Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:
Luca Sanguinetti - Marco Moretti

Figure 1: uwu

AA 2022 - 2023

Contents

1 Introduzione

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.
I testi consigliati sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson

2 Richiamo Sui Numeri Complessi

2.1 Struttura di un numero complesso

2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = Re\{z\}$$
$$\text{Parte Immaginaria: } b = Img\{z\}$$
$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho \ e^{j\theta}$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$
$$\text{Fase: } \theta = \arg(z)$$

grafico forma polare-cartesiana

2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana
$$z^* = a - jb$$
- Forma Polare
$$z^* = \rho \ e^{-j\theta}$$

2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria
$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$
- Modulo
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
- Fase
$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.3 Operazioni

Dati: $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 \ e^{j\theta_1}, \ z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 \ e^{j\theta_2}$

- Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \ e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \ e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2$$

2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C} \ \ t \in \mathbb{R} \rightarrow z_{(t)} = a_{(t)} + jb_{(t)} = \rho_{(t)} e^{j\theta_{(t)}}$$

- Integrale

$$\int_a^b z_{(t)} \ dt = \int_a^b a_{(t)} + jb_{(t)} \ dt = \int_a^b a_{(t)} \ dt + \int_a^b jb_{(t)} \ dt$$

- Derivata

$$\frac{d}{dt} z_{(t)} = \frac{d}{dt} a_{(t)} + jb_{(t)} = \frac{d}{dt} a_{(t)} + \frac{d}{dt} jb_{(t)}$$

3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto $\forall t$
- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche

3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
  - Segnale tempo continuo: $t \in \mathbb{R}$ assume con conitinuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
  - Segnale a tempo discreto: $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$ $T =$periodo di campionamento, la variabile temoporale assume solo valori discreti

Figure 2: tempo continuo, tempo discreto

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
  - Segnale ad ampiezza continua: $x_{(t)}$ *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
  - Segnale ad ampiezza discreta: $x_{(t)}$ *discreta*,se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica puó assumere solo valori discreti

Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Segnale	Cotinuo	Discreto	t
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x_{(t)}$			

4 Segnali Analogici

4.1 Grandezze dei segnali Analogici

4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x_{(t)}|^2$$

4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\, dt$$

4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x_{(t)} & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$T = Periodo\ di\ osservazione$$

Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

dalla quale possiamo ricavare se $T \to \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$:

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2\, dt$$

4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)_T}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}\, dt$$

$$x_{(t)_T} = Segnale\ troncato$$

4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

4.2.1 Costante

$x_{(t)} = A \quad \forall t$

Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\, dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\, dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

4.2.2 Sinusoide

$x_{(t)} = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 6: Segnale sinusoidale

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \; dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 7.1 il $\sin^2(\alpha)$ e lo sostituiamo (2.1) 7.1.2
$\cos(2\alpha) = \frac{1+\cos^2(\alpha)}{2}$

$$\begin{aligned}
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\
&= \infty + \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty
\end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned}
P_x &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{A}{2} T + \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\
&= \frac{A}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi) \Big|_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned}
x_m &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \; \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} = 0
\end{aligned}$$

4.2.3 Gradino

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 7: Segnale gradino

4.2.4 Rettangolo

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 8: Segnale rettangolo

4.2.5 Esponenziale unilatera

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 9: Segnale esponenziale unilatera

4.2.6 Esponenziale bilatera

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 10: Segnale esponenziale bilatera

4.2.7 segno $\mathbf{sgn(x_{(t)})}$

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Figure 11: Segnale sgn(x)

5 Trasformata Serie Di Fourier

5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x_{(t)} = x_{(t-kT_0)}$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo T_0 che soddifa le condizioni di Dirichlet e la sua $E_x < \infty (C.S.)$ puó essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

  $$x_{(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad X_k \in \mathbb{C},\ f_0 = \frac{1}{T_0}$$

  Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

  $$x_{(t)} = \ldots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \ldots$$

  X_0 corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

  $$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0}} x_{(t)} e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocitá: $\forall x_{(t)} \exists ! X_k$:

$$x_{(t)} \rightleftharpoons X_k$$
$$Segnale\ Analogico\ Periodico \rightleftharpoons Sequenza\ Complessa$$

5.2.1 Rappresentazione di X_k

Essendo X_k un numero complesso puó essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:

(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 12: Spettro del segnale

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

5.3 Calcolo dei coefficenti X_k per segnali noti

5.3.1 $A\cos(2\pi f_0 t)$

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A\cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficenti X_k:

$$x_{(t)} = \ldots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{-j2\pi(1)f_0 t} + \ldots$$

$Abbiamo:$

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 13: Spettro TSF del coseno

5.3.2 $A\sin(2\pi f_0 t)$

$x_{(t)} = A\sin(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A\sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficenti X_k:

$$x_{(t)} = \ldots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0t} - X_0 + X_1 e^{-j2\pi(1)f_0t} + \ldots$$

Abbiamo :

$$X_{-1} = -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j}$$

$$|X_k| = \begin{cases} |\frac{A}{2j}| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ |-\frac{A}{2j}| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & altrove \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle\frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle|-\frac{A}{2j}| = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:

(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro TSF del seno

5.3.3 Treno di rect

$x_R = A\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$ Segnale periodico $\rightarrow x_{(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$
$T_0 = periodo$, $T = durata \rightarrow T < T_0$, se cosi non fosse avremmo una costante

Figure 15: Treno di $A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$

$\rightarrow$ Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da aperiodiche a periodiche e viceversa

$$
\begin{aligned}
ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t-nT_0)] \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{(t)} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{A}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0}\frac{1}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{T_0}\frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0}\frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
&= \frac{AT}{T_0}\frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = A f_0 T sinc(k f_0 T)
\end{aligned}
$$

(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 16: Spettro TSF del treno di rect

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:

Figure 17: Treno di $A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di riostruzione dello stesso(script di matlab presenti nel teams):

- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali piú alte $\rightarrow$ copre piú spettro(espansione spettrale) $T_0 \uparrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse fraquenze $T_0 \downarrow$

Se non ho abbastanza passi K non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio ne un analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettametne il segnale

6 Trasformata Continua Di Fourier

7 Formulario

7.1 Trigonometria

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3. $\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4. $sinc(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ É un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi$: $k \in \mathbb{Z}$

Figure 18: grafico $sinc(\alpha)$

7.1.1 Formule di addizione

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

7.1.2 Formule di duplicazione

1. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2\sin^2(\alpha) \end{cases}$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

7.1.3 Formule di bisezione

1. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
2. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
3. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$

7.2 Segnali Comuni

1. Rect
2. $sinc(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ É un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi$: $k \in \mathbb{Z}$

Figure 19: grafico $sinc(\alpha)$

3.
4.

Alphabetical Index