

# Oscillazioni di un corpo sospeso vincolato ad una molla

Marco Malucchi

23 maggio 2023

## Obiettivo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperimento era quello di stimare l'accelerazione di gravità attraverso lo studio delle oscillazioni di un corpo vincolato ad una molla e sospeso in verticale.

## 1 Cenni teorici.

La dinamica del sistema sotto osservazione, nel caso più semplice che si possa studiare, è descritta attraverso la prima equazione cardinale nel seguente modo:

$$m\ddot{y} = -k(y - l_0) + mg \quad (1)$$

Dove  $m$  è la massa dell'oggetto collegato alla molla e  $k$  è la costante elastica di quest'ultima, mentre  $l_0$  è la lunghezza a riposo della molla. Si noti che la prima cardinale è stata impostata utilizzando un sistema di assi coordinati con l'asse delle ordinate rivolto verso il basso e con origine, nel nostro caso, nel punto di sospensione della molla. Nel caso in esame però il sistema è più complesso di così, in quanto la massa della molla (che nel caso precedente viene supposta trascurabile) deve essere considerata, quindi l'equazione differenziale che si ricaverà sarà a sua volta più complessa, ma dalla risoluzione di quest'ultima si può ottenere la formula che lega il periodo di oscillazione del corpo alla sua massa e alla massa della molla:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_m}{3}}{k}} \quad (2)$$

Nell'esperimento svolto però, si è utilizzato un supporto particolare per fissare le masse all'estremità libera della molla e si è preferito, quindi, inserire al numeratore della frazione sotto radice nella (2) un parametro additivo diverso rispetto a quello già presente, chiamato  $M$ , che includesse al suo interno sia il coefficiente della massa della molla, che la massa di tutte le altre componenti del supporto, in questo modo si è ottenuta la seguente relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{k}} \quad (3)$$

Infatti, la massa del supporto in generale dovrebbe andarsi a sommare con la massa del corpo che oscilla nel seguente modo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_s + \frac{m_m}{3}}{k}}$$

dove  $m_s$  è la massa del supporto.

Ovviamente, però, per la proprietà associativa della somma si ottiene la relazione (3).

## 2 Set-up sperimentale.

Come mostrato in fig. 1, il set up sperimentale è composto da una molla il cui estremo superiore è fissato ad un supporto rigido fissato alla parete, mentre all'estremo libero, inferiore, della molla, è fissato il supporto delle masse.



Figura 1: set-up sperimentale

In questo caso il supporto per le masse era costituito da un bullone sul quale venivano infilati dei dadi

che costituivano l'intera massa del corpo di cui si dovevano studiare le oscillazioni, chiaramente la massa dei dadi è stata precedentemente misurata in modo da modulare quella del corpo risultante aggiungendo o togliendo dadi. Inoltre i dadi non erano avvitati sul bullone dato che il loro raggio interno era maggiore di quello della vite, per cui, onde evitare che questi potessero muoversi trasversalmente rispetto all'asse del bullone, si sono utilizzate due rondelle, poste rispettivamente sul fondo e sulla cima della serie di dadi come mostrato in figura, che sono state strette con un ulteriore dado più piccolo che veniva avvitato sul bullone. Infine si è utilizzato un altro dado, più lungo degli altri, per fissare il bullone di supporto sopra descritto, ad un altro bulloncino sul quale era saldato un gancio che si collegava direttamente alla molla. Del sistema così assemblato si sono misurate le oscillazioni e le rispettive posizioni di equilibrio.

### 3 Misure effettuate.

Si sono effettuate le misure delle masse dei singoli dadi, dei periodi di oscillazione e delle posizioni di equilibrio. Di seguito vengono descritte brevemente le modalità con cui queste misure sono state effettuate.

#### 3.1 Misure delle masse

Le masse dei dadi sono state precedentemente determinate e sono stati ottenuti i seguenti valori:

Misure		
$m_1$	$9.1 \pm 0.3$	[g]
$m_2$	$9.8 \pm 0.3$	[g]
$m_3$	$8.9 \pm 0.3$	[g]
$m_4$	$9.9 \pm 0.3$	[g]
$m_5$	$8.3 \pm 0.3$	[g]
$m_6$	$10.0 \pm 0.3$	[g]
$m_7$	$9.2 \pm 0.3$	[g]
$m_8$	$10.2 \pm 0.3$	[g]

Tabella 1: Masse dei dadi

Si sono utilizzate 7 configurazioni diverse delle masse sul supporto, iniziando da tutte ed 8 le masse e togliendo di volta in volta una massa, fino ad arrivare ad avere sul supporto soltanto  $m_1$  ed  $m_2$ , le masse risultanti ottenute dalle varie configurazioni sono riportate nella successiva tabella 3.2.

#### 3.2 Misure delle posizioni di equilibrio

Le posizioni di equilibrio sono state misurate utilizzando un metro a nastro con risoluzione strumentale

di 1mm, ponendo la cima della fettuccia del metro a contatto con la parte inferiore del supporto fisso ed allungando il metro fino alla parte inferiore del bulloncino di supporto. Le misure ottenute sono riportate nella tabella 3.2, dove le incertezze di misura, per le posizioni di equilibrio, sono state ottenute dividendo la risoluzione strumentale per  $\sqrt{12}$ .

Masse	$y_{eq}$
$(754 \pm 8) \cdot 10^{-4}$ [kg]	$(2850 \pm 3) \cdot 10^{-4}$ [m]
$(652 \pm 8) \cdot 10^{-4}$ [kg]	$(2780 \pm 3) \cdot 10^{-4}$ [m]
$(560 \pm 7) \cdot 10^{-4}$ [kg]	$(2700 \pm 3) \cdot 10^{-4}$ [m]
$(460 \pm 7) \cdot 10^{-4}$ [kg]	$(2620 \pm 3) \cdot 10^{-4}$ [m]
$(377 \pm 6) \cdot 10^{-4}$ [kg]	$(2550 \pm 3) \cdot 10^{-4}$ [m]
$(278 \pm 5) \cdot 10^{-4}$ [kg]	$(2480 \pm 3) \cdot 10^{-4}$ [m]
$(189 \pm 4) \cdot 10^{-4}$ [kg]	$(2400 \pm 3) \cdot 10^{-4}$ [m]

Tabella 2: Masse e posizioni di equilibrio

#### 3.3 Misure dei periodi.

Per ogni configurazione dei dadi si sono misurati 20 periodi di oscillazione per 20 volte utilizzando il cronometro interno di del hardware Arduino abbinato ad un semplice pulsante manuale.

Dei venti valori misurati si è calcolata la deviazione standard con l'ausilio della libreria numpy di python e poi si è divisa per 20, pari al numero di periodi misurati e per  $\sqrt{20}$  pari alla radice del numero di misure effettuate per ogni configurazione; la stessa cosa si è fatta per i valori centrali delle misure, dei quali è stata calcolata la media campione per ogni configurazione delle masse, per poi dividerla per 20.

In questo modo si è ridotto l'effetto dovuto al tempo di reazione dell'operatore di un fattore 20 e si è anche ridotta l'incertezza associata alle misure dei periodi di un fattore di circa 4.5.

I valori ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

Valori centrali		
$T_1$	$(6982 \pm 8) \cdot 10^{-4}$	[s]
$T_2$	$(6770 \pm 8) \cdot 10^{-4}$	[s]
$T_3$	$(6529 \pm 7) \cdot 10^{-4}$	[s]
$T_4$	$(6270 \pm 5) \cdot 10^{-4}$	[s]
$T_5$	$(6055 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[s]
$T_6$	$(5780 \pm 5) \cdot 10^{-4}$	[s]
$T_7$	$(554 \pm 2) \cdot 10^{-3}$	[s]

Tabella 3: Misure dei periodi

### 4 Analisi dati.

Si sono eseguiti due fit diversi, il primo con il modello (3) ed il secondo con il modello (1).

Con il primo si è ottenuta una stima della costante elastica della molla e con il secondo si è trovata la stima di  $g$ .

Per il fit con il modello dei periodi, si è utilizzato il metodo di fit dell'orthogonal distance regression, in quanto, nonostante le misure dei periodi fossere tutte indipendenti e distribuite gaussianamente, la condizione per le incertezze sulla variabile indipendente, cioè sulle masse:

$$\left| \frac{df}{dm}(m_i; \hat{M}, \hat{k}) \right| \sigma_m \ll \sigma_T \quad (4)$$

non era rispettata.

I valori ottenuti dal fit per  $M$  e  $k$  sono i seguenti:

- $k = 12.2 \pm 0.2 \text{ [N/m]}$
- $M = 0.0755 \pm 0.002 \text{ [kg]}$

Per quanto riguarda  $M$ , si vede che il valore ottenuto è compatibile con quello misurato, in quanto precedentemente alla fase di fit, si è misurata la massa del supporto assieme a quella della molla con una bilancia digitale con risoluzione di un 1g ottenendo il valore di  $76 \pm 0.3 \text{ [g]}$ .

Invece il chi quadro ottenuto è il seguente:

$$\chi^2 \approx 1.5 \quad (5)$$

mentre, il  $\chi^2$  che ci si aspetta in media sarebbe:  $\chi^2 = 5 \pm 3$ , quindi si vede che il chi quadro ottenuto è fuori di una sigma di circa 0.5, inoltre il valore del p-value calcolato è circa:

$$p\text{-value} \approx 0.08 \quad (6)$$

Se il valore del p-value fosse stato compatibile con il valore corrispondente alle 5 sigma di distanza dalla media, allora si sarebbe potuto dire che effettivamente il fit eseguito è un cattivo fit, ma con un p-value nell'ordine dell' 8% non abbiamo nessun elemento per poter dire che il lavoro svolto è scorretto o incosistente, quindi non si ha nessun elemento per rigettare la validità dei risultati ottenuti.

Di seguito si riporta il grafico di fit ed il grafico dei residui ottenuti, quest'ultimo eseguito utilizzando le incertezze efficaci ottenute propagando l'errore sulla variabile indipendente sulla variabile dipendente secondo la formula:

$$\sigma_{eff} = \sigma_T^2 + \left( \frac{df}{dm}(m; \hat{k}, \hat{M}) \right)^2 \cdot (\sigma_m)^2 \quad (7)$$

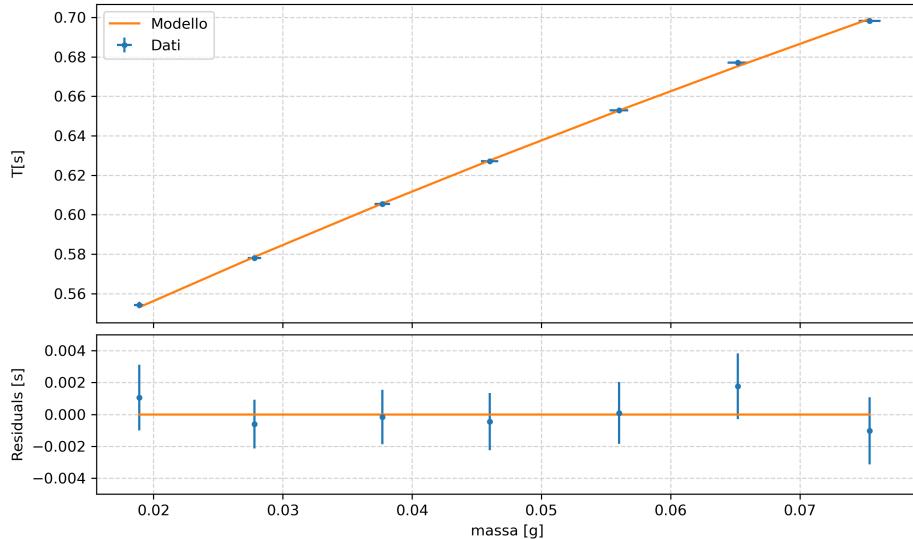


Figura 2: fit e residui periodi-massa

Dal grafico dei residui si vede che tutte le misure prese toccano con le loro barre d'errore il modello, in particolare tre ne stanno al di sotto e due al di sopra, mentre altre due sono vi sono particolarmente vicine in termini delle loro barre d'errore, in particolare una sta al di sopra e l'altra al di sotto del modello, quindi

in termini statistici i punti sperimentali si dispongono attorno la modello seguendo fluttuazioni del tutto casuali come ci si aspetterebbe. Resta comunque il fatto che con pochi punti è complicato riuscire ad individuare particolari effetti sistematici, che magari hanno un effetto lieve sulle misure effettuate.

Per quanto riguarda, invece, il secondo fit con la legge di hooke, dall'equazione (1) si è esplicitata la posizione di equilibrio in funzione della massa (utilizzando, ovviamente, la prima equazione cardinale nella posizione di equilibrio, quindi ponendo  $\ddot{y} = 0$ ), ottenendo dunque il secondo modello:

$$y_{eq} = m \frac{g}{k} + l_0 \quad (8)$$

La lunghezza di riposo e il rapporto  $\frac{g}{k}$  sono stati utilizzati come parametri di fit, con l'idea che il primo potesse essere utile per avere una valutazione della bontà del fit a posteriori ed il secondo moltiplicato per il valore di best-fit di  $k$  potessi darci la stima dell'accelerazione di gravità  $g$ .

Anche in questo caso si è utilizzato il metodo di *orthogonal distance regression* per eseguire il fit visto che i punti sperimentali non rispettavano la condizione (4) e si sono ottenuti i seguenti valori di best-fit e del  $\chi^2$ :

- $l_0 = 225.1 \pm 0.5 \text{ [mm]}$

- $\frac{g}{k} = 1.25 \pm 0.01 \text{ [m/kg]}$

- $\chi^2 \approx 3.47$

Ora, la lunghezza a riposo della molla (considerando ovviamente anche la massa del supporto dei dadi) era  $l_0 = 226 \pm 1 \text{ [mm]}$  che è compatibile con il valore ottenuto dal fit, inoltre per quanto riguarda il chi quadro, bisogna tenere presente il fatto che le misure della posizione di equilibrio sono distribuite uniformemente, per cui la varianza del  $\chi^2$  non è più  $2v$ , ma bensì  $\frac{4}{5}v$ , che quindi per un chi quadro a cinque gradi di libertà è 2, dunque il nostro  $\chi^2$  è dentro una sigma dal valor medio, per cui non abbiamo elementi per rigettare i risultati del nostro fit.

Per completezza il p-value ottenuto dal fit è circa:  $p - value \approx 0.37$ , quindi nell'ordine del 40%.

Di seguito si riporta nuovamente il grafico di fit assieme al grafico dei residui ottenuto con le incertezze efficaci secondo la (7):

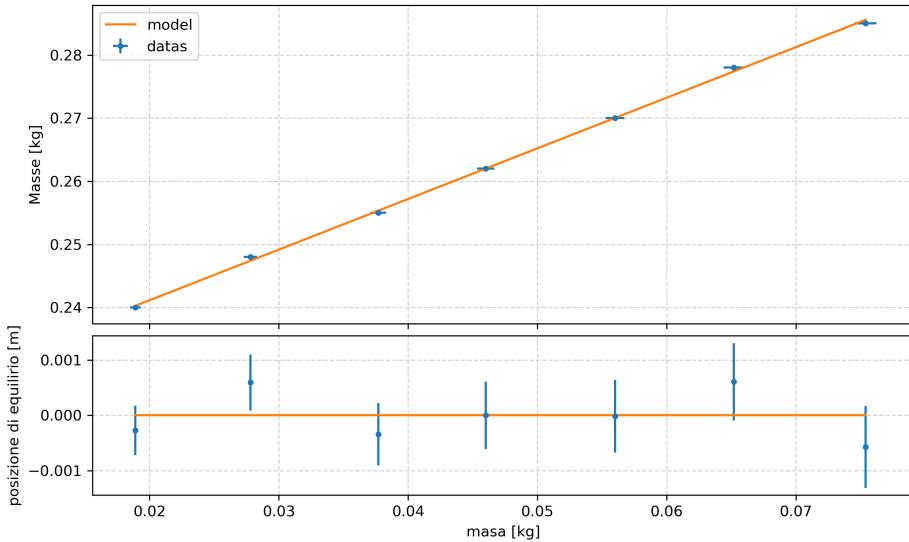


Figura 3: fit e residui massa-posizione di equilibrio

Anche in questo caso valgono le stesse assunzioni fatte per il grafico dei residui precedente.

Infine il valore di  $g$  ottenuto è il seguente:

$$g = 9.73 \pm 0.02 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (9)$$

Che purtroppo non è compatibile con il valore tabulato alle coordinate geografiche in cui si è svolto l'esperimento.

## 5 Conclusioni.

Dunque, visto che i fit effettuati sono validi e di conseguenza lo sono anche i valori di best-fit ottenuti, perché l'accelerazione di gravità non è compatibile con il valore tabulato?

Il motivo principale, probabilmente è dovuto al fatto che il modello utilizzato per il secondo fit, cioè la legge di hooke è incerto per il fenomeno fisico che si sta studiando, perchè trascura la massa della mol-

la, quindi rappresenta un'incertezza di modellizzazione, che in questo caso rappresenta il limite ultimo all'accuratezza della misura ottenuta.

Se si avesse a disposizione il modello che consi-

dera anche la massa della molla e del supporto, probabilmente si riuscirebbe ad ottenere un valore di  $g$  sicuramente più accurato, alla luce delle misure prese.