Esercizi

① Classificare i Punti critici di

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3$$

② Classificare i Punti critici di

$$f(x,y) = (x - \cos y)^2 - 1\, y^2 - \pi y$$

③ Classificare i Punti critici di

$$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$$

Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti in

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right\}$$

① Classificare i punti critici di

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3$$

<u>Svolgimento</u>: $\text{Dom} f := \mathbb{R}^2$ essendo un polinomio in x e y.

$f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy - 4y^2$

$f_y(x,y) = 2x^2 - 8xy - 24y^2$

Cerco i punti critici, ovvero i punti a gradiente nullo $\nabla f = (f_x, f_y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy - 4y^2 = 0 \\ 2x^2 - 8xy - 24y^2 = 0 \end{cases}$$

Sommo la prima e seconda equazione e trovo

$$\begin{cases} 8x^2 - 32y^2 = 0 \\ 3x^2 + 4xy - 4y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ 3x^2 + 4xy - 4y^2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 = 4y^2 \iff x = 2y \quad \text{oppure} \quad x = -2y$$

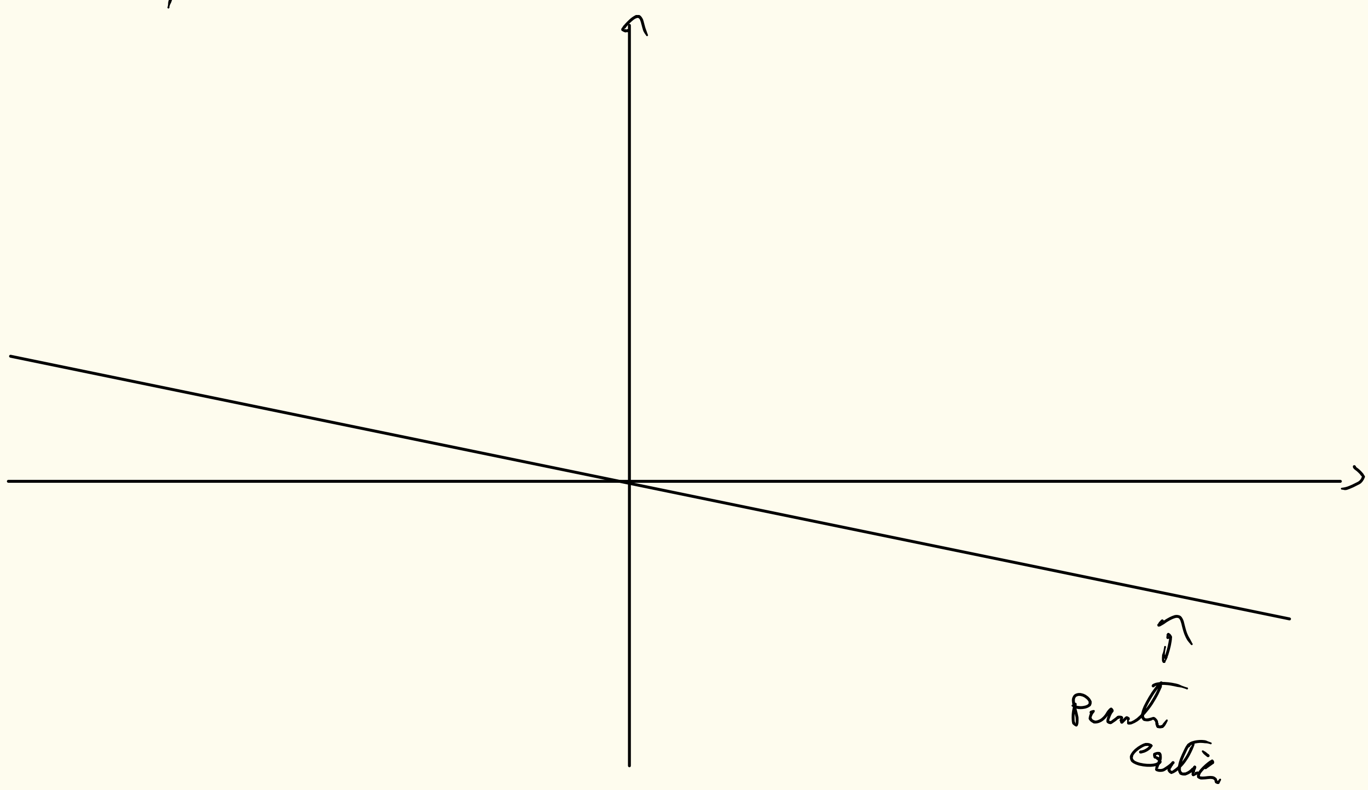
$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ 12y^2 + 8y^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y \\ 12y^2 - 8y^2 - 4y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ 16y^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

I punti critici sono tutti e soli della retta

$$\bar{x} = -2\bar{y}$$



Calcoliamo l'Hessiano (la matrice delle derivate seconde)

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+4y & 4x-8y \\ 4x-8y & -8x-48y \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il suo determinante nei punti del tipo $\bar{x} = -2\bar{y}$. $\quad [H(x,y) = \det(D^2 f)]$

$$H(-2\bar{y},\bar{y}) = \begin{vmatrix} -8\bar{y} & -16\bar{y} \\ -16\bar{y} & -32\bar{y} \end{vmatrix} = 256\bar{y} - 256\bar{y} = 0$$

Essendo l'Hessiano nullo, la condizione sufficiente non ci da alcuna informazione.

$\Rightarrow$ procediamo con lo studio del segno di

$$f(x,y) - f(-2\bar{y},\bar{y}) = x^3 + 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3 +$$

$$+(\cancel{-8\bar{y}^3} \cancel{+8\bar{y}^3} \cancel{+8\bar{y}^3} \cancel{-8\bar{y}^3})$$

$$= x^3 + 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3$$

$$= x^2(x+2y) - 4y^2(x+2y)$$

$$= (x+2y)(x^2-4y^2)$$

$$= (x+2y)^2(x-2y)$$

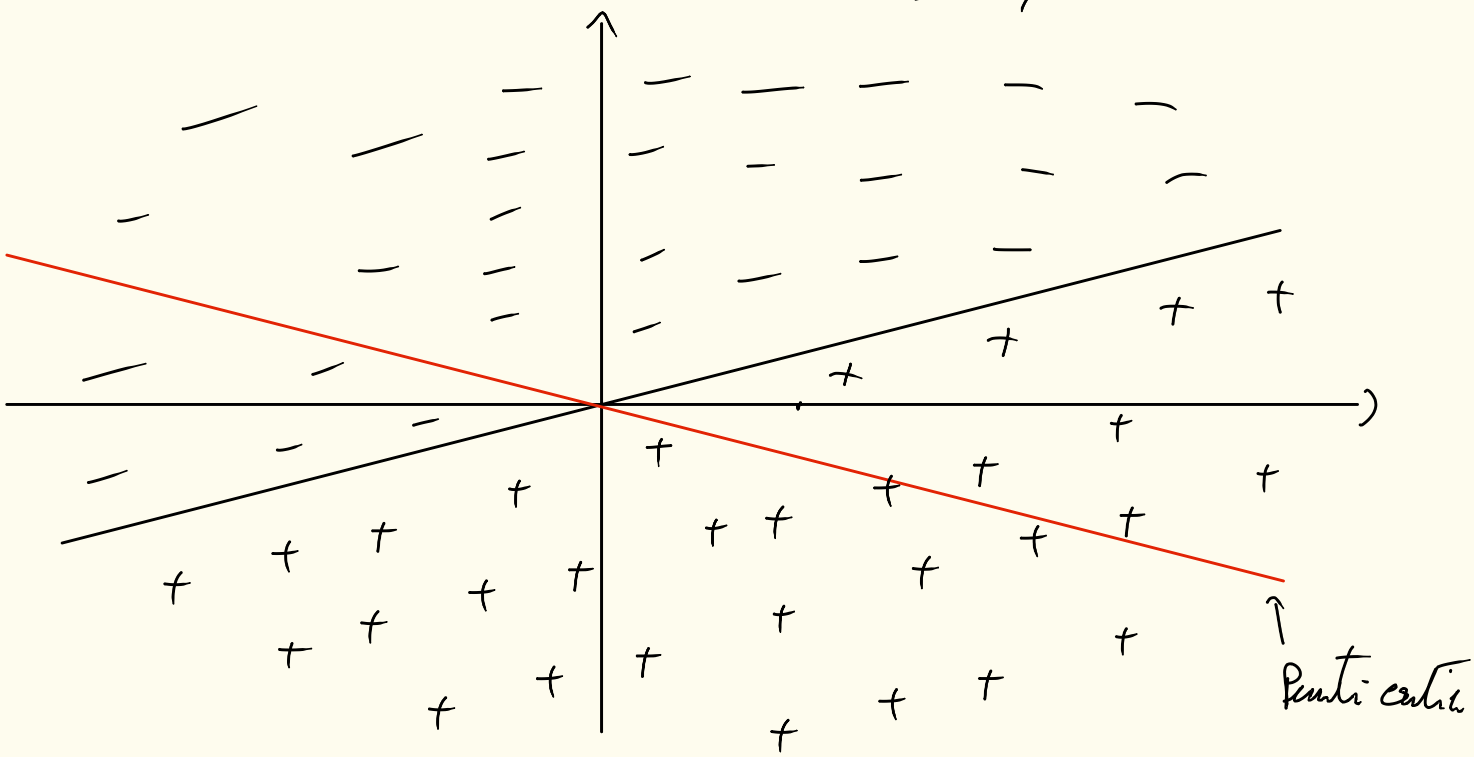
Siamo interessati a capire quando

$$f(x,y) - f(-2\bar{y}, \bar{y}) = (x+2y)^2(x-2y) \geq 0$$

Poiché $(x+2y)^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x+2y)^2(x-2y) \geq 0 \iff x-2y \geq 0$$

$$\iff x \geq 2y$$



Dal grafico si evince che

$\bar{x} = -2\bar{y}$ sono punti di minimo relativo se

$x > 0$

$\bar{x} = -2\bar{y}$ sono punti di massimo relativo se $x<0$

$\bar{x} = \bar{y} = 0$ non è né di massimo né di minimo.

(2) Classificare i punti critici di

$$f(x,y) = (x - \cos y)^2 + y^2 - \pi y$$

Svolgimento: $\text{Dom} f := \mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = 2(x - \cos y)$$
$$f_y(x,y) = 2(x - \cos y)\sin y + 2y - \pi$$

Cerco i punti critici, ovvero i punti a gradiente nullo $\nabla f = (f_x, f_y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2(x - \cos y) = 0 \\ 2(x - \cos y)\sin y + 2y - \pi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$(0, \frac{\pi}{2})$ è l'unico punto critico.

Calcoliamo l'Hessiano (la matrice delle derivate seconde)

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sin y \\ 2\sin y & 2\sin^2 y + 2(x-\cos y)\cos y + 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il suo determinante nel punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\left[H(x,y) = \det(D^2 f) \right]$$

$$H\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$$

essendo $f_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) > 0$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è un punto di minimo relativo.

③ Classificare i punti critici di

$$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$$

Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti in

$$E \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq y \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x^2 \right\}$$

Svolgimento: $\text{Dom} f := \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 2x$

$f_y(x,y) = 2(y-1)$

Cerco i punti critici, ovvero i punti a gradiente nullo $\nabla f = (f_x, f_y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2(y-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad (0,1) \text{ punto critico.}$$

Calcoliamo l'Hessiana (la matrice delle derivate seconde)

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il suo determinante nel punto

$$[H(x,y) = \det(D^2 f)]$$

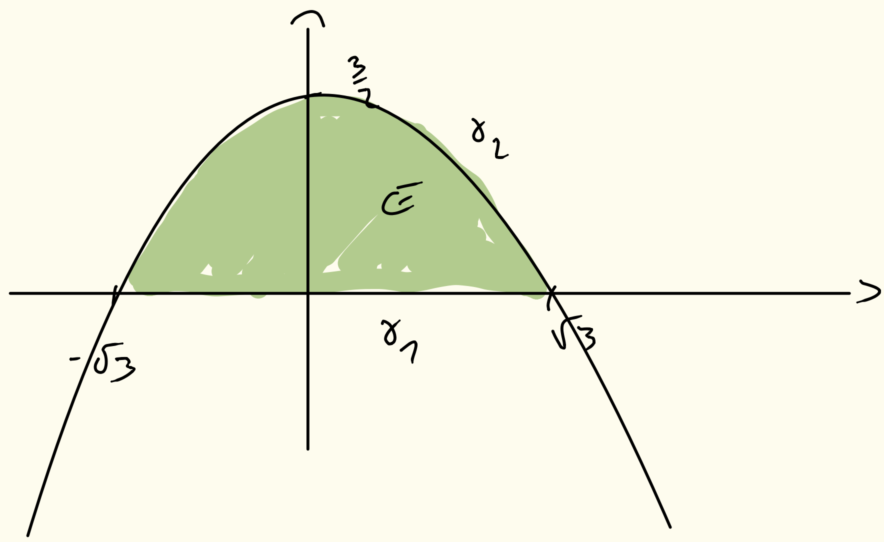
$$H(0,0) = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\| = 4 > 0$$

essendo $f_{xx}(0,2) > 0$, $(0,0)$ è un punto di minimo relativo.

Inoltre essendo $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 \geq 0 = f(0,0)$ allora è anche un punto di minimo assoluto.

Studiamo ora gli estremi assoluti in

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq y \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right\}$$



La frontiera di E può essere divisa in due pezzi

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \quad t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

<u>Minimi:</u> Siamo interessati ai punti di minimo di f in E, dobbiamo quindi cercare

al minimo di f tra i punti di minimo relativo dentro E e i punti di minimo sul bordo di E.

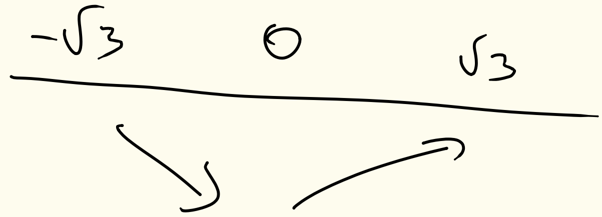
$$\min_E f = \min \left\{ \text{min rel. in } E,\ \text{min su } \partial E \right\}.$$

- L'unico punto di min relativo (ed anche assoluto) è $(0,0) \in E$, ma in particolare appartiene al bordo.

Cerchiamo i minimi sul bordo.

- $k_1(t) = f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = t^2+1 \quad t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

$k_1'(t) = 2t \geq 0 \iff t \geq 0$



$\min k_1(t) = k_1(0) = f(0,0) = 1$

$\max k_1(t) = k_1(\sqrt{3}) = k_1(-\sqrt{3}) = f(\pm\sqrt{3}, 0) = 4$

- $k_2(t) = f\left(t, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t^2\right) = t^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t^2 - 1\right)^2 =$

$= t^2 + \frac{1}{4}\left(1-t^2\right)^2 = t^2 + \frac{1}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} =$

$= \frac{1}{4} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} = \frac{1}{4}\left(t^2+1\right)^2$

$$K_2'(t) = \frac{1}{2}(t^2+1)2t \geq 0 \iff t \geq 0$$

$$-\sqrt{3} \searrow 0 \nearrow \sqrt{3}$$

$$\min K_2(t) = K_2(0) = f\left(0, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\max K_2(t) = K_2(\pm\sqrt{3}) = f\left(\pm\sqrt{3}, 0\right) = 4$$

$$\Rightarrow \min_E f = \left\{ \text{min rel. in } E, \ \text{min su } \partial E \right\}$$

$$= \left\{ f(0,0), \ K_1(0), \ K_2(0) \right\}$$

$$= \left\{ f(0,0), \ f(0,1), \ f\left(0, \frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$= \left\{ 1, \ 0, \ \frac{1}{4} \right\} = 0 = f(0,1)$$

$\Rightarrow (0,0)$ è il punto di minimo di f in E.

<u>Massimi</u>: Siamo interessati ai punti di massimo di f in E, dobbiamo quindi cercare

il massimo di f tra i punti di massimo relativo dentro $\bar{E}$ e i punti di massimo sul bordo di $\bar{E}$.

$$\max_{E} f = \max \left\{ \text{max rel. in } E, \text{ max su } \partial E \right\}$$

$$= \max \left\{ \times , \; \kappa_1(\pm\sqrt{3}), \; \kappa_2(\pm\sqrt{3}) \right\}$$

$$= \max \left\{ f(\sqrt{3},0), \; f(-\sqrt{3},0) \right\}$$

$$= \max\{4, 4\} = 4 = f(\pm\sqrt{3},0).$$

$(\pm\sqrt{3},0)$ sono i due punti di massimo assoluto di f in E

1) Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = (1-y)(2-x^2-y)$$

e determinare gli estremi assoluti in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2\}$$

I punti stazionari risolvono $\nabla f = 0$

$$f_x = (1-y)(-2x)$$

$$f_y = -(2-x^2-y) + (1-y)(-1)$$
$$= -3 + x^2 + 2y$$

$$\begin{cases} (1-y)(-2x) = 0 \\ -3+x^2+2y=0 \end{cases} \iff \text{1} \begin{cases} x = 0 \\ y = +\frac{3}{2} \end{cases} \quad \vee$$

$$\text{2} \begin{cases} y=1 \\ x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

$$A = \left(0, \frac{3}{2}\right) \quad B = (1,1) \quad C = (-1,1)$$

sono punti stazionari.

$f_{xx} = -2(1-y) \qquad f_{yy} = 2$

$f_{xy} = f_{yx} = 2x$

$Hf\left(0, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det Hf > 0$, $f_{xx} > 0$

$\Rightarrow \left(0, \frac{3}{2}\right)$ è un min. relativo

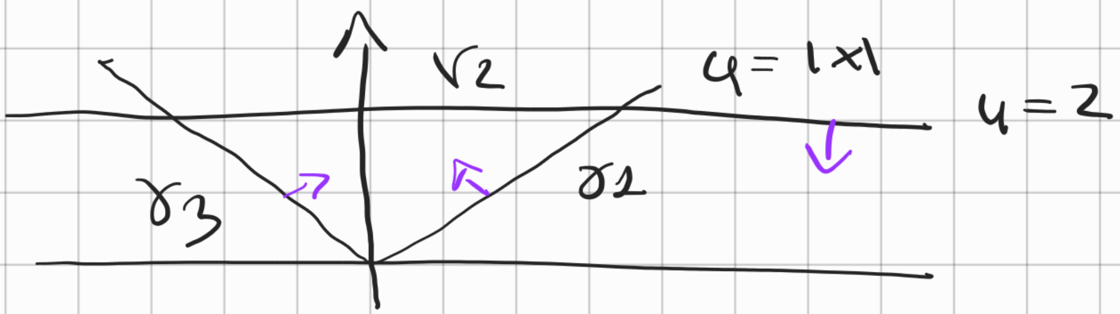
$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = -4 < 0$

$\Rightarrow (1, 1)$ è un punto di sella

$Hf(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = -4 < 0$

$\Rightarrow (-1, 1)$ è un punto di sella

$D = \{ (x, y) : |x| \leq y \leq 2 \}$



D è il triangolo di vertici $(0,0)$ $(2,2)$ $(-2,2)$

Dei punti stazionari trovati sopra, vedo quali appartengono a D

$(1,1)$ $(-1,1)$ e $(0, \frac{3}{2})$

verificano tutti le disequazioni che descrivono D $\Rightarrow$ vi appartengono

In particolare $(1,1)$ e $(-1,1)$ sono su ∂D

Per cercare gli altri candidati max e min parametrizzo $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $t \in [0,2]$ $\gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 2 \end{cases}$ $t \in [-2,2]$

$\gamma_3 = \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$ $t \in [-2,0]$

$$F_1(t) = f(\gamma_1(t)) = (1-t)(2-t^2-t)$$

$$F_1'(t) = -2+t^2+t+(1-t)(-2t-1)$$

$$= -2+t^2+\cancel{t} -2\cancel{t} -1+2t^2+\cancel{t}$$

$$= 3t^2-3 = 0 \quad \boxed{t=1}$$

$\Rightarrow$ devo conservarmi il punto $(1,1) \in \partial D$

$F_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^2$

$F_2'(t) = 2t$ $\boxed{t=0}$

Devo conservarmi il punto $(0,2)$

$F_3(t) = f(\gamma_3(t)) = (1+t)(2-t^2+t)$

$F_3'(t) = 2-t^2+t + (1+t)(-2t+1)$

$= 2-t^2+\cancel{t} -\cancel{2}t +1 -2t^2 +\cancel{t}$

$= 3-3t^2 = 0 \iff t = 1$

$\Rightarrow$ Devo conservare il punto $(-1, 1)$

In più, visto che ∂D è parametrizzata a tratti, devo conservarmi i punti in cui cambia la parametrizzazione, ovvero i vertici del triangolo

$(0,0)$ $(2,2)$ $(-2,2)$

Quindi i candidati massimi e minimi assoluti sono

$(1,1) \rightsquigarrow f(1,1) = 0$

$(-1,1) \rightsquigarrow f(-1,1) = 0$

$(0,\frac{3}{2}) \rightsquigarrow f(0,\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$(0,0) \rightsquigarrow f(0,0) = 2$

$(2,2) \rightsquigarrow f(2,2) = 4$

$(-2,2) \rightsquigarrow f(-2,2) = 4$

$(0,2) \rightsquigarrow f(0,2) = 0$

$\Rightarrow (0,\frac{3}{2})$ è punto di minimo assoluto

$(2,2)$ e $(-2,2)$ sono punti di max assoluti

<u>OSS</u>| In questo caso i massimi assoluti non sono punti in cui $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$

ma punti in cui cambia la parametrizzazione di ∂D

È importante ricordarsi sempre di questi punti quando vado a valutare max e min

Es 2 | Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = 2x^3 + 3x^2 - x^2y^2$$

$$f_x = 6x^2 + 6x - 2xy^2$$

$$f_y = -2yx^2$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 6x^2 + 6x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \forall y \end{cases}$$

$x = 0,\ x = -1$

Ho infiniti punti stazionari

il punto $(-1, 0)$ e i punti del tipo

$(0, y)$ $y \in \mathbb{R}$ (l'asse y)

$$f_{xx} = 12x + 6 - 2y^2$$

$$f_{xy} = -4yx$$

$$f_{yy} = -2x^2$$

$$Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \det = 12 > 0 \\ f_{xx} < 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (-1,0)$ è un punto di max rel

Nei punti dell'asse y $\quad Hf = \begin{pmatrix} 6-2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

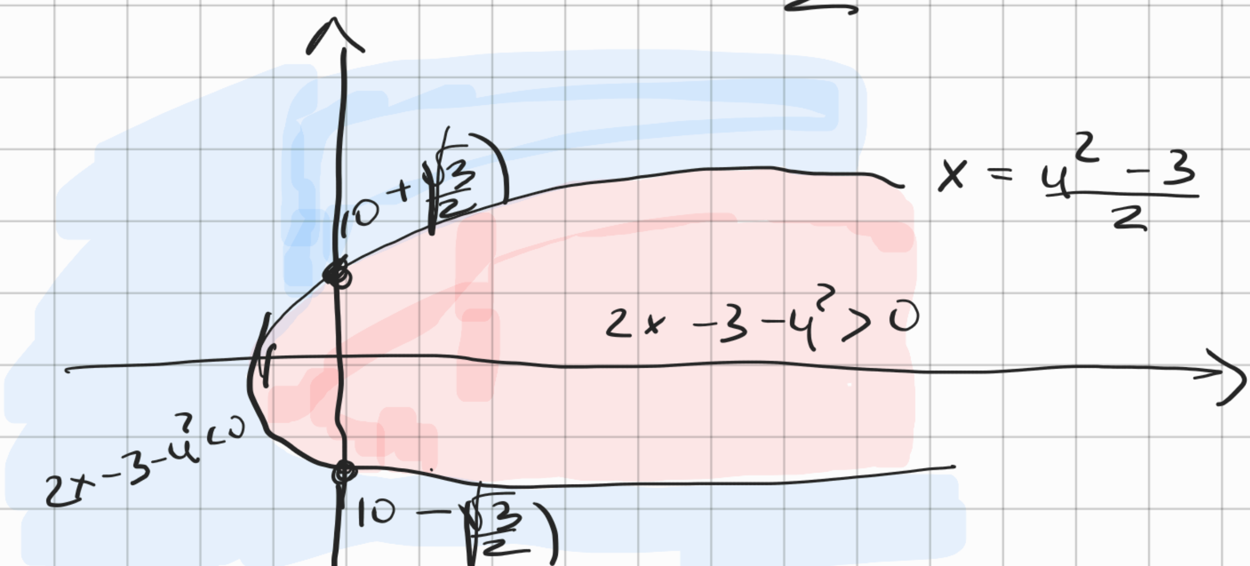
l'hessiano è nullo!

Devo studiare il segno di

$$f(x,y) - \underset{\overset{\|}{0}}{f(0,y)} = 2x^3 + 3x^2 - x^2y^2$$

$$= x^2 (2x + 3 - y^2) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cancel{x}\, x \geq \frac{y^2-3}{2} \quad \text{è una parabola}$$



Nello parte "blu" $f(x,y) - f(0,y) \leq 0$

perche $2x - 3 - y^2 \leq 0$

Nello parte "rossa" $f(x,y) - f(0,y) \geq 0$

perchè $2x + 3 - y^2 \geq 0$

I punti $(0,y)$ con $|y| > \sqrt{\frac{3}{2}}$

sono punti di massimo relativo

(riesco a trovare un intorno di $(0,y)$

tutto contenuto nella parte blu in cui

$f(x,y) - f(0,y) \leq 0$)

I punti $(0,y)$ con $|y| < \sqrt{\frac{3}{2}}$

sono punti di minimo relativo

(riesco a trovare un intorno di $(0,y)$

tutto contenuto nella parte rossa in cui

$f(x,y) - f(0,y) \geq 0$)

I due punti $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e $\left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

sono punti di sella

(né max né min)

<u>ES 3</u> Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^6 - y^4 \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$\nabla f(x,y) = \left(6x^5, -4y^3\right) = \underline{0} \iff$$

$$(x,y) = (0,0)$$

ho un unico punto critico!

L'hessiano in $(0,0)$ è nullo:

$$f_{xx} = 30x^4 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0 \qquad f_{yy} = -12y^2$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Devo studiare il segno di

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = x^6 - y^4$$

che può essere difficile

o posso studiare $f(x,y)$ sulle curve $x = m\, y^{\frac{2}{3}}$

$$f(m y^{\frac{2}{3}}, y) = m^6 y^4 - y^4 = (m^6-1) y^4$$

se l'essere max o min di 0 per $f(x, mx)$ dipende da m $\Rightarrow$ $(0,0)$ sarà un punto di sella per f

MA l'essere max o min di 0 per $(m^6-1)\, y^4$ dipende dal segno di m^6-1 $\Rightarrow$ dipende da m

$(0,0)$ è una sella per f

<u>OSS</u> | Abbiamo usato questo:
se (x_0, y_0) è un massimo (min) relativo per $f(x,y)$ $\Rightarrow$ lungo una qualsiasi curva

$\gamma(t)$ che passa per (x_0, y_0) (quindi tale per cui $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$)

$F(\gamma(t))$ ha un massimo in t_0
(min)

Come per il test sulle rette per la continuità è solo una condizione necessaria
$\Rightarrow$ può essere usata solo in maniera distruttiva!

Ex 7

**

Classificare i punti critici di

$$f(x,y) = e^{x^{\cancel{2}\,4}+y^3-4x-3y^2}$$

Svolgimento

$$f(x,y) = e^{h(x,y)} \qquad h(x,y) = x^4+y^3-4x^2-3y^2$$

Siccome e^t è una funzione crescente,

$$\max f = e^{\max h} \qquad \min f = e^{\min h}$$

studiamo quindi h.

1 Punti critici

$$\begin{cases} \boxed{1} \quad h_x = 4x^3-8x = 0 \\ \boxed{2} \quad h_y = 3y^2-6y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{1} \Rightarrow \quad 4x(x^2-2)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$$

$\boxed{2} \Rightarrow 3y(y-2)=0 \begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases}$

PUNTI CRITICI:

$(0,0), (0,2), (\sqrt{2},0), (\sqrt{2},2), (-\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},2)$

$$D^2f = \begin{pmatrix} 12x^2-8 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Hess = 48 > 0$ $\quad h_{xx} < 0 \Downarrow$ max locale

$D^2f(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Hess = -16 < 0$ sella

$D^2f(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Hess = -6 \cdot 16 < 0$ sella

$D^2f(-\sqrt{2},0) = \nearrow$

$D^2f(\pm\sqrt{2},2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Hess = 6 \cdot 16 > 0$ $\quad h_{xx} > 0 \Downarrow$ minimi locali

Ex 8
***

$$f(x,y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$$

Classificare i punti critici

Svolgimento

$$\begin{cases} \boxed{1} \quad f_x = -8xy + 12x^3 = 0 \\ \boxed{2} \quad f_y = 2y - 4x^2 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{2} \Rightarrow y = 2x^2$

In $\boxed{1}$: $-16x^3 + 12x^3 = 0$

$\Downarrow$

$x = 0$ $(0,0)$ unico punto critico

$f(0,0) = 0$

$\Delta = f(x,y) - f(0,0) \geq 0$

$\Updownarrow$

$y^2 - 4x^2y + 3x^4 \geq 0$

Risolvo la disuguaglianza in y

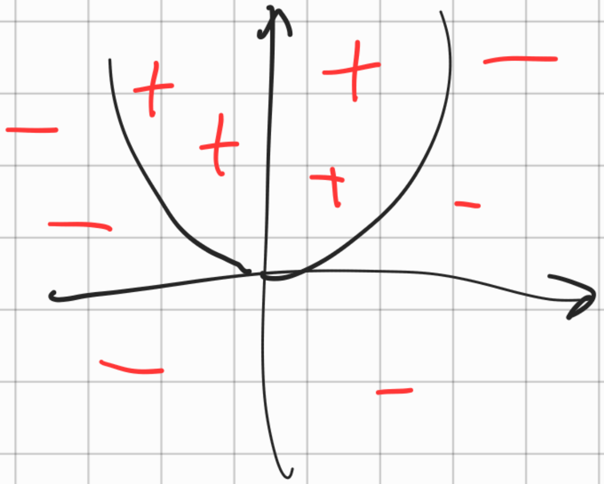
$$y^2 + (-4x^2)\,y + (3x^4) = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{4x^2 \pm \sqrt{16x^4 - 12x^4}}{2} = \frac{4x^2 \pm 2x^2}{2} = \begin{cases} 3x^2 \\ x^2 \end{cases}$$

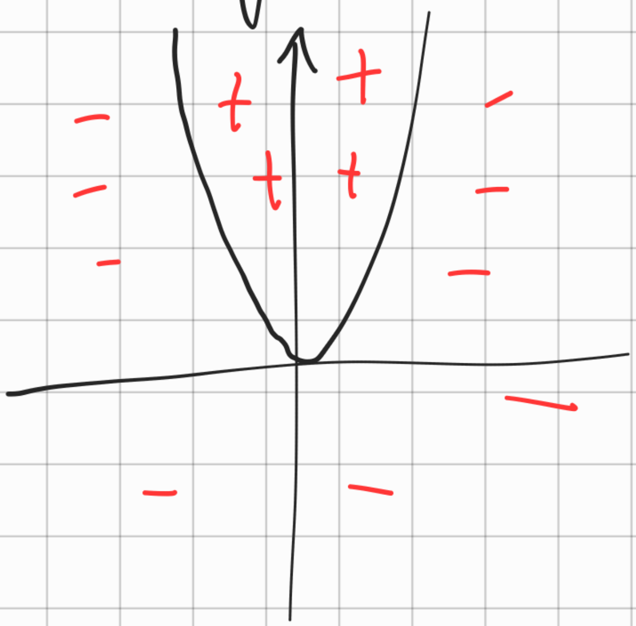
$$\Rightarrow \quad y^2 + (-4x^2)\,y + 3x^4 = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

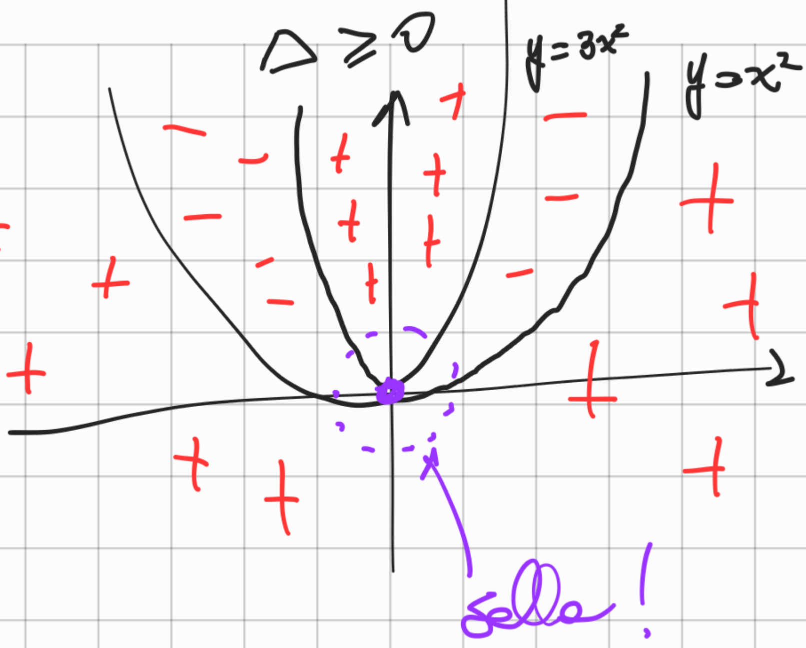
$$\Delta \geq 0 \iff (y - x^2)(y - 3x^2) \geq 0$$

$y > x^2$



$y > 3x^2$





Ex 9

**

Classificare i punti critici di

$$f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6y - 12$$

e trovare max e min nell'ellisse di centro $(0,1)$ e semiassi orizzontale e verticale rispettivamente 1 e 2

Svolgimento

1. Punti critici

$$\begin{cases} f_x = 6x = 0 & \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 6y - 6 = 0 & \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$(0,1)$ unico punto critico.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Hess} > 0$ $f_{xx} > 0$ minimo locale

$(0,1)$ è interno all'ellisse?

$$E = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} \leq 1 \right\}$$

Sì perché è il centro: $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \Rightarrow x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 0 < 1$

Vale $<$ stretto quindi è interno

2 Punti critici sul bordo

L'ellisse si può parametrizzare come

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = 1 + 2\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

quindi dato $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ l'ellisse sopra descritta,

$$h(t) = f(\gamma(t)) = 3\cos^2(t) + 3(1+2\sin(t))^2 + \\ - 6(1+2\sin(t)) - 12$$

$$= 3\cos^2(t) + 3 + \cancel{12\sin(t)} + 12\sin^2(t) + \\ - 6 - \cancel{12\sin(t)} - 12$$

$$= 3\cos^2(t) + 12\sin^2(t) - 15$$

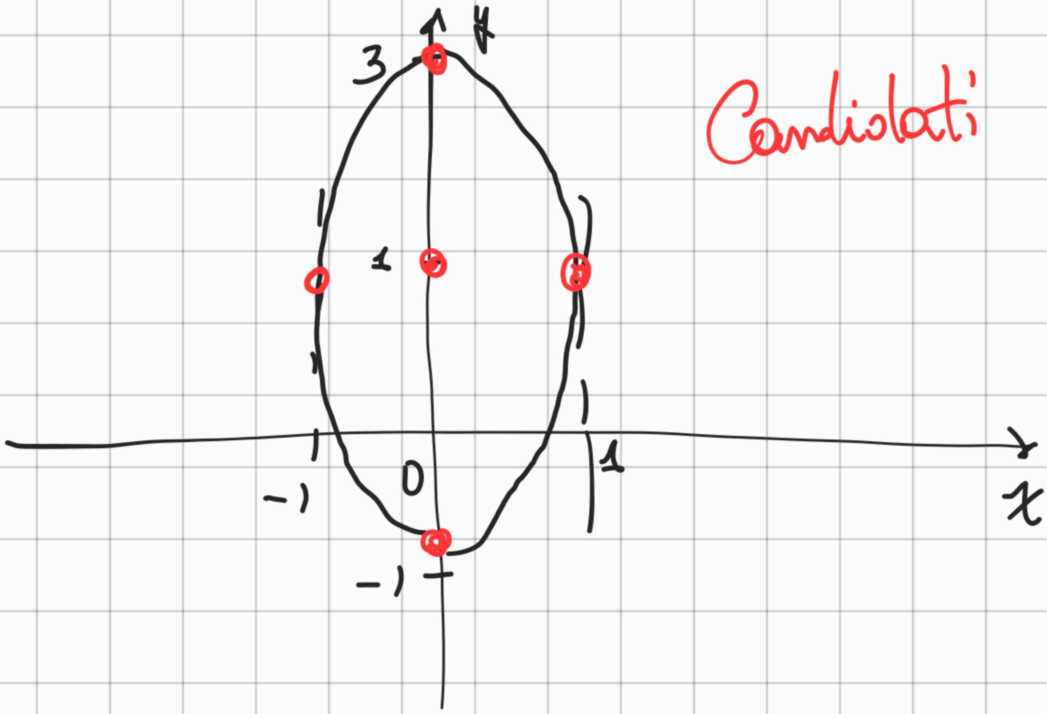
$\cos^2 + \sin^2 = 1 \rightsquigarrow$

$$= -15 + 3 + 9\sin^2(t)$$

$$= 9\sin^2(t) - 12$$

$h' = 18\sin(t)\cos t$

$h' = 0 \iff t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$



Candidati

$f(0,1) = -15$

$\boxed{f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6y - 12}$

$f(0,-1) = -3$

$(0,1)$ minimo

$f(1,1) = -12$

$(-1,1)$ massimo

$f(0,3) = -3$

$f(-1,1) = 0$

e verticale 1 e 2.

(4) $f(x,y) = (1-y)(2-x^2-y)$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y \leq 2 \}$

Svolgimento

$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + \frac{x}{2}$

$$F_x = 2x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} = 0 & x = -\frac{1}{4} \\ 6y = 0 & y = 0 \end{cases}$$

$F_y = 6y$

$\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ punto critico

$f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = 6 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0$

$$\det HF\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$f_{xx} = 2 > 0$

$\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ minimo relativo

$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$

$f_x = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3$

$f_y = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2$

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2(3-4x-3y)=0 \\ x^3y(2-2x-3y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x_0 \\ y=0 \end{cases}$$

tutti i punti del tipo $(0, y_0)$

~~tutti~~ i punti del tipo $(x_0, 0)$

se $x \neq 0$ e $y \neq 0$

$+\cancel{2}x = -\frac{3}{2}y + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y+1$

$3+6y-4-3y=0 \Rightarrow \cancel{3}y = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

$f_{xx} = 6xy^2-12x^2y^2-6xy^3$

$f_{yy} = 2x^3-2x^4-6x^3y$

$f_{xy} = f_{yx} = 6x^2y-8x^3y-9x^2y^2$

$Hf(0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(0,y_0)=0$

$Hf(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_0^3-2x_0^4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(x_0,0)=0$

$$H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{9} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

$\det H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)>0$ e $f_{xx}=-\frac{1}{9}<0$

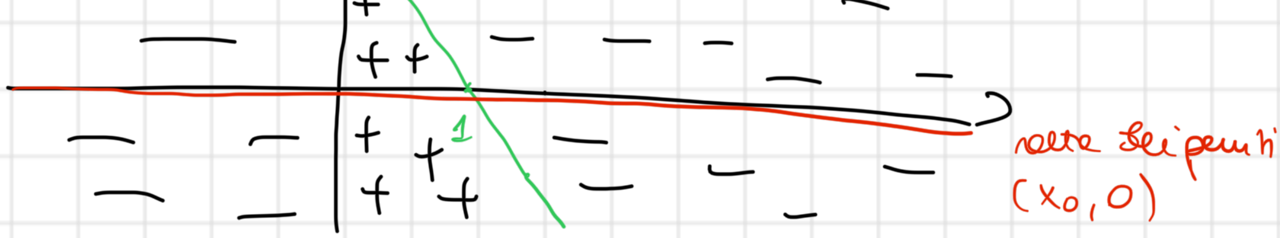
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ max rel.

Analizziamo $(x_0,0)$

$$f(x,y)-f(x_0,0)=f(x,y)=x^3y^2-x^4y^2-x^3y^3 \geq 0$$

$$x^3y^2(1-x-y)\geq 0$$

$$\begin{cases} x\geq 0\\ y+x-1\leq 0\end{cases} \cup \begin{cases} x\leq 0\\ y+x-1\geq 0\end{cases}$$



$(x_0,0)$ se $0<x_0<1$ min rel

se $x_0=0$ ~~sella~~

se $x_0<0 \vee x>1$ max rel

$F(0,y_0)=0$ quindi dal disegno sopra capiamo che $(0,y_0)$ sella $\forall y_0$.

$f(x,y)= x^4+y^2+x^2y$

$f_x = 4x^3+2xy$

$f_y = 2y+x^2$

$$\begin{cases} 2x(2x^2+y)=0 \\ 2y+x^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x\left(2x^2-\frac{1}{2}x^2\right)=0 \Rightarrow 2x\left(\frac{3x^2}{2}\right)=0 \Rightarrow x=0 \\ y=-\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

$(0,0)$ punto critico

$F_{xx}=12x^2+2y \quad F_{xy}=F_{yx}=2x \quad F_{yy}=2$

$$\det H_F(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$f(x,y)-f(0,0)\geq 0 \Rightarrow$

$f(x,y)\geq 0 \Rightarrow y^2+x^2y+x^4\geq 0$

equazione di II grado in y

$\Delta = x^4 - 4x^4 = -3x^4 < 0$

$\Rightarrow f(x,y) \geq 0$ sempre

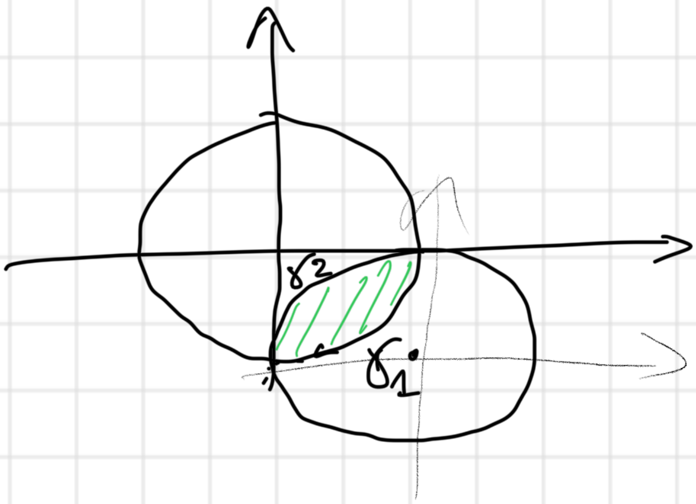
dunque $(0,0)$ ~~massimo~~ minimo assoluto

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{x}{2}$$

$$D = \left\{ x^2+y^2 \le 1 \, , \, (x-1)^2+(y+1)^2 \le 1 \right\}$$

$x^2+y^2=1 : \gamma_1$

$(x-1)^2+(y+1)^2=1 : \gamma_2$



$$\nabla f(x,y) = \left(2x - \frac{1}{2} , 2y \right) = (0,0)$$

$$\iff \left(\frac{1}{4} , 0 \right) \notin D$$ quindi non lo posso prendere

Parametrizziamo il bordo

passo a coordinate polari

$$\gamma_1 \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \rho = 1 \qquad \theta \in \left[\frac{3}{2}\pi , 2\pi \right]$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = -1 + \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \rho = 1 \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{2} , \pi \right]$$

$$F(\gamma_1) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \frac{\cos\theta}{2} = 1 - \frac{\cos\theta}{2}$$

$$F'(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2} = 0 \iff \theta = 2\pi$$

$$\theta = 2\pi \rightsquigarrow (1, 0)$$

$$F(1,0) = \frac{1}{2}$$

$$F(\gamma_2) = (1+\cos\theta)^2 + (-1+\operatorname{sen}\theta)^2 - \frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{2}$$

$$F'(\theta) = 2(1+\cos\theta)(-\operatorname{sen}\theta) + 2(\operatorname{sen}\theta - 1)\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$= -2\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$$

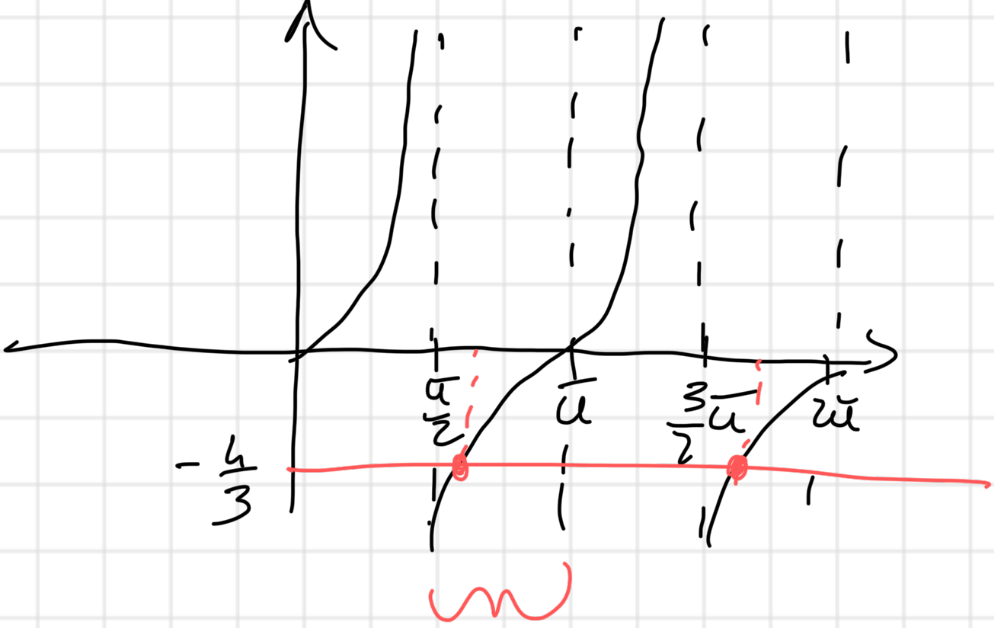
$$\Rightarrow +3\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta\,(3\operatorname{tg}\theta + 4) = 0$$ supp. che $\cos\theta \neq 0$

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{4}{3}$$

$$\cos(\operatorname{arctg}\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$



$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\Rightarrow \quad \theta = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

$$= -\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}$$

$$= -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\left(\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = +\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

$$= + \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5}$$

$$f(1+\cos\theta, \operatorname{sen}\theta - 1) = f\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

I punti dove cambia la parametrizzazione sono

$(0,-1) \rightsquigarrow f(0,-1) = \underline{1}$

$(1,0)$ gia' valutato

$(0,-1)$ max assoluto

$(1,0)$ min assoluti