Pendolo fisico

lasciato oscillare sotto l'azione della forza di gravità

Sommario

Lo scopo dell'esperienza è quello di misurare il periodo di un pendolo fisico in funzione della distanza del centro di massa dal punto di sospensione.

Materiale a disposizione

- Un'asta metallica forata.
- Un supporto di sospensione.
- Cronometro (risoluzione 0.01 s).
- Metro a nastro (risoluzione 1 mm).
- Calibro ventesimale (risoluzione 0.05 mm).

Misure ed analisi

lunghezza equivalente del pendolo

cosa succede al cambiare di d

⊛ dipendenza non banale (decresce, cresce, ha un minimo)

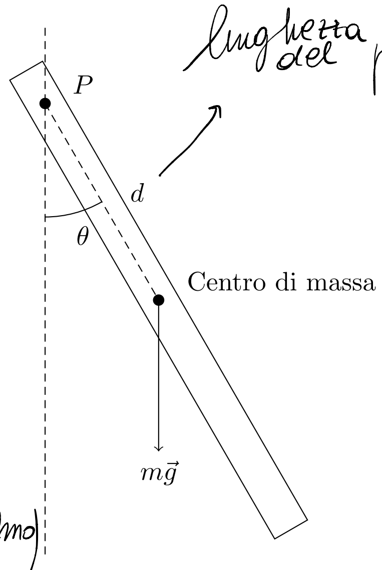


Figura 1: Schematizzazione dell'apparato sperimentale e definizioni di base.

Un qualunque oggetto fissato ad un punto di sospensione P (che disti d dal centro di massa) e soggetto alla gravità costituisce un pendolo fisico. Se il pendolo viene spostato di un angolo θ dalla posizione di equilibrio, il momento della forza di gravità (rispetto al polo P) vale allora

$$\tau = -mgd \sin\theta,$$

che ad angoli *piccoli* (cosa significa?) diventa

$$\tau = -mgd\theta. \tag{1}$$

D'altra parte, per la seconda equazione cardinale, si ha

$$\tau = \frac{dL}{dt},$$

ed usando le relazioni $L = I\omega$ e $\omega = d\theta/dt$ abbiamo

$$\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2}$$

La (1) e la (2) permettono di scrivere

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0. \tag{3}$$

Si tratta dell'equazione differenziale di un moto armonico di pulsazione angolare e periodo date rispettivamente da

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

Sapendo che il momento di inerzia dell'asta (di massa m e lunghezza l) rispetto ad un punto P che dista d dal centro di massa, vale

$$I = I_{\rm cm} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + md^2,$$

si ha infine

parametro libero

$$T(d) = 2\pi\sqrt{\frac{(l^2/12 + d^2)}{gd}}. \quad ⊛ \tag{4}$$

Dipendenza del periodo da d

Si misuri il periodo di oscillazione T al variare della distanza d del punto di sospensione dal centro di massa (per i valori d_i corrispondenti ai fori nella sbarra) e si riporti su di un grafico di dispersione i valori misurati T_i in funzione delle distanze d_i.

Si esegua un fit dei dati con il modello (4), usando l come parametro libero, e si confronti il valore di *best-fit* $\hat{l}$ con la lunghezza misurata dell'asta.

Si faccia un grafico dei residui

$$r_i = T_i - 2\pi\sqrt{\frac{(\hat{l}^2/12 + d_i^2)}{gd_i}}.$$

in funzione di d_i per studiare qualitativamente l'accordo del modello con i dati raccolti.

Considerazioni pratiche

Misura del periodo

Anche se la risoluzione del cronometro usato vale 0.01 s, è illusorio pensare che questo sia l'errore di misura da attribuire a misurazioni di tempo manuali. Per ridurre l'impatto del tempo di reazione, si consiglia di misurare il tempo τ che il sistema impiega a compiere 10 oscillazioni complete. Per stimare l'errore associato a τ si ripeta la misure n volte (con $n \geq 5$) e si prenda il valor medio e la deviazione standard della media delle misure come miglior stima del misurando ed incertezza associata, rispettivamente. (Va da sé che si passa da τ a T dividendo per 10 sia la misura che l'errore.)

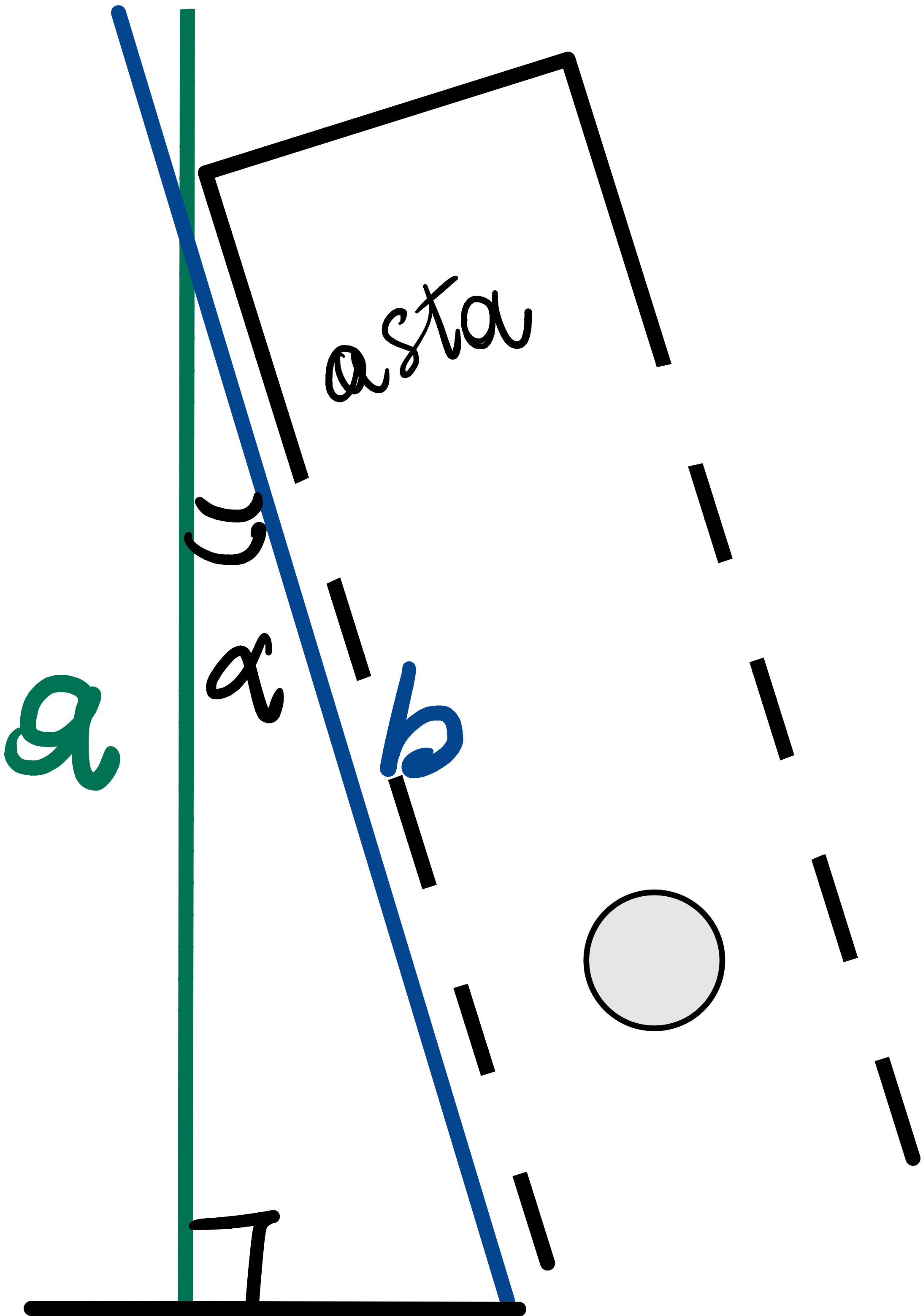
misurare un periodo: 10 alla volta, 10 volte → stimare valor medio come media e incertezza associata come standard

```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

# Dati---mettete le vostre misure!
# Qui potete anche leggere i dati da file, usando il metodo np.loadtxt(),
# se lo trovate comodo.
d = np.array([0.100, 0.200, 0.300, 0.400])
sigma_d = np.full(d.shape, 0.002)
T = np.array([1.943, 1.570, 1.518, 1.572])
sigma_T = np.array([0.005, 0.004, 0.006, 0.005])

# Definizione dell'accelerazione di gravita`.
g = 9.81

def period_model(d, l):
    """Modello per il periodo del pendolo.
    """
    return 2.0 * np.pi * np.sqrt((l**2.0 / 12.0 + d**2.0) / (g * d))

plt.figure('Periodo')
# Scatter plot dei dati.
plt.errorbar(d, T, sigma_T, sigma_d, fmt='o')
# Fit---notate che questo e` un fit ad un solo parametro.
popt, pcov = curve_fit(period_model, d, T, sigma=sigma_T)
l_hat = popt[0]
sigma_l = np.sqrt(pcov[0, 0])
# Confrontate i parametri di best fit con la vostra misura diretta!
print(l_hat, sigma_l)
# Grafico del modello di best-fit.
x = np.linspace(0.05, 0.5, 100)
plt.plot(x, period_model(x, l_hat))
plt.xlabel('d [m]')
plt.ylabel('Periodo [s]')
plt.grid(which='both', ls='dashed', color='gray')
plt.savefig('massa_raggio.pdf')

plt.show()
```

Calcolo della media e della deviazione standard delle misure

$$\begin{cases} T = \tau / 10 \\ \tau = \dfrac{\tau_1 + \dots + \tau_n}{6} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{T = \dfrac{\tau_1 + \dots + \tau_n}{60}}$$

$$\sigma_T = \underbrace{\frac{1}{n}}_{= \frac{1}{6}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{= \frac{1}{5}} \cdot \sum_i$$


asta
α
a
b

$$\alpha = \arccos \frac{b}{a} \quad \text{con } \sigma_b = \sigma_a = 0.1 \text{ cm}$$

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_a^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{b^2} + \frac{\sigma^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2\sigma^2 + b^2\sigma^2}{a^2 b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma^2 (a^2 + b^2)}{a^2 b^2}} = \frac{\sigma}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}$$