Assiomi

mercoledì 4 ottobre 2023   16:12

Assiomi dei numeri reali

1) Assiomi Algebrici -> in $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni ovvero somma e prodotto $(+,\cdot)$
Entrambe le operazioni godono di alcune proprietà

- Proprietà Commutativa -> $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall b \in \mathbb{R}$ $a \cdot b = b \cdot a$ e $a+b = b+a$
- Proprietà Associativa -> $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $(a+b)+c = a+(b+c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Proprietà Distributiva -> $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $(a \cdot b)+c = a+(b \cdot c)$

- $\exists$ elementi neutri -> $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : a+0 = 0+a = a$ // $\exists\, 1 \in \mathbb{R}: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- $\exists$ inverso per + -> $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists (-a) \in \mathbb{R} : a+(-a) = 0$
- $\exists$ inverso per $\cdot$ -> $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\exists\, a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato

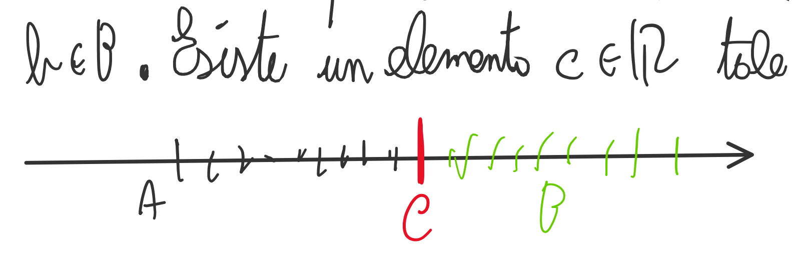
Assiomi di Ordinamento

-> in $\mathbb{R}$ è definita una relazione $\leq$ con le seguenti proprietà:

- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ è vera almeno una tra le affermazioni $a \leq b$ e $b \leq a$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ se valgono contemporaneamente $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ se $a \leq b$ allora $a+c \leq b+c$
- Se $a,b \in \mathbb{R}$ sono tali che $0 \leq a$ e $0 \leq b$, il loro prodotto (somma) sarà maggiore di zero

Assioma di Completezza

-> comunque dati due sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $A \leq B$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che $a < c < b$



- Assioma di DedeKind -> dati $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che
  - $a \leq b$ $\forall a \in A\ b \in B$
  - $A \cup B = \mathbb{R}$
  - $A \cap B = \emptyset$

  esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A\ b \in B$

- Proprietà dell'estremo superiore: Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice un massimo di A $\max A$, se esiste un elemento di A con le seguenti proprietà:
  - $a \in A$
  - $a \geq x$ $\forall x \in A$
- Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice $\min A$ se esiste, un elemento
  - $a \in A$
  - $a \leq x$ $\forall x \in A$
- Il Maggiorante di A è un elemento M tale che $M \geq x$ $\forall x \in A$
- Il Minorante di A è un elemento m tale che $m \leq x$ $\forall x \in A$
- È limitato superiormente se ammette almeno un maggiorante
- È limitato inferiormente se ammette almeno un minorante
- L'estremo superiore $\sup A$ $\exists M \in \mathbb{R} : M \leq M'$ è il minimo tra i maggioranti
- L'estremo inferiore $\inf A$ è il massimo tra i minoranti

Teorema -> Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato, allora esiste $\underline{\sup A \in \mathbb{R}}$

Dim: definisco $B = \{x \in \mathbb{R} : x$ è maggiorante per $A\}$
$B \neq \emptyset$ altrimenti A non sarebbe limitato superiormente e non esisterebbe un maggiorante.
È vero che $a \leq b$ $\forall a \in A$ e $b \in B$. Per l'assioma di completezza esiste $c \in \mathbb{R}$: $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$ e $b \in B$
In particolare $a \leq c$ $\forall a \in A$ quindi c'è un maggiorante per $A \to c \in B$ dove $c \leq b$ $\forall b \in B$
Per definizione c è il minimo di B e c è l'estremo superiore di A

Teorema -> Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, se A è limitato inferiormente $\exists$ $\underline{\inf A \in \mathbb{R}}$

Proprietà Archimede Teorema -> $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N} : n > x$ ($\mathbb{N}$ è limitato superiormente) ed equivale a dire $a > b$, $b > 0$ e $na > b$

Dim: p.a supponiamo che $\exists\, x \in \mathbb{R} : n \leq x$ $\forall x \in \mathbb{N}$ e che $\mathbb{N}$ è limitato superiormente e che x è maggiorante e per la proprietà dell'estremo superiore $\exists M \in \mathbb{R}$, $M \sup \mathbb{N}$ = minimo tra i maggioranti allora $n \leq M$
Osservo che se $n \in \mathbb{N}$ anche $n+1 \in \mathbb{N}$, quindi $n+1 \leq M$ e $n \leq M-1$. $M-1$ è anch'esso maggiorante di $\mathbb{N}$, ma oltre $M-1 < M$ ne segue che M non è $\sup \mathbb{N}$ (contraddizione)

PROPOSIZIONE senza dimostrazione: Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ esiste $\min A$

Teorema (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$ la proprietà di Archimede mi dice che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

Dim: suppongo che $0 < a < b$. Per la proprietà di Archimede $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{2}{b-a}$ $\left(\frac{2}{n} < b-a\right)$
$n(b-a) > 2$ e $nb > na+2$. Esiste per la proposizione precedente il più piccolo numero naturale m tale che
$m > na \to m \leq na+1$ (se fosse $m > na+1$ allora $m-1 > na$ e non sarebbe il più piccolo numero $\mathbb{N}$
Allora $mb > na+1 > n$ segue che $b > \frac{m}{n}$ e quindi q soddisfa le richieste

D: Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ $\underline{\text{illimitato superiormente} \to \sup A = +\infty}$
Se $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $\underline{\text{illimitato inferiormente} \to \inf A = -\infty}$