Appunti Comunicazioni Numeriche

Francesco Mignone

Professori:
Luca Sanguinetti - Marco Moretti

Figure 1: touch me senpai

AA 2022 - 2023

Contents

1 Introduzione

I seguenti appunti sono presi seguendo le lezioni del corso di Comunicazioni Numeriche di Ingegneria Informatica dell'Univertistá di Pisa. Questi appunti non vanno a sostituire il materiale e le lezioni dei professori.
I testi consigliati sono:

S.Hawking Digital Communication System Wiley

Leon Digital Analog Communication System Pearson

2 Richiamo Sui Numeri Complessi

2.1 Struttura di un numero complesso

2.1.1 Forma Cartesiana

$$z \in \mathbb{C} : z = a + jb$$

$$\text{Parte reale: } a = Re\{z\}$$
$$\text{Parte Immaginaria: } b = Img\{z\}$$
$$j \text{ o } i \text{ é la } \sqrt{-1}$$

2.1.2 Forma Polare

$$z \in \mathbb{C} : z = \rho\ e^{j\theta} = \rho \cos(\theta) + j\rho \sin(\theta)$$

$$\text{Modulo: } \rho = |z|$$
$$\text{Fase: } \theta = \arg(z) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

grafico forma polare-cartesiana

2.1.3 Complesso Coniugato

- Forma Cartesiana
$$z^* = a - jb$$
- Forma Polare
$$z^* = \rho\ e^{-j\theta}$$

2.2 Relazione Tra Forma Polare e Cartesiana

- Parte Reale e parte Immaginaria
$$a = \rho \cos(\theta) \quad b = \rho \sin(\theta)$$
- Modulo
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}$$
- Fase
$$a > 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$a < 0 \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.3 Operazioni

Dati: $z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 \ e^{j\theta_1}, \ z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 \ e^{j\theta_2}$

- Somma
$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Sottrazione
$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

- Moltiplicazione
$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \ e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisione
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \ e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Modulo
$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2 = \rho^2$$

2.4 Funzioni Complesse a Variabile Reale

$$z \in \mathbb{C}, \ t \in \mathbb{R} \to z_{(t)} = a_{(t)} + jb_{(t)} = \rho_{(t)} e^{j\theta_{(t)}}$$

- Integrale
$$\int_a^b z_{(t)} \ dt = \int_a^b a_{(t)} + jb_{(t)} \ dt = \int_a^b a_{(t)} \ dt + \int_a^b jb_{(t)} \ dt$$

- Derivata
$$\frac{d}{dt} z_{(t)} = \frac{d}{dt} a_{(t)} + jb_{(t)} = \frac{d}{dt} a_{(t)} + \frac{d}{dt} jb_{(t)}$$

3 Introduzione Ai Segnali

- Deterministici: Segnale rappresentabile con funzioni analitiche e noto $\forall t$, per ogni istante temporale si conosce il valore del segnale, spesso rappresentati con funzioni analitiche.

- Aleatori: Segnale rappresentabile tramite statistiche, ad esempio un rumore.

3.1 Classificazione di segnale in base alla continuità dei domini

- Dominio del tempo:
  - Segnale tempo continuo: $t \in \mathbb{R}$ assume con conitinuità tutti i valori contenuti all'interno di un intervallo
  - Segnale a tempo discreto: $t = \{nT\} n \in \mathbb{Z}$ T =periodo di campionamento, la variabile temoporale assume solo valori discreti

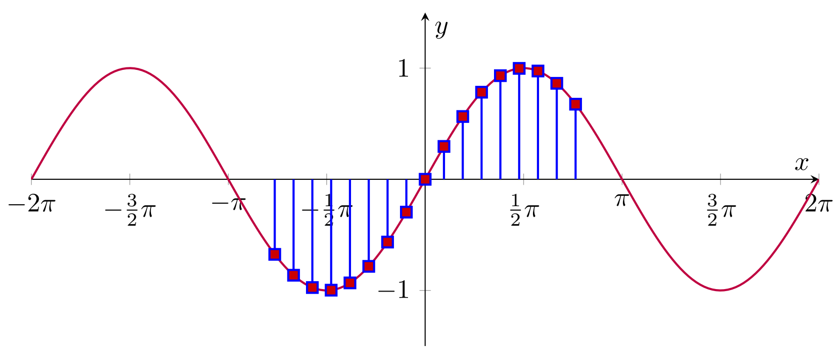


Figure 2: tempo continuo, tempo discreto:$T = 0.3$

- Dominio dell'ampiezza (spazio):
  - Segnale ad ampiezza continua: $x_{(t)}$ *continua*, la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un intervallo
  - Segnale ad ampiezza discreta: $x_{(t)}$ *discreta*,se restringo l'intervallo posso renderla continua, la grandezza fisica puó assumere solo valori discreti

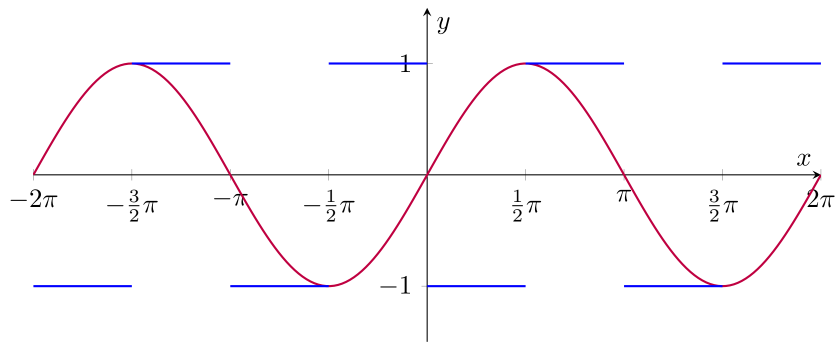


Figure 3: ampiezza continua, ampiezza discreta

Possiamo costruire una tabella per categorizzare le tipologie di segnali:

Segnale	Continuo	Discreto	t
Continua	Analogico	Sequenza/Digitale	
Discreta	Quantizzato	Binario	
$x_{(t)}$			

4 Segnali Analogici

4.1 Grandezze dei segnali Analogici

4.1.1 Potenza istantanea

$$P_x \triangleq |x_{(t)}|^2$$
$$Se\ x_{(t)} \in \mathbb{R} \to P_x \triangleq x_{(t)}^2$$

4.1.2 Energia

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\,dt$$

$$Energia: \begin{cases} Energia\ finita & (Segali\ fisici) \\ Energia\ infinita & (Segali\ ideali) \end{cases}$$

4.1.3 Potenza Media

Definiamo il **Segnale Troncato**:

$$x_{(t)} = X_{(t)} \triangleq \begin{cases} x_{(t)} & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$T = Periodo\ di\ osservazione$$

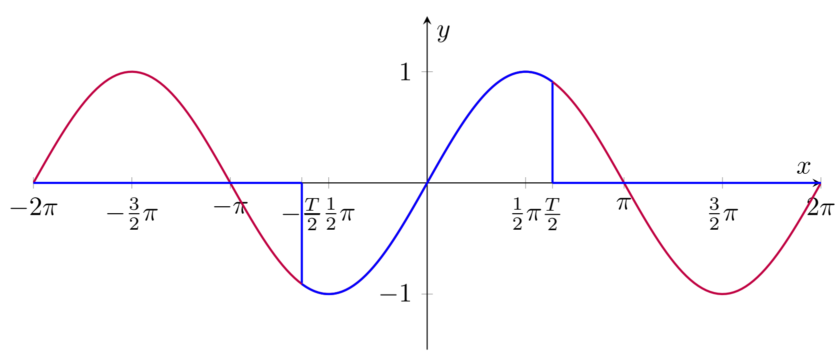


Figure 4: Segnale troncato

La potenza media é:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

$$E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2\,dt$$

dalla quale possiamo ricavare se $T \to \infty \Rightarrow P_{x_T} = P_x$:

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt$$

Possiamo ricavaredelle propietá secondo energia e potenza:

- Se $x_{(t)}$ ha $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$
- Se $x_{(t)}$ ha $P_x = k \neq 0 < \infty \Rightarrow E_x = \infty$

4.1.4 Valore Efficace

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$$

4.1.5 Valore Medio

$$x_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)_T} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt$$

$$x_{(t)_T} = \textit{Segnale troncato}$$

4.2 Analisi energetiche su segnali comuni

4.2.1 Costante

$x_{(t)} = A \;\; \forall t$

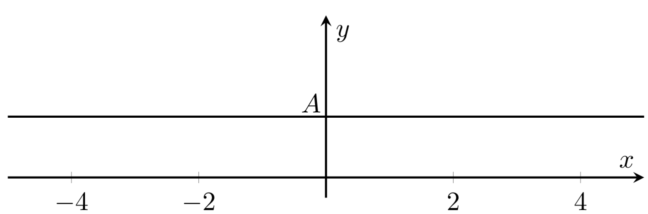


Figure 5: Segnale costante

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \, dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \, dt = A^2$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A^2} = |A|$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} AT = A$$

4.2.2 Cosinusoide

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$
$A = Ampiezza,\ f_0 = \frac{1}{T} = frequenza,\ \phi = fase$

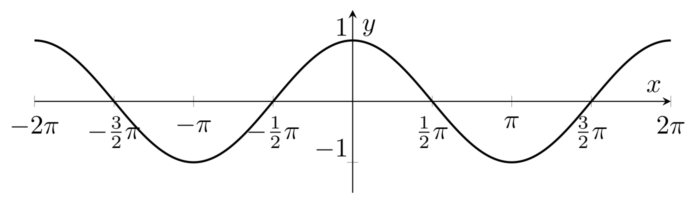


Figure 6: Segnale cosinusoidale ($\phi = 0$)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Ricaviamo dalla (1) 9.1 il $\sin^2(\alpha)$ e lo sostituiamo (2.1) 9.1.2
$\cos(2\alpha) = \frac{1+\cos^2(\alpha)}{2}$

$$\begin{aligned}
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)}{2} dt \\
&= \infty + \frac{A}{2}\frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty
\end{aligned}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned}
P_x &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{A}{2} T + \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \\
&= \frac{A}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2}\frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\phi)\Big|_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{|A^2|}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ \frac{A}{2} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi)\Big|_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

4.2.3 Gradino

$U_{(t)} = x_{(t)} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

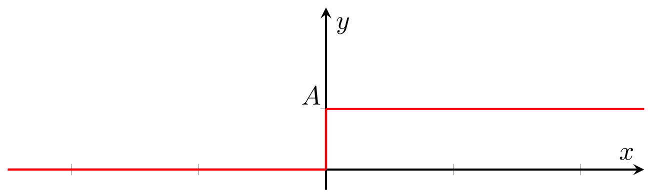


Figure 7: Segnale gradino

- Energia:
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \ dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \ dt = \infty$$

- Potenza Media:
$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- Valore Efficace:
$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Valore Medio:
$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

4.2.4 Rettangolo

$x_{(t)} = A \ rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & -\frac{t}{T} \leq t \leq \frac{t}{T} \\ 0 & Altrove \end{cases}$

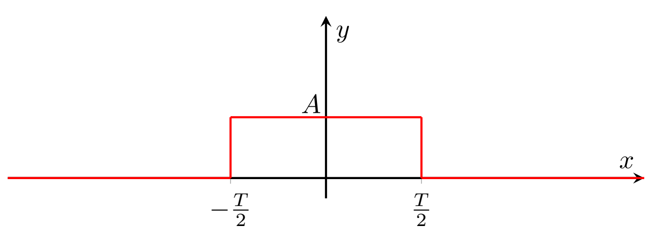


Figure 8: Segnale rettangolo

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \; dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \; rect^2 \left(\frac{t}{T}\right) \; dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \; dt = A^2 T$$

- Potenza Media: $T < T_0$ se non fosse cosí avrei una costante

$$\begin{aligned} P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \; rect^2 \left(\frac{t}{T}\right) \; dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} A^2 T = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \; rect \left(\frac{t}{T}\right) \; dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} AT = 0 \end{aligned}$$

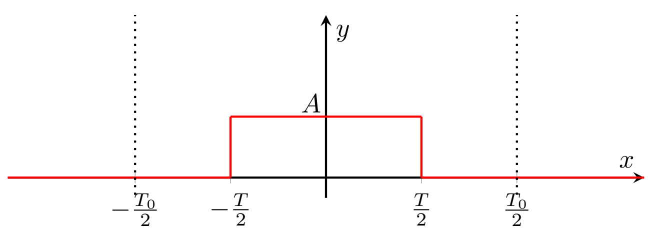


Figure 9

4.2.5 Esponenziale unilatera

$x_{(t)} = e^{-t} U_{(t)}$

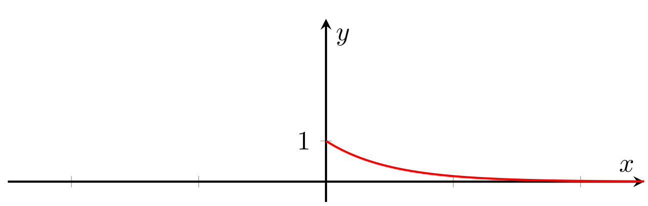


Figure 10: Segnale esponenziale unilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \; dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} \; dt = \; \frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

- Potenza Media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t} U_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} \; dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{2T} e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} = 0 \end{aligned}$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} U_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} \, dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \, (-1) e^{-t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} = 0 \end{aligned}$$

4.2.6 Esponenziale bilatera

$x_{(t)} = e^{-|t|}$

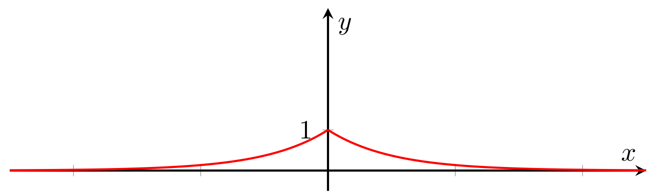


Figure 11: Segnale esponenziale bilatera

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \; dt = 2\int_0^{\infty} e^{-2t} \; dt = \; 2\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t}\Big|_0^{\infty} = 1$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{-t}U_{(t)}|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} \; dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \; e^{-2t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{T}e^{-2\frac{T}{2}} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} = 0$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 0$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t}U_{(t)} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} 2\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \; (-2)e^{-t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{2}{T}e^{-\frac{T}{2}} + \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} = 0$$

4.2.7 segno $sgn(x_{(t)})$

$$x_{(t)} = sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

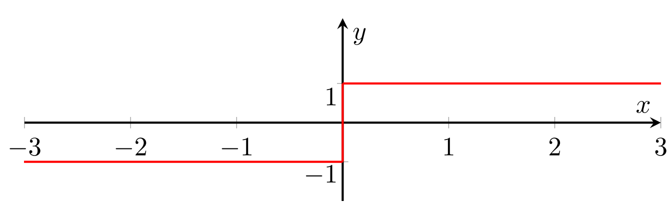


Figure 12: Segnale sgn(x)

- Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \ dt = \int_{-\infty}^{\infty} sgn^2(t) \ dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \ dt = \infty$$

- Potenza Media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sgn^2 t \ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- Valore Efficace:

$$x_{eff} = \sqrt{P_x} = 1$$

- Valore Medio:

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} \ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sgn(t) \ dt$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} 1 \, dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} 1 \, dt \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0$$

4.3 Segnal Periodici

Un segnale é periodico se:

$$x_{(t)} = x_{(t-kT_0)} \qquad k \in \mathbb{Z}, \ t_0 \in \mathbb{R}^+, \ T_0 = Periodo \ del \ segnale$$

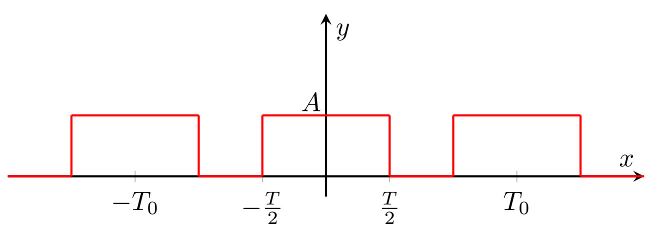


Figure 13: Segnale periodico

Si possono definiscono le seguenti grandezze:

- Energia di un segnale periodico

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}+kT_0}^{\frac{T_0}{2}+kT_0} |x_{(t)}|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X$$
$$= \lim_{k\to\infty} kX = \infty$$

Tutti i segnal iperiodici hanno quindi $E_x = \infty$

- Potenza media di un segnale periodico

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_{(t)}|^2 \, dt \Rightarrow T = kT_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} |x_{(t)}|^2 dt$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x_{(t)}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x_{(t)}|^2 dt$$

Posso calcolare la potenza di un singolo periodo:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x_{(t)}|^2 dt$$

- Valore medio di un segnale periodico

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{(t)} dt$$

5 Trasformata Serie Di Fourier

5.1 Segnale Periodico

Si definisce segnale periodico un segnale tale che:

$$x_{(t)} = x_{(t-kT_0)}$$

$$T_0 = Periodo \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = Frequenza$$

5.2 Trasformata Serie Di Fourier

Ogni segnale periodico di periodo T_0 che soddifa le condizioni di Dirichlet e la sua $E_x < \infty (C.S.)$ puó essere scritto come la somma di infinite sinusoidi di frequenze multiple di $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Equazione di Sintesi - Antitrasformata(ATSF)

$$x_{(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad X_k \in \mathbb{C},\ f_0 = \frac{1}{T_0}$$

  Se lo sviluppassimo sarebbe composto da:

$$x_{(t)} = \ldots + X_{-1} e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi(1)f_0 t} + \ldots$$

  X_0 corrisponde al Valore medio 4.1.5 del segnale, inoltre le componenti X_k prendono il nome di armoniche alla frequenza f corrispondente

- Equazione di Analisi - Trasformata(TSF)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{(t)} e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TSF gode della biunivocitá: $\forall x_{(t)} \exists ! X_k$:

$$x_{(t)} \underset{ATSF}{\overset{TSF}{\rightleftharpoons}} X_k$$

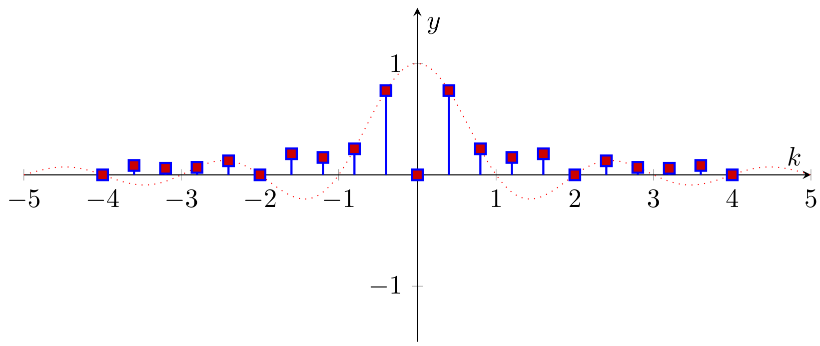
$$Segnale\ Analogico\ Periodico \underset{ATSF}{\overset{TSF}{\rightleftharpoons}} Sequenza\ Complessa$$

5.2.1 Rappresentazione di X_k

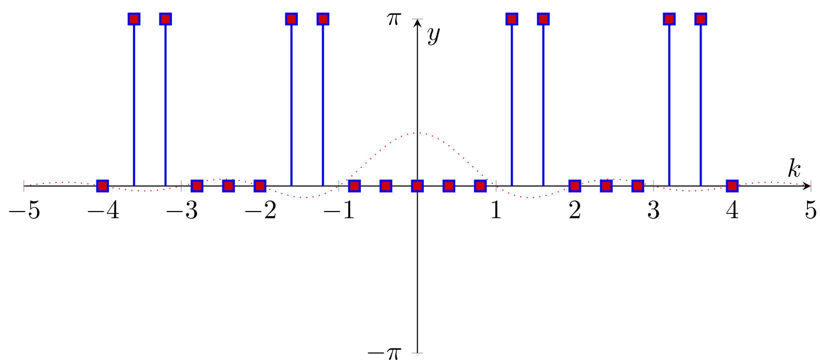
Essendo X_k un numero complesso puó essere rappresentato in forma polare:

$$X_k = |X_k| e^{\angle X_k}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 14: Spettro di un treno di rect

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**.

5.3 Propietá della TSF

5.4 Linearitá

5.5 Simmetria Hermitiana

5.6 Calcolo dei coefficenti X_k per segnali noti

5.6.1 $A\cos(2\pi f_0 t)$

$x_{(t)} = A\cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0$

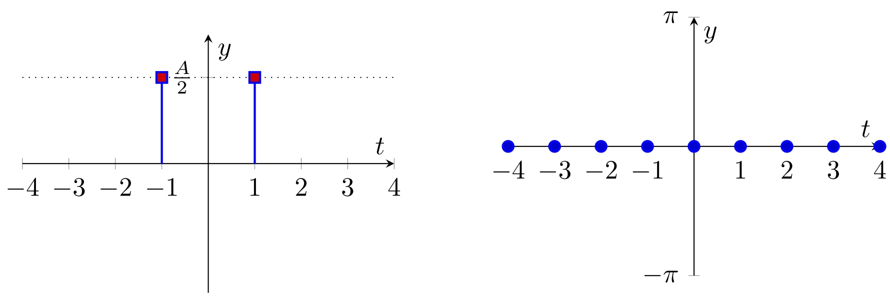
$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A\cos(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})] \end{aligned}$$

Utilizzando la composizione dei coefficenti X_k:

$$x_{(t)} = \ldots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1 e^{-j2\pi(1)f_0 t} + \ldots$$
$$Abbiamo:$$

$$X_{-1} = \frac{A}{2} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:



(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 15: Spettro TSF del coseno $A > 0$

5.6.2 $A\sin(2\pi f_0 t)$

$x_{(t)} = A\sin(2\pi f_0 t), \quad A > 0$

$$\begin{aligned} ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[A\sin(2\pi f_0 t)] \\ &= ATSF[\frac{A}{2}(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t})] \end{aligned}$$

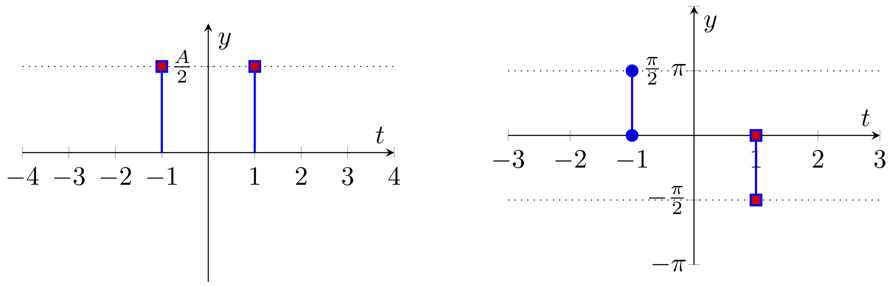
Utilizzando la composizione dei coefficenti X_k:

$$x_{(t)} = \ldots + X_{-1}e^{j2\pi(-1)f_0 t} - X_0 + X_1 e^{-j2\pi(1)f_0 t} + \ldots$$
$$Abbiamo:$$

$$X_{-1} = -\frac{A}{2j} \quad X_0 = 0 \quad X_1 = \frac{A}{2j}$$

$$|X_k| = \begin{cases} |\frac{A}{2j}| = \frac{A}{2} & k = 1 \\ |-\frac{A}{2j}| = \frac{A}{2} & k = -1 \\ 0 & altrove \end{cases} \quad \angle X_k = \begin{cases} \angle\frac{A}{2j} = -\frac{\pi}{2} & k = 1 \\ \angle|-\frac{A}{2j}| = \frac{\pi}{2} & k = -1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Possiamo tracciare lo spettro del segnale:



(a) Spettro di Ampiezza (b) Spettro di Fase

Figure 16: Spettro TSF del seno $A > 0$

5.6.3 Treno di rect

$x_R = A\, rect\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$ Segnale periodico $\rightarrow x_{(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$
$T_0 = periodo$, $T = durata \rightarrow T < T_0$, se così non fosse avremmo una costante

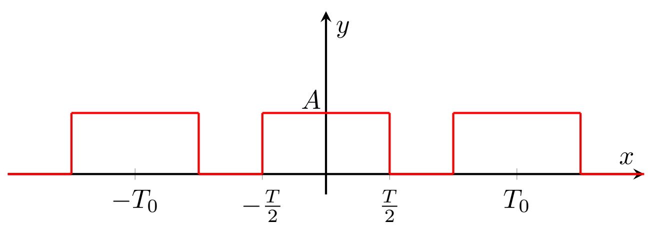
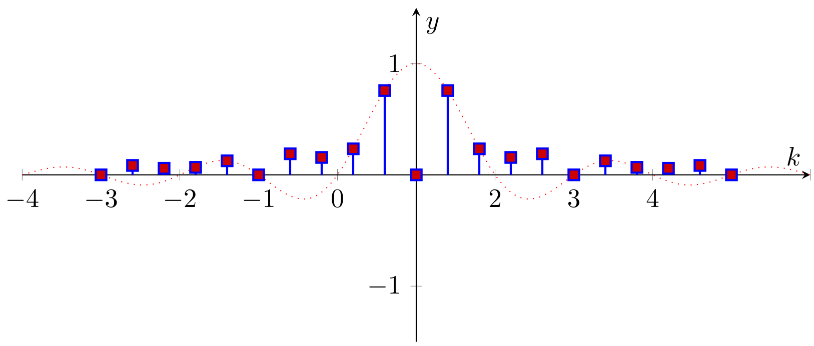


Figure 17: Treno di $A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$

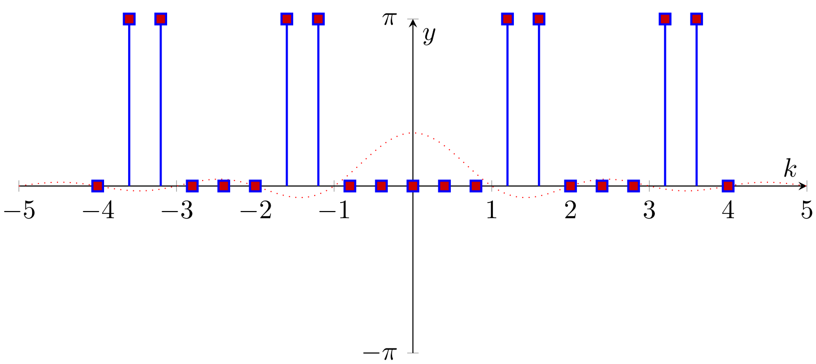
$\rightarrow$ Si nota come cambiare il periodi delle funzioni possiamo renderle da aperiodiche a periodiche e viceversa

$$\begin{aligned}
ATSF[x_{(t)}] &= ATSF[\sum_{-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)] \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{(t)} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{(t)} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{A}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0}\frac{1}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{T_0}\frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{j2\pi k f_0} = \frac{A}{T_0}\frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0} \\
&= \frac{AT}{T_0}\frac{e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}}{-j2\pi k f_0 T} = A f_0 T sinc(k f_0 T)
\end{aligned}$$

Tracciamo lo spettro per $f_0 T < 1$:



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

Figure 18: Spettro TSF del treno di rect con $f_0T < 1$

Si possono anche unire i due spettri per ottenere:

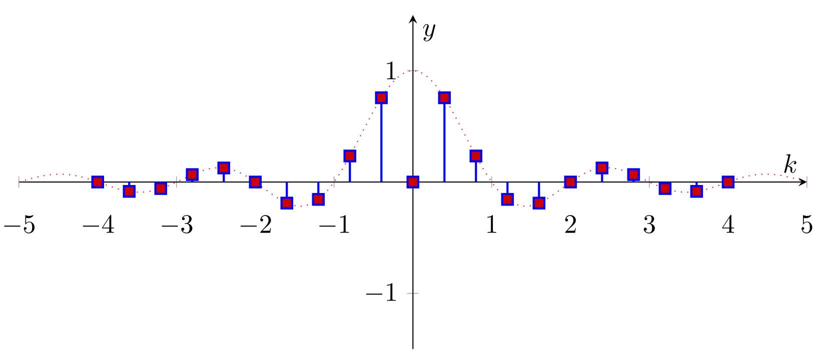


Figure 19: Spettro treno di $A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$

Ora appizza matlab e fa esempi di un segnale e uno di riostruzione dello stesso(script di matlab presenti nel teams):

- Se un segnale varia molto rapidamente nel tempo ha componenti frequenziali piú alte $\rightarrow$ copre piú spettro(espansione spettrale) $T_0 \uparrow$
- Se un segnale varia molto lentamente copre le basse fraquenze $T_0 \downarrow$

Se non ho abbastanza passi K non posso campionare le alte frequenze e quindi non faccio ne un analisi completa del segnale né riesco a ricostruire perfettametne il segnale Inoltre in 0 dello spettro ho il Valor medio 4.1.5 del segnale

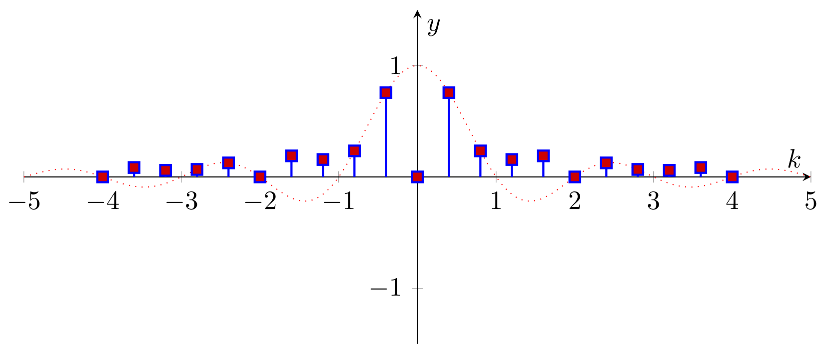
6 Trasformata Continua Di Fourier

6.1 Segnali Aperiodici

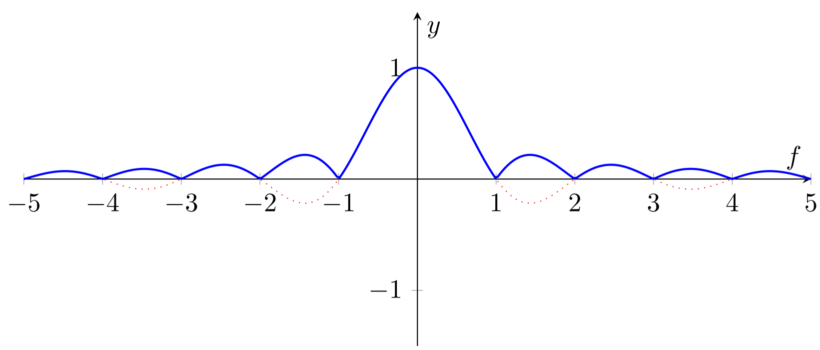
Nel caso di segnali come $x_{(t)} = rect\left(\frac{t}{T}\right)$ non posso usare la TSF posso peró scrivere:

$$x_{(t)} = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t),\ x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(t-nT_0)}$$

Passiamo da un analisi a frequenze discrete ad un analisi su tutto lo spettro delle frequenze



(a) Spettro di Ampiezza TSF



(b) Spettro di Ampiezza TCF

6.2 Equazioni di Analisi e Sintesi

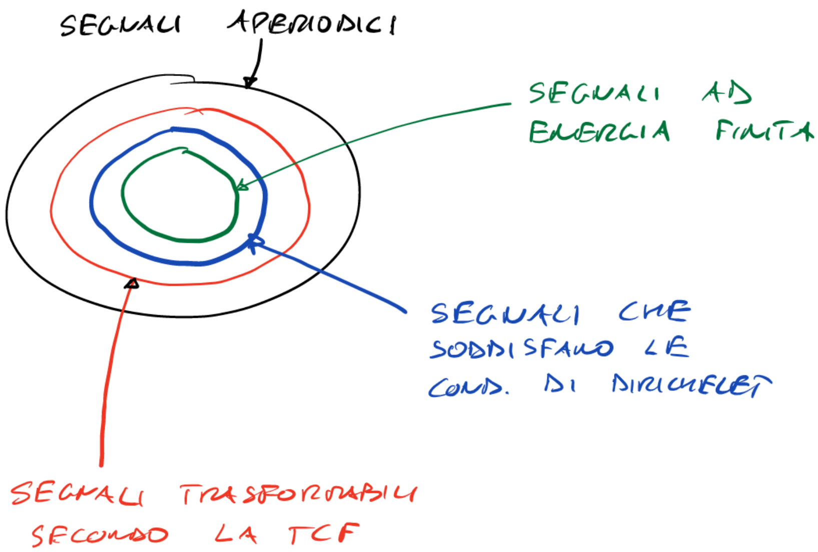


Figure 20: Insiemi dei segnali per tcf

6.2.1 Equazione di Analisi

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt \quad \textit{Equazione di analisi}$$

6.2.2 Equazione di Sintesi

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi f t} df \quad \textit{Equazione di sintesi}$$

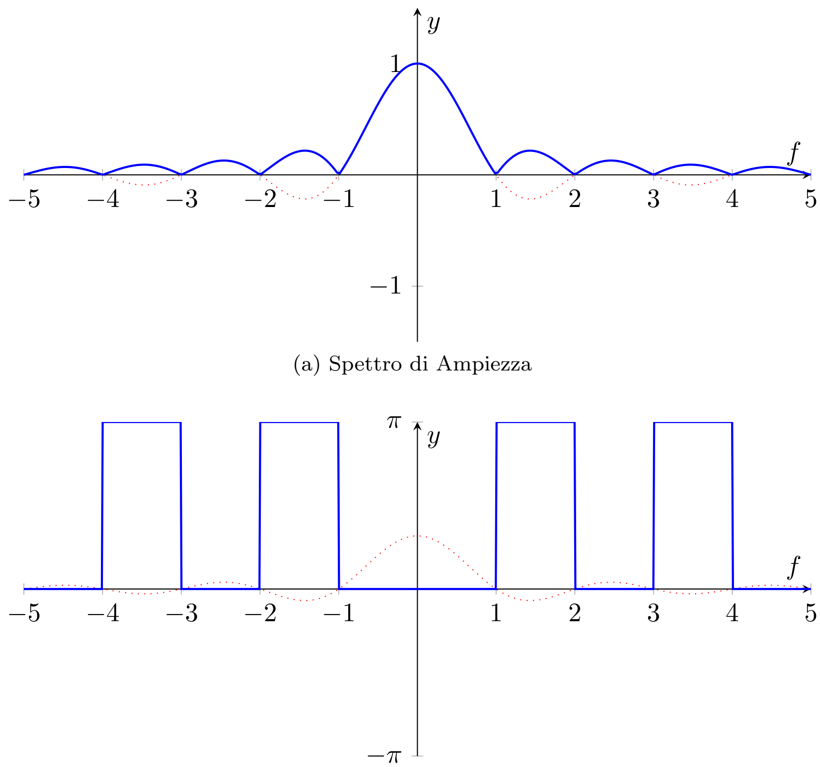
La TCF gode della biunivocitá

$$x_{(t)} \overset{TCF}{\underset{ATCF}{\rightleftharpoons}} X_{(f)} \quad X_{(f)} \in \mathbb{C}$$

Essendo X_k un numero complesso puó essere rappresentato in forma polare:

$$X_{(f)} = |X_{(f)}| e^{\angle X_{(f)}}$$

Si possono rappresentare il modulo (Ampiezza) e la fase tramite grafici che prendono il nome di spettri:



(a) Spettro di Ampiezza

(b) Spettro di Fase

Figure 21: Spettro del segnale TCF

lo spettro di Ampiezza gode della **simmetria pari** rispetto alle ascisse quindi é **sempre positivo e continuo**, mentre lo spettro di fase della **simmetria dispari**, questa propietá é chiamata **Simmetria Hermitiana**

6.2.3 TCF di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$

$x_{(t)} = A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$

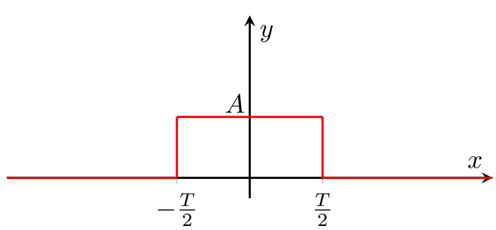


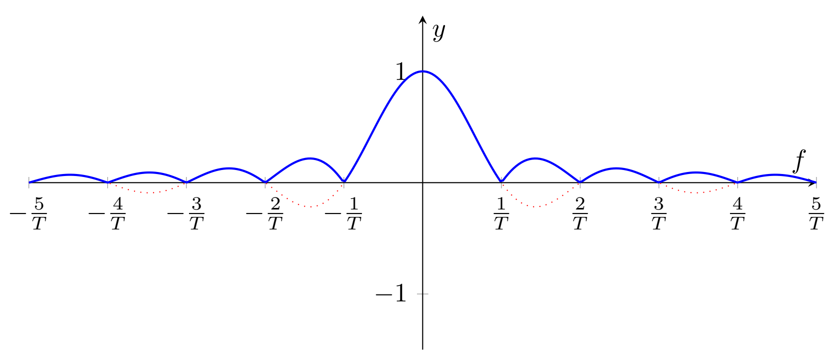
Figure 22: $A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$

$X_{(f)} =? :$

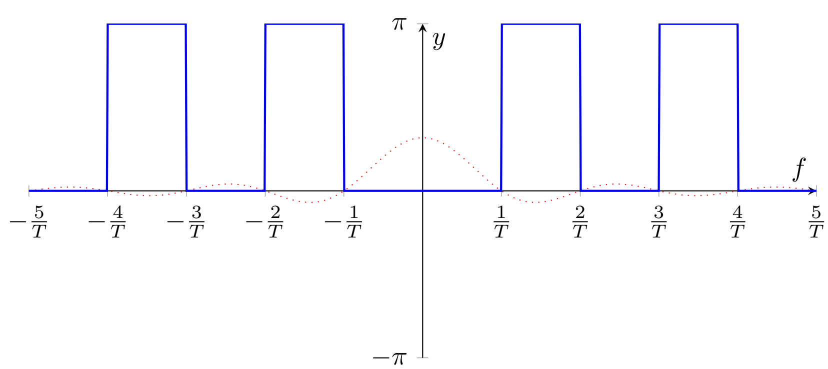
$$
\begin{aligned}
X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \; rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{A}{j2\pi f} \; e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f} \left(e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}\right) \\
&= \frac{AT}{\pi f} \left(\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}\right) = \frac{AT \sin(\pi fT)}{\pi fT} = AT sinc(fT) = X_{(f)}
\end{aligned}
$$

$$
A \; rect\left(\frac{t}{T}\right) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightarrows}} AT sinc(fT)
$$

La sinc si annulla in $\frac{k}{T}, \; k \in \mathbb{Z}$. Notiamo anche come la funzione di partenza sia reale e pari la TCF rispetti 6.3.2(si?):



(a) Spettro di Ampiezza



(b) Spettro di Fase

6.3 Propietá

Come per la TSF vale che al variare del periodo della funzione T:

- Se $T \uparrow$ aumenta $\rightarrow f \downarrow$ diminuisce e si stringe lo spettro
- Se $T \downarrow$ diminuisce $\rightarrow f \uparrow$ aumenta e si allarga lo spettro

Inoltre come si puó evincere dal successivo Teorema della Dualitá 6.4.2:

- Una funzione limitata (finita) nel tempo ha uno spettro nella frequenza illimitato $\rightarrow$ sono i segnali fisici
- Una funzione illimitata nel tempo ha uno spettro nella frequenza limitato (finito)

Da come vedremo piú avanti quindi effettuare troncamenti in frequenza comporta, per alcuni segnali, perdere componenti ad alte frequenze, la scelta dell'intervallo di troncamento é cruciale per la ricostruzione del segnale: se tronchiamo un segnale perdendo le frequenze alte perdiamo le sue variazioni rapide, ad esempio se tronchiamo una $sinc(f)$ male potremmo non ottenere una buona $rect(t)$ nel tempo.

6.3.1 Simmetria hermitiana

$$Ip : x_{(t)} \ reale$$
$$Th : X_{(f)} \ hermitiana$$
$$X_{(-f)} = X^*_{(f)} \rightarrow \begin{cases} |X_{(f)}| = |X_{(-f)}| & Simmetria\ Pari \\ \angle X_{(-f)} = -\angle X_{(f)} & Simmetria\ Dispari \end{cases}$$

6.3.2 Paritá

$$Ip : x_{(t)} \ reale\ e\ pari$$
$$Th : X_{(f)} \ reale\ e\ pari$$

6.3.3 Disparitá

$$Ip : x_{(t)} \ reale\ e\ dispari$$
$$Th : X_{(f)} \ immaginaria\ e\ dispari$$

6.4 Teoremi relativi alla TCF

6.4.1 Linearitá

$Ip : x_{(t)} = \alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}$
$Th : X_{(f)} = \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{1(t)} + \beta x_{2(t)}) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_{1(t)} e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{2(t)} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha X_{1(f)} + \beta X_{2(f)}\end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}x_{(t)} &= Arect\left(\frac{t}{2T}\right) + Brect\left(\frac{t}{T}\right) \\ X_{(f)} &= AX_{1(f)} + BX_{2(f)} = 2ATsinc(2Tf) + BTsinc(Tf) \\ X_{1(f)} &= \begin{cases} X_{1(f)} = Arect\left(\frac{t}{T'}\right) \overset{TCF}{\leftrightharpoons} T'sinc(T'f) \Rightarrow X_{1(f)} = 2Tsinc(2Tf) \\ T' = 2T \end{cases}\end{aligned}$$

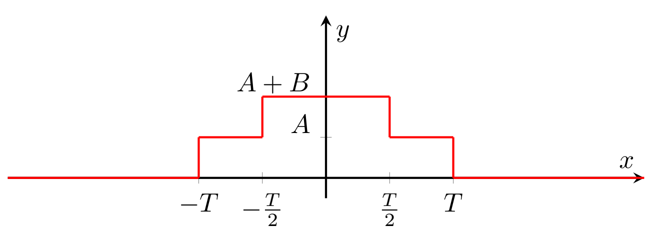


Figure 23: Segnale rettangolo

6.4.2 Dualitá

$Ip : x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)}$

$Th : X_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} x_{(-f)}$ Dimostrazione:

$$\begin{aligned}X_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = Sost. \begin{cases} t \to f \\ f \to t \end{cases} \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(f)} e^{-j2\pi tf} df \\ &= Sost.\ (f' = -f) \Rightarrow X_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{-j2\pi t(-f')} df' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(-f')} e^{j2\pi tf'} df' = ACTF[x_{(-f)}] = c.v.d.\end{aligned}$$

Esempio:

$x_{(t)} = Asinc(Bt) \Rightarrow X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} Asinc(Bt) e^{-j2\pi ft} dt$

Applico la dualitá:

$$Arect\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftarrows ATsinc(Tf)$$
$$ATsinc(Tt) \rightleftarrows Arect\left(\frac{-f}{T}\right)$$

Se voglio una durata generica:

$$Sostituisco\ B = T$$
$$ABsinc(Bt) \rightleftarrows Arect\left(\frac{f}{B}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$Asinc(Bt) \rightleftarrows \frac{A}{B}rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

6.4.3 Ritardo

$Ip : x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)},\ y_{(t)} = x_{(t-to)}$
$Th : Y_{(f)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} y_{(t)} = X_{(f)}e^{-j2\pi f t_0}$
Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-t_0)}e^{-j2\pi tf}dt \\ &= Sost.\ (t' = t - t_0) \Rightarrow Y_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')}e^{-j2\pi f(t'+t_0)}dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')}e^{-j2\pi ft'}e^{-j2\pi ft_0}dt' = X_{(f)}e^{-j2\pi ft_0}\ \ c.v.d. \end{aligned}$$

Osservazione:

- Un ritardo nel tempo introduce una componente solo di fase che cresce lienarmente con la frequenza
- Un esponenziale nel tempo introduce un ritardo nel dominio della frequenza $x_{(t)}e^{-j2\pi f_0 t} \rightarrowtail X_{(f-f_0)}$, vedi 6.5.4

Esempio:
$x_{0(t)} = Arect\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow x_{(t)} = x_{0(t-t_0)}\quad t_0 = \frac{T}{2}$

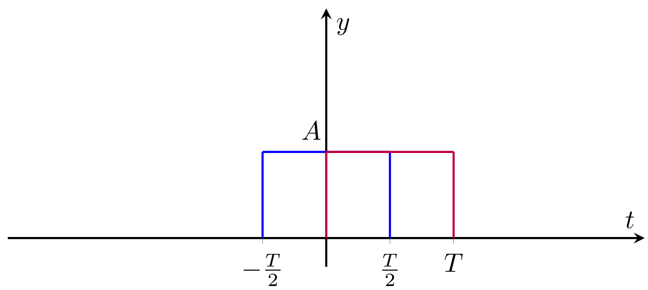
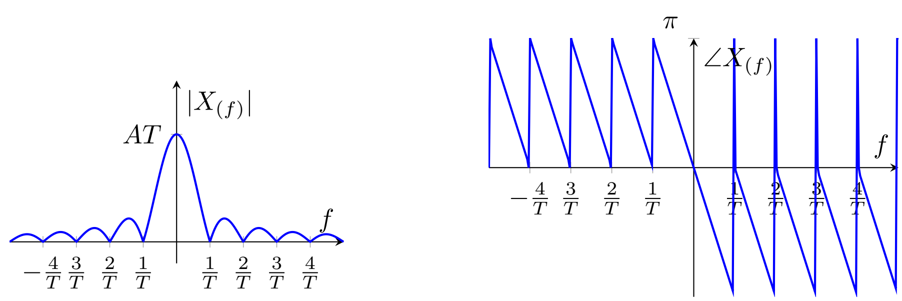


Figure 24: $x_{0(t)}$, $x_{(t)}$

$$X_{(f)} = X_{0(f)}e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = ATsinc(Tf)e^{-j\pi fT}$$



(a) Ampiezza con ritardo

(b) Fase con ritardo

Figure 25: Spettro della *rect* con ritardo

Il LaTeX sbaglia e aggiunge le spike nelle f positive, il grafico é dispari con andamento come per le f negative.

6.4.4 Derivazione

$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{(t)} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$
Dimostrazione:

$$y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}ACTF[x_{(t)}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)}e^{j2\pi ft}df =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)}j2\pi fe^{j2\pi ft}df$$

Posso Scrivere $y_{(t)}$ come $ACTF[y_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi ft} df$, se quindi $Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$ l'ugaglianza é valida:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} e^{j2\pi ft} df$$

L'operazione di derivata nel dominio della frequenza si traduce in una semplice operazione algebrica, nel tempo avrei dovuto calcolare il rapporto incrementale. Per derivare un segnale posso quindi:

$$x_{(t)} \to TCF \to j2\pi f X_{(f)} \to ACTF \to y_{(t)}$$

6.4.5 Integrazione

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftarrows}} X_{(f)} \ (1) \\ y_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} x_{(\alpha)} d\alpha \ (2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} dt \ oppure \ \ X_{(f)}\Big|_{f=0} = 0 \ oppure \ y(+\infty) = 0 \ (3) \end{cases}$$

$Th : Y_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$

Dimostrazione:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} x_{(\alpha)} d\alpha \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_{(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_{(t)} \overset{Th.6.4.4}{\Rightarrow} X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)}$$

$$Y_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

L'ipotesi 3 é conseguenza della divisione per f e che devo mantenere l'uguaglianza $X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)}$, si nota come nella dimostrazione usando il Th della Derivazione (6.4.4) quando $f = 0$ la funzione nella frequenza deve essere 0, $X_{(f)} = j2\pi f Y_{(f)} = 0$

Esempio: TCF di una piramide

$$x_{(t)} = A\left(1 - \left(\frac{|t|}{T}\right)\right) rect\left(\frac{t}{2T}\right) \quad X_{(f)} = TCF[x_{(t)}] =?$$

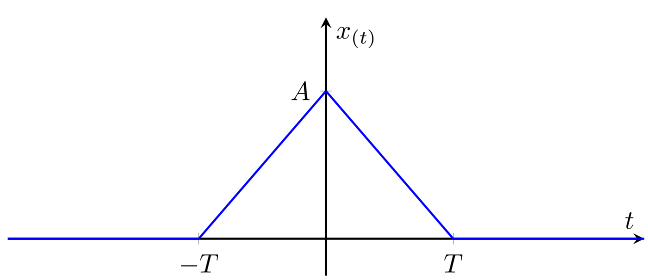


Figure 26: Funzione priamide

$TCF[x_{(t)}]$:

- Utilizzando la classica TCF:

$$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} A \left(1 - \left(\frac{|t|}{T}\right)\right) rect\left(\frac{t}{2T}\right) dt$$

- Utilizzando il Th dell'Integrazione 6.4.5:

$$y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_{(t)} \implies x_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} y_{(\alpha)} d\alpha \text{ 6.4.5(2)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} dt \text{ 6.4.5(3)}$$

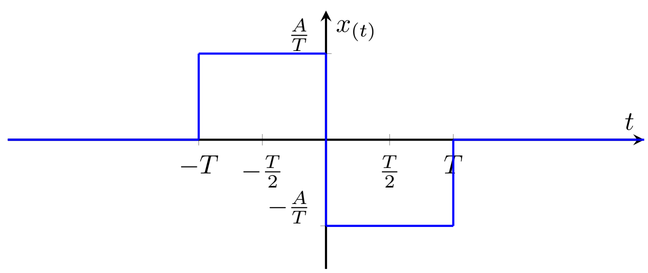


Figure 27: Funzione priamide

$$y_{(t)} = \frac{A}{T} rect\left(\frac{t - \left(-\frac{T}{2}\right)}{T}\right) - \frac{A}{T} rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) = Sono\ 2\ rect\ con\ ritardo$$

$$\Rightarrow y_{(t)} \rightleftharpoons Y_{(f)} \text{ 6.4.5(1)} \Rightarrow X_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} \begin{cases} x_{(t-t_0)} \rightleftharpoons X_{(f)} e^{-j2\pi f t_0} \\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons T sinc(Tf) \end{cases}$$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{T} T sinc(Tf) e^{-j2\pi f\left(-\frac{T}{2}\right)} - \frac{A}{T} T sinc(Tf) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$= 2j A sinc(Tf) \frac{e^{j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{2j} = 2j A sinc(Tf) \sin(\pi f T)$$

$$X_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{2j A sinc(Tf) \sin(\pi f T)}{j2\pi f} = \frac{AT sinc(Tf) \sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$= AT sinc^2(fT)$$

Abbiamo ottenuto la TCF del triangolo:

$$A\left(1-\left(\frac{|t|}{T}\right)\right)rect\left(\frac{t}{2T}\right)\rightleftharpoons ATsinc^2(fT)$$

$$per\ la\ dualita 6.4.2:$$

$$ABsinc^2(Bt)\rightleftharpoons A\left(1-\left(\frac{|f|}{B}\right)\right)rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

I segni negativi spariscono per il valore assoluto e per la paritá della *rect*. Per verificare che i calcoli siano corretti posso colacolare la $X_{(f)}$ in 0 e vedo quanto é l'area del segnale:

$$T^2 sinc(Tf)\Big|_0 = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} Trect(\frac{t}{T}) = T$$

Osservazione: la funzione piramidale varia meno rapidamente nel *tempo* rispetto alla funzione rettangolare quindi lo spetto non occupa le alte frequenze, l'andamento é di $\frac{sinc^2}{x^2}$, é molto piú contenuto. La rect avendo un gradino varia molto rapidamente nel *tempo* e di conseguenza il suo spettro si estende a frequenze piú alte del segnale priamidale.

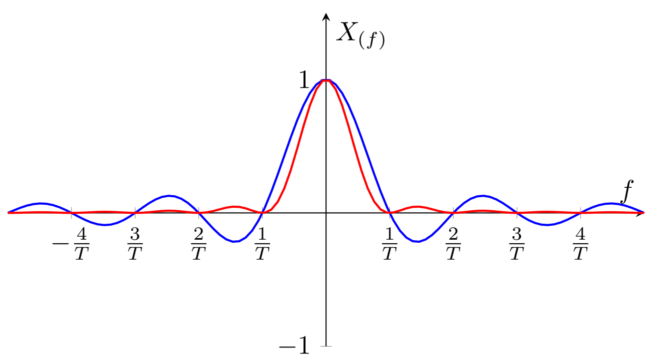


Figure 28: $\frac{sinc}{x}$, $\frac{sinc^2}{x^2}$

DOMANDA: ma la fase in tutto questo che ruolo ha? non avrei problemi avere anche sinc che cambiano la fase degli altri segnali? dopotutto si la sinc é brutta perché si estende all'infinito, ma proprio per questo la fase é sempre sporcata? cosa comporta nella ricostruzione del segnale? noi abbiamo visto finora l'ampiezza dopotutto

6.4.6 Derivazione in Frequenza

$Ip: \left\{ x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt} \right.$
$Th: Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$
Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.7 Integrazione in Frequenza

$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)} y_{(t)} = \frac{\mathrm{d}x_{(t)}}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = j2\pi f X_{(f)}$
Dimostrazione: ok per ora non l'ha fatta

6.4.8 Convoluzione

$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} d\tau$$

$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)} \\ x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)} \\ z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} \end{cases}$
$Th : Z_{(f)} = X_{(f)} Y_{(f)}$
Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Z_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} z_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty_t}^{\infty} \int_{-\infty_\tau}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} e^{-j2\pi f t} dt\ d\tau \\ &= \int_{-\infty_t}^{\infty} x_{(\tau)} \int_{-\infty_\tau}^{\infty} y_{(t-\tau)} e^{-j2\pi f t} dt\ d\tau \overset{Th.6.4.3}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{(f)} x_{(\tau)} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= X_{(f)} Y_{(f)} \end{aligned}$$

Propietá della convoluzione:

- Commutativa:
$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} = y_{(t)} \otimes x_{(t)}$$
  Dimostrazione:
$$\begin{aligned} z_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)} y_{(t-\tau)} d\tau \Rightarrow \tau = t - \tau' \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-\tau')} y_{(\tau')} d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(\tau')} x_{(t-\tau')} d\tau' = y_{(t)} \otimes x_{(t)} \end{aligned}$$

- Associativa:
$$(x_{(t)} \otimes y_{(t)}) \otimes z_{(t)} = x_{(t)} \otimes (y_{(t)} \otimes z_{(t)})$$

- Distributiva:
$$x_{(t)} \otimes (y_{(t)} + z_{(t)}) = x_{(t)} \otimes y_{(t)} + x_{(t)} \otimes z_{(t)}$$

Dimostrazione:

$$z_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}(y_{(t-\tau)} + z_{(t-\tau)})d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}y_{(t-\tau)} + x_{(\tau)}z_{(t-\tau)}d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}y_{(t-\tau)}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}z_{(t-\tau)}d\tau = x_{(t)} \otimes y_{(t)} + x_{(t)} \otimes z_{(t)}$$

Tutte le propietá sono valutate nel dominio del *tempo* ma valgono anche per il dominio della $frequenza$.

6.4.9 Prodotto

$$Ip : \begin{cases} x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)} \\ x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)} \\ z_{(t)} = x_{(t)}y_{(t)} \end{cases}$$

$Th : Z_{(f)} = X_{(f)} \otimes Y_{(f)}$

Dimostrazione:

$$Z_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} z_{(t)}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)}y_{(t)}e^{-j2\pi ft}dt$$
$$= \int_{-\infty_t}^{\infty} \int_{-\infty_\alpha}^{\infty} X_{(\alpha)}e^{j2\pi\alpha t}d\alpha \; y_{(t)}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty_\alpha}^{\infty} X_{(\alpha)} \int_{-\infty_t}^{\infty} y_{(t)}e^{-j2\pi(f-\alpha)t}dt \; d\alpha$$
$$\overset{Th.6.4.3}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\alpha)}Y_{(f-\alpha)}d\alpha = X_{(f)} \otimes Y_{(f)}$$

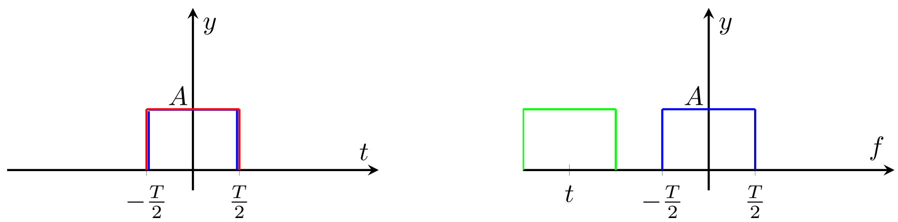
$$\begin{array}{rcl} Tempo & & Frequenza \\ Convoluzione & \Longleftrightarrow & Prodotto \\ Prodotto & \Longleftrightarrow & Convoluzione \end{array}$$

6.4.10 Calcolo del prodotto di convoluzione

$$x_{(t)} \otimes y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}y_{(t-\tau)}d\tau \qquad y_{(-\alpha)} \; e' \; y_{(\alpha)} \; ruotato$$

Facciamo un esempio con 2 *rect*:

$$x_{(t)} = y_{(t)} = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



(a) Grafico nel tempo,$y_{(-\alpha)}$,$x_{(\alpha)}$

(b) illustrazione dell'integrale al variare di t,$y_{(t-\alpha)}$,$x_{(\alpha)}$

Figure 29: Grafico per il calcolo del prodotto di convoluzione

All'aumentare di t $y_{(t-\alpha)}$ si sposta sull'asse delle ascisse, se:

- $t = -\frac{T}{2}$: si allineano le due *rect* e il valore dell'integrale inizia a aumentare.
- $t = 0$: si ha il valore massimo del prodotto tra le due funzioni (in questo caso $A = 1$), l'integrale vale T.
- $t = \frac{T}{2}$: le due *rect* sono disgiunte, nel raggiungere questa posizione il valore dell'integrale é diminuito fino a 0.

Traccamo l'andamento dell'integrale:

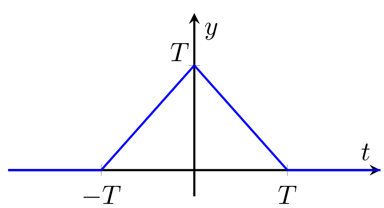
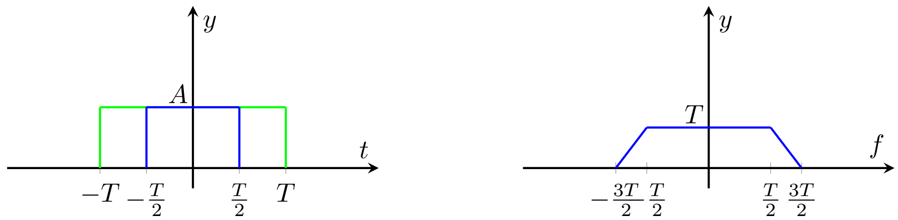


Figure 30: Integrale di convoluzione

Osservazioni:

- Il prodotto di convoluzione ha come durata la somma delle durate dei segnali $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow [-T, T]$
- In $t = 0$ é l'area il prodotto dei segnali

Esempio con *rect* di durata T e $2T$:



(a) Grafico delle rect (b) Risultato integrale di due *rect* diverse

Figure 31: Integrale di convoluzione di *rect* di durata diversa

Esemptio TCF di un triangolo:

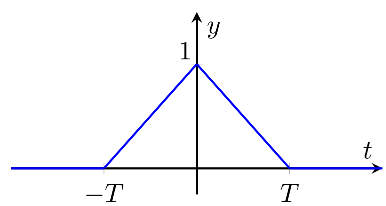


Figure 32: Integrale di convoluzione

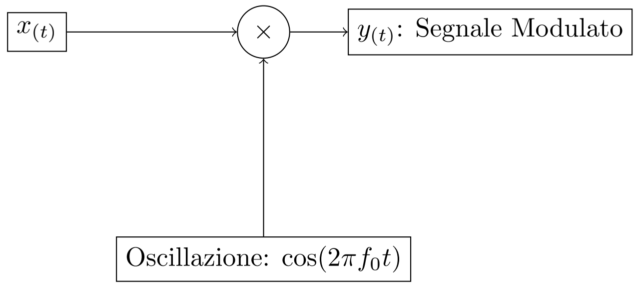
Dal Th. di Convoluzione 6.4.8 sappiamo che é il prodotto di convoluzione di 2 rect di durata uguale a T:

$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes y_{(t)} = rect\left(\frac{t}{T}\right) \otimes rect\left(\frac{t}{T}\right) \stackrel{Th.6.4.8}{\Rightarrow} Tsinc(fT) \cdot Tsinc(fT)$$

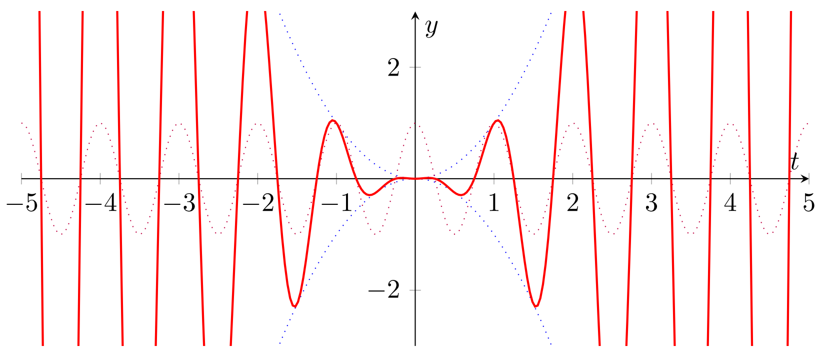
$$T^2 sinc(fT)$$

Esercizio appunti martorella triangoli a sx a dx:

6.5 Modulazione di Ampiezza



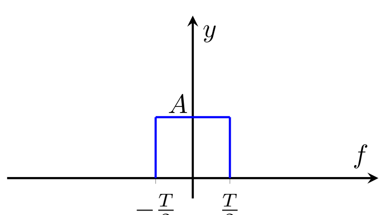
(a) Sistema di modulazione



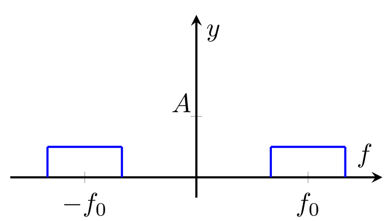
(b) $x_{(t)}$, $y_{(t)}$, $\cos(2\pi t)$

Figure 33: Esempio sistema di modulazione di ampiezza

L'oscillazione introdotta, $\cos(2\pi t)$, segue l'andamento di $x_{(t)}$ Nel dominio della frequenza:



(a) Senza modulazione



(b) Con modulazione

Figure 34: Segnale nel dominio della frequenza modulato e non

Serve per spostare la frequenza (es. di trasmissione) del segnale in modo tale, ad esempio, da non sovrapporre due segnali che sono sulla stessa frequenza. Se il segnale non fosse modulato si dice in **banda base** (BB) se il segnale é modulato si dice in **banda passante**(BP).

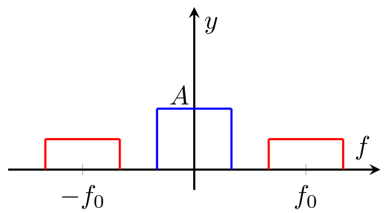


Figure 35: BB, BP

6.5.1 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t)$

$Ip : \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t) \\ x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} X_{(f)} \end{cases}$

$Th : Y_{(f)} = \frac{1}{2}X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2}X_{(f+f_0)}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi (f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi (f+f_0)t} dt \\ &= TCF[x_{(t)}]\Big|_{f-f_0} + TCF[x_{(t)}]\Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2} X_{(f+f_0)} \ c.v.d \end{aligned}$$

Esempio:

$X_{(f)} = \frac{A}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right)$

$$Y_{(f)} = \frac{A}{2B} rect\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \frac{A}{2B} rect\left(\frac{f+f_0}{B}\right)$$

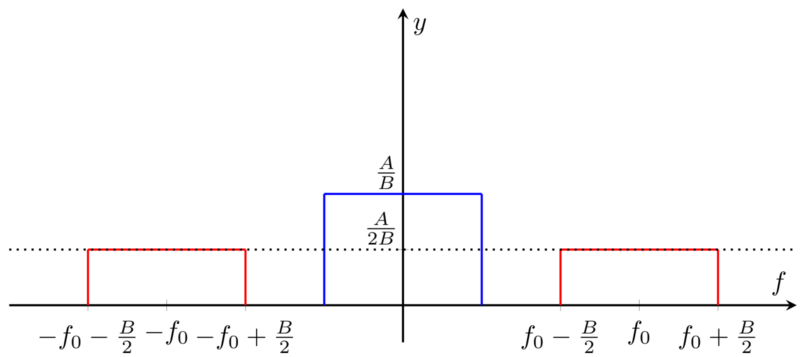


Figure 36: $X_{(f)}$, $Y_{(f)}$

6.5.2 Th. Modulazione con $\sin(2\pi f_0 t)$

$Ip : \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} \sin(2\pi f_0 t) \\ x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)}$
Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi f t} dt = \\
&= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi (f-f_0) t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi (f+f_0) t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}]\Big|_{f-f_0} - TCF[x_{(t)}]\Big|_{f+f_0} = \frac{1}{2j} X_{(f-f_0)} - \frac{1}{2j} X_{(f+f_0)} \; c.v.d
\end{aligned}
$$

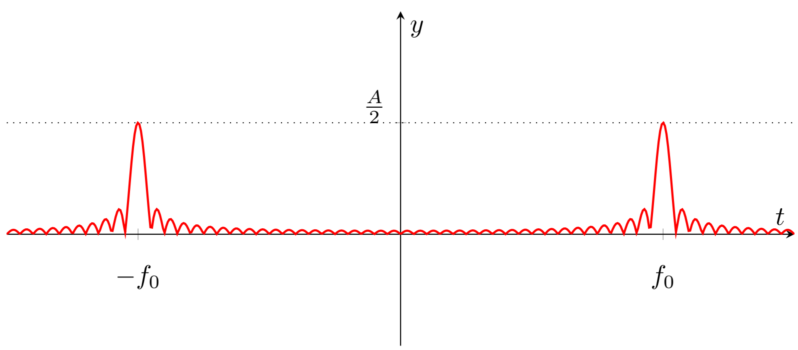
6.5.3 Th. Modulazione con $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

$Ip : \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\leftrightharpoons}} X_{(f)} \end{cases}$
$Th : Y_{(f)} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)}$

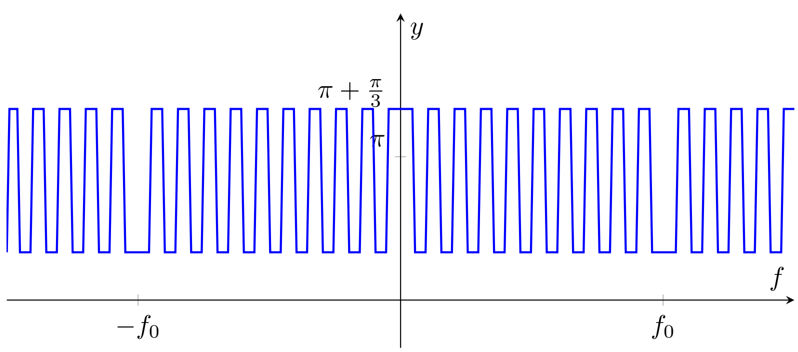
Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi) e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\
&= \frac{e^{j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
&= TCF[x_{(t)}]\Big|_{f-f_0} + TCF[x_{(t)}]\Big|_{f+f_0} = \frac{e^{j\phi}}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} X_{(f+f_0)} \ c.v.d
\end{aligned}
$$

Esempio:



(a) Ampiezza Mod. generica



(b) fase Mod. generica

Figure 37: Modulazione generica di una $Arect\left(\frac{t}{T}\right)$ con $\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$

É legale cosa ho scritto sopra della modulazione generica?

6.5.4 Th. Modulazione con Esponenziale Complesso

$Ip: \begin{cases} y_{(t)} = x_{(t)} e^{j2\pi f_0 t} \\ x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} X_{(f)} \end{cases}$
$Th: Y_{(f)} = X_{(f-f_0)}$
Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y_{(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = TCF[x_{(t)}]\Big|_{f-f_0} = X_{(f-f_0)} \end{aligned}$$

Posso notare che:

- Ritardo: $\rightarrow x_{(t-t_0)} \rightleftharpoons X_{(f)} e^{(-j2\pi f t_0)}$
- Modulazione: $\rightarrow x_{(t)} e^{(j2\pi f_0 t)} \rightleftharpoons X_{(f-f_0)}$

Procedimento per la sintesi di un segnale:

- Derivo il segnale
- Verifico le ipotesi del Th. dell'Integrazione 6.4.5
- calcolo la TCF della derivata
- Applico il Th. dell'integrazione per calcolare $X_{(f)}$

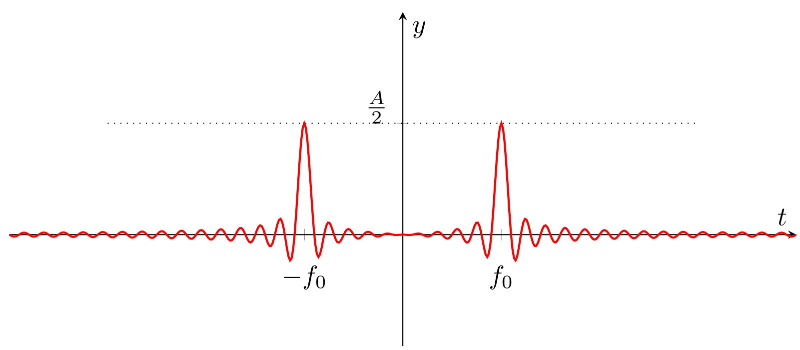
6.5.5 Demodulazione

Ci poniamo il problema di riportare il segnale modulato al segnale originale($g_{(t)}$), dato:
$x_{(t)} = g_{(t)} \cos(2\pi f_0 t)$
Demoduliamo il segnale con $2\cos(2\pi f_0 t)$:

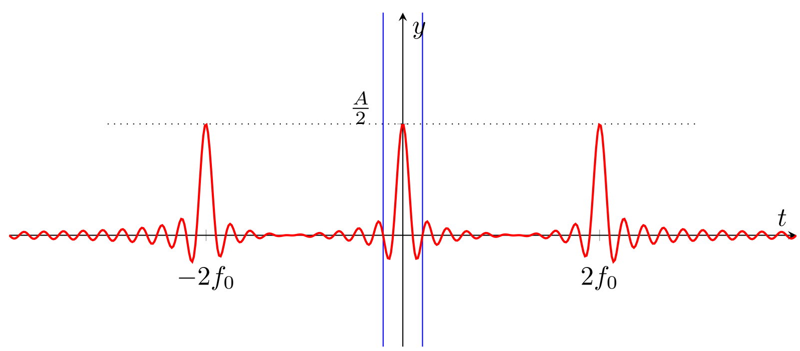
$$\begin{aligned} y_{(t)} &= x_{(t)} 2 \cos(2\pi f_0 t) = g_{(t)} \cos^2(2\pi f_0 t) \\ &= g_{(t)} \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} = \frac{g_{(t)}}{2} + \frac{g_{(t)} \cos(4\pi f_0 t)}{2} \\ TCF[y_{(t)}] &\overset{Th.6.5.1}{\Rightarrow} \frac{2G_{(f)}}{2} + \frac{2G_{(f-2f_0)}}{2} + \frac{2G_{(f+2f_0)}}{2} \\ &= G_{(f)} + G_{(f-2f_0)} + G_{(f+2f_0)} \end{aligned} \tag{1}$$

Dall'ultima uguagliaza posso quindi usare un filtro in (BB) per rimuovere i segnali alle frequenze $\pm 2f_0$ e ricavare il mio segnale $G_{(f)}$.
DOMANDA: posso anche quindi demodulare con un seno tanto non mi interessa quello che succede alle frequenze spostate, quindi peró ritorno sulla fase, non é importante? usando un seno la ribalto praticamente no? ricontroll cio che stai dicendo bro non so se é giusto il ribaltamento

ALTRA DOMANDA: devo anche modulare il segnale abbastanza lontano dalla BB sennó quando demodulo mi autodisturbo il segnale? da qui deriva $\frac{1}{T} < 2BB$
ALTRA DOMANDA: quindi se volessi captare piú segnali mi conviene utilizzare circuiti diversi? oppure posso modulare e demodulare a piacimento i segnali tenendo conto su quali frequenze ho modulato in modo tale da sapere dove vanno a finire i segnali e recuperarli? tanto non mi interessa su quale frequenza finiscano finche non diventino non recuperabili per sovrapposizione giusto?
Riporto un po di esempi di demodulazione di una o piú *rect*: Esempio di Demodulazione



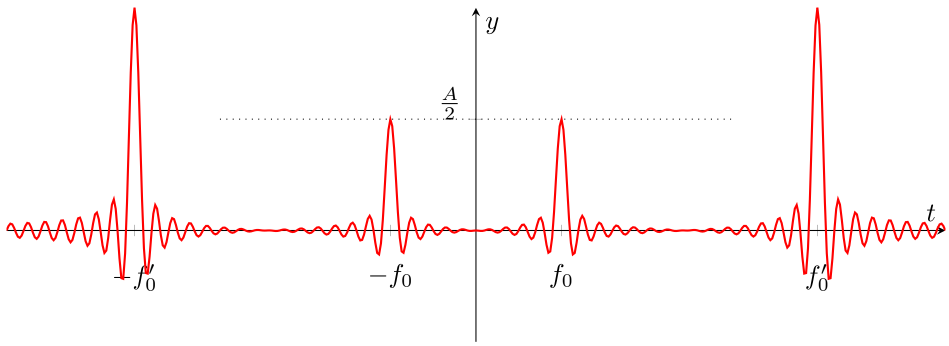
(a) *sinc* modulata



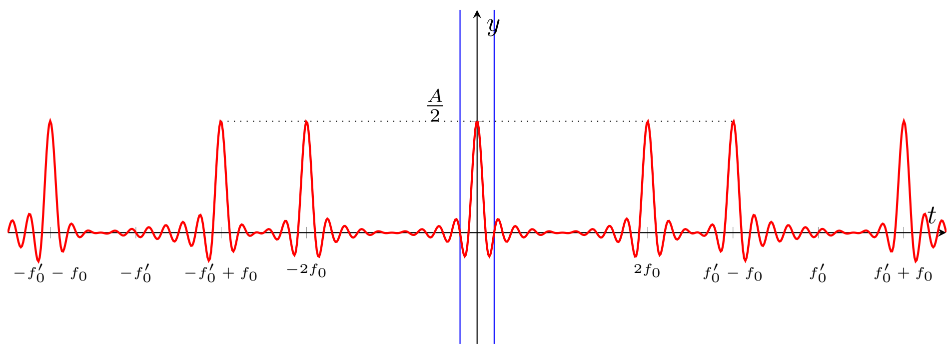
(b) *sinc* demodulata

Figure 38: Demodulazione di una *sinc*

Nel caso di piú segnali durante la demodulazione il segnale che voglio recuperare viene spostato in BB mentre gli altri segnali presenti sullo spettro vengono a loro volta modulati peró con un f_0 diverso rispetto al loro f_0':



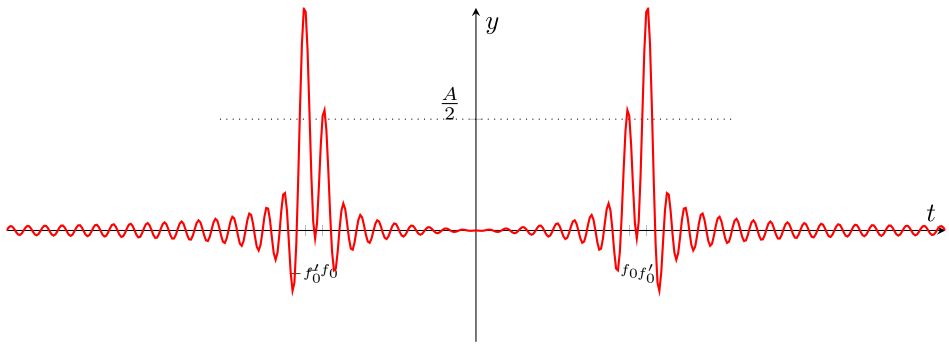
(a) Due *sinc* modulate



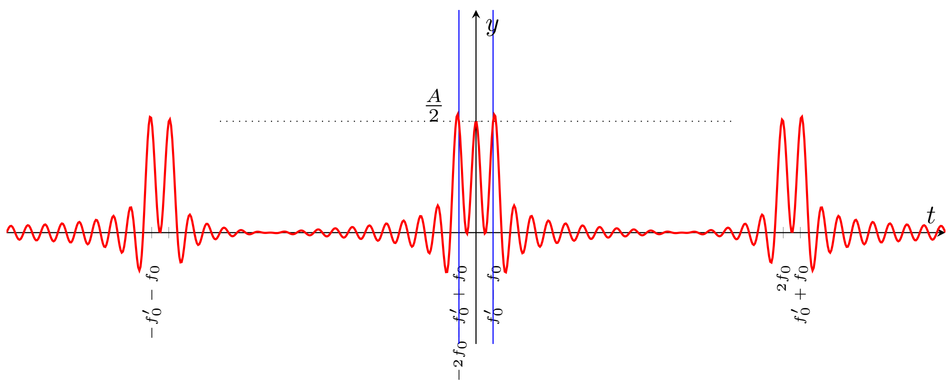
(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 39: Demodulazione di due *sinc*

Potrei peró trovarmi in situazioni delle quali non posso recuperare il segnale



(a) Due *sinc* modulate



(b) Demodulazione delle *sinc*

Figure 40: Demodulazione di due *sinc* non recuperabili

Come possiamo vedere nella regione della BB, il segnale é molto sporco, magari puó essere confuso con un cos e non una sinc. inoltre ora qui ho usato numeri interi per fare il *plot* quindi non si accavallano cosí male ma si accavallano solo in $\frac{1}{T}$ se usassi altri valori sarebbe ancora piú sporco il segnale.

Adesso proviamo a calcolare quanti segnali possiamo trasmettere in una banda:

Ho un segnale rettangolare che dura 5 minuti e una banda di $20MHz = 20 \cdot 10^6 Hz$

$$f_{segnale} = \frac{1}{5 \cdot 60} = \frac{1}{300} Hz$$
$$n^\circ\ di\ segnali = \frac{20 \cdot 10^6}{f_{segnale}} = 20 \cdot 10^6 \cdot 300 = 6 \cdot 10^9$$

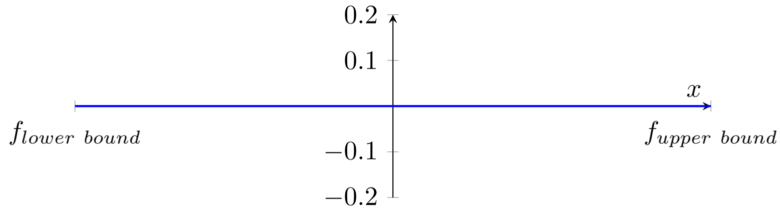


Figure 41: Spettro per la trasmissione

6.5.6 Radar

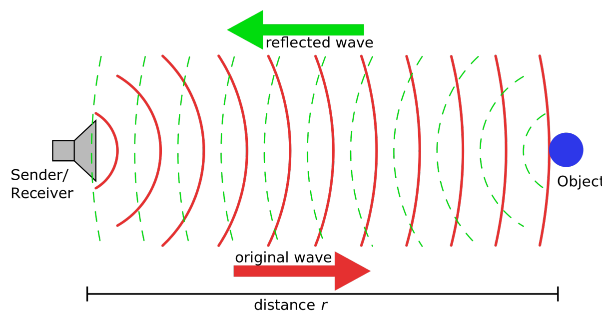


Figure 42: Spettro per la trasmissione

La sorgente emette un'onda continua e passivamente capta per le onde riflesse dagli oggetti. Il calcolo della distanza si basa sulla capacitá dei materiali di riflettere le onde, piú la frequenza dell'onda é alta piú i materiali riescono a riflettere. L'emettitore, in presenza di ostacolo, riceve il segnale riflesso (*eco*) e misura il ritardo dell'*eco* rispetto al segnale originale per poi calcolarne la distanza. Prendiamo un emettitore di onde rettangolari.

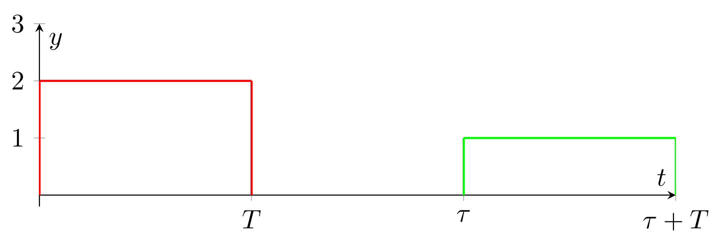


Figure 43: Spettro per la trasmissione

Indichiamo con τ il ritardo di ricezione dell'*eco* e la distanza che sempara il radar dall'oggetto d:

$$d = \frac{c\tau}{2}$$

Compare un fattore $\frac{1}{2}$ dovuto al segnale che percorre due volte la distanza tra l'emettitore e l'oggetto. Possiamo notare che l'*eco* ha ampiezza minore poiché dell'energia é stata assorbita dal materiale o una porzione del segnale originale ha oltrepassato il materiale stesso.

Analizziamo in frequenza cosa succede.

Volgiamo realizzare un radar a onda rettagolare che rileva a un massimo di 15 metri di distanza e a un minimo di $1,5$ metri. Possiamo calcolare i valori di ritardo massimo e minimo:

$$\tau_{min} = \frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 0.1\mu s$$
$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 1.5}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} = 10ns$$

Il radar funziona finché $T << \tau_{min}$, se avessi un $\tau_{min} > T$ non potrei distinguere il segnale inviato da quello ricevuto.

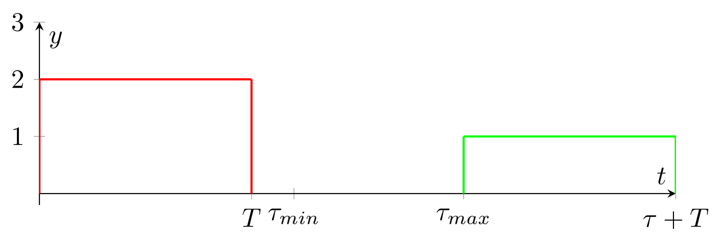


Figure 44: Limiti di ritardo del radar

Nel nostro caso potremmo scegliere un $T \backsimeq 1ns \backsimeq 10^{-9}$ per rispettare i limiti imposti dall'esercizio. Ma analizzando l'intervallo frequenziale della TCF della funzione rettangolo, una $sinc(x)$, il nostro segnale ha componenti frequenziali significative nell'ordine dei GHz, $\frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-9}} = 1GHz$. I segnali nell'ordine dei GHz oltrepassano con facilitá gli ostacoli, basti vedere le bande di funzionamento dei cellulari e il Wi-Fi. Si utilizzano segnali con l'ordine di cetinaia se non igliaia di Hz, possiamo vedere come la lunghezza d'onda del segnale giochi un ruolo fondamentale:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$$
$$\lambda_0 = \begin{cases} f_0 = 3GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.1m \\ f_0 = 30GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.01m \\ f_0 = 300GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.001m \\ f_0 = 3000GHz \rightarrow \lambda_0 = 0.0001m \end{cases}$$

come funzionano il lidarr e il sonarr? come hanno fatto a rilevare i movimenti con il wifi?

6.6 Delta di Dirac

Si definisce Delta di Dirac $\delta_{(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{(t)}$ con $U_{(t)}$ funzione gradino. Piú correttamente si definisce Delta di Dirac la funzione che se integrata restituisce il gradino unitario:

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt \rightarrow U_{(t)}$$

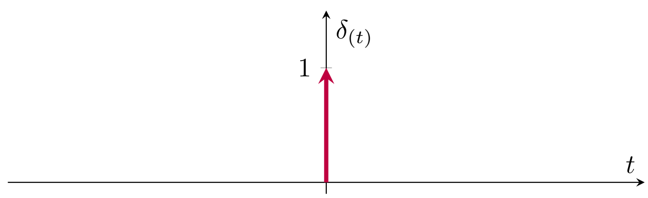


Figure 45: Delta di Dirac

L'ampiezza della funzione é dovuta alla costante moltiplicativa, ma alla fin fine rimane sempre una funzione impulso.

boh amplia magari

6.6.1 Propietá del Delta di Dirac

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} dt = 1$
- Propietá Campionatrice:
  $Ip: \ x_{(t)} \ continua \ in \ t_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \delta_{(t-t_0)} dt = x_{(t_0)}$$

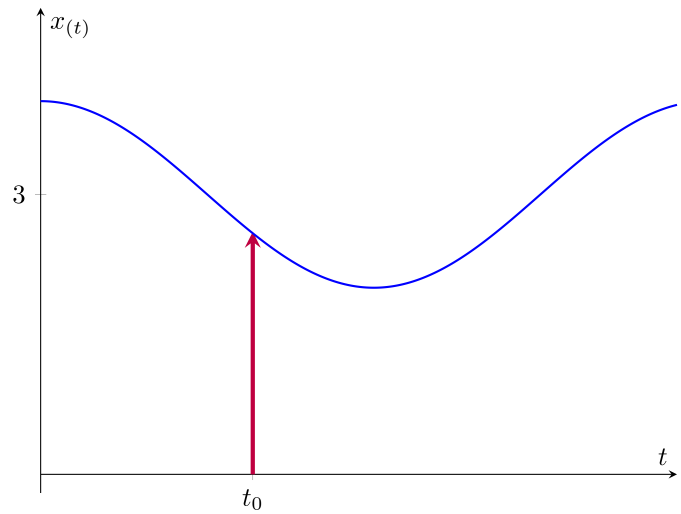


Figure 46: Propietá Campionatrice

- Paritá: $\delta_{(t)} = \delta_{(-t)}$
- $x_{(t)}\delta_{(t-t_0)}dt = x_{(t_0)}\delta_{(t-t_0)}$
- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = x_{(t)}$ Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(t-\tau)}d\tau \overset{6.6.1}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(\tau-t)}d\tau = x_{(t)}$$

- $x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = x_{(t-t_0)}$ Dimostrazione:

$$x_{(t)} \otimes \delta_{(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(t-t_0-\tau)}d\tau \overset{6.6.1}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\tau)}\delta_{(\tau-(t-t_0))}d\tau = x_{(t-t_0)}$$

6.6.2 TCF della Delta di Dirac

$x_{(t)} = A\delta_{(t)}$

$$TCF[x_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)}e^{-j2\pi ft}dt \overset{6.6.1 t_0=0}{\Rightarrow} e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=0} = A$$

$$A\delta_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} A$$

$$Per\ la\ dualita\ 6.4.2:$$

$$A \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} A\delta_{(-f)} = A\delta_{(f)}$$

Caso con ritardo:

$$A\delta_{(t-t_0)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} Ae^{-j2\pi f t_0}$$
$$Per\ la\ dualita\ 6.4.2:$$
$$Ae^{-j2\pi f_0 t} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} A\delta_{(-f-f_0)} = A\delta_(f + f_0)$$

6.6.3 TCF di segnali periodici FIX?

Nel caso di segnali periodci, come $x_{(t)} = \cos(2\pi f_0 t)$, abbiamo definito la TSF, proviamo a calcolarne la TCF:

$$x_{(t)} = \cos(2\pi f_0 t) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} ?$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= TCF[\cos(2\pi f_0 t)] = TCF[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}] \\ &= TCF[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2}] + TCF[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}] \overset{6.6.2}{\Rightarrow} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2} \end{aligned}$$
$$\cos(2\pi f_0 t) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2}$$

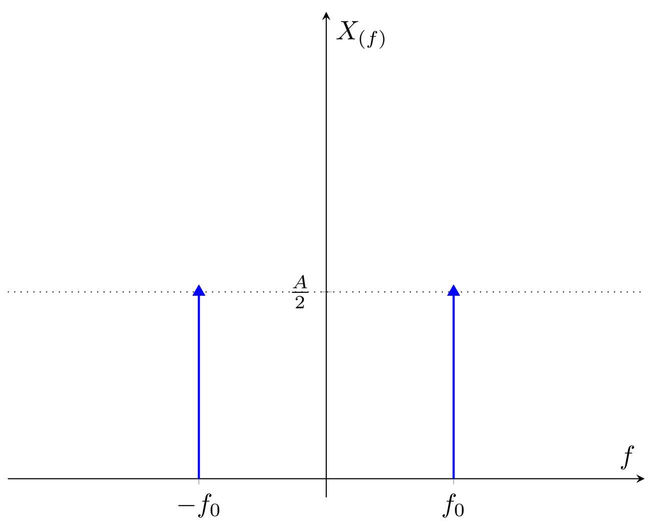


Figure 47: TCF *cos*

Praticamente modulo una costante.
Osservazione: Non sono i coefficenti $X_{(k)}$, qui le delta sono funzioni nella TSF

sono numeri complessi.

Caso con $x_{(t)} = \sin(2\pi f_0 t)$

$$x_{(t)} = \sin(2\pi f_0 t) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} ?$$

$$\begin{aligned} X_{(f)} &= TCF[\sin(2\pi f_0 t)] = TCF[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}] \\ &= TCF[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2j}] - TCF[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}] \overset{6.6.2}{\Rightarrow} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2j} - \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2j} \end{aligned}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2j} - \frac{\delta_{(f+f_0)}}{2j}$$

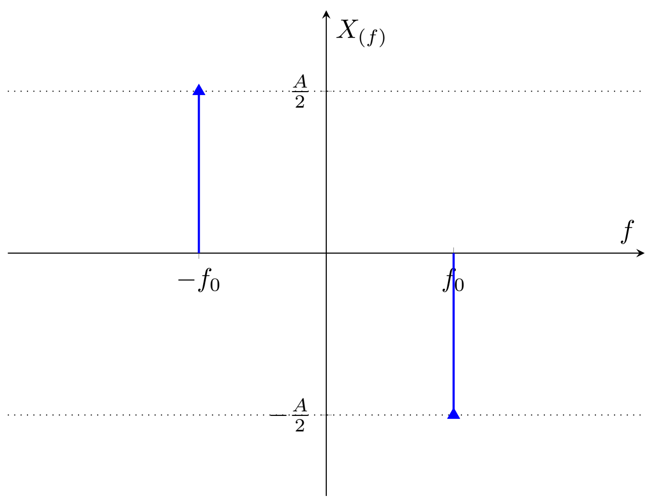


Figure 48: TCF *sin*

6.7 Relazione tra TSF e TCF

6.7.1 TCF di un segnale periodico generico

Dato un generico segnale $y_{(t)}$ posso sempre scriverlo come periodicizzazione di un segnale apreiodico $x_{(t)}$: $x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} X_{(f)}$

$$y_{(t)} = y_{(t-kT_0)} \Rightarrow \begin{cases} TSF[y_{(t)}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \\ TCF[y_{(t)}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta_{(f-\frac{k}{T_0})} \end{cases}$$

La TCF diventa un campionamento con la Delta di Dirac 6.6.1

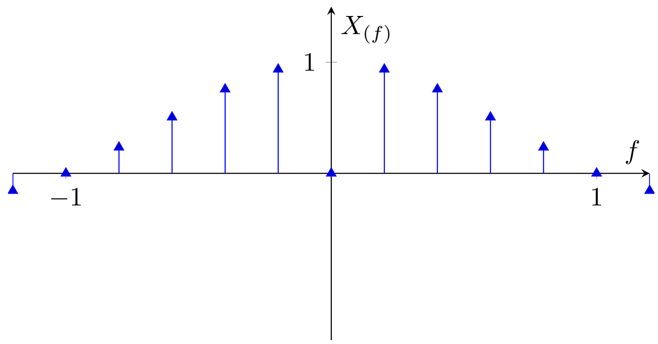


Figure 49: TCF segnale periodico generico

Applichiamolo al Th. della Modulazione 6.5.1:

$$y_{(t)} = x_{(t)} \cos(2\pi f_0 t) \overset{6.4.9}{\Rightarrow} X_{(f)} \otimes \left(\frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} \right)$$
$$\overset{6.6.1}{\Rightarrow} \frac{1}{2} X_{(f-f_0)} + \frac{1}{2} X_{(f+f_0)}$$

Esercizio:

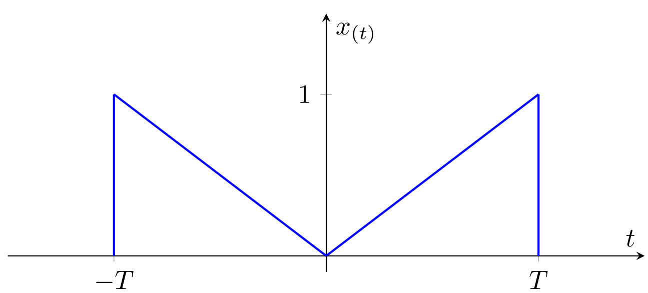


Figure 50: TCF rect meno triangolo

Deriviamo il segnale $y_{(t)}$:

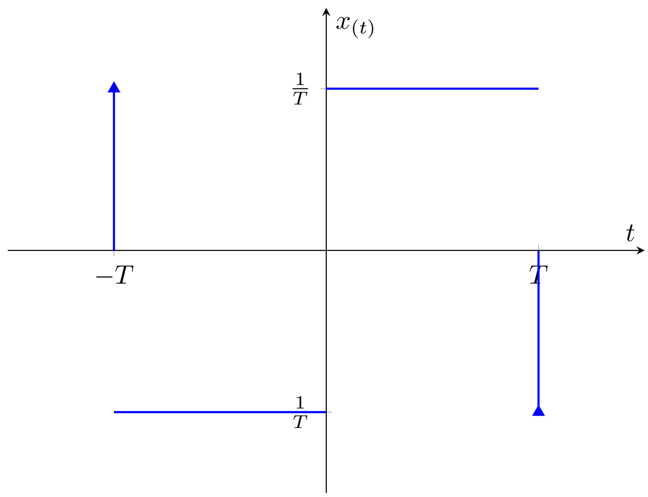


Figure 51: Derivata di $y_{(t)}$

$$y_{(t)} = \delta_{(t-T)} - \delta_{(t+T)} - \frac{1}{T} rect\left(\frac{t-\left(-\frac{T_0}{2}\right)}{T}\right) + \frac{1}{T} rect\left(\frac{t-\frac{T_0}{2}}{T}\right)$$

Possiamo applicare il Th dell'integrazione 6.4.5 l'ipotesi (3): $y_{(\infty)} = 0$

$$\begin{aligned}
TCF[y_{(t)}] &= e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{T} T sinc(fT) e^{j2\pi f\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T} T sinc(fT) e^{-j2\pi f\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{2j}{2j}\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - sinc(fT) e^{j2\pi f\frac{T_0}{2}} + sinc(fT) e^{-j2\pi f\frac{T_0}{2}}\right) \\
&= 2j sin(2\pi fT) - 2j sinc(fT) sin(\pi fT)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{(f)} &= \frac{Y_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{2j sin(2\pi fT) - 2j sinc(fT) sin(\pi fT)}{j2\pi f} \\
&= \frac{sin(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{sinc(fT) sin(\pi fT)}{\pi f} = \frac{2T}{2T}\frac{sin(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{T}{T}\frac{sinc(fT) sin(\pi fT)}{\pi f} \\
&= 2T sinc(2fT) - T sinc^2(fT)
\end{aligned}$$

Si potrebbe fare sottraendo un triangolo a una rect?

6.7.2 Relazione tra i coefficenti X_k e $X_{(f)}$

$$y_{(t)} = y_{(t-kT_0)} \Rightarrow \text{Periodico in } T_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(t-nT_0)}$$

$x_{(t)}$ Segnale aperiodico

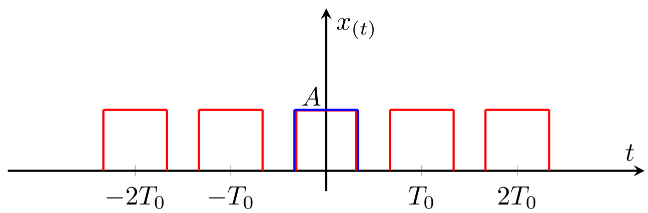


Figure 52: Segnale aperiodico, Segnale periodico

$$\begin{cases} x_{(t)} \overset{TCF}{\rightleftharpoons} X_{(f)} \\ y_{(t)} \overset{TSF}{\rightleftharpoons} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{cases} \qquad \text{Che relazione intercorre tra } Y_k \ e \ X_{(f)}$$

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y_{(t)} e^{j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(t-nT_0)} e^{j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{(t-nT_0)} e^{j2\pi k f_0 t} dt \overset{t'=t-nT_0}{=} \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x_{(t')} e^{j2\pi k f_0 (t'+nT_0)} dt' \\ &= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x_{(t')} e^{j2\pi k f_0 t'} \underset{\text{é la fase di un numero sempre intero nk}^{\in\mathbb{N}}}{\underset{\downarrow \forall nk=1}{e^{j2\pi n k f_0 T_0}}} dt' \\ &= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x_{(t')} e^{j2\pi k f_0 t'} dt' \rightarrow TCF \text{ con intervalli disgiunti e adiacenti in } kf_0 \end{aligned}$$

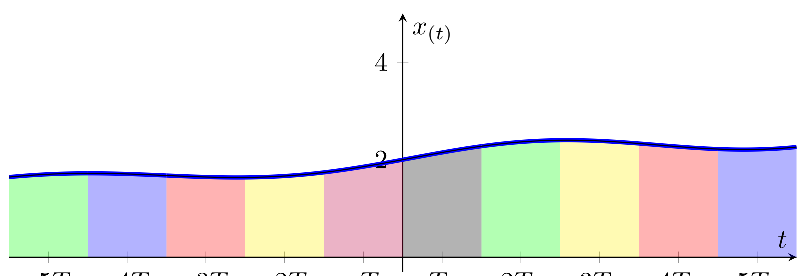


Figure 53: Intervalli adiacenti e disgiunti

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x_{(t')} e^{j2\pi k f_0 t'} dt' \Rightarrow Y_k = \frac{1}{T_0} X_{(kf_0)}$$

Sono campionamenti di $X_{(f)}$ a kf_0.

6.7.3 I^a formula di Poisson

$$y_{(t)} \overset{TSF}{\rightleftharpoons} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X_{(kf_0)} e^{j2\pi k f_0 t}$$

Evidenzia che:

$$\textit{Periodicizzazione nel tempo} \rightleftharpoons \textit{Campionamento nella frequenza}$$

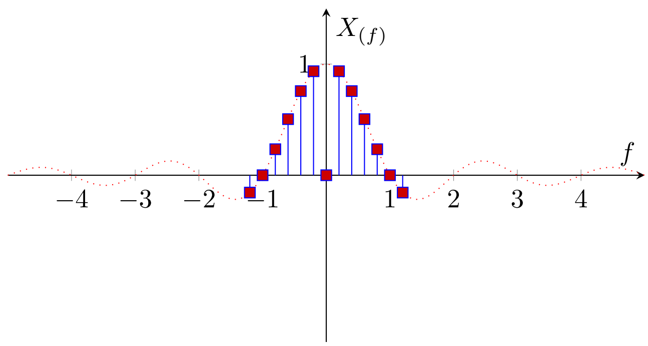


Figure 54: Grafico del campionamento

Esempio:
$y_{(t)} = |\cos(2\pi f_0 t)|\ \ X_k = ?$

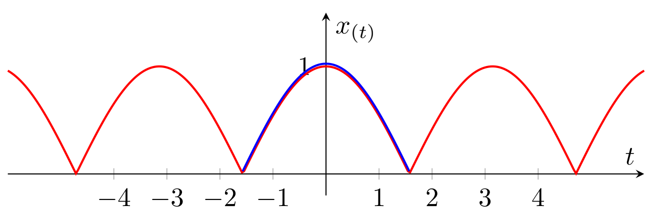


Figure 55: $|\cos(2\pi f_0 t)|$

$y_{(t)} = |\cos(2\pi f_0 t)|$ non é altro che il segnale aperiodico $x_{(t)} = \cos(2\pi f_0 t) \cdot rect\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right)$ con periodo $\frac{T_0}{2}$:

$$\begin{cases} Y_k = \frac{2}{T_0} X_{(kf_0)} = \frac{2}{T_0} X_{(k\frac{2}{T_0})} \\ X_{(f)} = \frac{T_0}{2} sinc(f\frac{T_0}{2}) \otimes \left(\frac{\delta_{(f-f_0)}}{2} + \frac{\delta_{(f-f_0)}}{2}\right) \end{cases}$$

Per il calcolo di $X_{(f)}$ si applica il Th della Modulazione con *cos* 6.5.1 e la propietá campionatrice della Delta di Dirac rispetto alla convoluzione 6.6.1.

$$X_{(f)} = \frac{T_0}{4} sinc\left((f-f_0)\frac{T_0}{2}\right) + \frac{T_0}{4} sinc\left((f+f_0)\frac{T_0}{2}\right)$$

$$Y_k = \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{4} sinc\left((\frac{2k}{T_0}-f_0)\frac{T_0}{2}\right) + \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{4} sinc\left((\frac{2k}{T_0}+f_0)\frac{T_0}{2}\right)$$

6.7.4 Teorema dell'integrazione completo

$$Ip: \begin{cases} x_{(t)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} X_{(f)} \\ y_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} x_{(\alpha)} d\alpha \end{cases}$$

$Th: Y_{(f)} = \frac{X_{(0)}}{2}\delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$

Prende la nominazione di completo perché risolve il problema di mantenere l'uguaglianza $j2\pi f Y_{(f)} = X_{(f)}$

Per la dimostrazione ci serve definire prima:

- TCF di $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t} \underset{ATSF}{\overset{TSF}{\rightleftharpoons}} sgn(f)$$

Per la Dualitá 6.4.2

$$sgn(t) \underset{ATSF}{\overset{TSF}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{j\pi f}$$

- TCF del gradino $u_{(t)}$

$$u_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(\alpha)} d\alpha \qquad u_{(t)} \rightleftharpoons U_{(f)}$$

Non posso applicare il Th dell'integrazione 6.4.5 $\begin{cases} y_{(+\infty)} = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} u_{(t)} dt = 1 \\ X_{(f)} = 1 \end{cases}$ la terza ipotesi non é mai verificata. Scriviamo la funzione gradino in modo diverso:

$$u_{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t)$$

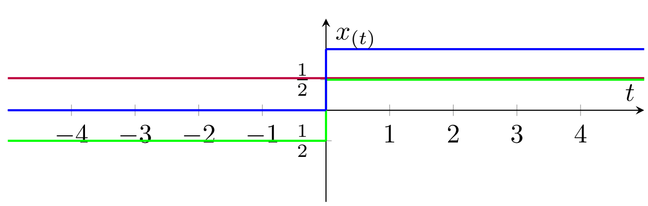


Figure 56: $u_{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t)$

$$U_{(f)} = TCF[u_{(t)}] = \frac{1}{2}\delta_{(f)} + \frac{1}{2j\pi f}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t) \underset{ATSF}{\overset{TSF}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{2}\delta_{(f)} + \frac{1}{2j\pi f}$$

Dimostrazione Th. Integrazione completo:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} x_{(\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha$$

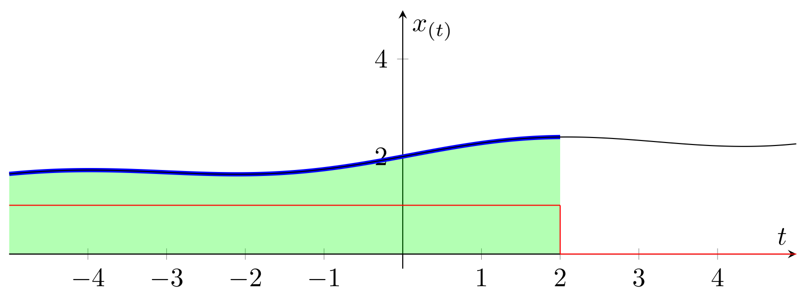


Figure 57: $y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha, x_{(\alpha)} u_{(t-\alpha)}$

Utilizziamo il gradino per cambiare gli estremi dell'integrale e mantenere il valore di $x_{(t)}$ dopo t a 0. Ci siamo ricondotti all'integrale di convoluzione 6.4.8 nel tempo, quindi nella frequenza diventa un prodotto:

$$Y_{(f)} = X_{(f)} U_{(f)} = \frac{X_{(f)}}{2}\delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f} = \frac{X_{(0)}}{2}\delta_{(f)} + \frac{X_{(f)}}{j2\pi f}$$

Se $X_{(0)}$ fosse 0 avrei il classico Th. dell'integrazione. DOMANDA: ma quindi nella propietá campionatrice in frequenza rimane la delta????

7 Sistemi Monodimensionali

Definiamo il Sistema Monodimensionale:

$$x_{(t)} \longrightarrow \boxed{\;T[\,]\;} \longrightarrow y_{(t)}$$

Il sistema applica la trasformazione $T[\,] : y_{(t)} = T[x_{(t)}]$ in gemerale $y_{(t)} = T[x_{(\alpha)}, t]$.

7.1 Propietá dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)

- Linearitá:

  $$x_{(t)} = ax_{1(t)} + bx_{2(t)} \overset{T[\,]}{\Rightarrow} y_{(t)} = aT[x_{1(t)}] + bT[x_{2(t)}]$$

  Oppure separando la variabile del tempo:

  $$x_{(t)} = ax_{1(t)} + bx_{2(t)} \overset{T[\,]}{\Rightarrow} y_{(t)} = aT[x_{1(\alpha)}, t] + bT[x_{2(\alpha)}, t]$$

  É il principio di linearitá o sovrapposizione degli effetti visto a elettrotecnica.

- Stazionarietá:

  $$y_{(t)} = T[x_{(t)}] \rightarrow y_{(t-t_0)} = T[x_{(t-t_0)}]$$

- Causalitá:

  $$y_{(t)} = T[x_{(\alpha)}, \alpha \leq t]$$

  L'uscita all'istante t dipende dall'ingresso ad instanti precedenti o al piú uguali a t, si basa su valori precendenti a t non puó prevedere il futuro. Ne derivano 2 distinzioni di trasformazioni:

  - Real Time: necessariamente causale (é nel presente)
  - Virtual time: Causale o Non Causale (es. ho tutto un file al quale posso prevedere i bit o frame successivi per applicarne un post-processing)

- Stabilitá BIBO: Se il segnale $x_{(t)}$ ha ampiezza limitata $\rightarrow$ l'uscita ha ampiezza limitata:

  $$|x_{(t)}| \leq M \rightarrow |y_{(t)}| \leq K$$

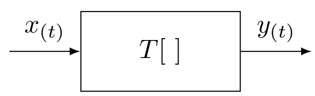
- Invertibilitá:

  $$y_{(t)} = T[x_{(\alpha)}, t] \overset{\text{Se}\exists}{\Rightarrow} x_{(t)} = T^{-1}[y_{(\alpha)}, t]$$

- Memoria: Un sistema é:
  - Senza memoria: se $y_{(t)} = T[x_{(\alpha)}, \alpha = t]$
  - Con Memoria: $y_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} x_{(\alpha)} d\alpha$ l'uscita all'istante t dipende anche da valori dell'ingresso ad istanti diversi da t. Nota bene é l'integrale di convoluzione di $x_{(t)} \otimes u_{(t)}$

7.2 Propietá dei Sistemi Lineari Stazionari (SLS)

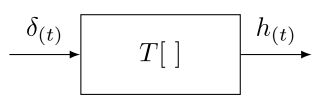
Sono sistemi che godono delle propietá di Linearitá 7.1 e di Stazionarietá 7.1:



Troviamo la relazione tra ingresso e uscita:

$$y_{(t)} = T[x_{(\alpha)}, t] = T[x_{(t)}] = T[x_{(t)} \otimes \delta_{(t)}] = T[\int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} \delta_{(t-\alpha)} d\alpha]$$
$$\overset{7.1}{\Rightarrow} \underset{(\alpha)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \underset{(t)}{T}[x_{(\alpha)} \delta_{(t-\alpha)}] d\alpha = \underset{(\alpha)}{\int_{-\infty}^{\infty}} x_{(\alpha)} \underset{(t)}{T}[\delta_{(t-\alpha)}] d\alpha$$

Definiamo la trasformata nota del $\delta_{(t)}$:



Sollecitando il sistema con una Delta di Dirac ho la sua risposta impulsiva. Nel caso dei sistemi SLS l'impulso in uscita caratterizza completamente il sistema. Nel nostro caso $T[\delta_{(t-\alpha)}]$ non é altro che una traslazione della $T[\delta_{(t)}]$ per la Stazionarietá 7.1:

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha = x_{(t)} \otimes h_{(t)}$$

La trasformata del sistema dipende solo dalla $h_{(t)}$ (risposta impulsiva del sistema). Passando al dominio della frequenza per la propietá della convoluzione 6.4.8:

$$Y_{(f)} = X_{(f)} \otimes H_{(f)}$$

Dove $H_{(f)} = TCF[h_{(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)} e^{-j2\pi ft}$ é la risposta in frequenza del sistema SLS. Esistono vari modi per calcolare $h_{(t)}$:

- Utilizzando un impulso di Dirac e le sue propietá, ma l'impulso di dirac é difficile da realizzare.

- Calcolo $H_{(f)}$ mandanndo in ingresso un segnale del quale sia nota la sua risposta e calcolo il rapporto uscita/ingresso $H_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{X_{(f)}}$
- Mandanndo in ingresso un esponenziale:

$$y_{(t)} = x_{(t)} \otimes h_{(t)},\ x_{(t)} = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t-\alpha)} h_{(t)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\alpha)} e^{j2\pi f_0 (t-\alpha)} d\alpha \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(\alpha)} e^{j2\pi f_0 \alpha} d\alpha = x_{(t)} H_{(f_0)} \end{aligned}$$

$$H_{(f_0)} = \frac{y_{(t)}}{x_{(t)}}$$

  Posso calcolare la risposta in f_0, posso variare la frequenza e calcolare $H_{(f)} = \frac{y_{(t)}}{x_{(t)}}\Big|_{x_{(t)}=e^{j2\pi f t}}$

7.2.1 Risposta in frequenza

La risposta in frequenza $H_{(f)} \in \mathbb{C}$:

$$H_{(f)} = |H_{(f)}| e^{j\angle H_{(f)}}$$

- $|H_{(f)}|$: Risposta in ampiezza
- $\angle H_{(f)}$: Risposta in fase

$$Y_{(f)} = X_{(f)} H_{(f)} = \begin{cases} |Y_{(f)}| & = |X_{(f)}||H_{(f)}| \\ \angle Y_{(f)} & = \angle X_{(f)} + \angle H_{(f)} \end{cases}$$

7.2.2 Sistemi in cascata e in parallelo

- Sistemi in cascata:

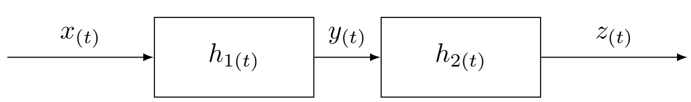


Figure 58: sistemi in cascata

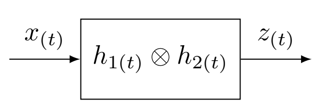


Figure 59: equivalente sistemi in cascata

$$y_{(t)} = x_{(t)} \otimes h_{1(t)}$$
$$z_{(t)} = y_{(t)} \otimes h_{2(t)} = [x_{(t)} \otimes h_{1(t)}] \otimes h_{2(t)} = x_{(t)} \otimes h_{1(t)} \otimes h_{2(t)}$$
$$z_{(t)} = x_{(t)} \otimes h_{(t)}$$

$$\text{Risposta Impulsiva}: h_{(t)} = h_{1(t)} \otimes h_{2(t)}$$

$$\text{Risposta in Frequenza}: H_{(f)} = H_{1(f)} H_{2(f)}$$

- Sistemi in parallelo:

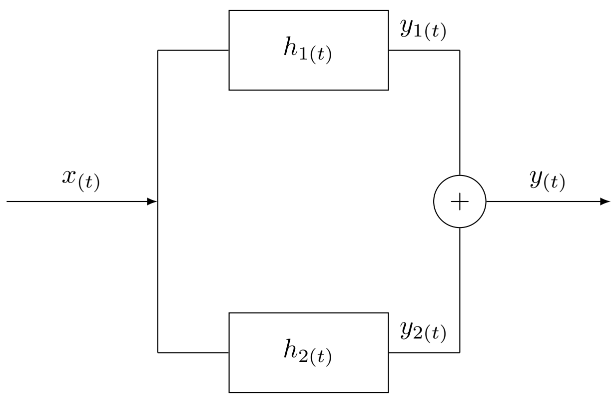


Figure 60: sistemi in cascata

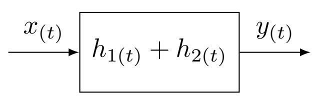


Figure 61: equivalente sistemi in parallelo

$$\begin{aligned} y_{(t)} &= y_{1(t)} \otimes y_{2(t)} = x_{(t)} \otimes h_{1(t)} + x_{(t)} \otimes h_{2(t)} \\ &= x_{(t)} \otimes [h_{1(t)} + h_{2(t)}] = x_{(t)} \otimes h_{(t)} \end{aligned}$$

$$\text{Risposta Impulsiva}: h_{(t)} = h_{1(t)} + h_{2(t)}$$

$$\text{Risposta in Frequenza}: H_{(f)} = H_{1(f)} + H_{2(f)}$$

7.3 Risposta di un sistema causale e risposta impulsiva

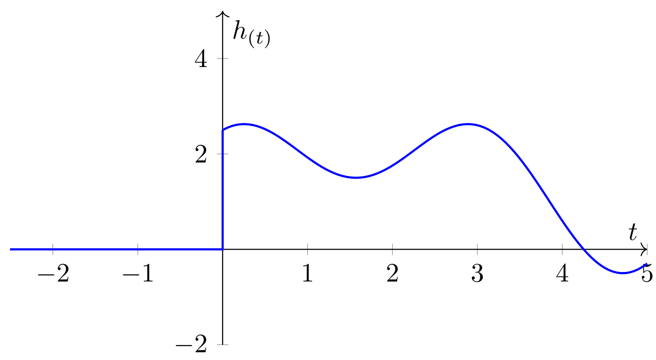


Figure 62: Risposta impulsiva di un sistema

$h_{(t)} = h_{(t)} \cdot u_{(t)}$

$$\begin{aligned} y_{(t)} = x_{(t)} \otimes h_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} u_{(t-\alpha)} d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{t} x_{(\alpha)} h_{(t-\alpha)} d\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

giungiamo all'integrale che definisce la Causalitá 7.1: un sistema é causale se la sua risposta impulsiva é solo definita per $t > 0$.

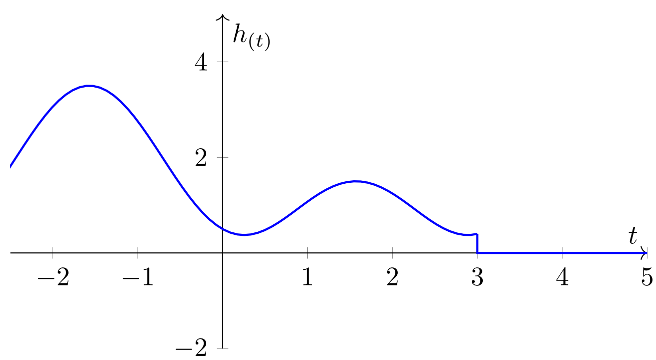


Figure 63: Uscita di un sisetma causale

Dal valore 3 in poi la risposta impulsiva rende il sistema causale.

7.3.1 Stabilitá BIBO su $h_{(t)}$

$$|y_{(t)}| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x_{(\alpha)}h_{(t-\alpha)}d\alpha\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(\alpha)}||h_{(t-\alpha)}|d\alpha$$
$$\leq M\left|\int_{-\infty}^{\infty} h_{(t-\alpha)}d\alpha\right| < K$$

Se l'ingresso $y < M$ allora lo é anche l'uscita. Ne deriva la C.S(Condizione Sufficiente): Assoluta integrabilitá della $h_{(t)}$, se il sistema é bounded anche l'integrale deve esserlo.RICONTROLLA TROVA L CONDIZIONE NECESSARIA SUL LIBRO.

7.4 Filtri Ideali

Banda di un segnale É la porzione di spettro calcolata sul semiasse positivo delle frequenze dove lo spettro é diverso da zero.

$$B = f \cdot H_{(f)} \neq 0, f > 0$$

7.4.1 Filtro Passa Basso di banda B - Low Pass Filter (LP)

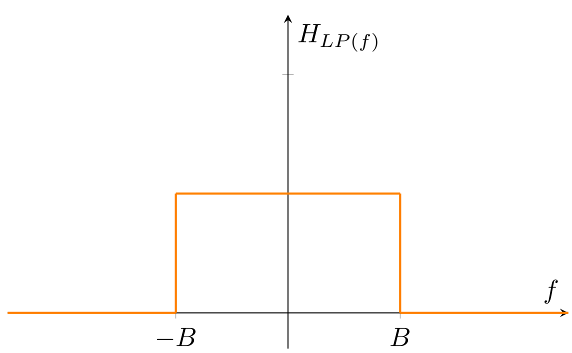


Figure 64: Filtro passa basso ideale: Risposta in frequenza

Risposta in frequenza:

$$H_{LP(f)} \triangleq rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Risposta impulsiva:

$$h_{LP(t)} \triangleq 2Bsinc(2Bt)$$

La risposta impulsiva non é causale, ma posso troncarla e spostarna nel semiasse positivo per renderlo tale, ma non é piú ideale:

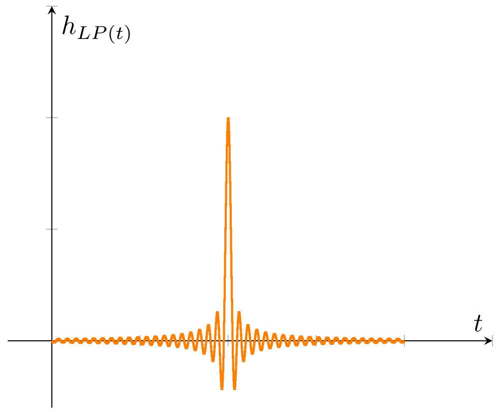


Figure 65: Filtro passa basso causale: risposta impulsiva

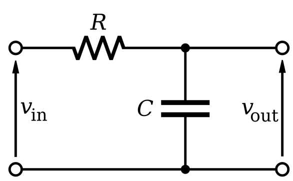


Figure 66: Circuito filtro passa basso ideale

Cricuito Filtro Passa Basso:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = H_{(f)} = \frac{1}{1 + j\,\frac{f}{f_T}},\ f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

Possiamo rappresentare in sacala logaritmica il filtro: $|H_{(f)}|\big|_{db} = 10log\left(\frac{|H_{(f)}|^2}{|H_{(f_0)}|^2}\right)$.
Prendiamo la frequenza di riferimento $f_0 : H_{(f_0)} = 1$

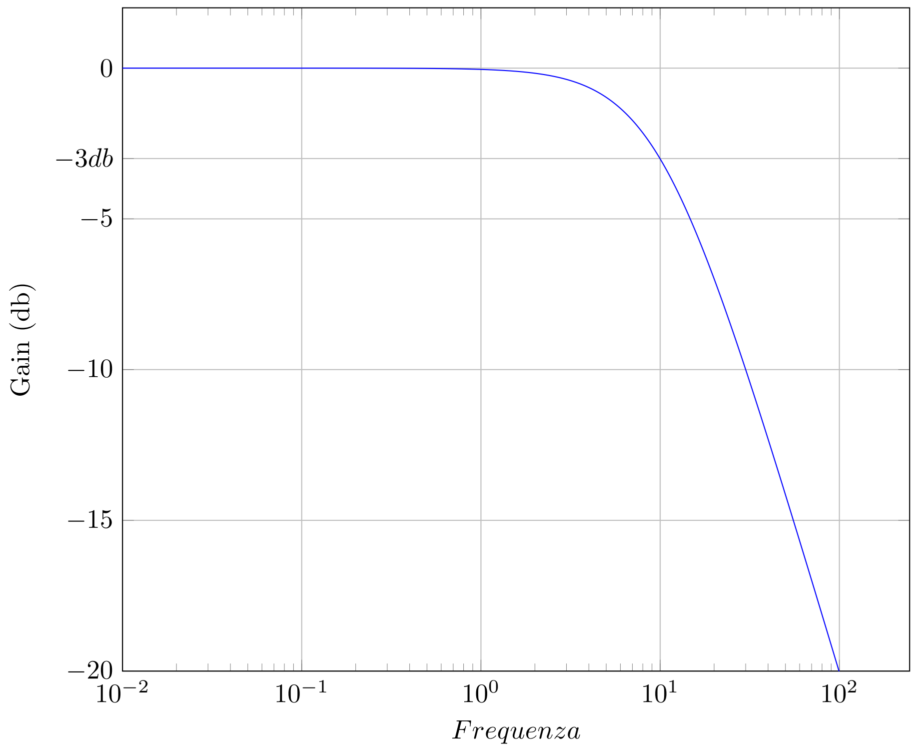


Figure 67: Filtro passa basso ideale in scala logaritmica

Otteniamo la Frequenza di taglio f_T all'ampiezza di $-3db$, in questo caso $f_T = 10$, alla quale il filtro "taglia" o meglio riduce tutte le ampiezze in ingresso verso lo 0.

RIGUARDA SUL LIBRO FORMULA PER IL CALCOLO DI 1/2 PER IL MODULO DI Hf e le formule di risposta dei circuiti, mhh la fase?

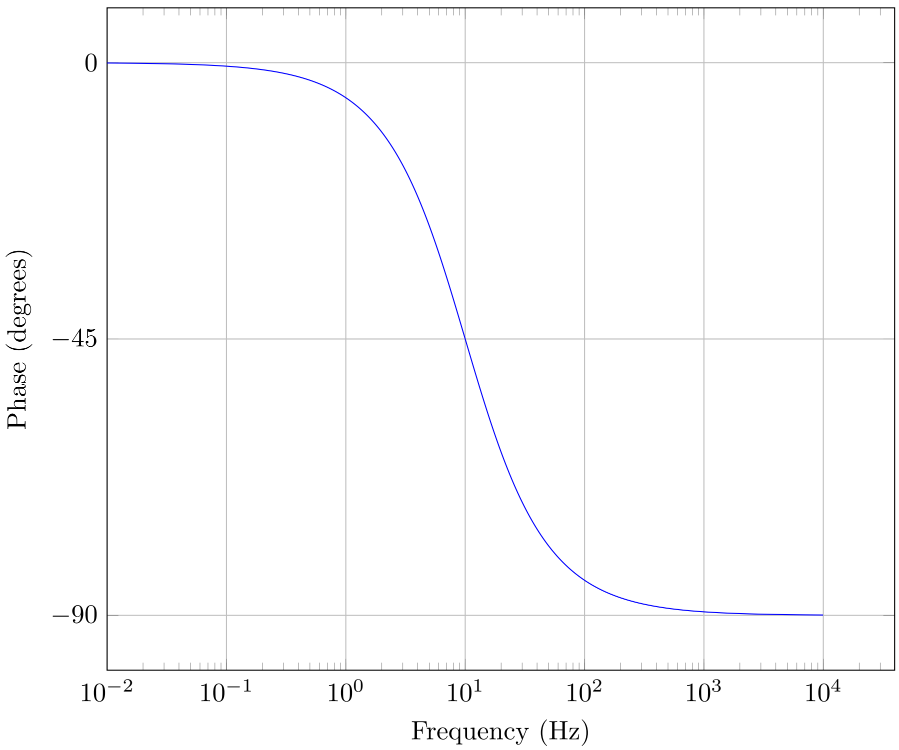


Figure 68: Filtro passa basso ideale fase

Osservazione:

- Al tendere di B a 0 il valore che il filtro fa passare é il valor medio del segnale, tanto da tendere a un filtro LP con spettro $\delta_{(t)}$, ma é difficilmente realizzabile.
- La banda di un filtro é quanto si estende da $0 \to f^+$ fino a arrivare a B,$[0, B]$
- Se il filtro é un filtro BP la banda é l'ampiezza della banda che lascia passare $[f_0 - B, f_0 + B] = B$

7.4.2 Filtro Passa Alto di banda B - High Pass Filter (HP)

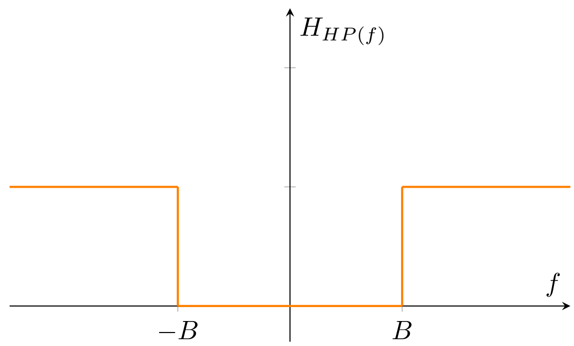


Figure 69: Filtro passa alto ideale: Risposta in frequenza

Risposta in frequenza:

$$H_{HP(f)} \triangleq 1 - rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Risposta impulsiva:

$$h_{HP(t)} \triangleq \delta_{(t)} - 2Bsinc(2Bt)$$

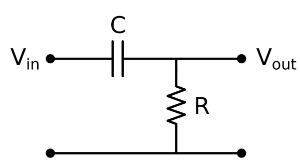


Figure 70: Circuito filtro passa alto ideale

Cricuito Filtro Passa Alto:

$$H_{(f)} = \frac{fRC}{1 + fRC}$$

In scala logaritmica:

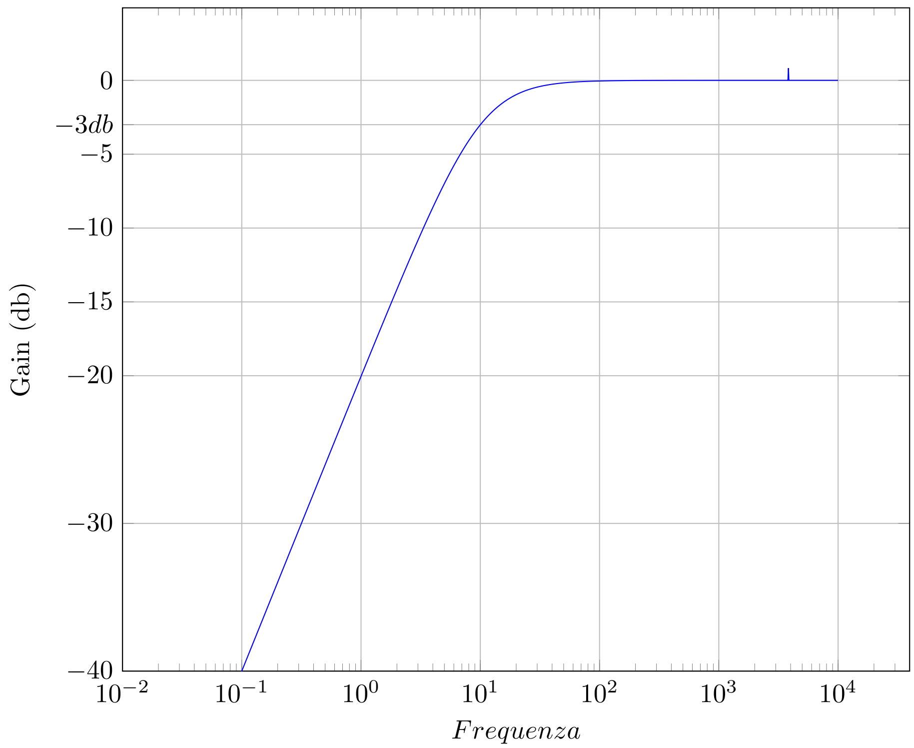


Figure 71: Filtro passa alto ideale in scala logaritmica

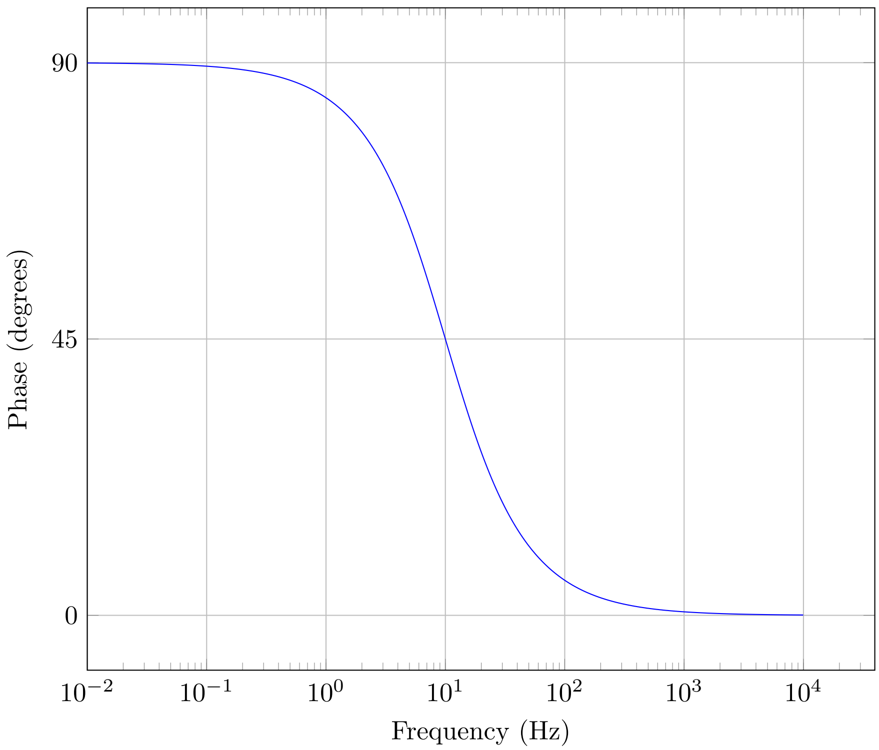


Figure 72: Filtro passa alto ideale fase

Si nota come avendo preso la f_T corrisponde a $RC = 10$.

7.4.3 Filtro Passa Banda di banda B - Band Pass Filter (BP)

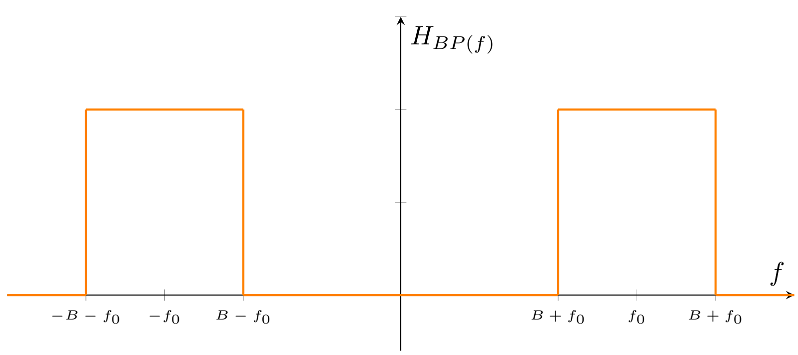


Figure 73: Filtro passa banda ideale: Risposta in frequenza

Risposta in frequenza:

$$H_{BP(f)} \triangleq H_{LP(f+f_0)} + H_{LP(f-f_0)} = rect\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + rect\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)$$

Risposta impulsiva:

$$h_{BP(t)} \triangleq 2Bsinc(2Bt)\cos(2\pi f_0 t) = h_{LP(t)}\cos(2\pi f_0 t)$$

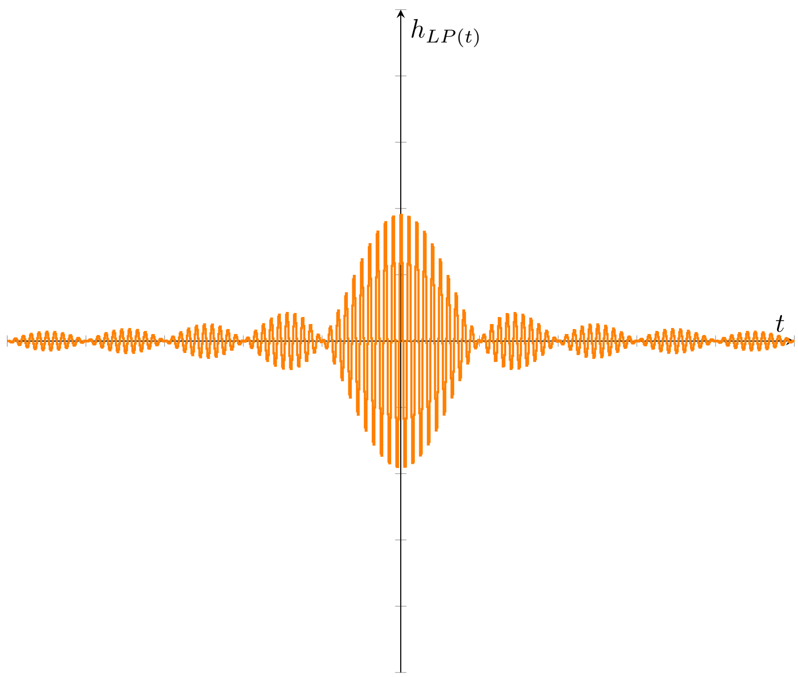


Figure 74: Filtro passa banda: risposta impulsiva

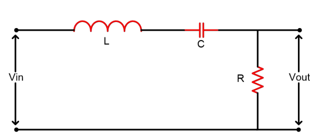


Figure 75: Circuito filtro passa banda ideale

Cricuito Filtro Passa Banda: In scala logaritmica:

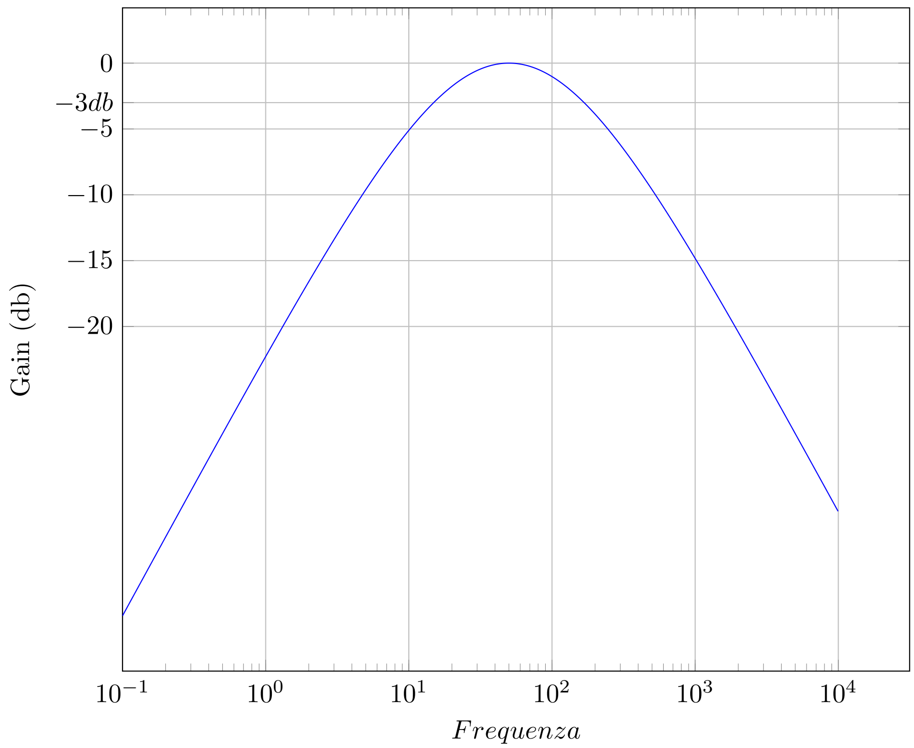


Figure 76: Filtro passa banda ideale in scala logaritmica

Non riesco a fare un grafico con pendenza maggiore ma é per capire che le frequenze sotto il valore di $-3db$ vengono ridotte drasticamente.

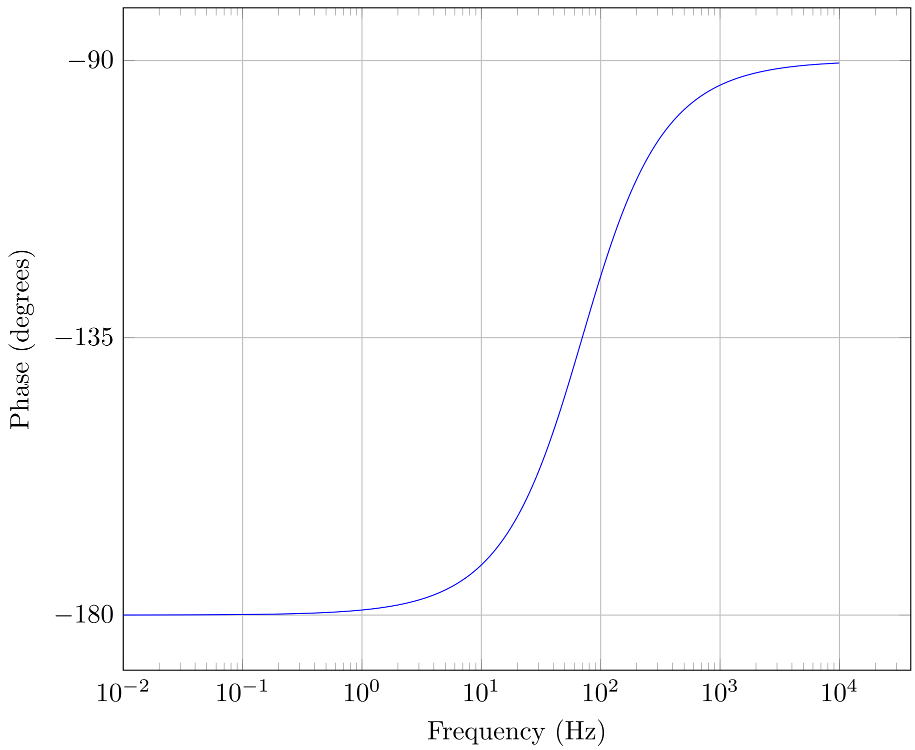


Figure 77: Filtro passa banda ideale fase

7.4.4 Filtro Elimina Banda di banda B - Band Stop Filter (BS)

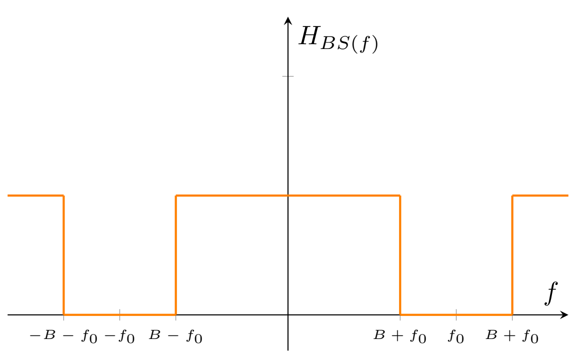


Figure 78: Filtro elimina banda ideale

Risposta in frequenza:

$$H_{BS(f)} \triangleq 1-(H_{BP(f+f_0)}+H_{BP(f-f_0)}) = 1-\left[rect\left(\frac{f-f_0}{2B}\right)+rect\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$$

Risposta impulsiva:

$$h_{BS(t)} \triangleq \delta_{(t)} - h_{BP(t)} = \delta_{(t)} - 2Bsinc(2Bt)\cos(2\pi f_0 t)$$

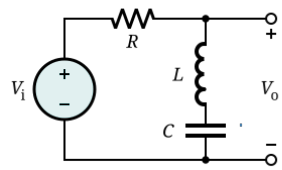


Figure 79: Circuito filtro elimina banda ideale

Cricuito Filtro Elimina Banda:

$$H_{(f)} =$$

In scala logaritmica:

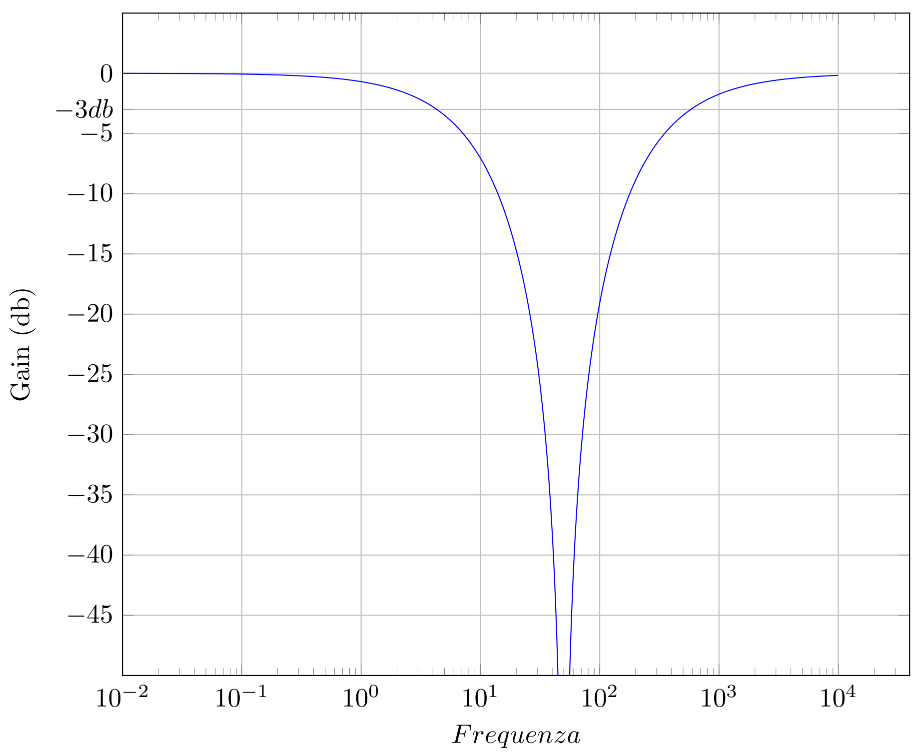


Figure 80: Filtro elimina banda ideale in scala logaritmica

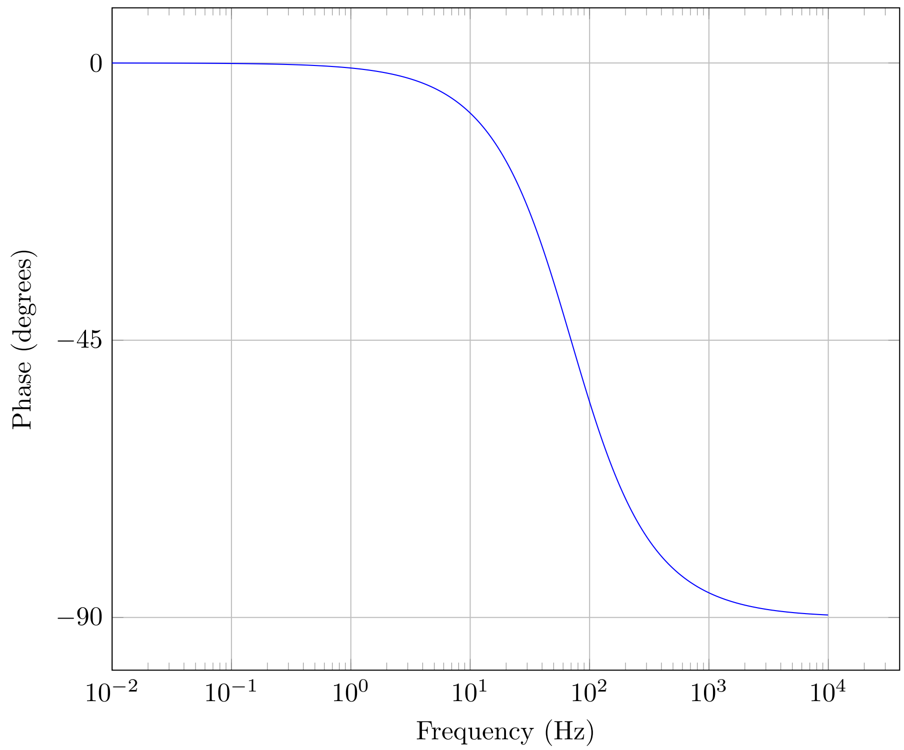


Figure 81: Filtro elimina banda ideale fase

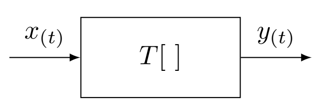
Tutti i filtri possono essere ricavati dal filtro **Low-Pass** 7.4.1 o dal filtro **High-Pass** 7.4.2.

I filtri sono riconducibili a funzioni di trasferimento come quelle viste per il tracciamento di Bode nel corso di fondamenti di automatica.

Sono giusti i grafici di bode? ricontrollare soprattutto la fase

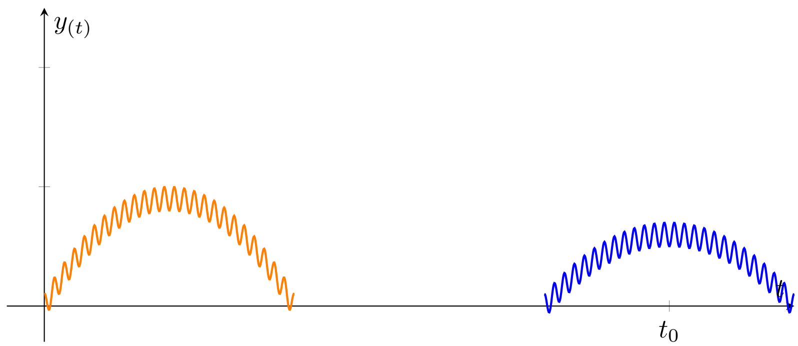
7.4.5 Filtri non distorcenti

Definiamo prima cos'é un sengale non distorto:



$y_{(t)}$ é un segnale non distorto di x se: $y_{(t)} \triangleq kx_{(t-t_0)}$ $k \in \mathbb{R}^+$, cioé finché esso rimane una versione ritardata e/o amplificata del segnale $x_{(t)}$, in frequenza:

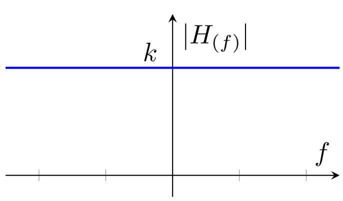
$$Y_{(f)} = kX_{(f)}e^{-j2\pi ft_0}$$



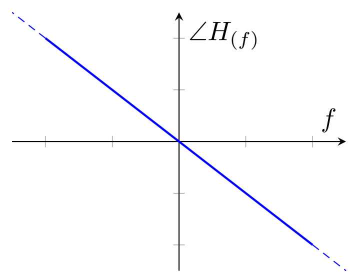
Analisi del filtro non distorcente: Come deve essere realizzato il filtro in modo tale da non distorcere il segnale?

$$y_{(t)} = x_{(t)} \otimes h_{(t)} = kx_{(t-t_0)}$$

Per non essere distorcente la risposta impulsiva del sistema deve essere $k\delta_{(t-t_0)}$ con risposta in frequenza: $H_{(f)} = ke^{-j2\pi f t_0}$



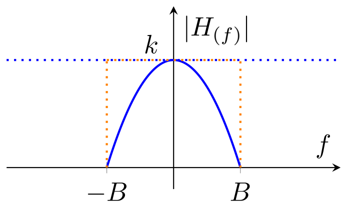
(a) Ampiezza con ritardo



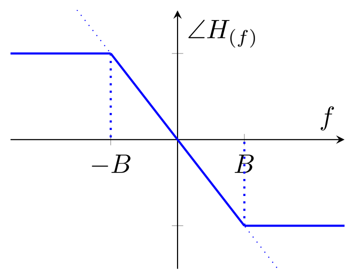
(b) Fase con ritardo

Figure 82: Spettro filtro non distorcente

Avere un tale filtro per tutti i segnali é molto restringente, ci basta che il nostro filtro sia non distorcente nella banda che ci interessa.



(a) Ampiezza con ritardo



(b) Fase con ritardo

Figure 83: Spettro filtro non distorcente limitato alla banda B

Il filtro ci basta che sia qualcosa che si avvicini a una *rect* ad esempio un coseno rialzato 3

7.5 Th. di Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_{(f)}|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x(f)} df$$

$S_{x(f)} = |X_{(f)}|^2$ é la densitá spettrale di energia del segnale, ci mostra come l'energia é distribuita nello spettro.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} x^{\star}_{(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{j2\pi ft} df \right]^{\star} dt \\ &= \underset{(t)}{\int_{-\infty}^{\infty}} x_{(t)} \underset{(f)}{\int_{-\infty}^{\infty}} X^{\star}_{(f)} e^{-j2\pi ft} df dt = \underset{(f)}{\int_{-\infty}^{\infty}} X^{\star}_{(f)} \underset{(t)}{\int_{-\infty}^{\infty}} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^{\star}_{(f)} X_{(f)} df = \int_{-\infty}^{\infty} |X_{(f)}|^2 df \end{aligned}$$

Come capisco quanta % del segnale sto buttando?

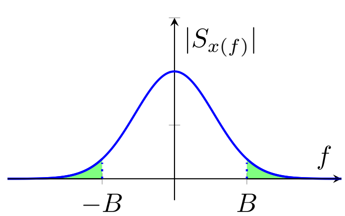


Figure 84: Spettro $S_{x(f)}$

La parte verde é l'energia del segnale che perdiamo troncandolo con banda B

7.6 Funzione di Correlazione - Segnali Aperiodici

$$C_{xy} = R_{xy(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} y^{\star}_{(t-\tau)} dt$$

D: me quindi é C o R?

7.7 Funzione di Autocorrelazione

$$C_x = R_{x(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} x^{\star}_{(t-\tau)} dt$$

Misura la correlazione del segnale con se stesso.

7.7.1 Propietá Autocorrelazione

- $R_{x(0)} = E_x$

$$R_{x(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} x^{\star}_{(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2 dt = E_x$$

- Simmetria Hermitiana:
$$R_{x(-\tau)} = R^{\star}_{x(\tau)}$$

- TCF Autocorrelazione:
$$R_{x(\tau)} \underset{ATCF}{\overset{TCF}{\rightleftharpoons}} S_{x(f)}$$

  Posso calcolare la densitá spettrale di energia dall'autocorrelazione.

8 Teoria Dei Codici

8.1 Introduzione

Ci concentriamo adesso sul trattamento dell'informazione per poterla trasmettere. I messaggi che trasmettiamo possono essere codificati per vari motivi:

- Compressione: $\begin{cases} \text{Lossy: con perdita dell'informazione} \\ \text{Lossless: minima perdita dell'informazione} \end{cases}$
  Comprimere l'informazione in elimenando ridondanza e salvando spazio di memoria e banda.

- Crittografia: per nascondere il messaggio ad utenti in ascolto sul canale che non siano il destinatario.

- Rivelazione o correzione di errore: vieen aggiunta ridondanza ad hoc per aumentare l'affidabilitá del messaggio trasmesso. Si utilizzano checksum o Reed-Solomon(RS)

Capacitá del canale La capacitá del canale C indica la massima quantitá d'informazione che puó essere trasmessain maniera affidabile su di un dato canale. La capacitá dipende dalla banda B del canale e dal rapporto segnale rumore (signal-to-noise ratio,SNR):

$$C = B \log(1 + SNR)$$

Canale Gaussiano Il canale Gaussiano puó essere modellato come Binary Symmetric Channel (BSC) con probabilitá di errore p. Assumiamo gli errori tra loro indipendenti ($p_{(a,b)} = p_{(a)} \cdot p_{(b)}$):

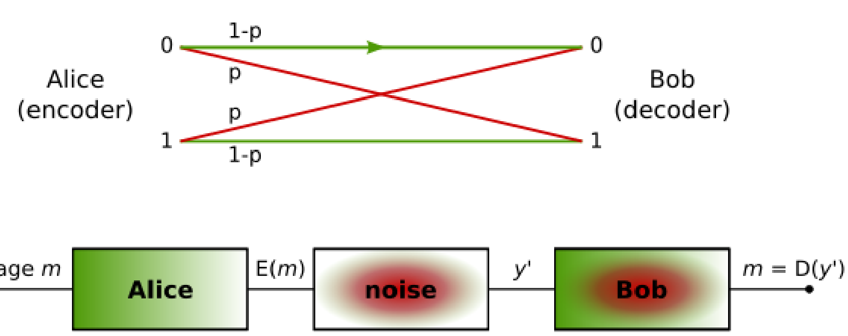


Figure 85: Sistema di trasmissione BSC

$$E_{(x)} : \text{Funzione di codifica}$$
$$D_{(x)} : \text{Funzione di decodifica}$$
$$E_{(m)} : \text{Bit dell'informazione codificati}$$
$$y' : E_{(m)} + e \rightarrow \text{Informazioni con errore del canale}$$
$$m = D_{(y')} : \text{Informazione decodificata}$$

Il canale é chiamato simmetrico perché ho la stessa probabilitá errore sulla trasmissione di uno dei due bit. Se X é il bit inviato e Y quello ricevutoallora il canale é caratterizzato dalle probabilitá:

$$P(Y = 0|X = 0) = 1 - p$$
$$P(Y = 0|X = 1) = p$$
$$P(Y = 1|X = 0) = p$$
$$P(Y = 1|X = 1) = 1 - p$$

Assumiamo che $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, se avessimo $p > \frac{1}{2}$ il ricevitore potrebbe scambiare l'informazione ricevuta (Quando riceve un 1 lo interpreta come 0 e viceversa) e ottenere un canale con probabilitá $1 - p \leq \frac{1}{2}$.

Nel corso useremo delle simbologie diverse:

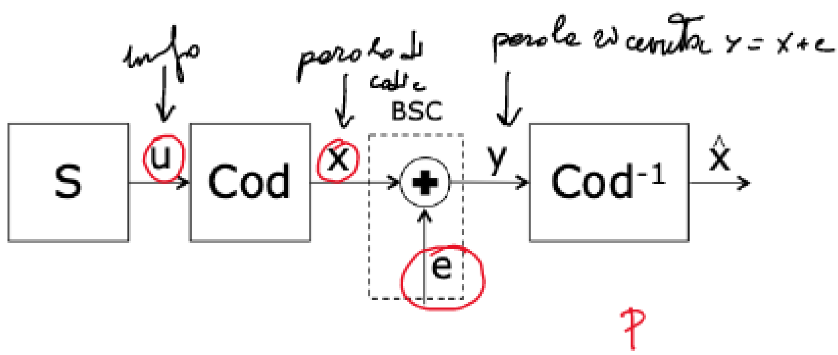


Figure 86: Sistema di trasmissione BSC

$$u : \text{Informazione}$$
$$x : \text{Parole di Codice}$$
$$e : \text{Errore del Canale}$$
$$y : x + e \rightarrow \text{Informazioni con errore del canale}$$
$$\hat{x} : \text{Informazione decodificata}$$

Probabilitá di errore BSC La probabilitá, per una trasmissione BSC, di sbagliare t bit in una parola di n bit:

$$p_{(t,n)} = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{(n-t)}$$

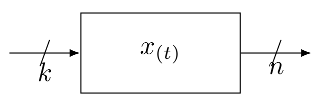
dove il coefficente binomiale:

$$\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

indica tutte le possibili combinazioni di errori di t bit su n bit.

Tassonomia dei codici

- Codici lineari
  - Codici a blocco
  - Codici convoluzionali
- Definizione di un codice a blocco:

  Rate del Codice :

  $$R = \frac{k}{n}$$

  La condizione é che $n > k$ senon fosse cosí avrei perdita d'informazione, da k bit passo a n aggiungendo ridondanza e codificando i miei dati. Possiamo quindi stimare il valore tipico di R

  $$R = \frac{k}{n} < 1$$

- Rivelazione di errore: Consiste nella capacità di scoprire la presenza di errori causati dal rumore o da altri fenomeni deterioranti durante una trasmissione di dati (es. tramite il bit di paritá).
- Correzione di errore: Consiste invece nell'ulteriore abilità di ricostruire i dati originali, eliminando gli errori occorsi durante la trasmissione. Vi sono due differenti schemi di base per la progettazione della codifica di canale e del protocollo per un sistema che corregge gli errori:
  - ??Automatic repeat-request (ARQ): Il mittente invia i dati ed anche un codice a rilevazione d'errore, che sarà utilizzato in ricezione per individuare gli eventuali errori, ed in tal caso chiedere la ritrasmissione dei dati corrotti. In molti casi la richiesta è implicita; il destinatario invia un acknowledgement (ACK) di corretta ricezione dei dati, ed il mittente re-invia solo quei dati per i quali non ha ricevuto, entro un prefissato tempo limite (timeout), il corrispondente ACK.

– ??Forward Error Correction (FEC): Il mittente codifica i dati con un codice a correzione d'errore (error correction code, ECC) ed invia il messaggio codificato. Il destinatario non invia mai alcun messaggio verso il mittente; esso decodifica ciò che riceve nella maniera più simile possibile a quella di un certo insieme prefissato di parole accettabili. Tali codici sono realizzati in modo tale che dovrebbe occorrere una quantità "irragionevole" di errori nei dati, affinché il destinatario decodifichi erroneamente, ottenendo finalmente dei dati diversi da quelli effettivamente inviatigli.

In generale un codice a blocco che ha rate $\frac{k}{n}$ mappa k bit su n bit usando 2^k parole di codice di dimensione n

8.1.1 Esempio codici a blocco: codici a ripetizione

É un esempio di codice a correzione d'errore: il funzionamento si basa sulal ripetizione dell'informazione piú volte. Il destinatario si accorge di un errore di trasmissione poiché il flusso di dati ricevuto non è la ripetizione di un singolo messaggio e, inoltre, il destinatario può recuperare il messaggio originale guardando il messaggio ricevuto nel flusso di dati che si verifica più spesso.

Nel caso di un codice binario di ripetizione, esistono due parole in codice - tutte uno e tutti zeri - che hanno una lunghezza n. Pertanto, la distanza minima di Hamming (8.2.5) del codice è uguale alla sua lunghezza. Ciò conferisce al codice di ripetizione, con $R = \frac{1}{n}$,una capacità di rivelazione di errori pari a $n-1$ e correzione degli errori (cioè correggerà fino agli errori in qualsiasi parola del codice) di $\frac{n-1}{2}$ per n dispari(8.1).
Esempio:

$R = \frac{1}{3} \rightarrow$ ha solo 2 parole di codice:

$$u = 0 \rightarrow x = [000]$$
$$u = 1 \rightarrow x = [111]$$

Il ricevitore effettua una decodifica a maggioranza: decideper il bitche comprare nella maggioranzadalle posizionidella parola ricevuta.

$$y = [000] \rightarrow \hat{x} = [000] \rightarrow \hat{u} = 0$$
$$y = [010] \rightarrow \hat{x} = [000] \rightarrow \hat{u} = 0$$
$$y = [101] \rightarrow \hat{x} = [111] \rightarrow \hat{u} = 1$$

8.1.2 Esempio codici a blocco: codici a controllo di paritá

8.1.3 Esempio codici a blocco: codice ISBN

8.2 Codici a blocco

8.2.1 Introduzione ai codici lineari

Definizione di campo

8.2.2 Campi di Galois

8.2.3 Codici a blocco lineari su $GF(2)$

n¿k perché nei codici io metto cose in piú che magari non mi servono amplio le cose.

8.2.4 Propietá dei codici a blocco lineari

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

8.2.5 Distanza di Hamming

Peso di hamming. distanza minima di un codice

8.2.6 Codici a blocco in forma sistematica

- 1 matrici che generano codici equivalenti
- 2 qualsiasi codice lineare a blocchi é equivalente a un codice in forma sistematica
- 3
- 4
- 5
- 6 codici equivalenti

se non é una parola di codice la matrice H ci informa con un vaolre 1 nel prodottod

9 Formulario

9.1 Trigonometria

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $\cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
3. $\sin(\alpha) = \pm\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
4. $sinc(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ É un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi : k \in \mathbb{Z}$

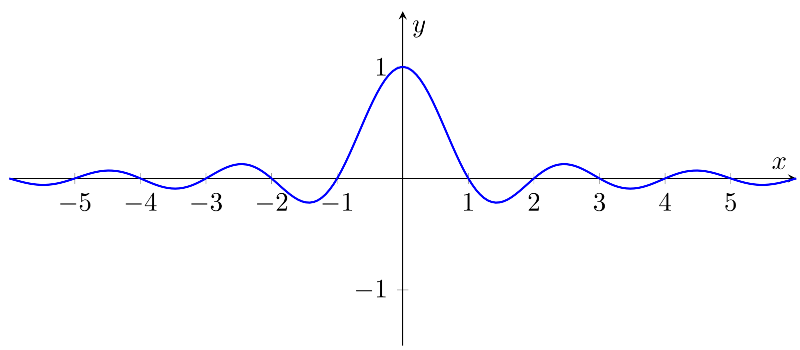


Figure 87: grafico $sinc(\alpha)$

9.1.1 Formule di addizione

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

9.1.2 Formule di duplicazione

1. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) \begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ 1 - 2\sin^2(\alpha) \end{cases}$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

9.1.3 Formule di bisezione

1. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

2. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$

3. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \\ \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases}$

9.2 Segnali Notevoli

1. $x_R \triangleq A\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \qquad T = durata$

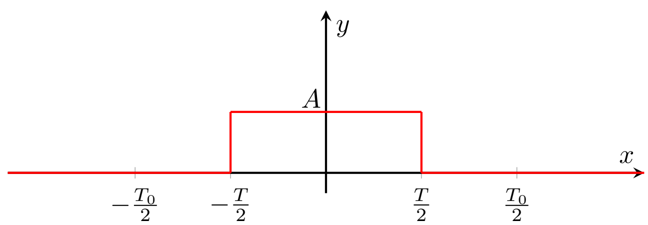


Figure 88: Rappresentazione di $A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$

2. $sinc(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$
   É un $\sin(\alpha)$ smorzato secondo $\frac{1}{x}$ che si annulla in $k\pi : k \in \mathbb{Z}$

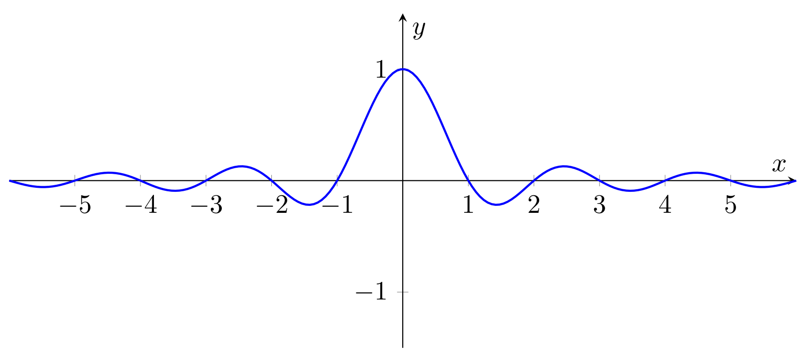


Figure 89: grafico $sinc(\alpha)$

La banda di una sinc é l'intervallo in cui si annulla $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$,es: se $banda = 1\ se\ T = 1$

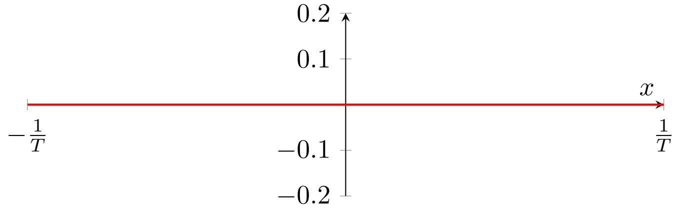


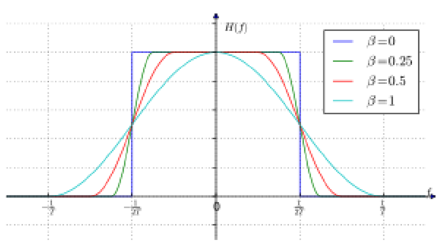
Figure 90: banda

3. Filtro a Coseno Rialzato

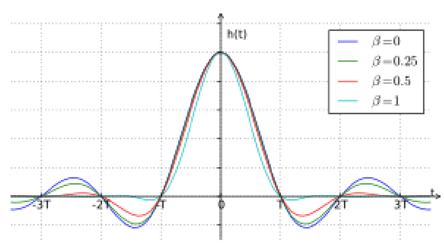
$$H_{(f)} = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2}\left[1 + cos\left(\frac{\pi T}{\beta}\left[|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right]\right)\right], \frac{1-\beta}{2T} & < |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$0 \leq \beta \leq 1$

$$h_{(t)} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} sinc\left(\frac{1}{2\beta}\right) & t = \pm\frac{T}{2\beta} \\ sinc\left(\frac{t}{T}\right)\frac{cos\left(\frac{\pi\beta t}{T}\right)}{1-\left(\frac{2\beta t}{T}\right)^2} & altrove \end{cases}$$



(a) $H_{(f)}$



(b) $h_{(t)}$

4.

9.3 Grandezze Fisiche

- Hertz

9.4 Varie

- Calcolo della TCF su MATLAB:
  $X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi ft} dt$
  MATLAB calcola un'approssimazione dell'integrale della TCF con un periodo T:

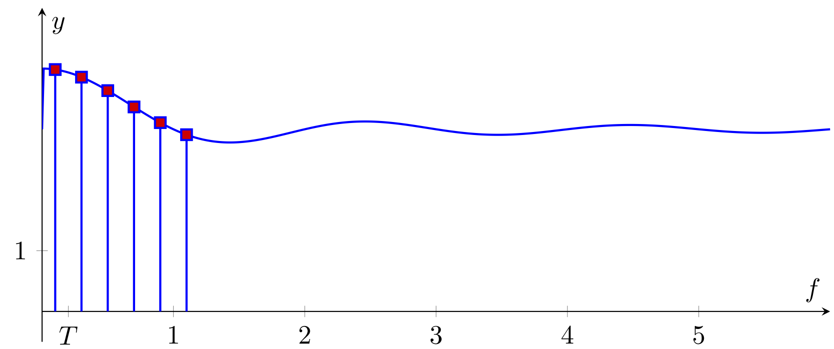


Figure 91: Campionamento MATLAB

$$X_{(f)} \cong T \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi f nT}$$

Ma nella f é una variabile continua, quindi a sua volta bisogna variare f:

$$X_{(fk)} = X_{(k\Delta f)} = \sum_n x_{(nT)} e^{-j2\pi \Delta f nT} T$$

e la condizione sul Δf é che $\Delta f << BB$.

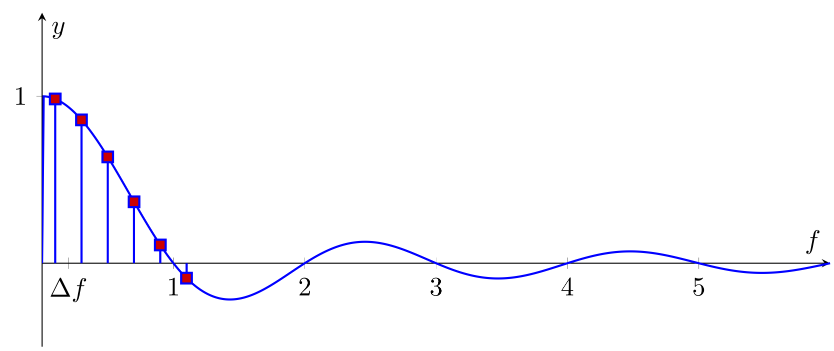


Figure 92: Δf

Si puó utilizzare anche la FFT = Fast Fourier Transform

- Scala Logarimica: $x\Big|_{db} = 10 log_{10}(x)$

x	db
2	3
4	6
8	9
10	10
1	0
100	20
200	23
50	17

Possiamo calcolare :

- $100\big|_{db} = 10log_{10}(100) = 10log_{10}(10 \cdot 10) = 10log_{10}(10) + 10log_{10}(10) = 20db$
- $200\big|_{db} = 10log_{10}(100 \cdot 2) = 10log_{10}(100) + 10log_{10}(2) = 23db$
- $50\big|_{db} = 10log_{10}(10 \cdot 5) = 10log_{10}(10) + 10log_{10}(5) = 17db$

Indice Alfabetico