

Verifica del modello del periodo di oscillazione di un pendolo.

Marco Malucchi

25 maggio 2023

Obiettivo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperimento era quello di dimostrare che il periodo di oscillazione di un pendolo dipende dalla radice della distanza del centro di massa al punto di sospensione secondo il modello:

$$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{11}{3072}\theta^4 + \dots\right) \quad (1)$$

1 Cenni Teorici.

Un pendolo matematico è un sistema fisico costituito da un filo non massivo ed inestensibile e da un grave vincolato ad esso, generalmente considerabile come un punto materiale; chiaramente l'altro estremo del filo è fissato ad un supporto rigido che funge da vincolo. I periodi delle oscillazioni di un pendolo matematico sono costanti nell'evolvere nel tempo del moto del corpo, se non agiscono sul grave forze non conservative (attriti particolari, generalmente viscosi); se l'ampiezza di oscillazione è minore di un certo angolo che, nel nostro caso, è specificato dall'incertezza relativa sulle misure dei periodi, non dipendono neppure dall'ampiezza iniziale.

In generale il modello che descrive i periodi è descritto dalla seguente equazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

Dove chiaramente l e g rappresentano rispettivamente la distanza del centro di massa dal punto di sospensione e l'accelerazione di gravità.

Invece, se l'ampiezza di oscillazione è maggiore di quel certo angolo sopra specificato, allora i periodi di oscillazione dipendono anche da tale ampiezza iniziale; questa dipendenza è specificata dal seguente modello:

$$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{11}{3072}\theta^4 + \dots\right) \quad (3)$$

2 Set-up sperimentale.

L'idea dell'esperimento consisteva nel prendere più misure dei periodi di oscillazione del pendolo ad ampiezze iniziali diverse ed anche a distanze del centro di massa dal punto di sospensione diverse.

Per fare ciò è stato necessario utilizzare un supporto fissato alla parete che consentisse allo stesso tempo di fissare il filo e di poter modulare la sua lunghezza alzando il grave rispetto al pavimento o abbassandolo.

Si è optato per un filo di plastica "tipo trefolo" che era vincolato ad un supporto rigido fissato alla parete in modo tale da poter essere allentato ogni qual volta fosse stato necessario modulare la lunghezza del filo e successivamente essere ristretto con una certa facilità quando il filo era teso pronto per oscillare assieme al corpo.

In questo modo si aveva sia il vincolo che la possibilità di modulare l .

All'estremo libero del filo era fissato il grave, costituito da una sfera di piombo con massa tabulata di 150g e dotata di un piccolo foro filettato che alla sfera stessa potesse essere applicato un piccolo bullone con saldato sulla testa un gancio attraverso il quale la sfera poteva essere fissata all'estremo libero del filo, sul quale era stato fatto un occhiello.

Infine, il tutto, era posto abbastanza vicino alla parete (ad una distanza di circa 5cm) e dietro al pendolo, all'altezza del grave, con nastro adesivo, era fissato un foglio di carta millimetrata che è stato utilizzato per prendere le misure delle ampiezze di oscillazione.

Inoltre si è utilizzato l'hardware Arduino con caricato sopra un opportuno software per prendere le misure dei periodi di oscillazione con risoluzione di

un millesimo di secondo, mentre per misurare la distanza del centro di massa dal punto di sospensione si è utilizzato un metro a nastro con risoluzione di un millimetro e, per misurare le dimensioni della sfera, un calibro ventesimale con risoluzione, ovviamente, di 5 centesimi di millimetro.

3 Misure effettuate.

Prima di tutto ci si è concentrati sul prendere le misure dei periodi di oscillazione del pendolo ad una distanza del CM dal punto di sospensione pari a $l = (10238 \pm 3) \cdot 10^{-4}$, considerando ampiezze di oscillazione diverse (successivamente verrà descritto con più accuratezza il procedimento attraverso il quale si è determinata la posizione del centro di massa del grave).

L'obiettivo è stato quello di capire entro che angolo sarebbe stato possibile trascurare i termini dell'espansione di Taylor nel modello (3) e quindi entro che angolo ci si potesse considerare nel regime di piccole oscillazioni in modo da poter utilizzare come il modello semplificato (3) per confrontare i dati raccolti.

Per capire entro che angolo fosse possibile utilizzare l'approssimazione delle piccole oscillazioni si è individuata l'intersezione tra due curve:

- $\delta(\theta) = \frac{1}{16} \theta^2$
- $\frac{\sigma_T}{T_0}$

Dove T_0 è dato dal modello (2) L'idea che si è seguita è la seguente (tenendo sempre conto del fatto che se un effetto non è misurabile allora è anche trascurabile): in generale c'è ovviamente una differenza tra T_0 e $T(\theta)$, ma nel regime di piccole oscillazioni questa differenza diventa trascurabile, cioè rispetta la seguente condizione:

$$T(\theta) - T_0 \ll \sigma_T$$

Se si dividono ambo i membri per T_0 si ottiene una sorta di deviazione relativa di $T(\theta)$ da T_0 ed in particolare si ottiene proprio $\delta(\theta)$ relazionato all'errore relativo su T_0 :

$$\frac{1}{16} \theta^2 \ll \frac{\sigma_T}{T_0} \quad (4)$$

Dove, chiaramente, gli altri termini dello sviluppo in serie di Taylor sono ritenuti trascurabili in quanto molto minori del termine del secondo ordine.

Plottando in un grafico queste due funzioni con le misure prese (un grafico in scala bilogarithmica, in cui la funzione $\delta(\theta)$ diventa una retta visto che è una legge di potenza ed in cui $\frac{\sigma_T}{T_0}$ è a sua volta una retta

parallela all'asse delle ascisse) si può visivamente capire qual è l'angolo massimo per cui possano essere trascurati i termini dello sviluppo di Taylor, notando il punto in cui le due funzioni di intersecano e prendendo nota del valore dell'angolo corrispondente al punto in cui la distanza tra le due funzioni è maggiore o uguale ad una decade, ovviamente nella zona del grafico in cui l'errore relativo su T_0 sta sopra la funzione $\delta(\theta)$ che è la nostra variazione relativa tra i due modelli in esame.

Le misure delle ampiezze di oscillazione sono state prese scegliendo dei punti sul bordo superiore della carta millimetrata e misurando la loro distanza dalla verticale (coincidente alla proiezione del filo del pendolo sul foglio della carta millimetrata), e calcolando l'arcotangente del rapporto tra queste misure e la distanza dal punto di sospensione al bordo superiore della carta millimetrata, la quale era pari a $0.776 \pm 0.0003[m]$. Le misure delle distanze dei punti sulla carta millimetrata alla verticale raccolte, sono le seguenti:

Distanze orizzontali		
d_1	$(570 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_2	$(870 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_3	$(1170 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_4	$(1470 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_5	$(1770 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_6	$(2070 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_7	$(2270 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_8	$(2670 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_9	$(3070 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]
d_{10}	$(3470 \pm 6) \cdot 10^{-4}$	[m]

Tabella 1: Misure preliminari per le ampiezze.

L'incertezza su queste misure si è ottenuta considerando l'errore di paralasse dovuto al fatto che ogni volta che si misurava un periodo di oscillazione, fosse necessario portare manualmente il pendolo ad un'inclinazione sufficiente per far sì che il filo coprisse il punto preso sulla carta millimetrata. Identificare senza strumenti di misura questa sovrapposizione, generava un importante errore di paralasse che è stato stimato essere nell'ordine dei 2 mm, successivamente questo errore è stato diviso per $\sqrt{12}$.

Successivamente, con le modalità sopra descritte, si sono ricavate le misure degli angoli, le cui incertezze associate sono state ricavate con la formula delle derivate parziali, vista l'indipendenza delle misure all'interno della formula utilizzata. Le misure ottenute sono le seguenti:

Ampiezze		
θ_1	$(73 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_2	$(112 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_3	$(150 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_4	$(187 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_5	$(224 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_6	$(261 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_7	$(285 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_8	$(331 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_9	$(377 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]
θ_{10}	$(420 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[rad]

Tabella 2: Misure degli angoli.

Deca-periodi [s]						$T \pm \sigma_T$
T ₁	20.138	20.237	20.074	19.979	20.241	20.13 ± 0.05
T ₂	20.302	20.173	20.238	20.233	20.215	20.23 ± 0.02
T ₃	20.228	20.359	20.176	20.177	20.229	20.23 ± 0.03
T ₄	20.232	20.428	20.149	20.469	20.277	20.31 ± 0.06
T ₅	20.191	20.381	20.271	20.417	20.317	20.32 ± 0.04
T ₆	20.396	20.278	20.240	20.304	20.376	20.32 ± 0.03
T ₇	20.323	20.447	20.365	20.438	20.434	20.40 ± 0.02
T ₈	20.416	20.388	20.429	20.372	20.430	20.41 ± 0.01
T ₉	20.529	20.460	20.485	20.324	20.460	20.45 ± 0.03
T ₁₀	20.472	20.609	20.474	20.521	20.319	20.48 ± 0.05

Tabella 3: Misure dei deca-periodi e rispettive medie deviazioni standard nell'ultima colonna

Invece per quanto riguarda i valori dei singoli periodi, si sono ottenuti i seguenti valori:

Periodi		
T ₁	$(2013 \pm 5) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₂	$(2023 \pm 2) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₃	$(2023 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₄	$(2031 \pm 6) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₅	$(2032 \pm 4) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₆	$(2032 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₇	$(2040 \pm 2) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₈	$(2041 \pm 1) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₉	$(2045 \pm 3) \cdot 10^{-3}$	[s]
T ₁₀	$(2048 \pm 5) \cdot 10^{-3}$	[s]

Tabella 4: Valori dei singoli periodi di oscillazione

A questo punto si hanno tutti gli elementi per trovare il valore dell'ampiezza di oscillazione al di sotto del quale vale l'approssimazione di piccole oscillazioni:

Ci si aspettava che la funzione $\frac{\sigma_T}{T_0}$ assumesse la forma di una retta, ma del resto i punti sperimentali non sono molti e quindi sono anche molto dispersi, ma questo non cambia i ragionamenti fatti sopra.

Dal grafico si nota come la condizione cercata è rispettata soltanto dall'ultimo periodo misurato e

Per quanto riguarda le misure dei periodi, come già detto, sono state prese con l'hardware Arduino e per ogni ampiezza di oscillazione scelta si sono eseguite 5 misure di 10 periodi di oscillazione, dopo di che è stata calcolata media e deviazione standard della media, che poi sono state successivamente divise per 10, cioè per il numero di periodi misurati in ogni misurazione. Le misure raccolte sono le seguenti:

da valori di poco maggiori, del resto, si vede come già il secondo periodo misurato non rientra nella condizione di piccole oscillazioni.

Sapere, dunque, che rispetto ad un angolo di poco maggiore a 0.07 rad ci si ritrova in un regime di piccole oscillazioni ci è molto utile, in quanto, d'ora in avanti, modificando la distanza del CM dal punto di sospensione, sappiamo entro che ampiezza iniziale restare per poter utilizzare un modello semplificato, cioè l'eq.(3), per poter interpretare i dati raccolti.

Per quanto riguarda le misurazioni delle dimensioni della sfera di piombo con avvitato sopra il buloncino, eseguite con l'ausilio del calibro vnetesimale, si sono ottenuti i seguenti valori:

- Distanza testa del bulone-estremo opposto della sfera: $37.25 \pm 0.02 \text{ [mm]}$.
- Diametro della sfera: $29.00 \pm 0.02 \text{ [mm]}$.

A questo punto, noto il fatto che la sfera era di piombo e il buloncino era di acciaio, con massa di $6 \pm 1 \text{ g}$ (la massa è stata misurata con una bilancia digitale con risoluzione di un grammo) ed inoltre considerando il fatto che il gambo del bullone era ovviamente all'interno della sfera, si è pensato ragionevole supporre che il centro di massa del grave fosse coincidente con il centro della sfera.

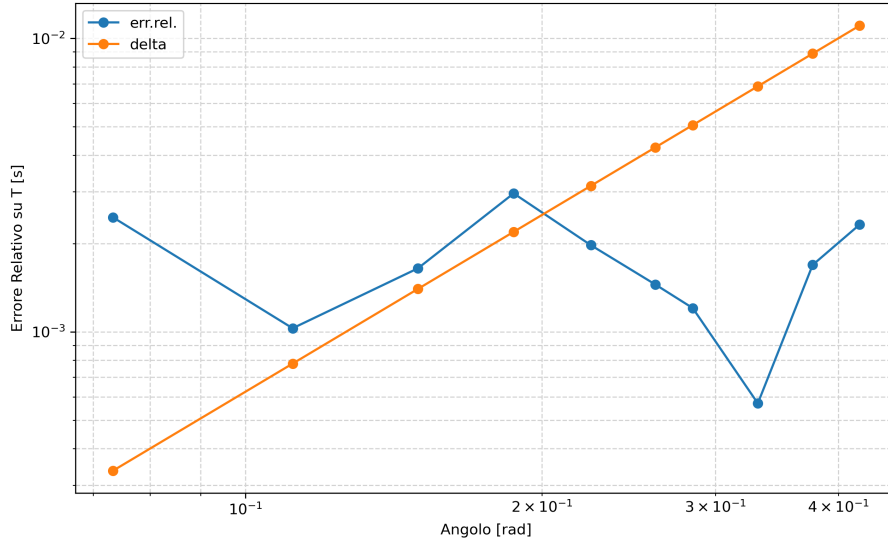


Figura 1: Grafico bilogaritmico per l'approssimazione delle piccole oscillazioni

Vista questa approssimazione, a tutte le misure che sono state prese successivamente con l'ausilio del metro a nastro, della distanza da parte superiore della testa del bulone al punto di sospensione, è stata aggiunta la quantità:

$$R = (22.75 \pm 0.02) \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$$

pari alla differenza tra la distanza tra testa del bulone ed estremo opposto della sfera ed il raggio della sfera stessa.

Quindi, dopo aver preso la serie di misure sopra descritta per individuare l'angolo entro il quale le oscillazioni potessero essere considerate piccole, si è iniziato a variare la distanza del CM dal punto di sospensione ottenendo le seguenti misurazioni:

Distanze CM-pt sosp.		
l_1	$(10238 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
l_2	$(9928 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
l_3	$(9668 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
l_4	$(9458 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
l_5	$(8988 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
l_6	$(8648 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]
l_7	$(8328 \pm 3) \cdot 10^{-4}$	[m]

Tabella 5: Misure delle distanze del CM dal punto di sospensione.

Nuovamente, per ognuno di queste distanze si sono misurati deca-periodi che sono stati trattati come precedentemente, ottenendo i seguenti valori:

deca-periodi [s]						$T \pm \sigma_T$
T_1	20.138	20.237	20.074	19.979	20.241	20.13 ± 0.05
T_2	19.918	19.824	19.666	19.734	19.973	19.82 ± 0.06
T_3	19.614	19.672	19.543	19.560	19.631	19.60 ± 0.02
T_4	19.285	19.431	19.332	19.416	19.354	19.36 ± 0.03
T_5	18.853	18.984	18.904	18.957	18.934	18.93 ± 0.02
T_6	18.472	18.272	18.584	18.525	18.543	18.48 ± 0.05
T_7	18.080	18.166	18.264	18.157	18.255	18.18 ± 0.03

Tabella 6: Misure dei deca-periodi per le l modulate

Da cui si sono ricavate le misure per i singoli periodi:

Periodi singoli		
T ₁	(2013 ± 5) · 10 ⁻³	[s]
T ₂	(1982 ± 6) · 10 ⁻³	[s]
T ₃	(1960 ± 2) · 10 ⁻³	[s]
T ₄	(1936 ± 3) · 10 ⁻³	[s]
T ₅	(1893 ± 2) · 10 ⁻³	[s]
T ₆	(1848 ± 5) · 10 ⁻³	[s]
T ₇	(1818 ± 3) · 10 ⁻³	[s]

Tabella 7: Misure dei singoli periodi

4 Analisi dati.

Dato che l'obiettivo dell'esperienza era quello di dimostrare il fatto che il periodo seguisse un andamento del tipo \sqrt{l} , si è deciso di eseguire un fit utilizzando i dati raccolti con il modello semplificato (2), in modo da poter valutare dai dati sperimentali se effettivamente il periodo di oscillazione del pendolo segua il modello voluto.

Per eseguire la procedura di fit si è utilizzato, ovviamente, il modello (2) lasciando come parametro libero g , in modo da avere un riferimento per stabilire con più sicurezza il grado di bontà del fit.

Non si è potuto utilizzare un fit dei minimi quadrati, in quanto, nonostante le misure dei periodi fossero distribuite normalmente e fossero tra loro indi-

pendenti, gli errori sulla variabile indipendente, cioè l , non rispettavano la condizione:

$$\left| \frac{df}{dl} \left(2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right| \sigma_l < \sigma_T \quad (5)$$

Considerato quanto sopra, si è utilizzato il metodo dell'orthogonal distance regression, da cui si è ottenuto il seguente valore di best-fit ed il seguente valore del χ^2 :

- $g = 9.94 \pm 0.01 \left[\frac{m}{s^2} \right]$
- $\chi^2 \approx 4.33$

In questo caso i gradi di libertà sono pari a 6 e dunque il valore del $\chi^2 = 6$, è proprio uguale al numero di gradi di libertà.

La deviazione standard di un χ^2 a 6 gradi di libertà è proprio pari a $\sqrt{12} \approx 3.5$, dunque il valore del χ^2 ottenuto è ben al di dentro di una sigma dalla media della distribuzione.

Per completezza si riporta di seguito il valore del p-value ottenuto:

$$p\text{-value} \approx 37\%$$

Inoltre si riporta anche il grafico di fit con annesso grafico dei residui eseguito con le incertezze efficaci:

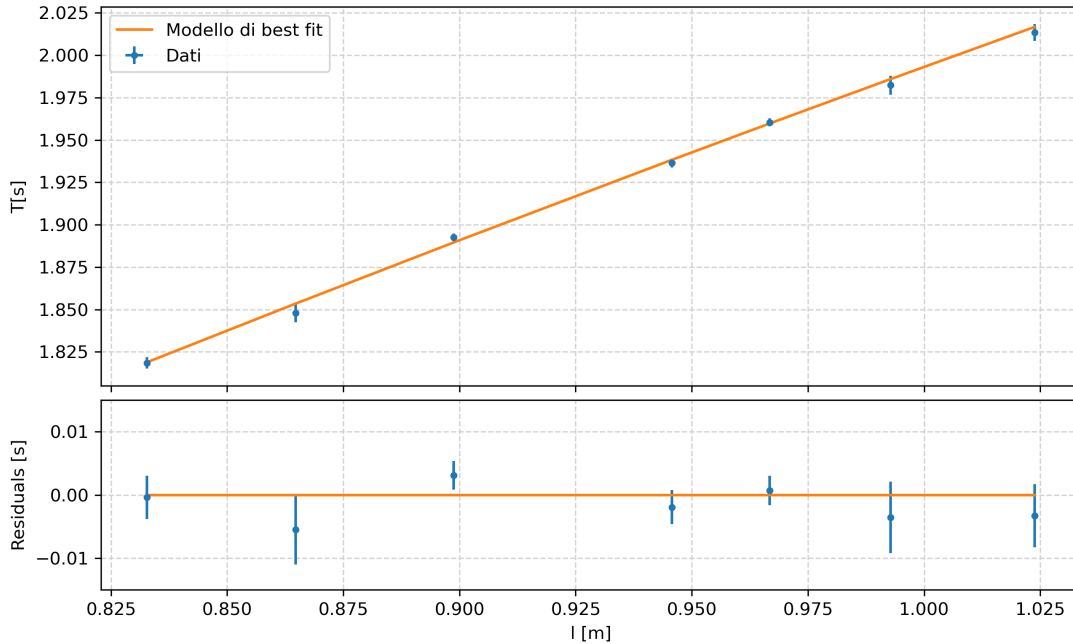


Figura 2: Grafico di fit e dei residui

5 Conclusioni.

Dal p-value ottenuto e dalla deviazione standard del chi quadro a 6 gradi di libertà, si vede come il χ^2 ottenuto sia perfettamente in media con quello che ci si dovrebbe aspettare e questo ci dice che, a questo punto, non si hanno elementi a sfavore del modello (2) e che quindi non c'è nessun motivo per rigettarlo.

Però, osservando il grafico dei residui si nota come, su 7 punti sperimentali, 5 di questi stiano al di sotto del modello; ora, considerando che la probabilità associata al fatto che un punto stia al disotto o al di sopra del modello è pari al 50% cioè $\frac{1}{2}$, la probabilità che 5 punti su 7 stiano al di sotto del modello si può studiare con una distribuzione binomiale, applicandola nel seguente modo:

$$P_5 = \binom{7}{5} \frac{1}{2}^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{7-5} \approx 0.16 \quad (6)$$

Che, del resto, non è una probabilità così estrema, comunque maggiore del 10%, quindi, nonostante i punti al di sotto del modello siano in netta maggioranza, comunque questo evento non ha una probabilità associata tale per cui si possa pensare ad un er-

rore sistematico che influenza i dati. Quindi non c'è motivo per rigettare l'idea che i punti sperimentali seguano semplicemente fluttuazioni statistiche attorno al modello.

Per cui tutto sta nella media, tranne per il fatto che il valore di best-fit di g ($g = 9.94 \pm 0.01 \left[\frac{m}{s^2}\right]$) è nettamente sovrastimato rispetto al valore tabulato.

Questo mette in luce, probabilmente, il fatto che le misure eseguite, in fondo, non sono così accurate e quindi questo inficia i risultati dell'esperimento.

Per quanto riguarda le misure dei periodi, probabilmente, fissare direttamente al filo la sfera di piombo, senza utilizzare un gancio che comunque la rendeva libera di oscillare rispetto all'asse passante per il filo, avrebbe potuto migliorare l'accuratezza delle misure, ma anche utilizzare un filo diverso, forse, avrebbe potuto migliorare l'accuratezza, riducendo, magari, l'attrito con l'aria.

Infine, visti i risultati a livello statistico, è possibile assumere che si sia raggiunto l'obiettivo dell'esperimento, anche se per poter affermare con certezza che il periodo di oscillazione di un pendolo segua il modello (2), sono sicuramente necessarie molto più ripetizioni dell'esperimento.