Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:
Luca Sanguinetti - Marco Moretti

Figure 1: uwu

AA 2022 - 2023

Contents

1 Introduzione

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.
I testi consigliati sono:
S.Hawking Digital Communication System Wiley
Leon Digital Analog Communication System Pearson

2 Richiamo Sui Numeri Complessi

2.1 Struttura di un numero complesso

2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

Parte reale: $a = Re\{z\}$
Parte Immaginaria: $b = Img\{z\}$
j o i é la $\sqrt{-1}$

2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho\ e^{j\theta} = \rho \cos(\theta) + j\rho \sin(\theta)$$

Modulo: $\rho = |z|$
Fase: $\theta = \arg(z) \quad \theta \in [0, 2\pi)$

grafico forma polare-cartesiana

2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana
$$z^* = a - jb$$
- Forma Polare
$$z^* = \rho\ e^{-j\theta}$$

2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria
$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$
- Modulo
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}$$
- Fase
$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.3 Operazioni

Dati: $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1\ e^{j\theta_1},\ z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2\ e^{j\theta_2}$

- Somma
$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$
- Sottrazione
$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$
- Moltiplicazione
$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2\ e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$
- Divisione
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\ e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$
- Modulo
$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2 = \rho^2$$

2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R} \rightarrow z_{(t)} = a_{(t)} + jb_{(t)} = \rho_{(t)} e^{j\theta_{(t)}}$$

- Integrale
$$\int_a^b z_{(t)}\ dt = \int_a^b a_{(t)} + jb_{(t)}\ dt = \int_a^b a_{(t)}\ dt + \int_a^b jb_{(t)}\ dt$$
- Derivata
$$\frac{d}{dt} z_{(t)} = \frac{d}{dt} a_{(t)} + jb_{(t)} = \frac{d}{dt} a_{(t)} + \frac{d}{dt} jb_{(t)}$$

3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto $\forall t$, per ogni istante temporale si conosce il valore del segnale, spesso rappresentati con funzioni analitiche.
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche, ad esempio un rumore.

3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
  - Segnale tempo continuo: $t \in \mathbb{R}$ assume con conitinuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
  - Segnale a tempo discreto: $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$ T =periodo di campionamento, la variabile temoporale assume solo valori discreti

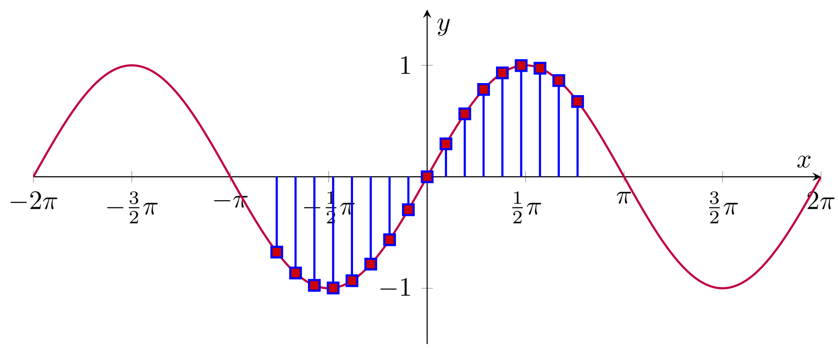


Figure 2: tempo continuo, tempo discreto:$T = 0.3$

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
  - Segnale ad ampiezza continua: $x_{(t)}$ *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
  - Segnale ad ampiezza discreta: $x_{(t)}$ *discreta*,se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica puó assumere solo valori discreti

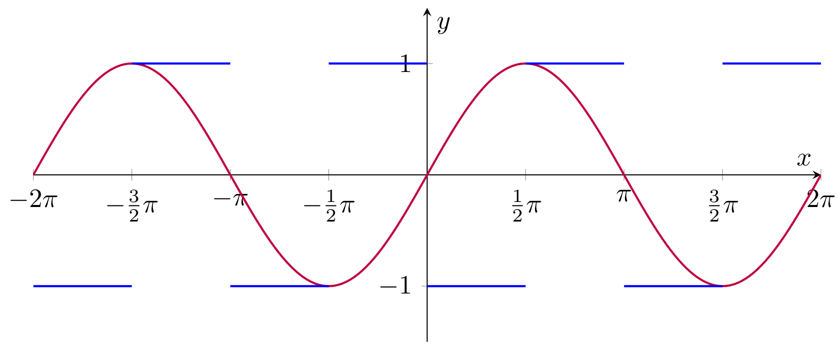


Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Possiamo costruire una tabella per categorizzare le tipologie di segnali:

Segnale	Continuo	Discreto	t
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x_{(t)}$			

4 Segnali Analogici

4.1 Grandezze dei segnali Analogici

4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x_{(t)}|^2$$
$$Se\ x_{(t)} \in \mathbb{R} \to P_x \triangleq x_{(t)}^2$$

4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\,dt$$

$$Energia: \begin{cases} Energia\ finita & (Segali\ fisici) \\ Energia\ infinita & (Segali\ ideali) \end{cases}$$

4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x_{(t)} & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$T = Periodo\ di\ osservazione$$

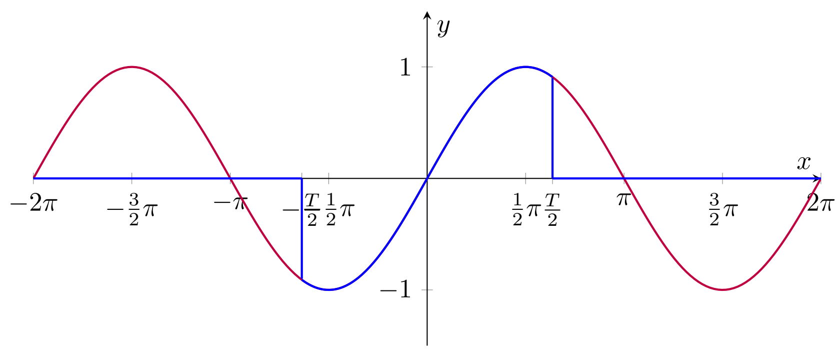


Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

$$E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2\,dt$$

dalla quale possiamo ricavare se $T \to \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$:

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt$$

Possiamo ricavaredelle propietá secondo energia e potenza:

- Se $x_{(t)}$ ha $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$
- Se $x_{(t)}$ ha $P_x = k \neq 0 < \infty \Rightarrow E_x = \infty$

4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)_T} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt$$

$$x_{(t)_T} \;=\; \textit{Segnale troncato}$$

4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

4.2.1 Costante

$x_{(t)} = A \ \ \forall t$

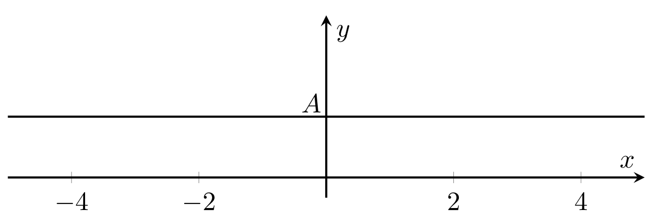


Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \, dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \, dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} AT = A$$

4.2.2 Cosinusoide

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$
$A = Ampiezza,\ f_0 = \frac{1}{T} = frequenza,\ \phi = fase$

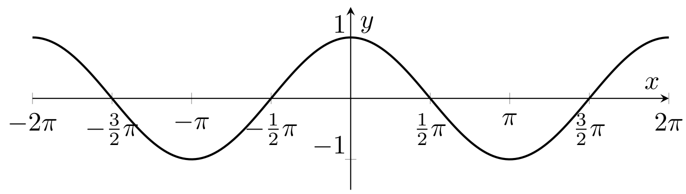


Figure 6: Segnale cosinusoidale ($\phi = 0$)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \phi)dt$$

Ricaviamo dalla (1) 7.1 il $\sin^2(\alpha)$ e lo sostituiamo (2.1) 7.1.2
$\cos(2\alpha) = \frac{1+\cos^2(\alpha)}{2}$

$$\begin{aligned} &= A^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2}dt \\ &= A^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}dt + A^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2}dt \\ &= \infty + \frac{A}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\sin(4\pi f_0 t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \phi)dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{A}{2}T + \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi)dt \\ &= \frac{A}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\sin(4\pi f_0 t + 2\phi)\Big|_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\ \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi)\bigg|_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} = 0$$

4.2.3 Gradino

$U_{(t)} = x_{(t)} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

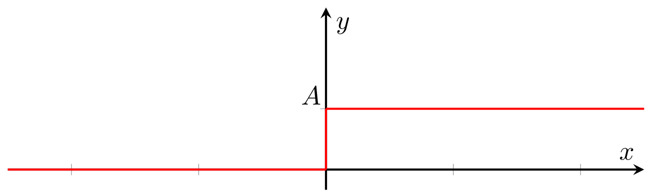


Figure 7: Segnale gradino

- Energia:
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \, dt = \infty$$

- Potenza Media:
$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- Valore Efficace:
$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:
$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

4.2.4 Rettangolo

$x_{(t)} = A \; rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & -\frac{t}{T} \leq t \leq \frac{t}{T} \\ 0 & Altrove \end{cases}$

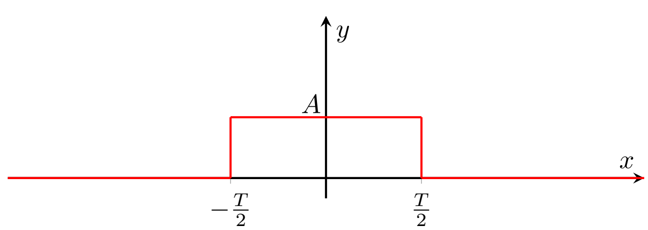


Figure 8: Segnale rettangolo

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \ dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \ rect^2 \left(\frac{t}{T}\right) \ dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \ dt = A^2 T$$

- Potenza Media: $T < T_0$ se non fosse cosí avrei una costante

$$\begin{aligned} P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \ rect^2 \left(\frac{t}{T}\right) \ dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} A^2 T = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \ rect \left(\frac{t}{T}\right) \ dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} AT = 0 \end{aligned}$$

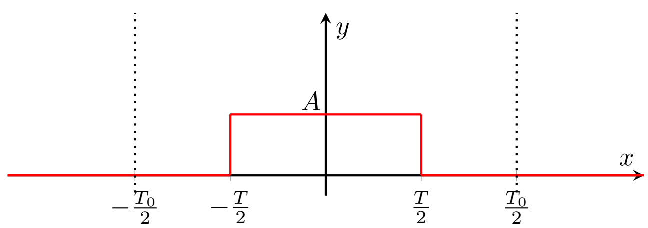


Figure 9

4.2.5 Esponenziale unilatera

$x_{(t)} = e^{-t} U_{(t)}$

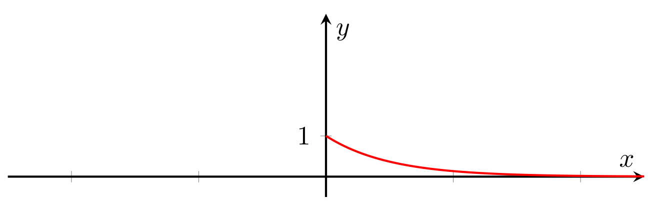


Figure 10: Segnale esponenziale unilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \ dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} \ dt = \left. \frac{1}{2} e^{-2t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} \ dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2} \right) \left. e^{-2t} \right|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{2T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} = 0$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left. (-1) e^{-t} \right|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} = 0$$

4.2.6 Esponenziale bilatera

$x_{(t)} = e^{-|t|}$

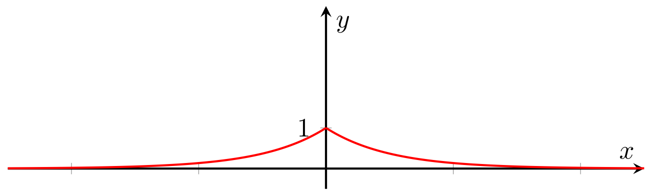


Figure 11: Segnale esponenziale bilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \ dt = 2\int_0^{\infty} e^{-2t} \ dt = \ 2\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t}\Big|_0^{\infty} = 1$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} \ dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ e^{-2t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} = 0$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ (-2) e^{-t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{2}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} = 0$$

4.2.7 segno $\mathbf{sgn(x_{(t)})}$

$$x_{(t)} = sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

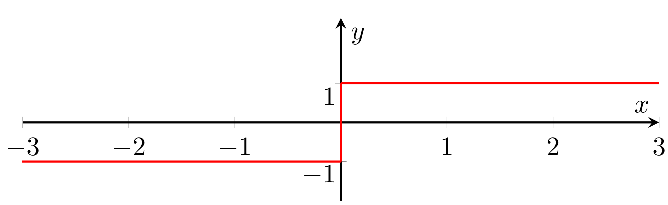


Figure 12: Segnale sgn(x)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \ dt = \int_{-\infty}^{\infty} sgn^2(t) \ dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \ dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sgn^2 t \ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 1$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sgn(t) \ dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} 1 \, dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} 1 \, dt \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

5 Trasformata Serie Di Fourier

5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x_{(t)} = x_{(t-kT_0)}$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo T_0 che soddifa le condizioni di Dirichlet e la sua $E_x < \infty (C.S.)$ puó essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

  $$x_{(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad X_k \in \mathbb{C},\ f_0 = \frac{1}{T_0}$$

  Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

  $$x_{(t)} = \ldots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \ldots$$

  X_0 corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale, inoltre le componenti X_k prendono il nome di armoniche alla frequenza f corrispondente

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

  $$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0}} x_{(t)} e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocitá: $\forall x_{(t)} \exists ! X_k$:

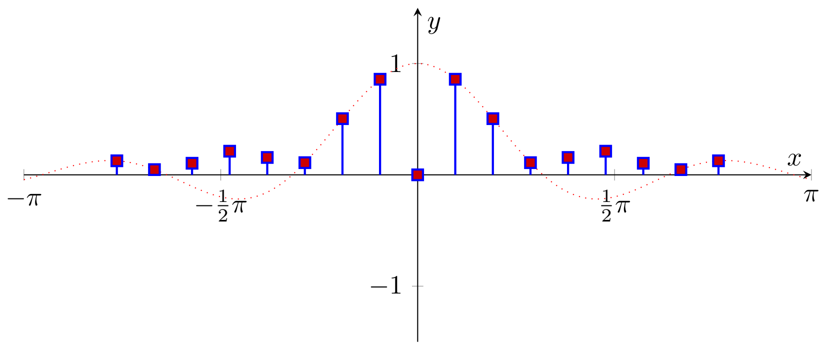
$$x_{(t)} \rightleftharpoons X_k$$
$$Segnale\ Analogico\ Periodico \rightleftharpoons Sequenza\ Complessa$$

5.2.1 Rappresentazione di X_k

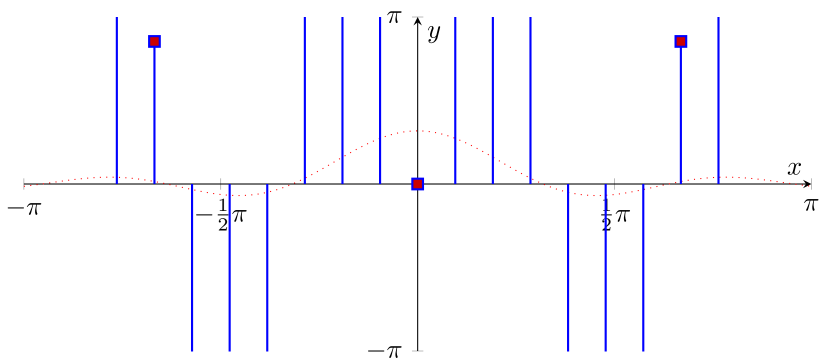
Essendo X_k un numero complesso puó essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 13: Spettro di una $sinc(x)$

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

5.3 Calcolo dei coefficenti X_k per segnali noti

5.3.1 $A\cos(2\pi f_0 t)$

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A\cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficenti X_k:

$$x_{(t)} = \ldots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{-j2\pi(1)f_0 t} + \ldots$$

$Abbiamo$:

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro TSF del coseno

5.3.2 $A\sin(2\pi f_0 t)$

$x_{(t)} = A\sin(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A\sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficenti X_k:

$$x_{(t)} = \ldots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0 t} - X_0 + X_1 e^{-j2\pi(1)f_0 t} + \ldots$$
$$Abbiamo:$$

$$X_{-1} = -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j}$$

$$|X_k| = \begin{cases} |\frac{A}{2j}| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ |-\frac{A}{2j}| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & altrove \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle\frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle|-\frac{A}{2j}| = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 15: Spettro TSF del seno

5.3.3 Treno di rect

$x_R = A\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$ Segnale periodico $\rightarrow x_{(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$
$T_0 = periodo$, $T = durata \rightarrow T < T_0$, se cosi non fosse avremmo una costante

Figure 16: Treno di $A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$

→ Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da aperiodiche a periodiche e viceversa

$$\begin{aligned}
ATSF[x_{(t)}] = ATSF[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t-nT_0)] \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{(t)}e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{A}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{A}{T_0}\frac{1}{j2\pi k f_0}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{T_0}\frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0}\frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
&= \frac{AT}{T_0}\frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = A f_0 T sinc(k f_0 T)
\end{aligned}$$

(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 17: Spettro TSF del treno di rect

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:

Figure 18: Spettro treno di $A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di riostruzione dello stesso(script di matlab presenti nel teams):

- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali piú alte $\rightarrow$ copre piú spettro(espansione spettrale) $T_0 \uparrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse fraquenze $T_0 \downarrow$

Se non ho abbastanza passi K non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio ne un analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettametne il segnale

6 Trasformata Continua Di Fourier

6.1 Segnali Aperiodici

Nel caso di segnali come $x_{(t)} = rect\left(\frac{t}{T}\right)$ non posso usare la TSF posso peró scrivere:

$$x_{(t)} = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t), \; x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(t-nT_0)}$$

Passiamo da un analisi a frequenze discrete ad un analisi su tutto lo spettro delle frequenze

(a) Spettro di Ampiezza TSF

(b) Spettro di Ampiezza TCF

6.2 Equazioni di Analisi e Sintesi

Figure 19: Insieme dei segnali per tcf

6.2.1 Equazione di Analisi

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt \quad \textit{Equazione di analisi}$$

6.2.2 Equazione di Sintesi

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi ft} df \quad \textit{Equazione di sintesi}$$

La TCF gode della biunivocitá

$$x_{(t)} \rightleftharpoons X_{(f)} \quad X_{(f)} \in \mathbb{C}$$

Essendo X_k un numero complesso puó essere rappresentato in forma polare:

$$X_{(f)} = |X_{(f)}| e^{\angle X_{(f)}}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:

(a) Spettro di Ampiezza (b) Spettro di Fase

Figure 20: Spettro del segnale TCF

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo e continuo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**, questa propietá é chiamata **Simmetria Hermitiana**

6.2.3 TCF di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$

$x_{(t)} = A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$

Figure 21: $A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$

$X_{(f)} =?$:

$$\begin{aligned}
X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\ rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{A}{j2\pi f}\ e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f}\left(e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}\right) \\
&= \frac{AT}{\pi f}\left(\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}\right) = \frac{AT\sin(\pi fT)}{\pi fT} = ATsinc(fT) = X_{(f)}
\end{aligned}$$

$$A\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons ATsinc(fT)$$

La sinc si annulla in $\frac{k}{T},\ k \in \mathbb{Z}$. Notiamo anche come la funzione di partenza sia reale e pari la TCF rispetti 6.3.2(si?):

(a) Spettro di Ampiezza TCF *rect*

(b) Spettro di Fase TCF *rect*

6.3 Propietá

Come per la TSF vale che al variare del periodo della funzione T:

- Se $T \uparrow$ aumenta $\rightarrow f \downarrow$ diminuisce e si stringe lo spettro
- Se $T \downarrow$ diminuisce $\rightarrow f \uparrow$ aumenta e si allarga lo spettro

Inoltre come si puó evincere dal successivo Teorema della Dualitá 6.4.2:

- Una funzione limitata (finita) nel tempo ha uno spettro nella frequenza illimitato $\rightarrow$ sono i segnali fisici
- Una funzione illimitata nel tempo ha uno spettro nella frequenza limitato (finito)

6.3.1 Simmetria hermitiana

$$\begin{aligned} Ip &: x_{(t)} \ reale \\ Th &: X_{(f)} \ hermitiana \\ X_{(-f)} = X^*_{(f)} \rightarrow &\begin{cases} |X_{(f)}| = |X_{(-f)}| & Simmetria\ Pari \\ \angle X_{(-f)} = -\angle X_{(f)} & Simmetria\ Dispari \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.2 Paritá

$$\begin{aligned} Ip &: x_{(t)} \ reale\ e\ pari \\ Th &: X_{(f)} \ reale\ e\ pari \end{aligned}$$

6.3.3 Disparitá

$$\begin{aligned} Ip &: x_{(t)} \ reale\ e\ dispari \\ Th &: X_{(f)} \ immaginaria\ e\ dispari \end{aligned}$$

6.4 Teoremi relativi alla TCF

6.4.1 Linearitá

$Ip : x_{(t)} = \alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}$
$Th : X_{(f)} = \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}$
Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_{1(t)} e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{2(t)} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}
\end{aligned}
$$

Esempio: esempio del martorella rect su rect

6.4.2 Dualitá

$Ip : x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)}$
$Th : X_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} x_{(-f)}$ Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = Sost. &\begin{cases} t \to f \\ f \to t \end{cases} \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(f)} e^{-j2\pi tf} df \\
= Sost.\ (f' = -f) \Rightarrow X_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{-j2\pi t(-f')} df' \\
= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{j2\pi tf'} df' &= ACTF[x_{(-f)}] = c.v.d.
\end{aligned}
$$

Esempio: esempio del martorella sinc dualitá

6.4.3 Ritardo

$Ip : x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)},\ y_{(t)} = x_{(t-to)}$
$Th : Y_{(f)} \rightleftharpoons^{TCF} y_{(t)} = X_{(f)} e^{-j2\pi ft_0}$
Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-t_0)} e^{-j2\pi tf} dt \\
&= Sost.\ (t' = t - t_0) \Rightarrow Y_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')} e^{-j2\pi f(t'+t_0)} dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')} e^{-j2\pi ft'} e^{-j2\pi ft_0} dt' = X_{(f)} e^{-j2\pi ft_0}\ c.v.d.
\end{aligned}
$$

Osservazione:

- Un ritardo nel tempo introduce una componente solo di fase che cresce lienarmente con la frequenza

- Un esponenziale nel tempo introduce un ritardo nel dominio della frequenza $x_{(t)}e^{-j2\pi f_0 t} \rightarrowtail X_{(f-f_0)}$, vedi 6.5.4

Esempio: esempio del martorella rect ritardata eheh

6.4.4 Derivazione

$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}x_{(t)}}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$
Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.5 Integrazione

$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}x_{(t)}}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$
Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.6 Derivazione in Frequenza

$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}x_{(t)}}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$
Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.7 Integrazione in Frequenza

$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}x_{(t)}}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$
Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.8 Convoluzione

$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}x_{(t)}}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$
Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

Propietá della convoluzione:

- 1
- 2
- 3

6.4.9 Prodotto

6.5 Modulazione di Ampiezza

$$y_{(t)} = x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t)$$

(c) Sistema di modulazione

(d) $x_{(t)}$, $y_{(t)}$

Figure 22: Esempio sistema di modulazione di ampiezza

Nel dominio della frequenza:

(a) Senza modulazione

(b) Con modulazione

Figure 23: Segnale nel dominio della frequenza modulato e non

Serve per spostare la frequenza (es. di trasmissione) del segnale in modo tale, ad esempio, da non sovrapporre due segnali che sono sulla stessa frequenza. Se il segnale non fosse modulato si dice in **banda base** (BB) se il segnale é modulato si dice in **banda passante**(BP)

Figure 24: BB, BP

6.5.1 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$

$$Ip: \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t) \\ x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th: Y_{(f)} = \frac{1}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2} X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}]\Big|_{f-f_0} + TCF[x_{(t)}]\Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2} X_{(f+f_0)} \ c.v.d
\end{aligned}$$

Esempio: esempio modulazione di una rect fai cosa ha chiesto lui a fine lezione

6.5.2 Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$

$Ip: \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} \sin(2\pi f_0 t) \\ x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} \end{cases}$

$Th: Y_{(f)} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}]\Big|_{f-f_0} - TCF[x_{(t)}]\Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)} \ c.v.d
\end{aligned}$$

6.5.3 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

$Ip: \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} \end{cases}$

$Th: Y_{(f)} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \frac{e^{j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}]\Big|_{f-f_0} + TCF[x_{(t)}]\Big|_{f+f_0} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)} \ c.v.d
\end{aligned}$$

Come cambiano i grafici

(a) Ampiezza Mod. generica

(b) fase Mod. generica

Figure 25: Modulazione generica

6.5.4 Th. Modulazione con Esponenziale Complesso

$Ip: \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} e^{j2\pi f_0 t} \\ x_{(t)} \rightleftharpoons^{TCF} X_{(f)} \end{cases}$

$Th: Y_{(f)} = X_{(f-f_0)}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi (f-f_0) t} dt = TCF[x_{(t)}]\Big|_{f-f_0} = X_{(f-f_0)} \end{aligned}$$

Posso notare che:

- Ritardo: $\rightarrow x_{(t-t_0)} \rightleftharpoons X_{(f)} e^{(-j2\pi f t_0)}$
- Modulazione: $\rightarrow x_{(t)} e^{(j2\pi f_0 t)} \rightleftharpoons X_{(f-f_0)}$

tabellina sul procedimento di sintesi di un segnale

7 Formulario

7.1 Trigonometria

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3. $\sin(\alpha) = \pm\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4. $sinc(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ É un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi$: $k \in \mathbb{Z}$

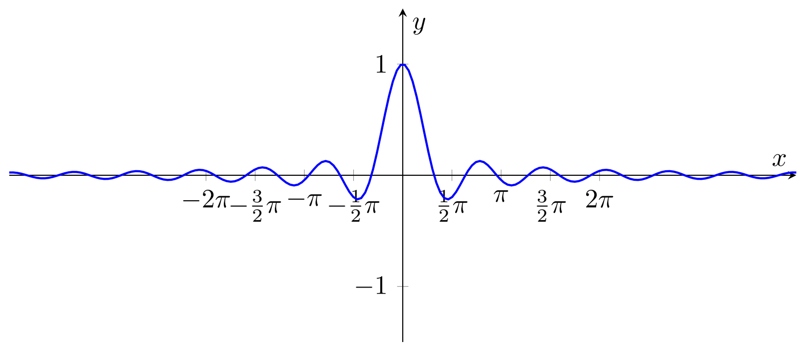


Figure 26: grafico $sinc(\alpha)$

7.1.1 Formule di addizione

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

7.1.2 Formule di duplicazione

1. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2\sin^2(\alpha) \end{cases}$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

7.1.3 Formule di bisezione

1. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
2. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
3. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$

7.2 Segnali Comuni

1. $x_R \triangleq A\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \qquad T = durata$

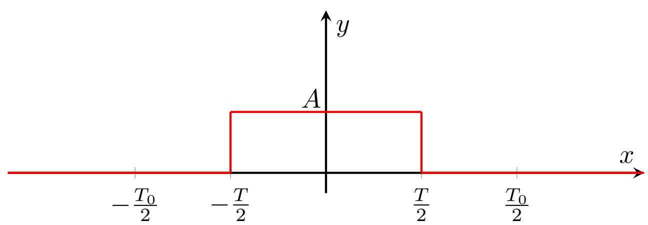


Figure 27: Rappresentazione di $A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$

2. $sinc(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$
   É un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi : k \in \mathbb{Z}$

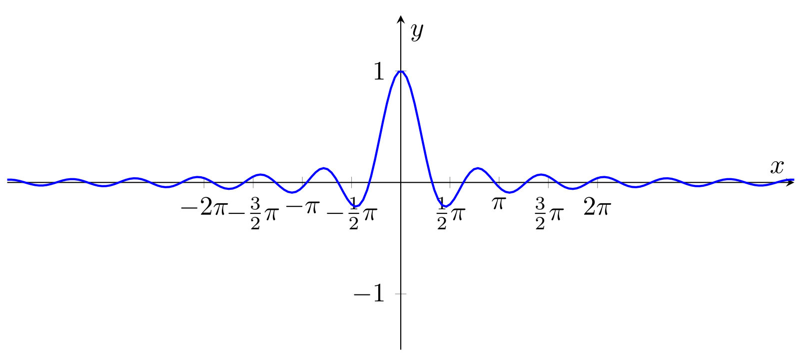


Figure 28: grafico $sinc(\alpha)$

3.
4.

Alphabetical Index