Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:
Luca Sanguinetti - Marco Moretti

Figure 1: uwu

AA 2022 - 2023

Contents

1 Introduzione

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.
I testi consigliati sono:
S.Hawking Digital Communication System Wiley
Leon Digital Analog Communication System Pearson

2 Richiamo Sui Numeri Complessi

2.1 Struttura di un numero complesso

2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

Parte reale: $a = Re\{z\}$
Parte Immaginaria: $b = Img\{z\}$
j o i é la $\sqrt{-1}$

2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho\ e^{j\theta}$$

Modulo: $\rho = |z|$
Fase: $\theta = \arg(z)$

grafico forma polare-cartesiana

2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana
$$z^* = a - jb$$
- Forma Polare
$$z^* = \rho\ e^{-j\theta}$$

2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria
$$a = \rho\cos(\theta) \quad b = \rho\sin(\theta)$$
- Modulo
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
- Fase
$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.3 Operazioni

Dati: $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1\ e^{j\theta_1},\ z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2\ e^{j\theta_2}$

- Somma
$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione
$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione
$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2\ e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\ e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo
$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2$$

2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C}\ \ t \in \mathbb{R} \rightarrow z_{(t)} = a_{(t)} + jb_{(t)} = \rho_{(t)} e^{j\theta_{(t)}}$$

- Integrale
$$\int_a^b z_{(t)}\ dt = \int_a^b a_{(t)} + jb_{(t)}\ dt = \int_a^b a_{(t)}\ dt + \int_a^b jb_{(t)}\ dt$$

- Derivata
$$\frac{d}{dt} z_{(t)} = \frac{d}{dt} a_{(t)} + jb_{(t)} = \frac{d}{dt} a_{(t)} + \frac{d}{dt} jb_{(t)}$$

3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto $\forall t$
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche

3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
  - Segnale tempo continuo: $t \in \mathbb{R}$ assume con conitinuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
  - Segnale a tempo discreto: $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$ $T =$periodo di campionamento, la variabile temoporale assume solo valori discreti

Figure 2: tempo continuo, tempo discreto

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
  - Segnale ad ampiezza continua: $x_{(t)}$ *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
  - Segnale ad ampiezza discreta: $x_{(t)}$ *discreta*,se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica puó assumere solo valori discreti

Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Segnale	Cotinuo	Discreto	t
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x_{(t)}$			

4 Segnali Analogici

4.1 Grandezze dei segnali Analogici

4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x_{(t)}|^2$$

4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\, dt$$

4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x_{(t)} & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$T = Periodo\ di\ osservazione$$

Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

dalla quale possiamo ricavare se $T \to \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$:

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2\, dt$$

4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)_T}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}\, dt$$

$$x_{(t)_T} \;=\; Segnale\ troncato$$

4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

4.2.1 Costante

$x_{(t)} = A \ \ \forall t$

Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\, dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\, dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} AT = A$$

4.2.2 Sinusoide

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 6: Segnale sinusoidale

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 5.1 il $\sin^2(\alpha)$ e lo sostituiamo (2.1) 5.1.2
$\cos(2\alpha) = \frac{1+\cos^2(\alpha)}{2}$

$$
\begin{aligned}
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\
&= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty
\end{aligned}
$$

- Potenza Media:

$$
\begin{aligned}
P_x &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\
&= \frac{A}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2}
\end{aligned}
$$

- Valore Efficace:

$$
x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}
$$

- Valore Medio:

$$
\begin{aligned}
x_m &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} = 0
\end{aligned}
$$

4.2.3 Gradino

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 7: Segnale gradino

4.2.4 Rettangolo

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 8: Segnale rettangolo

4.2.5 Esponenziale unilatera

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 9: Segnale esponenziale unilatera

4.2.6 Esponenziale bilatera

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 10: Segnale esponenziale bilatera

4.2.7 segno sgn($\mathbf{x_{(t)}}$)

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 11: Segnale sgn(x)

5 Formulario

5.1 Trigonometria

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3. $\sin(\alpha) = \pm\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$

5.1.1 Formule di addizione

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

5.1.2 Formule di duplicazione

1. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2\sin^2(\alpha) \end{cases}$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

5.1.3 Formule di bisezione

1. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
2. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
3. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$

5.2 Segnali Comuni

Alphabetical Index