

# Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:

Luca Sanguinetti - Marco Moretti



Figure 1: touch me senpai

AA 2022 - 2023

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Richiamo Sui Numeri Complessi</b>	<b>5</b>
2.1	Struttura di un numero complesso . . . . .	5
2.1.1	Forma Cartesiana . . . . .	5
2.1.2	Forma Polare . . . . .	5
2.1.3	Complesso Coniugato . . . . .	5
2.2	Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana . . . . .	5
2.3	Operazioni . . . . .	6
2.4	Funzioni Complesse a Variabile Reale . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Introduzione Ai Segnali</b>	<b>7</b>
3.1	Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini . . . .	7
<b>4</b>	<b>Segnali Analogici</b>	<b>9</b>
4.1	Grandezze dei segnali Analogici . . . . .	9
4.1.1	Potenza istantanea . . . . .	9
4.1.2	Energia . . . . .	9
4.1.3	Potenza Media . . . . .	9
4.1.4	Valore Efficace . . . . .	10
4.1.5	Valore Medio . . . . .	10
4.2	Analisi energetiche su segnali comuni . . . . .	10
4.2.1	Costante . . . . .	10
4.2.2	Cosinusoide . . . . .	11
4.2.3	Gradino . . . . .	13
4.2.4	Rettangolo . . . . .	13
4.2.5	Esponenziale unilatera . . . . .	14
4.2.6	Esponenziale bilatera . . . . .	16
4.2.7	segno $sgn(x(t))$ . . . . .	16
4.3	Segnal Periodici . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Trasformata Serie Di Fourier</b>	<b>19</b>
5.1	Segnale Periodico . . . . .	19
5.2	Trasformata Serie Di Fourier . . . . .	19
5.2.1	Rappresentazione di $X_k$ . . . . .	19
5.3	Propiet� della TSF . . . . .	20
5.4	Linearit� . . . . .	20
5.5	Simmetria Hermitiana . . . . .	20
5.6	Calcolo dei coefficienti $X_k$ per segnali noti . . . . .	20
5.6.1	$A \cos(2\pi f_0 t)$ . . . . .	20
5.6.2	$A \sin(2\pi f_0 t)$ . . . . .	21
5.6.3	Treno di rect . . . . .	22

<b>6</b>	<b>Trasformata Continua Di Fourier</b>	<b>25</b>
6.1	Segnali Aperiodici . . . . .	25
6.2	Equazioni di Analisi e Sintesi . . . . .	26
6.2.1	Equazione di Analisi . . . . .	26
6.2.2	Equazione di Sintesi . . . . .	26
6.2.3	TCF di una $\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$ . . . . .	27
6.3	Propiet� . . . . .	28
6.3.1	Simmetria hermitiana . . . . .	29
6.3.2	Parit� . . . . .	29
6.3.3	Disparit� . . . . .	29
6.4	Teoremi relativi alla TCF . . . . .	29
6.4.1	Linearit� . . . . .	29
6.4.2	Dualit� . . . . .	30
6.4.3	Ritardo . . . . .	31
6.4.4	Derivazione . . . . .	32
6.4.5	Integrazione . . . . .	33
6.4.6	Derivazione in Frequenza . . . . .	35
6.4.7	Integrazione in Frequenza . . . . .	35
6.4.8	Convoluzione . . . . .	36
6.4.9	Prodotto . . . . .	37
6.4.10	Calcolo del prodotto di convoluzione . . . . .	37
6.5	Modulazione di Ampiezza . . . . .	39
6.5.1	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$ . . . . .	40
6.5.2	Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$ . . . . .	41
6.5.3	Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ . . . . .	41
6.5.4	Th. Modulazione con Esponenziale Complesso . . . . .	43
6.5.5	Demodulazione . . . . .	43
6.5.6	Radar . . . . .	47
6.6	Delta di Dirac . . . . .	49
6.6.1	Propiet� del Delta di Dirac . . . . .	49
6.6.2	TCF della Delta di Dirac . . . . .	50
6.6.3	TCF di segnali periodici FIX? . . . . .	51
6.7	Relazione tra TSF e TCF . . . . .	52
6.7.1	TCF di un segnale periodico generico . . . . .	52
6.7.2	Relazione tra i coefficienti $X_k$ e $X_{(f)}$ . . . . .	54
6.7.3	$I^a$ formula di Poisson . . . . .	56
6.7.4	Teorema dell'integrazione completo . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Sistemi Monodimensionali</b>	<b>59</b>
7.1	Propiet� dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) . . . . .	59
7.2	Propiet� dei Sistemi Lineari Stazionari (SLS) . . . . .	60
7.2.1	Risposta in frequenza . . . . .	61
7.2.2	Sistemi in cascata e in parallelo . . . . .	61
7.3	Risposta di un sistema causale e risposta impulsiva . . . . .	63
7.3.1	Risposta in frequenza di un circuito RC . . . . .	63
7.3.2	Risposta in frequenza di un circuito CR . . . . .	63

7.4	Filtri Ideali . . . . .	63
7.4.1	Filtro Passa Basso di banda B - Low Pass Filter (LP) . .	63
7.4.2	Filtro Passa Alto di banda B - High Pass Filter (HP) . .	63
7.4.3	Filtro Passa Banda di banda B - Band Pass Filter (BP) .	63
7.4.4	Filtro Elimina Banda di banda B - Band Stop Filter (BS)	63
<b>8</b>	<b>Teoria Dei Codici</b>	<b>65</b>
8.1	Introduzione . . . . .	65
8.1.1	Esempio codici a blocco: codici a ripetizione . . . . .	68
8.1.2	Esempio codici a blocco: codici a controllo di parità . . .	68
8.1.3	Esempio codici a blocco: codice ISBN . . . . .	68
8.2	Codici a blocco . . . . .	68
8.2.1	Introduzione ai codici lineari . . . . .	68
8.2.2	Campi di Galois . . . . .	69
8.2.3	Codici a blocco lineari su $GF(2)$ . . . . .	69
8.2.4	Proprietá dei codici a blocco lineari . . . . .	69
8.2.5	Distanza di Hamming . . . . .	69
8.2.6	Codici a blocco in forma sistematica . . . . .	69
<b>9</b>	<b>Formulario</b>	<b>70</b>
9.1	Trigonometria . . . . .	70
9.1.1	Formule di addizione . . . . .	70
9.1.2	Formule di duplicazione . . . . .	70
9.1.3	Formule di bisezione . . . . .	71
9.2	Segnali Notevoli . . . . .	71
9.3	Grandezze Fisiche . . . . .	72
9.4	Varie . . . . .	72
	<b>Indice Alfabetico</b>	<b>74</b>

# **1 Introduzione**

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.

I testi consigliati sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson

## 2 Richiamo Sui Numeri Complessi

### 2.1 Struttura di un numero complesso

#### 2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = \text{Re}\{z\}$$

$$\text{Parte Immaginaria: } b = \text{Im}\{z\}$$

$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

#### 2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{j\theta} = \rho \cos(\theta) + j\rho \sin(\theta)$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$

$$\text{Fase: } \theta = \arg(z) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

grafico forma polare-cartesiana

#### 2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana

$$z^* = a - jb$$

- Forma Polare

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$

### 2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria

$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$

- Modulo

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}$$

- Fase

$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

## 2.3 Operazioni

Dati:  $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ ,  $z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

- Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2 = \rho^2$$

## 2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) = a(t) + jb(t) = \rho(t)e^{j\theta(t)}$$

- Integrale

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b a(t) + jb(t) dt = \int_a^b a(t) dt + j \int_a^b b(t) dt$$

- Derivata

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t)$$

### 3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto  $\forall t$ , per ogni istante temporale si conosce il valore del segnale, spesso rappresentati con funzioni analitiche.
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche, ad esempio un rumore.

#### 3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
  - Segnale tempo continuo:  $t \in \mathbb{R}$  assume con continuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
  - Segnale a tempo discreto:  $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$   $T$  = periodo di campionamento, la variabile temporale assume solo valori discreti

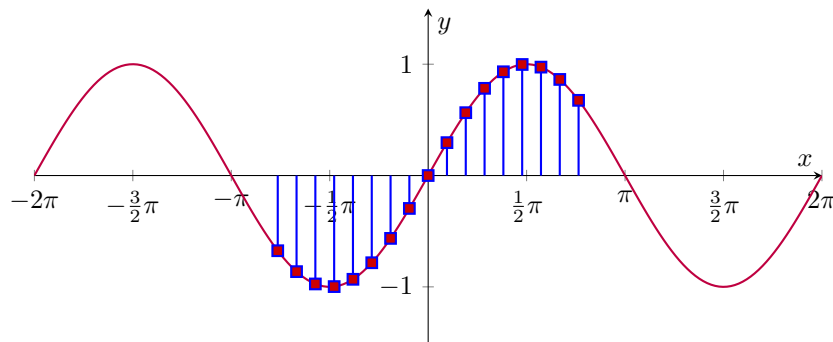


Figure 2: tempo continuo, tempo discreto:  $T = 0.3$

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
  - Segnale ad ampiezza continua:  $x_{(t)}$  *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
  - Segnale ad ampiezza discreta:  $x_{(t)}$  *discreta*, se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica può assumere solo valori discreti



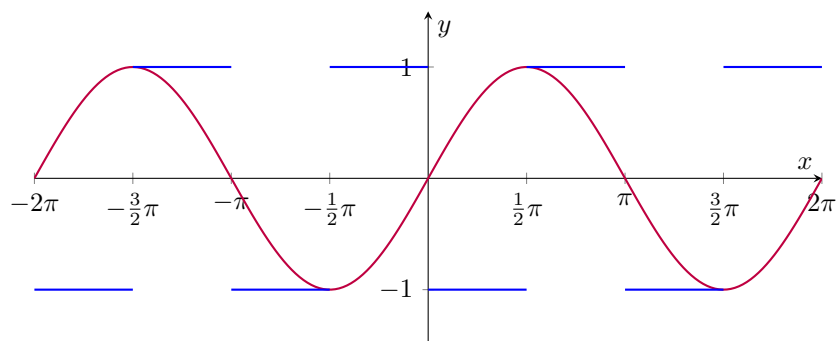


Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Possiamo costruire una tabella per categorizzare le tipologie di segnali:

Segnale	Continuo	Discreto	$t$
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x(t)$			

## 4 Segnali Analogici

### 4.1 Grandezze dei segnali Analogici

#### 4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x(t)|^2$$

$$\text{Se } x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow P_x \triangleq x_{(t)}^2$$

#### 4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{Energia} : \begin{cases} \text{Energia finita} & (\text{Segnali fisici}) \\ \text{Energia infinita} & (\text{Segnali ideali}) \end{cases}$$

#### 4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$T = \text{Periodo di osservazione}$

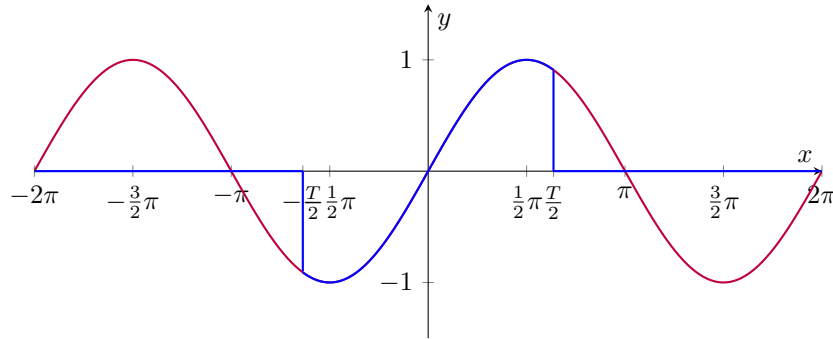


Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

$$E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

dalla quale possiamo ricavare se  $T \rightarrow \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$ :

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Possiamo ricavare delle proprietà secondo energia e potenza:

- Se  $x(t)$  ha  $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$
- Se  $x(t)$  ha  $P_x = k \neq 0 < \infty \Rightarrow E_x = \infty$

#### 4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

#### 4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)_T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$x(t)_T = \text{Segnale troncato}$$

## 4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

### 4.2.1 Costante

$$x(t) = A \quad \forall t$$

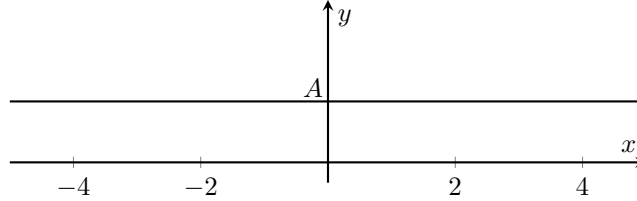


Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

#### 4.2.2 Cosinusoide

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$A = \text{Ampiezza}$ ,  $f_0 = \frac{1}{T} = \text{frequenza}$ ,  $\phi = \text{fase}$

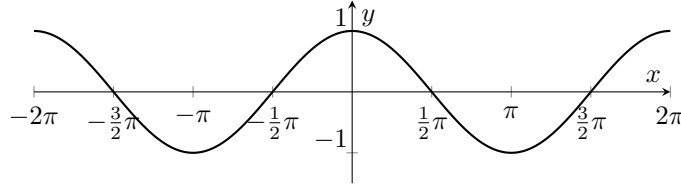


Figure 6: Segnale cosinusoidale ( $\phi = 0$ )

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 9.1 il  $\sin^2(\alpha)$  e lo sostituiamo (2.1) 9.1.2

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 + \cos^2(\alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\ &= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\ &= \frac{A}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

### 4.2.3 Gradino

$$U(t) = x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

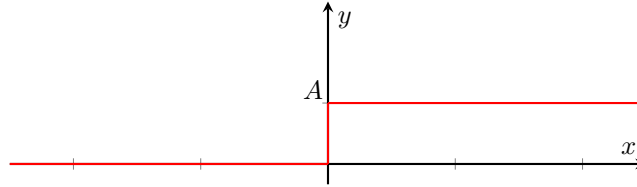


Figure 7: Segnale gradino

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

### 4.2.4 Rettangolo

$$x(t) = A \text{ rect} \left( \frac{t}{T} \right) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

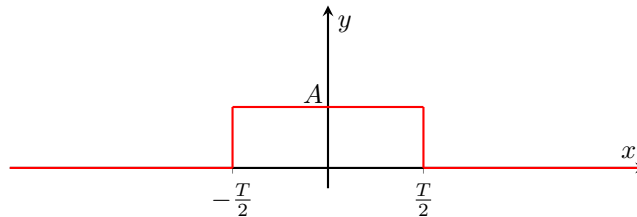


Figure 8: Segnale rettangolo

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = A^2 T$$

- Potenza Media:  $T < T_0$  se non fosse così avrei una costante

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} A^2 T = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} AT = 0 \end{aligned}$$

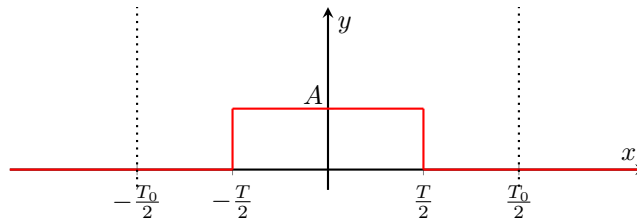


Figure 9

#### 4.2.5 Esponenziale unilatera

$$x(t) = e^{-t} U(t)$$

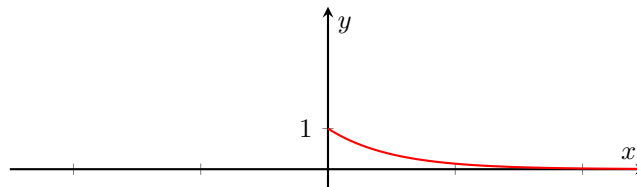


Figure 10: Segnale esponenziale unilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left. \frac{1}{2} e^{-2t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-1) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$



#### 4.2.6 Esponenziale bilatera

$$x(t) = e^{-|t|}$$

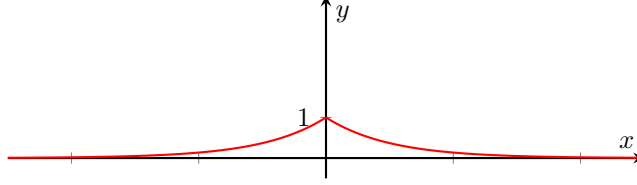


Figure 11: Segnale esponenziale bilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 2 \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t}U(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t}U(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (-2)e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{2}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} = 0 \end{aligned}$$

#### 4.2.7 segno $sgn(x(t))$

$$x(t) = sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

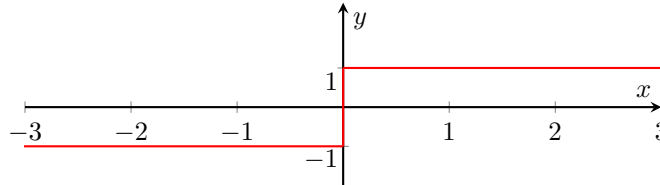


Figure 12: Segnale sgn(x)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}^2 t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 1$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sgn}(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 1 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( -\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

### 4.3 Segnali Periodici

Un segnale è periodico se:

$$x(t) = x(t - kT_0) \quad k \in \mathbb{Z}, t_0 \in \mathbb{R}^+, T_0 = \text{Periodo del segnale}$$

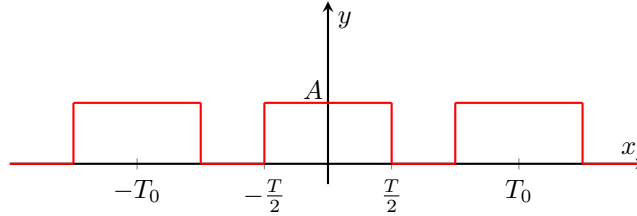


Figure 13: Segnale periodico

Si possono definire le seguenti grandezze:

- Energia di un segnale periodico

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_0}{2} + kT_0}^{\frac{T_0}{2} + kT_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} kX = \infty \end{aligned}$$

Tutti i segnali iperperiodici hanno quindi  $E_x = \infty$

- Potenza media di un segnale periodico

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \Rightarrow T = kT_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} |x(t)|^2 dt \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

Posso calcolare la potenza di un singolo periodo:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Valore medio di un segnale periodico

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

## 5 Trasformata Serie Di Fourier

### 5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x(t) = x(t - kT_0)$$

$$T_0 = \text{Periodo} \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = \text{Frequenza}$$

### 5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo  $T_0$  che soddisfa le condizioni di Dirichlet e la sua  $E_x < \infty (C.S.)$  può essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di  $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k \in \mathbb{C}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

$$x(t) = \dots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \dots$$

$X_0$  corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale, inoltre le componenti  $X_k$  prendono il nome di armoniche alla frequenza  $f$  corrispondente

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocità:  $\forall x(t) \exists! X_k$ :

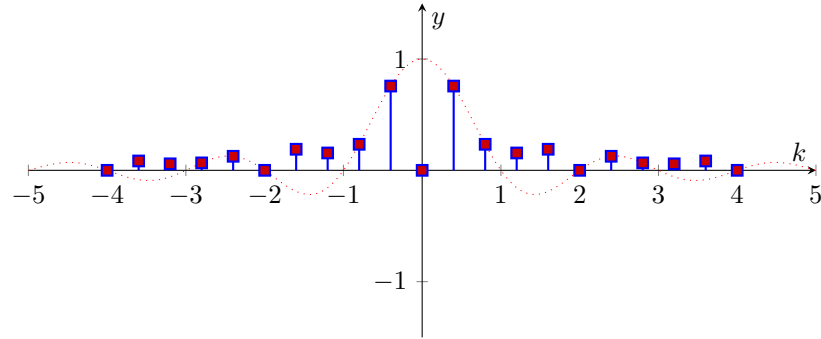
$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightleftharpoons[ATSF]{TSF} & X_k \\ \text{Segnale Analogico Periodico} & \xrightleftharpoons[ATSF]{TSF} & \text{Sequenza Complessa} \end{array}$$

#### 5.2.1 Rappresentazione di $X_k$

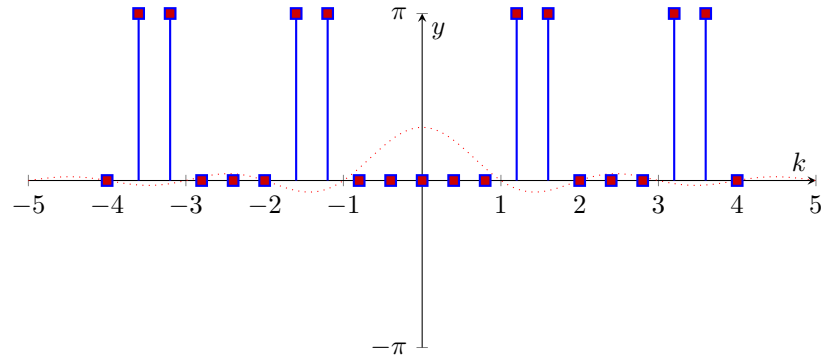
Essendo  $X_k$  un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro di un treno di rect

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

### 5.3 Proprietá della TSF

### 5.4 Linearitá

### 5.5 Simmetria Hermitiana

### 5.6 Calcolo dei coefficienti $X_k$ per segnali noti

#### 5.6.1 $A \cos(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti  $X_k$ :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} + X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

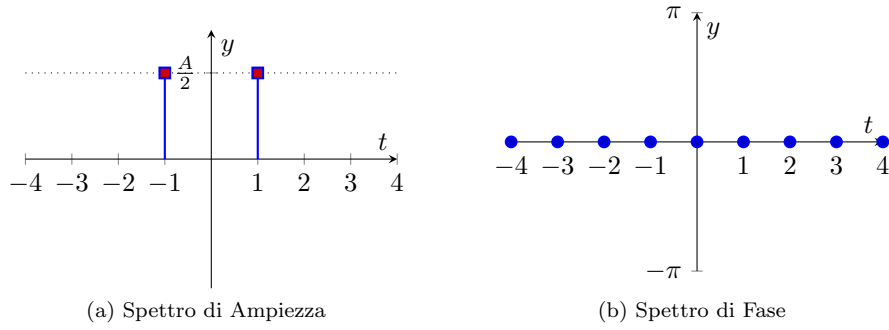


Figure 15: Spettro TSF del coseno  $A > 0$

### 5.6.2 $A \sin(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t), \quad A > 0$$

$$\begin{aligned} ATSF[x(t)] &= ATSF[A \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF\left[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})\right] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficienti  $X_k$ :

$$x(t) = \dots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} - X_0 + X_1e^{-j2\pi(1)f_0t} + \dots$$

Abbiamo :

$$\begin{aligned} X_{-1} &= -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j} \\ |X_k| &= \begin{cases} \left|\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ \left|-\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle \frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle -\frac{A}{2j} = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

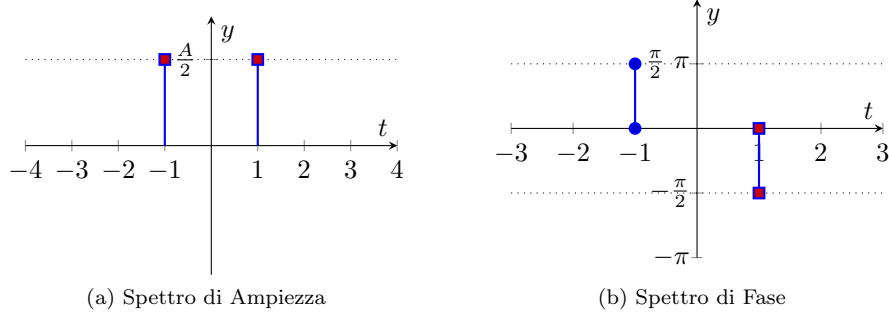


Figure 16: Spettro TSF del seno  $A > 0$

### 5.6.3 Treno di rect

$x_R = A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$  Segnale periodico  $\rightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$   
 $T_0 = \text{periodo}, T = \text{durata} \rightarrow T < T_0$ , se così non fosse avremmo una costante

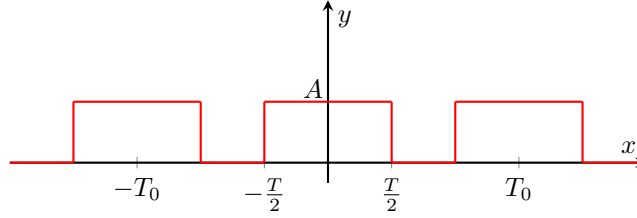
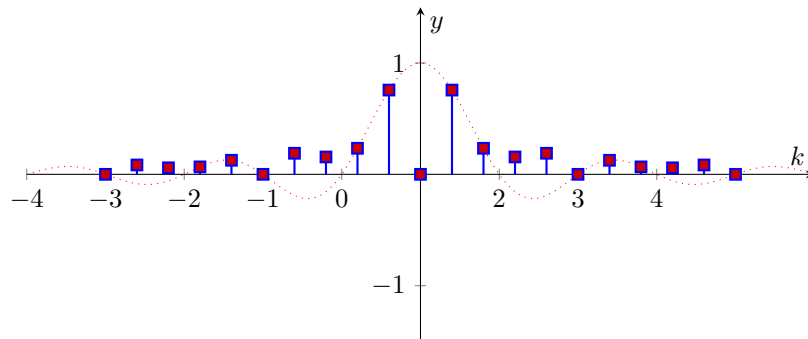


Figure 17: Treno di  $A \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

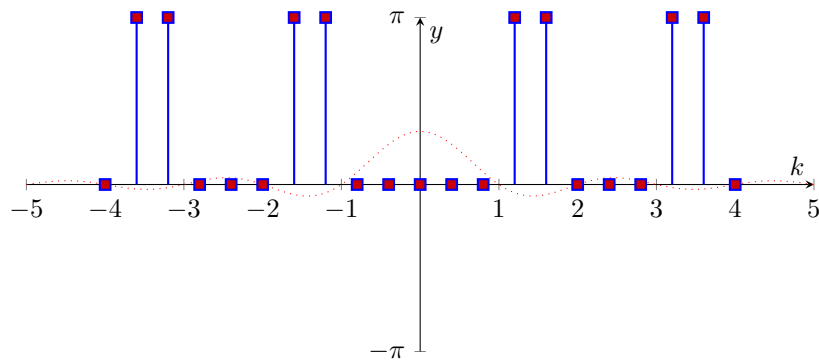
$\rightarrow$  Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da aperiodiche a periodiche e viceversa

$$\begin{aligned}
 ATSF[x(t)] &= ATSF\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)\right] \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
 &= \frac{AT}{T_0} \frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = A f_0 T \text{sinc}(k f_0 T)
 \end{aligned}$$

Tracciamo lo spettro per  $f_0 T < 1$ :



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 18: Spettro TSF del treno di rect con  $f_0 T < 1$

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:

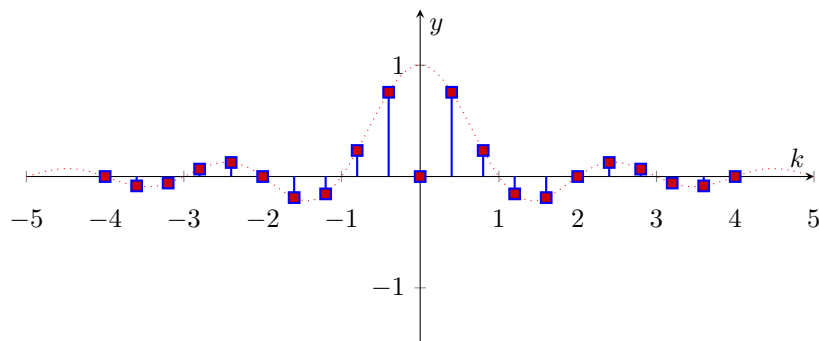


Figure 19: Spettro treno di  $A \text{rect}(\frac{t}{T})$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di ricostruzione dello stesso (script di matlab presenti nel teams):



- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali più alte  $\rightarrow$  copre più spettro (espansione spettrale)  $T_0 \uparrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse frequenze  $T_0 \downarrow$

Se non ho abbastanza passi  $K$  non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio né un'analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettamente il segnale. Inoltre in 0 dello spettro ho il Valore medio 4.1.5 del segnale.

Dubbi: non mi torna il campionamento nella  $\text{sinc}(x)$ , se è definita  $\sin(\pi x)/x$  si annulla nelle ascisse intere, quindi io campiono a frazionati?

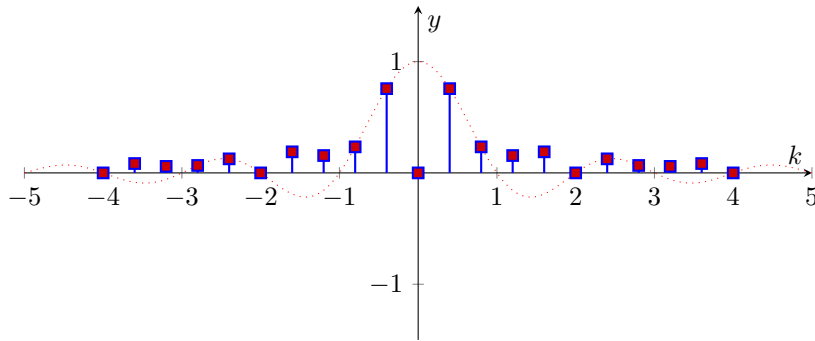
## 6 Trasformata Continua Di Fourier

### 6.1 Segnali Aperiodici

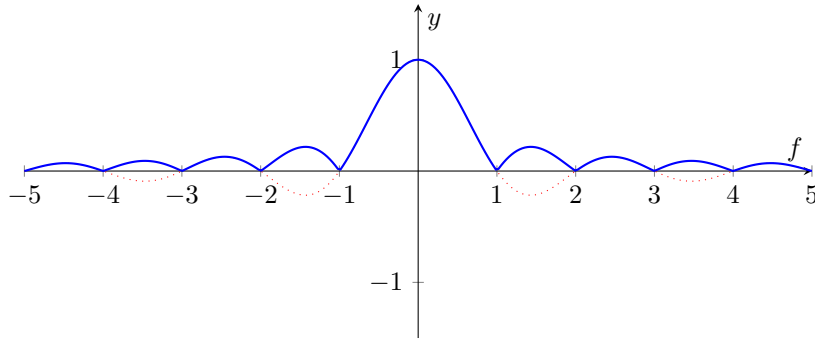
Nel caso di segnali come  $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$  non posso usare la *TSF* posso però scrivere:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t), \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$$

Passiamo da un'analisi a frequenze discrete ad un'analisi su tutto lo spettro delle frequenze



(a) Spettro di Ampiezza TSF



(b) Spettro di Ampiezza TCF

## 6.2 Equazioni di Analisi e Sintesi

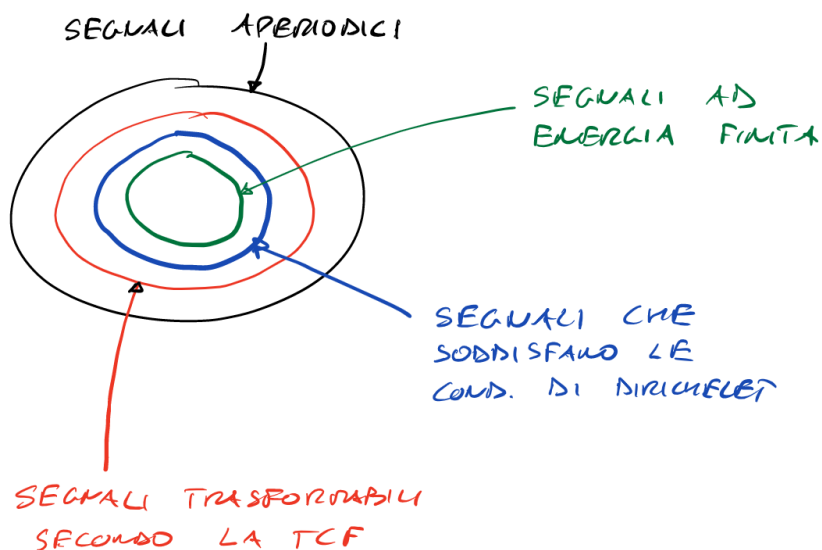


Figure 20: Insiemi dei segnali per tcf

### 6.2.1 Equazione di Analisi

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{Equazione di analisi}$$

### 6.2.2 Equazione di Sintesi

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi ft} df \quad \text{Equazione di sintesi}$$

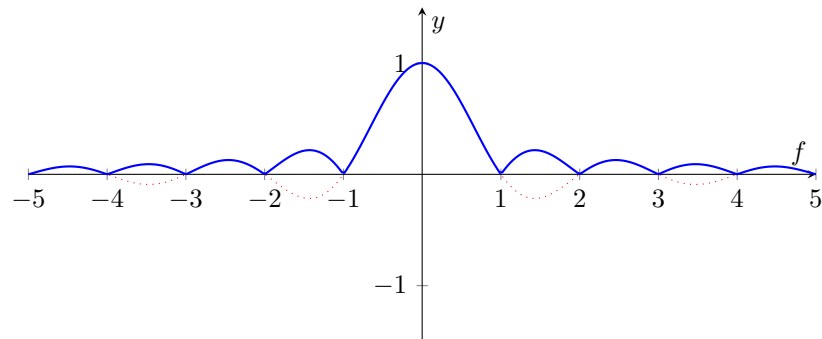
La *TCF* gode della biunivocità

$$x_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \quad X_{(f)} \in \mathbb{C}$$

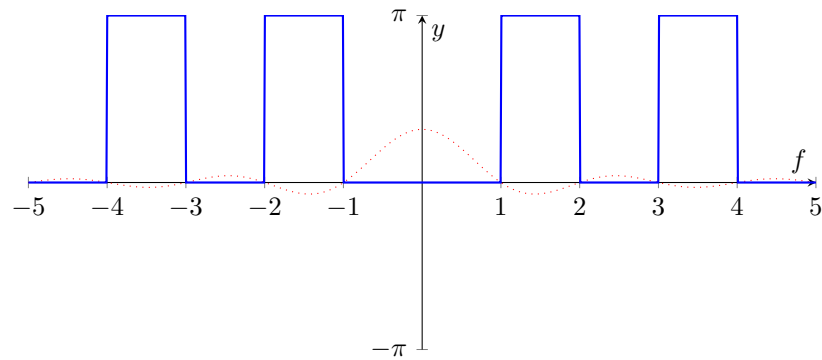
Essendo  $X_k$  un numero complesso può essere rappresentato in forma polare:

$$X_{(f)} = |X_{(f)}| e^{j\angle X_{(f)}}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 21: Spettro del segnale TCF

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo e continuo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**, questa proprietà é chiamata **Simmetria Hermitiana**

### 6.2.3 TCF di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

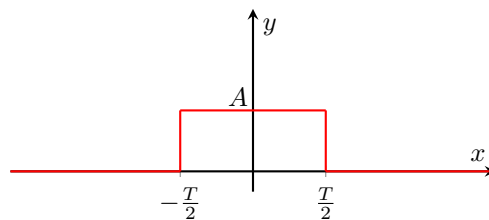


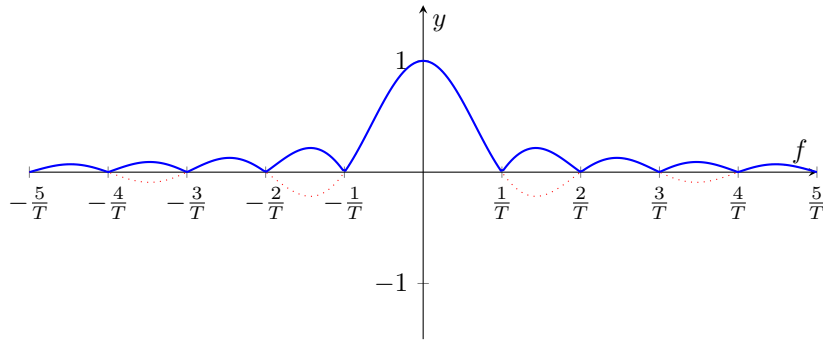
Figure 22:  $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$X_{(f)} = ? :$

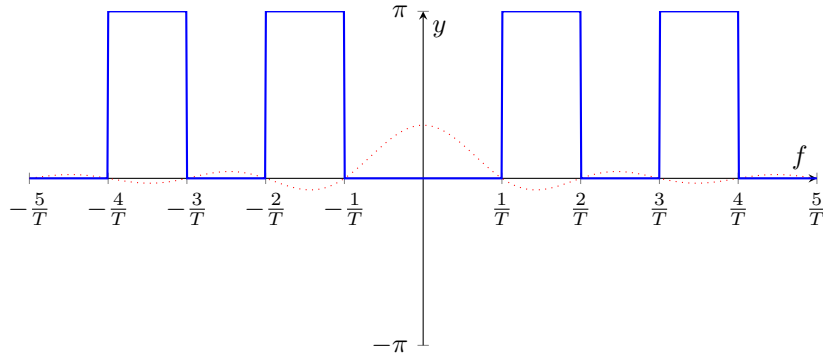
$$\begin{aligned}
 X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) \\
 &= \frac{AT}{\pi f} \left( \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} \right) = \frac{AT \sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(fT) = X_{(f)}
 \end{aligned}$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} AT \operatorname{sinc}(fT)$$

La sinc si annulla in  $\frac{k}{T}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Notiamo anche come la funzione di partenza sia reale e pari la TCF rispetti 6.3.2(si?):



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

### 6.3 Proprietá

Come per la TSF vale che al variare del periodo della funzione  $T$ :

- Se  $T \uparrow$  aumenta  $\rightarrow f \downarrow$  diminuisce e si stringe lo spettro
- Se  $T \downarrow$  diminuisce  $\rightarrow f \uparrow$  aumenta e si allarga lo spettro

Inoltre come si può evincere dal successivo Teorema della Dualità 6.4.2:

- Una funzione limitata (finita) nel tempo ha uno spettro nella frequenza illimitato  $\rightarrow$  sono i segnali fisici
- Una funzione illimitata nel tempo ha uno spettro nella frequenza limitato (finito)

### 6.3.1 Simmetria hermitiana

$Ip : x_{(t)}$  reale

$Th : X_{(f)}$  hermitiana

$$X_{(-f)} = X_{(f)}^* \rightarrow \begin{cases} |X_{(f)}| = |X_{(-f)}| & \text{Simmetria Pari} \\ \angle X_{(-f)} = -\angle X_{(f)} & \text{Simmetria Dispari} \end{cases}$$

### 6.3.2 Parità

$Ip : x_{(t)}$  reale e pari

$Th : X_{(f)}$  reale e pari

### 6.3.3 Disparità

$Ip : x_{(t)}$  reale e dispari

$Th : X_{(f)}$  immaginaria e dispari

## 6.4 Teoremi relativi alla TCF

### 6.4.1 Linearità

$Ip : x_{(t)} = \alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}$

$Th : X_{(f)} = \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_{1(t)} e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{2(t)} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)} \end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
X(f) &= AX_{1(f)} + BX_{2(f)} = 2AT \operatorname{sinc}(2Tf) + BT \operatorname{sinc}(Tf) \\
X_{1(f)} &= \begin{cases} X_{1(f)} = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T'}\right) \stackrel{TCF}{\Leftrightarrow} T' \operatorname{sinc}(T'f) \Rightarrow X_{1(f)} = 2T \operatorname{sinc}(2Tf) \\ T' = 2T \end{cases}
\end{aligned}$$

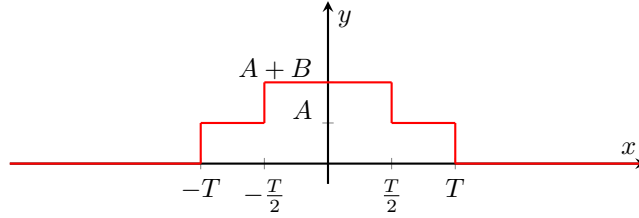


Figure 23: Segnale rettangolo

#### 6.4.2 Dualità

$$Ip : x(t) \stackrel{TCF}{\underset{ATCF}{\Leftrightarrow}} X(f)$$

$$Th : X(t) \stackrel{TCF}{\underset{ATCF}{\Leftrightarrow}} x(-f) \text{ Dimostrazione:}$$

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \text{Sost.} \begin{cases} t \rightarrow f \\ f \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{-j2\pi ft} df \\
&= \text{Sost.} (f' = -f) \Rightarrow X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-f') e^{-j2\pi t(-f')} df' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(-f') e^{j2\pi tf'} df' = ACTF[x(-f)] = c.v.d.
\end{aligned}$$

Esempio:

$$x(t) = A \operatorname{sinc}(Bt) \Rightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{sinc}(Bt) e^{-j2\pi ft} dt$$

Applico la dualità:

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow AT \operatorname{sinc}(Tf)$$

$$AT \operatorname{sinc}(Tt) \Leftrightarrow A \operatorname{rect}\left(\frac{-f}{T}\right)$$

Se voglio una durata generica:

$$\begin{aligned}
 & \text{Sostituisco } B = T \\
 & AB\text{sinc}(Bt) \Leftrightarrow A\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \\
 & \Downarrow \\
 & A\text{sinc}(Bt) \Leftrightarrow \frac{A}{B}\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)
 \end{aligned}$$

### 6.4.3 Ritardo

$$Ip : x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f), \quad y(t) = x(t-t_0)$$

$$Th : Y(f) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} y(t) = X(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \text{Sost. } (t' = t - t_0) \Rightarrow Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j2\pi f(t'+t_0)} dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'} e^{-j2\pi ft_0} dt' = X(f)e^{-j2\pi ft_0} \text{ c.v.d.}
 \end{aligned}$$

Osservazione:

- Un ritardo nel tempo introduce una componente solo di fase che cresce linearmente con la frequenza
- Un esponenziale nel tempo introduce un ritardo nel dominio della frequenza  $x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \mapsto X(f-f_0)$ , vedi 6.5.4

Esempio:

$$x_0(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow x(t) = x_0(t-t_0) \quad t_0 = \frac{T}{2}$$

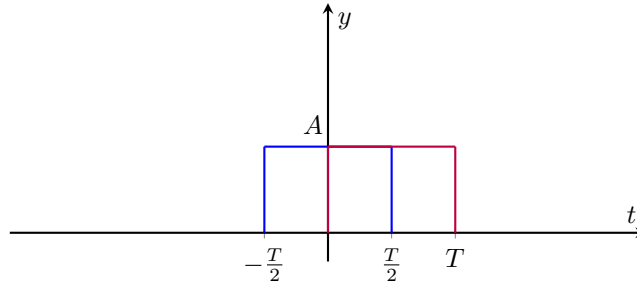


Figure 24:  $x_0(t)$ ,  $x(t)$



$$X_{(f)} = X_{0(f)} e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = AT \text{sinc}(Tf) e^{-j\pi f T}$$

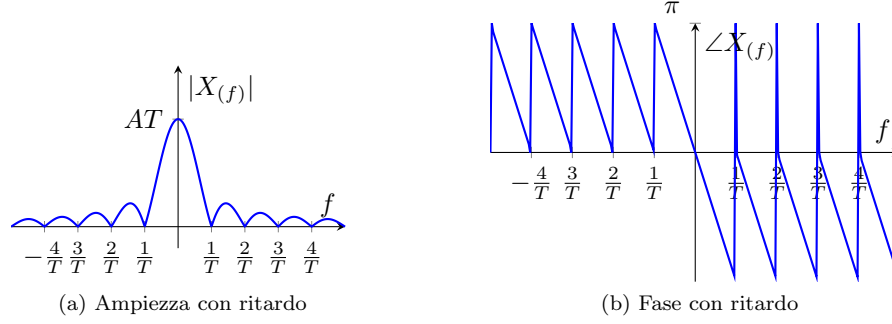


Figure 25: Spettro della *rect* con ritardo

Il  $\text{\LaTeX}$  sbaglia e aggiunge le spike nelle  $f$  positive, il grafico é dispari con andamento come per le  $f$  negative.

#### 6.4.4 Derivazione

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightarrow{TCF} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \frac{d}{dt} x_{(t)} \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= \frac{d}{dt} x_{(t)} = \frac{d}{dt} ACTF[x_{(t)}] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi f t} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} j2\pi f e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

Posso Scrivere  $y_{(t)}$  come  $ACTF[y_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$ , se quindi  $Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$  l'uguaglianza é valida:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi f t} df$$

L'operazione di derivata nel dominio della frequenza si traduce in una semplice operazione algebrica, nel tempo avrei dovuto calcolare il rapporto incrementale. Per derivare un segnale posso quindi:

$$x_{(t)} \rightarrow TCF \rightarrow j2\pi f X_{(f)} \rightarrow ACTF \rightarrow y_{(t)}$$

### 6.4.5 Integrazione

$$Ip: \begin{cases} x_{(t)} \stackrel{TCF}{\Longleftrightarrow} X_{(f)} & (1) \\ y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha & (2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} dt \text{ oppure } X_{(f)}|_{f=0} = 0 \text{ oppure } y(+\infty) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$Th: Y_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Dimostrazione:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha \Rightarrow \frac{d}{dt} x_{(t)} = \frac{d}{dt} y_{(t)} \stackrel{Th.6.4.4}{\Rightarrow} X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)}$$

$$Y_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

L'ipotesi 3 é conseguenza della divisione per  $f$  e che devo mantenere l'uguaglianza  $X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)}$ , si nota come nella dimostrazione usando il Th della Derivazione (6.4.4) quando  $f = 0$  la funzione nella frequenza deve essere 0,  $X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)} = 0$

Esempio:  $TCF$  di una piramide

$$x_{(t)} = A \left( 1 - \left( \frac{|t|}{T} \right) \right) rect \left( \frac{t}{2T} \right) \quad X_{(f)} = TCF[x_{(t)}] = ?$$

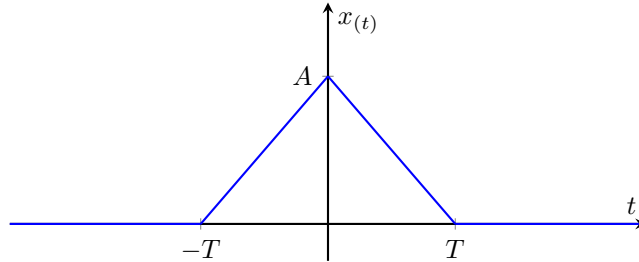


Figure 26: Funzione priamide

$TCF[x_{(t)}]$  :

- Utilizzando la classica  $TCF$ :

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} A \left( 1 - \left( \frac{|t|}{T} \right) \right) rect \left( \frac{t}{2T} \right) dt$$

- Utilizzando il Th dell'Integrazione 6.4.5:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^t y(\alpha) d\alpha \quad 6.4.5(2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt \quad 6.4.5(3)$$

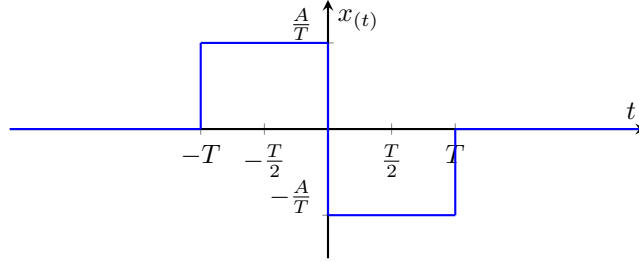


Figure 27: Funzione priamide

$$y(t) = \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - (-\frac{T}{2})}{T}\right) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) = \text{Sono 2 rect con ritardo}$$

$$\Rightarrow y(t) \Rightarrow Y_{(f)} \quad 6.4.5(1) \Rightarrow X_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} \begin{cases} x_{(t-t_0)} \Rightarrow X_{(f)} e^{-j2\pi f t_0} \\ \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow T \text{sinc}(Tf) \end{cases}$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f(-\frac{T}{2})} - \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$= \textcolor{red}{2j} A \text{sinc}(Tf) \frac{e^{j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{\textcolor{red}{2j}} = 2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)$$

$$X_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{2j A \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{j2\pi f} = \frac{A \textcolor{red}{T} \text{sinc}(Tf) \sin(\pi f T)}{\pi f \textcolor{red}{T}}$$

$$= AT \text{sinc}^2(fT)$$

Abbiamo ottenuto la *TCF* del triangolo:

$$A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T}\right)\right) \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \Rightarrow AT \text{sinc}^2(fT)$$

per la dualita 6.4.2 :

$$AB \text{sinc}^2(Bt) \Rightarrow A \left(1 - \left(\frac{|f|}{B}\right)\right) \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

I segni negativi spariscono per il valore assoluto e per la parità della *rect*. Per verificare che i calcoli siano corretti posso colacolare la  $X_{(f)}$  in 0 e

vedo quanto é l'area del segnale:

$$T^2 \text{sinc}(Tf) \Big|_0 = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} T \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = T$$

*Osservazione:* la funzione piramidale varia meno rapidamente nel *tempo* rispetto alla funzione rettangolare quindi lo spettro non occupa le alte frequenze, l'andamento é di  $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$ , é molto piú contenuto. La rect avendo un gradino varia molto rapidamente nel *tempo* e di conseguenza il suo spettro si estende a frequenze piú alte del segnale piramidale.

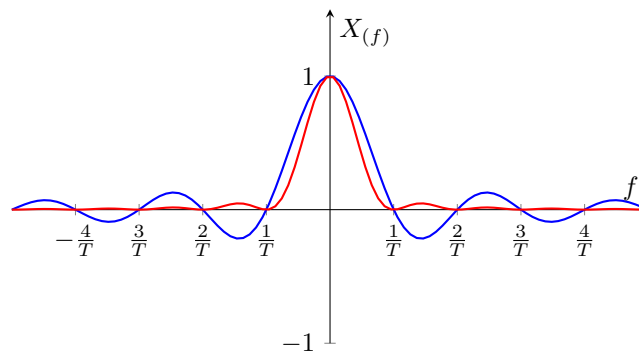


Figure 28:  $\frac{\text{sinc}}{x}$ ,  $\frac{\text{sinc}^2}{x^2}$

DOMANDA: ma la fase in tutto questo che ruolo ha? non avrei problemi avere anche sinc che cambiano la fase degli altri segnali? dopotutto si la sinc é brutta perché si estende all'infinito, ma proprio per questo la fase é sempre sporcata? cosa comporta nella ricostruzione del segnale? noi abbiamo visto finora l'ampiezza dopotutto

#### 6.4.6 Derivazione in Frequenza

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

#### 6.4.7 Integrazione in Frequenza

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

#### 6.4.8 Convoluzione

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$$Ip : \begin{cases} x(t) \xrightarrow[ATCF]{TCF} X(f) \\ x(t) \xrightarrow[ATCF]{TCF} X(f) \\ z(t) = x(t) \otimes y(t) \end{cases}$$

$$Th : Z(f) = X(f) Y(f)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt d\tau \xrightarrow{Th.6.4.3} \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X(f) Y(f) \end{aligned}$$

Proprietà della convoluzione:

- Commutativa:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \Rightarrow \tau = t - \tau' \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau') y(\tau') d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau') x(t-\tau') d\tau' = y(t) \otimes x(t) \end{aligned}$$

- Associativa:

$$(x(t) \otimes y(t)) \otimes z(t) = x(t) \otimes (y(t) \otimes z(t))$$

- Distributiva:

$$x(t) \otimes (y(t) + z(t)) = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) (y(t-\tau) + z(t-\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) + x(\tau) z(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) z(t-\tau) d\tau = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t) \end{aligned}$$

Tutte le proprietà sono valutate nel dominio del *tempo* ma valgono anche per il dominio della *frequenza*.

#### 6.4.9 Prodotto

$$Ip : \begin{cases} x(t) \stackrel{TCF}{\rightleftharpoons} X(f) \\ x(t) \stackrel{ATCF}{\rightleftharpoons} X(f) \\ z(t) = x(t)y(t) \end{cases}$$

$$Th : Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) e^{j2\pi \alpha t} d\alpha y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi (f-\alpha)t} dt d\alpha \\ &\stackrel{Th.6.4.3}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) Y(f-\alpha) d\alpha = X(f) \otimes Y(f) \end{aligned}$$

<i>Tempo</i>	<i>Frequenza</i>
<i>Convoluzione</i>	<i>Prodotto</i>
<i>Prodotto</i>	<i>Convoluzione</i>

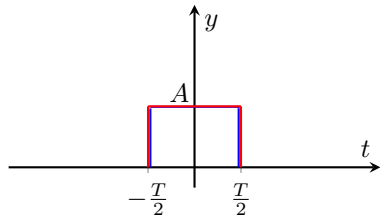
$\Longleftrightarrow$        $\Longleftrightarrow$

#### 6.4.10 Calcolo del prodotto di convoluzione

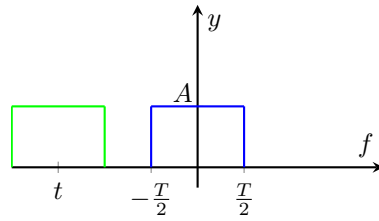
$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad y(-\alpha) \text{ e' } y(\alpha) \text{ ruotato}$$

Facciamo un esempio con 2 *rect*:

$$x(t) = y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



(a) Grafico nel tempo,  $y(-\alpha)$ ,  $x(\alpha)$



(b) illustrazione dell'integrale al variare di  $t$ ,  $y(t-\alpha)$ ,  $x(\alpha)$

Figure 29: Grafico per il calcolo del prodotto di convoluzione

All'aumentare di  $t$   $y(t-\alpha)$  si sposta sull'asse delle ascisse, se:

- $t = -\frac{T}{2}$ : si allineano le due *rect* e il valore dell'integrale inizia a aumentare.

- $t = 0$ : si ha il valore massimo del prodotto tra le due funzioni (in questo caso  $A = 1$ ), l'integrale vale  $T$ .
- $t = \frac{T}{2}$ : le due *rect* sono disgiunte, nel raggiungere questa posizione il valore dell'integrale é diminuito fino a 0.

Tracciamo l'andamento dell'integrale:

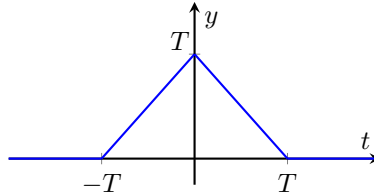
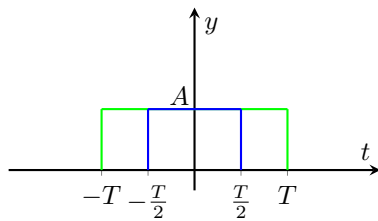


Figure 30: Integrale di convoluzione

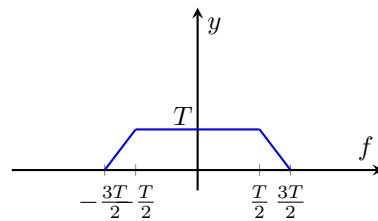
*Osservazioni:*

- Il prodotto di convoluzione ha come durata la somma delle durate dei segnali  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow [-T, T]$
- In  $t = 0$  é l'area il prodotto dei segnali

Esempio con *rect* di durata  $T$  e  $2T$ :



(a) Grafico delle *rect*



(b) Risultato integrale di due *rect* diverse

Figure 31: Integrale di convoluzione di *rect* di durata diversa

Esempio *TCF* di un triangolo:

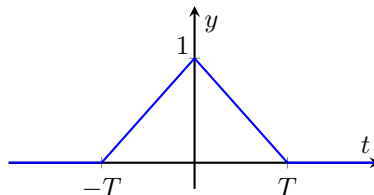


Figure 32: Integrale di convoluzione

Dal Th. di Convoluzione 6.4.8 sappiamo che é il prodotto di convoluzione di 2 rect di durata uguale a  $T$ :

$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \stackrel{\text{Th. 6.4.8}}{\Rightarrow} T \text{sinc}(fT) \cdot T \text{sinc}(fT) \\ T^2 \text{sinc}(fT)$$

Esercizio appunti martorella triangoli a sx a dx:

## 6.5 Modulazione di Ampiezza

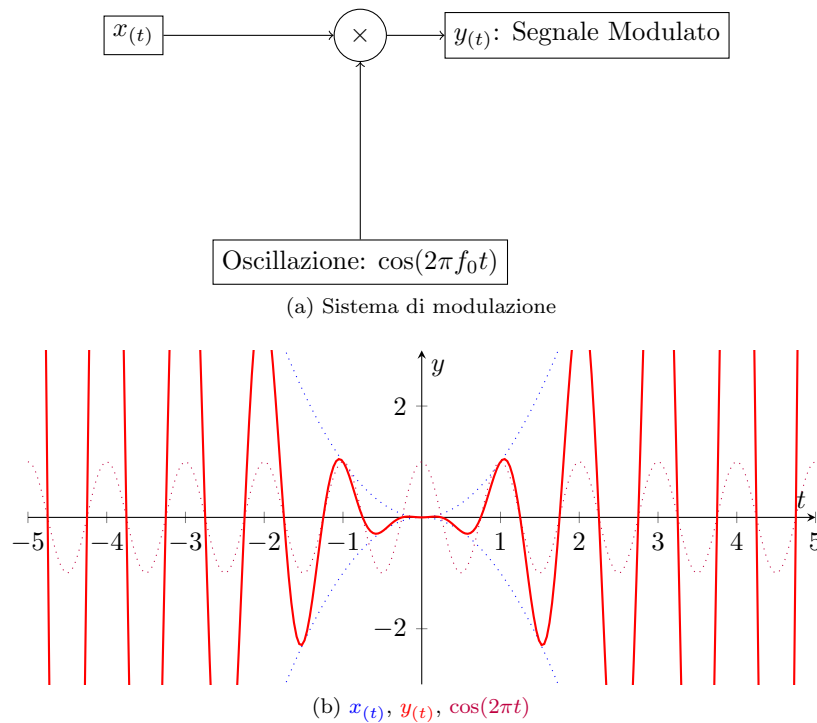


Figure 33: Esempio sistema di modulazione di ampiezza

L'oscillazione introdotta,  $\cos(2\pi t)$ , segue l'andamento di  $x_{(t)}$  Nel dominio della frequenza:



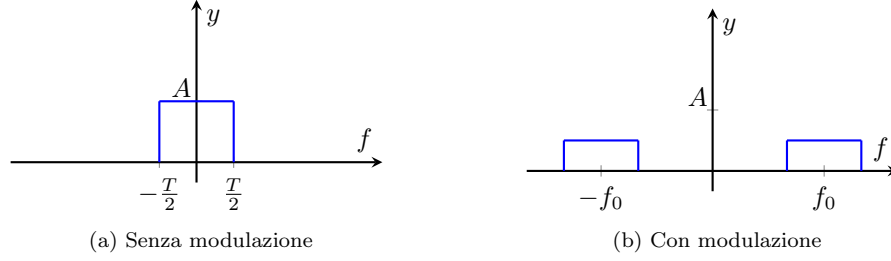


Figure 34: Segnale nel dominio della frequenza modulato e non

Serve per spostare la frequenza (es. di trasmissione) del segnale in modo tale, ad esempio, da non sovrapporre due segnali che sono sulla stessa frequenza. Se il segnale non fosse modulato si dice in **banda base (BB)** se il segnale é modulato si dice in **banda passante(BP)**.

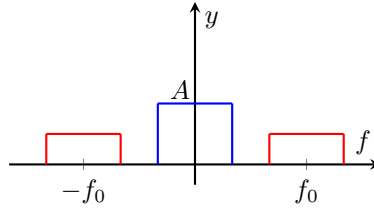


Figure 35: **BB**, **BP**

### 6.5.1 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} + TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0) \text{ c.v.d} \end{aligned}$$

Esempio:

$$X_{(f)} = \frac{A}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{2B} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \frac{A}{2B} \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)$$

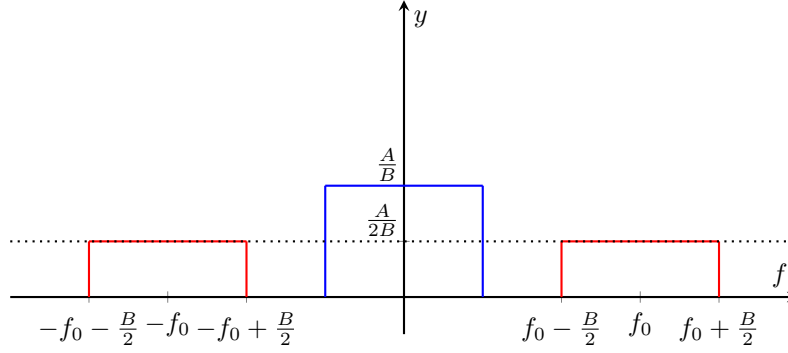


Figure 36:  $X_{(f)}$ ,  $Y_{(f)}$

### 6.5.2 Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} - TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d} \end{aligned}$$

### 6.5.3 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

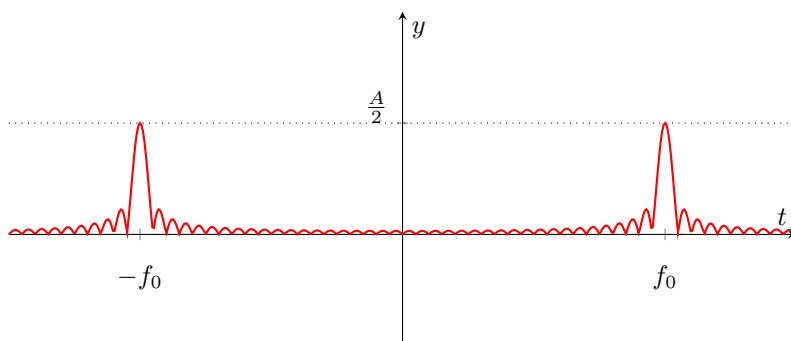
$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X_{(f)} \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)}$$

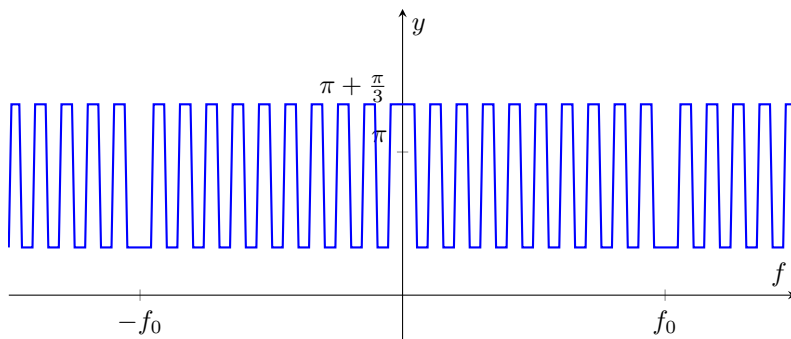
Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \frac{e^{j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
 &= TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} + TCF[x(t)] \Big|_{f+f_0} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)} \text{ c.v.d}
 \end{aligned}$$

Esempio:



(a) Ampiezza Mod. generica



(b) fase Mod. generica

Figure 37: Modulazione generica di una  $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$  con  $\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3})$

É legale cosa ho scritto sopra della modulazione generica?

#### 6.5.4 Th. Modulazione con Esponenziale Complesso

$$Ip : \begin{cases} y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \\ x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f) \end{cases}$$

$$Th : Y(f) = X(f-f_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = TCF[x(t)] \Big|_{f-f_0} = X(f-f_0) \end{aligned}$$

Posso notare che:

- Ritardo:  $\rightarrow x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
- Modulazione:  $\rightarrow x(t)e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons X(f-f_0)$

Procedimento per la sintesi di un segnale:

- Derivo il segnale
- Verifico le ipotesi del Th. dell'Integrazione 6.4.5
- calcolo la TCF della derivata
- Applico il Th. dell'integrazione per calcolare  $X(f)$

#### 6.5.5 Demodulazione

Ci poniamo il problema di riportare il segnale modulato al segnale originale( $g(t)$ ), dato:

$$x(t) = g(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Demoduliamo il segnale con  $2 \cos(2\pi f_0 t)$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) 2 \cos(2\pi f_0 t) = g(t) \cos^2(2\pi f_0 t) \\ &= g(t) \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} = \frac{g(t)}{2} + \frac{g(t) \cos(4\pi f_0 t)}{2} \\ TCF[y(t)] &\xrightarrow{Th. 6.5.1} \frac{2G(f)}{2} + \frac{2G(f-2f_0)}{2} + \frac{2G(f+2f_0)}{2} \\ &= G(f) + G(f-2f_0) + G(f+2f_0) \end{aligned} \tag{1}$$

Dall'ultima uguaglianza posso quindi usare un filtro in (BB) per rimuovere i segnali alle frequenze  $\pm 2f_0$  e ricavare il mio segnale  $G(f)$ .

DOMANDA: posso anche quindi demodulare con un seno tanto non mi interessa quello che succede alle frequenze spostate, quindi per ritorno sulla fase, non é importante? usando un seno la ribalta praticamente no? ricontroll cio che stai dicendo bro non so se é giusto il ribaltamento

ALTRA DOMANDA: devo anche modulare il segnale abbastanza lontano dalla BB sennó quando demodulo mi autodisturbo il segnale? da qui deriva  $\frac{1}{T} < 2BB$

ALTRA DOMANDA: quindi se volessi captare piú segnali mi conviene utilizzare circuiti diversi? oppure posso modulare e demodulare a piacimento i segnali tenendo conto su quali frequenze ho modulato in modo tale da sapere dove vanno a finire i segnali e recuperarli? tanto non mi interessa su quale frequenza finiscano finché non diventino non recuperabili per sovrapposizione giusto?

Riporto un po di esempi di demodulazione di una o piú *rect*: Esempio di Demodulazione

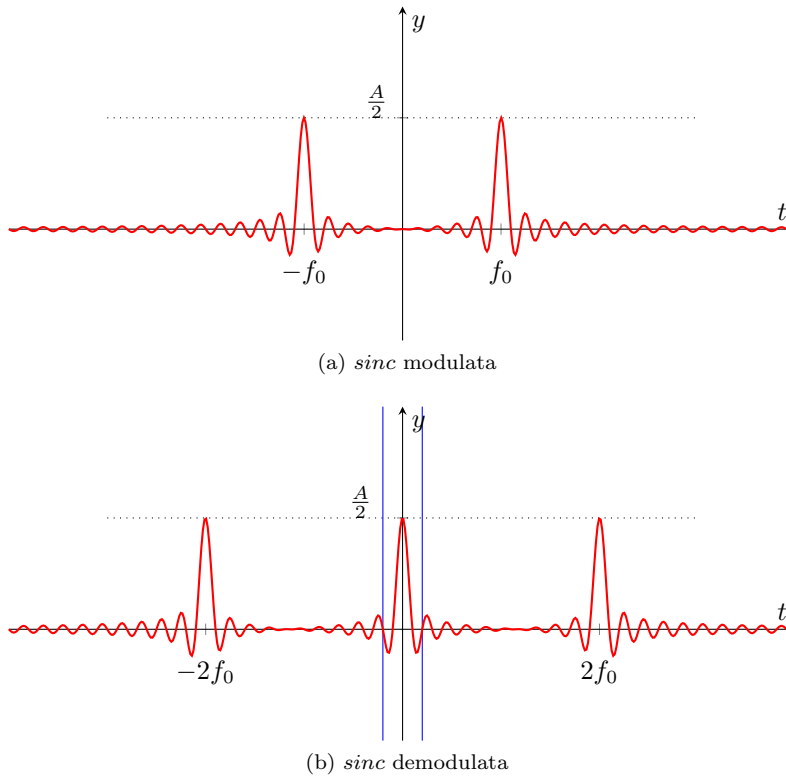
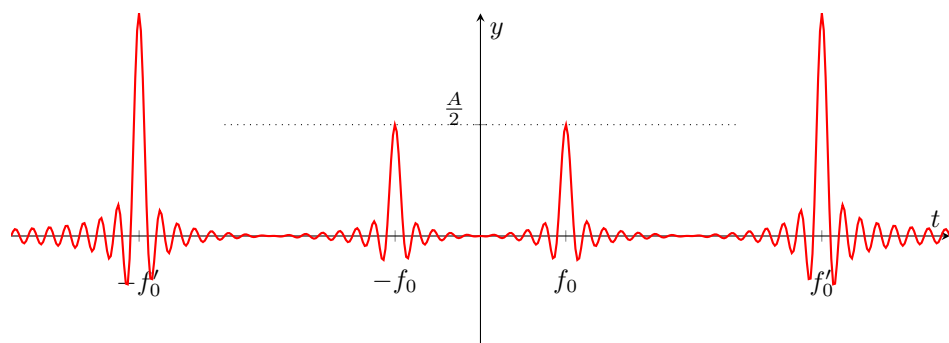
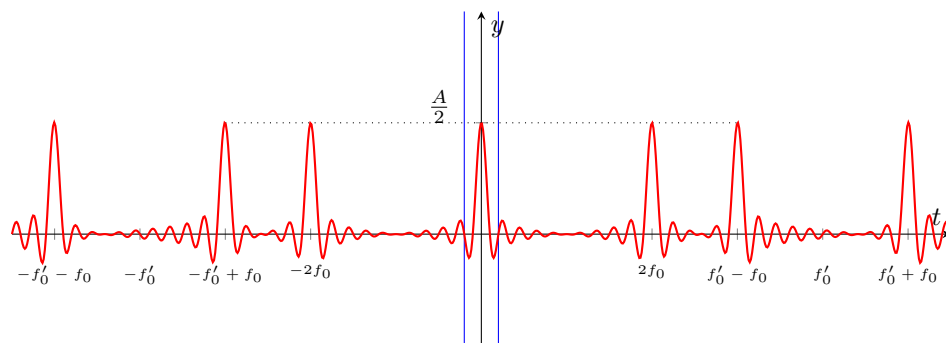


Figure 38: Demodulazione di una *sinc*

Nel caso di piú segnali durante la demodulazione il segnale che voglio recuperare viene spostato in **BB** mentre gli altri segnali presenti sullo spettro vengono a loro volta modulati però con un  $f_0$  diverso rispetto al loro  $f'_0$ :



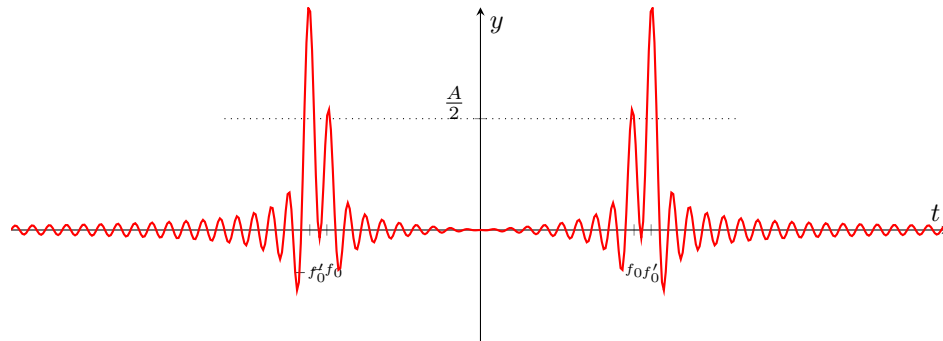
(a) Due *sinc* modulate



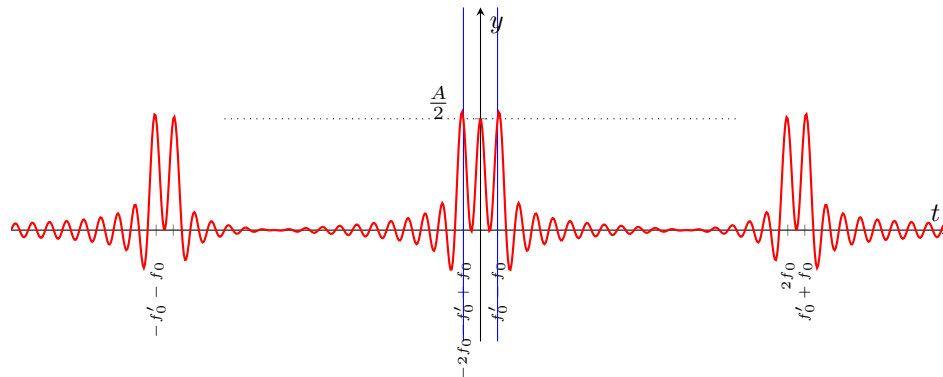
(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 39: Demodulazione di due *sinc*

Potrei però trovarmi in situazioni delle quali non posso recuperare il segnale



(a) Due *sinc* modulate



(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 40: Demodulazione di due *sinc* non recuperabili

Come possiamo vedere nella regione della BB, il segnale é molto sporco, magari può essere confuso con un cos e non una sinc. inoltre ora qui ho usato numeri interi per fare il *plot* quindi non si accavallano così male ma si accavallano solo in  $\frac{1}{T}$  se usassi altri valori sarebbe ancora più sporco il segnale.

Adesso proviamo a calcolare quanti segnali possiamo trasmettere in una banda:

Ho un segnale rettangolare che dura 5 minuti e una banda di  $20MHz = 20 \cdot 10^6 Hz$

$$f_{segnale} = \frac{1}{5 \cdot 60} = \frac{1}{300} Hz$$

$$n^\circ \text{ di segnali} = \frac{20 \cdot 10^6}{f_{segnale}} = 20 \cdot 10^6 \cdot 300 = 6 \cdot 10^9$$

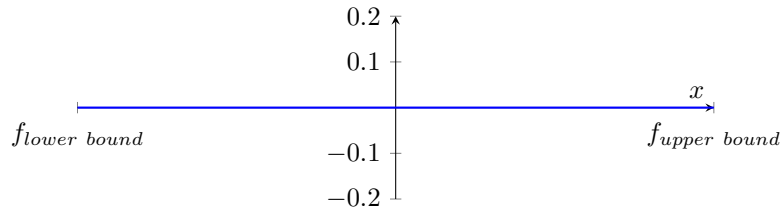


Figure 41: Spettro per la trasmissione

### 6.5.6 Radar

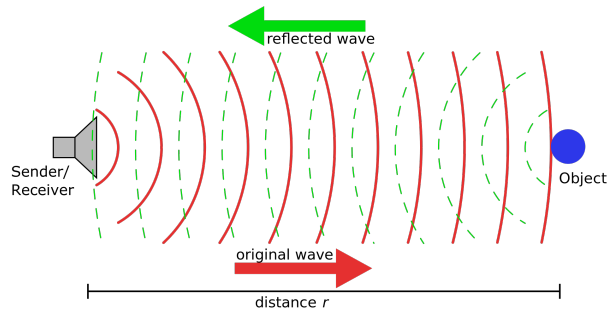


Figure 42: Spettro per la trasmissione

La sorgente emette un'onda continua e passivamente capta per le onde riflesse dagli oggetti. Il calcolo della distanza si basa sulla capacità dei materiali di riflettere le onde, più la frequenza dell'onda è alta più i materiali riescono a riflettere. L'emettitore, in presenza di ostacolo, riceve il segnale riflesso (*eco*) e misura il ritardo dell'*eco* rispetto al segnale originale per poi calcolarne la distanza. Prendiamo un emettitore di onde rettangolari.

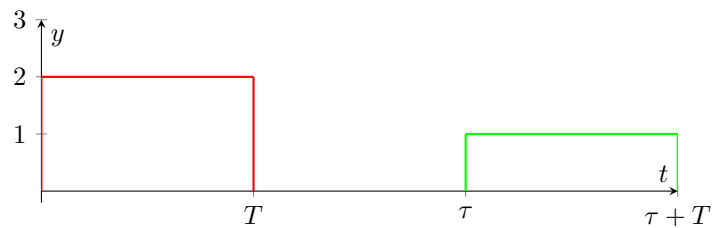


Figure 43: Spettro per la trasmissione

Indichiamo con  $\tau$  il ritardo di ricezione dell'*eco* e la distanza che separa il radar dall'oggetto  $d$ :

$$d = \frac{c\tau}{2}$$



Compare un fattore  $\frac{1}{2}$  dovuto al segnale che percorre due volte la distanza tra l'emettitore e l'oggetto. Possiamo notare che l'eco ha ampiezza minore poiché dell'energia è stata assorbita dal materiale o una porzione del segnale originale ha oltrepassato il materiale stesso.

Analizziamo in frequenza cosa succede.

Volgiamo realizzare un radar a onda rettangolare che rileva a un massimo di 15 metri di distanza e a un minimo di 1,5 metri. Possiamo calcolare i valori di ritardo massimo e minimo:

$$\tau_{min} = \frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 0.1 \mu s$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 1.5}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 10 ns$$

Il radar funziona finché  $T \ll \tau_{min}$ , se avessi un  $\tau_{min} > T$  non potrei distinguere il segnale inviato da quello ricevuto.

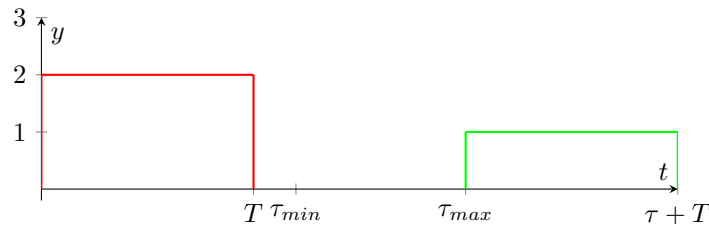


Figure 44: Limiti di ritardo del radar

Nel nostro caso potremmo scegliere un  $T \simeq 1 ns \simeq 10^{-9}$  per rispettare i limiti imposti dall'esercizio. Ma analizzando l'intervallo frequenziale della  $TCF$  della funzione rettangolo, una  $sinc(x)$ , il nostro segnale ha componenti frequenziali significative nell'ordine dei GHz,  $\frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-9}} = 1 GHz$ . I segnali nell'ordine dei GHz oltrepassano con facilità gli ostacoli, basti vedere le bande di funzionamento dei cellulari e il Wi-Fi. Si utilizzano segnali con l'ordine di centinaia se non migliaia di Hz, possiamo vedere come la lunghezza d'onda del segnale giochi un ruolo fondamentale:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$$

$$\lambda_0 = \begin{cases} f_0 = 3GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.1m \\ f_0 = 30GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.01m \\ f_0 = 300GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.001m \\ f_0 = 3000GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.0001m \end{cases}$$

come funzionano il lidar e il sonar? come hanno fatto a rilevare i movimenti con il wifi?

## 6.6 Delta di Dirac

Si definisce Delta di Dirac  $\delta_{(t)} = \frac{d}{dt}U_{(t)}$  con  $U_{(t)}$  funzione gradino. Più correttamente si definisce Delta di Dirac la funzione che se integrata restituisce il gradino unitario:

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt \rightarrow U_{(t)}$$

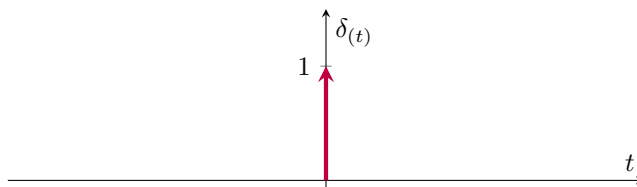


Figure 45: Delta di Dirac

L'ampiezza della funzione é dovuta alla costante moltiplicativa, ma alla fine rimane sempre una funzione impulso.

**boh amplia magari**

### 6.6.1 Proprietá del Delta di Dirac

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt = 1$
- Proprietá Campionatrice:  
 $I_p: x_{(t)} \text{ continua in } t_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \delta_{(t-t_0)} dt = x_{(t_0)}$$

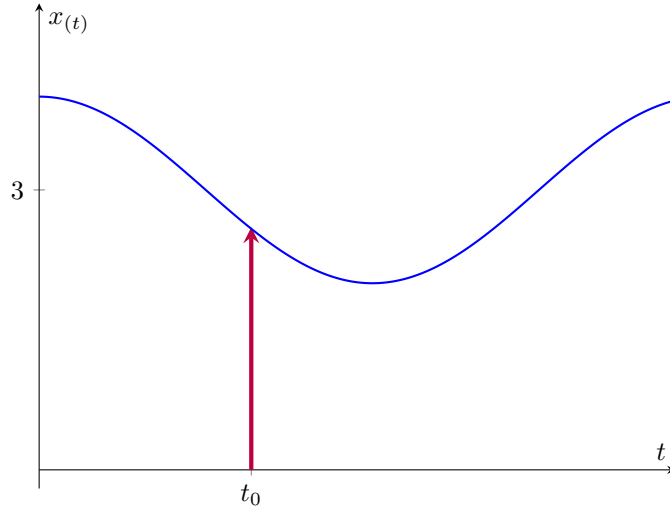


Figure 46: Proprietà Campionatrice

- Parità:  $\delta_{(t)} = \delta_{(-t)}$
- $x_{(t)}\delta_{(t-t_0)}dt = x_{(t_0)}\delta_{(t-t_0)}$
- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = x_{(t)}$  Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(t-\tau)}d\tau \xrightarrow{6.6.1} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(\tau-t)}d\tau = x_{(t)}$$

- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = x_{(t-t_0)}$  Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(t-t_0-\tau)}d\tau \xrightarrow{6.6.1} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(\tau-(t-t_0))}d\tau = x_{(t-t_0)}$$

### 6.6.2 TCF della Delta di Dirac

$$x_{(t)} = A\delta_{(t)}$$

$$TCF[x_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt \xrightarrow{6.6.1, t_0=0} e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} = A$$

$$A\delta_{(t)} \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} A$$

Per la dualità 6.4.2 :

$$A \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} A\delta_{(-f)} = A\delta_{(f)}$$

Caso con ritardo:

$$A\delta_{(t-t_0)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} Ae^{-j2\pi f t_0}$$

Per la dualita 6.4.2 :

$$Ae^{-j2\pi f_0 t} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} A\delta_{(-f-f_0)} = A\delta_{(f+f_0)}$$

### 6.6.3 TCF di segnali periodici FIX?

Nel caso di segnali periodici, come  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , abbiamo definito la  $TSF$ , proviamo a calcolarne la  $TCF$ :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} ?$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= TCF[\cos(2\pi f_0 t)] = TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \\ &= TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right] + TCF\left[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \stackrel{6.6.2}{\Rightarrow} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2} \\ \cos(2\pi f_0 t) &\underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2} \end{aligned}$$

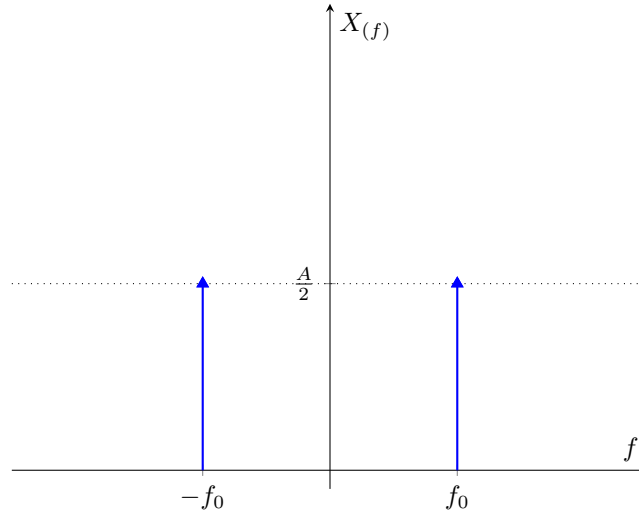


Figure 47: TCF *cos*

Praticamente modulo una costante.

Osservazione: Non sono i coefficienti  $X_{(k)}$ , qui le delta sono funzioni nella  $TSF$

sono numeri complessi.

Caso con  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} ?$$

$$\begin{aligned} X(f) &= TCF[\sin(2\pi f_0 t)] = TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] \\ &= TCF\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2j}\right] - TCF\left[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right] \xrightarrow{6.6.2} \frac{\delta(f-f_0)}{2j} - \frac{\delta(f+f_0)}{2j} \\ \sin(2\pi f_0 t) &\xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} \frac{\delta(f-f_0)}{2j} - \frac{\delta(f+f_0)}{2j} \end{aligned}$$

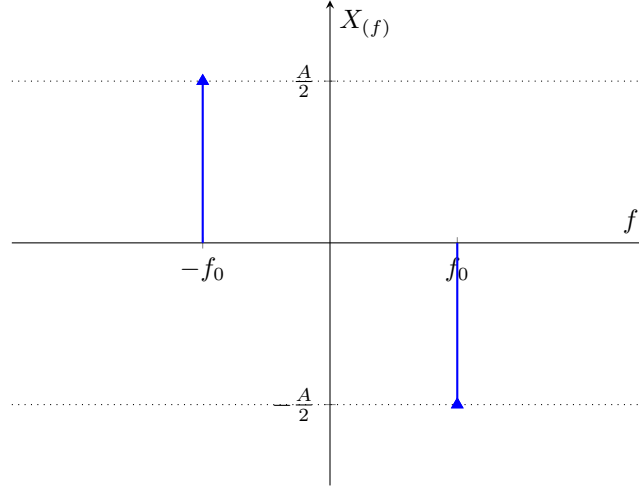


Figure 48: TCF  $\sin$

## 6.7 Relazione tra $TSF$ e $TCF$

### 6.7.1 $TCF$ di un segnale periodico generico

Dato un generico segnale  $y(t)$  posso sempre scriverlo come periodicizzazione di

un segnale aperiodico  $x(t)$ :  $x(t) \xrightleftharpoons[ATCF]{TCF} X(f)$

$$y(t) = y(t - kT_0) \Rightarrow \begin{cases} TSF[y(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \\ TCF[y(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - \frac{k}{T_0}) \end{cases}$$

La TCF diventa un campionamento con la Delta di Dirac 6.6.1

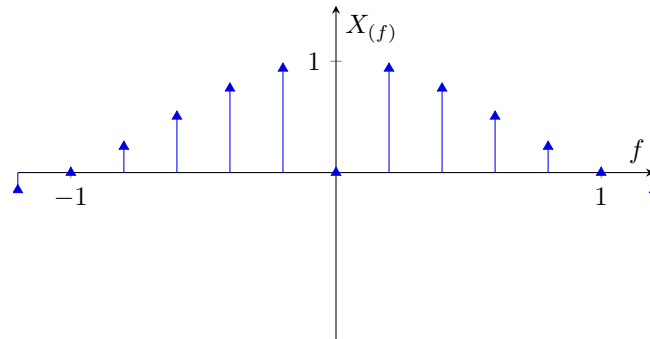


Figure 49: TCF segnale periodico generico

Applichiamolo al Th. della Modulazione 6.5.1:

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \stackrel{6.4.9}{\Rightarrow} X_{(f)} \otimes \left( \frac{\delta(f-f_0)}{2} + \frac{\delta(f+f_0)}{2} \right) \\ \stackrel{6.6.1}{\Rightarrow} \frac{1}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2} X_{(f+f_0)}$$

Esercizio:

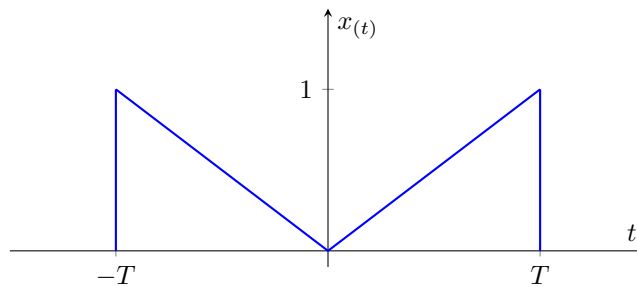


Figure 50: TCF rect meno triangolo

Deriviamo il segnale  $y(t)$ :

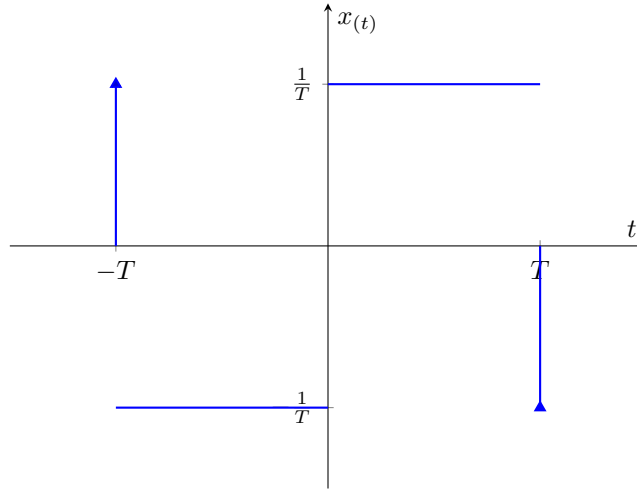


Figure 51: Derivata di  $y(t)$

$$y(t) = \delta_{(t-T)} - \delta_{(t+T)} - \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t - (-\frac{T_0}{2})}{T}\right) + \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T}\right)$$

Possiamo applicare il Th dell'integrazione 6.4.5 l'ipotesi (3):  $y_{(\infty)} = 0$

$$\begin{aligned} TCF[y(t)] &= e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{T} T \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f \frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T} T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \\ &= \frac{2j}{2j} \left( e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f \frac{T_0}{2}} + \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \right) \\ &= 2j \sin(2\pi fT) - 2j \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{2j \sin(2\pi fT) - 2j \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{j2\pi f} \\ &= \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{\text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} = \frac{2T}{2T} \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{T}{T} \frac{\text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} \\ &= 2T \text{sinc}(2fT) - T \text{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

Si potrebbe fare sottraendo un triangolo a una rect?

### 6.7.2 Relazione tra i coefficienti $X_k$ e $X_{(f)}$

$$y(t) = y_{(t-kT_0)} \Rightarrow \text{Periodico in } T_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(t-nT_0)}$$

$x(t)$  Segnale aperiodico

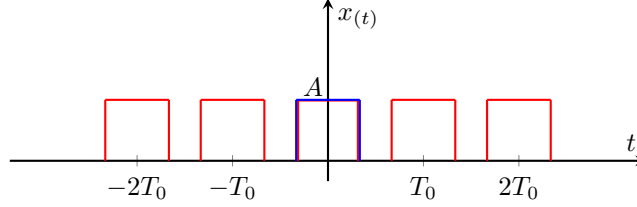


Figure 52: Segnale **aperiodico**, Segnale **periodico**

$$\begin{cases} x(t) \xrightarrow{TCF} X_{(f)} \\ y(t) \xrightarrow{TSF} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{cases} \quad \text{Che relazione intercorre tra } Y_k \text{ e } X_{(f)}$$

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) e^{j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t-nT_0) e^{j2\pi k f_0 t} dt \stackrel{t'=t-nT_0}{=} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 (t'+nT_0)} dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} e^{j2\pi n k f_0 T_0} dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} dt' \rightarrow TCF \text{ con intervalli disgiunti e adiacenti in } k f_0 \end{aligned}$$

$\downarrow \forall nk=1$   
é la fase di un numero sempre intero  $nk \in \mathbb{N}$

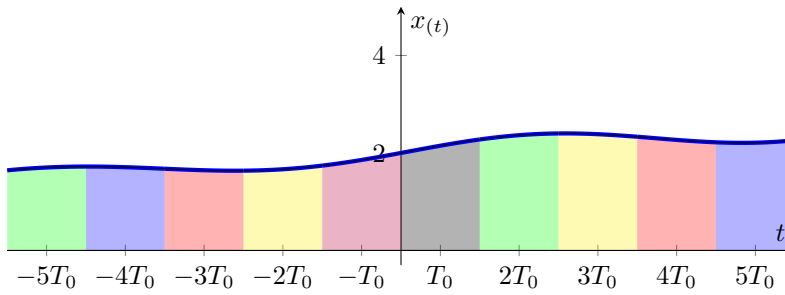


Figure 53: Intervalli adiacenti e disgiunti

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{j2\pi k f_0 t'} dt' \Rightarrow Y_k = \frac{1}{T_0} X_{(k f_0)}$$



Sono campionamenti di  $X_{(f)}$  a  $k f_0$ .

### 6.7.3 I<sup>a</sup> formula di Poisson

$$y_{(t)} \stackrel{TSF}{\rightleftharpoons} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X_{(k f_0)} e^{j 2 \pi k f_0 t}$$

Evidenzia che:

*Periodicizzazione nel tempo  $\Rightarrow$  Campionamento nella frequenza*

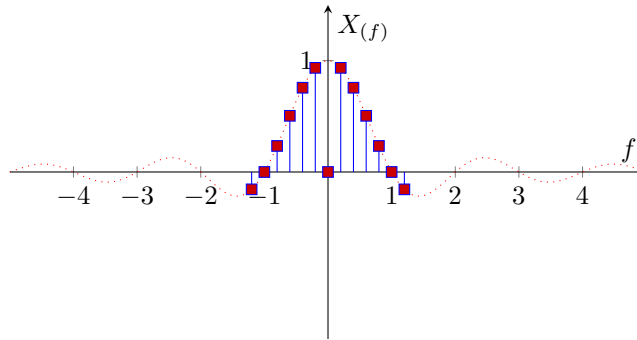


Figure 54: Grafico del campionamento

Esempio:

$$y_{(t)} = |\cos(2\pi f_0 t)| \quad X_k = ?$$

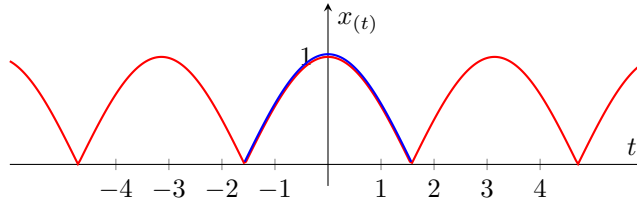


Figure 55:  $|\cos(2\pi f_0 t)|$

$y_{(t)} = |\cos(2\pi f_0 t)|$  non é altro che il segnale aperiodico  $x_{(t)} = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right)$  con periodo  $\frac{T_0}{2}$ :

$$\begin{cases} Y_k = \frac{2}{T_0} X_{(k f_0)} = \frac{2}{T_0} X_{(k \frac{T_0}{2})} \\ X_{(f)} = \frac{T_0}{2} \text{sinc}(f \frac{T_0}{2}) \otimes \left( \frac{\delta(f-f_0)}{2} + \frac{\delta(f+f_0)}{2} \right) \end{cases}$$

Per il calcolo di  $X_{(f)}$  si applica il Th della Modulazione con  $\cos$  6.5.1 e la proprietà campionatrice della Delta di Dirac rispetto alla convoluzione 6.6.1.

$$X_{(f)} = \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left( (f - f_0) \frac{T_0}{2} \right) + \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left( (f + f_0) \frac{T_0}{2} \right)$$

$$Y_k = \frac{2}{T_0} \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left( \left( \frac{2k}{T_0} - f_0 \right) \frac{T_0}{2} \right) + \frac{2}{T_0} \frac{T_0}{4} \text{sinc} \left( \left( \frac{2k}{T_0} + f_0 \right) \frac{T_0}{2} \right)$$

#### 6.7.4 Teorema dell'integrazione completo

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \xrightleftharpoons{TCF} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha \end{cases}$$

$$Th : Y_{(f)} = \frac{X_{(0)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Prende la nominazione di completo perché risolve il problema di mantenere l'uguaglianza  $j2\pi f Y_{(f)} = X_{(f)}$

Per la dimostrazione ci serve definire prima:

- $TCF$  di  $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t} \xrightleftharpoons{TSF} \text{sgn}(f)$$

Per la Dualità 6.4.2

$$\text{sgn}(t) \xrightleftharpoons{ATSF} \frac{1}{j\pi f}$$

- $TCF$  del gradino  $u_{(t)}$

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(\alpha)} d\alpha \quad u_{(t)} \rightleftharpoons U_{(f)}$$

Non posso applicare il Th dell'integrazione 6.4.5  $\begin{cases} y_{(+\infty)} = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} u_{(t)} dt = 1 \\ X_{(f)} = 1 \end{cases}$  la

terza ipotesi non è mai verificata. Scriviamo la funzione gradino in modo diverso:

$$u_{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

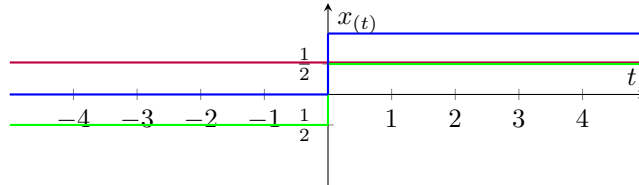


Figure 56:  $u_{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$

$$U_{(f)} = TCF[u_{(t)}] = \frac{1}{2}\delta_{(f)} + \frac{1}{2j\pi f}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t) \stackrel{TSF}{\underset{ATSF}{=}} \frac{1}{2}\delta_{(f)} + \frac{1}{2j\pi f}$$

Dimostrazione Th. Integrazione completo:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha$$

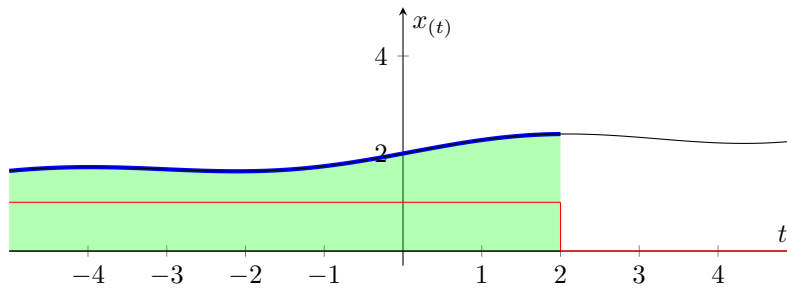


Figure 57:  $y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha$ ,  $x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)}$

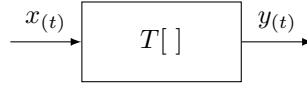
Utilizziamo il gradino per cambiare gli estremi dell'integrale e mantenere il valore di  $x_{(t)}$  dopo  $t$  a 0. Ci siamo ricondotti all'integrale di convoluzione 6.4.8 nel tempo, quindi nella frequenza diventa un prodotto:

$$Y_{(f)} = X_{(f)} U_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{X_{(0)}}{2} \delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Se  $X_{(0)}$  fosse 0 avrei il classico Th. dell'integrazione. DOMANDA: ma quindi nella proprietà campionatrice in frequenza rimane la delta???

## 7 Sistemi Monodimensionali

Definiamo il Sistema Monodimensionale:



Il sistema applica la trasformazione  $T[ ] : y(t) = T[x(t)]$  in generale  $y(t) = T[x_{(\alpha)}, t]$ .

### 7.1 Proprietá dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)

- Linearit :

$$x(t) = ax_{1(t)} + bx_{2(t)} \xrightarrow{T[ ]} y(t) = aT[x_{1(t)}] + bT[x_{2(t)}]$$

Oppure separando la variabile del tempo:

$$x(t) = ax_{1(t)} + bx_{2(t)} \xrightarrow{T[ ]} y(t) = aT[x_{1(\alpha)}, t] + bT[x_{2(\alpha)}, t]$$

  il principio di linearit  o sovrapposizione degli effetti visto a elettrotecnica.

- Stazionariet :

$$y(t) = T[x(t)] \rightarrow y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$$

- Causalit :

$$y(t) = T[x_{(\alpha)}, \alpha \leq t]$$

L'uscita all'istante  $t$  dipende dall'ingresso ad istanti precedenti o al pi  uguali a  $t$ , si basa su valori precedenti a  $t$  non pu  prevedere il futuro. Ne derivano 2 distinzioni di trasformazioni:

- Real Time: necessariamente causale (  nel presente)
- Virtual time: Causale o Non Causale (es. ho tutto un file al quale posso prevedere i bit o frame successivi per applicarne un post-processing)

- Stabilit  BIBO: Se il segnale  $x(t)$  ha ampiezza limitata  $\rightarrow$  l'uscita ha ampiezza limitata:

$$|x(t)| \leq M \rightarrow |y(t)| \leq K$$

- Invertibilit :

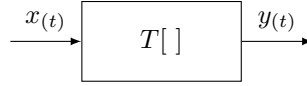
$$y(t) = T[x_{(\alpha)}, t] \xrightarrow{\text{Seq}} x(t) = T^{-1}[y_{(\alpha)}, t]$$

- Memoria: Un sistema é:

- Senza memoria: se  $y(t) = T[x_{(\alpha)}, \alpha = t]$
- Con Memoria:  $y(t) = \int_{-\infty}^t x_{(\alpha)} d\alpha$  l'uscita all'istante  $t$  dipende anche da valori dell'ingresso ad istanti diversi da  $t$ . Nota bene é l'integrale di convoluzione di  $x_{(t)} \otimes u_{(t)}$

## 7.2 Proprietá dei Sistemi Lineari Stazionari (SLS)

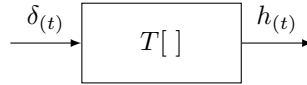
Sono sistemi che godono delle proprietá di Linearitá 7.1 e di Stazionarietá 7.1:



Troviamo la relazione tra ingresso e uscita:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= T[x_{(\alpha)}, t] = T[x_{(t)}] = T[x_{(t)} \otimes \delta_{(t)}] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} \delta_{(t-\alpha)} d\alpha\right] \\
 &\stackrel{7.1}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} T[x_{(\alpha)} \delta_{(t-\alpha)}] d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} T[\delta_{(t-\alpha)}] d\alpha
 \end{aligned}$$

Definiamo la trasformata nota del  $\delta_{(t)}$ :



Sollecitando il sistema con una Delta di Dirac ho la sua risposta impulsiva. Nel caso dei sistemi *SLS* l'impulso in uscita caratterizza completamente il sistema. Nel nostro caso  $T[\delta_{(t-\alpha)}]$  non é altro che una traslazione della  $T[\delta_{(t)}]$  per la Stazionarietá 7.1:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha = x_{(t)} \otimes h_{(t)}$$

La trasformata del sistema dipende solo dalla  $h_{(t)}$  (risposta impulsiva del sistema). Passando al dominio della frequenza per la proprietá della convoluzione 6.4.8:

$$Y_{(f)} = X_{(f)} \otimes H_{(f)}$$

Dove  $H_{(f)} = TCF[h_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt$  é la risposta in frequenza del sistema *SLS*. Esistono vari modi per calcolare  $h_{(t)}$ :

- Utilizzando un impulso di Dirac e le sue proprietá, ma l'impulso di dirac é difficile da realizzare.

- Calcolo  $H_{(f)}$  mandando in ingresso un segnale del quale sia nota la sua risposta e calcolo il rapporto uscita/ingresso  $H_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{X_{(f)}}$
- Mandando in ingresso un esponenziale:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t), \quad x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{j2\pi f_0 (t-\alpha)} d\alpha$$

$$= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{j2\pi f_0 \alpha} d\alpha = x(t) H_{(f_0)}$$

$$H_{(f_0)} = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Posso calcolare la risposta in  $f_0$ , posso variare la frequenza e calcolare  $H_{(f)} = \frac{y(t)}{x(t)} \Big|_{x(t)=e^{j2\pi f t}}$

### 7.2.1 Risposta in frequenza

La risposta in frequenza  $H_{(f)} \in \mathbb{C}$ :

$$H_{(f)} = |H_{(f)}| e^{j\angle H_{(f)}}$$

- $|H_{(f)}|$ : Risposta in ampiezza
- $\angle H_{(f)}$ : Risposta in fase

$$Y_{(f)} = X_{(f)} H_{(f)} = \begin{cases} |Y_{(f)}| &= |X_{(f)}| |H_{(f)}| \\ \angle Y_{(f)} &= \angle X_{(f)} + \angle H_{(f)} \end{cases}$$

### 7.2.2 Sistemi in cascata e in parallelo

- Sistemi in cascata:



Figure 58: sistemi in cascata



Figure 59: equivalente sistemi in

$$\begin{aligned}
y(t) &= x(t) \otimes h_{1(t)} \\
z(t) &= y(t) \otimes h_{2(t)} = [x(t) \otimes h_{1(t)}] \otimes h_{2(t)} = x(t) \otimes h_{1(t)} \otimes h_{2(t)} \\
z(t) &= x(t) \otimes h(t)
\end{aligned}$$

$$\text{Risposta Impulsiva : } h(t) = h_{1(t)} \otimes h_{2(t)}$$

$$\text{Risposta in Frequenza : } H(f) = H_{1(f)} H_{2(f)}$$

- Sistemi in parallelo:



Figure 60: sistemi in cascata



Figure 61: equivalente sistemi in

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_1(t) \otimes y_2(t) = x(t) \otimes h_{1(t)} + x(t) \otimes h_{2(t)} \\
&= x(t) \otimes [h_{1(t)} + h_{2(t)}] = x(t) \otimes h(t)
\end{aligned}$$

$$\text{Risposta Impulsiva : } h(t) = h_{1(t)} + h_{2(t)}$$

$$\text{Risposta in Frequenza : } H(f) = H_{1(f)} + H_{2(f)}$$

### 7.3 Risposta di un sistema causale e risposta impulsiva

#### 7.3.1 Risposta in frequenza di un circuito RC

#### 7.3.2 Risposta in frequenza di un circuito CR

### 7.4 Filtri Ideali

#### 7.4.1 Filtro Passa Basso di banda B - Low Pass Filter (LP)



Figure 62: Filtro passa basso ideale

#### 7.4.2 Filtro Passa Alto di banda B - High Pass Filter (HP)



Figure 63: Filtro passa alto ideale

#### 7.4.3 Filtro Passa Banda di banda B - Band Pass Filter (BP)



Figure 64: Filtro passa banda ideale

#### 7.4.4 Filtro Elimina Banda di banda B - Band Stop Filter (BS)



Figure 65: Filtro elimina banda ideale



ma si aggiungi i circuiti che descrivono i filtri (wikipedia) domanda: quindi se io voglio ascoltare e ricostruire un segnale che occupa una banda di 80 hz devo togliere il rumore della corrente alternata a 60hz? magari mi puo dare fastidio

## 8 Teoria Dei Codici

### 8.1 Introduzione

Ci concentriamo adesso sul trattamento dell'informazione per poterla trasmettere. I messaggi che trasmettiamo possono essere codificati per vari motivi:

- Compressione:  $\begin{cases} \text{Lossy: con perdita dell'informazione} \\ \text{Lossless: minima perdita dell'informazione} \end{cases}$   
Comprimere l'informazione in eliminando ridondanza e salvando spazio di memoria e banda.
- Crittografia: per nascondere il messaggio ad utenti in ascolto sul canale che non siano il destinatario.
- Rivelazione o correzione di errore: viene aggiunta ridondanza ad hoc per aumentare l'affidabilità del messaggio trasmesso. Si utilizzano **checksum** o **Reed-Solomon(RS)**

**Capacità del canale** La capacità del canale  $C$  indica la massima quantità d'informazione che può essere trasmessa in maniera affidabile su di un dato canale. La capacità dipende dalla banda  $B$  del canale e dal rapporto segnale rumore (signal-to-noise ratio, **SNR**):

$$C = B \log(1 + SNR)$$

**Canale Gaussiano** Il canale Gaussiano può essere modellato come **Binary Symmetric Channel (BSC)** con probabilità di errore  $p$ . Assumiamo gli errori tra loro indipendenti ( $p_{(a,b)} = p_{(a)} \cdot p_{(b)}$ ):

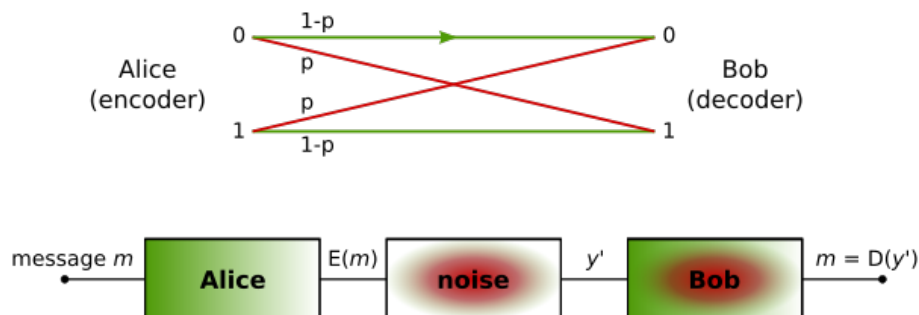


Figure 66: Sistema di trasmissione BSC

$E_{(x)}$  : Funzione di codifica  
 $D_{(x)}$  : Funzione di decodifica  
 $E_{(m)}$  : Bit dell'informazione codificati  
 $y' : E_{(m)} + e \rightarrow$  Informazioni con errore del canale  
 $m = D_{(y')}$  : Informazione decodificata

Il canale é chiamato simmetrico perché ho la stessa probabilità errore sulla trasmissione di uno dei due bit. Se  $X$  é il bit inviato e  $Y$  quello ricevuto allora il canale é caratterizzato dalle probabilità:

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0|X = 0) &= 1 - p \\
 P(Y = 0|X = 1) &= p \\
 P(Y = 1|X = 0) &= p \\
 P(Y = 1|X = 1) &= 1 - p
 \end{aligned}$$

Assumiamo che  $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ , se avessimo  $p > \frac{1}{2}$  il ricevitore potrebbe scambiare l'informazione ricevuta (Quando riceve un 1 lo interpreta come 0 e viceversa) e ottenere un canale con probabilità  $1 - p \leq \frac{1}{2}$ .

Nel corso useremo delle simbologie diverse:

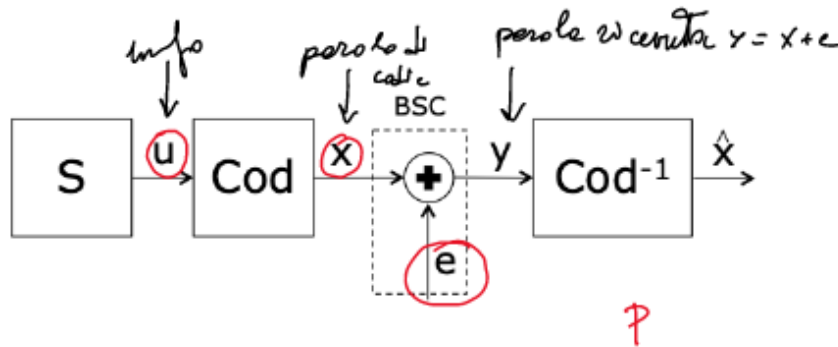


Figure 67: Sistema di trasmissione BSC

$u$  : Informazione  
 $x$  : Parole di Codice  
 $e$  : Errore del Canale  
 $y : x + e \rightarrow$  Informazioni con errore del canale  
 $\hat{x}$  : Informazione decodificata

**Probabilità di errore BSC** La probabilità, per una trasmissione BSC, di sbagliare  $t$  bit in una parola di  $n$  bit:

$$p_{(t,n)} = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{(n-t)}$$

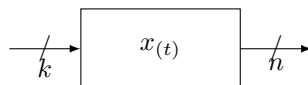
dove il coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

indica tutte le possibili combinazioni di errori di  $t$  bit su  $n$  bit.

### Tassonomia dei codici

- Codici lineari
  - Codici a blocco
  - Codici convoluzionali
- Definizione di un codice a blocco:



**Rate del Codice :**

$$R = \frac{k}{n}$$

La condizione é che  $n > k$  senon fosse cosí avrei perdita d'informazione, da  $k$  bit passo a  $n$  aggiungendo ridondanza e codificando i miei dati. Possiamo quindi stimare il valore tipico di  $R$

$$R = \frac{k}{n} < 1$$

- Rivelazione di errore: Consiste nella capacità di scoprire la presenza di errori causati dal rumore o da altri fenomeni deterioranti durante una trasmissione di dati (es. tramite il **bit di parità**).
- Correzione di errore: Consiste invece nell'ulteriore abilità di ricostruire i dati originali, eliminando gli errori occorsi durante la trasmissione. Vi sono due differenti schemi di base per la progettazione della codifica di canale e del protocollo per un sistema che corregge gli errori:
  - **Automatic repeat-request (ARQ)**: Il mittente invia i dati ed anche un codice a rilevazione d'errore, che sarà utilizzato in ricezione per individuare gli eventuali errori, ed in tal caso chiedere la ritrasmissione dei dati corrotti. In molti casi la richiesta è implicita; il destinatario invia un acknowledgement (ACK) di corretta ricezione dei dati, ed il mittente re-invia solo quei dati per i quali non ha ricevuto, entro un prefissato tempo limite (timeout), il corrispondente ACK.

- **Forward Error Correction (FEC)**: Il mittente codifica i dati con un codice a correzione d'errore (error correction code, ECC) ed invia il messaggio codificato. Il destinatario non invia mai alcun messaggio verso il mittente; esso decodifica ciò che riceve nella maniera più simile possibile a quella di un certo insieme prefissato di parole accettabili. Tali codici sono realizzati in modo tale che dovrebbe occorrere una quantità "irragionevole" di errori nei dati, affinché il destinatario decodifichi erroneamente, ottenendo finalmente dei dati diversi da quelli effettivamente inviatigli.

In generale un codice a blocco che ha rate  $\frac{k}{n}$  mappa  $k$  bit su  $n$  bit usando  $2^k$  parole di codice di dimensione  $n$

### 8.1.1 Esempio codici a blocco: codici a ripetizione

È un esempio di codice a correzione d'errore: il funzionamento si basa sulla ripetizione dell'informazione più volte. Il destinatario si accorge di un errore di trasmissione poiché il flusso di dati ricevuto non è la ripetizione di un singolo messaggio e, inoltre, il destinatario può recuperare il messaggio originale guardando il messaggio ricevuto nel flusso di dati che si verifica più spesso.

Nel caso di un codice binario di ripetizione, esistono due parole in codice - tutte uno e tutti zeri - che hanno una lunghezza  $n$ . Pertanto, la distanza minima di Hamming (8.2.5) del codice è uguale alla sua lunghezza. Ciò conferisce al codice di ripetizione, con  $R = \frac{1}{n}$ , una capacità di rivelazione di errori pari a  $n - 1$  e correzione degli errori (cioè correggerà fino agli errori in qualsiasi parola del codice) di  $\frac{n-1}{2}$  per  $n$  dispari (8.1).

Esempio:

$R = \frac{1}{3} \rightarrow$  ha solo 2 parole di codice:

$$u = 0 \rightarrow x = [000]$$

$$u = 1 \rightarrow x = [111]$$

Il ricevitore effettua una decodifica a maggioranza: decide per il bit che compare nella maggioranza delle posizioni della parola ricevuta.

$$y = [000] \rightarrow \hat{x} = [000] \rightarrow \hat{u} = 0$$

$$y = [010] \rightarrow \hat{x} = [000] \rightarrow \hat{u} = 0$$

$$y = [101] \rightarrow \hat{x} = [111] \rightarrow \hat{u} = 1$$

### 8.1.2 Esempio codici a blocco: codici a controllo di parità

### 8.1.3 Esempio codici a blocco: codice ISBN

## 8.2 Codici a blocco

### 8.2.1 Introduzione ai codici lineari

Definizione di campo

### 8.2.2 Campi di Galois

### 8.2.3 Codici a blocco lineari su $GF(2)$

non perché nei codici io metto cose in più che magari non mi servono ampio le cose.

### 8.2.4 Proprietà dei codici a blocco lineari

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

### 8.2.5 Distanza di Hamming

Peso di hamming. distanza minima di un codice

### 8.2.6 Codici a blocco in forma sistematica

- 1 matrici che generano codici equivalenti
- 2 qualsiasi codice lineare a blocchi è equivalente a un codice in forma sistematica
- 3
- 4
- 5
- 6 codici equivalenti

se non è una parola di codice la matrice H ci informa con un valore 1 nel prodotto

## 9 Formulario

### 9.1 Trigonometria

1.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2.  $\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3.  $\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4.  $\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$  È un  $\sin(\alpha)$  smorzato secondo  $\frac{1}{x}$  che si annulla in  $k\pi$  :  
 $k \in \mathbb{Z}$

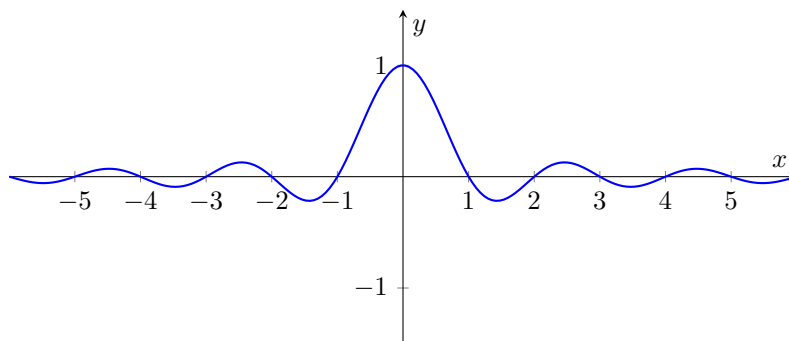


Figure 68: grafico  $\text{sinc}(\alpha)$

#### 9.1.1 Formule di addizione

1.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
2.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$
3.  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

#### 9.1.2 Formule di duplicazione

1.  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
2.  $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2 \sin^2(\alpha) \end{cases}$
3.  $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

### 9.1.3 Formule di bisezione

$$1. \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$2. \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$3. \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$$

## 9.2 Segnali Notevoli

$$1. x_R \triangleq A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad T = \text{durata}$$

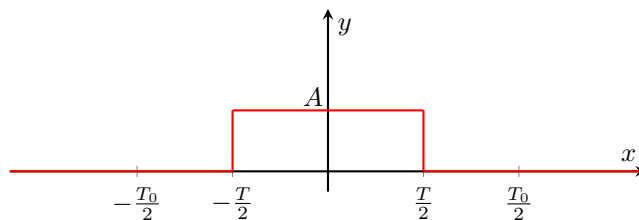


Figure 69: Rappresentazione di  $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$2. \operatorname{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

È un  $\sin(\alpha)$  smorzato secondo  $\frac{1}{x}$  che si annulla in  $k\pi : k \in \mathbb{Z}$

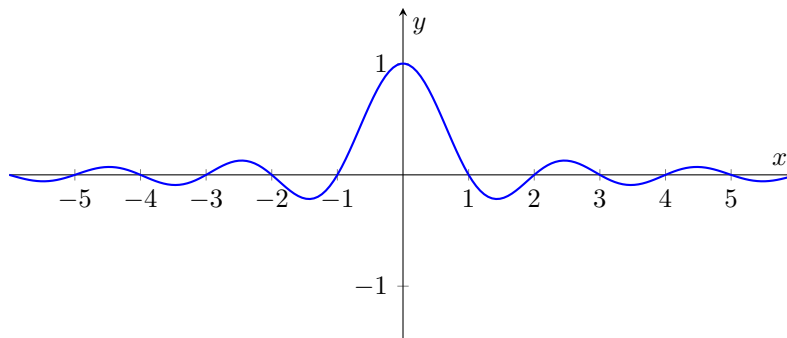


Figure 70: grafico  $\operatorname{sinc}(\alpha)$

La banda di una sinc è l'intervallo in cui si annulla  $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$ , es: se  $\text{banda} = 1$  se  $T = 1$



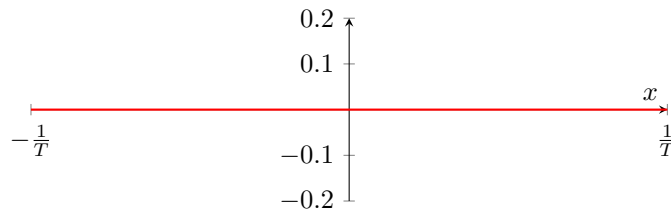


Figure 71: banda

3.

4.

### 9.3 Grandezze Fisiche

- Hertz

### 9.4 Varie

- Calcolo della TCF su MATLAB:

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

MATLAB calcola un'approssimazione dell'integrale della TCF con un periodo  $T$ :

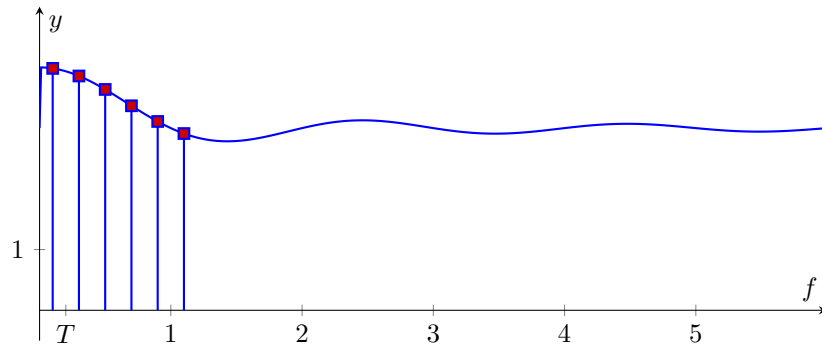


Figure 72: Campionamento MATLAB

$$X_{(f)} = \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi fnT}$$

Ma nella  $f$  é una variabile continua, quindi a sua volta bisogna variare  $f$ :

$$X_{(fk)} = X_{(k\Delta f)} = \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi \Delta f nT}$$

e la condizione sul  $\Delta f$  é che  $\Delta f \ll BB$ .

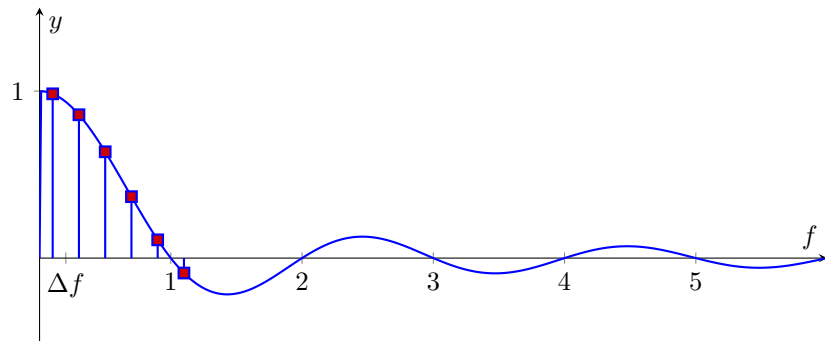


Figure 73:  $\Delta f$

- Scala Logarimica:

## Indice Alfabetico

- Canale Gaussiano, 65
- Capacità del canale, 65
- Correzione di errore, 67
- Distanza di Hamming, 69
- Probabilità di errore BSC, 67
- Proprietà Campionatrice del Delta di Dirac, 49
- Rate del Codice, 67
- Risposta Impulsiva, 60
- Rivelazione di errore, 67
- Segnale Troncato, 9
- TCF di segnali periodici, 51
- TCF di un cos, 51
- TCF di un segnale periodico generico, 52
- TCF di un sin, 52
- Teorema dell'integrazione completo, 57