

# PENDOLO QUADRIFILARE

Marco Malucchi

24 maggio 2023

## Obbiettivo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperienza è quello di misurare il periodo di oscillazione di un pendolo fisico in funzione della distanza del suo centro di massa dal punto di sospensione.

## 1 Cenni teorici.

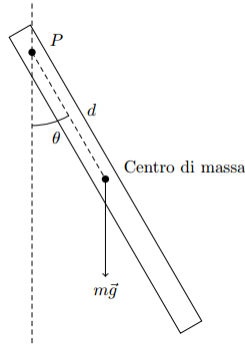


Figura 1: Pendolo fisico.

Un pendolo fisico è un corpo rigido vincolato ad un punto di sospensione P, ad una distanza  $d$  dal suo CM, e soggetto alla gravità.

Se si sposta di un angolo  $\theta$  dalla posizione di equilibrio il pendolo e si applica la seconda equazione cardinale si ottiene:

$$I\ddot{\theta} = -mgd \sin\theta \quad (1)$$

Dove ovviamente  $I$  corrisponde al momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il punto di sospensione e perpendicolare al piano che lo contiene, mentre  $m$  e  $g$  sono ovviamente massa del corpo ed accelerazione di gravità.

Inoltre, per angoli piccoli, vista l'espansione in serie di Taylor del seno, si ottiene:

$$I\ddot{\theta} = -mgd\theta \quad (2)$$

Da cui, esplicitando  $\ddot{\theta}$  si ottiene

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I}\theta$$

Dove il coefficiente moltiplicativo al secondo membro dell'equazione differenziale viene indicato con il simbolo  $\omega^2$ .

Da qui si ricava l'equazione per il periodo del pendolo fisico:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (3)$$

Nel caso in cui il corpo fosse ben approssimabile ad una sbarra piena omogenea in cui lo spessore è trascurabile rispetto alla lunghezza complessiva dell'intero corpo, si avrebbe che il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione specificato sopra, sarebbe pari a:

$$I = \frac{mL^2}{12} + md^2 \quad (4)$$

per il teorema degli assi paralleli, in cui  $L$  rappresenta la lunghezza della sbarra.

Sostituendo nell'equazione per individuare il periodo, si ottiene:

$$T = \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{gd}} \quad (5)$$

Si ricorda, dunque, che questa equazione appena ricavata, vale per una sbarra omogenea in cui lo spessore sia trascurabile e che viene fatta oscillare in un regime di piccole oscillazioni.

## 2 Set-up sperimentale.

Il set-up sperimentale è stato allestito fissando un supporto rigido alla parete e lubrificandolo con cura con dell'olio minerale, si è utilizzato come pendolo una sbarra di alluminio, considerabile omogenea, con 5 fori in una metà che servivano come punto di aggancio al vincolo, misurando le distanze dei fori dal centro di massa della sbarretta si ricavano tutte le misure necessarie della distanza del punto di sospensione dal centro di massa.

Per misurare le dimensioni della sbarretta si è utilizzato un metro a nastro con risoluzione di  $1\text{mm}$  ed un calibro ventesimale con risoluzione di  $0.05\text{mm}$ .

Per misurare i periodi di oscillazione si è utilizzato l'hardware Arduino, con cui si misuravano intervalli temporali con la risoluzione di  $1\text{ms}$ .

### 3 Misure effettuate.

Con l'ausilio del metro a nastro si è misurata la lunghezza complessiva dell'asta  $L$  e si è ottenuto il seguente valore:

$$L = 0.999 \pm 0.0003[m]$$

l'incertezza associata ad  $L$  si è ottenuta dividendo la risoluzione strumentale per  $\sqrt{12}$ , supponendo la lunghezza dell'asta uniformemente distribuita tra  $0.9995\text{m}$  e  $1.0005\text{m}$ , la stessa cosa è stata fatta per tutte le altre incertezze associate alle misure di lunghezze.

Dopo la lunghezza complessiva dell'asta, si adoperato il calibro ventesimale per misurare il suo spessore ed risultato che, con la precisione offerta dal calibro, l'asta aveva una sezione quadrata, il valore ottenuto è riportato di seguito:

$$D = 0.01065 \pm 0.00001[m]$$

Dopo di che ci si è dedicati alla misura dei diametri dei fori, misurati con il calibro ventesimale e che sono risultati essere tutti uguali:

$$D_{fori} = 0.0061 \pm 0.00001[m]$$

Poi utilizzando il metro a nastro si sono misurate le distanze dei fori dall'estremo dell'asta sulla parte piena e sommando a ciascuna di queste il raggio dei fori, ottenuto dividendo per due il diametro misurato, si sono ottenuti i seguenti valori di  $l$ :

Distanze		
$l_1$	$(5460 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
$l_2$	$(6460 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
$l_3$	$(7460 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
$l_4$	$(8460 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
$l_5$	$(9460 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]

Tabella 1: Misure della distanza del centro dei fori dall'estremo dell'asta

Infine, supponendo l'influenza dei fori sulla sbarra trascurabile sulla posizione del CM della stessa, si è supposto il centro di massa posto nella metà della sbarra e quindi si è sottratto a ciascuno dei valori  $l$ , la metà di  $L$ , ottenendo i seguenti valori di  $d$ :

Distanze CM pt. sosp.		
$d_1$	$(466 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
$d_2$	$(1466 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
$d_3$	$(2466 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
$d_4$	$(3465 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
$d_5$	$(4465 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]

Tabella 2: Distanze CM-punto di sospensione

Infine ci si è dedicati alle misure dei periodi.

Per ogni foro sono state eseguite 5 misurazioni di 10 periodi, tranne per quello più vicino al CM della sbarra, del quale sono stati misurati soltanto 6 periodi, dato che l'attrito della sbarra con il perno di sostegno era molto alto e faceva abbassare velocemente le ampiezze delle oscillazioni.

Dopo di che si è calcolata deviazione standard della media e media delle misure effettuate, che sono state successivamente divise per 10 (tranne ovviamente quella relativa la foro più vicino al CM) in modo da abbattere l'errore sistematico del tempo di reazione dell'operatore di un ordine di grandezza.

Le misure dei deca periodi con annessa deviazione standard e media campione sono le seguenti:

Decaperiodi [s]						$\hat{T} \pm \sigma_T$
$T_1$	15.644	15.642	15.661	35.898	15.457	$20 \pm 4$
$T_2$	16.612	16.657	16.698	16.693	16.773	$16.69 \pm 0.03$
$T_3$	15.128	15.183	15.104	15.044	15.209	$15.13 \pm 0.03$
$T_4$	15.254	15.312	15.231	15.366	15.285	$15.29 \pm 0.02$
$T_5$	15.916	15.815	15.668	15.999	15.909	$15.86 \pm 0.06$

Tabella 3: Misure dei decaperiodi con annessa media campione e deviazione standard della media campione

Come si vede la misura relativa al foro più vicino al CM è la misura meno precisa di tutte e questo avrà un peso rilevanti sui risultati dell'esperimento.

Di seguito si riportano anche le misure dei singoli periodi:

Periodi		
$T_1$	$2.0 \pm 0.4$	[s]
$T_2$	$(1669 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[s]
$T_3$	$(1513 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[s]
$T_4$	$(1529 \pm 2) \cdot 10^{-3}$	[s]
$T_5$	$(1586 \pm 6) \cdot 10^{-3}$	[s]

Tabella 4: Misure dei singoli periodi

si noti sempre la scarsa precisione della prima misura (relativa la foro più vicino al CM) rispetto alle altre.

## 4 Analisi dati.

A questo punto si è cercato di verificare se fosse possibile eseguire un fit dei minimi quadrati sulle misure con il modello (5); effettivamente tutte le misure dei periodi sono indipendenti tra loro e sono anche distribuite gaussianamente, visto il teorema centrale del limite, ma purtroppo la condizione relativa alle incertezze associate alla variabile indipendente  $d$ :

$$\left| \frac{df}{dd} \left( \sqrt{\frac{L^2/12 + d^2}{gd}} \right) \right| \sigma_d \ll \sigma_T \quad (6)$$

Non era rispettata, quindi si è eseguito un fit con il metodo dell'orthogonal distance regression lasciando come parametri liberi nel modello  $g$  ed  $L$ , in modo da avere un metro di paragone con la bontà del fit.

Quindi, i valori di best-fit ottenuti e del chi quadro, sono i seguenti:

- $\hat{g} = 9.72 \pm 0.06 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$
- $\hat{L} = 0.973 \pm 0.005 [m]$
- $\chi^2 \approx 5.76$

I valori dell'accelerazione di gravità e della lunghezza complessiva dell'asta sono evidentemente incompatibili e sotto stimati rispetto ai valori effettivi (cioè quello tabulato di  $g$  e quello misurato di  $L$ ), mentre, invece il  $\chi^2$  è distante poco più di una  $\sigma$  dal valore medio, infatti quest'ultimo è  $\chi^2 = 3$ , pari cioè al numero di gradi di libertà ovviamente, mentre la deviazione standard è pari a  $\sqrt{6} \approx 2.45$ , quindi il valore ottenuto è fuori di una sigma per circa 3 decimi, quindi non è un valore terribile, inoltre il p-value relativo al risultato ottenuto è il seguente:

$$p - value \approx 13\%$$

Che non è troppo estremo e ben lontano dalle  $5\sigma$ .

Si riporta però di seguito il grafico di best fit con annesso grafico dei residui:

Osservando questo grafico si nota come ci sia un evidente problema riguardante la prima misura, corri-

spondente proprio alla misura del periodo di oscillazione rispetto al foro più vicino al CM dell'asta.

## 5 Conclusioni.

A questo punto è ovvio che ci si trova di fronte ad un errore sistematico, infatti si vede come i risultati a livello statistico restituiti dal fit siano ragionevoli e non ci diano nessun motivo per rigettare i risultati ottenuti, ma del resto i valori di best-fit sono sistematicamente diversi dai valori che si sarebbero dovuti ottenere, quindi questo mostra come in realtà il fit non sia un buon fit.

Parte del problema è sicuramente dovuto alla misura del periodo relativo al foro più vicino al CM, che si vede essere completamente sbagliata, infatti la sua incertezza associata è considerevole rispetto al suo valore centrale ( $\sigma_{rel} = \frac{\sigma_T}{|\bar{T}|} \approx 0.2 = 20\%$ ) del resto un errore relativo del 20% è decisamente grande.

In generale però, molto probabilmente, il fatto che si siano trascurati i termini dell'espansione di Taylor dal modello del periodo e che quindi ci si sia sempre supposti essere in un regime di piccole oscillazioni, ha sicuramente influito maggiormente sulla qualità del fit, in quanto, del resto, si è inserita un'incertezza di modellizzazione non trascurabile.

In aggiunta a ciò, è bene anche considerare il fatto che si è considerato l'effetto dei fori sulla posizione del CM trascurabile, ma questo non è vero per forza ed inoltre considerarlo modificherebbe anche il modello utilizzato per il fit, quindi è presente una seconda incertezza di modellizzazione.

Inoltre il pendolo aveva il diametro dei fori maggiore rispetto al diametro del perno sul quale era posto mentre oscillava e questo faceva sì che il pendolo spesso oscillasse frontalmente mentre oscillava, peggiorando sicuramente l'accuratezza delle misure, considerando anche il fatto che, nonostante la lubrificazione del perno, restava presente un attrito molto forte che ha inficiato a sua volta sull'accuratezza delle misure prese.

Queste potrebbero essere tutte spiegazioni plausibili per quanto riguarda i risultati ottenuti.