Insiemi

L'insieme é definito dagli oggetti che lo costituiscono, che si chiamano **elementi**. Simbolicamente gli insiemi vengono indicati con le lettere maiuscole e gli elementi possono essere rappresentati come segue:

- per elencazione;
- per proprietà caratteristica $\mathcal{P}(x)$.

Descrivere un insieme per elencazione s'intende scrivere il nome dell'insieme seguito dagli elementi intervallati da una virgola.

Esempio

Il seguente insieme:

$$A = \{a, b, c, d, ...\}.$$

Si tratta di un insieme definito per elencazione.

Descrivere un insieme per proprietà caratteristica $\mathcal{P}(x)$ s'intende scrivere il nome dell'insieme seguito dalla proprietà che gli elementi costituenti devono soddisfare. Si scriverà:

$$A = \{x \quad | \quad \mathcal{P}(x)\}$$

Esempio

Il seguente insieme:

$$A = \{x \quad | \quad x \text{ é una persona nata a Napoli nel 1950 } \}.$$

Si tratta di un insieme definito per proprietà caratteristica: $\mathcal{P}(x)$:=**le persone nate a Napoli e nel 1950**.

Se A è un insieme ed x è un elemento di A, si scrive:

$$x \in A.$$

Se invece l'elemento x non appartiene all'insieme A, si scrive:

$$x \notin A.$$

Vi sono i seguenti insiemi numerici:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \quad \middle| \quad m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$;
- $\mathbb{R} = \{x \quad | \quad x \text{ reale} \}$;
- $\mathbb{C} = \{x + iy \quad | \quad x, y \in \mathbb{R}\}$.

Siano A e B due insiemi.

Definizione

B é un **sottoinsieme** o **parte** di A, $B \subseteq A$, se ogni elemento di B é anche elemento di A. Il simbolo $\subseteq$ é chiamato **inclusione.**

Gli insiemi A e B sono uguali se hanno gli stessi elementi, in particolare:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Inoltre un insieme privo di elementi é chiamato insieme vuoto ed é indicato con $\emptyset$. Dato un insieme

$$A = \{a, b, c, d, \ldots\},$$

si possono considerare ad esempio le seguenti parti:

- $\emptyset$;
- A;
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \ldots$ che sono chiamati **singleton**.

$\emptyset$ e A sono chiamati **parti improprie** di A, mentre ogni altra parte, B, diversa dall'insieme vuoto e dall'insieme A stesso, é chiamata **parte propria** di A e viene indicato $B \subset A$. Il simbolo $\subset$ é chiamato **inclusione stretta.**
Siano A e B insiemi.

Definizione

Si definisce **unione** di A e B il seguente insieme:

$$A \cup B = \{x \quad | \quad x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Definizione

Si definisce **intersezione** di A e B il seguente insieme:

$$A \cap B = \{x \quad | \quad x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Qualora l'intersezione dei due insiemi è un insieme vuoto, $A \cap B = \emptyset$, i due insiemi A e B si dicono **disgiunti.**

Definizione

Si definisce **differenza** di A e B il seguente insieme:

$$A - B = \{x \quad | \quad x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Se $B \subseteq A$, allora la differenza di A e B si chiama **complemento** di B rispetto ad A e si ha:

$$A - B = \{x \in A \quad | \quad x \notin B\}.$$

Siano A, B e C insiemi, le operazioni di intersezione, unione e differenza si combinano tra loro attraverso le seguenti proprietà:

$$A \cup \emptyset = A;$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset;$$
$$A - \emptyset = A;$$
$$A - A = \emptyset;$$

Iterativa dell'intersezione: $A \cap A = A$;

Iterativa dell'unione: $A \cup A = A$;

Commutativa dell'intersezione: $A \cap B = B \cap A$;

Commutativa dell'unione: $A \cup B = B \cup A$;

Associativa dell'intersezione: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Associativa dell'unione: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

1° legge di assorbimento: $A \cap (A \cup B) = A$;

2° legge di assorbimento: $A \cup (A \cap B) = A$;

1° relazione di De Morgan: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

2° relazione di De Morgan: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

Distributiva dell'unione rispetto all'intersezione: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Distributiva dell'intersezione rispetto all'unione: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Seguono la dimostrazione della 1° e della 2° legge di assorbimento.

Dimostrazione.

É ovvio che $x \in A \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in A \cup B$ e quindi $A = A \cap (A \cup B)$. Analogamente $x \in A \Leftrightarrow x \in A$ o $x \in (A \cap B)$ e quindi $A = A \cup (A \cap B)$. □

Segue la dimostrazione della 1° relazione di De Morgan.

Dimostrazione.

Si procede dimostrando la doppia inclusione, ovvero dimostrare:

$$A-(B\cup C)\subseteq (A-B)\cap(A-C) \qquad (A-B)\cap(A-C)\subseteq A-(B\cup C)$$

Sia considerato un elemento $x\in A-(B\cup C)$, allora:

$$x\in A \text{ e } x\notin B\cup C \Rightarrow x\in A \text{ e } (x\notin B \text{ e } x\notin C).$$

Ciò implica che l'elemento $x\notin B$ e $x\notin C$ e dunque é un elemento sia dell'insieme differenza $A-B$ e $A-C$, cioé $x\in(A-B)\cap(A-C)$. Sia considerato un elemento $x\in(A-B)\cap(A-C)$, allora x è un elemento dell'insieme A che contemporaneamente non è presente nell'insieme B e C. Allora x é un elemento dell'insieme A tale che $x\notin B\cup C$, ovvero $x\in A-(B\cup C)$.

$\square$

La 2° relazione di De Morgan è dimostrata in modo analogo.

Siano A e B due insiemi.

Definizione

Si definisce **prodotto cartesiano** di A e B l'insieme:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

ovvero l'insieme delle coppie (a, b), in cui la prima coordinata a é un elemento dell'insieme A e la seconda coordinata b é un elemento dell'insieme B.

Proposizione 1

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$$

Dimostrazione.

Si osserva che, prese due coppie, (a, b) e (a', b'), di $A \times B$, allora:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ e } b = b'$$

Esempio

Siano considerati gli insiemi $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, allora il prodotto cartesiano tra i due insiemi A e B é:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

mentre il prodotto cartesiano tra i due insiemi B e A è:

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Si osserva che $A \times B \neq B \times A$.

La definizione di prodotto cartesiano può essere estesa ad un numero finito di insiemi: $A_1, A_2, \dots, A_n$. Esso é definito come l'insieme delle $n-$uple ordinate $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la cui $i-$sima coordinata a_i é un elemento dell'insieme A_i. Tale insieme si denota con:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

Siano considerati due insiemi A e B.

Definizione

Una relazione $\mathcal{R}$ fra i due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano tra A e B :

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B.$$

In particolare, presa una coppia $(x, y) \in A \times B$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$, gli elementi, x e y, si diranno essere in relazione $\mathcal{R}$ e si scriverà: $x\mathcal{R}y$. Una relazione $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, tra l'insieme A e A, si chiama **relazione binaria.** Una relazione binaria $\mathcal{R}$ può essere:

riflessiva se: $\forall x \in A \quad x\mathcal{R}x$;

antiriflessiva se: $\forall x \in A \quad x \not\mathcal{R} x$;

simmetrica se: $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

asimmetrica se: $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$;

transitiva se: $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Esempio

Sia considerato l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e in esso la parte $\mathcal{R}$ costituita dalle coppie ordinate (x, y) tali che $y - x \in \mathbb{N}_0$. Essa é una relazione binaria in $\mathbb{Z}$. Si ha:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y.$$

Tale relazione é <u>riflessiva</u>, <u>asimmetrica</u> e <u>transitiva</u>. Una relazione così fatta é chiamata **relazione d'ordine usuale in Z**.

Esempio

Sia considerato l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e la parte $\mathcal{R}'$ costituita dalle coppie ordinate (x, y) tali che $y - x \in \mathbb{N}$. Essa é una relazione binaria in Z. Si ha:

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x < y.$$

Tale relazione é <u>antiriflessiva</u> e <u>transitiva</u>. Una relazione così fatta é chiamata **relazione d'ordine stretto usuale in Z**.

Siano considerati:

- A e B due insiemi;
- $C \subseteq A$ e $D \subseteq B$ due sottoinsiemi;
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relazione tra i due insiemi.

Definizione

L'insieme ottenuto come intersezione tra il prodotto cartesiano $C \times D$ e la relazione, $\mathcal{R}$, $(C \times D) \cap \mathcal{R}$, é una relazione. Tale relazione é chiamata **relazione indotta** da $\mathcal{R}$ sugli insiemi C e D.

Definizione

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ sull'insieme A é detta **relazione d'equivalenza** in A se é <u>riflessiva</u>, <u>simmetrica</u> e <u>transitiva.</u>

Applicazioni

Diamo qui una definizione intuitiva di applicazione. Una definizione piú precisa sará data in seguito. Siano considerati due insiemi A e B. Una **funzione** o **applicazione** f consiste di un insieme A chiamato dominio di f, di un insieme B chiamato codominio di f e di una legge che associa ad ogni elemento $x \in A$ uno e un solo elemento $f(x) \in B$. Simbolicamente é indicata come segue:

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y. \end{aligned}$$

Come abbiamo detto i due insiemi sono chiamati rispettivamente:

- A **dominio** della funzione f;
- B **codominio** della funzione f.

L'elemento $y \in B$ al quale l'elemento $x \in A$ é associato é chiamato immagine dell'elemento x rispetto alla funzione f. Simbolicamente è indicata come segue:

$$y = f(x).$$

Sia data una funzione $f: A \longrightarrow B$. Essa é:

- **<u>iniettiva</u>**, se
$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2;$$
- **<u>suriettiva</u>**, se
$$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x);$$
- **<u>biettiva</u>**, se
$$\forall y \in B, \exists! x \in A : y = f(x).$$

In particolare una funzione é biettiva se é iniettiva e suriettiva; infatti per ogni elemento $y \in B$, la suriettività garantisce l'esistenza dell'elemento $x \in A$ di cui é immagine, mentre l'iniettività garantisce l'unicità del suddetto elemento $x \in A$.

Siano considerati:

- S e T due insiemi;
- $f\colon S \to T$ un'applicazione;
- $A \subseteq S$.

Definizione

L'applicazione $f_A\colon A \to T$ tale che

$$f_A(x) = f(x) \qquad \forall x \in A$$

é chiamata **restrizione** di f all'insieme A.

Se $g\colon A \to T$ é un'applicazione di A in T, ogni applicazione $f\colon S \to T$ tale che

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in A$$

é chiamata **prolungamento** di g su S.

Siano considerati:

- S e T due insiemi;
- $f : S \to T$ un'applicazione;
- $A \subseteq S$;
- $B \subseteq T$.

Definizione

Il sottoinsieme:

$$f(A) = \{y \in T \quad | \quad \exists x \in A \text{ tale che } f(x) = y\} \subseteq T$$

é chiamato **immagine** di A per mezzo di f.

Definizione

Il sottoinsieme:

$$f^{-1}(B) = \{x \in S \quad | \quad f(x) \in B\} \subseteq S$$

é chiamato **antimmagine** di B per mezzo di f.

Segue la proposizione che sottolinea le condizioni soddisfatte dall'antimmagine, per cui un'applicazione è iniettiva, suriettiva o biettiva:

Proposizione 2

- $$f \;\; iniettiva \;\; \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} \{ \; singleton \; \} & \forall y \in T \\ \;oppure & \\ \emptyset & \end{cases} .$$

- $$f \;\; suriettiva \;\; \Leftrightarrow f^{-1}(y) \neq \emptyset \quad \forall y \in T.$$

- $$f \;\; biettiva \;\; \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \{ \; singleton \; \} \quad \forall y \in T.$$

Siano considerati:

- S, T e V tre insiemi;
- $f: S \to T$ un'applicazione;
- $g: T \to V$ un'applicazione.

Definizione

L'applicazione:

$$h: S \to V$$

definita ponendo $h(x) = g(f(x))$, è chiamata **applicazione composta** da g e da f. Si denota simbolicamente: $g \circ f$.

Si osserva che l'operazione di composizione tra le due funzioni non è un'operazione commutativa, ovvero: $g \circ f \neq f \circ g$. Basti considerare il seguente esempio:

$$f: x \in \mathbb{N} \to x^2 \in \mathbb{N} \qquad g: x \in \mathbb{N} \to x + 1 \in \mathbb{N}.$$

Se si compongono le funzioni $g \circ f$, si ottiene l'applicazione: $g \circ f : x \in \mathbb{N} \to x^2 + 1 \in \mathbb{N}$. Se si compongono le funzioni $f \circ g$, si ottiene l'applicazione: $f \circ g : x \in \mathbb{N} \to (x+1)^2 \in \mathbb{N}$. Quindi:

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \neq (x+1)^2 = (f \circ g)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

L'operazione di composizioni di funzioni è un'operazione <u>associativa</u>, ovvero, se si considerano le applicazioni:

$$f : A \to B \qquad g : B \to C \qquad h : C \to D$$

allora

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

In virtù della proprietà associativa, l'applicazione $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ si può denotare semplicemente con $h \circ g \circ f$.

Sia considerato un insieme A

Definizione

L'applicazione $f\colon A \to A$ definita nel seguente modo

$$f(x) = x \quad \forall x \in A$$

ovvero ad ogni elemento dell'insieme A associa se stesso, è chiamata **applicazione identica** nell'insieme A e si indica con $\mathcal{I}_A$.

L'applicazione identica è l'elemento neutro rispetto all'operazione di composizione. In particolare, se $f\colon A \to B$ è un'applicazione e $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ le rispettive applicazioni identiche nell'insieme A e B, si ha:

$$f \circ \mathcal{I}_A = f \qquad \mathcal{I}_B \circ f = f$$

Siano considerati:

- A e B due insiemi;
- $f : A \to B$ un'applicazione.

Teorema 3

$$f \; biettiva \; \Leftrightarrow \exists! g : B \to A \; t.c. \; g \circ f = \mathcal{I}_A \; e \; f \circ g = \mathcal{I}_B.$$

Dimostrazione.

La dimostrazione si compone in due parti:

- dimostrazione dell'esistenza dell'applicazione g;
- dimostrazione dell'unicità dell'applicazione g.

$\Rightarrow)$ Poiché f é un'applicazione biettiva, allora si ha:

$$\forall y \in B \exists! x \in A : f(x) = y.$$

Dimostrazione.

Sia definita l'applicazione $g\colon B \to A$ tale che $g(y) = x$ e la si componga con l'applicazione f :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = \mathcal{I}_A.$$

Analogamente si procede se si considera la composizione $f \circ g$.

$\Leftarrow$) Sia $g\colon B \to A$ un'applicazione per cui: $g \circ f = \mathcal{I}_A$ e $f \circ g = \mathcal{I}_B$. L'applicazione f è surietttiva, perché, preso un elemento $y \in B$:

$$y = \mathcal{I}_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$$

dove $g(y) \in A$. Dunque per ogni elemento $y \in B$, esiste un elemento dell'insieme A per cui é immagine attraverso l'applicazione f. L'applicazione f è iniettiva, perché, preso due elementi $x_1, x_2 \in A$, per cui $f(x_1) = f(x_2)$. Allora si ha:

$\square$

Dimostrazione.

$$x_1 = \mathcal{I}_A(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = \mathcal{I}_A(x_2) = x_2.$$

Resta da dimostrare l'unicità dell'applicazione g. Sia considerata un'applicazione $g' : B \to A$ soddisfacente le proprietà: $g' \circ f = \mathcal{I}_A$ e $f \circ g' = \mathcal{I}_B$. Allora si ha:

$$g' = \mathcal{I}_A \circ g' = (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ \mathcal{I}_B = g.$$

□

In relazione al teorema precedente, data un'applicazione $f : A \to B$ biettiva, essa é detta anche applicazione <u>invertibile</u> e l'applicazione $g : B \to A$, la cui esistenza e unicità é garantita dal teorema, é chiamata applicazione inversa di f e si denota con f^{-1}. Inoltre si osserva che l'applicazione f^{-1} é a sua volta un'applicazione biettiva, quindi invertibile e la sua inversa é l'applicazione f stessa. In base a ciò si ha: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Sia considerata un'applicazione $f\colon A \to B$.

Definizione

Il grafico di f é la relazione $G(f) \subseteq A \times B$ così definita:

$$G(f) := \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

In generale si dimostra il seguente teorema:

Teorema 4

Sia considerata una relazione $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, allora:

$$\mathcal{R} = G(f) \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists! y \in B : x\mathcal{R}y$$

con $f\colon A \to B$ applicazione e $G(f)$ grafico di f.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$) L'applicazione $f\colon A \to B$, per definizione, associa ad ogni elemento $x \in A$ uno ed un solo elemento $y \in B : f(x) = y$. Allora segue che:

$$(x, y) \in G(f) \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow x\mathcal{R}y.$$

$\Leftarrow$) Si definisce un'applicazione $f\colon A \to B$ che fa corrispondere ad ogni $x \in A$ l'unico elemento $y \in B$ tale che $x\mathcal{R}y$. Dunque $y = f(x)$ equivale ad $x\mathcal{R}y$ e quindi $\mathcal{R} = G(f)$.

$\square$

Il teorema precedente permette di dare una definizione piú precisa di applicazione.

Definizione

Siano A e B insiemi. Un'applicazione $f : A \to B$ di dominio A e codominio B é una terna ordinata $(A, B, \mathcal{R})$, dove $\mathcal{R}$ é una relazione fra A e B soddisfacente la condizione del teorema 4. Si pone $y = f(x) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

Gruppi

Sia considerato un insieme S non vuoto.

Un'operazione interna $\perp$ nell'insieme S é un'applicazione:

$$\begin{array}{rccc} \perp: & S \times S & \rightarrow & S \\ & (x, y) & \rightarrow & x \perp y \end{array}$$

per ogni coppia $(x, y) \in S \times S$. Il simbolo $x \perp y$ é letto x *composto* y.

L'operazione $\perp$ é detta:

associativa: $\forall x, y, z \in S \qquad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$;
commutativa: $\forall x, y \in S \qquad x \perp y = y \perp x$.

Definizione

Un elemento $u \in S$ è detto elemento neutro rispetto all'operazione $\perp$ se:

$$\forall x \in S \qquad x \perp u = x = u \perp x.$$

Proposizione 5

Se $u \in S$ è l'elemento neutro rispetto all'operazione $\perp$, allora u è **unico***.*

Dimostrazione.

Si supponga che ci sia un altro elemento neutro $u' \in S$. Allora si ha:

$$u = u \perp u' = u' \Rightarrow u = u'.$$

$\square$

Sia S un insieme non vuoto e $\perp$ l'operazione interna. Inoltre si supponga che S sia dotato di elemento neutro u rispetto all'operazione $\perp$.

Definizione

Un elemento $x' \in S$ é detto simmetrico dell'elemento $x \in S$ rispetto all'operazione $\perp$ se:

$$x \perp x' = u = x' \perp x.$$

Proposizione 6

Se l'operazione $\perp$ è associativa e $x' \in S$ è l'elemento simmetrico dell'elemento $x \in S$ rispetto all'operazione $\perp$, allora x' é **unico**.

Dimostrazione.

Si supponga che ci sia un altro elemento $x'' \in S$ che é il simmetrico dell'elemento $x \in S$ rispetto all'operazione $\perp$. In base alla definizione si ha: $x \perp x'' = u = x'' \perp x$. Allora si ha:

$$x' = x' \perp u = x' \perp (x \perp x'') = (x' \perp x) \perp x'' = u \perp x'' = x'' \Rightarrow x' = x''.$$

□

Una struttura algebrica è una coppia $(S, \perp)$, dove S è un insieme non vuoto e $\perp$ è l'operazione interna definita nell'inisieme S.

Definizione

La struttura algebrica $(S, \perp)$ è detta un **gruppo** se:

1. $\perp$ è un'operazione associativa;
2. esiste l'elemento neutro rispetto all'operazione $\perp$;
3. ogni elemento di S è dotato di simmetrico.

Inoltre se l'operazione $\perp$ è commutativa, il gruppo $(S, \perp)$ é detto **gruppo abeliano.**

Esempi

Si dice che è stata adottata la *notazione additiva*, quando il simbolo dell'operazione interna è $+$. Se nella struttura algebrica $(S, +)$:

- esiste l'elemento neutro, esso è indicato con 0 ed è chiamato **zero**;
- ogni elemento $x \in S$ è dotato di simmetrico, esso è indicato con $-x$ ed é chiamato **opposto** di x.

Esempi

- Sia considerata la struttura algebrica $(\mathbb{N}, +)$, dove $\mathbb{N}$ é l'insieme dei numeri interi positivi $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Esso NON é un gruppo, poiché non esiste l'elemento neutro 0 e nessun numero naturale é dotato di opposto. Inoltre se si considera l'insieme $\mathbb{N}_0$, e quindi vi é anche lo 0, la struttura algebrica $(\mathbb{N}_0, +)$ continua a NON essere un gruppo, poiché, sebbene esista l'elemento neutro 0, nessun numero naturale é dotato di opposto.

Esempi

- Sia considerata la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, +)$, dove $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Esso è un gruppo abeliano, poiché esiste l'elemento neutro 0 e ogni numero intero è dotato di opposto, $+$ è associativa e commutativa.
- Sia considerata la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, +)$, dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali $\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$. Esso è un gruppo abeliano, poiché esiste l'elemento neutro 0 e ogni numero razionale è dotato di opposto e $+$ é associativa e commutativa.
- Sia considerata la struttura algebrica $(\mathbb{R}, +)$, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali. Esso è un gruppo abeliano, poiché esiste l'elemento neutro 0, ogni numero reale è dotato di opposto e $+$ é associativa e commutativa.

Si dice che è stata adottata la *notazione moltiplicativa*, quando il simbolo dell'operazione interna è $\cdot$. Se nella struttura algebrica $(S, \cdot)$:

- esiste l'elemento neutro, esso é indicato con 1 ed è chiamato **unità**;
- ogni elemento $x \in S$ è dotato di simmetrico, esso è indicato con x^{-1} ed é chiamato **inverso** di x.

Esempi

Si osservi che nei nostri insiemi l'operazione $\cdot$ é associativa e commutativa.

- La struttura algebrica $(\mathbb{N}, \cdot)$ NON è un gruppo, poiché nessun numero intero positivo è dotato di inverso, eccetto l'unità stessa. Analogo se si considera la struttura algebrica $(\mathbb{N}_0, \cdot)$.
- La struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \cdot)$ NON è un gruppo, poiché nessun numero intero è dotato di inverso, eccetto l'unità 1 e -1.
- La struttura algebrica $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, dove $\mathbb{Q}^*$ é l'insieme dei numeri razionali privato dello 0 è un gruppo abeliano, poiché é dotata dell'unità e ogni numero razionale di $\mathbb{Q}^*$ é dotato di inverso.

Esempi

- La struttura algebrica $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, dove $\mathbb{R}^*$ é l'insieme dei numeri reali privato dello 0 é un gruppo abeliano, poiché é dotata dell'unità e ogni numero reale di $\mathbb{R}^*$ é dotato di inverso.

Esempi *Speciali*

Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e sia considerato un intero positivo $n \geq 2$. Si definisce l'insieme delle n-ple di numeri reali il seguente insieme:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Si definisca nell'insieme $\mathbb{R}^n$ l'operazione $+$ nel seguente modo:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Esempi *Speciali*

La struttura algebrica $(\mathbb{R}^n, +)$ é un gruppo abeliano in cui l'elemento neutro é la n-pla $(0, 0, \dots, 0)$ e ogni suo elemento $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é dotato di opposto che corrisponde alla n-pla $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$.

Esempi *Speciali*

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ due interi positivi. Una matrice A di tipo (m, n) ad elementi reali é una tabella di mn numeri reali disposti lungo m righe e n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Una matrice A può essere scritta in forma abbreviata: $A = (a_{ij})$ con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Insiemi

Applicazioni

Gruppi

Esempi di Gruppi

Anelli e Campi

Esempi di Campi

Esempi *Speciali*

Si definisce l'insieme delle matrice di m righe e n colonne:

$$M^{m\times n}(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ con } i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n\}.$$

Si definisce nell'insieme $M^{m\times n}(\mathbb{R})$ l'operazione $+$ nel seguente modo:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

La struttura algebrica $(M^{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ é un <u>gruppo abeliano</u> in cui l'elemento neutro é la matrice, $\underline{0} = (0)$, ad elementi nulli, chiamata <u>matrice nulla</u>, e ogni suo elemento $A = (a_{ij}) \in M^{m\times n}(\mathbb{R})$ é dotato di opposto che corrisponde alla matrice $-A = (-a_{ij})$.
Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e $n \geq 1$ un intero. Si definisce l'insieme dei polinomi di grado al più uno a coefficienti in $\mathbb{R}$ nelle indeterminate $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \{a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n : a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Esempi *Speciali*

Si definisca nell'insieme $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ l'operazione $+$ nel seguente modo:

$$(a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + (b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_1 + \ldots + (a_n + b_n)x_n.$$

La struttura algebrica $(\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n], +)$ é un <u>gruppo abeliano</u> in cui l'elemento neutro è il polinomio nullo $\underline{0} = 0 + 0x_1 + \ldots + 0x_n$, e ogni suo elemento $a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ é dotato di opposto che corrisponde al polinomio $-a_0 - a_1x_1 - \ldots - a_nx_n$.

Anelli e Campi

Sia $\mathbb{K}$ un insieme non vuoto e si definiscano le due operazioni $+$ e $\cdot$.

Definizione

La struttura algebrica $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é detto un **anello** se:

1. $(\mathbb{K}, +)$ é un gruppo abeliano;
2. l'operazione $\cdot$ é associativa;
3. l'operazione $\cdot$ é distributiva rispetto all'operazione $+$:

$$\forall x, y, z \in A \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \text{ e } x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Inoltre se l'operazione $\cdot$ é commutativa, l'anello $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è detto **anello commutativo.**
Se l'anello $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ammette l'unità 1 rispetto all'operazione $\cdot$, l'anello é detto **anello unitario.**

Sia $\mathbb{K}$ un insieme con almeno due elementi e munito di due operazioni che indicheremo rispettivamente con $+$ e $\cdot$.

Definizione

La terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é detta un campo se sono verificate le seguenti proprietà:

1. $(\mathbb{K}, +)$ é un gruppo abeliano;
2. esiste in $\mathbb{K} - \{0\}$ un elemento 1 neutro rispetto al prodotto;
3. il prodotto é associativo e commutativo;
4. ogni elemento diverso da zero ha inverso;
5. per ogni terna $a, b, c \in K$ si ha:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Proposizione 7

Sia $\mathbb{K}$ un campo, allora:

$$\forall a \in \mathbb{K} \qquad a0 = 0$$

Dimostrazione.

$$ab = a(b+0) = ab + a0 \Rightarrow a0 = 0.$$

$\square$

Proposizione 8

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Allora

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$) Se $a = 0$ oppure $b = 0$, allora, per la Proposizione (7), $ab = 0$.

$\Rightarrow$) Se $a = 0$ l'asserto é provato; si supponga che $a \neq 0$ e quindi esso ammette inverso a^{-1}. Allora, moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza $ab = 0$ con a^{-1}, si ha:

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0 \Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

$\square$

Ne segue che se a e b sono due elementi di $\mathbb{K}$ diversi da zero allora il loro prodotto é diverso da zero. Se poniamo $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ allora si verifica che $(K^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano.
In relazione agli esempi precedenti, é possibile già affermare che le strutture algebriche $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ NON sono campi. In particolare $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é un anello commutativo e unitario.

Esempi

La struttura algebrica $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é un campo. Analogo discorso é per le strutture algebriche $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Spazio vettoriale su un campo

Siano considerati:

- $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo i cui elementi sono chiamati **scalari**;
- V un insieme non vuoto i cui elementi sono chiamati **vettori**.

Si definiscano:

- l'operazione interna nell'insieme V di addizione, $+$:

$$
\begin{array}{rrcc}
+: & V \times V & \to & V \\
 & (u, v) & \to & u + v
\end{array}
$$

- l'operazione esterna all'insieme V rispetto al campo $\mathbb{K}$ di moltiplicazione, $\bullet$:

$$
\begin{array}{rrcc}
\bullet: & \mathbb{K} \times V & \to & V \\
 & (\alpha, v) & \to & \alpha \bullet v
\end{array}
$$

Definizione

Uno **spazio vettoriale** sul campo $\mathbb{K}$ è una quaterna $(V, \mathbb{K}, +, \bullet)$ costituita dall'insieme V, dal campo $\mathbb{K}$, dall'operazione interna $+$ e dall'operazione esterna $\bullet$, tale che valgono le seguenti proprietà:

1. $(V, +)$ è un gruppo abeliano;
2. $\alpha \bullet u + \alpha \bullet v = \alpha \bullet (u + v) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall u, v \in V$;
3. $\alpha \bullet u + \beta \bullet u = (\alpha + \beta) \bullet u \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall u \in V$;
4. $(\alpha \cdot \beta) \bullet u = \alpha \bullet (\beta \bullet u) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall u \in V$;
5. $1 \bullet u = u$ con 1 l'unità del campo $\mathbb{K}$ e $\forall u \in V$.

Per convenzione:

- lo spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ sarà indicato con V;
- si scriverà $\alpha\beta$ per indicare $\alpha \cdot \beta$;
- si scriverà αu per indicare $\alpha \bullet u$;

Esempi

Sia considerato un campo $\mathbb{K}$ e sia $n \geq 2$ un intero positivo.

Esempio

Sia considerato il seguente insieme:

$$\mathbb{K}^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{K}\}$$

e si definisca l'operazione di addizione $+$ (vedi *Esempi Speciali* nel paragrafo *Gruppi*):

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Inoltre si definisca l'operazione esterna $\bullet$ nel seguente modo:

$$\alpha \bullet (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n).$$

Per la convenzione fatta precedentemente, si scriverà $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n)$ per indicare $\alpha \bullet (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Esempio

Valgono le proprietà richieste, infatti:

- é risaputo che la struttura $(\mathbb{K}^n, +)$ è un gruppo abeliano, dunque segue la proprietà (1).
- Siano $\alpha \in \mathbb{K}$ e $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, allora:

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) + \alpha(b_1, b_2, \dots, b_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) + (\alpha b_1, \alpha b_2, \dots, \alpha b_n) = (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2, \dots, \alpha a_n + \alpha b_n).$$

D'altro canto:

$$\alpha((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \alpha(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = (\alpha(a_1 + b_1), \alpha(a_2 + b_2), \dots, \alpha(a_n + b_n)) = (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2, \dots, \alpha a_n + \alpha b_n).$$

Dunque segue la proprietà (2).

Esempio

- Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, allora:

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) + \beta(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \beta a_2, \dots, \beta a_n) = (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \dots, \alpha a_n + \beta a_n).$$

  D'altro canto:

$$(\alpha + \beta)(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((\alpha + \beta)a_1, (\alpha + \beta)a_2, \dots, (\alpha + \beta)a_n) = (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \dots, \alpha a_n + \beta a_n).$$

  Dunque segue la proprietà (3).

- Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, allora:

$$(\alpha\beta)(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((\alpha\beta)a_1, (\alpha\beta)a_2, \dots, (\alpha\beta)a_n) = (\alpha(\beta a_1), \alpha(\beta a_2), \dots, \alpha(\beta a_n)).$$

Esempio

D'altro canto:

$$\alpha(\beta(a_1, a_2, \dots, a_n)) = \alpha(\beta a_1, \beta a_2, \dots, \beta a_n) = (\alpha(\beta a_1), \alpha(\beta a_2), \dots, \alpha(\beta a_n)).$$

Dunque segue la proprietà (4).

- Siano 1 l'unità del campo $\mathbb{K}$ e $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, allora:

$$1(a_1, a_2, \dots, a_n) = (1a_1, 1a_2, \dots, 1a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

  Dunque segue la proprietà (5).

$\mathbb{K}^n$ è detto **spazio vettoriale numerico** di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$.

Sia considerato un campo $\mathbb{K}$ e siano $n, m \in \mathbb{N}$ due interi positivi.

Esempio

Sia considerato l'insieme delle matrici di m righe e n colonne:

Esempio

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ con } i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n\}\,.$$

e si definisca l'operazione di addizione $+$ (vedi *Esempi Speciali* nel paragrafo *Gruppi*):

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Inoltre si definisca l'operazione esterna $\bullet$ nel seguente modo:

$$\alpha \bullet A = \alpha \bullet (a_{ij}) = (\alpha a_{ij}).$$

Per la convenzione fatta precedentemente, si scriverà αA per indicare $\alpha \bullet A$. Procedendo come nell'esempio precedente, é facile dimostrare che $M_{m,n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale.

$M_{m,n}(\mathbb{K})$ è detto **spazio vettoriale delle matrici** di dimensione nm sul campo $\mathbb{K}$.

Sia considerato un campo $\mathbb{K}$ e sia $n \geq 1$ un intero positivo.

Esempio

Sia considerato l'insieme dei polinomi di grado al più uno:

$$\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \{a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n : a_i \in \mathbb{K}\}.$$

e si definisca l'operazione di addizione $+$ (vedi *Esempi Speciali* nel paragrafo *Gruppi*):

$$(a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n)+(b_0+b_1x_1+\ldots+b_nx_n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x_1+\ldots+(a_n+b_n)x_n.$$

Inoltre si definisca l'operazione esterna $\bullet$ nel seguente modo:

$$\alpha \bullet (a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) = \alpha a_0 + \alpha a_1x_1 + \ldots + \alpha a_nx_n.$$

Per la convenzione fatta precedentemente, si scriverà $\alpha(a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)$ per indicare $\alpha \bullet (a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)$.

Esempio

Procedendo come nel primo esempio, è facile dimostrare che $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ è uno spazio vettoriale.

$\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ è detto **spazio vettoriale dei polinomi** di grado al più uno sul campo $\mathbb{K}$.

Di solito i vettori vengono denotati con una sottolineatura, per semplicità non li sottolineeremo.

Proprietà

Sia V uno spazio vettoriale definito su un campo $\mathbb{K}$, sfruttando le proprietà della definizione di spazio vettoriale, si hanno le seguenti proposizioni:

Proposizione 1

$$\forall v \in V \qquad 0v = \underline{0}$$

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in \mathbb{K}$ uno scalare.

$$\alpha v = (\alpha + 0)v = \alpha v + 0v \Rightarrow 0v = \underline{0}$$

$\square$

Proposizione 2

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \qquad \alpha \underline{0} = \underline{0}$$

Dimostrazione.

Sia $v \in V$ un vettore.

$$\alpha v = \alpha(v + \underline{0}) = \alpha v + \alpha \underline{0} \Rightarrow \alpha \underline{0} = \underline{0}.$$

$\square$

Proposizione 3

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V \qquad \alpha v = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ o } v = \underline{0}.$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$) Si supponga $\alpha \neq 0$, allora, moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza $\alpha v = \underline{0}$ per α^{-1}, si ha:

$$\alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}\underline{0} \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)v = \underline{0} \Rightarrow 1v = \underline{0} \Rightarrow v = \underline{0}.$$

$\Leftarrow$) $\alpha = 0$ o $v = \underline{0} \Rightarrow \alpha v = \underline{0}$.

$\square$

Proposizione 4

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V \qquad -(\alpha v) = (-\alpha)v = \alpha(-v)$$

Dimostrazione.

- $$\alpha v + (-\alpha)v = (\alpha - \alpha)v = 0v = \underline{0} \Rightarrow (-\alpha)v = -(\alpha v).$$
- $$\alpha v + \alpha(-v) = \alpha(v - v) = \alpha\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow \alpha(-v) = -(\alpha v).$$

$\square$

Sottospazio vettoriale

Siano considerati:

- V uno spazio vettoriale definito su un campo $\mathbb{K}$;
- $H \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto di V.

Definizione

Il sottoinsieme H dello spazio vettoriale V è definito **sottospazio vettoriale** se:

1. $\forall u, v \in H \qquad u + v \in H$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in H \qquad \alpha u \in H$.

Si indicherà $H \leq V$.

Osservazione

Sia H un sottospazio vettoriale di V, allora contiene almeno il vettore nullo $\underline{0}$. Infatti, poiché H é un sottoinsieme non vuoto di V, dovrà possedere almeno un vettore u. Considerando $0u = \underline{0}$, per la proprietà (2), si ha $\underline{0} = 0u \in H$, cioè $\underline{0} \in H$.

Esempio

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Allora è facile dimostrare che $H = \{\underline{0}\}$ e $H = V$ sono sottospazi vettoriali di V. Essi si chiamano sottospazi banali.

Esempio

Siano considerati:

- $V = \mathbb{R}^2$ lo spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$;
- $H = \{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Allora $H \leq V$. Infatti siano considerati due vettori u e v in H, dunque sono vettori del tipo:

$$u = (a, 2a) \quad v = (b, 2b) \ .$$

Esempio

Allora:

$$u + v = (a, 2a) + (b, 2b) = (a + b, 2a + 2b) = (a + b, 2(a + b)).$$

La seconda componente del vettore ottenuto è il doppio della prima componente, risulta che $u + v \in H$. Segue la proprietà (1) della definizione.
Si $\alpha \in \mathbb{R}$ uno scalare reale e sia $u \in H$ un vettore del tipo $(a, 2a)$. Allora:

$$\alpha(a, 2a) = (\alpha a, 2\alpha a)$$

poiché la seconda componente è il doppio della prima componente, risulta che $\alpha u \in H$. Segue la proprietà (2) della definizione.

Esempio

Siano considerati:

- $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$;
- $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$.

Allora $H \not\leq V$. Infatti è sufficiente notare che, considerata la matrice $A \in H$, quindi del tipo $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ e preso $0 \in \mathbb{R}$, si ha:

$$0A = 0 \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin H.$$

Dunque viene meno la proprietà (2).

Lineare dipendenza e basi

Siano considerati:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ n vettori di V;
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ n scalari di $\mathbb{K}$.

Definizione

Una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ rispetto agli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ è:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Il vettore u, ottenuto dalla combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ rispetto agli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

si dice essere dipendente linearmente dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, presenti nella combinazione lineare sono detti coefficienti della combinazione lineare.

Siano considerati:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ n vettori di V;
- $H \subseteq V$ il sottoinsieme di V delle combinazioni lineari dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$H = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ per } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Proposizione 5

Il sottoinsieme $H \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V: $H \leq V$.

Dimostrazione.

Si considerino i vettori $u, v \in V$, quindi:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n & \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ per } i = 1, 2, \ldots, n \\ v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n & \beta_i \in \mathbb{K} \text{ per } i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

$\square$

Dimostrazione.

Dunque:

$$\begin{aligned} u+v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = \\ &\qquad (\alpha_1+\beta_1)v_1 + (\alpha_2+\beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)v_n \end{aligned}$$

ovvero $u+v$ è combinazione lineare di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e quindi $u+v \in H$.
Siano $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in H$, allora:

$$\alpha u = \alpha(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha\alpha_1 v_1 + \alpha\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha\alpha_n v_n$$

ovvero αu è combinazione lineare di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e quindi $\alpha u \in H$.
Valendo le due proprietà della definizione, si può concludere che $H \leq V$. $\square$

Dalla proposizione (5) segue la definizione:

Definizione

Il sottospazio vettoriale $H \leq V$ delle combinazioni lineari dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$

$$H = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ per } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

é detto sottospazio generato dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e viene indicato con il simbolo:

$$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle.$$

Esempio

Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e i vettori $u = (1, 0)$ e $v = (2, 1)$. Allora

$$\langle u, v \rangle = \langle (1, 0), (2, 1) \rangle = \{\alpha(1, 0) + \beta(2, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + 2\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

I vettori del sottospazio generato dai vettori u e v saranno del tipo $(\alpha + 2\beta, \beta)$.

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ n vettori di V;

Definizione

Il sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è detto un sistema di generatori per lo spazio vettoriale V quando

$$V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$$

ovvero

$$\forall v \in V \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Lo spazio vettoriale V è detto **finitamente generato**, poiché un numero finito di vettori può generare tutti gli altri.

Esempio

Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e i vettori $u = (1, 0)$ e $v = (0, 2)$. Allora il sistema $\{u, v\}$ é un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$. Infatti per ogni vettore $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ risulta una loro combinazione lineare:

$$(a, b) = a(1, 0) + \frac{b}{2}(0, 2) = au + \frac{b}{2}v.$$

Esempio

Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e i vettori $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ e $w = (2, 2)$. Allora il sistema $\{u, v, w\}$ é un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$. Infatti per ogni vettore $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ risulta una loro combinazione lineare:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) + 0(2, 2) = au + bv + 0w.$$

Esempio

Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e i vettori $u = (1, 0)$ e $v = (3, 1)$. Allora il sistema $\{u, v\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$. Infatti per ogni vettore $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ è possibile determinare due reali α e β tale che

$$(a, b) = \alpha(1, 0) + \beta(3, 1) = (\alpha + 3\beta, \beta).$$

Quindi basta scegliere

$$\alpha = a - 3b, \quad \beta = b$$

cioé: $(a, b) = (a - 3b)(1, 0) + b(3, 1) = (a - 3b)u + bv.$

Esempio

Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e i vettori $u = (1, 0)$ e $v = (2, 0)$. Allora il sistema $\{u, v\}$ non é un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$. Infatti i soli vettori che si possono costruire con i vettori u e v sono del tipo $(a, 0)$.

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ n vettori di V;

Definizione

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono detti <u>linearmente indipendenti</u> se l'unica possibilità per ottenere il vettore nullo $\underline{0}$, come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, è moltiplicare scalarmente i suddetti vettori con 0. In particolare: se

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Qualora esistano scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ <u>**non tutti nulli**</u> tale che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \underline{0}$$

allora i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono <u>**linearmente dipendenti.**</u>

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ n vettori di V;

Si dimostreranno le seguenti proposizioni:

Proposizione 6

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi dipende dai rimanenti vettori.

Dimostrazione.

Siano considerati gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tale che:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \underline{0}.$$

Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora esiste un $i = 1, 2, \ldots, n$, tale che $\alpha_i \neq 0$. $\square$

Dimostrazione.

Segue che:

$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \ldots - \alpha_n v_n.$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per α_i^{-1}, si ha:

$$\alpha_i^{-1} \alpha_i v_i = \alpha_i^{-1}(-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \ldots - \alpha_n v_n)$$
$$v_i = -\alpha_i^{-1}\alpha_1 v_1 - \alpha_i^{-1}\alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_i^{-1}\alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_i^{-1}\alpha_{i+1} v_{i+1} - \ldots - \alpha_i^{-1}\alpha_n v_n$$

Ponendo $\beta_j = -\alpha_i^{-1}\alpha_j$ per $j = 1, 2, \ldots, n$ e $j \neq i$, si ottiene

$$v_i = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_n v_n.$$

Dunque il vettore v_i è scritto come combinazione lineare dei restanti vettori. $\square$

Dimostrazione.

Si supponga ora che esista un indice $i = 1, 2, \dots, n$ per cui il vettore v_i dipenda linearmente dai restanti vettori:

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n.$$

Si ha:

$$\underline{0} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

ottenendo così una combinazione lineare del vettore nullo $\underline{0}$ a scalari non tutti nulli. $\square$

Come applicazione della Proposizione (6), seguono i corollari:

Corollary 7

Siano $u, v \in V - \{\underline{0}\}$ *due vettori non nulli, allora:*

$$u, v \ \textit{linearmente dipendenti} \ \Leftrightarrow v = \alpha u \ \textit{con} \ \alpha \in \mathbb{K}^*$$

con $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$.

Corollary 8

Dati i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, *allora:*

$$\exists i = 1, 2, \ldots, n : \quad v_i = \underline{0} \Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_n \ \textit{linearmente dipendenti.}$$

Corollary 9

Dati i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, allora:

$$\exists i, j = 1, 2, \dots, n \text{ con } i \neq j : \quad v_i = \alpha v_j \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n \text{ linearmente dipendenti.}$$

Osservazione

Se V è un qualunque spazio vettoriale, allora, per il Corollario (8), il sistema di vettori

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n, \underline{0}\}$$

è sempre linearmente dipendente per ogni $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

Inoltre la Proposizione (6), che caratterizza la <u>lineare dipendenza</u> di un sistema di vettori, può essere "riletta" come una proposizione che caratterizza la <u>lineare indipendenza</u> di un sistema di vettori:

Proposizione 10

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di essi dipende dai restanti vettori.

Esempio

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e il sistema di vettori $\{u, v, w\}$ con

$$u = (1, 0, 0), \quad v = (2, 1, 3), \quad w = (0, -1, -3).$$

Si osservi che il vettore w è combinazione linare dei restanti vettori:

$$w = 2u - v$$

dunque, per la Proposizione (6), il sistema di vettori $\{u, v, w\}$ è linearmente dipendente.

Esempio

Si consideri lo spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbb{R})$ delle matrici e il sistema delle matrici $\{A, B\}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Si noti che $A = 2B$, ovvero le due matrici sono proporzionali e dunque, per il Corollario (7), il sistema di matrici $\{A, B\}$ é linearmente dipendente.

Esempio

Si consideri il seguente spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, cioé lo spazio vettoriale dei polinomi dipendenti da una sola variabile x, di grado al più 2. Sia preso il seguente sistema di polinomi $\left\{1, x^2 + x, x, x^2, 3x^2 + 3x\right\}$. Si osservi che il polinomio $3x^2 + 3x$ è il triplo del polinomio $x^2 + x$, quindi sono proporzionali. Per il Corollario (9), il sistema dato dei polinomi é linearmente dipendente.

Esempio

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e il sistema di vettori $\{u, v, w\}$ con

$$u = (1, 2, 0), \quad v = (-2, 1, 0), \quad w = (0, 1, 1).$$

Poiché nessuno dei vettori del sistema dipende dai restanti vettori, allora, per la Proposizione (10), è un sistema di vettori linearmente indipendenti.

Il teorema che segue caratterizza la cardinalità di un sistema di vettori di un dato spazio vettoriale linearmente indipendenti sotto opportune ipotesi. Per cardinalità di un sistema di vettori è da intendersi il numero dei vettori che sono presenti nel sistema. Il teorema va sotto il nome di **teorema di Steinitz,** la cui dimostrazione è fatta per induzione su un intero positivo n. Ciò significa dimostrare il teorema seguendo i seguenti step:

Step 1: dimostrare il teorema per $n = 1$ **(Base dell'induzione)**;

Step 2: ammettere il teorema vero per $n - 1$ **(Ipotesi induttiva)**;

Step 3: dimostrare il teorema per n.

Teorema 11 (Steinitz)

Dato uno spazio vettoriale V e due sistemi di vettori $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ e $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Se i vettori di S sono linearmente indipendenti ed ognuno di essi dipende dai vettori di T, allora la cardinalità di S è minore od uguale della cardinalità di T, ovvero $m \leq n$.

Dimostrazione.

Si ragiona per induzione su $n \geq 1$.

Step 1: si ponga $n = 1$, ovvero si supponga che il sistema T sia costituito da un solo vettore: $T = \{v_1\}$. Allora anche il sistema S non può avere più di un vettore, perché, se per assurdo S fosse costituito da due vettori u_1 e u_2, ciascuno di essi, per ipotesi, dipenderebbe dal solo vettore v_1 di T :

$$u_1 = \alpha v_1, \quad u_2 = \beta v_1.$$

Essendo S un sistema di vettori linearmente indipendenti, deve risultare $\alpha \neq 0$ e dunque invertibile. Segue che $v_1 = \alpha^{-1} u_1$ e, sostituendo v_1 nella seconda uguaglianza, si ottiene:

$$u_2 = \beta\alpha^{-1} u_1$$

ovvero che i vettori u_1 e u_2 sono proporzionali e, per il Corollario (7), linearmente dipendenti. Ciò è assurdo perché, per ipotesi, il sistema S é linearmente indipendente.

Dimostrazione.

Step 2: sia $n > 1$ e si supponga il teorema vero per $n - 1$.

Step 3: si dimostra il teorema per n. Poiché, per ipotesi, ogni vettore $u_i \in S$ dipende linearmente dagli n vettori di T, si ha:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u}_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\
\mathrm{u}_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{u}_m &= a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n
\end{aligned}
$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ scalari. L'indice i di a_{ij} é in riferimento al vettore u_i, di cui si esprime la combinazione lineare e l'indice j è in riferimento al vettore v_j nella medesima combinazione lineare.

$\square$

Dimostrazione.

I vettori del sistema S sono linearmente indipendenti e dunque i suddetti vettori $u_i \neq \underline{0}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Senza ledere la generalità si può considerare il vettore u_1 e, richiedendo che non possa essere nullo, deve risultare:

$$\exists \quad j = 1, 2, \ldots, n : \quad a_{1j} \neq 0$$

cioé vi deve essere almeno un coefficiente della combinazione lineare che non sia nullo. Senza ledere la generalità si può considerare il coefficiente $a_{11} \neq 0$. Allora:

$$a_{11}v_1 = u_1 - a_{12}v_2 - \ldots - a_{1n}v_n.$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per a_{11}^{-1}:

$$a_{11}^{-1}a_{11}v_1 = a_{11}^{-1}u_1 - a_{11}^{-1}a_{12}v_2 - \ldots - a_{11}^{-1}a_{1n}v_n;$$

$$v_1 = a_{11}^{-1}u_1 + b_{12}v_2 + \ldots + b_{1n}v_n$$

Dimostrazione.

denotando $b_{1j} = a_{11}^{-1} a_{1j}$ con $j = 2, \ldots, n$. Si sostituisce l'espressione v_1 nelle relazioni di $u_2, \ldots, u_m$ e si ottiene:

$$
\begin{gathered}
u_2 = a_{21}(a_{11}^{-1} u_1 + b_{12} v_2 + \ldots + b_{1n} v_n) + a_{22} v_2 + \ldots + a_{2n} v_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_m = a_{m1}(a_{11}^{-1} u_1 + b_{12} v_2 + \ldots + b_{1n} v_n) + a_{m2} v_2 + \ldots + a_{mn} v_n
\end{gathered}
$$

Svolgendo le operazioni al secondo membro dell'uguaglianza e trasportando il termine che accompagna u_1 al primo membro dell'uguaglianza, si ottiene:

$$
\begin{gathered}
u_2 - c_{21} u_1 = d_{22} v_2 + \ldots + d_{2n} v_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_m - c_{m1} u_1 = d_{m2} v_2 + \ldots + d_{mn} v_n
\end{gathered}
$$

indicando rispettivamente $c_{i1} = a_{i1} a_{11}^{-1}$ per $i = 2, \ldots, m$ e d_{ij} i coefficienti che accompagnano i vettori $v_2, \ldots, v_n$. $\square$

Dimostrazione.

Costruendo i seguenti vettori:

$$w_i = u_i - c_{i1} u_1 \qquad i = 2, \dots, m$$

le precedenti relazioni diventano:

$$\begin{gathered} w_2 = d_{22} v_2 + \dots + d_{2n} v_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_m = d_{m2} v_2 + \dots + d_{mn} v_n. \end{gathered}$$

Il seguente sistema di vettori $S' = \{w_2, \dots, w_m\}$ soddisfa le seguenti proprietà:

- S' è un sistema di vettori linearmente indipendenti: perché, se così non fosse, ci sarebbe un vettore $w_i \in S'$ che dipenderebbe dai restanti vettori $w_j \in S'$ con $j = 2, \dots, m$ e $j \neq i$. Ciò implicherebbe che anche il vettore $u_i \in S$ dipenderebbe dai rimanenti vettori $u_j \in S$ con $j = 2, \dots, m$ e $j \neq i$.

$\square$

Dimostrazione.

- Ogni vettore di S' dipende linearmente dai vettori $v_2, \ldots, v_n \in T$.

Per ipotesi induttiva (Step 2), allora la cardinalità del sistema di vettori S' è minore od uguale alla cardinalità del sistema di vettori di T, ovvero:

$$m - 1 \leq n - 1 \Rightarrow m \leq n.$$

Segue l'asserto del teorema. $\square$

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $H \leq V$ un sottospazio vettoriale di V.

Definizione

Il sottospazio vettoriale $H \leq V$ si dice finitamente generato se esiste un numero finito di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ che lo generano, ovvero:

$$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle.$$

Si considerino

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ n vettori di V;
- $H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ il sottospazio finitamente generato dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Proposizione 12

Se esiste un vettore v_i per $i = 1, 2, \dots, n$, che dipende linearmente dai restanti vettori, allora

$$H = \langle v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n \rangle.$$

Ovvero il sottospazio vettoriale generato dal sistema di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ coinciderà con il sottospazio generato dal medesimo sistema di vettori, privato di quel vettore che dipende linearmente dai restanti.

Dimostrazione.

Si supponga per semplicità che il vettore v_1 dipenda linearmente dai restanti vettori. In particolare il vettore v_1 si potrà scrivere combinazione lineare dei vettori $v_2, \dots, v_n$:

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Si procede dimostrando la proposizione con la doppia inclusione.

$\subseteq$: Si consideri un vettore $u \in H = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, quindi si scriverà la combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$:

Dimostrazione.

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n.$$

Per quanto è stato detto prima, sostituendo l'espressione del vettore v_1 nella relazione precedente, si ha:

$$u = \beta_1(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n.$$

Eseguendo le operazioni e raccogliendo a fattor comune si ottiene:

$$u = \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n$$

denotando $\gamma_i = \beta_1 \alpha_i + \beta_i$ per $i = 2, \ldots, n$. Il vettore u è combinazione lineare dei vettori $v_2, \ldots, v_n$ e dunque $u \in \langle v_2, \ldots, v_n \rangle$.

$\supseteq$: Si consideri un vettore $u \in \langle v_2, \ldots, v_n \rangle$, quindi si scriverà combinazione lineare dei vettori $v_2, \ldots, v_n$:

$$u = \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n.$$

Dimostrazione.

Si può riscrivere tale combinazione lineare nel seguente modo:

$$u = 0v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n.$$

Il vettore u è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, in cui il coefficiente che accompagna il vettore v_1 è nullo. Segue che $u \in H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$. In conclusione si ha:

$$H \subseteq \langle v_2, \ldots, v_n \rangle \subseteq H \Rightarrow H = \langle v_2, \ldots, v_n \rangle.$$

$\square$

La Proposizione (12) può essere iterata più volte fino ad avere solo vettori linearmente indipendenti, ovvero:

Da un sistema di generatori é possibile eliminare tutti quei vettori che dipendono linearmente dai restanti, ottenendo sempre un sistema di generatori per la Proposizione (12), ma tale che i vettori costituenti siano linearmente indipendenti.

In base a ciò che è stato detto, è possibile fornire la seguente definizione:

Definizione

Un sistema di generatori linearmente indipendenti è chiamata **base** dello spazio vettoriale V.

Esempio

Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e il seguente sistema di vettori $\{(2,1),(0,2)\}$. Tale sistema risulta soddisfare le seguenti proprietà:

- presa una combinazione lineare dei vettori $(2,1)$ e $(0,2)$, allora si ha:

$$\alpha_1(2,1)+\alpha_2(0,2)=\underline{0} \Rightarrow (2\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1+2\alpha_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Dunque è un sistema di vettori linearmente indipendenti.

Esempio

- preso un generico vettore $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si osserva che:

$$(a, b) = \frac{a}{2}(2, 1) + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{4}\right)(0, 2).$$

Dunque é un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, poiché ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è scritto combinazione lineare dei vettori $(2, 1)$ e $(0, 2)$.

In conclusione: per definizione il sistema di vettori $\{(2, 1), (0, 2)\}$ è una <u>base</u> per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

Proposizione 13

Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una sua base di cardinalità n. Allora qualsiasi altra base dello spazio vettoriale V ha cardinalità n.

Dimostrazione.

Si consideri un'altra base dello spazio vettoriale V: $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_m\}$. Per definizione di base, si ha che i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, ma, a loro volta dipendono, linearmente dai vettori di $\mathcal{B}'$; applicando il teorema di Steinitz (11), risulta $n \leq m$. D'altro canto anche i vettori di $\mathcal{B}'$ sono linearmente indipendenti, ma, a loro volta, dipendono linearmente dai vettori di $\mathcal{B}$; applicando nuovamente il teorema di Steinitz (11), risulta $m \leq n$. Allora, in conclusione:

$$n \leq m \leq n \Rightarrow n = m,$$

ovvero le due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ hanno la stessa cardinalità. □

In base alla Proposizione (13), è possibile fornire la seguente definizione:

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato le cui basi hanno cardinalità n. L'intero positivo n è chiamato **dimensione** dello spazio vettoriale V e si indica: $\dim V = n$.

Da ora in poi si considereranno sempre spazi vettoriali finitamente generati. Le proposizioni che seguono evidenziano il significato di dimensione di un dato spazio vettoriale. Si considerino:

- V uno spazio vettoriale finitamente generato;
- $v_1, v_2, \ldots, v_n, w \in V$ $n+1$ vettori di V.

Proposizione 14

Se il sistema di vettori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$ è linearmente dipendente e il sistema di vettori $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è linearmente indipendente, allora il vettore w dipende linearmente dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, cioé:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \quad w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Dimostrazione.

Poiché, per ipotesi, il sistema di vettori S è linearmente dipendente, allora esistono scalari non tutti nulli tali che:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha w = \underline{0}.$$

Se, per assurdo $\alpha = 0$, la relazione precedente sarà:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + 0w = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \underline{0}.$$

Dal momento in cui, per ipotesi, i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, segue che:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Allora si avrebbe che la relazione precedente:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha w = \underline{0}$$

avrebbe scalari tutti nulli: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha = 0$. Ciò è contro l'ipotesi che il sistema di vettori S é linearmente dipendente. $\square$

Dimostrazione.

Allora si dovrà avere $\alpha \neq 0$ e quindi segue:

$$\alpha w = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_n v_n$$

moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per α^{-1}, si avrà:

$$\alpha^{-1}\alpha w = \alpha^{-1}(-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_n v_n) \Rightarrow w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

indicando $\beta_i = -\alpha^{-1}\alpha_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. In tal modo il vettore w è espresso come combinazione linare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$. $\square$

Proposizione 15

*V è uno spazio vettoriale di dimensione n, $\dim V = n$, se e solo se n è il **massimo** numero di vettori linearmente indipendenti che lo spazio vettoriale V possiede.*

Dimostrazione.

$\Rightarrow$: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una sua base. Si considerino un certo numero m di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ linearmente indipendenti. Poiché ciascuno di essi dipende linearmente dai vettori di $\mathcal{B}$, in qualità di base, allora, per il Teorema di Steinitz (11), deve risultare $m \leq n$. Pertanto n è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti.

$\Leftarrow$: Sia n il numero massimo di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti. Si consideri un qualsiasi vettore $w \in V$ distinto dai vettori v_i per $i = 1, 2, \ldots, n$, allora il sistema di vettori

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$$

ottenuto aggiungendo ai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ il vettore w, ha cardinalità $n + 1 > n$ e, per la massimalità di n, il sistema di vettori S dovrà essere linearmente dipendente. Poiché i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono supposti linearmente indipendenti, allora il vettore w dovrà dipendere dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ per la Proposizione (14).

Dimostrazione.

Ciò vale per ogni vettore $w \in V$ distinto dai vettori v_i, per $i = 1, 2, \ldots, n$, e inoltre, dato che anche ciascun vettore v_i, per $i = 1, 2, \ldots, n$ dipende linearmente dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si può concludere che il sistema di vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale V. In aggiunta all'ipotesi che è un sistema di vettori linearmente indipendenti, si può concludere che il sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è una base per lo spazio vettoriale V, la cui cardinalità è n. Segue che la dimensione dello spazio vettoriale V è $\dim V = n$. □

La proposizione seguente offre una sorta di algoritmo che permette di costruire una base di uno spazio vettoriale di una certa dimensione.

Proposizione 16

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, $\dim V = n$. Siano $u_1, u_2, \ldots, u_m$, con $m < n$, vettori linearmente indipendenti. Allora si possono aggiungere opportunatamente $n - m$ vettori $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n$ tali che il sistema di vettori, $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n\}$ è una base per lo spazio vettoriale V.

Tenendo in considerazione la Proposizione (16), é possibile costruire una base di un dato spazio vettoriale V di una certa dimensione, nel seguente modo: si consideri un vettore $u_1 \in V$ non nullo e si consideri il sottospazio generato dal vettore $u_1 : H_1 = \langle u_1 \rangle$. Sapendo che il vettore u_1 é indipendente, allora:

$$H_1 = \langle u_1 \rangle \quad \begin{array}{ll} \overset{H_1 = V}{\Longrightarrow} & \{u_1\} \text{ base di } V \\ & \text{oppure} \\ \overset{H_1 \subset V}{\Longrightarrow} & \exists u_2 \in V : u_2 \notin H_1. \end{array}$$

Si consideri il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2: $H_2 = \langle u_1, u_2 \rangle$. Sapendo che, per la Proposizione (14), il sistema di vettori $\{u_1, u_2\}$ é linearmente indipendente, allora:

$$H_2 = \langle u_1, u_2 \rangle \quad \begin{array}{ll} \overset{H_2 = V}{\Longrightarrow} & \{u_1, u_2\} \text{ base di } V \\ & \text{oppure} \\ \overset{H_2 \subset V}{\Longrightarrow} & \exists u_3 \in V : u_3 \notin H_2. \end{array}$$

Si consideri il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2, u_3: $H_3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Si itererà il procedimento n volte, qualora lo spazio vettoriale V abbia dimensione n, $\dim V = n$.

Si fornisce la proposizione seguente che completa le caratteristiche di una base. Prima è opportuno dare le seguenti definizioni. Si considerino

- S un insieme non vuoto;
- $X \subseteq S$ un sottoinsieme non vuoto di S;
- $\mathcal{P}$ é una certa proprietà assegnata.

Definizione

Il sottoinsieme X si dice **munito** della proprietà $\mathcal{P}$, quando per ogni elemento $x \in S$:

$$x \in X \Leftrightarrow x \text{ soddisfa la proprietà } \mathcal{P}$$

Definizione

Il sottoinsieme X si dice **massimale** rispetto alla proprietà $\mathcal{P}$, quando:

$$\forall Y \subseteq S : X \subset Y \Rightarrow Y \text{ non ha la proprietà } \mathcal{P}.$$

In sostanza il concetto di sottoinsieme massimale é da intendersi nel seguente modo:

il sottoinsieme Y, ottenuto dal sottoinsieme X con l'aggiunta di un elemento dell'insieme S, non gode della proprietà $\mathcal{P}$ assegnata.

Definizione

Il sottoinsieme X si dice **minimale** rispetto alla proprietà $\mathcal{P}$, quando:

$$\forall Y \subseteq S : Y \subset X \Rightarrow Y \text{ non ha la proprietà } \mathcal{P}.$$

In sostanza il concetto di sottoinsieme minimale è da intendersi nel seguente modo:

il sottoinsieme Y, ottenuto dal sottoinsieme X sottraendo ad esso un suo elemento, non gode della proprietà $\mathcal{P}$ assegnata.

Tenuto in considerazione ciò, è possibile, ora fornire la seguente proposizione:

Proposizione 17

Per un sistema $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ di vettori dello spazio vettoriale V sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. *S è una base;*
2. *S è massimale rispetto alla proprietà di essere indipendente;*
3. *S è minimale rispetto alla proprietà di essere un sistema di generatori;*
4. *S è un sistema indipendente di cardinalità massima;*
5. *S è un sistema di generatori di cardinalità minima.*

Dimostrazione.

Si dimostri:

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

$\Rightarrow$: per ipotesi S è una base e, in particolare, i vettori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono linearmente indipendenti. Si consideri un vettore $w \in V$; esso, per definizione di base, è combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \ldots, u_n$, quindi il sistema $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, w\}$, ottenuto dal sistema S con l'aggiunta del vettore w, è un sistema di vettori dipendenti. Poichè ciò vale per ogni $w \in V$, in conclusione si ha che S è un sistema massimale rispetto alla proprietà di essere indipendente.

$\Leftarrow$: per ipotesi S è un sistema massimale rispetto alla proprietà di essere indipendente e si deve dimostrare che è una base, cioé un sistema di generatori. Per la massimalità, il sistema $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, w\}$, ottenuto dal sistema S con l'aggiunta del vettore $w \in V$, è un sistema dipendente.

$\square$

Dimostrazione.

Per la Proposizione (14), si ha che il vettore w è combinazione lineare dei vettori di S. Ciò vale per ogni vettore w e, tenendo in considerazione che ogni vettore u_i, per $i = 1, 2, \ldots, n$ è combinazione lineare dei vettori di S, segue che S è un sistema di generatori che è linearmente indipendente per ipotesi. In conclusione S è una base.

Si dimostri:

$$(1) \Leftrightarrow (3)$$

$\Rightarrow$: per ipotesi $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ è una base. Si privi il sistema S di un vettore u_i, ottenendo il seguente sistema di vettori

$$S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\} \subset S.$$

Tale sistema non è più un sistema di generatori, infatti il vettore u_i non può essere generato come combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$, perché il sistema $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ è linearmente indipendente.

Dimostrazione.

In conclusione S è minimale rispetto alla proprietà di essere un sistema di generatori.

$\Leftarrow$: per ipotesi S è un sistema minimale rispetto alla proprietà di essere un sistema di generatori e si deve dimostrare che è una base, cioé un sistema di vettori indipendente. Se fosse un sistema di vettori dipendente, allora uno dei vettori u_i, per $i = 1, 2, \ldots, n$, dovrà dipendere dai restanti. Per la Proposizione (12), si ha:

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle = V.$$

Ovvero il sistema $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$, ottenuto dal sistema S privandolo del vettore u_i, è ancora un sistema di generatori. Ciò è assurdo per l'ipotesi di minimalità rispetto alla proprietà di essere un sistema di generatori.

$\square$

Dimostrazione.

Si dimostri:

$$(1) \Leftrightarrow (4)$$

Basta applicare la Proposizione (15).

Si dimostri:

$$(1) \Leftrightarrow (5)$$

$\Rightarrow$: per ipotesi S è una base, in particolare è un sistema di generatori. Se esistessero m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ generanti lo spazio vettoriale V, si avrebbe, per il Teorema di Steinitz (11), $n \leq m$. Ovvero qualsiasi altro sistema di generatori avrebbe cardinalità almeno n. In conclusione n esprime la minima cardinalità di un sistema di generatori e, dato che S è un sistema di generatori, esso avrà cardinalità minima.

$\Leftarrow$: per ipotesi S é un sistema di generatori di cardinalità minima e si vuole dimostrare che è una base, cioè è un sistema linearmente indipendente.

$\square$

Dimostrazione.

Se non fosse un sistema linearmente indipendente, esisterebbe un vettore u_i, per $i = 1, 2, \ldots, n$, dipendente dai restanti. Ma allora risulterebbe:

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle = V.$$

Ovvero il sistema $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$, ottenuto dal sistema S privandolo del vettore u_i, è ancora un sistema di generatori, nonostante la cardinalità di S' sia $n - 1 < n$. Ciò è assurdo per l'ipotesi di cardinalità minima di essere un sistema di generatori. $\square$

Il tutto si può riassumere come segue:

Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n, $\dim V = n$, allora:

- n è il numero **massimo** di vettori linearmente **indipendenti**;
- n é il numero **minimo** di **generatori** per V.

Esempio

Si consideri lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$. Esso è finitamente generato e ha dimensione $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Dunque per costruire una sua base, sfruttando la Proposizione (17), saranno necessari 2 vettori linearmente indipendenti:

$$(2, -1) \quad (1, 2).$$

Facilmente si osserva che i vettori scelti sono linearmente indipendenti (anche perché non proporzionali tra loro). Inoltre, 2 è il minimo numero di vettori per generare lo spazio $\mathbb{R}^2$, allora

$$\langle (2, -1), (1, 2) \rangle = \mathbb{R}^2.$$

Si può concludere che il seguente sistema:

$$\mathcal{B} = \{(2, -1), (1, 2)\}$$

è una base per $\mathbb{R}^2$.

Esempio *Speciale*

Si consideri lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{K}^n$, con $\mathbb{K}$ campo, finitamente generato e di dimensione $\dim \mathbb{K}^n = n$. Dunque per costruire una sua base, sfruttando la Proposizione (17), saranno necessari n vettori linearmente indipendenti e si considerano i seguenti:

$$e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n$$

dove si definisce e_i, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, il vettore tale che le sue componenti sono tutte zero eccetto che al $i-$simo posto dove vi è 1:

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Facilmente si osserva che i vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, siccome n è il minimo numero di vettori per generare lo spazio $\mathbb{K}^n$, allora

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \mathbb{K}^n.$$

Si può concludere che il sistema: $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una base per $\mathbb{K}^n$.

Esempio *Speciale*

La base di questo tipo è chiamata **base canonica** di $\mathbb{K}^n$ i cui vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono chiamati **vettori canonici** dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$.

Operazioni tra sottospazi

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$;
- $H, T \leq V$ due sottospazi vettoriali.

Proposizione 18

$$H \cap T \leq V.$$

Dimostrazione.

Si deve dimostrare la validità delle due proprietà della definizione di sottospazio. Per ogni vettore $u, v \in H \cap T$, e ogni scalare $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha:

1. $$u, v \in H \cap T \Rightarrow u, v \in H \text{ e } u, v \in T \Rightarrow u + v \in H \text{ e } u + v \in T \Rightarrow u + v \in H \cap T.$$

2. $$u \in H \cap T \Rightarrow u \in H \text{ e } u \in T \Rightarrow \alpha u \in H \text{ e } \alpha u \in T \Rightarrow \alpha u \in H \cap T.$$

Si può estendere la proposizione precedente anche ad una famiglia di sottospazi dello spazio vettoriale V. Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$;
- $\mathcal{H} = \{H : H \leq V\}$ la famiglia dei sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V.

Osservazione

Risulta $\mathcal{H} \neq \emptyset$, perché tra i sottospazi vettoriali ci sono quelli banali $\{\underline{0}\}$ e V.

Proposizione 19

$$\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \leq V.$$

Dimostrazione.

Si deve dimostrare la validità delle due proprietà della definizione di sottospazio. Per ogni vettore $u, v \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$, e ogni scalare $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha: $\square$

Dimostrazione.

1.

$$u, v \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \Rightarrow u, v \in H \quad \forall H \in \mathcal{H} \Rightarrow u + v \in H \quad \forall H \in \mathcal{H} \Rightarrow u + v \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H.$$

2.

$$u \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \Rightarrow u \in H \quad \forall H \in \mathcal{H} \Rightarrow \alpha u \in H \quad \forall H \in \mathcal{H} \Rightarrow \alpha u \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H.$$

$\square$

La Proposizione (18) non vale quando si sostituisce l'operazione di intersezione con l'operazione di unione. Segue un controesempio per cui l'unione di due sottospazi NON è un sottospazio dello spazio vettoriale V.

Controesempio

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e siano considerati i seguenti sottoinsiemi:

Controesempio

$$H = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}, \quad T = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}.$$

Facilmente si dimostra che H e T sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$, verificandone le proprietà della definizione. Si consideri l'unione:

$$H \cup T = \{(a, b) : a = 0 \text{ o } b = 0\}.$$

Quest'ultimo non è un sottospazio, perché, se si considerano i vettori $(1, 0), (0, 1) \in H \cup T$ e si sommano, si ottiene:

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin H \cup T.$$

Viene meno la prima proprietà della definizione di sottospazio e dunque $H \cup T$ non è un sottospazio vettoriale di V.

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$;
- $X \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto dello spazio vettoriale V;
- $\mathcal{H}_X = \{H : X \subseteq H \leq V\}$ la famiglia di sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V contenente il sottoinsieme X.

Osservazione

Risulta $\mathcal{H}_X \neq \emptyset$, perché tra i sottospazi vettoriali c'è quello banale V.

Considerando la Proposizione (19), si ha la seguente definizione:

Definizione

Si definisce **sottospazio generato** dal sottoinsieme X l'intersezione di tutti i sottospazi dello spazio vettoriale V contenenti X :

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_X} H.$$

Proposizione 20

Il sottospazio generato dal sottoinsieme X è il più piccolo sottospazio che contiene X, ovvero ogni altro sottospazio che contiene X, deve contenere il sottospazio generato da X.

Dimostrazione.

Per definizione risulta che:

$$X \subseteq \langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_X} H.$$

Si consideri $T \leq V$ tale che $X \subseteq T$. Allora $T \in \mathcal{H}_X$ e dunque $\bigcap_{H \in \mathcal{H}_X} H \subseteq T$. $\square$

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$;
- $H, T \leq V$ due sottospazi vettoriali di V.

Si sa che l'unione dei due sottospazi, $H \cup T$, non è un sottospazio, ma è possibile considerare il sottospazio generato dalla suddetta unione $H \cup T$, cioè $\langle H \cup T \rangle$.

Si consideri il sottoinsieme $L = \{a + b : a \in H, b \in T\}$ caratterizzato da tutti i vettori ottenuti come somma di un vettore di H e di un vettore di T.

Proposizione 21

$$L \leq V.$$

Dimostrazione.

Si deve dimostrare la validità delle due proprietà della definizione di sottospazio. Per ogni vettore $u, v \in L$, e ogni scalare $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha:

- $$u, v \in L \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \exists a \in H, \exists b \in T : u = a + b \\ \Rightarrow \exists a' \in H, \exists b' \in T : v = a' + b' \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + v = (a + b) + (a' + b') = \overbrace{(a + a')}^{\in H} + \overbrace{(b + b')}^{\in T} \in L$$

$\square$

Dimostrazione.

- $$u \in L \Rightarrow \exists a \in H, \exists b \in T : u = a + b \Rightarrow \alpha u = \alpha(a+b) = \overbrace{\alpha a}^{\in H} + \overbrace{\alpha b}^{\in T} \in L$$

□

Proposizione 22

$$L = \langle H \cup T \rangle.$$

Dimostrazione.

Bisogna dimostrare che L è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $H \cup T$.
Dapprima si osserva per ogni vettore $a \in H$ e ogni vettore $b \in T$ che: □

Dimostrazione.

$$\left.\begin{array}{l} a = \overbrace{a}^{\in H} + \overbrace{\underline{0}}^{\in T} \in L \Rightarrow H \subseteq L \\ b = \underbrace{\underline{0}}_{\in H} + \underbrace{b}_{\in T} \in L \Rightarrow T \subseteq L \end{array}\right. \Rightarrow H \cup T \subseteq L.$$

Si consideri $J \leq V$ tale che contenga $H \cup T$:

$$H \cup T \subseteq J \leq V.$$

$\square$

Dimostrazione.

Per ogni vettore $a \in H$ e vettore $b \in T$, si ha che:

$$a, b \in H \cup T \subseteq J \Rightarrow a, b \in J$$

essendo J un sottospazio vettoriale, allora, per definizione, risulta che $a + b \in J$. Dunque J contiene tutti vettori somma $a + b$:

$$a + b \in J \Rightarrow L \subseteq J.$$

Segue la dimostrazione. □

Definizione

Il sottospazio generato dall'unione dei sottospazi H e T, $\langle H \cup T \rangle$, è chiamato **sottospazio congiungente**. Per la Proposizione (22), il sottospazio congiungente è indicato come segue:

$$H + T.$$

Le operazioni tra sottospazi vettoriali hanno conseguenze sulle rispettive dimensioni. Siano considerati:

- V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$;
- $\mathcal{H} = \{H : H \leq V\}$ la famiglia di sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V.

Proposizione 23

$\forall H, T \in \mathcal{H}$:

1. $$H \subseteq T \Rightarrow \dim H \leq \dim T;$$

2. $$H \subset T \Rightarrow \dim H < \dim T;$$

3. $$\dim(H + T) = \dim H + \dim T - \dim(H \cap T).$$

Dimostrazione.

I primi due punti sono facilmente dimostrabili. Ci si concentrerà sul terzo punto. Se $H \subseteq T$, allora si avrà:

$$H \cup T = T, \quad H \cap T = H.$$

Dunque segue:

$$\dim(H+T) = \dim T \quad \dim H + \dim T - \dim(H \cap T) = \dim H + \dim T - \dim H = \dim T.$$

Segue la validità della formula. Ora si supponga che nessuno dei due sottospazi vettoriali sia contenuto nell'altro. Indicando le dimensioni di H e T rispettivamente:

$$\dim H = h, \quad \dim T = t$$

e le basi di H e T rispettivamente:

$$\mathcal{B}_H = \{u_1, u_2, \ldots, u_h\}, \quad \mathcal{B}_T = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$$

Si indichi infine con $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_h, v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ il sistema di vettori ottenuto dall'unione delle due basi $\mathcal{B}_H$ e $\mathcal{B}_T$.

Dimostrazione.

Si dimostri:

$$H \cap T = \{\underline{0}\} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ base di } H + T.$$

Infatti:

Lineare indipendenza: si consideri:

$$\overbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_h u_h}^{=a} + \overbrace{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_t v_t}^{=b} = \underline{0}$$

avendo posto:

$$a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_h u_h, \quad b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_t v_t.$$

Poiché il vettore a è combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}_H$ e il vettore b è combinazione linerare dei vettori della base $\mathcal{B}_T$, allora rispettivamente $a \in H$ e $b \in T$. Inoltre la precedente combinazione lineare diverrà:

$$a + b = \underline{0} \Rightarrow a = -b.$$

Dimostrazione.

Per definizione di sottospazio vettoriale, dato che $b \in T$, allora anche $-b \in T$. Ciò implica che

$$a \in H \cap T, \quad b \in H \cap T$$

Per ipotesi $H \cap T = \{\underline{0}\}$, quindi

$$a = \underline{0}, \quad b = \underline{0}$$

ovvero

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_h u_h = \underline{0}, \quad \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_t v_t = \underline{0}$$

Poiché $\mathcal{B}_H$ e $\mathcal{B}_T$ sono basi e in particolare i rispettivi vettori sono linearmente indipendenti, si conclude:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_h = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_t = 0.$$

$\mathcal{B}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti di $H + T$. $\square$

Dimostrazione.

Sistema di generatori: si consideri un vettore $v \in H + T$, dunque

$$\exists a \in H, \exists b \in T : \quad v = a + b.$$

I vettori $a \in H$ e $b \in T$ sono combinazione lineare dei vettori delle rispettive basi $\mathcal{B}_H$ e $\mathcal{B}_T$:

$$a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_h u_h, \quad b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_t v_t.$$

Segue quindi

$$v = a + b = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_h u_h + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_t v_t,$$

cioè il vettore v è combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Per la generalità del vettore $v \in H + T$, si ha che $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per $H + T$.

Allora, nel caso in cui $H \cap T = \{\underline{0}\}$, in particolare $\dim(H \cap T) = 0$, una base di $H + T$ é ottenuta come unione delle rispettive basi di H e di T. Ciò implica che $\dim(H + T) = h + t = \dim H + \dim T$ e segue la validità della formula.

Dimostrazione.

Si supponga ora che $H \cap T \neq \{\underline{0}\}$ e dunque $\dim(H \cap T) = q \neq 0$. Si consideri una base di $H \cap T$:

$$\mathcal{B}_{H\cap T} = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}\,.$$

Dato che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ccccc} H \cap T \subseteq H & & \dim(H \cap T) \leq \dim H & & q \leq h \\ & \Rightarrow & & \Rightarrow & \\ H \cap T \subseteq T & & \dim(H \cap T) \leq \dim T & & q \leq t \end{array}$$

allora per la Proposizione (16), è possibile aggiungere alla base $\mathcal{B}_{H\cap T}$ rispettivamente:

- $h - q$ vettori per completarla ad una base di H, $\mathcal{B}_H = \{e_1, e_2, \ldots, e_q, u_{q+1}, \ldots, u_h\}$, scegliendo $u_{q+1}, \ldots, u_h$ in $H - (H \cap T)$;
- $t - q$ vettori per completarla ad una base di T, $\mathcal{B}_T = \{e_1, e_2, \ldots, e_q, v_{q+1}, \ldots, v_t\}$, scegliendo $v_{q+1}, \ldots, v_t$ in $T - (H \cap T)$.

$\square$

Dimostrazione.

Si dimostri che $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_q, u_{q+1}, \ldots, u_h, v_{q+1}, \ldots, v_t\}$ è una base di $H + T$.

Lineare indipendenza: si consideri:

$$\overbrace{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h}^{=a} + \overbrace{\beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t}^{=b} = \underline{0}$$

avendo posto:

$$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h$$
$$b = \beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t.$$

Poiché il vettore a è combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}_H$ e il vettore b é combinazione linerare dei vettori della base $\mathcal{B}_T$, allora rispettivamente $a \in H$ e $b \in T$. Inoltre la precedente combinazione lineare diverrà:

$$a + b = \underline{0} \Rightarrow a = -b.$$

□

Dimostrazione.

Per definizione di sottospazio vettoriale, dato che $b \in T$, allora anche $-b \in T$. Ciò implica che

$$a \in H \cap T, \quad b \in H \cap T$$

In particolare, poiché $\mathcal{B}_{H\cap T}$ è una base di $H \cap T$ allora:

$$\beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t = b = \delta_1 e_1 + \ldots + \delta_q e_q.$$

Trasportando tutti i termini al secondo membro, si ottiene:

$$\delta_1 e_1 + \ldots + \delta_q e_q - \beta_{q+1} v_{q+1} - \ldots - \beta_t v_t = \underline{0}$$

Essendo $\mathcal{B}_T$ una base, i vettori $e_1, \ldots, e_q, v_{q+1}, \ldots, v_t$ sono linearmente indipendenti, allora:

$$\delta_1 = \ldots = \delta_q = \beta_{q+1} = \ldots = \beta_t = 0$$

□

Dimostrazione.

Se $\beta_{q+1} = \ldots = \beta_t = 0$, allora la combinazione lineare iniziale diverrà:

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h = \underline{0}.$$

Essendo $\mathcal{B}_H$ una base, i vettori $e_1, \ldots, e_q, u_{q+1}, \ldots, u_h$ sono linearmente indipendenti, allora:

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = \alpha_{q+1} = \ldots = \alpha_h = 0.$$

In conclusione:

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = \alpha_{q+1} = \ldots = \alpha_h = \beta_1 = \ldots = \beta_t = 0 \Rightarrow \mathcal{B} \text{ linearmente indipendente}$$

Sistema di generatori: si consideri un vettore $v \in H + T$, dunque

$$\exists a \in H, \exists b \in T : \quad v = a + b.$$

$\square$

Dimostrazione.

I vettori $a \in H$ e $b \in T$ sono combinazioni lineari dei vettori delle rispettive basi $\mathcal{B}_H$ e $\mathcal{B}_T$:

$$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h,$$
$$b = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_q e_q + \beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t.$$

Segue quindi

$$\begin{aligned} v &= a + b = \\ &= \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_q e_q + \beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t \\ &= \delta_1 e_1 + \ldots + \delta_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h + \beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t \end{aligned}$$

avendo posto $\delta_i = \alpha_i + \beta_i$ per $i = 1, 2, \ldots, q$. Il vettore v è combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Per la generalità del vettore $v \in H + T$, si ha che $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per $H + T$. Segue:

$$\dim(H + T) = q + h - q + t - q = h + t - q = \dim H + \dim T - \dim(H \cap T).$$

$\square$

La formula dimostrata è chiamata **formula di Grassmann.**

Esempio

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e si considerino i seguenti sottospazi:

$$H = \langle (1,0,1), (-2,0,-2) \rangle, \quad T = \langle (3,0,3) \rangle.$$

- Si determini una base e la dimensione di H. Si osservi che $\{(1,0,1),(-2,0,-2)\}$ è un sistema di generatori per H e i due vettori sono proporzionali

  $$(-2,0,-2) = -2(1,0,1)$$

  quindi linearmente dipendenti. Per determinare una base di H dunque è sufficiente eliminare uno dei due vettori per garantire la lineare indipendenza. In conclusione si ha:

  $$\mathcal{B}_H = \{(1,0,1)\}$$

  e $\dim H = 1$.

Esempio

- Si determini una base e la dimensione di T. Si osservi che il sottospazio T é generato dal solo vettore $(3,0,3)$ che é anche linearmente indipendente. In conclusione:

$$\mathcal{B}_T = \{(3,0,3)\}$$

  e $\dim T = 1$.

- Si determini una base e la dimensione di $H \cap T$. E' evidente che una base é $(1,0,1)$ e $\dim(H \cap T) = 1$.

Esempio

- Si determini una base e la dimensione di $H+T$. Applicando la formula di Grassmann, si ottiene:

$$\dim(H+T) = \dim H + \dim T - \dim(H \cap T) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Allora una base di $H+T$ sarà costituita da un solo vettore e quindi sarà sufficiente scegliere un vettore di H o T o $H \cap T$. In conclusione:

$$\mathcal{B}_{H+T} = \{(1,0,1)\}.$$

Si consideri:

- V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$;
- $H, T \leq V$ due sottospazi vettoriali di V.

Definizione

I sottospazi H e T sono detti **supplementari** se:

$$H \cap T = \{\underline{0}\}, \quad H + T = V.$$

La proposizione che segue permette di costruire due sottospazi supplementari:

Proposizione 24

Sia $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base di V e siano

$$H = \langle u_1, u_2, \ldots, u_t \rangle \quad T = \langle u_{t+1}, u_{t+2}, \ldots, u_n \rangle$$

due sottospazi generati rispettivamente dai vettori $u_1, u_2, \ldots, u_t$ e $u_{t+1}, u_{t+2}, \ldots, u_n$. Allora H e T sono supplementari.

Dimostrazione.

Si devono dimostrare le due proprietà della definizione.

$H \cap T = \{\underline{0}\}$: sia considerato un vettore $v \in H \cap T$, allora:

$$v \in H \cap T \quad \begin{array}{l} \Rightarrow v \in H = \langle u_1, \ldots, u_t \rangle \quad \Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t \\ \Rightarrow v \in T = \langle u_{t+1}, \ldots, u_n \rangle \quad \Rightarrow v = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t - \alpha_{t+1} u_{t+1} - \ldots - \alpha_n u_n = \underline{0}.$$

Poiché $\mathcal{B}$ é una base e dunque un sistema di vettori linearmente indipendenti, allora:

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_t = \alpha_{t+1} = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Ciò vale per ogni vettore $v \in H \cap T$ e si può concludere che $H \cap T = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione.

$H+T=V$: si consideri un vettore $v \in V$, allora, sapendo che $\mathcal{B}$ è una base:

$$v = \overbrace{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t}^{=a} + \overbrace{\alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n}^{=b} = a + b$$

ponendo

$$\begin{array}{cc} a = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t, & b = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n \\ \Downarrow & \Downarrow \\ a \in H & b \in T \end{array}$$

poiché a è espresso come combinazione lineare dei vettori generatori di H e b è espresso come combinazione lineare dei vettori generatori di T. Allora ogni vettore di V è espresso come somma di un vettore di H e di un vettore di T, quindi $v \in H+T$.

$\square$

Esempio

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{B} = \{(1,2,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Allora i due seguenti sottospazi

$$H = \langle (1,2,0),(0,0,1) \rangle \quad T = \langle (1,0,1) \rangle$$

sono supplementari.

Esempio

Dunque il solo vettore $v \in H \cap T$ è il vettore nullo $\underline{0}$. Inoltre, applicando la formula di Grassmann, si ha:

$$\dim(H+T) = \dim H + \dim T - \dim(H \cap T) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow H + T = \mathbb{R}^3.$$

La proposizione che segue garantisce l'inverso della proposizione precedente:

Proposizione 25

Siano H e T sue sottospazi vettoriali supplementari di dimensione rispettivamente $\dim H = t$ *e* $\dim T = n - t$. *Se* $\mathcal{B}_H = \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ *è una base di H e* $\mathcal{B}_T = \{u_{t+1}, u_{t+2}, \ldots, u_n\}$ *è una base di T, allora* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_t, u_{t+1}, u_{t+2}, \ldots, u_n\}$ *è una base di V.*

Dimostrazione.

Bisogna dimostrare che il sistema di vettori $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_t, u_{t+1}, u_{t+2}, \ldots, u_n\}$ é un sistema di generatori linearmente indipendente.

Lineare indipendenza: si considerino gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tale che:

$$\overbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_t u_t}^{=a} + \overbrace{\alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n}^{=b} = \underline{0}$$

ponendo

$$\begin{array}{cc} a = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t, & b = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n \\ \Downarrow & \Downarrow \\ a \in H & b \in T \end{array}$$

poiché a è espresso combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_H$ e b è espresso combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_T$. Allora

$$a + b = \underline{0} \Rightarrow a = -b.$$

Dimostrazione.

Essendo T un sottospazio, anche $b \in T$. Quindi

$$a = b \in H \cap T = \{\underline{0}\}$$

per ipotesi di sottospazi supplementari e si può concludere che:

$$\begin{array}{ccc} a = \underline{0}, & & b = \underline{0} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t = \underline{0}, & & \alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n = \underline{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_t =$$
$$= \alpha_{t+1} = \ldots = \alpha_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_t, u_{t+1}, \ldots, u_n\}$$

linearmente indipendenti.

$\square$

Dimostrazione.

Sistema di generatori: si consideri un generico vettore $v \in V$. Per ipotesi di sottospazi supplementari si ha $V = H + T$ e dunque:

$$\exists a \in H \quad \exists b \in T : v = a + b.$$

Sapendo che $\mathcal{B}_H$ e $\mathcal{B}_T$ sono le due rispettive basi di H e T, si avrà:

$$a = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t, \quad b = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Sostituendo a e b nell'espressione $v = a + b$, si può concludere:

$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t + \alpha_{t+1} u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n$$

cioé il vettore v è combinazione lineare dei vettori $u_1, \ldots, u_t, u_{t+1}, \ldots, u_n$. Il sistema di vettori $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_t, u_{t+1}, \ldots, u_n\}$ è un sistema di generatori linearmente indipendente ovvero una base di V.

$\square$

Proposizione 26

Sia $H \leq V$ un sottospazio vettoriale di V. Si può sempre costruire un sottospazio T supplementare, cioè tale che.

$$H \cap T = \{\underline{0}\}, \quad H + T = V$$

Proposizione 27

Se H e T sono due sottospazi vettoriali supplementari di V allora:

$$\forall v \in V \quad \exists! a \in H \quad \exists! b \in T : \quad v = a + b.$$

Dimostrazione.

Si supponga che esistano i vettori $a' \in H$ e $b' \in T$ tale che $v = a' + b'$. Allora:

$$a + b = v = a' + b' \Rightarrow a - a' = b' - b \Rightarrow a - a', b' - b \in H \cap T.$$

□

Dimostrazione.

Per ipotesi di sottospazi supplementari, cioé $H \cap T = \{\underline{0}\}$, si avrà:

$$a - a' = \underline{0} \text{ e } b' - b = \underline{0} \Rightarrow a = a' \text{ e } b = b'.$$

$\square$

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$;
- $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ due basi di V.

Allora, per definizione di base, ogni vettore della base $\mathcal{B}'$ si scriverà come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} u'_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n \\ u'_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u'_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{cases} . \tag{1}$$

La matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori u'_i per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è chiamata **matrice di passaggio** (o matrice di **cambiamento di base**). Le relazioni di (1) possono essere scritte nella seguente forma compatta:

$$(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\mathcal{P}.$$

Proposizione 28

La matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, $\mathcal{P}$, è invertibile.

Dimostrazione.

Bisogna dimostrare che $\det \mathcal{P} \neq 0$. Il sottospazio generato $\langle u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\rangle$ di V ha dimensione pari al rango della matrice $\mathcal{P}$. Poiché i vettori $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ costituiscono una base, allora

$$\dim(\langle u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\rangle) = n \Rightarrow \rho(\mathcal{P}) = n \Rightarrow \det \mathcal{P} \neq 0.$$

Proposizione 29

Se la matrice $\mathcal{P}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, allora la sua inversa $\mathcal{P}^{-1}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.

Dimostrazione.

Poiché $\mathcal{P}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, allora:

$$(u_1', u_2', \ldots, u_n') = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\mathcal{P}.$$

Inoltre, per la Proposizione (28), la matrice $\mathcal{P}$ è invertibile, quindi moltiplicando ambo i membri per $\mathcal{P}^{-1}$, si ottiene:

$$(u_1', u_2', \ldots, u_n')\mathcal{P}^{-1} = (u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

□

Osservazione

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ e $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$. Allora la matrice di passaggio $\mathcal{P}$ avrà come colonne i vettori $u_1, u_2, \ldots, u_n$;

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$$

Matrici

Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano n ed m due interi positivi. Si definisce **matrice** una tabella i cui elementi, appartenenti al campo $\mathbb{K}$, sono disposti ordinatamente lungo m righe e n colonne, come segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si può scrivere la matrice in forma abbreviata:

$$A = (a_{ij})$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ e indici $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. Con $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ si denota l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$, i cui elementi sono definiti sul campo $\mathbb{K}$.

Sia $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$, i cui elementi sono definiti sul campo $\mathbb{K}$. Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici del suddetto insieme con $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. Si definiscono:

somma: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$, con $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

prodotto per uno scalare: $\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$, con $\lambda \in \mathbb{K}$ e $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice di tipo $m \times n$ così caratterizzata:

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

è chiamata **matrice nulla** ed è l'elemento <u>neutro</u> rispetto all'operazione di somma, ovvero:

$$A + \underline{0} = A = \underline{0} + A.$$

Inoltre, presa una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice i cui elementi sono $-a_{ij}$, con $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, è chiamata **matrice opposta**. Essa è denotata con $-A$ ed è tale che:

$$A + (-A) = \underline{0} = (-A) + A$$

Le due operazioni così definite soddisfano le proprietà della definizione di spazio vettoriale, cosicché si può concludere che l'insieme $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale.

Definizione

$\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è chiamato spazio vettoriale delle matrici di tipo $m \times n$. Inoltre la sua dimensione è $\dim \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$.

Si può definire l'operazione di prodotto tra due matrici, richiedendo che:
la prima matrice deve avere un numero di colonne pari al numero delle righe della seconda matrice.
Siano dunque $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ due matrici con la caratteristica richiesta. Si definisce prodotto tra le due matrici $A \cdot B$, la matrice $C = (c_{hk}) \in \mathbb{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, i cui elementi sono ottenuti come segue:

$$c_{hk} = a_{h1}b_{1k} + a_{h2}b_{2k} + \cdots + a_{hn}b_{nk}$$

con $h = 1, 2, \ldots, m$ e $k = 1, 2, \ldots, p$.

Esempio

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, allora:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

L'operazione di prodotto tra matrici gode della proprietà **associativa**:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

con $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Inoltre l'operazione di prodotto tra matrici <u>non</u> gode della proprietà **commutativa**. Infatti se si considera l'esempio precedente è stato svolto il prodotto $A \cdot B$, ma non è possibile eseguire il prodotto $B \cdot A$, poiché il numero delle colonne della matrice B non coincide con il numero delle righe della matrice A.

Data una matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ del tipo $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si definisce matrice trasposta di A, indica con il simbolo A^t, la matrice di $\mathbb{M}_{n,m}$, ottenuta dalla matrice A in cui ogni riga si scambia con la rispettiva colonna, ovvero:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Segue la proposizione con le proprietà della matrice trasposta:

Proposizione 1

Siano $A, A' \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$, *allora:*

- $(A + A')^t = A^t + A'^t;$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t;$
- $(\lambda A)^t = \lambda(A^t)$

Definizione

Le matrici dell'insieme $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sono dette matrici **quadrate** di ordine n, i cui elementi sono scalari del campo $\mathbb{K}$. L'insieme $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si denota con $M_n(\mathbb{K})$. Inoltre gli elementi a_{ii}, con $i = 1, 2, \ldots, n$, sono detti elementi che formano la **diagonale principale** della matrice.

Nell'insieme $M_n(\mathbb{K})$ è possibile definire la seguente matrice:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Essa è chiamata **matrice identica** ed ha la caratteristica di avere 1 lungo la diagonale principale e 0 altrove. Si può scrivere la matrice identica in forma abbreviata, con l'uso del simbolo di Kronecker:

$$I_n = (\delta_{ij}) \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{per } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Proposizione 2

Sia $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ *una matrice di tipo* $m \times n$*, allora:*

- *la matrice* I_m è **l'elemento neutro a sinistra** *rispetto all'operazione di prodotto tra matrici:*
$$I_m \cdot A = A;$$
- *la matrice* I_n è **l'elemento neutro a destra** *rispetto all'operazione di prodotto tra matrici:*
$$A \cdot I_n = A.$$

Definizione

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è detta essere **invertibile**, se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$, tale che:
$$A \cdot B = I_n = B \cdot A.$$

Determinante di una matrice

Sia considerato $M_n(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n. Ad ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è possibile associare uno scalare chiamato determinante della matrice: $|A|$ o $\det A$. La definizione di determinante di una matrice A è come segue:

$n = 1$: $A = (a_{11})$, allora:

$$|A| = a_{11};$$

$n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sia considerato ora $n > 2$ e sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Si fissi l'elemento a_{hk}, ottenuto dall'incrocio dell'$h-$sima riga e la $k-$sima colonna della matrice.

Definizione

Si definisce **minore** complementare dell'elemento a_{hk}, il determinante della matrice A_{hk}, ottenuta dalla matrice A, eliminando l'$h-$sima riga e la $k-$sima colonna.
Lo scalare $\Gamma_{hk} = (-1)^{h+k}|A_{hk}|$ è detto **complemento algebrico** dell'elemento a_{hk}.

Segue il teorema che enuncia lo sviluppo di **Laplace** per righe, per il calcolo del determinante della matrice:

Teorema 3

Per ogni indice $1 \leq i \leq n$ *fissato, si ha:* $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}$.

Segue il teorema che enuncia lo sviluppo di **Laplace** per colonne, per il calcolo del determinante della matrice:

Teorema 4

Per ogni indice $1 \leq j \leq n$ *fissato, si ha:* $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}$.

Esempio

Sia considerata la seguente matrice di $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si decide di seguire lo sviluppo di Laplace per righe, fissando, per esempio, la prima riga:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Calcolando il determinante delle matrici di ordine 2, come visto sopra, si ha:

$$|A| = 1 \cdot (-1 + 2) - 0 \cdot (-2 + 0) + 1 \cdot (4 - 0) = 5.$$

Lo stesso risultato sarebbe stato ottenuto anche se si fosse deciso di sviluppare secondo altra riga, oppure seguendo lo sviluppo di Laplace per una colonna fissata.

La scelta di seguire lo sviluppo di Laplace secondo righe o colonne e, soprattutto quale riga o quale colonna seguire, può essere indirizzata laddove sia presente quella riga o quella colonna con più 0.

Esempio

Sia considerata la seguente matrice di $M_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice è di ordine 4 e il calcolo del suo determinante potrebbe essere lungo e laborioso. Si osserva che la prima colonna ha una presenza di 0, quindi è conveniente seguire lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna:

Esempio

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppando i determinanti delle matrici di ordine 3, ovviamente, scegliendo quella riga o quella colonna più conveniente per i calcoli, si ha:

$$|A| = 1 \cdot \left[1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right] - 1 \cdot \left[-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= 1 \cdot [1 \cdot (-2 - 1) - 2 \cdot (0 - 1)] - 1 \cdot [-1 \cdot (1 - 2) - 1 \cdot (1 - 0)] =$$

$$= 1 \cdot [-3 + 2] - 1 \cdot [+1 - 1] = -1 + 0 = -1$$

Per le soli matrici di ordine 3, oltre allo sviluppo di Laplace, è possibile applicare un'ulteriore regola per poter calcolare il determinante: la **regola di Sarrus**.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33})$$

Esempio

Sia considerata la seguente matrice di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio

$$\left|\begin{array}{ccc}1 & 2 & 1\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 0\end{array}\right|\begin{array}{cc}1 & 2\\0 & 2\\0 & 1\end{array} = (1\cdot 2\cdot 0)+(2\cdot 1\cdot 0)+(1\cdot 0\cdot 1)-(1\cdot 2\cdot 0)-(1\cdot 1\cdot 1)-(2\cdot 0\cdot 0) =$$

$$= 0+0+0-0-1-0 = -1.$$

Inversa di una matrice

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice quadrata di ordine n a scalari reali. Si consideri la matrice quadrata di ordine n ottenuta dalla matrice A sostituendo l'elemento a_{ij} con il suo complemento algebrico Γ_{ij} :

$$A^* = (\Gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}).$$

Allora segue il teorema:

Teorema 5

$$A \textit{ invertibile } \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Inoltre $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^*)^t$.

Esempio

Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare il determinante della matrice; poiché si tratta di una matrice quadrata di ordine 3, è possibile utilizzare lo sviluppo di Laplace secondo una riga o una colonna a scelta, oppure utilizzare la regola di Sarrus:

$$\det A = 3 \cdot (4 - 3) + 2 \cdot (1 - 20) = 3 - 38 = -35.$$

Poiché $\det A \neq 0$, allora, per il teorema, la matrice A è invertibile.

Esempio

- Determinare i complementi algebrici di ciascun elemento a_{ij} della matrice A :

$$\Gamma_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Gamma_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Gamma_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -8$$
$$\Gamma_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 14 \qquad \Gamma_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad \Gamma_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$$
$$\Gamma_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19 \qquad \Gamma_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \Gamma_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

- La trasposta della matrice A^*:

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 14 & -19 \\ 2 & -7 & -3 \\ -8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

Esempio

- Abbiamo determinato l'inversa della matrice A, A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{35} & -\frac{2}{5} & \frac{19}{35} \\ -\frac{2}{35} & \frac{1}{5} & \frac{3}{35} \\ \frac{8}{35} & \frac{1}{5} & -\frac{12}{35} \end{pmatrix}$$

Rango di una matrice

Sia considerata una matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K}$ campo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si indichino rispettivamente:

- $\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}}_{r_1} \quad \ldots \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}_{r_i} \quad \ldots \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{r_m}$ le m **righe** della matrice;
- $c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad c_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ le n **colonne** della matrice.

Si supponga di aver individuato nella matrice p sue righe (per semplicità le prime p righe) con le seguenti proprietà:

1. $r_1, \ldots, r_p$ sono indipendenti;
2. ogni altra riga è combinazione lineare di $r_1, r_2 \ldots, r_p$

Siano $r_{i_1}, \ldots, r_{i_t}$, con $i_1, \ldots, i_t \neq 1, \ldots p$, t righe della matrice che sono linearmente indipendenti tra loro. Per la Proprietà (2), queste dipendono da $r_1, \ldots, r_p$ e , dunque, per il Lemma di Steinitz, risulta $t \leq p$.

Il numero massimo di righe indipendenti della matrice è p. Individuare nella matrice un gruppo di righe con le Proprietà (1) e (2) equivale a determinare quale sia il numero massimo di righe indipendenti che la matrice possiede.

Si supponga di aver individuato nella matrice s sue colonne (per semplicità le prime s colonne) con le seguenti proprietà:

1. $c_1, \ldots, c_s$ sono indipendenti;
2. ogni altra colonna è combinazione lineare di $c_1, c_2 \ldots, c_s$

Siano $c_{j_1}, \ldots, c_{j_t}$, con $j_1, \ldots, j_t \neq 1, \ldots s$, t colonne della matrice che sono linearmente indipendenti tra loro. Per la Proprietà (2), queste dipendono da $c_1, \ldots, c_s$ e , dunque, per il Lemma di Steinitz, risulta $t \leq s$.

Il numero massimo di colonne indipendenti della matrice è s. Individuare nella matrice un gruppo di colonne con le Proprietà (1) e (2) equivale a determinare quale sia il numero massimo di colonne indipendenti che la matrice possiede.

Proposizione 6

Il massimo numero di righe indipendenti di una matrice eguaglia il massimo numero di colonne indipendenti della matrice stessa.

Definizione

Il numero massimo di righe (colonne) indipendenti di una matrice è detto il **rango** della matrice.

Se $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è una matrice non nulla, il suo rango è indicato $\rho(A)$ e risulta

$$1 \leq \rho(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Sia $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si scelgano h righe, $r_{i_1}, \dots, r_{i_h}$, e h colonne, $c_{j_1}, \dots, c_{j_h}$, di A.

Un **minore d'ordine** h di A, sia H è una sottomatrice di A i cui elementi sono quelli che si trovano contemporaneamente sulle righe e colonne scelte.

La prima riga di H sarà costituita dagli elementi della riga r_{i_1} che occupano i posti $j_1, \dots, j_h$; la seconda riga sarà costituita dagli elementi della riga r_{i_2} che occupano i posti $j_1, \dots, j_h$; l'ultima riga di H sarà costituita dagli elementi della riga r_{i_h} che occupano i posti $j_1, \dots, j_h$.

Quindi

$$H = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_h} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_h j_1} & a_{i_h j_2} & \cdots & a_{i_h j_h} \end{pmatrix}$$

Esempio

Sia A la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se si scelgono la 1° e la 3° riga e la 4° e 5° colonna di A, il minore di ordine 2 è

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esempio

Se, invece, si scelgono 1° e la 2° riga e la 1° e la 2° colonna di A, il minore di ordine 2 è

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Sia H il minore di ordine h scegliendo le righe $r_{i_1}, \dots, r_{i_h}$ e le colonne $c_{j_1}, \dots, c_{j_h}$ della matrice A:

$$H = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_h} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_h j_1} & a_{i_h j_2} & \dots & a_{i_h j_h} \end{pmatrix}$$

Si fissi una riga della matrice A, r_i con $i \neq i_1, \dots, i_h$ e una colonna della matrice A, c_j con $j \neq j_1, \dots, j_h$.

Definizione

Un **orlato** del minore H è il minore H_{ij} d'ordine $h+1$, ottenuto scegliendo le righe $r_{i_1}, \dots, r_{i_h}, r_i$ e le colonne $c_{j_1}, \dots, c_{j_h}, c_j$ della matrice A:

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_h} & a_{i_2 j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_h j_1} & a_{i_h j_2} & \cdots & a_{i_h j_h} & a_{i_h j} \\ a_{i j_1} & a_{i j_2} & \cdots & a_{i j_h} & a_{ij} \end{pmatrix}$$

Esempio

Sia A la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esempio

Sia preso il minore di ordine 2:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Scegliendo la 2° riga e la 1° colonna della matrice A, l'orlato di H è:

$$H_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 7 (Teorema degli orlati)

Sia $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *una matrice. Sia* H *un minore d'ordine* h *di* A *ottenuto scegliendo le righe* $r_{i_1}, \dots, r_{i_h}$ *e le colonne* $c_{j_1}, \dots, c_{j_h}$ *di* A*. Se risulta:*

1. $\det H \neq 0$;
2. $\det H_{ij} = 0 \qquad \forall i \neq i_1, \dots, i_h$ e $\forall j \neq j_1, \dots, j_h$

allora:

1. *le righe* $r_{i_1}, \dots, r_{i_h}$ *sono linearmente indipendenti ed ogni altra riga è una loro combinazione lineare;*
2. *le colonne* $c_{j_1}, \dots, c_{j_h}$ *sono linearmente indipendenti e ogni altra colonna è una loro combinazione lineare.*

Ne consegue che il rango di A *è* h*:* $\rho(A) = h$.

Esempio

Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poiché è una matrice $A \in \mathbb{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ non nulla, allora

$$1 \leq \rho(A) \leq \min\{3, 4\} \Rightarrow 1 \leq \rho(A) \leq 3.$$

Dunque il rango di A, $\rho(A)$, può essere 1 o 2 o 3.
Si scelga un minore di ordine 1 non nullo, ad esempio $|2| = 2 \neq 0$ e si orli aggiungendo la 2° riga e la 2° colonna della matrice, ottenendo il minore di ordine 2:

$$H_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esempio

Risulta che $\det H_{22} = -2 \neq 0$ e quindi si continua ad orlare, aggiungendo la 3° riga e la 3° colonna della matrice, ottenendo il minore d'ordine 3:

$$H_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta che $\det H_{33} = 0$ e quindi si dovrà di nuovo orlare il minore H_{22}, aggiungendo la 3° riga e la 4° colonna della matrice, ottenendo il minore d'ordine 3:

$$H_{34} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esempio

Risulta che $\det H_{34} = 0$ e, poiché non è possibile più orlare, allora si avrà:

vi è un minore d'ordine 2 con determinante non nullo e tutti i possibili suoi orlati, dunque minori d'ordine 3, hanno determinante nullo.

Si può concludere che $\rho(A) = 2$.
Per il Teorema (7) ci sono 2 righe (colonne) della matrice A linearmente indipendenti e ogni altra riga (colonna) della matrice è una loro combinazione lineare. Infatti, poiché $\det H_{22} \neq 0$, la 1° e la 2° riga della matrice sono linearmente indipendenti e la 3° riga è una loro combinazione lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il discorso per le colonne è analogo.

Sistemi di equazioni lineari

Un **sistema di equazioni lineari** è un sistema del tipo:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

costituito da m equazioni in n incognite.

I **coefficienti** a_{ij} e i **termini noti** c_i sono elementi di un fissato campo $\mathbb{K}$.

Un sistema di equazioni lineari S può essere scritto in forma matriciale:

$$AX = C$$

denotando con:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice dei coefficienti;
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonna delle incognite
- $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{K})$ la colonna dei termini noti.

Dato un sistema di equazioni lineari S, $AX = C$ una **soluzione** di S è un vettore $Y = \begin{pmatrix} y_1, & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ tale che $AY = C$ cioè

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = c_m \end{cases}$$

Quando un sistema ha almeno una soluzione, esso è detto **compatibile**

Quando un sistema non ha soluzione, esso è detto **incompatibile**.

Criterio di compatibilità

Si consideri un sistema di equazioni lineari

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdot + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdot + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdot + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} .$$

Si possono considerare due matrici:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice dei coefficienti, detta **matrice incompleta;**

- $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix} \in M_{m,(n+1)}(\mathbb{K})$ la matrice dei coefficienti con l'aggiunta dei termini noti come ultima colonna, detta **matrice completa**.

Si indichino le n colonne della matrice A con

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il sistema S può essere scritto in **forma vettoriale**:

$$A^1 x_1 + A^2 x_2 + \cdots + A^n x_n = C$$

denotando con C il vettore colonna dei termini noti.

Se $(y_1, \quad y_2, \quad \cdots, \quad y_n)$ è una soluzione del sistema, allora il vettore C dei termini noti è combinazione lineare dei vettori $A^1, A^2, \cdots, A^n$.

Se il vettore C dei termini noti è combinazione lineare dei vettori $A^1, A^2, \cdots, A^n$ colonne di A

$$A^1 y_1 + A^2 y_2 + \cdots + A^n y_n = C$$

allora $\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$ è una soluzione del sistema .

Ci sono tante soluzioni quanti sono i modi in cui $\underline{C}$ si può ottenere come combinazione lineare dei vettori $A^1, A^2, \cdots, A^n$.

Proposizione 1

Il sistema

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

ha soluzioni se e soltanto se il vettore C dei termini noti si può ottenere come combinazione lineare dei vettori colonna $A^1, A^2, \cdots, A^n$ della matrice A.

Proposizione 2 (Teorema di Rouchè-Capelli)

Il sistema

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

ha soluzioni se e soltanto se le due matrici A e A' del sistema hanno lo stesso rango.

Dimostrazione.

Si supponga che $\rho(A) = \rho(A') = p$. Siano $A^{j_1}, A^{j_2}, \ldots, A^{j_p}$ le p colonne indipendenti della matrice A. Tali colonne sono anche colonne indipendenti della matrice A' e, dato che $\rho(A') = p$, sono di numero massimo. Ogni altra colonna di A' è combinazione lineare delle colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, \ldots, A^{j_p}$. In particolare la colonna dei termini noti, C, è dipendente dalle colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, \ldots, A^{j_p}$ e quindi da tutte le colonne di A. Per la [Proposizione 1], il sistema S ammette soluzioni.

Si supponga che il sistema S ammetta soluzioni e si supponga che $\rho(A) = p$. Siano $A^{j_1}, A^{j_2}, \ldots, A^{j_p}$ le p colonne indipendenti della matrice A e tale che ogni altra colonna di A è combinazione lineare di esse. Poiché la matrice A' è costituita dalle colonne della matrice A con l'aggiunta della colonna dei termini noti allora:

- una qualunque colonna della matrice A', che non è la colonna dei termini noti C, <u>essendo anche colonna di A</u>, dipende dalle colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, \ldots, A^{j_p}$;
- la colonna dei termini noti C, dipende dalle colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, \ldots, A^{j_p}$, per ipotesi [Proposizione 1].

□

Dimostrazione.

Conclusione: Dunque ogni colonna della matrice A' dipende linearmente dalle colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, \ldots, A^{j_p}$ e, dato che sono colonne indipendenti nella matrice A, sono indipendenti anche nella matrice A'. Si può concludere che il rango della matrice A' è $\rho(A') = p = \rho(A)$. $\square$

Regola di Cramer

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

costituito da n equazioni in n incognite. Si considerino

- $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice incompleta di rango ρ;
- $A' \in M_{n,(n+1)}(\mathbb{K})$ la matrice completa di rango ρ'.

Se risulta $\det A \neq 0$ allora il sistema ha soluzioni perché $\rho = \rho' = n$ [Proposizione 2]. In particolare il sistema **ha una sola soluzione.**

Infatti, scrivendo il sistema S in forma matriciale $AX = C$, nell'ipotesi che $\det A \neq 0$, la matrice A ammette inversa, A^{-1}. Dunque:

$$A^{-1}AX = A^{-1}C \Rightarrow X = A^{-1}C \tag{1}$$

La matrice A^{-1} ha nella $i-$sima riga i complementi algebrici degli elementi della $i-$sima colonna di A, divisi ciascuno per $\det A$. Esplicitando la (1):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Segue:

$$\forall i = 1, \cdots, n, \qquad x_i = \frac{A_{1i}c_1 + A_{2i}c_2 + \cdots + A_{ni}c_n}{\det A} \tag{2}$$

Si indichi con B^i la matrice che si ottiene dalla matrice A sostituendo la sua $i-$sima colonna con la colonna dei termini noti:

$$B^i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Osservazione

Le matrici A e B^i differiscono solo nella $i-$sima colonna, allora i complementi algebrici degli elementi dell'$i-$sima colonna di B^i sono eguali ai complementi algebrici degli elementi dell'$i-$sima colonna di A.

Ne segue che al numeratore di (2), ciascun c_i dell'$i-$sima colonna di B^i è moltiplicato per il suo complemento algebrico. Dunque tale numeratore è il det B^i.

Proposizione 3 (Regola di Cramer)

Assegnato un sistema

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

avente n equazioni in n incognite. Se $\det A \neq 0$, il sistema ha una sola soluzione $(y_1, \quad y_2, \quad \cdots, \quad y_n)$ tale che:

$$y_1 = \frac{\det B^1}{\det A} \quad y_2 = \frac{\det B^2}{\det A} \quad \cdots \quad y_n = \frac{\det B^n}{\det A}$$

indicando con B^i la matrice che si ottiene dalla matrice A sostituendo la $i-$sima colonna con la colonna dei termini noti.

Esempio

Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari:

$$S: \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Le due matrici del sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio

Essendo $\det A = 8 \neq 0$, il sistema S ha una sola soluzione che si determina con la regola di Cramer [Proposizione 3]. Allora

$$x = \frac{1}{8}\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{16}{8} = 2$$

$$y = \frac{1}{8}\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{8}{8} = 1$$

$$z = \frac{1}{8}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{8} = 1$$

Analisi delle soluzioni

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + c_m = 0 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha = 0 \end{cases} .$$

Si supponga che una delle equazioni di S, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha = 0$, sia combinazione lineare di tutte le altre:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha = & \lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1) + \\ & \lambda_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2) + \cdots \\ & \cdots + \lambda_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + c_m) \end{aligned} \tag{3}$$

Si consideri il sistema

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + c_m = 0 \end{cases}$$

ottenuto dal sistema S privandolo dell'equazione $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha = 0$. Allora, considerando la (3), si ha:

$$\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \cdots, & y_n \end{pmatrix} \text{ è soluzione di } S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \cdots, & y_n \end{pmatrix} \text{ è soluzione di } S'$$

Per determinare le soluzioni di un sistema S compatibile, ci si può limitare a considerare solo quelle equazioni di S che siano indipendenti e tali che ogni altra equazione sia una loro combinazione lineare.

Sia assegnato un sistema compatibile:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + c_m = 0 \end{cases}$$

e siano A e A' rispettivamente la matrice incompleta e completa del sistema.

Poichè S é compatibile allora, per [Proposizione 2], le due matrici hanno lo stesso rango ρ.
Se H è la sottomatrice quadrata di ordine ρ di A con determinante diverso da zero (ma che ha tutti i suoi orlati con determinante nullo), allora le ρ righe di A coinvolte dalla formazione di H sono un sistema massimo di righe indipendenti di A.

Osservazione

Le stesse righe nella matrice A' costituiscono anche in A' (che ha lo stesso rango ρ), un sistema massimo di righe indipendenti di A'.

Conclusione: le equazioni corrispondenti a tali righe sono quindi indipendenti e ogni altra equazione risulta una loro combinazione lineare.

Si analizzino 3 casi:

$m = n$ e $\det A = 0$ il rango ρ di A è minore di n e quindi si hanno ρ equazioni indipendenti in n incognite con $\rho < n$;

$m > n$ poiché il rango di A esprime il massimo numero di colonne indipendenti, risulta $\rho \leq n$. Quindi:

- $\rho = n$ segue dalla [Proposizione 3];
- $\rho < n$ si hanno ρ equazioni indipendenti in n incognite

$m < n$ poiché il rango di A esprime il massimo numero di righe indipendenti, risulta $\rho \leq m < n$. Quindi si hanno ρ equazioni indipendenti in n incognite con $\rho < n$.

Nel sistema compatibile S di m equazioni in n incognite vi sono ρ equazioni indipendenti con $\rho \leq n$.

Si consideri un sistema compatibile con ρ equazioni indipendenti ed n incognite con $\rho < n$:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{\rho 1}x_1 + a_{\rho 2}x_2 + \cdots + a_{\rho n}x_n + c_\rho = 0 \end{cases} .$$

La matrice incompleta del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho n} \end{pmatrix}$$

ha rango ρ.

Vi è una sottomatrice quadrata H di ordine ρ con $\det H \neq 0$ corrispondente a ρ colonne indipendenti di A.

Per semplicità, si supponga che siano le prime ρ colonne di A a determinare con le sue ρ righe tale sottomatrice H :

$$A = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} a_{1\rho+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2\rho+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\rho\rho+1} & \cdots & a_{\rho n} \end{bmatrix} \right)$$

Si assegnino alle incognite $\left(x_{\rho+1}, \quad x_{\rho+2}, \quad \cdots, \quad x_n\right)$ i valori $\left(y_{\rho+1}, \quad y_{\rho+2}, \quad \cdots, \quad y_n\right)$. Il sistema S assume la seguente forma:

$$S': \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\rho}x_\rho = -a_{1\rho+1}y_{\rho+1} - \cdots - a_{1n}y_n - c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\rho}x_\rho = -a_{2\rho+1}y_{\rho+1} - \cdots - a_{2n}y_n - c_2 \\ \cdots \\ a_{\rho 1}x_1 + a_{\rho 2}x_2 + \cdots + a_{\rho\rho}x_\rho = -a_{\rho\rho+1}y_{\rho+1} - \cdots - a_{\rho n}y_n - c_\rho \end{cases}.$$

S' è un sistema costituito da ρ equazioni in ρ incognite e con la matrice H dei suoi coefficienti avente $\det H \neq 0$.
Il sistema S' ha una sola soluzione $\left(y_1, \quad y_2, \quad \cdots y_\rho\right)$ per la [Proposizione 3].

La $n-$pla $\underline{\zeta} = \left(y_1, \quad y_2, \quad \cdots y_\rho, \quad y_{\rho+1}, \quad \cdots, \quad y_n\right)$ è una soluzione del sistema S.

I primi ρ valori della soluzione $\underline{\zeta}$ sono **determinati** dai valori $y_{\rho+1}, \cdots, y_n$ che $\underline{\zeta}$ ha nei suoi ultimi $n-\rho$ posti. Quindi si ha:

- due soluzioni $\underline{\zeta}$ e $\underline{\eta}$ che abbiano eguali i valori di posto $\rho+1, \rho+2, \cdots, n$ coincidono;
- indicando con Σ l'insieme delle soluzioni del sistema S, la funzione

$$f: \left(y_{\rho+1}, \quad \cdots, \quad y_n\right) \in \mathbb{K}^{n-\rho} \to \left(y_1, \quad \cdots, \quad y_\rho, \quad y_{\rho+1}, \quad \cdots, \quad y_n\right) \in \Sigma$$

  è biettiva.

Per la biettività di f, si ha $|\mathbb{K}^{n-\rho}| = |\Sigma|$ e cioè le soluzioni del sistema S sono tante quante le $(n-\rho)-$ple ordinate di elementi di $\mathbb{K}$. Se $\mathbb{K}$ è infinito si dice che il sistema S ha $\infty^{n-\rho}$ **soluzioni.**

Esempio

Si lavori nel campo dei numeri reali $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Risolvere il seguente sistema lineare:

$$S : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema costituito da $m = 3$ equazioni in $n = 3$ incognite. Si scrivano le due matrici (completa e incompleta):

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{incompleta}} \quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{completa}}$$

Si determini il rango della matrice A e il rango della matrice A'.

Esempio

Poiché $\det A = 0$ e $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ è un minore di ordine 2 con $\det H = -5 \neq 0$, allora il rango della matrice A è $\rho = 2$.

Poiché l'orlato del minore H nella matrice A', $H' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, ha $\det H' = 0$, allora anche il rango della matrice A' è $\rho = 2$.

Il sistema è compatibile per la [Proposizione 2]

Il sistema S ammette $\infty^{n-\rho} = \infty^{3-2} = \infty^{1}$ soluzioni.

Esempio

- Vi sono due equazioni linearmente indipendenti che sono le due equazioni corrispondenti alle righe coinvolte nel minore H.
- Vi è una sola incognita che è parametro del sistema ed è l'incognita corrispondente alla colonna NON coinvolta nel minore H.

Allora il sistema S sarà equivalente al sistema:

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 2 - t \\ 3x + y = -2t \end{cases}$$

ottenuto dal sistema S privandolo della 3° equazione e considerando l'incognita $z = t$ come parametro.

Esempio

La matrice incompleta del sistema S' è il minore H di ordine 2 della matrice A che ha $\det H = -5$. Applicando la [Proposizione 3], si ha:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ -2t & 1 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{2+3t}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-t \\ 3 & -2t \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{t-6}{5}$$

$$z = t$$

Conclusione: l'insieme delle soluzioni del sistema S è

$$\Sigma = \left\{ \left(-\frac{2+3t}{5}, \quad -\frac{t-6}{5}, \quad t \right), \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

Sistemi omogenei

Un sistema di equazioni lineari:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é detto sistema **omogeneo**.

- Il sistema S è compatibile, poiché una sua soluzione è quella banale, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Per [Proposizione 2], le due matrici A e A' hanno lo stesso rango ρ.
- se $\rho = n$, il sistema S ammette solo la soluzione banale $\begin{pmatrix} 0, & 0, & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Si supponga $\rho < n$ in modo che il sistema S omogeneo ammetta $|\mathbb{K}|^{n-\rho}$ soluzioni e si denoti con Σ l'insieme delle soluzioni del sistema S.

Proposizione 4

L'insieme Σ delle soluzioni di S è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$ di dimensione $n - \rho$.

Dimostrazione.

Si scriva il sistema omogeneo S in forma matriciale:

$$AX = \underline{0}$$

e si indichi con

$$\Sigma = \{Y \in \mathbb{K}^n : AY = \underline{0}\}$$

l'insieme delle soluzioni del sistema S. Siano $Y, Z \in \Sigma$, cioè sono due soluzioni del sistema S: $AY = \underline{0}$ e $AZ = \underline{0}$. $\square$

Dimostrazione.

Dunque

$$A(Y+Z) = AY + AZ = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow A(Y+Z) = \underline{0} \Rightarrow Y + Z \in \Sigma.$$

Sia $Y \in \Sigma$ una soluzione del sistema S e $\lambda \in \mathbb{K}$ uno scalare, si ha:

$$A(\lambda Y) = \lambda AY = \lambda \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow A(\lambda Y) = \underline{0} \Rightarrow \lambda Y \in \Sigma.$$

Conclusione: L'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo S, Σ, è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$.

Poiché la matrice A ha rango ρ, per semplicità, si supponga che le prime ρ righe e ρ colonne di A siano indipendenti. $\square$

Dimostrazione.

Il sistema omogeneo S è equivalente al sistema omogeneo:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{\rho 1}x_1 + a_{\rho 2}x_2 + \cdots + a_{\rho n}x_n = 0 \end{cases}$$

Ogni soluzione di S' è determinata sulla base della scelta dei valori $y_{\rho+1}, y_{\rho+2}, \dots, y_n$ assegnati alle incognite $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \dots, x_n$. Allora si ha:

- $\zeta_{\rho+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\rho, 1, 0, \dots, 0)$ la soluzione di S' ottenuta assegnando alle incognite $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \dots, x_n$ i valori $(1, 0, \dots, 0)$.

$\square$

Dimostrazione.

- $\zeta_{\rho+2} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\rho, 0, 1, \ldots, 0)$ la soluzione di S' ottenuta assegnando alle incognite $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \ldots, x_n$ i valori $(0, 1, \ldots, 0)$.
- $\ldots\ldots\ldots\,.$
- $\zeta_n = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\rho, 0, 0, \ldots, 1)$ la soluzione di S' ottenuta assegnando alle incognite $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \ldots, x_n$ i valori $(0, 0, \ldots, 1)$.

Il sistema dei vettori $\{\zeta_{\rho+1}, \zeta_{\rho+2}, \ldots, \zeta_n\}$ è un sistema di $n-\rho$ vettori linearmente indipendenti, perché sono indipendenti i seguenti vettori numerici:

$$\underbrace{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), (0, 0, \ldots, 1)}_{n-\rho}.$$

Si consideri $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_\rho, y_{\rho+1}, \ldots, y_n) \in \Sigma$ una soluzione del sistema S. Poiché Σ è un sottospazio, allora risulta anche $y_{\rho+1}\zeta_{\rho+1}, y_{\rho+2}\zeta_{\rho+2}, \ldots, y_n\zeta_n \in \Sigma$.

$\square$

Dimostrazione.

Inoltre risulta anche:

$$\zeta = y_{\rho+1}\zeta_{\rho+1} + y_{\rho+2}\zeta_{\rho+2} + \ldots + y_n\zeta_n \in \Sigma.$$

Si osservi che la soluzione ζ è così caratterizzata:

$$\zeta = (\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\rho}, \underbrace{y_{\rho+1}, y_{\rho+2}, \ldots, y_n}_{n-\rho}).$$

Ne consegue $\zeta = Y$.

Conclusione: Il sistema $\{\zeta_{\rho+1}, \zeta_{\rho+2}, \ldots, \zeta_n\}$ è un sistema di $n-\rho$ vettori linearmente indipendenti ed un sistema di generatori per lo spazio Σ. Dunque $\{\zeta_{\rho+1}, \zeta_{\rho+2}, \ldots, \zeta_n\}$ é una base per lo spazio delle soluzioni Σ e dunque la dimensione di Σ è $\dim \Sigma = n - \rho$. $\square$

Esempio

Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$S : \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} .$$

La matrice di tale sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio

La matrice A ha rango $\rho = 2$, poiché la sottomatrice di ordine 2, $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\det H = 1 \neq 0$. Allora:

lo spazio delle soluzioni Σ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di

$$\dim \Sigma = n - \rho = 4 - 2 = 2$$

Bisogna determinare una base di Σ, i cui elementi sono ottenuti assegnando alle incognite z e t (le incognite che corrispondono alle colonne non coinvolte nel minore H), una prima volta i valori $z = 1$ e $t = 0$ e successivamente $z = 0$ e $t = 1$

Esempio

$z = 1$ e $t = 0$ il sistema S diventa

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} .$$

Applicando la [Proposizione 3], si trova $x = 0$ e $y = -1$.

La prima soluzione di S è $\zeta_1 = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$

Esempio

$z = 0$ e $t = 1$ il sistema S diventa

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ x + y = -1 \end{cases}.$$

Applicando la [Proposizione 3], si trova $x = -1$ e $y = 0$.

La seconda soluzione di S è $\zeta_2 = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$

Lo spazio Σ delle soluzioni di S è quindi lo spazio generato dalle due quaterne trovate sopra.

Sia assegnato un sistema di equazioni lineari non omogeneo

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdot + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdot + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdot + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} .$$

Imponendo i termini noti del sistema S, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ uguali a zero, si ottiene un sistema omogeneo

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdot + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdot + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdot + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

che è detto **associato** ad S.

Proposizione 5

Tutte le soluzioni del sistema S si ottengono sommando ad una sua soluzione tutte le soluzioni del sistema S_0 omogeneo associato.

Dimostrazione.

Si scrivano i sistemi S e S_0 in forma matriciale:

$$AX = C, \quad AX = \underline{0}\ .$$

Si indichino:

- Σ è l'insieme delle soluzioni del sistema S;
- Σ_0 è il sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_0 associato.

Si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \zeta \in \Sigma \Rightarrow A\zeta = C \\ \eta \in \Sigma_0 \Rightarrow A\eta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(\zeta + \eta) = A\zeta + A\eta = C + 0 = C \Rightarrow \zeta + \eta \in \Sigma.$$

Conclusione: Addizionando alla soluzione ζ una soluzione di S_0 si ottiene ancora una soluzione di S. $\square$

Dimostrazione.

Siano considerate $\zeta, \zeta' \in \Sigma$, allora:

$$\left.\begin{array}{r} \zeta \in \Sigma \Rightarrow A\zeta = C \\ \zeta' \in \Sigma \Rightarrow A\zeta' = C \end{array}\right\} \Rightarrow A(\zeta' - \zeta) = A\zeta' - A\zeta = C - C = \underline{0} \Rightarrow \zeta' - \zeta \in \Sigma_0.$$

Conclusione: La soluzione $\eta = \zeta' - \zeta$ di S_0 sommata a ζ fornirà la soluzione ζ'.

Sommando a ζ tutte le soluzioni η di S_0 si ottengono tutte le soluzioni di S. $\square$

Applicazioni lineari

Siano assegnati due spazi vettoriali V e W definiti su un campo $\mathbb{K}$.

Definizione

Un' **applicazione lineare** è una funzione f tra i due spazi vettoriali:

$$\begin{array}{cccc} f: & V & \longrightarrow & W \\ & v & \longrightarrow & w = f(v) \end{array}$$

soddisfacente le seguenti proprietà:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \forall u, v \in V$;
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall u \in V$.

Si possono condensare le due proprietà della definizione data in un'unica proprietà, scrivendo semplicemente:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u, v \in V.$$

Siano V e W due spazi vettoriali e si denotino con $\underline{0}_V$ e $\underline{0}_W$ i rispettivi vettori nulli di V e W.

Proposizione 1

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, allora:

$$f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W.$$

Dimostrazione.

Si consideri il vettore $v \in V$, allora:

$$f(v) = f(v + \underline{0}_V) = \overbrace{f(v) + f(\underline{0}_V)}^{\in W} \Rightarrow f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$$

$\square$

Per comodità si denoteranno i vettori nulli dei rispettivi spazi vettoriali V e W come segue: $\underline{0}_V = \underline{0}_W = \underline{0}$.

Definizione

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra i due spazi vettoriali, allora:

- se l'applicazione f è iniettiva, essa è chiamata **monomorfismo;**
- se l'applicazione f è suriettiva, essa è chiamata **epimorfismo;**
- se l'applicazione f è biettiva, essa è chiamata **isomorfismo.**

Esempio

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n e si consideri una base ordinata(cioè un riferimento) di V :

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Per definizione, per ogni vettore $v \in V$, si ha che:

$$\exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \quad v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Esempio

La n-upla di scalari, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, univocamente determinata per esprimere la combinazione lineare del vettore $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, è detta n-upla delle **coordinate** del vettore v rispetto alla base assegnata. Si può costruire la seguente funzione:

$$\begin{array}{rccc} f: & V & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & v & \longrightarrow & (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{array}$$

Per l'unicità degli scalari $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, la funzione f è biettiva. Inoltre si considerino i vettori $v, w \in V$, allora:

$$\begin{array}{l} f(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ \\ f(w) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(v) + f(w) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

Esempio

Inoltre risulta che

$$v+w=\underbrace{\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n}_{=v}+\underbrace{\beta_1 u_1+\ldots+\beta_n u_n}_{=w}=(\alpha_1+\beta_1)u_1+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)u_n$$

quindi si ha:

$$f(v+w)=(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)=f(v)+f(w).$$

Sia considerato uno scalare $\alpha \in \mathbb{K}$, allora si ha:

$$\alpha v=\alpha\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha\alpha_n u_n \qquad \alpha f(v)=(\alpha\alpha_1,\ldots,\alpha\alpha_n)$$

$$\Downarrow$$

$$f(\alpha v)=(\alpha\alpha_1,\ldots,\alpha\alpha_n)=\alpha f(v)$$

In conclusione la funzione f è un isomorfismo ed è chiamato **coordinazione** dello spazio vettoriale V nel riferimento fissato $\mathcal{B}$.

Dall'esempio precedente, segue quindi la seguente proposizione:

Proposizione 2

Ogni spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita $\dim V = n$ *è isomorfo allo spazio vettoriale numerico* $\mathbb{K}^n$.

Esempio

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- W uno spazio vettoriale di dimensione m;
- Z un spazio vettoriale di dimenzione r;
- $f : V \to W$ un'applicazione lineare;
- $g : W \to Z$ un'applicazione lineare;

Esempio

L'applicazione lineare composta

$$g \circ f \colon V \to Z$$

tale che $(g \circ f)(v) = g(f(v))$ per ogni vettore $v \in V$, è un'applicazione lineare. Infatti, per ogni $v_1, v_2 \in V$:

$$(g \circ f)(v_1 + v_2) = g(f(v_1 + v_2)) = g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) + g(f(v_2)) = \\ = (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2).$$

Inoltre per ogni $v \in V$ e scalare $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(g \circ f)(\lambda v) = g(f(\lambda v)) = g(\lambda f(v)) = \lambda g(f(v)) = \lambda (g \circ f)(v)$$

Conclusione: la composizione di applicazioni lineari è ancora un'applicazione lineare.

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n;
- $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base di V;
- W uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione m;
- $f : V \to W$ un'applicazione lineare.

Una proprietà notevole delle applicazioni lineari é data dal seguente teorema:

Teorema 3

L'applicazione lineare f è determinata quando si conoscano i valori che essa assume sulla base $\mathcal{B}$ di V, ovvero se sono noti $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.

Dimostrazione.

Preso un generico vettore $v \in V$, poiché $\mathcal{B}$ è una base di V, allora

$$\exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n : \quad v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Conoscendo i valori $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, allora, sfruttando la definizione di applicazione lineare, si ha:

$$f(v) = f(\overbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n}^{=v}) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \ldots + \alpha_n f(e_n).$$

Segue l'asserto. $\square$

Seguiranno proposizioni importanti che caratterizzano le applicazioni lineari:

Proposizione 4

L'applicazione lineare f trasforma vettori dipendenti di V in vettori dipendenti di W.

Dimostrazione.

Si considerino $v_1, v_2, \ldots, v_h$, h vettori dipendenti di V, quindi esisteranno degli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ non tutti nulli tale che:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_h v_h = \underline{0}.$$

Applicando la funzione f ad entrambi i membri, si ha:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_h v_h) = f(\underline{0})$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_h f(v_h) = \underline{0}$$

cioé si ha una combinazione lineare dei vettori $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_h)$, a scalari non tutti nulli, che esprime il vettore nullo $\underline{0}$. Dunque i vettori $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_h)$ sono linearmente dipendenti in W. $\square$

Proposizione 5

Se f è un monomorfismo, allora trasforma vettori indipendenti di V in vettori indipendenti di W.

Dimostrazione.

Siano $v_1, v_2, \dots, v_h$, h vettori linearmente indipendenti di V. Si vuole dimostrare che i vettori $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_h)$ sono vettori linearmente indipendenti di W. In particolare si vuole dimostrare che la seguente combinazione lineare:

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_h f(v_h) = \underline{0}$$

è a scalari tutti nulli. Sfruttando la definizione di applicazione lineare, si ha:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_h v_h) = \underline{0} = f(\underline{0}) \Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_h v_h) = f(\underline{0}).$$

L'applicazione f è un monomorfismo, in particolare, iniettiva e dunque:

□

Dimostrazione.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_h v_h = \underline{0}.$$

Poiché $v_1, v_2, \ldots, v_h$ sono vettori linearmente indipendenti, segue che gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ sono tutti nulli. $\square$

Come conseguenza delle due proposizioni precedenti, si ha il seguente corollario:

Corollario 6

Se f è un isomorfismo, allora trasforma vettori linearmente dipendenti di V in vettori linearmente dipendenti di W e trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W, con la sua inversa.

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare tra i due spazi vettoriali V e W, allora si ha la seguente definizione:

Definizione

Il **nucleo** dell'applicazione lineare f, denotato simbolicamente con $\ker f$, è il sottoinsieme di V tale che:

$$\ker f = \{v \in V : f(v) = \underline{0}\} \subseteq V.$$

L'**immagine** dell'applicazione lineare f, denotato simbolicamente con $\Im f$, è il sottoinsieme di W tale che:

$$\Im f = \{f(v) : v \in V\} \subseteq W.$$

Per la Proposizione (1), si ha che:

$$\underline{0} \in \ker f, \quad \underline{0} \in \Im f$$

ed è di facile dimostrazione provare che sono sottospazi rispettivamente di V e W.

Seguono due proposizioni che caratterizzano l'iniettività e la suriettività di un'applicazione lineare:

Proposizione 7

Data un'applicazione lineare $f : V \to W$, allora:

$$f \text{ monomorfismo } \Leftrightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$) Se $v \in V - \{\underline{0}\}$ è un vettore non nullo, allora, per l'iniettività si ha $f(v) \neq f(\underline{0}) = \underline{0}$. Dunque l'unico vettore presente nel nucleo dell'applicazione f è il vettore nullo.

$\Leftarrow$) Siano considerati due vettori $v, v' \in V$ tali che $f(v) = f(v')$. Si dimostri che $v = v'$. Infatti segue che:

$$f(v) = f(v') \Rightarrow f(v) - f(v') = \underline{0} \Rightarrow f(v - v') = \underline{0} \Rightarrow v - v' \in \ker f.$$

Dimostrazione.

Per ipotesi il solo vettore presente nel nucleo dell'applicazione lineare è il vettore nullo, quindi

$$v - v' = \underline{0} \Rightarrow v = v'.$$

$\square$

Proposizione 8

Data un'applicazione lineare $f : V \to W$, allora:

$$f \ \textit{epimorfismo} \ \Leftrightarrow \Im f = W.$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$) Già è noto che $\Im f \subseteq W$, quindi è necessario dimostrare che $W \subseteq \Im f$. Si consideri un vettore $w \in W$. Per definizione di suriettività, esiste un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$, cioé $w \in \Im f$.

Dimostrazione.

Si consideri un vettore $w \in W$, e bisogna dimostrare che esiste un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$. Per ipotesi $W = \Im f$, quindi $w \in \Im f$, cioé esiste un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$. $\square$

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $e_1, e_2, \ldots, e_n$ un sistema di generatori di V;
- W uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;

Proposizione 9

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ è un sistema di generatori di $\Im f$.

Dimostrazione.

Si consideri un vettore $w \in \Im f$. Allora esiste un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$. Poiché $V = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, segue che:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \quad v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Allora:

$$w = f(v) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \dots + \alpha_n f(e_n).$$

Ogni vettore di $\Im f$ si esprime come combinazione lineare dei vettori $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$. □

Corollario 10

Sia $f : V \to W$ un isomorfismo e $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base di V. Allora $\mathcal{B}' = \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ è una base di W.

Dimostrazione.

Per il Corollario (6), un isomorfismo trasforma un sistema di vettori linearmente indipendenti di V in un sistema di vettori linearmente indipendenti di W, quindi $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, per la Proposizione (9), l'applicazione lineare f trasforma un sistema di generatori V in un sistema di generatori di $\Im f$, che, poiché f è in particolare un epimorfismo, è un sistema di generatori di W.

$\square$

Siano:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione $\dim V = n$;
- W uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- $f : V \to W$ un'applicazione lineare.

Teorema 11 (Teorema della dimensione)

Siano $\ker f$ *e* $\Im f$ *rispettivamente il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare. Allora:* $\dim \ker f + \dim \Im f = n$.

Dimostrazione.

Si consideri il nucleo dell'applicazione f, $\ker f$. Se esso fosse un sottospazio banale di V, allora:

$\ker f = \{\underline{0}\}$: $\dim \ker f = 0$ e $\dim \Im f = n$;

$\ker f = V$: ogni vettore $v \in V$ ha immagine nulla $f(v) = \underline{0}$ e quindi $\Im f = \{\underline{0}\}$, ovvero $\dim \Im f = 0$.

In entrambi i casi analizzati, segue la validità della formula.
Si suppoga che $\ker f$ sia un sottospazio proprio di V, $\ker f < V$, e che abbia dimensione $\dim \ker f = m < n$. Si consideri una sua base:

$$\mathcal{B}_{\ker f} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

e la si completi ad una base di V, aggiungendo $n - m$ vettori, ottenendo:

$$\mathcal{B}_V = \{e_1, e_2, \dots, e_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}.$$

□

Dimostrazione.

Si dimostrerà che il sistema di vettori $\mathcal{B} = \{f(v_{m+1}), \ldots, f(v_n)\}$ è una base per $\Im f$.

Lineare indipendenza: si consideri la combinazione lineare:

$$\alpha_{m+1} f(v_{m+1}) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = \underline{0}.$$

Sfruttando la linearità dell'applicazione, segue:

$$f(\alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n) = \underline{0} \Rightarrow \alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n \in \ker f.$$

Poiché $\mathcal{B}_{\ker f}$ è una base, quindi in particolare un sistema di generatori, allora $\alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n$ si scrive come combinazione lineare dei vettori $e_1, e_2, \ldots, e_m$:

$$\alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m.$$

Dimostrazione.

Si ha:

$$\alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_m e_m = \underline{0}.$$

Poiché $\mathcal{B}_V$ è una base, quindi in particolare un sistema di vettori linearmente indipendenti, allora:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Dunque $\mathcal{B}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti.

Sistema di generatori: si consideri un vettore $w \in \Im f$, dunque esiste un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$. Poiché $\mathcal{B}_V$ è una base per V, il vettore v è combinazione lineare dei vettori $e_1, e_2, \ldots, e_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$:

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n.$$

$\square$

Dimostrazione.

Sfruttando la linearità dell'applicazione e tenendo in considerazione che i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_m \in \ker f$:

$$w = f(v) = f(\overbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \alpha_n v_n}^{=v}) =$$

$$= \alpha_1 \overbrace{f(e_1)}^{=0} + \alpha_2 \overbrace{f(e_2)}^{=0} + \ldots + \alpha_m \overbrace{f(e_m)}^{=0} + \alpha_{m+1} f(v_{m+1}) + \ldots + \alpha_n f(v_n) =$$

$$= \alpha_{m+1} f(v_{m+1}) + \ldots + \alpha_n f(v_n).$$

In conclusione i vettori $f(v_{m+1}), \ldots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori per $\Im f$. Allora $\mathcal{B} = \{f(v_{m+1}), \ldots, f(v_n)\}$ è una base per $\Im f$, e risulta che:

$$\dim \Im f = n - m = n - \dim \ker f \Rightarrow \dim \ker f + \dim \Im f = n.$$

$\square$

Siano:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;
- W uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$;

Proposizione 12

$$V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W.$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$) Poiché V e W sono isomorfi, allora esiste un isomorfismo tra di essi, $f\colon V \to W$. Per il Corollario (10), l'applicazione f trasforma una base di V in una base di W, quindi $\dim V = \dim W$.

$\Leftarrow$) Si considerino le seguenti rispettive basi di V e W:

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \qquad \mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

$\square$

Dimostrazione.

Si considerino la coordinazione dello spazio vettoriale V nel riferimento fissato $\mathcal{B}_V$ e la coordinazione dello spazio vettoriale W nel riferimento fissato $\mathcal{B}_W$:

$$f \colon V \to \mathbb{K}^n, \qquad g \colon W \to \mathbb{K}^n$$

Considerando l'applicazione inversa di g, $g^{-1} \colon \mathbb{K}^n \to W$, che è ancora un isomorfismo, e componendo le applicazioni, si ottiene:

$$g^{-1} \circ f \colon V \to W.$$

La composizione di isomorfismi è ancora un isomorfismo, quindi i due spazi vettoriali V e W sono isomorfi. $\square$

Matrice associata

Si consideri V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $\dim V = n$. Un **endomorfismo** è un'applicazione lineare del tipo: $f : V \to V$. Assegnata una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ di V, per il Teorema (3), si determina l'endomorfismo f se si conoscono le rispettive immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$. Per definizione di base, si ha:

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{n1}u_n \\
f(u_2) &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{n2}u_n \\
&\vdots \\
f(u_n) &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n
\end{aligned}$$

Disponendo i coefficienti ottenuti lungo le colonne di una matrice, si costruisce la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Assegnata una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dello spazio vettoriale V e note le rispettive immagini $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$, allora resta determinata la matrice A_f. Viceversa, assegnata una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dello spazio vettoriale V e nota la matrice A_f, allora restano determinate le immagini $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$, ovvero l'endomorfismo f.

Definizione

La matrice A_f è chiamata matrice associata all'endomorfismo f nella base $\mathcal{B}$.

Analogamente se abbiamo un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale V di dimensione n in uno spazio vettoriale W di dimensione m, assegnate due basi di V e W rispettivamente, possiamo associare una matrice di tipo mxn .

Si considerino:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine n;
- $\mathbb{K}^n$ lo spazio vettoriale numerico sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n.

Si definisca la funzione $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ come segue:

$$F(v) = Av \qquad \forall v \in \mathbb{K}^n$$

dove Av è il prodotto righe per colonne tra la matrice A e il vettore $v \in \mathbb{K}^n$.

L'applicazione definita F è lineare.

Si considerino i vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinando le rispettive immagini dei vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$, attraverso l'applicazione F, si ottiene:

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a^1, \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = a^2, \quad \ldots, \quad F(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a^n$$

dove $a^1, a^2, \ldots, a^n$ sono i vettori colonna della matrice A. Poiché i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ costituiscono un sistema di generatori, allora, per la Proposizione (9), anche le rispettive immagini, ovvero $a^1, a^2, \ldots, a^n$, costituiscono un sistema di generatori di $\Im F$. Dunque ne consegue:

- $\rho(A) = p \Rightarrow \dim \Im F = p$ e $\dim \ker F = n - p$;
- $\rho(A) = n \Rightarrow F$ isomorfismo.

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un riferimento di V;
- $F \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la funzione definita $F(v) = Av$, per ogni $v \in \mathbb{K}^n$, dove A è la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

- $g \colon V \to \mathbb{K}^n$ la coordinazione dello spazio vettoriale V nel riferimento $\mathcal{B}$.

Proposizione 13

Sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo. Considerato un vettore $v \in V$ dello spazio vettoriale V e la sua relativa immagine $f(v)$, allora la funzione $F \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ trasforma le coordinate del vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$ nelle coordinate del vettore $f(v)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Dimostrazione.

Siano:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le coordinate del vettore $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$;
- $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ le coordinate del vettore $f(v) \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Bisogna dimostrare che:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si considerino i vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$:

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_n.$$

$\square$

Dimostrazione.

Dunque i vettori

$$F(e_1), \quad F(e_2), \quad \dots, \quad F(e_n)$$

rappresentano le colonne della matrice A. Consegue che:

$$F(v) = \overbrace{\begin{pmatrix} F(e_1) & F(e_2) & \dots & F(e_n) \end{pmatrix}}^{A} v.$$

$\square$

Analogamente se si considera un'applicazione di uno spazio vettoriale V di dimensione n in uno spazio vettoriale W di dimensione m, abbiamo la matrice che collega le coordinate del vettore v e di f(v).

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base di V;
- $f : V \to V$ un isomorfismo;
- A è la matrice associata all'isomorfismo rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Proposizione 14

Si dimostra che $f^{-1} : V \to V$ é un isomorfismo e la matrice associata è A^{-1} rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Dimostrazione.

Poiché f è un isomorfismo, allora la matrice A è non degenere, cioé $\det A \neq 0$, quindi A è una matrice invertibile. Inoltre è banale dimostrare che l'applicazione inversa f^{-1} è ancora un isomorfismo. $\square$

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- W uno spazio vettoriale di dimensione m;
- Z un spazio vettoriale di dimenzione r;
- $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di V;
- $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base di W;
- $\mathcal{B}_Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_r\}$ una base di Z;
- $f : V \to W$ un'applicazione lineare;
- $g : W \to Z$ un'applicazione lineare;
- $A \in M_{m,n}$ matrice associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$;
- $B \in M_{r,m}$ matrice associata all'applicazione g rispetto alle basi $\mathcal{B}_W$ e $\mathcal{B}_Z$.

Proposizione 15

L'applicazione lineare composta $g \circ f : V \to Z$ è un'applicazione lineare la cui matrice associata è il prodotto tra le matrici BA.

Dimostrazione.

Dall'esempio precedente, la composizione di applicazioni lineari è un'applicazione lineare e con facili calcoli si trova la matrice associata. $\square$

Prodotto scalare

Si consideri:

- V uno spazio vettoriale di dimensione finita n definito sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Definizione

Un **prodotto scalare definito positivo** in V è un'applicazione

$$s \colon V \times V \to \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà:

simmetrica:

$$s(u, v) = s(v, u) \quad \forall u, v \in V$$

lineare: si richiede la linearità a sinistra:

$$s(\alpha_1 u + \alpha_2 v, w) = \alpha_1 s(u, w) + \alpha_2 s(v, w) \quad \forall u, v, w \in V$$

e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

definita positiva:

$$s(u,u) \geq 0 \quad s(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = \underline{0}.$$

Proposizione 1

Un prodotto scalare di V soddisfa:

1. $s(\underline{0}, v) = 0 \quad \forall v \in V$;
2. $s(u, \alpha_1 v + \alpha_2 w) = \alpha_1 s(u,v) + \alpha_2 s(u,w) \quad \forall u, v, w \in V$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sono due vettori di $\mathbb{R}^n$. Si definisca la seguente applicazione:

$$\langle \quad , \quad \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Esempio

definita ponendo:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

Come è facile verificare, l'applicazione è un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}^n$ ed è detto **prodotto scalare euclideo**.

Utilizzando il prodotto scalare euclideo è possibile definire in ogni spazio vettoriale V un particolare prodotto scalare definito positivo. Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un riferimento di V;
- $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ le componenti dei rispettivi vettori $v, w \in V$ nel riferimento $\mathcal{B}$;
- $c\colon V \to \mathbb{R}^n$ la coordinazione determinata dalla base ordinata $\mathcal{B}$.

Si definisca la seguente applicazione:

$$g \colon V \times V \to \mathbb{R}$$

tale che

$$g(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n = \langle c(v), c(w) \rangle$$

Essa è un prodotto scalare definito positivo che, in termini di coordinate, coincide col prodotto scalare euclideo.
Siano considerati:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $s \colon V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare definito positivo;
- $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una riferimento di V;
- $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ le componenti dei rispettivi vettori $v, w \in V$ nel riferimento $\mathcal{B}$;
- $c \colon V \to \mathbb{R}^n$ la coordinazione determinata dalla base ordinata $\mathcal{B}$.

Si ha:

$$s(v,w) = s\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j\right) = \sum_{i.j=1}^{n} v_i w_j s(e_i, e_j).$$

Ne segue che se i vettori della base $\mathcal{B}$ hanno le seguenti proprietà:

$$s(e_i, e_i) = 1 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

e

$$s(e_i, e_j) = 0 \qquad i \neq j$$

allora si ha:

$$s(v,w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \langle c(v), c(w) \rangle.$$

Queste considerazioni giustificano l'importanza di determinare nello spazio V basi $\mathcal{B}$ che, rispetto ad un assegnato prodotto scalare s, abbiano le proprietà di sopra. Per risolvere il problema indicato è necessario premettere la seguente definizione:

Definizione

Due vettori $u, v \in V$ si dicono **ortogonali** se:

$$s(u, v) = 0$$

e si denotano con $u \perp v$.

Definizione

Si definisce **norma** del vettore $v \in V$, la grandezza:

$$||v|| = \sqrt{s(v, v)}.$$

Si considerino:

- lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare euclideo;
- un vettore $u \in V$

Definizione

Si definisce norma di un vettore u e si indica con $||u||$ il numero reale non negativo:

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Esempio

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e siano $u = (2, -1, 0)$ e $v = (-1, -2, 0)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Allora il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ è:

$$\langle u, v\rangle = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 0.$$

Si osserva che, per definizione, i vettori u e v sono ortogonali. Inoltre le rispettive norme sono:

$$||u|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5} \qquad ||v|| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Sistemi di vettori ortonormali

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo;
- $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un sistema di vettori di V.

Definizione

Il sistema di vettori dello spazio V si dice **ortonormale** se:

1. $s(u_i, u_j) = 0$ per ogni $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \neq j$;
2. $||u_i|| = 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

Esempio

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare canonico e si consideri la base canonica $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$ con $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Facilmente si ha:

- $\langle e_1, e_2 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, quindi è una base ortogonale;
- $||e_1|| = \sqrt{1^1 + 0^2} = 1$ e $||e_2|| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, quindi è una base ortonormale.

In generale in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico, la base canonica è una base ortonormale.

Proviamo che:

Proposizione 2

Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono n vettori nessuno dei quali è il vettore nullo e a due a due ortogonali allora essi sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione.

Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n = \underline{0}$; per la proprietà di bilinearità risulta, per ogni $j = 1, 2, \dots, n$

$$s(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j) = s(\underline{0}, v_j) = \alpha_j s(v_j, v_j) = 0$$

e ciò implica, essendo il prodotto scalare definito positivo, $\alpha_j = 0$. Si ha così l'asserto. $\square$

Vediamo come costruire basi ortogonali e poi ortonormali.

Proposizione 3

Sia $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ un sistema di t, con $t < n$, vettori non nulli ed a due a due ortogonali. E' possibile costruire un vettore w_{t+1} non nullo ortogonale a ciascun vettore di W.

Dimostrazione.

Sia v_{t+1} un vettore non appartenente allo spazio $V_t = \langle w_1, w_2. \ldots, w_t \rangle$ generato dai t vettori indipendenti $w_1, w_2, \ldots, w_t$. Il vettore w_{t+1} dato da:

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \frac{s(v_{t+1}, w_1)}{s(w_1, w_1)} w_1 - \frac{s(v_{t+1}, w_2)}{s(w_2, w_2)} w_2 - \ldots - \frac{s(v_{t+1}, w_t)}{s(w_t, w_t)} w_t$$

è non nullo in quanto v_{t+1} non appartiene a V_t ed è ortogonale ad ognuno dei vettori di W in quanto risulta, per ogni $j = 1, 2, \ldots, t$ □

Dimostrazione.

$$s(w_{t+1}, w_j) = s(v_{t+1}, w_j) - \frac{s(v_{t+1}, w_j)}{s(w_j, w_j)} s(w_j, w_j) = 0.$$

□

Dalla proposizione precedente segue facilmente che:

Proposizione 4

Nello spazio vettoriale V di dimensione n è possibile costruire una base ortogonale.

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base ortogonale di V_n. Si consideri per ogni $i = 1, \ldots, n$, il vettore seguente:

$$w_i = \frac{e_i}{||e_i||}.$$

Si ha subito che il sistema $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ è una base ortonormale di V_n.

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo;
- $W \leq V$ un sottospazio vettoriale di V.

Definizione

Si definisce **complemento ortogonale** di W in V l'insieme:

$$W^{\perp} = \{u \in V : s(u, v) = 0 \quad \forall v \in W\}.$$

Proposizione 5

$W^{\perp}$ è un sottospazio di V :

$$W^{\perp} \leq V.$$

Dimostrazione.

Bisogna dimostrare che sono soddisfatte le proprietà della definizione di sottospazio vettoriale. □

Dimostrazione.

Siano $v_1, v_2 \in W^{\perp}$, allora

$$s(v_1, w) = 0, \qquad s(v_2, w) = 0$$

per ogni vettore $w \in W$. Prendendo in considerazione $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ e sfruttando la definizione di prodotto scalare, allora per ogni vettore $w \in W$:

$$s(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 s(v_1, w) + \alpha_2 s(v_2, w) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W^{\perp}.$$

$\square$

Siano considerati:

- V uno spazio vettoriale con assegnato prodotto scalare definito positivo;
- W$\leq V$ sottospazio vettoriale di V.

Proposizione 6

I sottospazi W e $W^\perp$ sono supplementari.

Dimostrazione.

Posto $\dim W = t$, sia $\{e_1, \ldots, e_t\}$ una base ortonormale di W. Completiamo tale base in una base ortonormale dello spazio V di dimensione n con l'aggiunta dei vettori $e_{t+1}, \ldots, e_n$. L'asserto sarà provato se mostreremo che

$$W^\perp = \langle e_{t+1}, \ldots, e_n \rangle.$$

Ogni vettore b dello spazio $\langle e_{t+1}, \ldots, e_n \rangle$ è del tipo $a_{t+1}e_{t+1} + \ldots + a_n e_n$ ed esso appartiene allo spazio $W^\perp$. Infatti per ogni vettore $w = h_1 e_1 + \ldots + h_t e_t$ di W, si ha, tenendo presente che $e_1, e_2, \ldots, e_n$ è una base ortonormale,

$$s(b, w) = s(a_{t+1}e_{t+1} + \ldots + a_n e_n, h_1 e_1 + \ldots + h_t e_t) = 0.$$

$\square$

Dimostrazione.

Viceversa, sia b un vettore di $W^{\perp}$. Poichè $e_1 \ldots . e_n$ è una base, risulta:

$$b = m_1 e_1 + \ldots + m_t e_t + m_{t+1} e_{t+1} + \ldots + m_n e_n.$$

Poichè $e_1, e_2, \ldots, e_t$ sono vettori di W si ha:

$$s(b, e_1) = m_1 = 0, s(b, e_2) = m_2 = 0 \ldots, s(b, e_t) = m_t = 0$$

e quindi $b = m_{t+1} e_{t+1} + \ldots + m_n e_n$ è un vettore di $\langle e_{t+1}, \ldots, e_n \rangle$. Si osserva che dalle due proprietà della proposizione precedente, $W^{\perp}$ e W sono due sottospazi vettoriali supplementari dello spazio vettoriale V. $\square$

Esempio

Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e un sistema di vettori $\{(1,-1,0),(2,0,1),(0,-1,1)\}$.

- Stabilire che il sistema di vettori è una base.

Si dispongano i vettori lungo le righe di una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e si calcoli il suo determinante: $\det A = 3 \neq 0$. Allora i vettori sono linearmente indipendenti ed è un sistema massimale di vettori indipendenti per $\mathbb{R}^3$. Quindi sono una base per $\mathbb{R}^3$.

- Ortonormalizzare la base.

Ortogonalizzazione

Si applichi la Proposizione (3); denotando i vettori della base con u_1, u_2 e u_3, si costruiscano i vettori w_1, w_2, e w_3 :

$$w_1 = u_1 = (1, -1, 0)$$

$$w_2 = u_2 - \frac{s(u_2, w_1)}{s(w_1, w_1)} w_1 = (2, 0, 1) - \frac{2}{2}(1, -1, 0) = (1, 1, 1)$$

$$w_3 = u_3 - \frac{s(u_3, w_1)}{s(w_1, w_1)} w_1 - \frac{s(u_3, w_2)}{s(w_2, w_2)} w_2 = \\ (0, -1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) - \frac{0}{3}(1, 1, 1) = \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Quindi la base ortogonale è $\left\{(1, -1, 0), (1, 1, 1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

Normalizzazione

Per individuare la base ortonormale è necessario dividere ciascun vettore della base ortogonale con la sua rispettiva norma.

$$\overline{w_1} = \frac{w_1}{||w_1||}, \quad \overline{w_2} = \frac{w_2}{||w_2||}, \quad \overline{w_3} = \frac{w_3}{||w_3||}$$

Calcolando le norme dei vettori, si ottiene:

$$||w_1|| = \sqrt{2}, \quad ||w_2|| = \sqrt{3}, \quad ||w_3|| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Quindi si avrà:

$$\overline{w_1} = \frac{w_1}{||w_1||}, \qquad \overline{w_2} = \frac{w_2}{||w_2||}, \qquad \overline{w_3} = \frac{w_3}{||w_3||}$$

$$\overline{w_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \overline{w_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \overline{w_3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

In conclusione si ha che la base ortonormalizzata è:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

Esempio

Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $w_2 = (1, 2, -1, 3)$:

$$W = \langle w_1, w_2 \rangle.$$

- Determinare il complemento ortogonale $W^{\perp}$ di W.

Per definizione il complemento ortogonale $W^{\perp}$ è il sottospazio vettoriale dei vettori ortogonali ai vettori w_1 e w_2, cioè tali che:

$$s(u, w_1) = 0 \quad s(u, w_2) = 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^4.$$

Si consideri un generico vettore $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ e, affinché sia un vettore di $W^{\perp}$, si deve avere che:

$$s((x, y, z, t), w_1) = 0 \quad s((x, y, z, t), w_2) = 0$$

Quindi $W^{\perp}$ è lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y - z + 3t = 0 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo caratterizzato da due equazioni in 4 incognite. La matrice associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

il cui rango è pari a 2.Dunque il sistema lineare omogeneo ammette ∞^2 soluzioni con la scelta di 2 parametri che sono $z = p$ e $t = q$.

Dunque:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = p - 3q \end{cases} .$$

Applicando il metodo di Cramer, si ha quindi:

$$W^{\perp} = \{(3q - p, p - 3q, p, q) : p, q \in \mathbb{R}\} .$$

In particolare $W^{\perp}$ è generato dai vettori $(-1, 1, 1, 0)$ e $(3, -3, 0, 1)$:

$$W^{\perp} = \langle(-1, 1, 1, 0), (3, -3, 0, 1)\rangle.$$

Poiché i vettori sono linearmente indipendenti, si ha che i vettori costituiscono una base per $W^{\perp}$.

Autovalori e Autovettori

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n;
- $F\colon V \to V$ un endomorfismo.

Definizione

Un vettore $v \in V - \{\underline{0}\}$ si dice *autovettore* dell'endomorfismo F, se esiste uno scalare λ tale che

$$F(v) = \lambda v.$$

Lo scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è chiamato *autovalore* relativo all'autovettore non nullo $v \in V$.

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore per l'endomorfismo F, allora è possibile considerare il sottoinsieme dello spazio vettoriale V di tutti gli autovettori di F che hanno λ come autovalore:

$$\{v \in V - \underline{0} : F(v) = \lambda v\} \subset V$$

Proposizione 1

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore per l'endomorfismo F, allora
$V_\lambda = \{v \in V - \underline{0} : F(v) = \lambda v\} \cup \{\underline{0}\}$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale V.*

Dimostrazione.

Per definizione si ha $\underline{0} \in V_\lambda \cup \{\underline{0}\}$. Siano considerati due autovettori $u, v \in V_\lambda$ e si dimostri che $u + v \in V_\lambda$. Infatti:

$$u, v \in V_\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} F(u) = \lambda u \\ \\ F(v) = \lambda v \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad F(u) + F(v) = \lambda u + \lambda v \ .$$

Poiché F è un endomorfismo e quindi un'applicazione lineare, risulta che $F(u) + F(v) = F(u + v)$. Inoltre $\lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$. In conclusione si ha:

$$F(u + v) = \lambda(u + v) \Rightarrow u + v \in V_\lambda.$$

Siano considerati $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V_\lambda$. Allora, determinando αv e sfruttando che F sia un endomorfismo, si ha:

$$F(\alpha v) = \alpha F(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v).$$

ovvero $\alpha v \in V_\lambda$. Segue, per definizione, che $V_\lambda \cup \{\underline{0}\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione

Il sottospazio vettoriale V_λ di V è chiamato *autospazio* corrispondente all'autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$. La dimensione dell'autospazio V_λ è chiamata *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ.

Si indichi con $mg(\lambda)$ la rispettiva molteplicità geometrica dell'autovalore λ, allora, poiché gli autovettori sono tutti non nulli, risulta $mg(\lambda) \geq 1$.

Esempio

Sia $F\colon V \to V$ un endomorfismo non iniettivo. Si vuole determinare l'autospazio relativo all'autovalore 0, V_0, ovvero si vogliono determinare tutti gli autovettori non nulli che hanno autovalore nullo. Allora:

$$v \in V_0 \Rightarrow F(v) = 0v = \underline{0} \Rightarrow v \in \ker F \Rightarrow V_0 \subseteq \ker F.$$

Inoltre, poiché $\ker F \neq \{\underline{0}\}$, in quanto F non è iniettivo, si ha

$$v \in \ker F \Rightarrow F(v) = \underline{0} = 0v \Rightarrow v \in V_0 \Rightarrow \ker F \subseteq V_0.$$

In conclusione risulta che $V_0 = \ker F$.

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $F\colon V \to V$ un endomorfismo;
- $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base di V;
- $A \in M_n(\mathbb{K})$ è la matrice associata all'endomorfismo rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Definizione

L'endomorfismo F si dice *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ tale che la matrice associata, A, rispetto a tale base $\mathcal{B}$, è una matrice diagonale.

Per poter stabilire se un endomorfismo è diagonalizzabile, è importante la seguente proposizione:

Proposizione 2

$$A \text{ diagonale } \Leftrightarrow \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \text{ è una base di autovettori per } F.$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ La matrice A collega i vettori della base $\mathcal{B}$ con i suoi trasformati, in particolare:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n)A = (F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n))$$

Se la matrice A è una matrice diagonale, allora sarà del tipo:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = (F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n))$$

cioè

$$F(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad F(u_2) = \lambda_2 u_2, \quad \dots, \quad F(u_n) = \lambda_n u_n \;\Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_n \text{ autovettori}$$

$\Leftarrow$ Poiché $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono autovettori per F, allora:

$$F(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad F(u_2) = \lambda_2 u_2, \quad \dots, \quad F(u_n) = \lambda_n u_n$$

Ne consegue che la matrice che rappresenta F nella base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $f: V \to V$ un endomorfismo;
- v_1, v_2 autovettori di f associati ad autovalori λ_1 e λ_2 distinti.

Proposizione 3

L'insieme $\{v_1, v_2\}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione.

Se per assurdo v_1 e v_2 fossero proporzionali, si ha: $\alpha v_1 = v_2$. Allora:

$$\lambda_2 v_2 = f(v_2) = f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha \lambda_1 v_1 = \lambda_1 \alpha v_1 = \lambda_1 v_2 \Rightarrow \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2.$$

Quindi:

$$\lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_2 = \underline{0} \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = \underline{0}$$

Poiché v_2 è un autovettore e quindi un vettore non nullo, si ha:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1.$$

Ciò è assurdo perché gli autovalori λ_1 e λ_2 sono distinti. □

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $f : V \to V$ un endomorfismo;
- $v_1, v_2, \dots, v_k$ autovettori di f associati ad autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ distinti.

Proposizione 4

L'insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ *è un sistema di vettori linearmente indipendenti, cioè autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione.

Si può ragionare per induzione sull'intero $k \geq 2$:

- $k = 2$ Proposizione (3).
- $k > 2$ si supponga l'asserto vero per $k-1$, ovvero i vettori $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ sono linearmente indipendenti e si dimostri l'asserto per k. Siano per assurdo $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ vettori linearmente dipendenti. Segue che il vettore v_k è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$:

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}.$$

$\square$

Dimostrazione.

Applicando l'endomorfismo f ad ambo i membri, si ha:

$$f(v_k) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}).$$

Sfruttando la linearità dell'applicazione e la definizione di autovettore, si ha:

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

Si moltiplichi per λ_k la precedente combinazione lineare

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1},$$

e si ha:

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_k v_1 + \alpha_2 \lambda_k v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_k v_{k-1}.$$

Sottraendo le combinazioni lineari, si ottiene: $\square$

Dimostrazione.

$$\underline{0} = \alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1}.$$

Per la lineare indipendenza dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$, segue:

$$\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) = 0 \quad \alpha_2(\lambda_k - \lambda_2) = 0 \quad \cdots \quad \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0$$

Dato che gli autovalori λ_1, λ_2 e λ_k sono distinti, consegue:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0.$$

Allora $v_k = \underline{0}$, ma è assurdo poiché v_k è un autovettore. $\square$

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $f : V \to V$ un endomorfismo.

Corollary 5

L'endomorfismo ha al più di n autovalori distinti.

Teorema 6

$$f \text{ diagonalizzabile } \Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \text{ base di autovettori}$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Poiché l'endomorsimo f è, per ipotesi, diagonalizzabile, allora, per definizione, la matrice associata A, rispetto alla base, è una matrice diagonale. Per la Proposizione (2), allora i vettori della base $\mathcal{B}$ sono autovettori.

$\Leftarrow$ Se esiste una base di autovettori per l'endomorfismo f, allora la matrice associata A rispetto a tale base è diagonale, per la Proposizione (2).

Matrici simili

Si considerino:

- $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata di ordine n definita sul campo $\mathbb{K}$;
- $B \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata di ordine n definita sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione

Le due matrici A e B si dicono *simili* se esiste una matrice $\mathcal{P} \in M_n(\mathbb{K})$, non degenere ($\det \mathcal{P} \neq 0$), tale che:

$$B = \mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P}.$$

Per indicare che due matrici sono simili, si indica: $A \sim B$.

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$;
- $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ due basi di V;
- $f : V \to V$ un endomorfismo.

Proposizione 7

Le matrici che rappresentano l'endomorfismo f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente sono simili.

Dimostrazione.

Siano indicate con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

le matrici che rappresentano l'endomorfimo nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente. $\square$

Dimostrazione.

Dunque risulterà, per definizione di matrice associata all'endomorfismo rispetto alla base assegnata:

$$\begin{aligned} (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = (u_1, u_2, \dots, u_n)A \\ (f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_n)) = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)B \end{aligned} \tag{1}$$

Inoltre si consideri la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

In particolare si ha:

$$(u'_1, u'_2, \dots, u'_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)\mathcal{P}. \tag{2}$$

Dimostrazione.

Applicando ad ambo i membri l'applicazione f e considerando la linearità, si ottiene:

$$(f(u_1'), f(u_2'), \dots, f(u_n')) = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))\mathcal{P}.$$

Sostituendo in essa le relazioni (1), si ottiene:

$$\underbrace{(u_1', u_2', \dots, u_n')B}_{(f(u_1'),f(u_2'),\dots,f(u_n'))} = \underbrace{(u_1, u_2, \dots, u_n)A}_{(f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n))}\mathcal{P}.$$

Tenuto conto della relazione (2), allora:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)\mathcal{P}B = (u_1, u_2, \dots, u_n)A\mathcal{P}.$$

Per l'indipendenza dei vettori $u_1, u_2, \dots, u_n$, si ottiene:

$$\mathcal{P}B = A\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}B = \mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P} \Rightarrow B = \mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P}.$$

Si consideri una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Proposizione 8

$$A \text{ diagonalizzabile } \Leftrightarrow A \sim D$$

dove D è una matrice diagonale.

Dimostrazione.

Segue dalla proposizione (7). $\square$

Polinomio caratteristico

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. L'equazione $Ax = \lambda x$ può essere riscritta come $(A - \lambda I)x = \underline{0}$. Si tratta di un sistema lineare omogeneo che, affinché ammetta soluzioni non nulle, deve avere il determinante della matrice dei coefficienti uguale a zero.

Definizione

Il determinante

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

è un polinomio di grado n nella variabile λ, indicato con $p_A(\lambda)$ ed è chiamato **polinomio caratteristico.**

Gli autovalori della matrice A sono radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$:

$$\lambda_0 \text{ autovalore di } A \Leftrightarrow p_A(\lambda_0) = 0.$$

Dunque gli autovalori sono da ricercare come soluzioni dell'equazione $p_A(\lambda) = 0$.

Definizione

Dato un autovalore λ della matrice A, si definisce *molteplicità algebrica* di λ, $m_a(\lambda)$, la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico.

Definizione

Un autovalore della matrice si dice *semplice* se la sua molteplicità algebrica è 1, $m_a(\lambda) = 1$.

Proposizione 9

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ è indipendente dalla base scelta per rappresentare f.

Dimostrazione.

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi dello spazio vettoriale V e siano A e A' le matrici associate all'applicazione f rispetto alle basi date.Per la Proposizione (7), le matrici A e A' sono simili. Per definizione allora esiste una matrice non degenere $\mathcal{P} \in M_n(\mathbb{K})$:

$$A' = \mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P}.$$

Si ha allora:

$$|A' - \lambda I| = |\mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P} - \lambda I| = |\mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P} - \mathcal{P}^{-1} \lambda I \mathcal{P}| = |\mathcal{P}^{-1}(A - \lambda I)\mathcal{P}|.$$

Applicando il teorema di Binet, si ha:

$$|\mathcal{P}^{-1}| \cdot |A - \lambda I| \cdot |\mathcal{P}| = |A - \lambda I|$$

essendo $|\mathcal{P}^{-1}| \cdot |\mathcal{P}| = 1$ $\square$

Proposizione 10

Sia λ un autovalore della matrice A. Allora:

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Dalla proposizione precedente segue:

Proposizione 11

Ogni autovalore λ semplice della matrice A è tale che: $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Dimostrazione.

Se λ è un autovalore semplice della matrice, per definizione, si ha $m_a(\lambda) = 1$. Per la Proposizione precedente, si ha:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1.$$

$\square$

Proposizione 12

Se $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m$ sono m autovalori distinti di f, i corrispondenti autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2} \ldots, V_{\lambda_m}$ sono tali che ciascuno di essi interseca nel solo vettore nullo lo spazio generato dai rimanenti.

Dimostrazione.

Proviamo che $V_{\lambda_1} \cap \langle V_{\lambda_2} \cup \ldots V_{\lambda_m} \rangle = \{\underline{0}\}$ (in modo analogo si procede negli altri casi). Sia per assurdo b un vettore non nullo appartenente a $V_{\lambda_1} \cap \langle V_{\lambda_2} \cup \ldots \cup V_{\lambda_m} \rangle$. Allora si ha:

$$b \in \langle V_{\lambda_2} \cup \ldots \cup V_{\lambda_m} \rangle \Rightarrow b = b_2 + \ldots + b_m$$

con $b_i \in V_{\lambda_i}$ per $i = 2, \ldots, m$. Riducendo il numero degli addendi, possiamo supporre che sia $b_2 \neq \underline{0}, \ldots, b_m \neq \underline{0}$. Dalla relazione $b = b_2 + \ldots + b_m$, segue, applicando f:

$$\lambda_1 b = \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_m b_m.$$

Dimostrazione.

Moltiplicando $b = b_2 + \ldots + b_m$ per λ_1 si ha:

$$\lambda_1 b = \lambda_1 b_2 + \ldots + \lambda_1 b_m.$$

Dalle due espressioni precedenti, sottraendo membro a membro, si ha:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) b_2 + \ldots + (\lambda_1 - \lambda_m) b_m = \underline{0}.$$

Per la Proposizione (4), gli autovettori $b_2, \ldots, b_m$ sono linearmente indipendenti e quindi:

$$\lambda_1 - \lambda_i = 0 \qquad \forall i = 2, \ldots, m.$$

e ciò è assurdo avendo supposto $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distinti. $\square$

Si considerino:

- V uno spazio vettoriale di dimensione n;
- $f : V \to V$ un endomorfismo.

Teorema 13 (Criterio di diagonalizzazione di una matrice)

L'endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici nel campo e ciascuna con molteplicità geometrica uguale a quella algebrica.

Dimostrazione.

Supponiamo che il polinomio caratteristico abbia tutte le radici nel campo e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, ciascuna con molteplicità algebrica uguale a quella geometrica:

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = s_i \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, t.$$

$\square$

Dimostrazione.

Si ha in particolare che

$$dimV_{\lambda_i} = s_i \qquad i = 1, 2, \ldots, t$$

con $s_1 + \ldots + s_t = n$. Sia $\mathcal{B}_i$ una base di V_{λ_i} per $i = 1, 2, \ldots, t$. Il sistema di vettori $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{t} \mathcal{B}_i$ ha cardinalità n ed è una base di autovettori di f, per la proposizione 12. Allora per il Teorema (6) è diagonalizzabile.
Viceversa, supponiamo che f sia diagonalizzabile. Allora, per il Teorema (6), esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ fatta da autovettori, i cui autovalori sono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Indichiamo con $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_t$ gli autovalori distinti che figurano tra $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e supponiamo inoltre che $\overline{\lambda}_1$ figuri s_1 volte tra $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $\ldots$, $\overline{\lambda}_t$ figuri s_t volte tra $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Si ha così:

$$s_1 + \ldots + s_t = n.$$

Diciamo $h_1, \ldots, h_t$ le molteplicità algebriche delle radici $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_t$. $\square$

Dimostrazione.

Poichè l'autospazio $V_{\overline{\lambda}_i}$ contiene s_i vettori di $\mathcal{B}$, per ogni $i = 1, 2, \ldots, t$, si ha:

$$s_i \leq dim V_{\overline{\lambda}_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, t.$$

D'altra parte per la Proposizione (10), si ha:

$$\dim V_{\overline{\lambda}_i} \leq h_i \qquad i = 1, 2, \ldots, t.$$

Dalle due relazioni precedenti segue:

$$s_i \leq \dim V_{\overline{\lambda}_i} \leq h_i \qquad i = 1, 2, \ldots, t.$$

Da queste si ottiene:

$$n = s_1 + \ldots + s_t = \dim V_{\overline{\lambda}_1} + \ldots + \dim V_{\overline{\lambda}_t} \leq h_1 + \ldots + h_t \leq n.$$

$\square$

Dimostrazione.

Dalla relazione precedente segue che $h_1 + \ldots + h_t = n$ e che $s_i = h_i$, per ogni $i = 1, 2, \ldots, t$.
E quindi che:

$$\dim V_{\overline{\lambda}_1} = h_1, \quad \ldots, \quad \dim V_{\overline{\lambda}_t} = h_t,$$

e così $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_t$ sono tutte le radici del polinomio caratteristico di f e ciascuna ha molteplicità geometrica uguale a quella algebrica. Così il teorema è provato. $\square$

Esempio

Sia considerato un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Determinare gli autovalori di f e le relative molteplicità.

Per determinare gli autovalori di f è necessario determinare il polinomio caratteristico:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico e quindi si ha:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

e rispettive molteplicità algebriche sono:

$$m_a(\lambda_1) = 1, \quad m_a(\lambda_2) = 2$$

- Determinare gli autospazi di f.

Per determinare gli autospazi di f è necessario determinare i seguenti sottospazi:

$$V_{\lambda_1} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 - \{\underline{0}\} : Av = \lambda_1 v\right\} \cup \{\underline{0}\}, \quad V_{\lambda_2} = \left\{v- \in \mathbb{R}^3 - \{\underline{0}\} : Av = \lambda_2 v\right\} \cup \{$$

In particolare è necessario risolvere i seguenti sistemi lineari omogenei:

$$(A-\lambda_1\mathcal{I})v=\underline{0},$$
$$(A-\lambda_2\mathcal{I})v=\underline{0}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda_1 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda_2 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I sistemi lineari omogenei che si ottengono sono:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = 0 \end{cases}$$

Dai rispettivi sistemi lineari omogenei si ottiene come soluzione:

$$V_1 = \langle (1,1,1) \rangle, \qquad V_2 = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$$

Una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori sarà dunque:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}\,.$$

- Stabilire se l'endomorfismo è diagonalizzabile.

Bisogna verificare il **Criterio di diagonalizzazione**, verificando che le rispettive molteplicità algebriche coincidono con le rispettive molteplicità geometriche degli autovalori. Avendo calcolato gli autovalori come radici del polinomio caratteristico, si ha che le rispettive molteplicità algebriche sono:

$$m_a(1) = 1, \qquad m_a(2) = 2$$

In relazione al primo autovalore $\lambda_1 = 1$, sfruttando la Proposizione (10), si ha:

$$m_g(1) \leq m_a(1) = 1 \Rightarrow m_g(1) = m_a(1) = 1.$$

Quindi la molteplicità algebrica del primo autovalore coincide con la sua molteplicità geometrica. In relazione al secondo autovalore $\lambda_2 = 2$, invece, è necessario calcolare la rispettiva molteplicità geometrica. Per definizione si ha:

$$m_g(2) = \dim V_2 = 3 - \rho(A - \lambda_2 \mathcal{I}).$$

Il rango della matrice $A - \lambda_2 \mathcal{I} = 1$, quindi

$$m_g(2) = 3 - 1 = 2 = m_a(2).$$

Poichà ogni autovalore ha molteplicità algebrica coincidente con la rispettiva molteplicità geometrica, allora per il criterio di diagonalizzazione, la matrice è diagonalizzabile, ovvero l'endomorfismo è diagonalizzabile.

- Determinare la matrice $\mathcal{P}$ che diagonalizza la matrice A e la matrice diagonale $\mathcal{D}$.

Poiché la matrice A è diagonalizzabile, allora, per la Proposizione (8), essa sarà una matrice simile ad una matrice diagonale $\mathcal{D}$. Per definizione esisterà una matrice $\mathcal{P}$ invertibile tale che:

$$\mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P} = \mathcal{D}.$$

La matrice $\mathcal{P}$ è la matrice che ha come colonne gli autovettori della base individuata precedentemente, dunque:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice diagonale $\mathcal{D}$ è la matrice che ha lungo la diagonale principale gli autovalori:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistemi di riferimento

Si consideri una retta orientata, x, fissando un verso di percorrenza con la punta di una freccia. Su di essa è fissato un punto, O, chiamato origine e si stabilisca una unità di misura. Fissando un punto sulla retta x, P, resta individuato un segmento $\overline{OP}$. Al punto P è possibile associare un valore reale, x_P, che rappresenta il numero di volte che l'unità di misura entra nel segmento $\overline{OP}$.
Lavorando su una retta orientata, per convenzione:

- se il punto P è fissato dopo l'origine O, il valore reale associato ad esso sarà positivo;
- se il punto P è fissato prima dell'origine O, il valore reale associato ad esso sarà negativo.

Si può considerare l'applicazione:

$$P \in r \rightarrow x_P \in \mathbb{R}$$

ed è un **isomorfismo**.

Si parla di sistema di riferimento su una retta x.

Dato un piano π, si considerino due rette orientate e non parallele, x e y, indicando con O il punto d'intersezione. Su ciascuna delle due rette si stabilisca una unità di misura. Si fissi un punto nel piano individuato dalle due rette, P, allora:

- conducendo dal punto P la retta parallela alla retta y, questa interseca la retta x in un punto P_x. Resta individuato il segmento $\overline{OP_x}$ e quindi il valore reale, x_P, che rappresenta il numero di volte che l'unità di misura, scelta sulla retta x, entra nel segmento;
- conducendo dal punto P la retta parallela alla retta x, questa interseca la retta y in un punto P_y. Resta individuato il segmento $\overline{OP_y}$ e quindi il valore reale, y_P, che rappresenta il numero di volte che l'unità di misura, scelta sulla retta y, entra nel segmento.

Dunque ad un punto P del piano è possibile associare una coppia di numeri reali e si può considerare l'applicazione:

$$P \in \pi \to (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$$

ed è un **isomorfismo**.

Si parla di sistema di riferimento in un piano π. Le rette orientate, x e y, si chiamano **assi**, in particolare:

- x è chiamata asse delle **ascisse**;
- y è chiamata asse delle **ordinate**;
- O è chiamato **origine** del sistema.

Tale sistema di riferimento si indica con $\pi(O, x, y, u_x, u_y)$, con u_x e u_y unità di misura fissate sui rispettivi assi.

La coppia dei valori reali $(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$ prende nome di **coordinate** del punto $P \in \pi$. Qualora gli assi s'intersechino nel punto O perpendicolarmente, $x \perp y$, il sistema di riferimento è detto **ortogonale**. Qualora si utilizzi la stessa unità su entrambi gli assi, $u_x = u_y = u$ il sistema di riferimento è detto **monometrico**. Simbolicamente è indicato $\pi(O, x, y, u)$.

Dato uno spazio euclideo $\mathcal{S}$, si considerino tre rette orientate e non parallele a due a due, x, y e z, indicando con O il punto d'intersezione. Restano individuati i piani:

- xy, piano individuato dalle rette x e y;
- yz, piano individuato dalle rette y e z;
- xz, piano individuato dalle rette x e z.

Su ciascuna delle tre rette si stabilisca una unità di misura. Si fissi un punto nello spazio, P, allora:

- conducendo dal punto P il piano parallelo al piano yz, questo interseca la retta x in un punto P_x. Resta individuato il segmento $\overline{OP_x}$ e quindi il valore reale, x_P, che rappresenta il numero di volte che l'unità di misura, scelta sulla retta x, entra nel segmento;
- conducendo dal punto P il piano parallelo al piano xz, questo interseca la retta y in un punto P_y. Resta individuato il segmento $\overline{OP_y}$ e quindi il valore reale, y_P, che rappresenta il numero di volte che l'unità di misura, scelta sulla retta y, entra nel segmento;

- conducendo dal punto P il piano parallelo al piano xy, questo interseca la retta z in un punto P_z. Resta individuato il segmento $\overline{OP_z}$ e quindi il valore reale, z_P, che rappresenta il numero di volte che l'unità di misura, scelta sulla retta z, entra nel segmento.

Dunque ad un punto P dello spazio è possibile associare una terna di numeri reali e si può considerare l'applicazione:

$$P \in \mathcal{S} \to (x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$$

ed è un **isomorfismo**.

Tale sistema di riferimento si indica con $\mathcal{S}(O, x, y, z, u_x, u_y, u_z)$, con u_x, u_y e u_z unità di misura fissate sui rispettivi assi.

La terna dei valori reali $(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ prende nome di **coordinate** del punto $P \in \mathcal{S}$. Qualora gli assi s'intersecano nel punto O perpendicolarmente a due a due, $x \perp y$, $y \perp z$ e $x \perp z$, il sistema di riferimento è detto **ortogonale**. Qualora si utilizzi la stessa unità sugli assi, $u_x = u_y = u_z = u$, il sistema di riferimento è detto **monometrico**. Simbolicamente è indicato $\mathcal{S}(O, x, y, z, u)$.

Retta nel piano

Si fissi in un piano π euclideo un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\pi(0, x, y, u)$ e si fissino i due punti A e B con le rispettive coordinate (x_A, y_A) e (x_B, y_B). Resta individuato un vettore $\vec{AB}$ che giace sulla retta r. Di tale vettore si determinano le componenti distinte lungo gli assi date dai numeri reali:

$$\lambda = \underbrace{x_B - x_A}_{\text{asse } x} \qquad \mu = \underbrace{y_B - y_A}_{\text{asse } y}$$

La coppia dei numeri reali non entrambi nulli (λ, μ) è chiamata coppia di numeri direttori della retta r.

I numeri direttori della retta r sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità. Infatti se si considerano altri due punti C e D sulla retta r, resta determinato il vettore $\vec{CD}$.

Poiché i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ giacciono sulla stessa retta r, allora sono proporzionali, ovvero:

$$\exists \rho \in \mathbb{R} - \{0\} : \quad \vec{CD} = \rho \vec{AB}.$$

Se si considerano le componenti del vettore $\vec{CD}$ lungo gli assi:

$$\lambda' = x_D - x_C \qquad \mu' = y_D - y_C$$

queste sono proporzionali alle componenti del vettore $\vec{AB}$, rispetto al fattore di proporzionalità ρ, cioé:

$$(\lambda', \mu') = \rho(\lambda, \mu)$$

Si considerino i punti A e B sulla retta r, dunque il vettore $\vec{AB}$, le cui componenti sono:

$$\lambda = x_B - x_A \qquad \mu = y_B - y_A$$

Si fissi un punto P di coordinate (x, y), quindi resta determinato il vettore $\vec{AP}$, le cui componenti sono:

$$\lambda' = x - x_A \qquad \mu' = y - y_A \ .$$

Poiché entrambi i vettori giacciono sulla stessa retta, allora il vettore $\vec{AP}$ è proporzionale al vettore $\vec{AB}$:

$$\exists \rho \in \mathbb{R} - \{0\} : \quad \vec{AP} = \rho \vec{AB}.$$

Allora anche le componenti del vettore $\vec{AP}$ sono proporzionali, rispetto al fattore di proporzionalità ρ, alle componenti del vettore $\vec{AB}$:

$$(\lambda', \mu') = \rho(\lambda, \mu) \Rightarrow \begin{cases} \lambda' = \rho\lambda \\ \mu' = \rho\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_A = \rho\lambda \\ y - y_A = \rho\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \end{cases}$$

Definizione

Data una retta r, determinata dai numeri direttori (λ, μ), le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \end{cases}$$

sono dette equazioni **parametriche** della retta nel piano.

Si può osservare che i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AP}$, poiché sono proporzionali, sono linearmente dipendenti, ovvero la matrice, che ha per righe le rispettive componenti, ha determinante nullo:

$$\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante, si ha:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

denotando con:

- a, il termine $y_B - y_A$, ovvero μ;
- b, il termine $x_A - x_B$, ovvero $-\lambda$;
- c, il termine $y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A)$.

In conclusione: tutti i punti della retta r hanno le coordinate che soddisfanno l'equazione $ax + by + c = 0$.

Definizione

Data una retta r, determinata dai numeri direttori $(\lambda, \mu) = (-b, a)$, la seguente equazione:

$$ax + by + c = 0$$

è detta equazione **cartesiana** della retta.

Seguono i due teoremi che stabiliscono le condizioni di parallelismo e perpendicolarità di due rette date nel piano in forma parametrica. Siano:

- la retta $r : \begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \end{cases}$, determinata dai numeri direttori (λ, μ);
- la retta $r' : \begin{cases} x = x_B + \rho\lambda' \\ y = y_B + \rho\mu' \end{cases}$, determinata dai numeri direttori (λ', μ').

Teorema 1

Le rette r e r' sono parallele se e solo se i numeri direttori dell'una sono uguali o proporzionali ai numeri direttori dell'altra:

$$r//r' \Leftrightarrow (\lambda, \mu) = \gamma(\lambda', \mu')$$

Teorema 2

Le rette r e r' sono perpendicolari se e solo se i numeri direttori dell'una e dell'altra soddisfano la relazione $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$, ovvero:

$$r \perp r' \Leftrightarrow \lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$$

I teoremi (1) e (2) possono essere riletti considerando le rette scritte in forma cartesiana. Siano:

- la retta $r : ax + by + c = 0$, determinata dai numeri direttori $(\lambda, \mu) = (-b, a)$;
- la retta $r' : a'x + b'y + c' = 0$, determinata dai numeri direttori $(\lambda', \mu') = (-b', a')$.

Allora il teorema (1) sarà:

Teorema 3

$$r // r' \Leftrightarrow (a, b) = \gamma(a', b')$$

Dimostrazione.

Sfruttando il teorema (1), si ha:

$$r//r' \Leftrightarrow (\lambda, \mu) = \gamma(\lambda', \mu') \Leftrightarrow (-b, a) = \gamma(-b', a') \Leftrightarrow (a, b) = \gamma(a', b')$$

$\square$

Il teorema (2) sarà:

Teorema 4

$$r \perp r' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Dimostrazione.

Sfruttando il teorema (2), si ha:

$$r \perp r' \Leftrightarrow \lambda\lambda' + \mu\mu' = 0 \Leftrightarrow (-b)(-b') + aa' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Si consideri un piano euclideo in cui è fissato un sistema di riferimento ortogonale monometrico $\pi(O, x, y, u)$. Si fissi un punto P di coordinate (x_0, y_0) e si considerino due rette passanti per il punto P scritte in forma cartesiana:

$$r : ax + by + c = 0 \qquad r' : a'x + b'y + c' = 0$$

Ovviamente, poiché il punto P appartiene ad entrambe le rette, le sue coordinate soddisfanno le rispettive equazioni cartesiane:

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \qquad a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$$

Si prenda una combinazione lineare delle due equazioni cartesiani, quindi:

$$\alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0$$

con α e β non entrambi nulli.

Proposizione 5

La combinazione lineare delle due equazioni:

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0$$

è ancora una retta passante per il punto P, al variare dei parametri α e β. Inoltre ogni altra retta passante per il punto P si scrive come combinazione lineare delle due rette r e r'.

Dimostrazione.

Le coordinate del punto P soddisfano la combinazione lineare delle due equazioni:

$$\alpha\underbrace{(ax_0+by_0+c)}_{=0}+\beta\underbrace{(a'x_0+b'y_0+c')}_{=0}=0.$$

Dunque la combinazione lineare delle due rette è ancora una retta passante per il punto P, al variare dei parametri α e β. $\square$

Dimostrazione.

Sia considerata una retta $r'' : a''x + b''y + c'' = 0$ passante per il punto P. Si metta a sistema l'equazioni delle tre rette r, r' e r'':

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema con $m = 3$ equazioni in $n = 2$ incognite, compatibile perché ammette come soluzione le coordinate del punto P. La matrice incompleta e la matrice completa hanno lo stesso rango:

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

$\square$

Dimostrazione.

Essendo il determinante nullo, allora le righe sono linearmente dipendenti; in particolare la 1° e la 2° riga sono linearmente indipendenti, mentre la 3° riga è dipendente dalle altre. Dunque la 3° equazione è linearmente dipendente dalle altre due equazioni. $\square$

Per semplicità è possibile considerare le due rette, passanti per il punto P, parallele ai rispettivi assi:

$$x - x_0 = 0 \qquad y - y_0 = 0$$

Considerando la combinazione lineare delle due equazioni:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

al variare dei parametri α e β si determinano tutte le rette passanti per il punto.

Definizione

L'equazione:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

è detta equazione del **fascio di rette di centro** P.

Retta nello spazio

Si fissi in uno spazio euclideo $\mathcal{S}$ un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\mathcal{S}(O, x, y, z, u)$ e si fissino due punti A e B con le rispettive coordinate (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B). Resta individuato un vettore $\vec{AB}$ che giace sulla retta r. Di tale vettore si determinano le componenti distinte lungo gli assi, date dai numeri reali:

$$\lambda = \underbrace{x_B - x_A}_{\text{asse } x} \qquad \mu = \underbrace{y_B - y_A}_{\text{asse } y} \qquad \nu = \underbrace{z_B - z_A}_{\text{asse } z}$$

La terna dei numeri reali non tutti nulli (λ, μ, ν) è chiamata terna dei numeri direttori della retta r.

I numeri direttori della retta r sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità. Infatti se si considerano altri due punti C e D sulla retta r, resta determinato il vettore $\vec{CD}$.

Poiché i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ giacciono sulla stessa retta r, allora sono proporzionali, ovvero:

$$\exists \rho \in \mathbb{R} - \{0\} : \quad \vec{CD} = \rho \vec{AB}.$$

Se si considerano le componenti del vettore $\vec{CD}$ lungo gli assi:

$$\lambda' = x_D - x_C \qquad \mu' = y_D - y_C \qquad \nu' = z_D - z_C$$

queste sono proporzionali alle componenti del vettore $\vec{AB}$, rispetto al fattore di proporzionalità ρ, cioé:

$$(\lambda', \mu', \nu') = \rho(\lambda, \mu, \nu)$$

Si considerino i punti A e B sulla retta r, dunque il vettore $\vec{AB}$, le cui componenti sono:

$$\lambda = x_B - x_A \qquad \mu = y_B - y_A \qquad \nu = z_B - z_A$$

Si fissi un punto P di coordinate (x, y, z) sulla retta , quindi resta determinato il vettore $\vec{AP}$, le cui componenti sono:

$$\lambda' = x - x_A \qquad \mu' = y - y_A \qquad \nu' = z - z_A \ .$$

Poiché entrambi i vettori giacciono sulla stessa retta, allora il vettore $\vec{AP}$ è proporzionale al vettore $\vec{AB}$:

$$\exists \rho \in \mathbb{R} - \{0\} : \quad \vec{AP} = \rho \vec{AB}.$$

Allora anche le componenti del vettore $\vec{AP}$ sono proporzionali, rispetto al fattore di proporzionalità ρ, alle componenti del vettore $\vec{AB}$:

$$(\lambda', \mu', \nu') = \rho(\lambda, \mu, \nu) \Rightarrow \begin{cases} \lambda' = \rho\lambda \\ \mu' = \rho\mu \\ \nu' = \rho\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_A = \rho\lambda \\ y - y_A = \rho\mu \\ z - z_A = \rho\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \\ z = z_A + \rho\nu \end{cases}$$

Definizione

Data una retta r, determinata dai numeri direttori (λ, μ, ν), le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \\ z = z_A + \rho\nu \end{cases}$$

sono dette equazioni **parametriche** della retta nello spazio.

Seguono i due teoremi che stabiliscono le condizioni di parallelismo e perpendicolarità di due rette date nello spazio in forma parametrica. Siano:

- la retta $r : \begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \\ z = z_A + \rho\nu \end{cases}$, determinata dai numeri direttori (λ, μ, ν);

- la retta $r' : \begin{cases} x = x_B + \rho\lambda' \\ y = y_B + \rho\mu' \\ z = z_B + \rho\nu' \end{cases}$, determinata dai numeri direttori (λ', μ', ν').

Teorema 6

Le rette r e r' sono parallele se e solo se i numeri direttori dell'una sono uguali o proporzionali ai numeri direttori dell'altra:

$$r//r' \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = \gamma(\lambda', \mu', \nu')$$

Teorema 7

Le rette r e r' sono perpendicolari se e solo se i numeri direttori dell'una e dell'altra soddisfano la relazione $\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$, ovvero:

$$r \perp r' \Leftrightarrow \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

Piano nello spazio

Si fissi in uno spazio euclideo $\mathcal{S}$ un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\mathcal{S}(O, x, y, z, u)$. Si prenda un piano π si fissino su di esso tre punti A, B e C, distinti e non allineati, con le rispettive coordinate (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B) e (x_C, y_C, z_C).. Restano determinati i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$, le cui componenti lungo gli assi sono i numeri reali:

$$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \qquad (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

Sul piano π, si prenda un generico punto P di coordinate (x, y, z) e si consideri il vettore $\vec{AP}$. Poiché i vettori $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AP}$ giacciono sullo stesso piano π, essi sono linearmente dipendenti. Saranno linearmente dipendenti anche le rispettive componenti lungo gli assi:

$$\underbrace{(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)}_{\vec{AB}} \quad \underbrace{(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)}_{\vec{AC}} \quad \underbrace{(x - x_A, y - y_A, z - z_A)}_{\vec{AP}}$$

Quindi:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, e raccogliendo i termini con la x, indicati con a, i termini con la y, indicati con b e i termini con la z, indicati con c, e i termini noti indicati con d, si ottiene:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Definizione

L'equazione $ax + by + cz + d = 0$ è detta equazione **cartesiana** del piano π nello spazio euclideo.

La terna (a, b, c) dei valori reali è chiamata **numeri direttori** del piano π.
Seguono i due teoremi che stabiliscono le condizioni di parallelismo e perpendicolarità di due piani dati nello spazio euclideo. Siano:

- il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, determinato dai numeri direttori (a, b, c);
- il piano $\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, determinato dai numeri direttori (a', b', c').

Teorema 8

I piani π e π' sono paralleli se e solo se i numeri direttori dell'uno sono uguali o proporzionali ai numeri direttori dell'altro:

$$\pi // \pi' \Leftrightarrow (a, b, c) = \gamma(a', b', c')$$

Teorema 9

I piani π e π' sono perpendicolari se e solo se i numeri direttori dell'uno e dell'altro soddisfano la relazione $aa' + bb' + cc' = 0$, ovvero:

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

Si metta a sistema le equazioni dei due piani:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} .$$

Si tratta di un sistema con $m = 2$ equazioni in $n = 3$ incognite. Si discuta la sua compatibilità. Si considerano la matrice incompleta e la matrice completa associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Si analizzino vari casi:

$\rho(A) = 1$: allora si determini il rango della matrice A' e si analizzano due casi:

- $\rho(A') = 1$: si avrà che $\rho(A) = 1 = \rho(A')$, quindi il sistema è compatibile e ammetterà $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni. In questo caso i due piani si dicono **paralleli impropriamente**, poiché ogni punto del piano π è anche punto del piano π', ovvero i due piani sono coincidenti.
- $\rho(A') = 2$: si avrà $\rho(A) \neq \rho(A')$, quindi il sistema è incompatibile. In questo caso, non s'intersecheranno in alcun punto e si dicono **paralleli propriamente**.

$\rho(A) = 2$: si avrà $\rho(A) = 2 = \rho(A')$, quindi il sistema è compatibile e ammetterà $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. In questo caso i due piani si intersecano in una retta.

L'equazione della retta r data dall'intersezione di due piani nello spazio euclideo:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

è chiamata equazione **cartesiana**.

Si consideri una retta:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

e siano A e B due punti di coordinate rispettivamente (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) della retta r. Dunque le coordinate soddisferanno l'equazioni del sistema:

$$\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ a'x_A + b'y_A + c'z_A + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ a'x_B + b'y_B + c'z_B + d' = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le rispettive equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} a\underbrace{(x_B - x_A)}_{=\lambda} + b\underbrace{(y_B - y_A)}_{=\mu} + c\underbrace{(z_B - z_A)}_{=\nu} = 0 \\ a'\underbrace{(x_B - x_A)}_{=\lambda} + b'\underbrace{(y_B - y_A)}_{=\mu} + c'\underbrace{(z_B - z_A)}_{=\nu} = 0 \end{cases}$$

Quindi i numeri direttori, (λ, μ, ν), della retta r sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ a'\lambda + b'\mu + c'\nu = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo di $m = 2$ equazioni in $n = 3$ incognite.

Le soluzioni del sistema omogeneo possono essere calcolate nel seguente modo:

$$\left(\lambda = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad \mu = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad \nu = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

Posizione reciproca tra retta e piano

Si consideri uno spazio euclideo con un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\mathcal{S}(O, x, y, z, u)$. Siano assegnati una retta e un piano e studiamo le loro posizioni reciproche:

$$r : \begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \\ z = z_A + \rho\nu \end{cases} \qquad \pi : ax + by + cz + d = 0$$

Preso un generico punto P della retta r, esso ha coordinate:

$$(x_A + \rho\lambda, y_A + \rho\mu, z_A + \rho\nu)$$

Sostituendo le coordinate nell'equazione del piano π, si ha:

$$a(x_A + \rho\lambda) + b(y_A + \rho\mu) + c(z_A + \rho\nu) + d = 0$$

Eseguendo i calcoli e raccogliendo i termini con ρ, si ottiene:

$$\underbrace{(a\lambda + b\mu + c\nu)}_{=A}\rho + \underbrace{(ax_A + by_A + cz_A + d)}_{=B} = 0$$

ovvero l'equazione di 1° grado nell'incognita ρ:

$$A\rho + B = 0.$$

Si analizzeranno vari casi:

$A \neq 0$: l'equazione ammette una sola soluzione ρ, quindi vi è un solo punto P di intersezione. La retta r interseca il piano π nel punto P.

$A = 0$: si distinguono due casi:

- $B \neq 0$: l'equazione è impossibile, quindi non vi sono punti d'intersezione e si dice che la retta r e il piano π sono **paralleli propriamente**
- $B = 0$: l'equazione è indeterminata, quindi ci sono infiniti punti d'intersezione. Geometricamente la retta r giace sul piano π e si dice che sono **paralleli impropriamente**.

In funzione dell'analisi fatta precedente, la condizione di parallelismo (propriamente e impropriamente) tra la retta r e un piano π è rappresentata dalla condizione $A = 0$, ovvero $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$. In conclusione, siano:

- r, una retta determinata dai numeri direttori (λ, μ, ν), di equazione parametrica o cartesiana;
- π, un piano determinato dai numeri direttori (a, b, c).

Teorema 10

$$r // \pi \Leftrightarrow a\lambda + b\mu + c\nu = 0$$

Segue il teorema che esprime la condizione di perpendicolarità tra la retta r e il piano π:

Teorema 11

$$r \perp \pi \Leftrightarrow (a, b, c) = \gamma(\lambda, \mu, \nu)$$

Dimostrazione.

Si consideri il piano π' parallelo al piano π e passante per l'origine. Dunque, tenuto conto del teorema (8), la sua equazione è:

$$ax + by + cz = 0.$$

Si considerino i punti A di coordinate (a, b, c) e un generico punto P del piano π' di coordinate (x, y, z). Il punto A é distinto dall'origine e non appartiene al piano π' poiché $aa + bb + cc > 0$. Si prendano i vettori:

- $\vec{OP}$, vettore che giace sul piano π';
- $\vec{OA}$, vettore che risulta perpendicolare al vettore $\vec{OP}$, poiché risulta $ax + by + cz = 0$.

Allora la retta che segue la direzione del vettore $\vec{OA}$ è perpendicolare al vettore $\vec{OP}$ che giace sul piano, quindi perpendicolare al piano π'. Ovviamente un piano parallelo a π' conserva gli stessi coefficienti (a, b, c) ed una retta parallela alla retta OA conserva gli stessi numeri direttori e quindi il teorema é provato. $\square$

Sistemi di riferimento

Retta nel piano

Retta nello spazio

Piano nello spazio

Posizione reciproca tra retta e piano

Fasci e stella di piani

Le coniche

Fasci e stella di piani

Si consideri uno spazio euclideo in cui è fissato un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\mathcal{S}(O, x, y, z, u)$. Sia: $r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ una retta scritta in equazione cartesiana, ergo data dall'intersezione dei due piani di equazioni

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$
$$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

.

Definizione

Si definisce **fascio** di piani con **asse** la retta r è l'insieme dei piani passanti per la retta r.

Si fissi un punto P di coordinate (x_0, y_0, z_0) appartenente alla retta r. Dunque le sue coordinate soddisfano le equazioni del sistema:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d' = 0 \end{cases}$$

Si prenda una combinazione lineare delle due equazioni, quindi:

$$\alpha\,\underbrace{(ax+by+cz+d)}_{\pi}+\beta\,\underbrace{(a'x+b'y+c'z+d')}_{\pi'}=0$$

con α e β non entrambi nulli.

Proposizione 12

La combinazione lineare delle due equazioni:

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

è ancora un piano passante per la retta r, al variare dei parametri α e β. Inoltre ogni altro piano passante per la retta r si scrive come combinazione lineare dei due piani π e π'.

Dimostrazione.

Risulta chiaro che $\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$ è un'equazione di un piano. $\square$

Dimostrazione.

Inoltre, sostituendo le coordinate (x_0, y_0, z_0) del punto P nella combinazione lineare, allora, poiché P è un punto della retta r, si ha:

$$\alpha \underbrace{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)}_{=0} + \beta \underbrace{(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d')}_{=0} = 0.$$

Passando per un generico punto P della retta r, allora si tratta di un piano passante per tutta la retta r, al variare dei parametri α e β. Sia considerato un piano $\pi'' : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ passante per la retta r. Si metta a sistema l'equazioni dei tre piani π, π' e π'' :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \longrightarrow \pi \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \longrightarrow \pi' \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \longrightarrow \pi'' \end{cases}$$

Si tratta di un sistema con $m = 3$ equazioni in $n = 3$ incognite. □

Dimostrazione.

I tre piani si intersecano nella retta r, quindi il sistema ammetterà ∞^1 soluzioni. Allora si ha:

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2.$$

Le prime due righe sono linearmente indipendenti poiché rappresentano l'equazione cartesiana della retta r, mentre la 3° riga è linearmente dipendente dalle altre due. Quindi il piano π'' è combinazione lineare dei piani π e π'. □

Definizione

L'equazione:

$$\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

è detta equazione del **fascio di piani con asse la retta** r.

Si consideri uno spazio euclideo in cui è fissato un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\mathcal{S}(O, x, y, z, u)$. Siano considerati i piani:

$$\begin{aligned} \pi &: ax + by + cz + d = 0 \\ \pi' &: a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ \pi'' &: a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{aligned}$$

che si intersecano in un punto P di coordinate (x_0, y_0, z_0), quindi le coordinate soddisfano il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

Definizione

Si definisce **stella** di piani di **centro** il punto P l'insieme dei piani passanti per il punto P.

Si prenda una combinazione lineare delle tre equazioni, quindi:

$$\alpha\underbrace{(ax+by+cz+d)}_{\pi}+\beta\underbrace{(a'x+b'y+c'z+d')}_{\pi'}+\gamma\underbrace{(a''x+b''y+c''z+d'')}_{\pi''}=0$$

con α, β e γ non tutti nulli.

Proposizione 13

La combinazione lineare delle tre equazioni:

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')+\gamma(a''x+b''y+c''z+d'')=0$$

è ancora un piano passante per il punto P, al variare dei parametri α, β e γ. Inoltre ogni altro piano passante per il punto P si scrive come combinazione lineare dei tre piani π, π' e π''.

Dimostrazione.

Risulta chiaro che $\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')+\gamma(a''x+b''y+c''z+d'')=0$ è un'equazione di un piano. Inoltre, sostituendo le coordinate (x_0,y_0,z_0) del punto P nella combinazione lineare, allora, poiché P è il punto in comune tra i tre piani, si ha:

$$\alpha\underbrace{(ax_0+by_0+cz_0+d)}_{=0}+\beta\underbrace{(a'x+b'y+c'z+d')}_{=0}+\gamma\underbrace{(a''x+b''y+c''z+d'')}_{=0}=0.$$

Sia considerato un piano $\overline{\pi}:\overline{a}x+\overline{b}y+\overline{c}z+\overline{d}=0$ passante per il punto P. Si metta a sistema l'equazione dei quattro piani: □

Dimostrazione.

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \longrightarrow \pi \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \longrightarrow \pi' \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \longrightarrow \pi'' \\ \overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c}z + \overline{d} = 0 \longrightarrow \overline{\pi} \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di $m = 4$ equazioni in $n = 3$ incognite. Poiché i piani si intersecano nel punto P, allora il sistema è compatibile e ammette una sola soluzione. Allora si ha:

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = 3$$

□

Dimostrazione.

La $1^\circ, 2^\circ$ e 3° riga sono linearmente indipendenti, mentre la 4° riga è linearmente dipendente dalle restanti. Quindi il piano $\overline{\pi}$ è combinazione lineare dei piani π, π' e π''. $\square$

Osservazione

Per un punto P di coordinate (x_0, y_0, z_0), passano i piani paralleli ai piani yz, xz e xy:

$$x - x_0 = 0 \quad y - y_0 = 0 \quad z - z_0 = 0$$

Dunque si può considerare la combinazione lineare dei tre piani:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

che rappresenta tutti i piani passanti per il punto P, al variare dei parametri α, β e γ.

In base alla proposizione e all'osservazione precedente, segue la definizione:

Definizione

L'equazione

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

è detta equazione della **stella dei piani di centro** P.

Le coniche

Si consideri un piano euclideo π in cui è fissato un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\pi(O, x, y, u)$. Sia assegnata una proprietà $\mathcal{P}$.

Definizione

Un luogo geometrico, rispetto alla proprietà $\mathcal{P}$, è l' insieme dei punti del piano che soddisfano la proprietà $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{L} = \{P \in \pi : P \text{ soddisfa } \mathcal{P}\}$$

In particolare risulta che:

$$P \text{ soddisfa } \mathcal{P} \Leftrightarrow P \in \mathcal{L} \qquad \forall P \in \pi.$$

Esempio

Si consideri un segmento di estremi i punti A e B. Dato un generico punto $P \in \pi$, si assegni la seguente proprietà:

$$d(P, A) = d(P, B)$$

Esempio

Il seguente insieme:

$$\mathcal{L} = \{P \in \pi : d(P, A) = d(P, B)\}$$

è un luogo geometrico. Il luogo geometrico con questa caratteristica prende nome di **asse del segmento** di estremi i punti A e B.

Le **coniche** sono ottenute tramite l'intersezione di un cono circolare retto con un piano. Si possono definire tutte come luoghi geometrici e, di conseguenza, ricavarne l'equazione algebrica che le rappresenta nel piano cartesiano. Essi sono:

- circonferenza;
- ellisse;
- parabola;
- iperbole.

Circonferenza

La circonferenza si ottiene tagliando un cono con un piano perpendicolare al suo asse. Sia fissato un punto C di coordinate (x_0, y_0) e un numero reale $r > 0$. Si assegna la seguente proprietà:

$$d(P, C) = r \qquad \forall P \in \pi.$$

Definizione

Il seguente insieme:

$$\mathcal{C} = \{P \in \pi : d(P, C) = r\}$$

è un luogo geometrico. Il luogo geometrico con questa caratteristica prende nome di **circonferenza** di centro il punto C e raggio r.

Sia $P \in \mathcal{C}$ un generico punto di coordinate (x, y) appartenente al luogo geometrico $\mathcal{C}$, allora si ha:

$$d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$$

Sviluppando i calcoli, si ottiene:

$$x^2 + x_0^2 - 2x_0 x + y^2 + y_0^2 - 2y_0 y - r^2 = 0$$

ovvero:

$$x^2 + y^2 + (\underbrace{-2x_0}_{=a})x + (\underbrace{-2y_0}_{=b})y + (\underbrace{x_0^2 + y_0^2 - r^2}_{=c}) = 0 \Leftarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

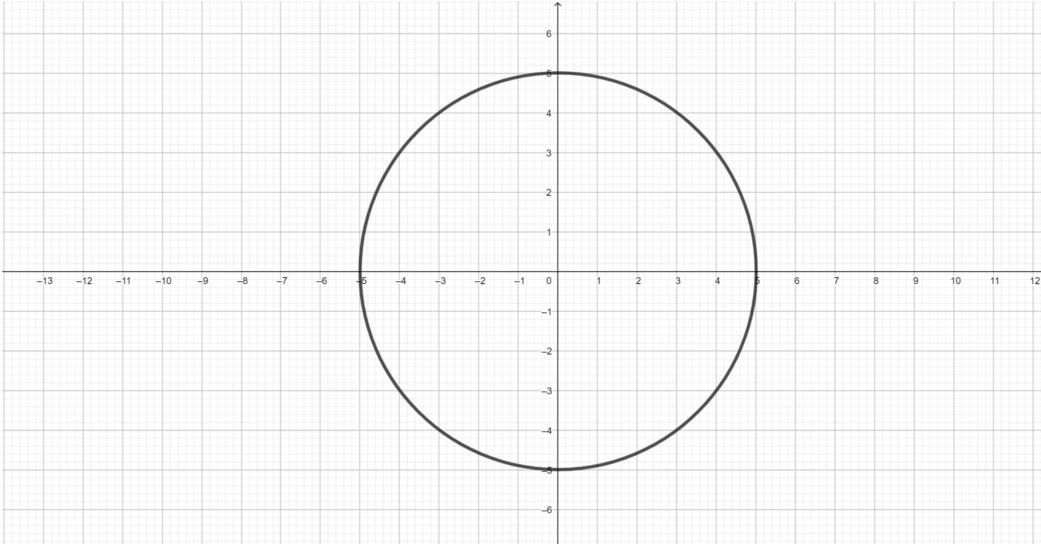
ponendo

$$a = -2x_0 \qquad b = -2y_0 \qquad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

Dalle sostituzioni, si ottiene:

$$x_0 = -\tfrac{a}{2} \qquad y_0 = -\tfrac{b}{2} \qquad r = \sqrt{\left(-\tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{b}{2}\right)^2 - c}$$

La circonferenza $\mathcal{C}$ ha l'andamento della figura:



Se $P = (\overline{x}, \overline{y})$ è un punto della circonferenza Γ rappresentata dall'equazione di sopra, la tangente a Γ in P è rappresentata dall'equazione:

$$\overline{x}x + \overline{y}y + a\frac{x+\overline{x}}{2} + b\frac{y+\overline{y}}{2} + c = 0.$$

La circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C = (x_0.y_0)$ e raggio r ammette, in un riferimento monometrico ortogonale, la rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x - x_0 = r\cos\theta, \\ y - y_0 = r\sin\theta. \end{cases}$$

Ellisse

Siano considerati:

- π;
- $F_1, F_2 \in \pi$;
- u un'unità di misura per i segmenti;
- $d(F_1, F_2) = 2c$ la distanza tra i due punti F_1 e F_2

Definizione

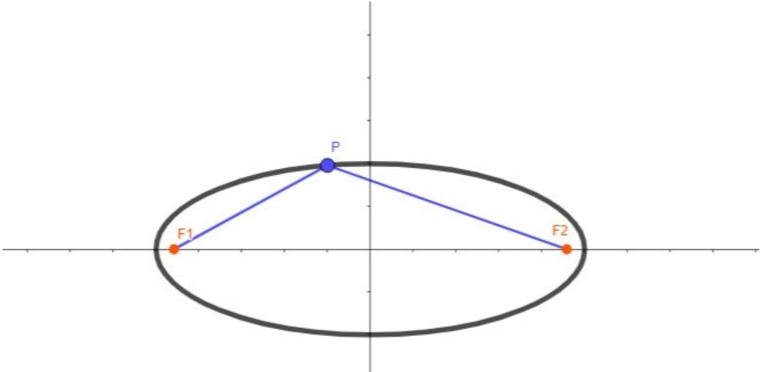
Si definisce **ellisse** il luogo γ dei punti di π tali che la somma delle loro distanze da F_1 e F_2 sia un numero reale assegnato $2a$ con $a > c$. I punti F_1 e F_2 sono chiamati **fuochi**, $2c$ è chiamata **distanza focale** ed $e = \frac{c}{a}$ è detta **eccentricità**.

Se $c = 0$, γ è la circonferenza di centro $F_1 = F_2$ e raggio a. In quel che segue si supporrà $c > 0$.

Nel riferimento $\mathcal{R}$ si consideri l'ellisse γ con i due punti $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ sull'asse delle ascisse (analogo si procederà nel caso in cui si prendano i due punti F_1 e F_2 sull'asse delle ordinate). Si consideri un punto $P = (x, y) \in \gamma$, allora per definizione di ellisse, intesa come luogo geometrico, si ha che:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

dove $2a$ è costante.



Allora:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx+\cancel{y^2}=4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx+\cancel{y^2}-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx \Rightarrow \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}(a^2+cx)$$

$$\Rightarrow \left[a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2=\left[(a^2+cx)\right]^2 \Rightarrow a^2\left[(x+c)^2+y^2\right]=a^4+c^2x^2+2a^2cx$$

$$\Rightarrow a^2(x^2+c^2+2cx+y^2)=a^4+c^2x^2+2a^2cx$$

$$\Rightarrow a^2x^2+a^2c^2+\cancel{2a^2cx}+a^2y^2=a^4+c^2x^2+\cancel{2a^2cx}$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Si denoti $b^2 = a^2 - c^2$, quindi si ha:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per a^2b^2, si ottiene:

$$\frac{\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}}x^2 + \frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}b^2}y^2 = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

In conclusione si ha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

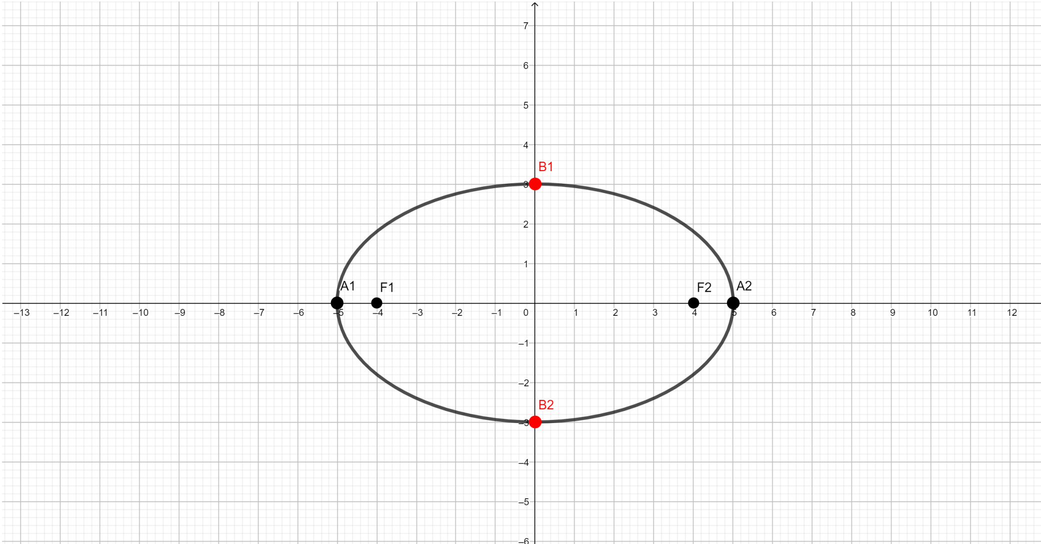
Nel riferimento $\mathcal{R}$ di α avente u come unità di misura, la retta F_1F_2 e l'asse del segmento $\overline{F_1F_2}$, comunque orientati, come assi x e y, l'equazione ordinaria:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ove $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ è chiamata equazione canonica dell'ellisse. Le rispettive equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} .$$

L'ellisse γ ha l'andamento della figura

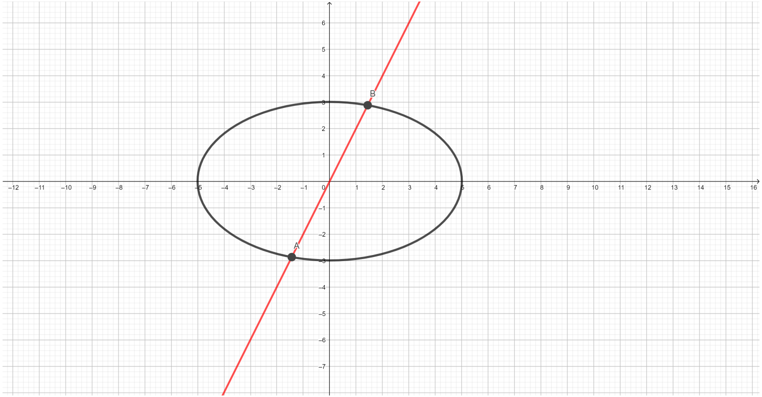


L'ellisse ha le seguenti caratteristiche:

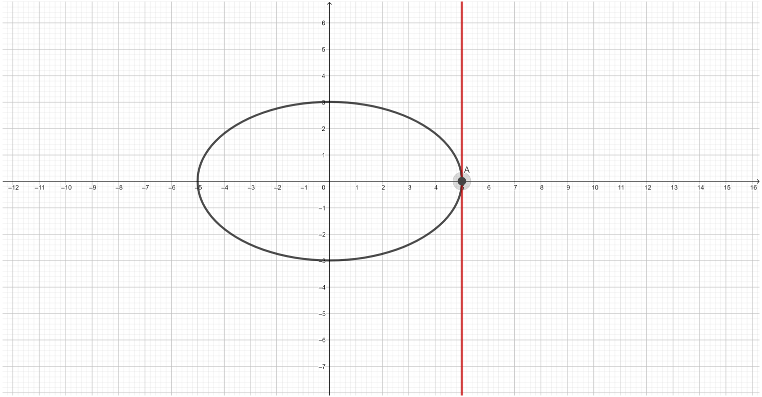
- è una curva chiusa;
- ha un centro di simmetria, chiamato **centro** di γ ed è nel punto medio di $\overline{F_1F_2}$;
- ha due assi di simmetria ortogonali, chiamati **assi** di γ;
- l'asse che congiunge F_1F_2 è chiamato **asse** dei fuochi;
- ciascuno degli assi cartesiani interseca γ in due punti, chiamati **vertici**, e sono indicati A_1, A_2 i vertici di γ appartenenti all'asse dei fuochi e B_1, B_2 i vertici appartenenti all'altro asse;
- ha $d(A_1, A_2) = 2a$ e $d(B_1, B_2) = 2b$ e i segmenti $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ prendono nome rispettivamente **asse maggiore** ed **asse minore** dell'ellisse.

Dati l'ellisse γ e una retta r, questa può essere:

secante: la retta r interseca γ in due punti:



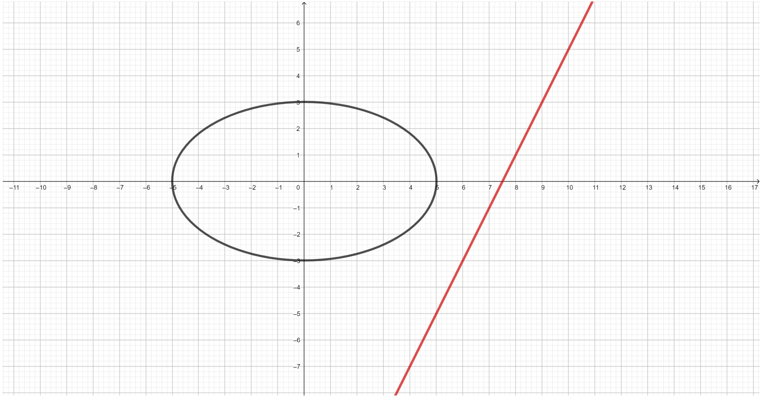
tangente: la retta r interseca γ in un punto:



Se il punto di tangenza è un punto $P = (\overline{x}, \overline{y})$, allora la retta tangente a γ ha equazione:

$$\frac{x\overline{x}}{a^2} + \frac{y\overline{y}}{b^2} - 1 = 0.$$

esterna: la retta r non ha alcun punto di intersezione con l'ellisse γ :



Parabola

Sia F un punto e sia d una retta non passante per F, del piano π.

Definizione

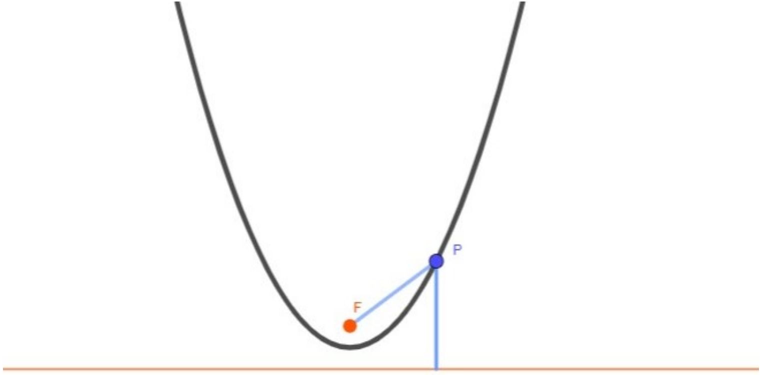
Si definisce **parabola** il luogo γ dei punti di π equidistanti da F e da d. Il punto F è detto **fuoco** e la retta d è chiamata **direttrice.**

Fissata un'unità di misura u per i segmenti, sia p la distanza di F da d (parametro di γ). Nel riferimento $\mathcal{R}$ si ha:

- u come unità di misura;
- l'asse y perpendicolare per F a d ed orientata in modo che la semiretta positiva di origine F non incontri d;
- l'asse x la parallela a d ed equidistante da F e da d e comunque orientata.

Nel riferimento $\mathcal{R}$ si consideri la parabola γ con il fuoco $F = (0, p/2)$ e direttrice di equazione $d : y = -p/2$. Si consideri un punto $P = (x, y) \in \gamma$, allora per definizione di parabola, intesa come luogo geometrico, si ha che:

$$d(P, F) = d(P, d)$$



In particolare si ha:

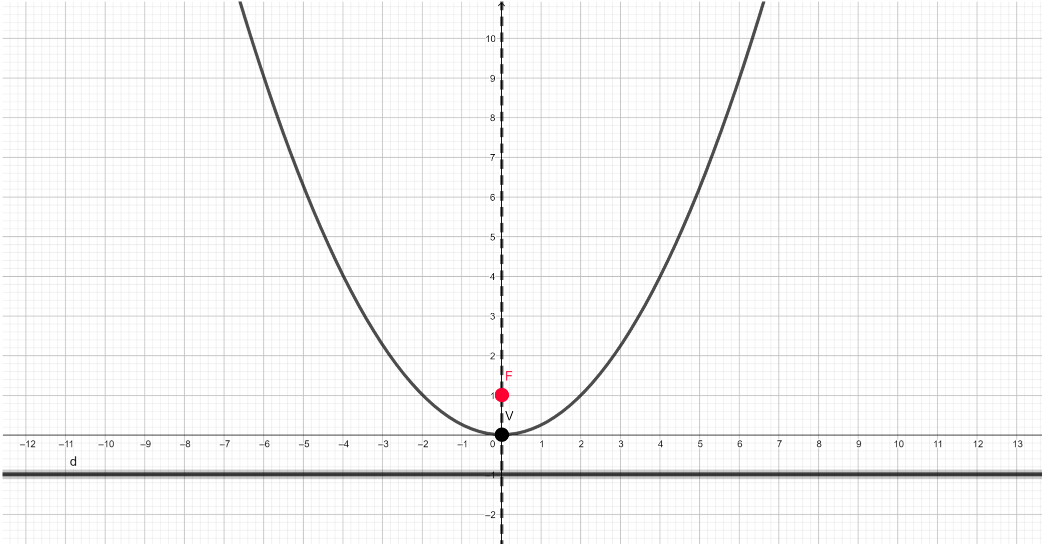
$$\sqrt{x^2+(y-p/2)^2} = |y+p/2| \Rightarrow \left[\sqrt{x^2+(y-p/2)^2}\right]^2 = |y+p/2|^2 \Rightarrow$$

$x^2+(y-p/2)^2 = (y+p/2)^2 \Rightarrow x^2+\cancel{y^2}+\cancel{(p/2)^2}-2p/2y = \cancel{y^2}+\cancel{(p/2)^2}+py \Rightarrow$
$2py = x^2$.
Denotando $a = \frac{1}{2p}$, si ha:

$$y = ax^2$$

ed è chiamata **equazione canonica** della parabola γ. Si tratta di una parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria l'asse delle ordinate.

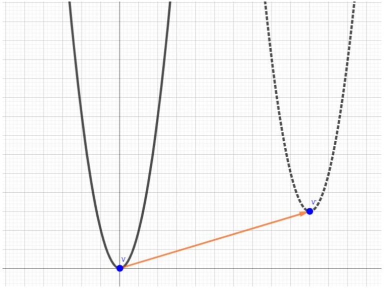
La parabola ha l'andamento indicato nella figura:



La parabola ha le seguenti caratteristiche:

- è una curva aperta costituita da un solo ramo;
- non possiede centri di simmetria;
- ha un solo asse di simmetria ortogonale che interseca γ in un solo punto detto **vertice**;
- le rette parallele all'asse, detti **diametri**, sono secanti a γ.

Si consideri la parabola γ di equazione $y = ax^2$ e si vuole traslare il vertice in un punto $V' = (x_0, y_0)$:



La traslazione è una trasformazione che permette di non cambiare la figura, quindi una parabola di equazione $y = ax^2$ sarà traslata in una parabola di equazione $y' = a(x')^2$. La trasformazione che permette di traslare il sistema di riferimento $0xy$ in un sistema di riferimento $O'x'y'$ dove O' ha coordinate $O = (x_0, y_0)$ è rappresentato da:

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - x_0 \\ y = y' - y_0 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione canonica della parabola γ, si ottiene:

$$y' - y_0 = a(x' - x_0)^2 \Rightarrow y' = a(x')^2 - 2ax_0x' + ax_0^2 + y_0.$$

Denotando:

$$b = -2ax_0 \quad c = ax_0^2 + y_0$$

e per comodità si pone $y' = y$ e $x' = x$, si ottiene la sequente equazione canonica della parabola traslata:

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$.

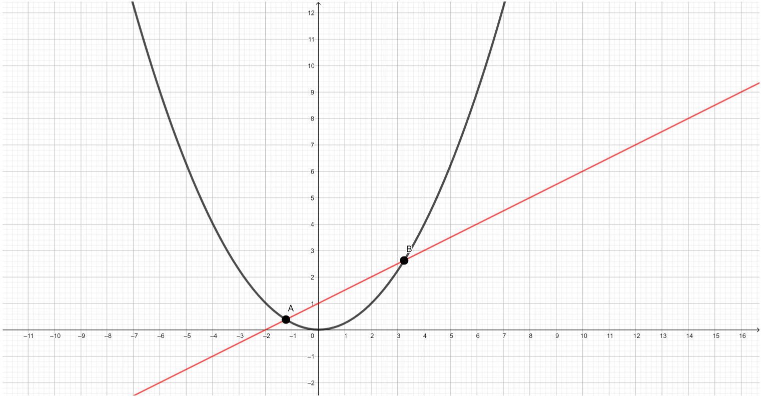
Data l'equazione della parabola traslata, allora si ha che il vertice V, posizionato nell'origine, sarà traslato nel punto di coordinate

$$V' = (x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

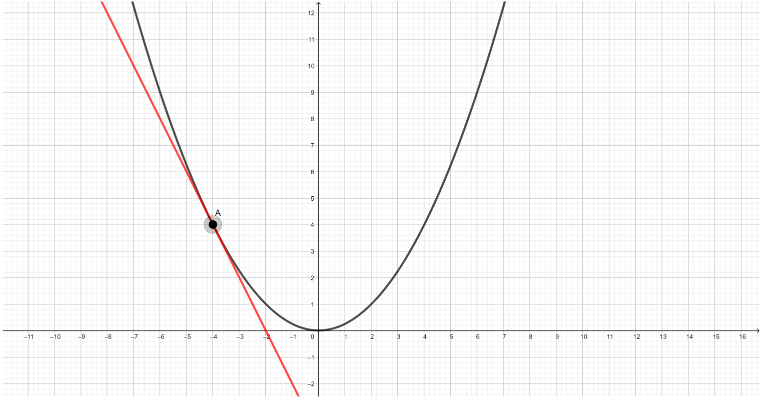
denotando $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dati la parabola γ e una retta r, questa può essere:

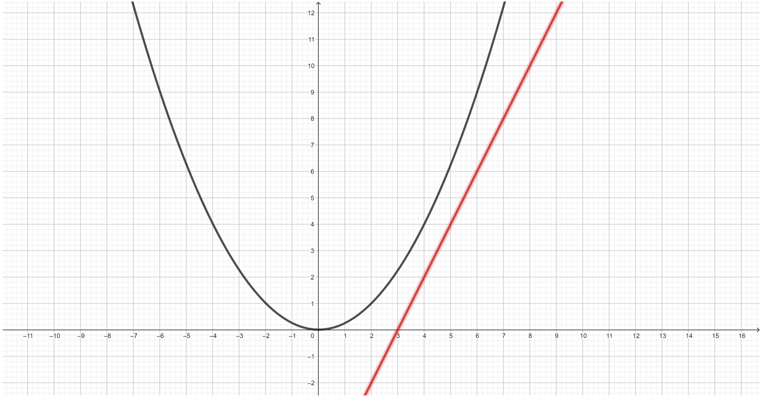
secante: la retta r interseca γ in due punti:



tangente: la retta r interseca γ in un punto:



esterna: la retta r non ha alcun punto di intersezione con la parabola γ :



Iperbole

Siano considerati:

- π;
- $F_1, F_2 \in \pi$;
- u un'unità di misura per i segmenti;
- $d(F_1F_2) = 2c$ la distanza tra i due punti F_1 e F_2

Definizione

Si definisce **iperbole** il luogo γ dei punti di π le cui distanze da F_1 e F_2 hanno differenza uguale, in valore assoluto, a un numero reale assegnato $2a$, con $0 \leq a < c$. I punti F_1 e F_2 sono chiamati **fuochi**, c è chiamata **distanza focale** ed $e = \frac{c}{a}$ è chiamata **eccentricità**

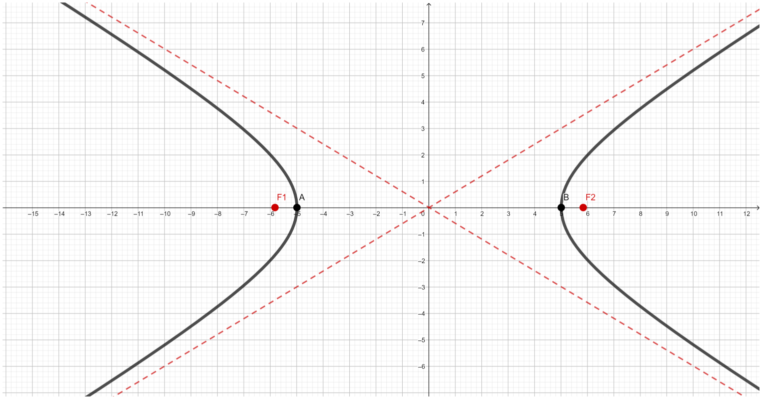
Nel riferimento $\mathcal{R}$ di π avente u come unità di misura, la retta F_1F_2 e l'asse del segmento $\overline{F_1F_2}$, comunque orientati, come assi x e y, l'iperbole γ è rappresentata dall'equazione ordinaria:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

con $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (equazione canonica) o dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}.$$

L'iperbole γ ha l'andamento indicato in figura:



L'iperbole ha le seguenti caratteristiche:

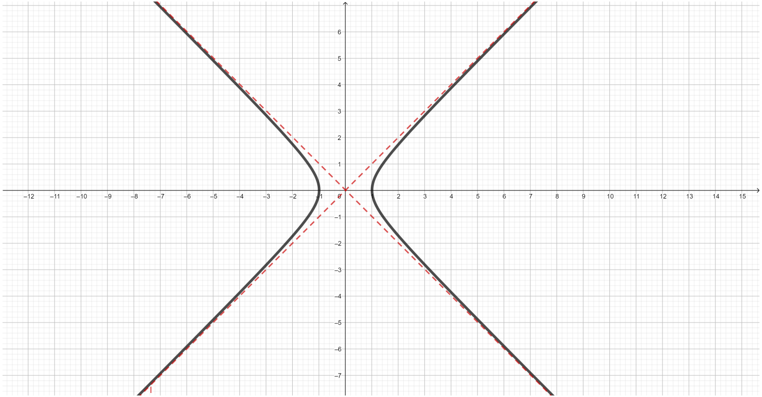
- è una curva aperta;
- formata da due rami e senza punti comuni;
- ha un centro di simmetria (centro di γ), nel punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$;
- due assi di simmetria ortogonale (assi di γ), nella retta di F_1 e F_2 e nell'asse di $\overline{F_1F_2}$: il primo interseca γ in due punti (vertici) e si dice asse trasverso, il secondo non interseca γ e si dice asse non trasverso.

Si dicono **asintoti** di γ le rette che approssimano il comportamento dei rami dell'iperbole all'infinito, in altri termini a mano a mano che i rami dell'iperbole si sviluppano tendono ad aderire agli asintoti dell'iperbole senza mai toccarli. In termini piu' rigorosi, presi due punti di uguale ascissa di cui uno appartenente all'iperbole e l'altro all' asintoto, la distanza tra i due punti tendera' a zero a mano a mano che ci allontaniamo dai vertici dell'iperbole, come mostrato in figura.
Gli asintoti sono rappresentati in $\mathcal{R}$ dalle equazioni:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

e separano le rette per l'origine che intersecano γ da quelle che non l'intersecano.
Le rette propriamente parallele a un asintoto sono unisecanti l'iperbole.

Se gli asintoti sono perpendicolari tra loro, γ si dice **equilatera**:



In tal caso si ha $a = b$ e gli asintoti coincidono con le bisettrici degli assi.

Dati un'iperbole γ e una retta r, in modo del tutto analogo alla parabola, ellisse e circonferenza, può essere:

la retta interseca l'iperbole in due punti,

la retta interseca l'iperbole in un punto,
se $P = (\overline{x}, \overline{y})$ è un punto di γ, la tangente a γ in P ha equazione:

$$\frac{\overline{x}x}{a^2} - \frac{y\overline{y}}{b^2} - 1 = 0,$$

la retta non ha alcun punto in comune con l'iperbole.
Gli asintoti non intersecano γ.