

Pendolo fisico: analisi del periodo a diverse distanze del punto di sospensione dal centro di massa

Alessia Di Nino

Giugno 2023

1 Introduzione

1.1 Cenni teorici

Un qualunque oggetto fissato ad un determinato punto di sospensione, e soggetto alla forza di gravità, rappresenta un pendolo fisico. Quando il sistema viene spostato di un angolo θ dalla posizione di equilibrio, il pendolo inizia ad oscillare e il momento della forza rispetto al punto di sospensione vale:

$$\tau = -mgdsin\theta \quad (1)$$

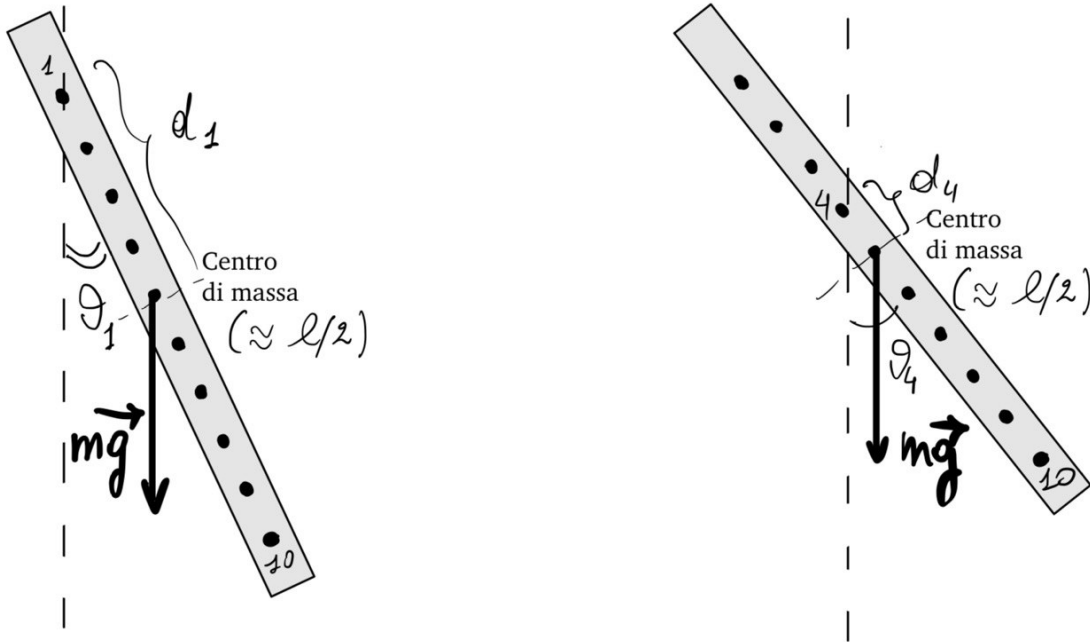


Figure 1: schematizzazione delle grandezze e delle dimensioni in gioco

Nello specifico caso di piccole oscillazioni possiamo considerare $\sin\theta \sim \theta$. La condizione di "piccole oscillazioni" è quella in cui, dato un valore θ_0 , si possano trascurare tutti i termini dello sviluppo in serie di Taylor superiori al primo (T_0).

$$T(\theta_0) = T_0(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \frac{173}{737280}\theta_0^6 + \dots) \quad (2)$$

Se vogliamo considerare le oscillazioni piccole, devo assicurarmi che i termini di correzione al periodo che trascuro siano dunque molto più piccoli dell'incertezza di misura sul periodo stesso.

In formule, vale a dire:

$$\theta_0 \ll 4\sqrt{\frac{\sigma_T}{T_0}} \quad (3)$$

Fatta questa approssimazione (che verificheremo nella descrizione delle misure) dunque, la (??) diventa:

$$\tau = -mgd\theta \quad (4)$$

Inoltre, per la seconda equazione cardinale si ha $\tau = \frac{dL}{dt}$, e sostituendo $L = I\omega$ e $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ si ottiene:

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5)$$

Con I momento di inerzia dell'asta, di massa m e lunghezza l, rispetto ad un punto P che dista d dal centro di massa.

A questo punto, la (??) e la (??) consentono di scrivere l'equazione differenziale di un moto armonico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0 \quad (6)$$

Questo ha pulsazione regolare ω_0 e periodo T_0 dati da:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (7)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (8)$$

Sapendo inoltre che

$$I = I_c + md^2 = \frac{ml^2}{12} + md^2 \quad (9)$$

è allora possibile scrivere

$$T(d) = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/12 + d^2}{gd}} \quad (10)$$

con l parametro libero.

1.2 Scopo dell'esperienza

Scopo dell'esperienza, infatti, è proprio eseguire un fit (con il modello espresso dalla (??)) dei dati raccolti nella misurazione del periodo di oscillazione T (al variare della distanza d del punto di sospensione dal centro di massa) con l parametro libero, e confrontare il valore di best - fit di l con la lunghezza dell'asta misurata sperimentalmente.

2 Metodi

2.1 Apparato sperimentale

Per l'esperimento, ci siamo servite di:

- asta rigida con 10 fori
- supporto di sospensione;
- calibro ventesimale di risoluzione 0.05 mm;
- metro a nastro di risoluzione 0.1cm;
- righello di risoluzione 0.1 cm;
- cronometro di risoluzione 0.01 s.

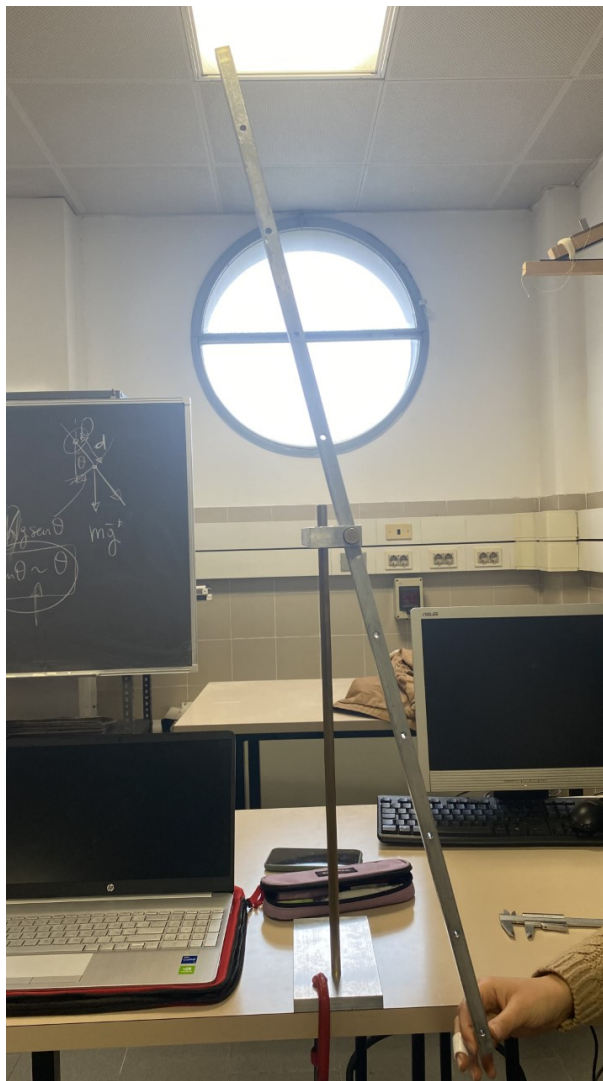


Figure 2: Asta rigida con 10 fori



Figure 3: Calibro ventesimale



Figure 4: Metro a nastro



Figure 5: Righello



Figure 6: Cronometro

2.2 Descrizione delle misure

Abbiamo inizialmente misurato le dimensioni dell'asta e dei fori, così da condurre una serie di osservazioni sul centro di massa dell'asta stessa. Abbiamo utilizzato il metro a nastro per misurare la lunghezza dell'asta, il diametro dei fori e la distanza tra i fori e da questi agli estremi dell'asta, mentre abbiamo usato il calibro ventesimale per misurare la base dell'asta; abbiamo associato ad ogni misura l'incertezza pari alla risoluzione dello strumento utilizzato, ed abbiamo ottenuto i seguenti dati:

lunghezza dell'asta	$(99.0 \pm 0.1)cm$
lato di base dell'asta	$(15.70 \pm 0.05)mm$
diametro dei fori	$(0.7 \pm 0.1)cm$
distanza foro 1 dall'estremo superiore	$(8.0 \pm 0.1)cm$
distanza foro 2 dall'estremo inferiore	$(2.0 \pm 0.1)cm$
distanza tra un foro e l'altro	$(10.0 \pm 0.1)cm$

A questo punto, abbiamo notato che i fori erano sì equidistanti tra loro, ma il primo e l'ultimo non lo erano dagli estremi dell'asta. Abbiamo pensato che questo potesse influire sulla posizione del centro di massa dell'asta, dato fondamentale per condurre tutte le successive misure, e abbiamo misurato le proporzioni in cui questo fenomeno potesse verificarsi. A questo fine, abbiamo misurato il volume dell'asta in ipotetica assenza di fori e il volume dei soli fori dell'asta (sfruttando le formule per il volume del parallelepipedo e per la propagazione dell'errore: $V = r^2 h$ e $\sigma_V = V \sqrt{\frac{4\sigma_r^2}{r^2} + \frac{\sigma_h^2}{h^2}}$)

volume dell'asta senza fori	$(61.66 \pm 0.84)cm^3$
volume dei soli fori	$(6.04 \pm 0.35)cm^3$

Tramite la proporzione, abbiamo trovato che il volume dei fori rappresenta il 9.8% del volume totale. Poichè i buchi sono spostati di $(2.0 \pm 0.1)cm$ rispetto al centro di massa, questo equivale in percentuale ad uno spostamento del centro di massa di 0.19 cm, ma siccome abbiamo misurato la posizione del centro di massa con un metro a nastro (di risoluzione pari a 0.1 cm) possiamo ritenere lo spostamento trascurabile e considerare il centro di massa nel punto aspettato, ossia a metà dell'asta.

Per quanto riguarda le misure di tempo, esse sono state effettuate tramite cronometro manuale, ma per ridurre l'errore sui tempi di reazione di chi effettuava la misura, abbiamo fatto compiere al pendolo, per ogni foro, dieci oscillazioni complete e abbiamo ripetuto le misure sei volte per ogni foro; abbiamo poi preso il valor medio e la deviazione standard della media delle misure come miglior stima del misurando e relativa incertezza associata (calcolati tramite "cicli for" su python). Inoltre, per esser certe di poter sfruttare le leggi descritte in ?? per angoli piccoli (sotto i 20° in questo caso), abbiamo misurato l'angolo da cui facevamo partire l'oscillazione utilizzando righello e metro a nastro, sfruttando la relazione: $\alpha = \arccos \frac{b}{a}$ (cfr. ??)

PENDOLO FISICO

*lasciato oscillare allo stato
alla fine di quanto*

SOMMARIO

Lo scopo dell'esperienza è quello di misurare il periodo di un pendolo fisico in funzione della distanza del centro di massa dal punto di sospensione.

MATERIALE A DISPOSIZIONE

- Un'asta metallica forata.
- Un supporto di sospensione.
- Cronometro (risoluzione 0.01 s).
- Metro a nastro (risoluzione 1 mm).
- Calibro ventesimale (risoluzione 0.05 mm).

MISURE ED ANALISI

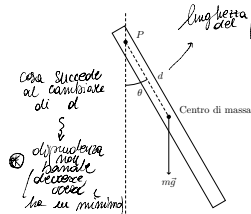


FIGURA 1: Schematizzazione dell'apparato sperimentale e definizioni di base.

Un qualunque oggetto fissato ad un punto di sospensione P (che disti d dal centro di massa) e soggetto alla gravità costituisce un pendolo fisico. Se il pendolo viene spostato di un angolo θ dalla posizione di equilibrio, il momento della forza di gravità (rispetto al polo P) vale allora

$$\tau = -mgd \sin \theta,$$

che ad angoli piccoli (cosa significa?) diventa

$$\tau = -mgd\theta. \quad (1)$$

D'altra parte, per la seconda equazione cardinale, si ha

$$\tau = \frac{dL}{dt},$$

ed usando le relazioni $L = I\omega$ e $\omega = d\theta/dt$ abbiamo

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

La (1) e la (2) permettono di scrivere

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \theta = 0. \quad (3)$$

Si tratta dell'equazione differenziale di un moto armonico di pulsazione angolare e periodo date rispettivamente da

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Sapendo che il momento di inerzia dell'asta (di massa m e lunghezza l) rispetto ad un punto P che dista d dal centro di massa, vale

$$I = I_{cm} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + md^2,$$

si ha infine

$$T(d) = 2\pi \sqrt{\frac{(l^2/12 + d^2)}{gd}}. \quad (4)$$

DIPENDENZA DEL PERIODO DA d

Si misuri il periodo di oscillazione T al variare della distanza d del punto di sospensione dal centro di massa (per i valori d , corrispondenti ai fori nella sbarra) e si riporti su di un grafico di dispersione i valori misurati T_i in funzione delle distanze d_i .

Si esegua un fit dei dati con il modello (4), usando l come parametro libero, e si confronti il valore di best-fit l con la lunghezza misurata dell'asta. Si faccia un grafico dei residui

$$r_i = T_i - 2\pi \sqrt{\frac{(l^2/12 + d_i^2)}{gd_i}}$$

in funzione di d_i per studiare qualitativamente l'accordo del modello con i dati raccolti.

CONSIDERAZIONI PRATICHE

MISURA DEL PERIODO

Anche se la risoluzione del cronometro usato vale 0.01 s, è illusorio pensare che questo sia l'errore di misura da attribuire a misurazioni di tempo manuali. Per ridurre l'impatto del tempo di reazione, si consiglia di misurare il tempo τ che il sistema impiega a compiere 10 oscillazioni complete. Per stimare l'errore associato a τ si ripeta la misura n volte (con $n \geq 5$) e si prenda il valore medio e la deviazione standard della media delle misure come miglior stima del misurando ed incertezza associata, rispettivamente. (Va da sé che si passa da τ a T dividendo per 10 sia la misura che l'errore.)

misurare il periodo: 10 alla volta, 10 volte → stimare valore medio come media e incertezza associata come standard


Figure 7: Schematizzazione della misura dell'angolo

Di seguito, la tabella con i dati raccolti:

foro	periodo (s)
1	1.57 ± 0.02
2	1.53 ± 0.07
3	1.54 ± 0.05
4	1.81 ± 0.06
5	3.88 ± 0.13
6	2.16 ± 0.08
7	1.59 ± 0.02
8	1.51 ± 0.03
9	1.56 ± 0.04
10	1.63 ± 0.03

2.3 Analisi dei dati - metodo di fit e grafico dei residui condotto utilizzando la funzione `curve_fit()` di Python

I dati raccolti sono stati analizzati tramite la funzione `curve_fit()` di Python, realizzando, per l'appunto, il grafico di best fit e il grafico dei residui.



fit and residuals.pdf

Figure 8: Grafico di fit e residui

3 Conclusioni

Possiamo infine affermare che il modello di fit è corretto grazie a due commenti. Come osservazione preliminare, notiamo che i grafici dei residui mostrano che i valori oscillano attorno allo zero con fluttuazioni paragonabili alle barre d'errore considerate.

Inoltre, confrontando il valore di best fit di l con la lunghezza misurata dell'asta, viene fuori che si tratta di due misure compatibili:

parametro di best fit l	misura empirica di l
$(0.984 \pm 0.007)m$	$(0.990 \pm 0.001)m$