

SPETTROMETRO

Laboratorio di Fisica II - CdL in Fisica dell'Università di Milano-Bicocca

April 4, 2024

1 Obiettivi

In questa esperienza si studiano i principi alla base della spettrometria ottica e in particolare si verifica come sia possibile identificare una sostanza avendo indotto la sua emissione luminosa. In dettaglio si prevede di:

- caratterizzare un prisma a dispersione misurando la relazione tra indice di rifrazione e lunghezza d'onda $n(\lambda)$
- identificare, con il prisma, un gas ignoto a partire dalla sua emissione luminosa
- caratterizzare reticolo di dispersione misurando il passo d
- identificare, con il reticolo, un gas ignoto a partire dalla sua emissione luminosa

2 Preparazione

Messa a fuoco dello spettrometro: questa procedura serve a illuminare il reticolo con un fascio collimato e a regolare la messa a fuoco dell'immagine nell'occhio dell'osservatore.

1. verificare che la piattaforma rotante (dove si posizionano il prisma o il reticolo) sia com-planare con l'asse ottico di collimatore e telescopio (ci sono tre viti sotto la piattaforma per regolare la sua posizione)
2. regolare la messa a fuoco dell'oculare del telescopio facendolo scorrere sul suo asse fino a quando non si vede nitidamente la croce di puntamento. E' possibile anche allentare l'anello di bloccaggio della croce e ruotarlo finché questa non risulta verticale.
3. regolare la messa a fuoco del telescopio. Si vuole che il telescopio metta a fuoco, nell'occhio dello sperimentatore, il fascio di raggi paralleli che illuminerà la piattaforma. Si porta lo

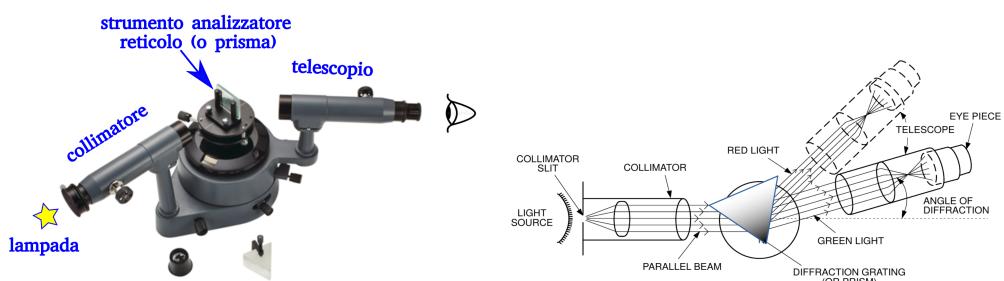


Figure 1: Lo spettrometro: a sx lo strumento in dotazione in laboratorio e a dx uno schema del funzionamento del sistema ottico.

spettrometro sul davanzale della finestra, si osserva l'edificio di fronte¹ attraverso il solo telescopio. Si regola il fuoco mediante la rotella laterale del telescopio. La croce di puntaamento e l'edificio devono apparire nitidi simultaneamente. Da questo momento la messa a fuoco del telescopio non va più modificata. Si riporta lo spettrometro sul banco e si dispone la lampada in modo da illuminare la fenditura (si vedano le indicazioni alla fine di questo paragrafo).

4. regolare la messa a fuoco del collimatore. Si vuole che il fascio divergente proveniente dalla lampada sia trasformato dal collimatore in un fascio di raggi paralleli che illuminano la piattaforma. Si posiziona nuovamente lo spettrometro sul banco, si illumina la fenditura con la lampada (preferibilmente quella al Na) e si ruota il telescopio in modo che sia allineato con il collimatore. Si regola il fuoco del collimatore con la sua rotella laterale (come per il telescopio). In questa fase è opportuno ottimizzare l'apertura della fenditura scegliendo di stringerla il più possibile, pur mantenendo una chiara visibilità della sorgente luminosa.
5. la regolazione fine dell'apertura della fenditura e del fuoco del collimatore viene usualmente fatta montando il reticolo e osservando il doppietto del Na al secondo ordine: si devono vedere le due righe gialle, separate e a fuoco. Per farlo si agisce sia sulla dimensione della fenditura che sulla messa a fuoco del collimatore. In alternativa (se si usa lampada a Hg) si procede allo stesso modo ma osservando al secondo ordine una delle righe del Hg.

Utilizzo delle lampade: Le lampade devono essere posizionate in modo da illuminare bene la fenditura. In laboratorio sono disponibili (se necessario) panni neri per schermare la piattaforma dello spettrometro dalla luce ambientale o dalla luce della lampada che non passa attraverso il collimatore. Per la messa a fuoco e successivamente per la caratterizzazione di prisma o reticolo è consigliato di utilizzare una lampada ad alta intensità (se disponibile). Se non fossero disponibili va utilizzato un tubo spettrale al Hg.

- **lampade ad alta intensità:** devono scaldarsi per raggiungere la massima efficienza. Vanno accese un po' prima del loro utilizzo facendo attenzione al fatto che possono **surrisaldarsi**: non va perciò di impedire la dissipazione termica coprendole completamente. Le lampade ad alta intensità sono provviste di una lastrina forata che riduce il diametro del fascio luminoso in modo da evitare che esca luce lateralmente al collimatore (normalmente la lastrina è già montata su uno dei due lati della lampada).
- **tubi spettrali:** sono disponibili in laboratorio, già montati sul porta lampada. I tubi al Hg sono contrassegnati in modo da poterli distinguere da quelli che contengono gas ignoto. Nell'utilizzo dei tubi spettrali vanno osservate due cautele perché **i tubi sono fragili e si danneggiano se maneggiati a mani nude**: (i) non rimuovere mai il tubo dal portalamppade (se necessario chiedete a un docente) e (ii) nell'avvicinare il tubo allo spettrometro evitare che tocchi la fenditura o altre parti dello spettrometro.

3 Misura con il prisma

Caratterizzazione del prisma: si misura l'indice di rifrazione del prisma in corrispondenza di righe monocromatiche di lunghezza d'onda nota (si usi una lampada al Hg) ottenendo coppie (λ_i, n_i) e relativi errori. Si interpolano i dati con la formula di Cauchy:

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2} + \dots \quad (1)$$

stimando i valori dei parametri a , b e la loro matrice di covarianza. Per completare la caratterizzazione del prisma è necessario misurare l'angolo formato tra le due facce lucide.

Identificazione gas ignoto: si misura l'indice di rifrazione del prisma in corrispondenza delle righe monocromatiche della lampada contenente il gas da identificare, si ricava il valore della

¹si lavora sotto l'approssimazione che l'edificio sia a una distanza sufficientemente grande per cui la luce che riflette (e che ci consente di vederlo) sia costituita da sostanzialmente raggi paralleli

Materiale	A	B (μm^2)
Vetro di quarzo	1.4580	0.00354
Vetro borosilicato BK7	1.5046	0.00420
Vetro crown duro K5	1.5220	0.00459
Vetro crown con Bario BaK4	1.5690	0.00531
Vetro Flint con Bario BaF10	1.6700	0.00743
Vetro flint denso SF10	1.7280	0.01342

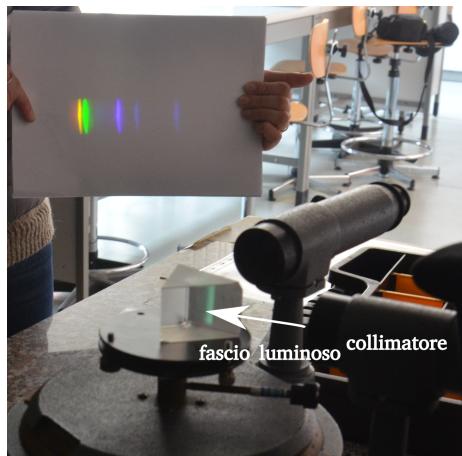


Figure 2: Sx: valori dei coefficienti A e B che compaiono nella legge di Cauchy per diversi tipi di vetro (attenzione, non è detto che il vetro del prisma fornito in laboratorio sia esattamente del tipo di uno di quelli elencati). Dx: osservazione delle righe della sorgente di Hg rifratte dal prisma: il fascio che emerge dal collimatore incide sul prisma come indicato dalla freccia, la luce che emerge dal prisma è proiettata su un foglio di carta (si riesce a fare se si usa una lampada Hg ad alta intensità luminosa).

lunghezza d'onda invertendo la legge di Cauchy (partendo dalla stima dei coefficienti a e b fatta precedentemente). Si confrontano le lunghezze d'onda delle righe osservate con quelle dei gas nobili e del CO_2 , si discute l'ipotesi più verosimile circa il tipo di gas contenuto nella lampada.

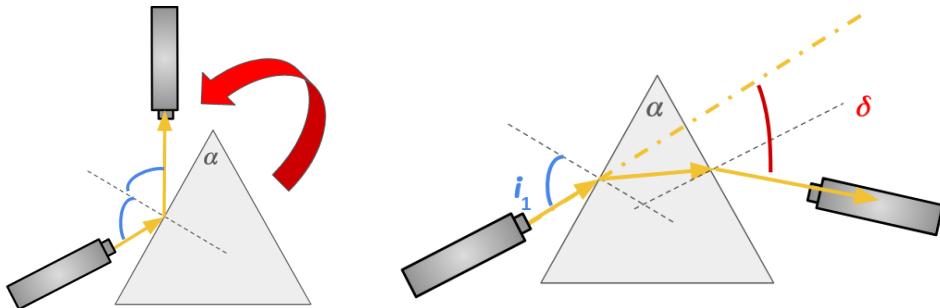


Figure 3: Sx: configurazione per la misura dell'angolo al vertice del prisma. Dx: Angolo di deviazione (δ)

Procedura di misura:

- si posiziona la lampada al Hg, si orienta il telescopio in modo che la croce di puntamento sia centrata sulla fenditura. Questa è la posizione corrispondente al raggio indeflesso.
- si pone il prisma sulla piattaforma in modo che la luce incida su una delle due facce lucidate
- **misura dell'angolo al vertice**: si ruota il telescopio in modo da osservare la luce riflessa (telescopio e collimatore formeranno un angolo acuto) e si legge la posizione angolare della piattaforma. Con collimatore e telescopio fissati, si ruota la piattaforma fino ad osservare nuovamente la luce riflessa, questa volta dalla seconda faccia lucidata. L'angolo di rotazione della piattaforma consente di misurare l'angolo formato tra le due facce.
- si ruota ora il telescopio in modo da osservare la luce che passa attraverso il prisma fino ad osservare le righe spettrali della lampada.

- **misura angolo di minima deviazione:** scelta una riga spettrale (un colore), si procede a misurare l'angolo di minima deviazione δ_m ad essa associato. Per farlo si ruota il prisma (cambia l'angolo di incidenza) "inseguendo" la riga scelta con il telescopio. Si cerca il punto in cui, pur continuando a ruotare il prisma nella stessa direzione, la riga appare *tornare indietro*. La posizione del telescopio che corrisponde al punto di inversione è quella che si chiama di *minima deviazione*. L'angolo di minima deviazione δ_m è l'angolo di cui si è ruotato il telescopio rispetto alla posizione di raggio indeflesso. Si calcola l'indice di rifrazione per questa riga/colore usando la relazione:

$$\sin \frac{\delta_m + \alpha}{2} = n \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

- si ripete la procedura per ogni riga/colore (l'angolo di inversione va cercato come descritto al punto precedente per ogni colore). Si raccolgono così coppie di dati (n_i, λ_i) che sono interpolati per ricavare i coefficienti della legge di Cauchy.
- alla lampada al Hg si sostituisce un tubo spettrale contenente il gas ignoto, si misurano gli angoli di deviazione associati a ciascuna riga di emissione e il corrispondente indice di rifrazione. Si determina la lunghezza d'onda di ciascun riga e usando tutte le righe si stima la compatibilità dello spettro osservato con quello atteso per i diversi gas.

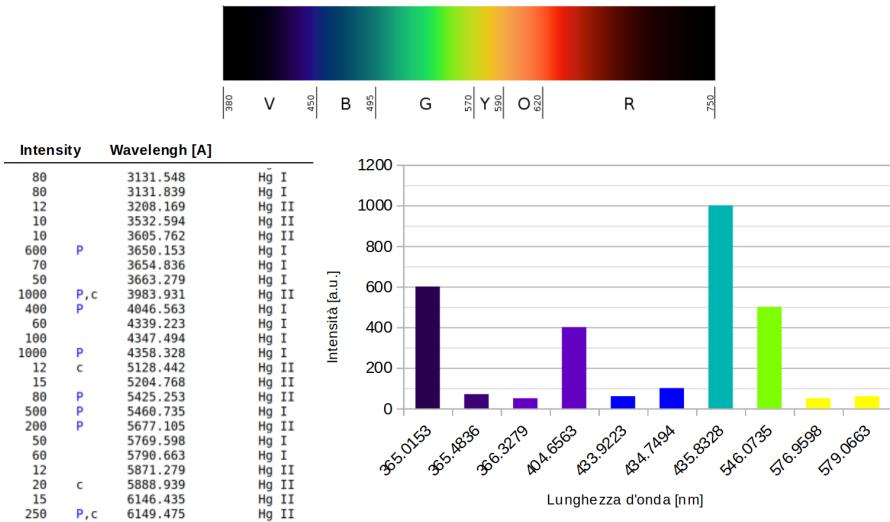


Figure 4: Tabelle delle righe di emissione dell'atomo neutro di Hg (Hg-I) estratte dal sito *NIST* (Strong Lines). Le intensità riportate sono in unità arbitrarie e dipendono dalla lampada (in particolare dalla concentrazione del Hg). I colori riportati nell'istogramma sono solo indicativi.

Suggerimenti, note e domande:

- verificare se la misura dell'angolo di minima deviazione è affetta da un'incertezza dovuta ad errori casuali (oltre all'incertezza dovuta alla sensibilità del goniometro), in caso affermativo adottare una tecnica che consenta di ridurre tale incertezza al minimo.
- quale è il numero minimo di linee spettrali che devono essere utilizzate per la stima dei parametri che compaiono nella legge di Cauchy ? E' meglio misurare tante righe o poche ma in modo più accurato ? Dai dati raccolti è possibile trarre qualche conclusione circa la scelta di arrestare lo sviluppo al secondo termine ?
- discutere nella relazione come sono valutati gli errori sulle lunghezze d'onda delle righe di emissione del tubo spettrale. Valutare quantitativamente la compatibilità dello spettro osservato con quello atteso per i diversi gas usando simultaneamente tutte le righe visibili (facendo adeguate ipotesi sulle righe che non si riescono ad osservare).

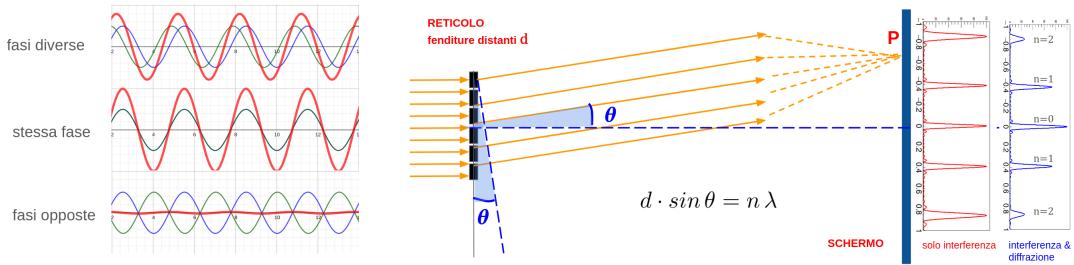


Figure 5: Sx: due onde (blu e verde) con la stessa λ/ν danno luogo al fenomeno dell'interferenza: l'ampiezza dell'onda risultante (rosso) dipende dalla differenza di fase tra le onde sommate. Dx: un reticolo consente di creare una serie di sorgenti con la stessa λ/ν e la stessa fase. Le onde emesse da ciascuna fenditura compiono un cammino ottico differente per raggiungere un punto P sullo schermo, lo sfasamento che se conseguie dà origine a una distribuzione di massimi e minimi di intensità. La figura osservata sullo schermo (in rosso) alterna massimi principali in posizione $d \cdot \sin \theta = n \lambda$ a massimi e minimi secondari. La diffrazione (dovuta alla dimensione finita delle fessure) aggiunge una modulazione di intensità (in blu).

3.1 Misura con il reticolo

Caratterizzazione del reticolo: si determina la distanza d tra le fessure del reticolo misurando la posizione angolare θ di un massimo di interferenza per una riga di lunghezza d'onda λ nota. Si usa la relazione:

$$d \cdot \sin \theta = n \lambda \quad (3)$$

dove n è l'ordine del massimo di interferenza. Si valutano dispersione angolare e risoluzione del reticolo.

Identificazione gas ignoto: si misurano le posizioni angolari dei massimi di interferenza corrispondenti alle righe monocromatiche prodotte dal gas. Noto il passo del reticolo si ricava il valore della lunghezza d'onda di ciascuna riga. Si procede all'identificazione del gas come nel caso del prisma.

Confronto tra reticolini di differente passo: (facoltativo) in laboratorio si hanno a disposizione reticolini con 300-600-1200 linee/mm. Si confronti le loro prestazioni facendo riferimento p.es. al doppietto del sodio.

Procedura di misura:

- si monta il reticolo sulla piattaforma (nell'utilizzare il reticolo di vetro fare in modo che il lato della lastrina in cui si trovano le fessure sia rivolto verso il canocchiale e non verso il collimatore).
- si illumina la fessura con la lampada al Na e si aggiustano il fuoco del collimatore e la dimensione della fessura in modo da vedere bene il doppietto del sodio al secondo ordine ($n = 2$).
- si regola la perpendicolarità del reticolo al fascio di luce controllando la simmetria della figura di interferenza rispetto al massimo centrale: gli angoli di dx e sx di un massimo dello stesso ordine devono essere identici entro l'errore di misura. Per la regolazione fine si calcola l'angolo di cui ruotare la piattaforma sulla base della differenza tra angolo dx e angolo sx per la stessa riga.
- si misura il passo del reticolo facendo riferimento al doppietto del sodio (la lunghezza d'onda è tabulata sul sito del NIST).
- si misurano le lunghezze d'onda delle altre righe del sodio e si confrontano con quelle tabulate verificando come varia l'incertezza sulla lunghezza d'onda al variare della riga (quindi di λ) e dell'ordine del massimo).



Figure 6: Osservazione delle righe della sorgente di Hg separate dal reticolo: la luce che emerge dal reticolo è proiettata su un foglio di carta (si riesce a fare se si usa una lampada Hg ad alta intensità luminosa). Si osservano i massimi del primo ordine ($n = 1$) per le righe caratteristiche del Hg. Il massimo centrale è invece acromatico (ha il colore della luce emessa dalla lampada).

- alla lampada al Na si sostituisce il tubo spettrale contenente il gas ignoto (lo stesso studiato anche con il prisma) e si misura (con la procedura che consente di ottenere le incertezze minori) la lunghezza d'onda di tutte le righe visibili. Si usano i dati così raccolti per identificare il gas contenuto nel tubo spettrale.

Suggerimenti, note e domande:

- verificare se la misura della posizione angolare di un massimo è riproducibile (c'è un errore casuale ?) e confrontare posizione angolare dx e sx dello stesso massimo (stessa riga, stesso ordine). Se ci fosse una residua differenza (che tipo di errore sarebbe ?) potrebbe avere senso utilizzare il valore medio tra i due angoli ? oppure è meglio fare la media tra le lunghezze d'onda ?
- è meglio stimare il passo del reticolo scegliendo una delle due righe del doppietto del sodio o misurando la separazione tra le due righe ?

4 Misura, analisi dei dati e relazione

Le misure devono essere fatte scegliendo una strategia che consenta di minimizzare le sorgenti di errore. E' pertanto importante individuare per ogni grandezza, che sia misurata direttamente o derivata, quali sono le principali fonti di errore e quale è il loro peso reciproco.

La procedura adottata, sia per effettuare le misure che per effettuare l'analisi dati, deve essere documentata e motivata nella relazione (o nel quaderno di laboratorio).

E' apprezzato che la relazione contenga un paragrafo conclusivo che, alla luce delle misure effettuate in laboratorio, confronti le prestazioni ottenute usando il prisma con quelle ottenute usando il reticolo.

La relazione NON deve contenere un riassunto di questa scheda né del manuale PASCO dello spettrometro. Si può fare tranquillamente riferimento a termini e figure presenti nel manuale.

Sul sito e-learning è fornito un template per le relazioni.

5 BIBLIOGRAFIA

- Manuale PASCO disponibile sul sito.

- ‘Fisica 2’,Halliday, Resnik, Krane (o qualsiasi altro testo universitario di Fisica 2 o Ottica)
- sito *NIST* <https://www.nist.gov/pml/handbook-basic-atomic-spectroscopic-data>

A Appendix

A.1 Sorgenti luminose

Le sorgenti luminose utilizzate in questa esperienza sono lampade ad arco in cui una scarica elettrica eccita gli atomi del gas contenuto nell'ampolla o nel tubo di vetro portando un elettrone atomico su un livello energetico maggiore di quello in cui normalmente si trova. Quando l'elettrone torna sul livello iniziale emette luce monocromatica con una frequenza che dipende dalla differenza di energia tra i due livelli. Il laboratorio abbiamo lampade ai vapori di Na e Hg e lampade contenenti gas nobili. Le righe di emissione di queste lampade sono caratteristiche del gas in esse contenuto. Lunghezze d'onda e intensità relative delle sorgenti atomiche sono riportate p.es. sul sito del NIST <https://www.nist.gov/pml/handbook-basic-atomic-spectroscopic-data>

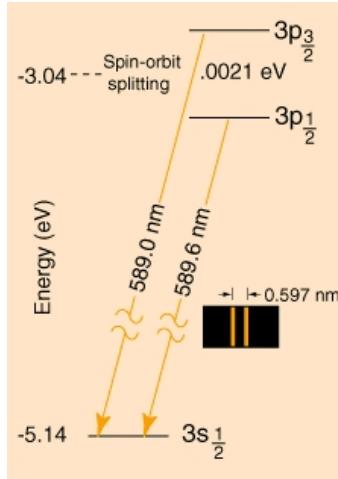


Figure 7: Le due righe che costituiscono il doppietto del sodio corrispondono all'eccitazione dell'elettrone di valenza dal livello $3s$ al livello $3p_{1/2}$ e $3p_{3/2}$ e successiva diseccitazione.

A.2 Criterio di Rayleigh

In ottica si parla spesso di risoluzione angolare di uno strumento intendendo il minimo angolo che il sistema ottico è capace di distinguere. Se p.es. osserviamo due stelle con un telescopio le vedremo separate se la loro distanza angolare (che dipende dalla distanza tra le stelle e da quella delle stelle dall'osservatore) è superiore alla risoluzione angolare del telescopio. A limitare la risoluzione angolare è la diffrazione che fa sì che l'immagine di una sorgente luminosa puntiforme sia osservata come un disco luminoso (è il massimo centrale di diffrazione o disco di Airy). Una seconda sorgente luminosa è separata dalla prima solo se i loro dischi di Airy non si sovrappongono.

La misura quantitativa della risoluzione angolare è data dal criterio di Rayleigh: se un sistema ottico (una lente) vede due sorgenti puntiformi sotto un angolo θ , proietta un'immagine che è la sovrapposizione delle rispettive figure di diffrazione. Le due figure sono distinguibili fintanto che i relativi massimi non si sovrappongono.

Il criterio di Rayleigh assume che la minima distanza angolare per cui due sorgenti sono *appena risolvibili* corrisponde all'angolo θ per cui il primo minimo di diffrazione di una sorgente coincide con il centro del massimo di diffrazione dell'altra sorgente. Questa è la condizione illustrata nel disegno di Fig. 8 e nella foto centrale che compare nel pannello più a destra. L'angolo che corrisponde a questa condizione, per una fenditura circolare di apertura D (che può anche essere la dimensione della lente), vale:

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (4)$$

Questo criterio è applicabile anche alle immagini prodotte da una fenditura rettangolare di apertura D , in tal caso in Eq.(4) non compare il fattore 1.22.

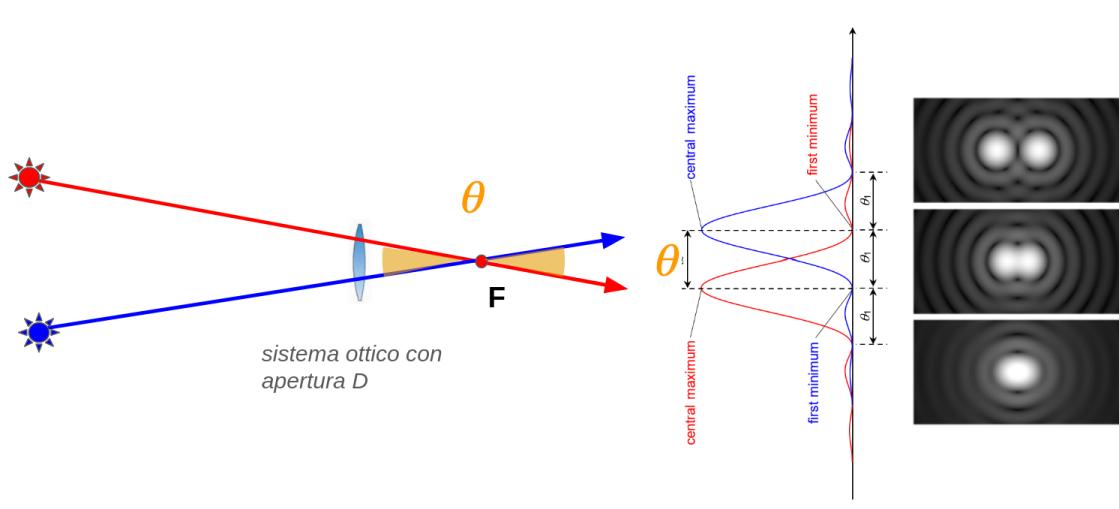


Figure 8: Lo schema a sinistra illustra il caso di due sorgenti osservate attraverso una lente (il nostro sistema ottico di apertura D) con separazione angolare θ . In centro la figura di diffrazione che corrisponde al caso in cui $\theta \simeq \theta_R$. A destra tre immagini, della stessa coppia di sorgenti, ottenute con differente risoluzione angolare (in alto $\theta > \theta_R$, in centro $\theta \simeq \theta_R$, in basso $\theta < \theta_R$)

A.3 Angolo di minima deviazione

Di seguito si riporta la dimostrazione della relazione che lega l'angolo di minima deviazione al valore dell'indice di rifrazione del prisma. La notazione è illustrata in figura 9.

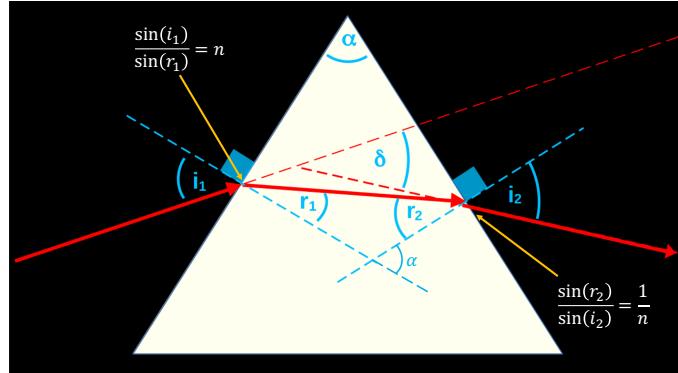


Figure 9: Schema prisma: riporta la notazione utilizzata per la derivazione dell'angolo di deviazione minimo.

Dalla relazione tra angoli interni ed esterni di un triangolo possiamo scrivere:

$$\alpha = r_1 + r_2; \quad \delta = i_1 - r_1 + i_2 - r_2 = i_1 + i_2 - \alpha \quad (5)$$

a cui corrispondono le seguenti relazioni di variazioni degli angoli:

$$dr_1 = -dr_2; \quad d\delta = di_1 + di_2 \quad (6)$$

Consideriamo adesso la legge di Snell sulle due superfici del prisma:

$$\operatorname{sen} i_1 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \operatorname{sen} r_1; \quad \operatorname{sen} r_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \operatorname{sen} i_2 \quad (7)$$

variando le leggi di Snell rispetto agli angoli si ricava:

$$\cos i_1 \cdot di_1 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos r_1 \cdot dr_1; \quad \cos r_2 \cdot dr_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \cos i_2 \cdot di_2 \quad (8)$$

A partire dalla seconda della (8) possiamo scrivere:

$$di_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\cos r_2}{\cos i_2} \cdot dr_2 = -\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\cos r_2}{\cos i_2} \cdot dr_1 = -\frac{\cos r_2}{\cos i_2} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos r_1} \cdot di_1 \quad (9)$$

dove abbiamo usato la prima della (6) nel primo passaggio e la prima delle (8) nel secondo passaggio. Consideriamo adesso la derivata della seconda della (5) rispetto all'angolo di incidenza i_1 :

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1} = 1 - \frac{\cos r_2}{\cos i_2} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos r_1} \quad (10)$$

dove abbiamo usato la (9). Questa espressione ci dice come varia l'angolo di deviazione δ tra raggio incidente e raggio uscente dal prisma per una variazione infinitesima dell'angolo di incidenza.

Ricaviamo il punto in cui (10) si annulla:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos r_2}{\cos i_2} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos r_1} = 0 \Rightarrow \cos r_2 \cdot \cos i_1 = \cos i_2 \cdot \cos r_1 \quad (11)$$

Concentriamoci sull'uguaglianza a destra ed eseguiamo qualche passaggio:

$$\cos^2 r_2 \cdot \cos^2 i_1 = \cos^2 i_2 \cdot \cos^2 r_1 \quad (12)$$

esprimendo i coseni in funzione dei seni e utilizzando le espressioni (7) della legge di Snell, si ricavano le seguenti:

$$\sin^2 i_1 = \sin^2 i_2; \quad \sin^2 r_1 = \sin^2 r_2 \quad (13)$$

Dunque il punto in cui la derivata (10) si annulla è:

$$i \equiv i_1 = i_2; \quad r \equiv r_1 = r_2 \quad (14)$$

da cui, usando le espressioni (5) si ricavano:

$$\delta_m = 2i - \alpha; \quad r = \frac{\alpha}{2} \quad (15)$$

Verifichiamo che δ_m sia effettivamente un minimo: studiamo la derivata di δ , espressione (10), per capire come varia spostandoci dal valore δ_m . L'angolo di deviazione δ cresce se:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos r_2}{\cos i_2} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos r_1} > 0 \Rightarrow \cos r_2 \cdot \cos i_1 < \cos i_2 \cdot \cos r_1 \quad (16)$$

Possiamo effettuare gli stessi passaggi fatti a partire dalla (12), solo che in questo caso abbiamo una diseguaglianza, quindi otteniamo:

$$\sin^2 i_2 < \sin^2 i_1; \quad \sin^2 r_2 < \sin^2 r_1 \quad (17)$$

da cui ricaviamo:

$$i_1 > i_2; \quad r_1 > r_2 \quad (18)$$

Dalle espressioni (5) e (15) possiamo scrivere anche:

$$2r = \alpha = r_1 + r_2 < 2r_1 \Rightarrow r_1 > r \Rightarrow i_1 > i \quad (19)$$

quindi possiamo concludere che l'angolo di deviazione δ cresce se l'angolo di incidenza i_1 è più grande dell'angolo di incidenza i per cui la derivata si annulla.

Allo stesso modo, possiamo studiare quando l'angolo di deviazione δ decresce, ponendo:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos r_2}{\cos i_2} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos r_1} < 0 \Rightarrow \cos r_2 \cdot \cos i_1 > \cos i_2 \cdot \cos r_1 \quad (20)$$

attraverso passaggi del tutto analoghi si arriva a concludere che l'angolo di deviazione δ decresce se l'angolo di incidenza i_1 è più piccolo dell'angolo di incidenza i per cui la derivata si annulla.

Per riassumere:

$$\begin{cases} i_1 > i \Rightarrow \frac{d\delta}{di_1} > 0 \Rightarrow \delta \text{ crescente} \\ i_1 < i \Rightarrow \frac{d\delta}{di_1} < 0 \Rightarrow \delta \text{ decrescente} \end{cases} \quad (21)$$

e quindi il valore δ_m dato dalla (15) è un minimo.

Per $\delta \equiv \delta_m$ si ha:

$$n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (22)$$

A.4 Potere risolutivo prisma

La performance di uno spettrometro è caratterizzata dal potere risolutivo R definito come il rapporto tra la minima differenza di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ che si può apprezzare e λ stessa:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (23)$$

Se la misura della lunghezza d'onda è fatta impiegando un prisma e valutando l'angolo di minima deviazione, la risoluzione si traduce nella più piccola differenza di angoli di minima deviazione che è apprezzabile. Se chiamiamo questa differenza $\Delta\delta_m$ Possiamo scrivere:

- δ_m angolo di minima deviazione che corrisponde a λ
- $\Delta\delta_m$ minima deviazione apprezzabile con lo spettrometro a prisma
- $\lambda + \Delta\lambda$ lunghezza d'onda che corrisponde a un angolo di minima deviazione $\delta_m + \Delta\delta_m$
- $\Delta\lambda$ minima differenza di lunghezza d'onda apprezzabile

Ricaviamo $\Delta\delta_m$ dal criterio di Rayleigh:

$$\Delta\delta_m = \frac{\lambda}{D} \quad (24)$$

dove D è la dimensione del fascio. Ora dobbiamo ricavare il $\Delta\lambda$ che corrisponde a questo $\Delta\delta_m$. Questo si fa derivando rispetto a λ la (22) che prima riscriviamo come:

$$n(\lambda) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha + \delta_m(\lambda)}{2} \quad (25)$$

differenziando otteniamo:

$$\frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\delta_m + \alpha}{2}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (26)$$

Usando la (24) e ricordando la definizione di potere risolvente R si ottiene:

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = D \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\delta_m + \alpha}{2}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (27)$$

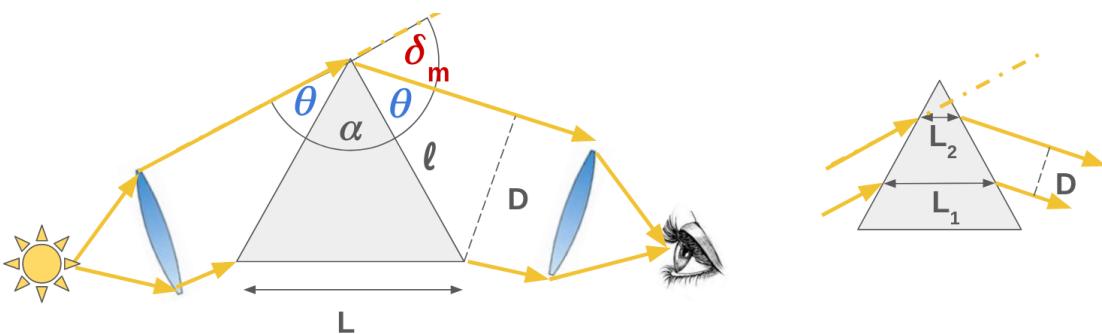


Figure 10: Schema del prisma in condizioni di minima deviazione: gli angoli formati dal fascio rispetto alle due superfici del prisma sono uguali. Nello schema a sinistra (a cui fanno riferimento i conti nel testo) si assume che il fascio illuminati esattamente il prisma o meglio che sia il prisma.

L'espressione può essere semplificata sulla base di considerazioni geometriche, con riferimento alla figura 10, possiamo scrivere:

$$\delta_m + \alpha = \pi - 2\theta \implies \cos \frac{\delta_m + \alpha}{2} = \sin \theta = \frac{D}{l} \quad (28)$$

$$l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{D}{2} \quad (29)$$

da cui otteniamo:

$$R = L \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \quad (30)$$

(il modulo perchè vogliamo che R sia sempre positivo).

Se il fascio uscente dal prisma è più piccolo dell'estensione del prisma nell'espressione (30) va sostituito a L la differenza tra i percorsi fatti dai raggi che delimitano il fascio superiormente e inferiormente $L = L_2 - L_1$.

A.5 Potere risolutivo reticolato

Nel caso dello spettrometro a reticolato, il potere risolutivo dipenderà dalla capacità di distinguere due lunghezze d'onda differenti osservate su un massimo di ordine m . Dat due due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 , con $\lambda_2 > \lambda_1$, per un reticolato a N fenditure e passo d , gli angoli che corrispondono a massimi principali di ordine m e minimi ad essi adiacenti sono:

$$\lambda_1 \rightarrow \quad \sin \theta_m^{max} = m \frac{\lambda_1}{d}, \quad \sin \theta_m^{min} = m \frac{\lambda_1}{d} \pm \frac{\lambda_1}{Nd} \quad (31)$$

$$\lambda_2 \rightarrow \quad \sin \theta_m^{max} = m \frac{\lambda_2}{d}, \quad \sin \theta_m^{min} = m \frac{\lambda_2}{d} \pm \frac{\lambda_2}{Nd} \quad (32)$$

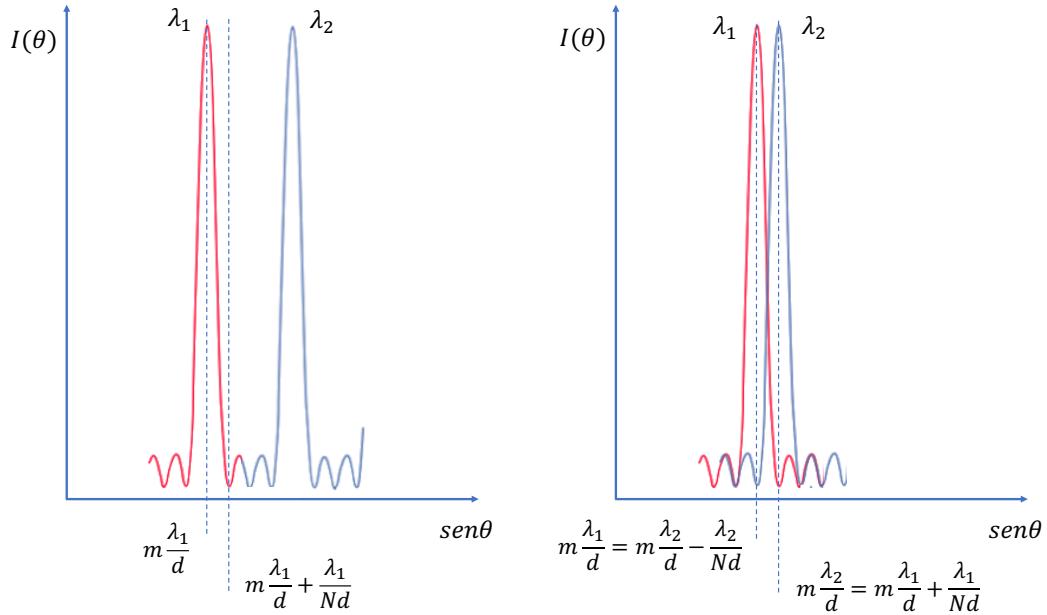


Figure 11: Sinistra: i due massimi di ordine m , corrispondenti alle righe di lunghezza d'onda λ_1 e λ_2 , rispettivamente, sono risolvibili. Destra: in questa situazione il massimo di una riga coincide con il minimo dell'altra, e i due massimi sono *appena risolvibili*.

Facendo riferimento al criterio di Rayleigh: i due massimi di ordine m sono *appena risolvibili* quando il massimo di una riga coincide con il minimo dell'altra; ovvero, usando le espressioni (31) e (32), quando sono soddisfatte le condizioni (vedi figura 11):

$$m \frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd} = m \frac{\lambda_2}{d} \quad \Rightarrow \quad m(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1}{N} \quad (33)$$

$$m \frac{\lambda_2}{d} - \frac{\lambda_2}{Nd} = m \frac{\lambda_1}{d} \quad \Rightarrow \quad m(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_2}{N} \quad (34)$$

dalla somma delle espressioni ottenute:

$$m(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2N} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = mN \quad (35)$$

e ponendo $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ e $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, possiamo scrivere il potere risolutivo del reticolo a N fenditure all'ordine m come:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad (36)$$

Come notiamo dalla (36), il potere risolutivo del reticolo è proporzionale al numero di fenditure N (illuminate) e aumenta con l'ordine m dello spettro, tuttavia non dipende dal passo d .

A.6 Potere dispersivo reticolo

Come già evidenziato nella discussione sul potere risolutivo del reticolo, per due righe le cui lunghezze d'onda differiscono di $d\lambda$ i massimi principali di ordine m si formano a due angoli che differiscono di $d\theta$. Possiamo quantificare la separazione angolare $d\theta$ a cui si formano i due massimi corrispondenti alle righe di differenza di lunghezza d'onda $d\lambda$ con la grandezza:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{d} \frac{m}{\cos\theta_m} \quad (37)$$

ottenuta derivando la relazione sull'angolo a cui si formano i massimi principali:

$$\sin\theta_m = m \frac{\lambda}{d} \quad (38)$$

La grandezza D è nota come potere dispersivo. Il potere dispersivo di un reticolo aumenta al diminuire del passo d e all'aumentare dell'ordine m dello spettro.

A.7 Considerazioni sul potere risolutivo e dispersivo di un reticolo

Potere risolutivo e dispersivo di un reticolo sono grandezze legate a proprietà diverse del reticolo, come già evidenziato nei paragrafi A.5 e A.6. Per un reticolo con passo d piccolo, ma anche numero di fenditure N (illuminate) piccolo, la dispersione è buona, ma non si riesce a risolvere lunghezze d'onda molto vicine. Infatti, i centri dei massimi sono ben distanziati, ma ciascun massimo è largo. Al contrario, per un reticolo con passo più grande, ma anche numero di fenditure maggiore, la dispersione è peggiore, ma si riescono a risolvere meglio lunghezze d'onda molto vicine perché i massimi sono più stretti. Naturalmente le performance migliori si ottengono con un reticolo il cui passo d è piccolo e il numero di fenditure (illuminate) N è grande: in questo caso si ha sia una buona dispersione che una buona risoluzione.

Notiamo che dispersione e risoluzione non dipendono esplicitamente dalla larghezza della fenditura, tuttavia essa determina il massimo valore dell'ordine m , e di conseguenza i valori più grandi che si possono ottenere per la dispersione e la risoluzione.