s = \{\mathcal{C} + s_{(D)}\}$  poiché si ha

$$w_{(s)} \leq \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor \Rightarrow s_{(D)} \Leftrightarrow [s, 0, \dots, 0]$$

é il coset leader e quindi la stima dell'errore. In altre parole poiché  $s_{(D)} = \text{mod}\{e_{(D)}, g_{(D)}\}$ , se il grado di  $\deg(e_{(D)}) < n - k \Rightarrow s_{(D)} = e_{(D)}$

**Esempio decodifica di codici ciclici** Sia  $x = [0110100]$  una parola del codice ciclico  $\mathcal{C}(4, 7)$  con polinomio generatore  $g_{(D)} = 1 + D + D^3$ . Sia  $e = [0100000]$  l'errore introdotto dal canale. Il vettore ricevuto é

$$y = x + e = [0010100] \Leftrightarrow y_{(D)} = D^2 + D^4$$

da cui calcoliamo la sindrome

$$s_{(D)} = \text{mod}\{y_{(D)}, g_{(D)}\} = D$$

ho quindi

$$w_{(s_{(D)})} = 1 \Rightarrow s_{(D)} = e_{(D)} = \hat{e} = [0100000]$$

Sia ora  $e = [0000010]$  l'errore introdotto dal canale. il vettore ricevuto é

$$y = x + e = [0110110] \Leftrightarrow y_{(D)} = D + D^2 + D^4 + D^5$$

da cui calcoliamo la sindrome

$$s_{(D)} = \text{mod}\{y_{(D)}, g_{(D)}\} = D^2 + D + 1$$

ho quindi

$$w_{(s_{(D)})} = 3 \Rightarrow s_{(D)} \neq \hat{e}_{(D)}$$

per trovare l'errore bisogna trovare un'altro metodo.

**Teorema:** Dato il codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$  sia  $s_{(D)}$  la sindrome del vettore ricevuto  $y$  allora la sindrome  $s_{1(D)}$  della parola  $y^{(1)}$  ottenuta dallo shift ciclico di  $y$  di una posizione si calcola:

$$s_{1(D)} = \text{mod}\{y_{(D)}^{(1)}, g_{(D)}\} = Ds_{(D)} - s_{n-k-1}g_{(D)}$$

Dimostrazione: Poiché vale la relazione  $y_{(D)} = u_{(D)}g_{(D)} + s_{(D)}$  la relazione relativa a  $y_{(D)}^{(1)}$  é

$$\begin{aligned} Dy_{(D)} &= Du_{(D)}g_{(D)} + Ds_{(D)} \\ &= (Du_{(D)}g_{(D)} + s_{n-k-1})g_{(D)} + Ds_{(D)} - s_{n-k-1}g_{(D)} \end{aligned}$$

poiché il grado massimo di  $Ds_{(D)} - s_{n-k-1}g_{(D)}$  é  $n - k - 1$  allora  $s_{1(D)} = Ds_{(D)} - s_{n-k-1}g_{(D)}$  é il resto della divisione di  $Dy_{(D)}$  per  $g_{(D)}$  ed é quindi la sindrome di  $y_{(D)}^{(1)}$ .

**Esempio decodifica a sindrome di codici ciclici** Sia  $x = [0110100]$  una parola del codice ciclico  $\mathcal{C}(4, 7)$  con polinomio generatore  $g_{(D)} = 1 + D + D^3$  ed  $e = [0000010]$  l'errore introdotto dal canale. Il vettore ricevuto é

$$y = x + e = [0110110] \Leftrightarrow y_{(D)} = D + D^2 + D^4 + D^5$$

da cui calcoliamo la sindrome

$$s_{(D)} = \text{mod}\{y_{(D)}, g_{(D)}\} = D^2 + D + 1$$

Lo shift ciclico di  $y$ :

$$y^{(1)} = [001011] \Leftrightarrow y_{(D)}^{(1)} = D^2 + D^3 + D^5 + D^6$$

$$\begin{aligned} s_{1(D)} &= \text{mod}\{y_{(D)}^{(1)}, g_{(D)}\} = D^2 + 1 \\ &= D(D^2 + D + 1) - D^3 + D + 1 \end{aligned}$$

Lo shift ciclico di  $y^{(1)}$ :

$$y^{(2)} = [100101] \Rightarrow y_{(D)}^{(2)} = 1 + D^3 + D^4 + D^6$$

$$\begin{aligned} s_{2(D)} &= \text{mod} \left\{ y_{(D)}^{(2)}, g_{(D)} \right\} = 1 = D^2 + 1 \\ &= D(D^2 + D + 1) - D^3 + D + 1 \end{aligned}$$

**Definizione:** Dato un vettore  $v$  di  $n$  componenti, una sequenza ciclica di zeri di lunghezza  $\ell$  é una successione di  $\ell$  zeri consecutivi in senso ciclico.

**Esempi:**

- $n = 7$ ,  $\ell = 3$ ,  $v = [1000101]$
- $n = 7$ ,  $\ell = 4$ ,  $v = [0010100]$
- $n = 15$ ,  $\ell = 9$ ,  $v = [000000110001000]$

**Teorema:** Dato il codice ciclico  $\mathcal{C}(k, n)$ , con polinomio generatore  $g_{(D)}$  e distanza minima  $d_{min}$ , tale che tutti i pattern di errore correggibili abbiano sequenza ciclica di almeno  $k$  zeri, ricevuto il vettore  $y = x + e$  con  $w_{(e)} \leq \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$ , l'algoritmo di decodifica a massima verosomiglianza é composto dai seguenti passi:

- Calcolo iterativamente le sindromi  $s_{i(D)}$  per tutti gli shift ciclici di  $y_{(D)}$  e computo  $w_{s_{i(D)}}$
- trovo  $m$  per cui  $w_{s_{m(D)}} \leq \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$
- stimo  $\hat{e}_{(D)} = \text{mod} \{ D^{n-m} s_{m(D)}, D^{n-1} \}$

Dimostrazione:

- Esistenza di  $m$ : Poiché  $w_{(e)} \leq \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$  e tutti i pattern di errore correggibili hanno una sequenza ciclica di almeno  $k$  zeri, esiste uno shift ciclico di  $m$  posizioni di  $y$  tale che tutti gli 1 di  $e$  siano compresi nelle prime  $n - k$  posizioni di

$$y^m \Rightarrow s_{m(D)} = e_{(D)}^{(m)}$$

- Stima dell'errore

$$\begin{aligned} D^m(y_{(D)} + D^{n-m} s_{m(D)}) &= \\ &= D^m y_{(D)} + D^n s_{m(D)} = y_{(D)}^{(m)} + D^n s_{m(D)} \\ &= u_{(D)} g_{(D)} + s_{m(D)} + D^n s_{m(D)} = u_{(D)} g_{(D)} + (D^n - 1) s_{m(D)} \\ &= (u_{(D)} + h_{(D)} s_{m(D)}) g_{(D)} \end{aligned}$$

## 12.6 Codici Convoluzionali

Rispetto ai codici visti fino ad ora i codici convoluzionali sono in generale in forma non sistematica. In un codice convoluzionale viene trasmesso solo il bit di parità. Ad ogni tempo di bit il codificatore combina i bit all'interno di una finestra mobile di lunghezza  $L$ , chiamata *constraint length* del codice, per generare gli  $n$  bit in uscita. Il processo di codifica può essere interpretato come una convoluzione in  $GF(2)$  ed il codificatore di un codice convoluzionale  $(n, k, L)$  si può rappresentare come  $n$  filtri lineari in  $GF(2)$  in parallelo.

### 12.6.1 Codificatore codice convoluzionale

Un codificatore convoluzionale è costituito da uno shift register e da sommatore:

- Ad ogni periodo di clock (definito dall'intero  $i$ ) nel codificatore entrano  $k$  (tipicamente 1) cifre binarie rappresentate dal vettore  $u^i = [u_1^i, u_2^i, \dots, u_k^i]$  ed escono  $n$  bit raccolti nel vettore di uscita  $x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]$
- All'interno del codificatore  $u^{(i)}$  è combinato con i precedenti  $L - 1$  vettori di ingresso  $u^{(i-1)}, u^{(i-2)}, \dots, u^{(i-L+1)}$  per formare l'uscita  $x^{(i)}$



Figure 149: Esempio codificatore

La principale differenza rispetto ai codici a blocco è costituita dal fatto che l'uscita attuale non dipende solo dalla parola attuale ma anche dalla storia passata contenuta nelle  $L - 1$  parole precedenti. La storia è composta da  $L - 1$  parole perché rimuoviamo quella in ingresso, il numero  $L$  di parole che contribuiscono all'uscita attuale è la *constraint length* del codice. Il numero complessivo di celle di memoria del codificatore è  $kL - 1 : (L - 1) \times k$  per memorizzare la memoria del sistema più  $k - 1$  per memorizzare i bit della parola attuale.

### 12.6.2 Generatori di un codice convoluzionale

I generatori definiscono completamente un codice convoluzionale, così come la matrice generatrice o il polinomio generatore definiscono i codici a blocco e i codici ciclici. Per i codici convoluzionali

- A ciascuna delle  $n$  uscite corrisponde generatore e a ciascun generatore corrisponde un sommatore in  $GF(2)$ .
- Ciascun generatore ha  $kL$  elementi uno per ciascun ingresso che contribuisce all'uscita del codificatore.

- Quando un elemento é 1 significa che il corrispondente ingresso é connesso al sommatore altrimenti se é 0 non cé connessione.

I vettori generatori rapresentano la risposta impulsiva degli  $n$  filtri lineari in  $GF(2)$ . Assumendo che  $k = 1$  il generatore per il bit  $m$ -esimo é  $g_m = [g_m^{(0)}, g_m^{(1)}, \dots, g_m^{(L-1)}]$  e l' $m$ -esimo bit di uscita  $x_m^{(i)}$  si ottiene con

$$x_m^{(i)} = \sum_{\ell=0}^{L-1} g_m^{(\ell)} u^{(i-\ell)}$$

l'uscita  $m$ -esima é la convoluzione discreta in  $GF(2)$  tra i vettori  $[u^{(i)}, u^{(i-1)}, \dots, u^{(i-L+1)}]$  e  $g_m$  da cui il nome di *codice convoluzionale*.



Figure 150: Immagini generatori slide

**Esempio generatore:**

**Esempio generatore - Diagramma a Blocchi:** Consideriamo il codice con  $k = 1$  e  $R = \frac{1}{2}$  con generatori  $g_1 = [1, 1, 1] = 7_8$  e  $g_2 = [1, 0, 1] = 5_8$ . La constraint length é  $L = 3$ . Le due uscite sono

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= u_1^{(i)} + u_1^{(i-1)} + u_1^{(i-2)} \\ x_2^{(i)} &= u_1^{(i)} + u_1^{(i-2)} \end{aligned}$$

il diagramma a blocchi del codificatore é



Figure 151: Codificatore a blocchi

### 12.6.3 Rappresentazione come macchina a stati

Ad ogni istante di segnalazione l'uscita dal codificatore convoluzionale dipende dall'ingresso attuale e dalla memoria. Le ultime  $k(L-1)$  celle dello shift register memorizzano la storia passata del codificatore che è riassunta nel vettore di stato

$$\sigma = \left( u^{(i-1)}, u^{(i-2)}, \dots, u^{(i-L+1)} \right)$$



Figure 152: Status register

Il codificatore può presentarsi come una macchina a stati finiti la cui evoluzione nel tempo è descritta da equazioni di stato

$$\begin{aligned} x^{(i)} &= \delta \left( u^{(i)}, \sigma^{(i)} \right) \\ \sigma^{(i+1)} &= \lambda \left( u^{(i)}, \sigma^{(i)} \right) \end{aligned}$$

La prima è detta *equazione di uscita*, la seconda equazione è detta *equazione di transizione di stato*. Il numero di stati complessivo è  $2^{k(L-1)}$  con celle di memoria pari a  $k(L-1)$ . Il funzionamento del codificatore si può esprimere come un diagramma di stato nel quale sono indicate le transizioni da uno stato all'altro sotto effetto dei diversi ingressi.

### 12.6.4 Diagramma di Stato

Consideriamo il codice con  $k = 1$  e  $R = \frac{1}{2}$  con generatori  $g_1 = [1, 1, 1] = 7_8$  e  $g_2 = [1, 0, 1] = 5_8$ . La constraint length è  $L = 3$ . Il numero di stati è pari a  $2^{3-1} = 4$  ed il relativo diagramma di stato





Figure 153: Diagramma di stato

Il diagramma di stato non ha un indicatore temporale. Introducendo un indicatore temporale il diagramma di stato si trasforma nel *diagramma a traliccio*, su cui é possibile seguire l'evoluzione degli stati e delle uscite del codificatore in seguito ad una determinata sequenza di vettori di ingresso. Partendo da un qualsiasi stato si può raggiungere qualsiasi altro stato del traliccio in un numero massimo di  $L - 1$  passi

metti le cose che sono nella slide dopo l'esempio e gli appunti

#### 12.6.5 Diagramma a traliccio

Il diagramma a traliccio per il codice con  $k = 1$  e  $R = \frac{1}{2}$  con generatori  $g_1 = [1, 1, 1] = 7_8$  e  $g_2 = [1, 0, 1] = 5_8$  é



Figure 154: Diagramma a traliccio

Il diagramma a traliccio permette di osservare l'evoluzione del codificatore in risposta ad una determinata sequenza di ingresso. Per esempio per il codice con  $k = 1$  e generatori  $g_1 = 7_8$  e  $g_2 = 5_8$  se  $\sigma^{(0)} = 00$  e in ingresso si ha la sequenza  $u^{(0)} = 0, u^{(1)} = 1, u^{(2)} = 1, u^{(3)} = 1$  il percorso sul traliccio sarà



Figure 155: Percorso con ingresso  $u^{(0)} = 0, u^{(1)} = 1, u^{(2)} = 1, u^{(3)} = 1$

### 12.6.6 Distanza colonna

Sia dato un codice convoluzionale  $\mathcal{C}(n, k, L)$ . Consideriamo  $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(\ell, \sigma)$ , l'insieme di tutte le possibili sequenze che originano dallo stato  $\sigma$  e hanno lunghezza pari a  $\ell n$ , ottenute cioè dopo  $\ell$  passi sul traliccio. La *distanza colonna* del codice  $\mathcal{C}$  al passo  $\ell$  è la minima distanza di Hamming fra due sequenze  $x$  e  $x'$  in  $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(\ell, \sigma)$  che siano differenti nei primi  $n$  bit, in corrispondenza quindi della prima parola di uscita del codificatore

$$d_{c(\ell)} = \min_{\substack{x, x' \in \mathcal{X}_{\mathcal{C}}(\ell, \sigma) \\ x^{(1)} \neq x'^{(1)}}} d(x, x')$$

come nel caso del calcolo della  $d_{\min(\mathcal{C})}$  dei codici a blocco lineari, non fa nessuna differenza la particolare sequenza di riferimento e quindi il calcolo della  $d_{c(\ell)}$  si sceglie lo stato  $\sigma$  in modo che una delle due sequenze sia il vettore di tutti zeri

### 12.6.7 Distanza libera

La distanza libera di un codice convoluzionale  $\mathcal{C}$ ,  $d_{free}$  è il limite della distanza colonna per  $\ell$  che tende all'infinito

$$d_{free} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} d_{c(\ell)}$$

In pratica la distanza libera coincide con la distanza colonna quando i due percorsi sul traliccio a massima distanza confluiscono. La distanza libera, come la  $d_{\min}$  nei codici a blocco, è una misura della bontà del codice: tanto maggiore è la distanza libera tanto più è difficile confondere due sequenze che originano dallo stesso stato.

### 12.6.8 Strategia di decodifica a massima verosomiglianza

Si consideri una trasmissione su  $N$  intervalli di segnalazione. La trasmissione è codificata con il codice convoluzionale  $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(\ell, \sigma)$ , che ad ogni segnalazione associa  $k$  bit di informazione a  $n$  bit codificati. Sia  $y$  la sequenza ricevuta di lunghezza  $nN$  bit, la strategia di decodifica a massima verosomiglianza consiste nel trovare la sequenza  $\hat{x}$  che, fra tutte le  $2^{kN}$  possibili sequenze di tentativo  $\tilde{x}$ , massimizza la probabilità condizionata  $P[y|\tilde{x}]$

$$\hat{x} = \arg \max_{\tilde{x}} P[y|\tilde{x}]$$

Poiché gli eventi di errore sono indipendenti da bit a bit è conveniente riscrivere la probabilità condizionata come il prodotto delle probabilità condizionate ottenute per ciascuna parola di codice trasmessa

$$P[y|\tilde{x}] = \prod_{\ell=1}^N P[y^{(\ell)}|\tilde{x}] = \prod_{\ell=1}^N P[y^{(\ell)}|\tilde{x}^{(\ell)}]$$

Assumiamo che la probabilità di ricevere un bit errato sia  $p$



Figure 156: Sistema BSC

la probabilità condizionata  $P[y^{(\ell)}|\tilde{x}^{(\ell)}]$  si ottiene a partire dal calcolo della distanza di Hamming  $\lambda_{\tilde{x}}^{(\ell)} = d_H(y^{(\ell)}, \tilde{x}^{(\ell)})$ , infatti per ogni bit diverso tra le due parole di assume che ci sia stato errore e quindi

$$P[y^{(\ell)}|\tilde{x}^{(\ell)}] = p^{\lambda_{\tilde{x}}^{(\ell)}} (1-p)^{n-\lambda_{\tilde{x}}^{(\ell)}} = (1-p)^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\lambda_{\tilde{x}}^{(\ell)}}$$

Poiché la funzione logaritmo é crescente la sequenza di tentativi che massimizza  $P[y|\tilde{x}]$  che massimizza anche  $\log(\lambda_{\tilde{x}}^{(\ell)})$ . Sostituendo la funzione 12.6.8 in quella appena calcolata e prendendone il logaritmo

$$\log(P[y^{(\ell)}|\tilde{x}^{(\ell)}]) = nN \log((1-p)^n) + \log\left(\frac{p}{1-p}\right) \sum_{\ell=1}^N \lambda_{\tilde{x}}^{(\ell)}$$

trascurando i termini ininfluenti e considerando che é lecito assumere  $\log\left(\frac{p}{1-p}\right) < 0$  si ottiene la regola di decisione

$$\hat{x} = \arg \max_{\tilde{x}} P[y|\tilde{x}] = \arg \min_{\tilde{x}} \sum_{\ell=1}^N \lambda_{\tilde{x}}^{(\ell)}$$

La strategia a massima verosomiglianza consiste nello scegliere la sequenza  $\hat{x}$  che minimizza la distanza di Hamming dalla sequenza ricevuta

$$d_H(y, \hat{x}) = \sum_{\ell=1}^N \lambda_{\hat{x}}^{(\ell)}$$

osserviamo che la trasmissione dura  $N$  intervalli di segnalazione, in cui ogni volta vengono inviati al codificatore  $k$  bit, il numero di sequenza da considerare é  $2^{kN}$ . !! La complessità della decodifica cresce esponenzialmente con  $k$  e  $N$ .

### 12.6.9 Algoritmo di Viterbi

Consideriamo il codice  $\mathcal{C}(n, k, L)$  e assumiamo che si effettui una trasmissione di  $N$  parole di codice ciascuna composta da  $n$  bit e che lo stato iniziale  $\sigma^{(0)}$  e quello finale sia  $\sigma^{(N)}$  del codificatore siano conosciuti anche al ricevitore. Data

la sequenza ricevuta  $y$  di  $nN$  bit, l'obiettivo del decodificatore é individuare sul traliccio il percorso  $\hat{x}$  piú breve (a minima distanza di Hamming) che partendo da  $\sigma^{(0)}$  arrivi a  $\sigma^{(N)}$ . La sequenza  $\hat{x}$  deve minimizzare la metrica

$$d_H(y, \hat{x}) = \wedge(y, \hat{x}) = \sum_{\ell=1}^N \lambda_{\hat{x}}^{(\ell)}$$

l'algoritmo di Viterbi permette di trovare il percorso piú breve su di un traliccio a bassa complessit . Definiamo:

- **Metrica di Ramo:**  $\sigma_j \rightarrow \sigma_k$  al passo  $\ell$ , a distanza di Hamming  $\lambda^{(\ell)} = d_H(y^{(\ell)}, \tilde{x}_{\sigma_j \rightarrow \sigma_k})$ . La metrica   calcolata come distanza tra la sequenza ricevuta al passo  $\ell$  e l'uscita corrispondente alla transizione sul traliccio dallo stato  $\sigma_j$  e lo stato  $\sigma_k$ .
- **Metrica Cumulata:** al passo  $f$  allo stato  $\sigma_k$ , la grandezza  $\wedge_{x(\sigma_k)}^{(f)}$  ottenuta sommando tutte le  $f$  metriche di ramo calcolate su gli  $f$  rami sul traliccio di un percorso  $x$  che si fermi allo stato  $\sigma_k$  al passo  $f$ .

L'algoritmo di viterbi si basa sulla seguente intuizione:

- Supponiamo che due diversi percorsi  $x_1$  e  $x_2$  confluiscono al passo  $f$  nello stesso nodo  $\sigma_k$  sul traliccio e siano  $\wedge_{x_1(\sigma_k)}^{(f)} < \wedge_{x_2(\sigma_k)}^{(f)}$  le metriche cumulate dei due percorsi calcolate al passo  $f$ .
- Supponiamo che al passo successivo  $f + 1$ , i percorsi  $x_1$  e  $x_2$  seguano lo stesso ramo sul traliccio, ad esempio  $\sigma_k \rightarrow \sigma_q$ , in questo caso la metrica di ramo   la stessa per i due percorsi  $\lambda_{(\sigma_k, \sigma_q)}^{(f+1)}$ .
- Per le nuove metriche sar  ancora  $\wedge_{x_1(\sigma_q)}^{(f+1)} < \wedge_{x_2(\sigma_q)}^{(f+1)}$  infatti si ha

$$\begin{aligned} \wedge_{x_1(\sigma_q)}^{(f+1)} &= \wedge_{x_1(\sigma_k)}^{(f)} + \lambda_{(\sigma_k, \sigma_q)}^{(f+1)} < \wedge_{x_2(\sigma_k)}^{(f)} + \lambda_{(\sigma_k, \sigma_q)}^{(f+1)} \\ &= \wedge_{x_2(\sigma_q)}^{(f+1)} \end{aligned}$$

Generalizzando questa intuizione possiamo dire che:

1. In un traliccio arrivato alla sua piena espansione ad ogni nuovo istante di segnalazione arrivano  $2^k$  percorsi a ciascun nodo.
2. I valori delle metriche di ramo in uscita da un nodo sono uguali per tutti i percorsi che arrivano a quel nodo.
3. A parit  di percorso futuro, il percorso in ingresso al nodo con la metrica cumulata minore continuer  ad avere metrica cumulata pi  bassa di tutti gli altri
4. Ai fini della minimizzazione della metrica cumulata complessiva ad ogni nodo si possono scartare i  $2^{k-1}$  percorsi con la metrica cumulata pi  alta e conservare quello con la metrica cumulata minima
5. l'unico percorso rimasto viene definito sopravvissuto

**Esempio applicativo** Consideriamo il codice convoluzionale con rate  $R = \frac{1}{2}$  constraint length  $L = 3$  e generatori  $g_1 = 7_8$  e  $g_2 = 5_8$ . Assumiamo che la sequenza di  $N = 6$  bit informativi sia  $u = [0, 1, 0, 0, 0, 0]$  a cui corrisponde la sequenza codificata  $x = [00, 11, 10, 11, 00, 00]$  e supponiamo che la sequenza ricevuta sia  $y = [00, \textcolor{red}{11}, 10, 11, 00, 00]$  in cui ho il secondo bit della seconda parola di codice errato. In un sistema reale,  $N \gg 6$ ,  $N = 6$  é solo a scopo illustrativo. Le metriche di ramo sono indicate in rosso e quelle cumulate in nero. la trasmissione inizia nello stato  $\sigma^{(0)} = [0, 0]$  e dopo  $N = 6$  segnalazioni torna nello stato  $\sigma^{(N)} = [0, 0]$ .



Figure 157: Passi di Viterbi



Figure 158: Passi di Viterbi



Figure 159: Passi di Viterbi



Figure 160: Passi di Viterbi



Figure 161: Passi di Viterbi



Figure 162: Passi di Viterbi



Figure 163: Passi di Viterbi



Figure 164: Passi di Viterbi



Figure 165: Passi di Viterbi



Figure 166: Passi di Viterbi



Figure 167: Passi di Viterbi

La trasmissione inizia nello stato  $[0, 0]$  e dopo  $N = 6$  segnalazioni torna nello stato  $[0, 0]$ . Una volta identificato il percorso a distanza minima sul traliccio, identificare la sequenza  $\hat{u}$  informativa é semplice: é sufficiente associare ad ogni transizione sul traliccio la sequenza di bit in ingresso corrispondente. Nel nostro caso di ha  $\hat{u} = [0, 1, 0, 0, 0, 0]$ , cioé vuol dire che il decodificatore ha corretto l'errore introdotto dal canale.

**Considerazioni** A partire del momento in cui il traliccio ha raggiunto il suo pieno sviluppo, ad ogni passo l'algoritmo deve:

1. Calcolare le metriche di ramo per tutte le transizioni possibili
2. Calcolare per ogni nodo le metriche cumulate dai percorsi in ingresso
3. Per ogni nodo trovare il percorso sopravvissuto associato alla metrica cumulata minima

La complessità dell'algoritmo di Viterbi cresce linearmente con la lunghezza della sequenza da decodificare e non esponenzialmente, come avviene con la ricerca esaustiva.



Figure 168: considerazione Passi di Viterbi

Osservando il traliccio al passo  $\ell$ , si trova che andando a ritroso di  $D$  passi, i sopravvissuti tendono a fondersi in un unico percorso. Poiché si è visto empiricamente che  $D$  è una quantità fissa dell'ordine di  $kL$  possiamo trarre le seguenti conclusioni:

1. Il decodificatore di Viterbi non deve necessariamente attendere di essere arrivato alla fine della segnalazione per produrre decisioni ma è sufficiente introdurre un ritardo di decodifica pari a  $D$  e poi prendere decisioni di decodifica ad ogni nuovo istante di segnalazione
2. La parte comune dei sopravvissuti (quella su cui sono già state prese le decisioni) non ha bisogno di essere memorizzata. È sufficiente memorizzare i sopravvissuti nell'ultimo tratto da  $\ell - D$  a  $\ell$ , questo riduce enormemente l'esigenza di memoria dell'algoritmo

## 12.7 Prestazioni sistemi codificati

### 12.8 Codici a blocco

**Calcolo della probabilità di errore sulle parole di codice** Un codice a blocco  $\mathcal{C}(k, n)$  con  $d_{min} = 2t + 1$  è in grado di correggere fino a  $t$  errori. Una parola ricevuta  $y = x + e$  è errata quando il canale introduce un numero di errori maggiore di  $t$ . La probabilità di errore si calcola

$$P_w(e) = P_r[w(e) > t] = \sum_{j=t+1}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$



$P_w(e)$  può essere limitato inferiormente dalla probabilità dell'evento più probabile: aver commesso  $t + 1$  errori

$$P_w(e) \simeq \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}$$

mentre la  $P_w(e)$  si riesce a calcolare con precisione, nel caso del calcolo della probabilità di errore su bit codificato si deve per forza ricorrere ad approssimazioni. Il numero di bit errati in  $\hat{x}$  dopo la decodifica dipende dal vettore di errore  $e$  e da come agisce la decodifica a sindrome, che in presenza di un numero di errori maggiore di  $t$  aggiunge altri errori a quelli introdotti dal canale. La decodifica a sindrome restituisce sempre una parola di codice, quindi ogni volta che al ricevitore c'è un errore nella decodifica i bit errati sono almeno  $d_{min}$  negli  $n$  trasmessi. in questo caso la  $P_b(e)$  si approssima a

$$P_b(e) \simeq \frac{d_{min}}{n} P_w(e) \simeq \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}$$

**Confronto delle prestazioni su sistemi codificati e non codificati** La ridondanza introdotta dal codice comporta una maggiore spesa energetica, infatti si utilizzano  $n$  bit codificati per trasmettere  $k$  bit di informazione. Il budget energetico di  $k$  bit viene distribuito su  $n$  bit

$$kE_b = nE_{b,c} \Rightarrow E_{b,c} = \frac{k}{n} E_b$$

la probabilità di errore sul bit per una BPSK non codificata è

$$p_b^{(BPSK)}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

nel caso codificato bisogna considerare che la probabilità di errore  $p$  dipende dal valore di SNR dei bit codificati

$$\frac{E_{b,c}}{N_0} = \frac{k}{n} \frac{E_b}{N_0}$$

la probabilità  $P_b(e)$  del codice va calcolata

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,c}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{k}{n} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

In figura viene rappresentato il confronto delle prestazioni su canale Gaussiano di un sistema BPSK senza codifica con le prestazioni di un sistema codificato con codice di Hamming con  $m = 3$  e  $m = 4$ .



Figure 169: Confronto dei sistemi

## 12.9 Codici convoluzionali

**Generatori per codici convoluzionali** La bontá di un codice convoluzionale dipende dalla sua  $d_{free}$ . La  $d_{free}$  dipende dai codici generatori, dal rate  $R = \frac{k}{n}$  e dalla constraint length  $L$ . Tipicamente i codici convoluzionali hanno  $k = 1$  per limitare la complessitá di codificatore e decodificatore. Fissato  $R$  e  $L$  i generatori ottimi sono quelli che massimizzano la  $d_{free}$  e possono essere trovati tramite una ricerca esaustiva fra tutte le possibili  $(2^L)^n = 2^{nL}$  combinazioni.

**Generatori ottimi per  $R = \frac{1}{2}$**  Generatori ottimi (in ottale) per codici convoluzionali a rate  $R = \frac{1}{2}$  al variare della constraint length  $L$  e  $d_{free}$  corrispondente.

Constraint length	Generatori ottimi		Distanza libera
$L$	$g_1$	$g_2$	$d_{free}$
3	7	5	5
4	17	15	6
5	35	23	7
6	75	53	8
7	171	133	10
8	371	247	10
9	763	561	12
10	1537	1131	12

**Puncturing per codici convoluzionali** In teoria non c'è flessibilitá nella scelta del rate dei codici convoluzionali che assume sempre valori del tipo  $R = \frac{1}{n}$ . In realtá la tecnica chiamata *Puncturing* permette di costruire con codici con rate maggiori partendo da un codice a rate  $R = \frac{1}{n}$ . Il puncturing consiste nel cancellare alcuni bit all'uscita del codificatore. I bit vengono cancellati secondo un pattern preciso, espresso da una *puncturing table*, condiviso con il ricevitore, che quindi conosce esattamente la posizione dei bit cancellati.

Il trasmettitore e il ricevitore si accordano sui bit codificati da omettere attraverso la puncturing table, che contiene  $n$  righe (una per bit in uscita) e  $M$  colonne. La matrice contiene un certo numero  $P$  di 1 e un numero  $P - nM$  di

0. Dopo il puncturing il rate del codice diventa

$$R' = \frac{1}{n} \frac{nM}{P} = \frac{M}{P}$$

**Esempio:**  $n = 2$ ,  $M = 2$ ,  $P = 3$ ,  $R = \frac{1}{3}$



Figure 170: Esempio rate

Tabella di puncturing per il codice convoluzionale a rate  $R = \frac{1}{2}$ ,  $L = 7$  al variare della constraint length del rate  $R = \frac{M}{P}$  in uscita e  $d_{free}$  corrispondente. Il puncturing ottimo é stato trovato con una ricerca esaustiva su tutti i possibili pattern

Rate $\frac{M}{P}$	Puncturing matrix	$d_{free}$
$\frac{1}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	10
$\frac{2}{3}$	$\begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$	6
$\frac{3}{4}$	$\begin{bmatrix} 101 \\ 110 \end{bmatrix}$	5
$\frac{5}{6}$	$\begin{bmatrix} 10101 \\ 11010 \end{bmatrix}$	4
$\frac{7}{8}$	$\begin{bmatrix} 1000101 \\ 1111010 \end{bmatrix}$	3

**Bound per le prestazioni dei codici convoluzionali** Ad alti rapporti segnale/rumore si trova la seguente approssimazione: BPSK codificata con decodifica hard

$$P_e^{(b)} \simeq Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{R'}{2}}\right)$$

## 13 Formulario

### 13.1 Trigonometria

1.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2.  $\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3.  $\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4.  $\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$  È un  $\sin(\alpha)$  smorzato secondo  $\frac{1}{x}$  che si annulla in  $k\pi$  :  
 $k \in \mathbb{Z}$

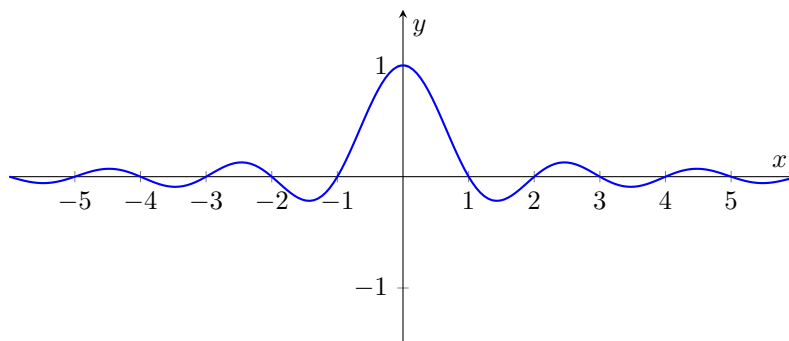


Figure 171: grafico  $\text{sinc}(\alpha)$

#### 13.1.1 Formule di addizione

1.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
2.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$
3.  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

#### 13.1.2 Formule di duplicazione

1.  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
2.  $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2 \sin^2(\alpha) \end{cases}$
3.  $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

### 13.1.3 Formule di bisezione

$$1. \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$2. \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$3. \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$$

## 13.2 Segnali Notevoli

$$1. x_R \triangleq A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad T = \text{durata}$$

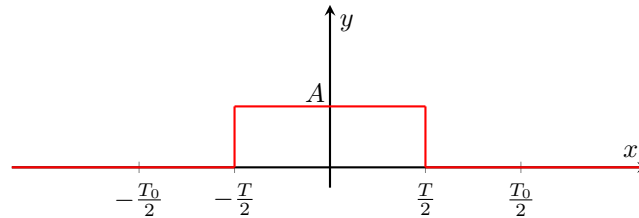


Figure 172: Rappresentazione di  $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$2. \operatorname{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

É un  $\sin(\alpha)$  smorzato secondo  $\frac{1}{x}$  che si annulla in  $k\pi : k \in \mathbb{Z}$

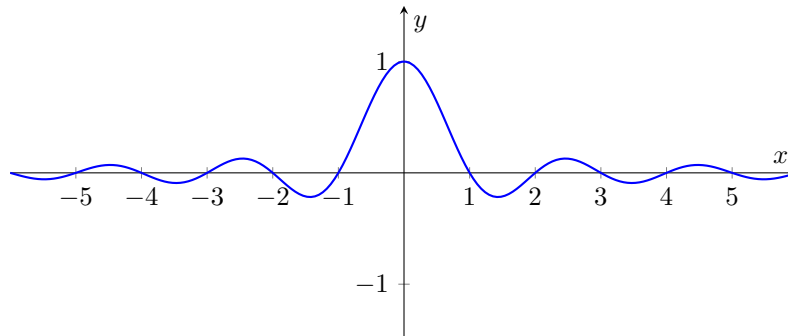


Figure 173: grafico  $\operatorname{sinc}(\alpha)$

La banda di una sinc é l'intervallo in cui si annulla  $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$ , es: se  $\text{banda} = 1$  se  $T = 1$

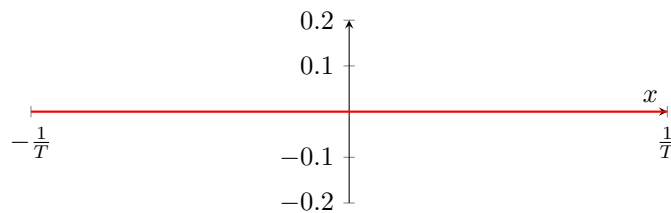


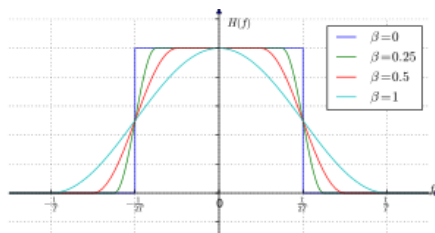
Figure 174: banda

### 3. Filtro a Coseno Rialzato

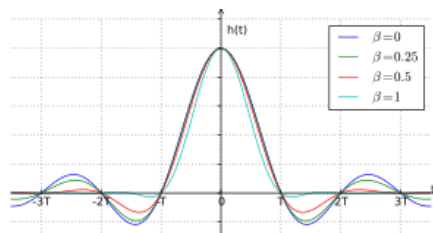
$$H(f) = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi T}{\beta} \left[ |f| - \frac{1-\beta}{2T} \right] \right) \right], \frac{1-\beta}{2T} < |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$0 \leq \beta \leq 1$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{sinc} \left( \frac{1}{2\beta} \right) & t = \pm \frac{T}{2\beta} \\ \text{sinc} \left( \frac{t}{T} \right) \frac{\cos \left( \frac{\pi \beta t}{T} \right)}{1 - \left( \frac{2\beta t}{T} \right)^2} & \text{altrove} \end{cases}$$



(a)  $H(f)$



(b)  $h(t)$

4.

## 13.3 Grandezze Fisiche

- Hertz

## 13.4 Varie

- Calcolo della TCF su MATLAB:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

MATLAB calcola un'approssimazione dell'integrale della TCF con un periodo  $T$ :

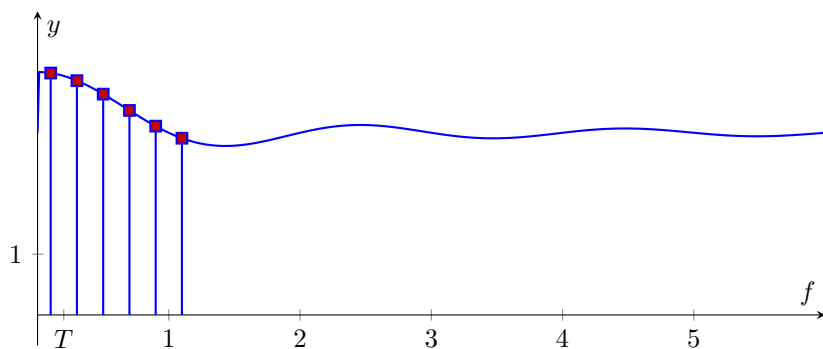


Figure 175: Campionamento MATLAB

$$X_{(f)} \cong T \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi f nT}$$

Ma nella  $f$  é una variabile continua, quindi a sua volta bisogna variare  $f$ :

$$X_{(fk)} = X_{(k\Delta f)} = \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi \Delta f nT} T$$

e la condizione sul  $\Delta f$  é che  $\Delta f \ll BB$ .

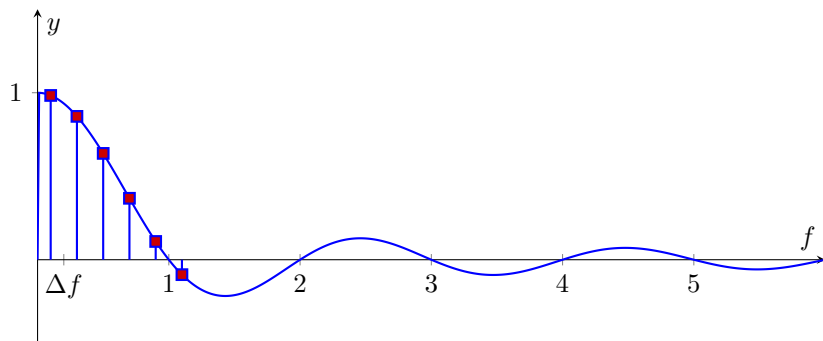


Figure 176:  $\Delta f$

Si può utilizzare anche la  $FFT$  = Fast Fourier Transform

- Scala Logarimica:  $x|_{db} = 10\log_{10}(x)$

x	db
2	3
4	6
8	9
10	10
1	0
100	20
200	23
50	17

Possiamo calcolare :

- $100|_{db} = 10\log_{10}(100) = 10\log_{10}(10 \cdot 10) = 10\log_{10}(10) + 10\log_{10}(10) = 20db$
- $200|_{db} = 10\log_{10}(100 \cdot 2) = 10\log_{10}(100) + 10\log_{10}(2) = 23db$
- $50|_{db} = 10\log_{10}(10 \cdot 5) = 10\log_{10}(10) + 10\log_{10}(5) = 17db$



Table 1: Values of  $Q(x)$  for  $0 \leq x \leq 9$ 

$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$
0.00	0.5	2.30	0.010724	4.55	$2.6823 \times 10^{-6}$	6.80	$5.231 \times 10^{-12}$
0.05	0.48006	2.35	0.0093867	4.60	$2.1125 \times 10^{-6}$	6.85	$3.6925 \times 10^{-12}$
0.10	0.46017	2.40	0.0081975	4.65	$1.6597 \times 10^{-6}$	6.90	$2.6001 \times 10^{-12}$
0.15	0.44038	2.45	0.0071428	4.70	$1.3008 \times 10^{-6}$	6.95	$1.8264 \times 10^{-12}$
0.20	0.42074	2.50	0.0062097	4.75	$1.0171 \times 10^{-6}$	7.00	$1.2798 \times 10^{-12}$
0.25	0.40129	2.55	0.0053861	4.80	$7.9333 \times 10^{-7}$	7.05	$8.9459 \times 10^{-13}$
0.30	0.38209	2.60	0.0046612	4.85	$6.1731 \times 10^{-7}$	7.10	$6.2378 \times 10^{-13}$
0.35	0.36317	2.65	0.0040246	4.90	$4.7918 \times 10^{-7}$	7.15	$4.3389 \times 10^{-13}$
0.40	0.34458	2.70	0.003467	4.95	$3.7107 \times 10^{-7}$	7.20	$3.0106 \times 10^{-13}$
0.45	0.32636	2.75	0.0029798	5.00	$2.8665 \times 10^{-7}$	7.25	$2.0839 \times 10^{-13}$
0.50	0.30854	2.80	0.0025551	5.05	$2.2091 \times 10^{-7}$	7.30	$1.4388 \times 10^{-13}$
0.55	0.29116	2.85	0.002186	5.10	$1.6983 \times 10^{-7}$	7.35	$9.9103 \times 10^{-14}$
0.60	0.27425	2.90	0.0018658	5.15	$1.3024 \times 10^{-7}$	7.40	$6.8092 \times 10^{-14}$
0.65	0.25785	2.95	0.0015889	5.20	$9.9644 \times 10^{-8}$	7.45	$4.667 \times 10^{-14}$
0.70	0.24196	3.00	0.0013499	5.25	$7.605 \times 10^{-8}$	7.50	$3.1909 \times 10^{-14}$
0.75	0.22663	3.05	0.0011442	5.30	$5.7901 \times 10^{-8}$	7.55	$2.1763 \times 10^{-14}$
0.80	0.21186	3.10	0.0009676	5.35	$4.3977 \times 10^{-8}$	7.60	$1.4807 \times 10^{-14}$
0.85	0.19766	3.15	0.00081635	5.40	$3.332 \times 10^{-8}$	7.65	$1.0049 \times 10^{-14}$
0.90	0.18406	3.20	0.00068714	5.45	$2.5185 \times 10^{-8}$	7.70	$6.8033 \times 10^{-15}$
0.95	0.17106	3.25	0.00057703	5.50	$1.899 \times 10^{-8}$	7.75	$4.5946 \times 10^{-15}$
1.00	0.15866	3.30	0.00048342	5.55	$1.4283 \times 10^{-8}$	7.80	$3.0954 \times 10^{-15}$
1.05	0.14686	3.35	0.00040406	5.60	$1.0718 \times 10^{-8}$	7.85	$2.0802 \times 10^{-15}$
1.10	0.13567	3.40	0.00033693	5.65	$8.0224 \times 10^{-9}$	7.90	$1.3945 \times 10^{-15}$
1.15	0.12507	3.45	0.00028029	5.70	$5.9904 \times 10^{-9}$	7.95	$9.3256 \times 10^{-16}$
1.20	0.11507	3.50	0.00023263	5.75	$4.4622 \times 10^{-9}$	8.00	$6.221 \times 10^{-16}$
1.25	0.10565	3.55	0.00019262	5.80	$3.3157 \times 10^{-9}$	8.05	$4.1397 \times 10^{-16}$
1.30	0.0968	3.60	0.00015911	5.85	$2.4579 \times 10^{-9}$	8.10	$2.748 \times 10^{-16}$
1.35	0.088508	3.65	0.00013112	5.90	$1.8175 \times 10^{-9}$	8.15	$1.8196 \times 10^{-16}$
1.40	0.080757	3.70	0.0001078	5.95	$1.3407 \times 10^{-9}$	8.20	$1.2019 \times 10^{-16}$
1.45	0.073529	3.75	$8.8417 \times 10^{-5}$	6.00	$9.8659 \times 10^{-10}$	8.25	$7.9197 \times 10^{-17}$
1.50	0.066807	3.80	$7.2348 \times 10^{-5}$	6.05	$7.2423 \times 10^{-10}$	8.30	$5.2056 \times 10^{-17}$
1.55	0.060571	3.85	$5.9059 \times 10^{-5}$	6.10	$5.3034 \times 10^{-10}$	8.35	$3.4131 \times 10^{-17}$
1.60	0.054799	3.90	$4.8096 \times 10^{-5}$	6.15	$3.8741 \times 10^{-10}$	8.40	$2.2324 \times 10^{-17}$
1.65	0.049471	3.95	$3.9076 \times 10^{-5}$	6.20	$2.8232 \times 10^{-10}$	8.45	$1.4565 \times 10^{-17}$
1.70	0.044565	4.00	$3.1671 \times 10^{-5}$	6.25	$2.0523 \times 10^{-10}$	8.50	$9.4795 \times 10^{-18}$
1.75	0.040059	4.05	$2.5609 \times 10^{-5}$	6.30	$1.4882 \times 10^{-10}$	8.55	$6.1544 \times 10^{-18}$
1.80	0.03593	4.10	$2.0658 \times 10^{-5}$	6.35	$1.0766 \times 10^{-10}$	8.60	$3.9858 \times 10^{-18}$
1.85	0.032157	4.15	$1.6624 \times 10^{-5}$	6.40	$7.7688 \times 10^{-11}$	8.65	$2.575 \times 10^{-18}$
1.90	0.028717	4.20	$1.3346 \times 10^{-5}$	6.45	$5.5925 \times 10^{-11}$	8.70	$1.6594 \times 10^{-18}$
1.95	0.025588	4.25	$1.0689 \times 10^{-5}$	6.50	$4.016 \times 10^{-11}$	8.75	$1.0668 \times 10^{-18}$
2.00	0.02275	4.30	$8.5399 \times 10^{-6}$	6.55	$2.8769 \times 10^{-11}$	8.80	$6.8408 \times 10^{-19}$
2.05	0.020182	4.35	$6.8069 \times 10^{-6}$	6.60	$2.0558 \times 10^{-11}$	8.85	$4.376 \times 10^{-19}$
2.10	0.017864	4.40	$5.4125 \times 10^{-6}$	6.65	$1.4655 \times 10^{-11}$	8.90	$2.7923 \times 10^{-19}$
2.15	0.015778	4.45	$4.2935 \times 10^{-6}$	6.70	$1.0421 \times 10^{-11}$	8.95	$1.7774 \times 10^{-19}$
2.20	0.013903	4.50	$3.3977 \times 10^{-6}$	6.75	$7.3923 \times 10^{-12}$	9.00	$1.1286 \times 10^{-19}$
2.25	0.012224						

## Indice Alfabetico

- Assoluta integrabilità  $h_{(t)}$ , 68
- Canale Gaussiano, 167
- Capacità del canale, 167
- Coefficiente di Correlazione, 106
- Correzione di errore, 169
- Decisione a massima  
    verosomiglianza, 179
- Distanza di Hamming, 175
- Distanza minima, 176
- Efficienza Energetica, 154
- Efficienza Spettrale, 154
- Errore Gaussiano, 112
- Errore Non Rivelabile, 178
- Errore Rivelabile, 178
- Expectation, 104
- Frequenza di taglio, 70
- Matrice di controllo di parità, 178
- Peso di Hamming, 175
- Probabilità di errore BSC, 169
- Proprietà Campionatrice del Delta  
    di Dirac, 53
- Rate del Codice, 169
- Ricevitore ML error correction, 180
- Ricevitore ML ottimo, 180
- Risposta Impulsiva, 64
- Rivelazione di errore, 169
- Segnale Troncato, 12
- Sequenza ciclica, 196
- Statisticamente Indipendenti, 103
- TCF di segnali periodici, 55
- TCF di un cos, 55
- TCF di un segnale periodico  
    generico, 56
- TCF di un sin, 56
- Teorema dell'integrazione  
    completo, 61
- Valore quadratico medio, 106