

# Lezione 13

Fisica I – Ingegneria Automazione e Informatica  
Università di Napoli "Federico II"  
prof. Nicola R. Napolitano

## Riepilogo della lezione precedente

- 1) Abbiamo rivisto il potenziale gravitazionale
- 2) Quantità di moto e sua conservazione

## In questa lezione

- 1) Impulso
- 2) Urti (introduzione)
- 3) Centro di Massa (corpi rigidi)

# Sistema Isolato:

## 3 differenti tecniche per calcolare il lavoro

### 1 definizione

$$L = \int_{l(A,B)} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

processo di integrazione in più dimensioni  
(spesso complesso o  
non risolvibile analiticamente)

## 2 teorema lavoro - energia cinetica (per corpo puntiforme)

$$L = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

banale se si conoscono  
velocità iniziale e finale

## 3 mediante energia potenziale (per forze conservative)

$$L = -(U(B) - U(A))$$

devo sapere **solo** ed **esclusivamente**  
il valore dell' energia potenziale  
nei due punti A e B

## **× potenziale gravitazionale**

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \approx -\frac{1}{r^2}$$
 è **conservativa**  $\Rightarrow$  ammette **potenziale**

$$U_f - U_i = - \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr = G m_1 m_2 \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{r^2} dr = G m_1 m_2 \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -G m_1 m_2 \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

se scelgo come riferimento  
 $r_i = \infty$  e quindi  $U_i = 0$

$$U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r} \approx -\frac{1}{r}$$
 è **negativo**  
(forza attrattiva)

# applicazioni: velocità di fuga

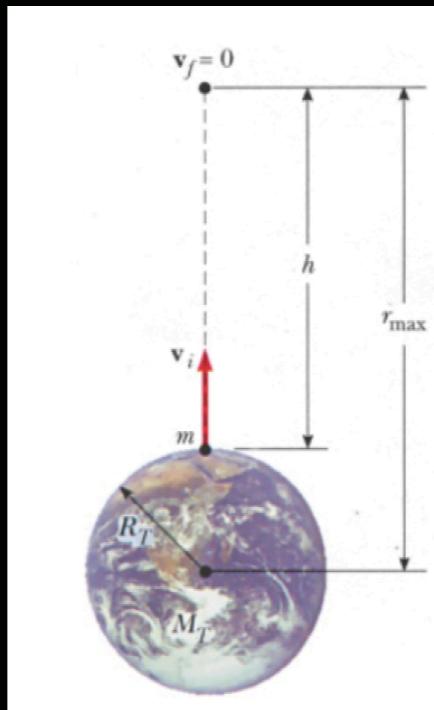
$$E_{mecc} = K + U = \text{costante}$$

in generale il proiettile:

- ▶ **rallenta** (converte  $K$  in  $U$ ,  $h$  aumenta)
- ▶ **si arresta** ( $K = 0$ ,  $E_{mecc} = U$ )
- ▶ **ricade** (converte  $U$  in  $K$ ,  $h$  diminuisce)

esiste un valore **minimo** di  $v_i$  per cui il proiettile **non** torna indietro

proiettile lanciato in aria  
massa **m**, velocità  **$v_i$**



$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11200 \text{ m/s} = 11.2 \text{ km/s}$$

$$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{r_{\max}} \Rightarrow v_i^2 = 2GM_T \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{\max}} \right)$$

$v_{fuga} =$  **velocità minima** che il corpo deve avere per continuare a muoversi **allontanandosi sempre**

$$v_i \xrightarrow[r_{\max} \rightarrow \infty]{} v_{fuga}$$

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Pianeta	$v_f$ (km/s)
Terra	11.2
Luna	2.3
Sole	618
Marte	5.0
Giove	60

**NON** dipende da **massa oggetto!!**  
[è la stessa per **molecola** o **navicella spaziale**]

**Link:** [Teoria cinetica dei gas, composizione atmosfera](#)

# Ricerca Analitica di una Forza

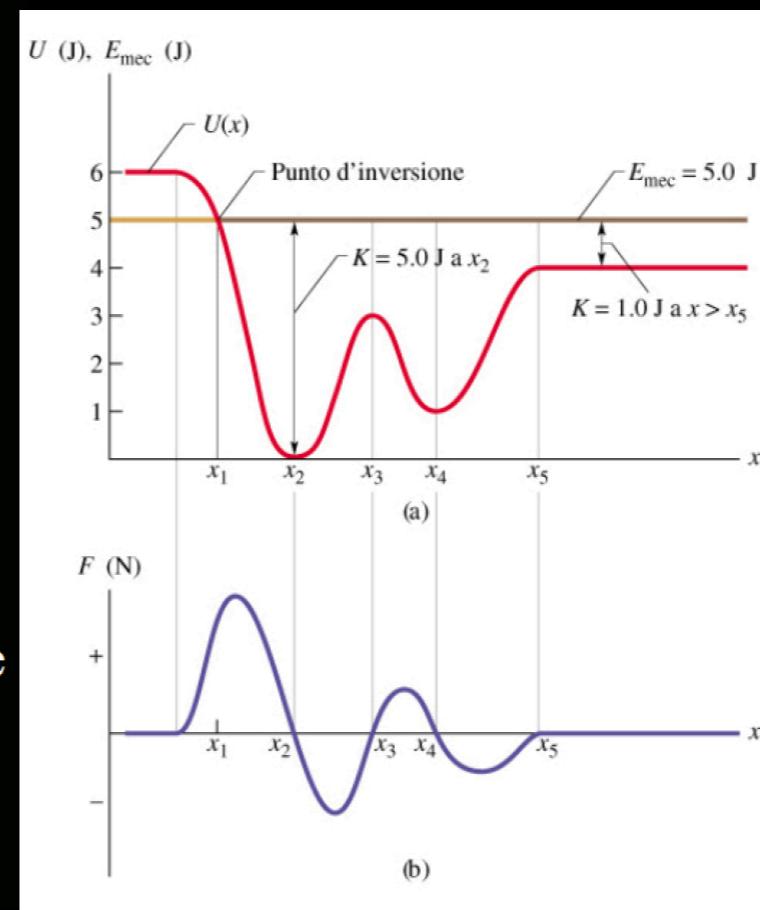
Il lavoro fatto da una **forza conservativa** è pari alla **variazione di energia potenziale** fra punto iniziale e finale del percorso

$$L = -(U(B) - U(A)) = -\Delta U$$

$$L = F(x) \Delta x$$

$$F(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$
$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

una **forza conservativa** è uguale alla **derivata cambiata di segno** dell'**energia potenziale**



# Quantità di Moto

$$\begin{array}{l} \text{quantità} \\ \text{di moto} \end{array} \quad = \quad \text{massa} \cdot \text{velocità}$$

*def*

- ✖ definizione  
**non relativistica**  
( $v \ll c$ )

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- ✖ grandezza **vettoriale**

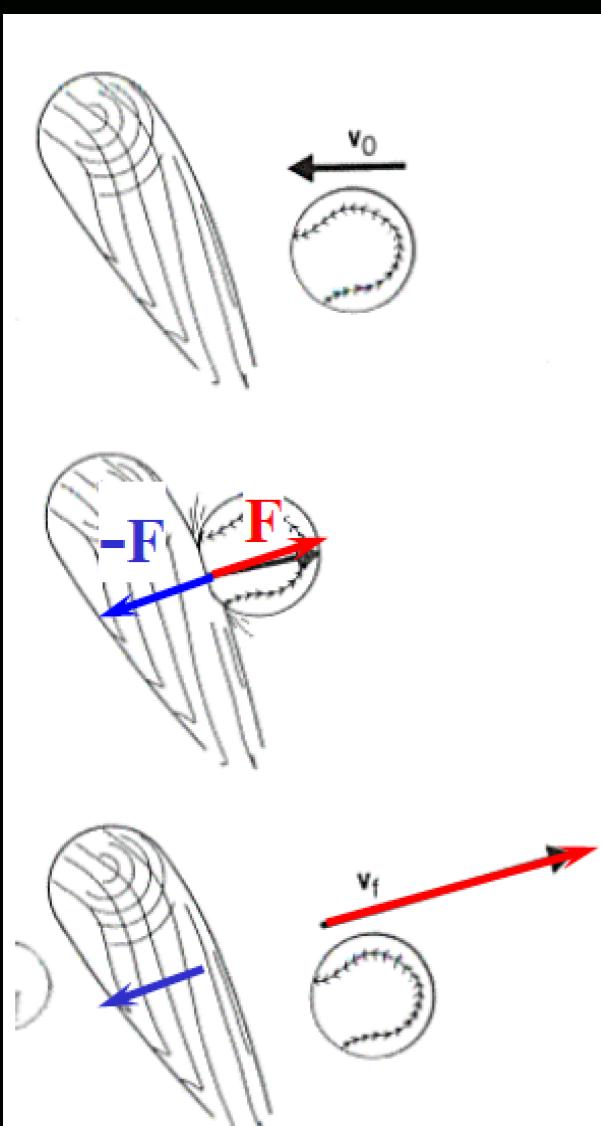
$$\begin{cases} p_x = mv_x \\ p_y = mv_y \\ p_z = mv_z \end{cases}$$

- ✖ **dimensioni e unità** di misura

$$[p] = [M] \cdot \frac{[L]}{[T]} \Rightarrow kg \cdot \frac{m}{s}$$

# Quantità di Moto

E' una quantità molto importante negli urti



- ✖ palla su mazza da baseball
- ✖ palla subisce grande **variazione** di **velocità in tempo brevissimo** ( $\approx 0.01$  s)
  - ⇒ grande accelerazione
  - ⇒ **elevata forza media** su palla ( $\approx 10^3$  N)
- ✖ per principio **azione e reazione**: mazza risente di forza uguale ed opposta
  - ⇒ velocità mazza ridotta a causa della grande massa del bastone

## Seconda legge di Newton

sistemi a **massa costante**

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

sistemi a **massa variabile**

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

**esempio** di sistemi a massa variabile:

- ▶ razzo che espelle combustibile
- ▶ palla di neve che rotolando si ingrossa
- ▶ camion che si riempie d'acqua mentre viaggia con la pioggia

**N.B.** se  $m = \text{costante}$  ritrovo **II legge di Newton**

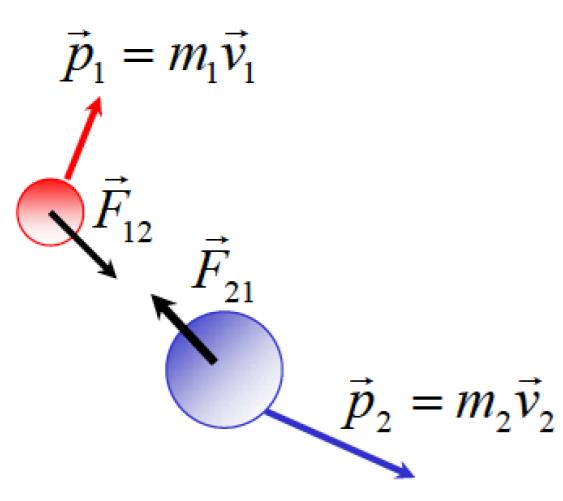
$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

*la quantità di moto di un sistema si conserva  
se sul sistema non agiscono forze esterne*

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{costante}$$

[ I Legge di Newton – Principio di Inerzia]

# Sistema di due particelle: conservazione quantità di moto



- ✖ sistema **isolato**  
(non ci sono forze esterne al sistema)
- ✖ sistema di 2 particelle **interagenti**  
[es. forza interna = gravità]

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{principio di azione e reazione} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante}$$

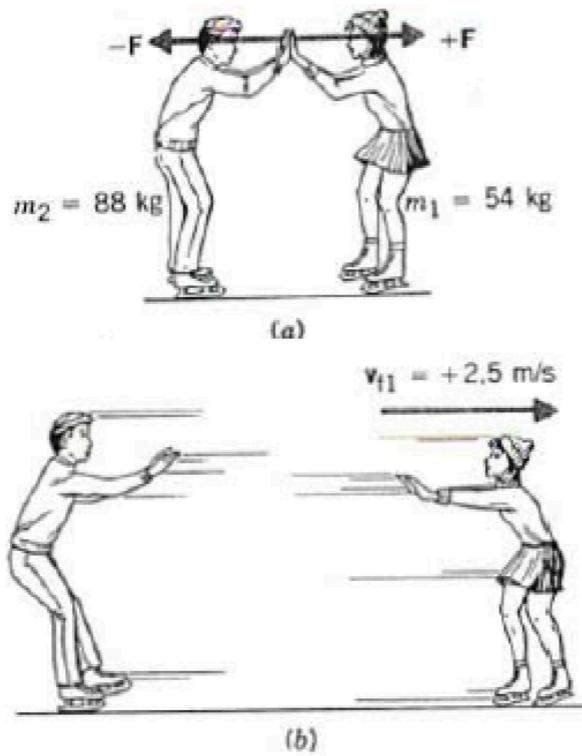
$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$
$$\Leftarrow \quad p_{ix} = p_{fx} \quad p_{iy} = p_{fy} \quad p_{iz} = p_{fz}$$

## conservazione della quantità di moto:

- ✖ la **quantità di moto totale**  
di due particelle isolate interagenti si conserva
- ✖ la quantità di moto totale di un **sistema isolato** è uguale  
in ogni istante alla quantità di moto iniziale

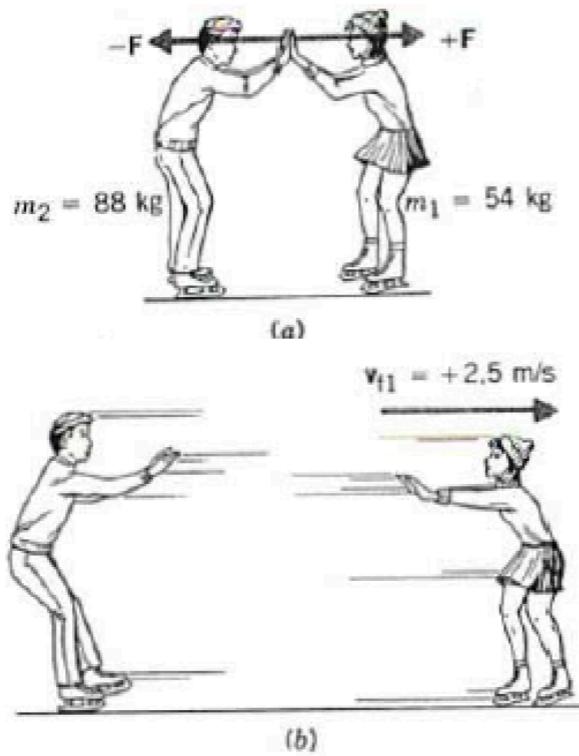
# esempi: conservazione quantità di moto

## 2 pattinatori [su ghiaccio]



# esempi: conservazione quantità di moto

## 2 pattinatori [su ghiaccio]



$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$0 = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$$

$$v_{f1} = -\frac{m_2}{m_1} v_{f2}$$

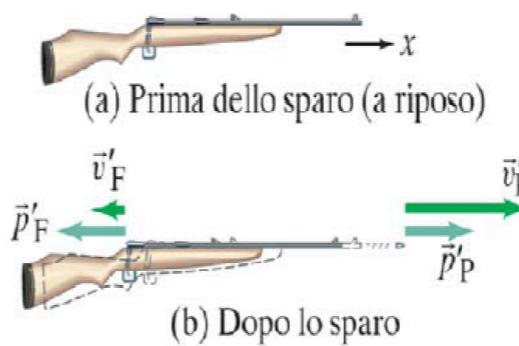
## rinculo [su superficie senza attrito]



$$0 = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$$

$$v_{f1} = -\frac{m_2 v_{f2}}{m_1}$$

## rinculo del fucile [dopo lo sparo]



$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$0 = m_P v_P + m_F v_F$$

$$v_F = -\frac{m_P v_P}{m_F}$$

$$= -\frac{0.02\text{kg} \times 620\text{m/s}}{5.0\text{kg}} = -2.5\text{m/s}$$

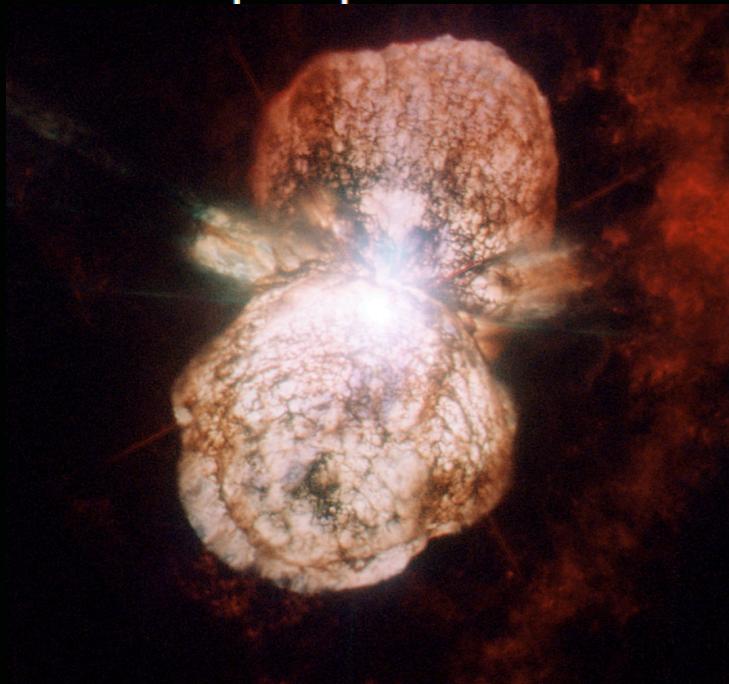
$$m_P = 20\text{g}, \quad m_F = 5.0\text{kg}$$

$$v_P = 620\text{m/s}$$

secondo voi è una grande velocità?

# esempi: conservazione quantità di moto esplosione di una stella

foto da  
telescopio spaziale Hubble

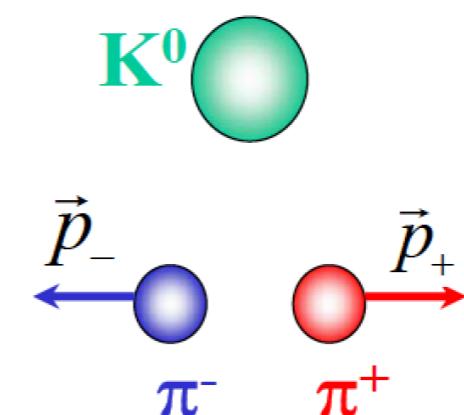


esplosione violenta  
di Eta Carinae (1841):

produzione de **lobi simmetrici**  
[con dimensioni pari a  
nostro sistema solare!!!]  
che emettono materia  
in versi opposti

⇒ la **quantità di moto** della stella  
è rimasta **immutata** dopo l'esplosione

# decadimento di un **kaone** in quiete



$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i = 0$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_+ + \vec{p}_- = 0$$

$$\vec{p}_+ = -\vec{p}_-$$

# propulsione nel vuoto:

come fa un **razzo** o un **astronauta** a spostarsi nel vuoto ?

[cioè in assenza di attrito]

⇒ con la **conservazione** di **p** !!!!

**M** = massa sistema (**M+M'**)

**V** = velocità sistema (**V+V'**)

**M'** = massa astronauta

**V'** = velocità dell'astronauta

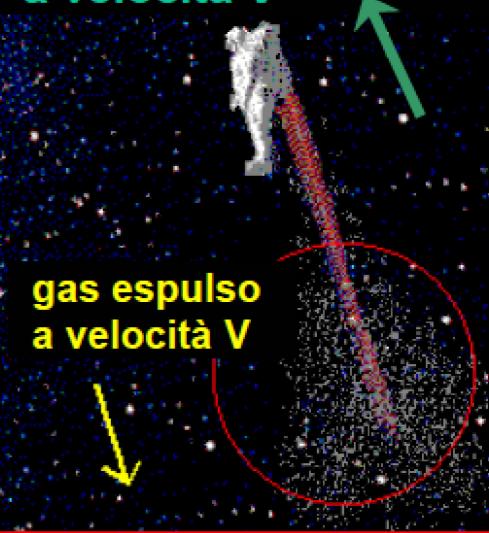
**M**' = massa carburante

**V**' = velocità dei gas espulsi

astronauta fermo  
**V=0**



astronauta si muove  
a velocità **V**



motori spenti

$$MV=0$$

(**V=0** e **V'=0**)

accendo i motori

$$MV+M'V'=0$$

**V ≠ 0** ⇒ **V' ≠ 0**

conservazione  
quantità di moto →

# Impulso e Quantità di Moto

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

**seconda legge di Newton:**  
*la quantità di moto varia se sulla particella agisce una forza*

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

$$\vec{I} = \underset{\text{def}}{\int_{t_i}^{t_f}} \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$$

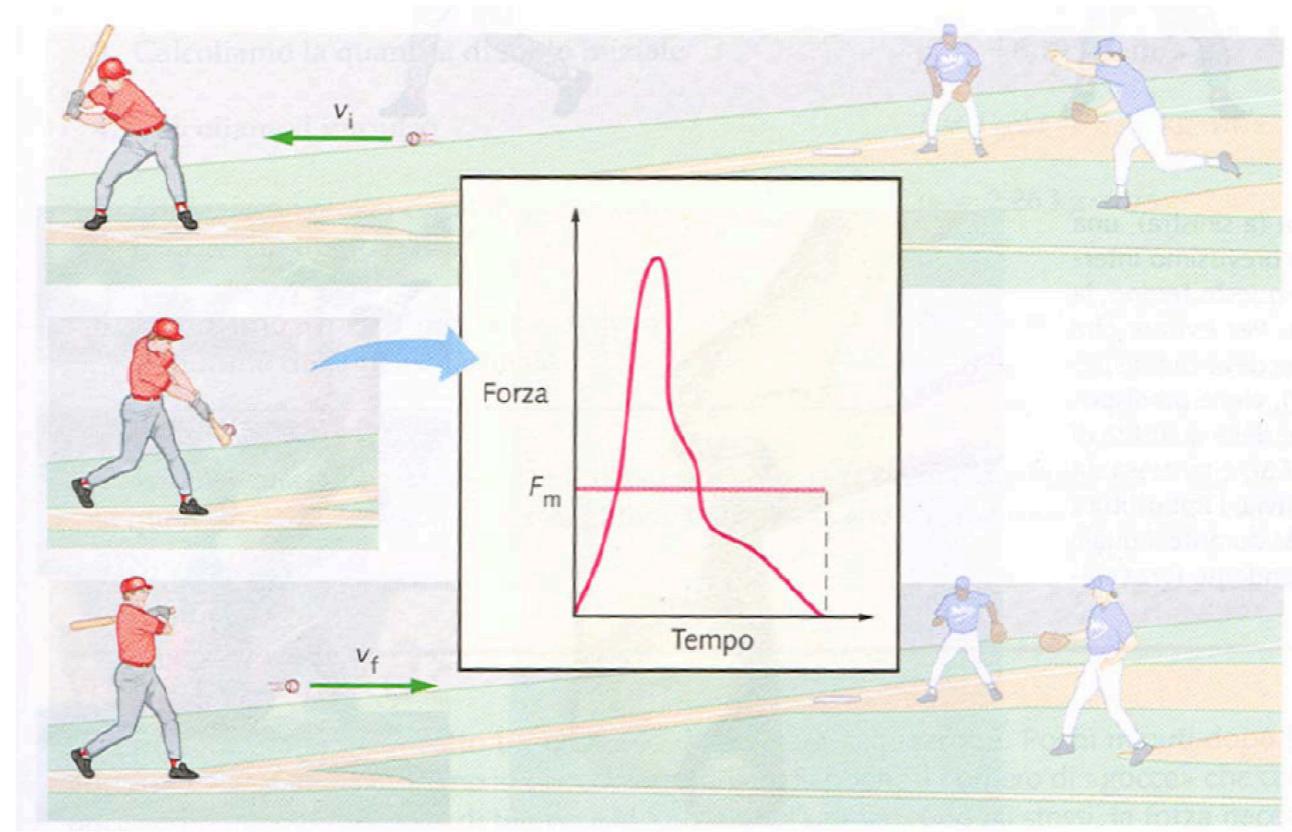
**Teorema dell' impulso:**

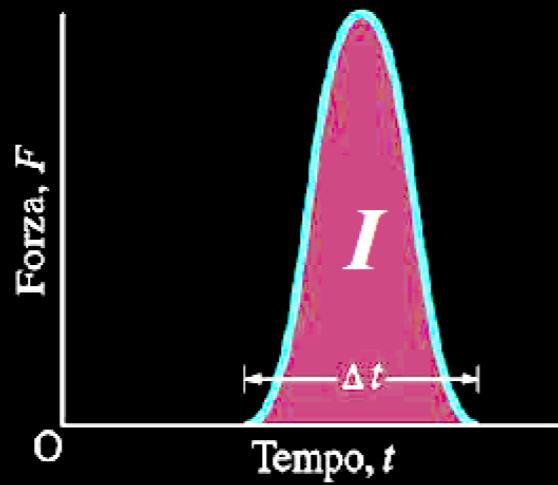
*l' **impulso** di una forza  
(integrale della forza nell'intervallo di tempo)  
è pari alla **variazione** della **quantità di moto***

$$[I] = [p] = [M][L/T]$$

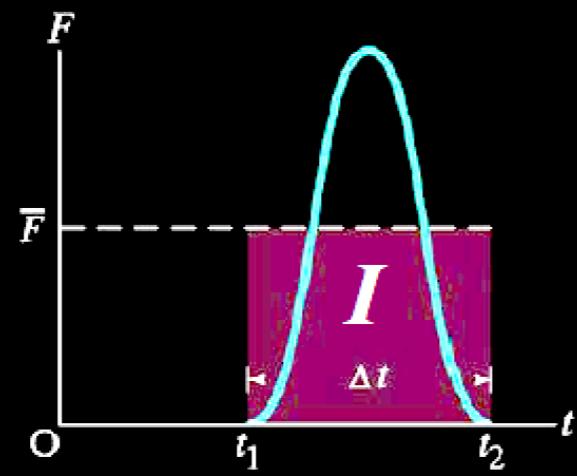
## esempio:

la forza tra due oggetti che urtano ha spesso un **andamento complicato** e **difficilmente descrivibile**





$F$  può variare nel tempo  
 $I$  = **area** sotto la curva forza-tempo



$$\bar{F} \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \, dt \quad \text{forza media}$$

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} = \bar{F} \Delta t \quad \begin{array}{l} \text{stesso impulso} \\ \text{impresso da} \\ \text{forza variabile} \end{array}$$

Il **concetto di impulso** è utile quando una delle forze agenti sulla particella agisce

- per **breve tempo**
- con **intensità elevata**

**Forza  
impulsiva**

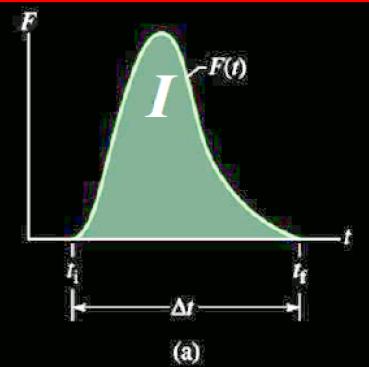
forze impulsive sono tipiche dei processi di **urto** [di durata brevissima]

esempio:  
palla su mazza da baseball

$$\Delta t \approx 0.01 \text{ s} \quad v \sim 20 \text{ m/s}$$
$$\langle F \rangle \sim 200 \text{ N}$$

$$F_g = mg \approx (100 \text{ g}) (9.8 \text{ m/s}^2) = (0.1 \text{ kg}) (9.8 \text{ m/s}^2) \approx 1 \text{ N}$$

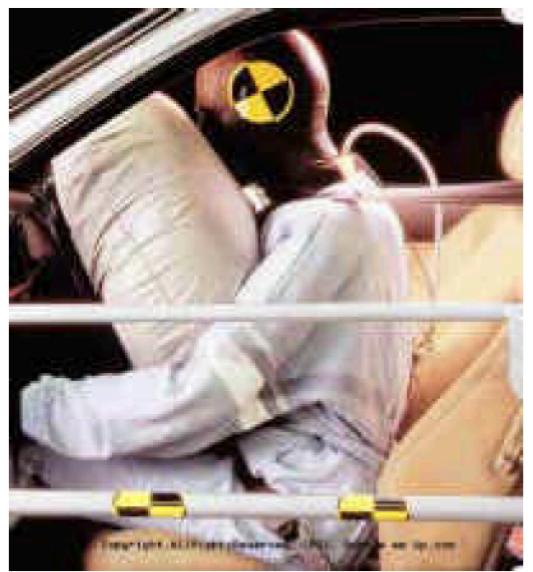
$\langle F \rangle \gg F_g \Rightarrow$  trascuro ogni variazione di velocità legata a forza di gravità



### approssimazione impulsiva:

→ trascuro gli effetti delle altre forze ←  
[piccoli durante la breve durata di azione delle forze intense]

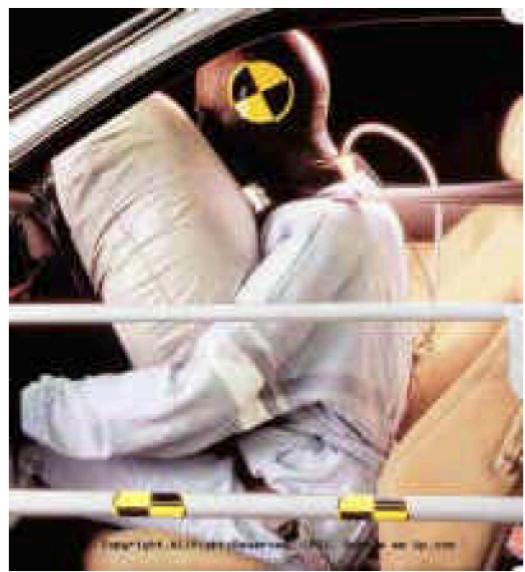
**applicazione: air bag**



**applicazione: guantoni da pugile**



## applicazione: air bag



$$\Delta p = \bar{F} \Delta t$$

variazione  
quantità di moto  
dell'auto

### air-bag:

induce variazione quantità di moto  
in **intervallo** di **tempo più lungo**

- ⇒ riduce **picco** di intensità della **forza**
- ⇒ riduce **traumi**

## applicazione: guantoni da pugile



$$\Delta p = \bar{F} \Delta t$$

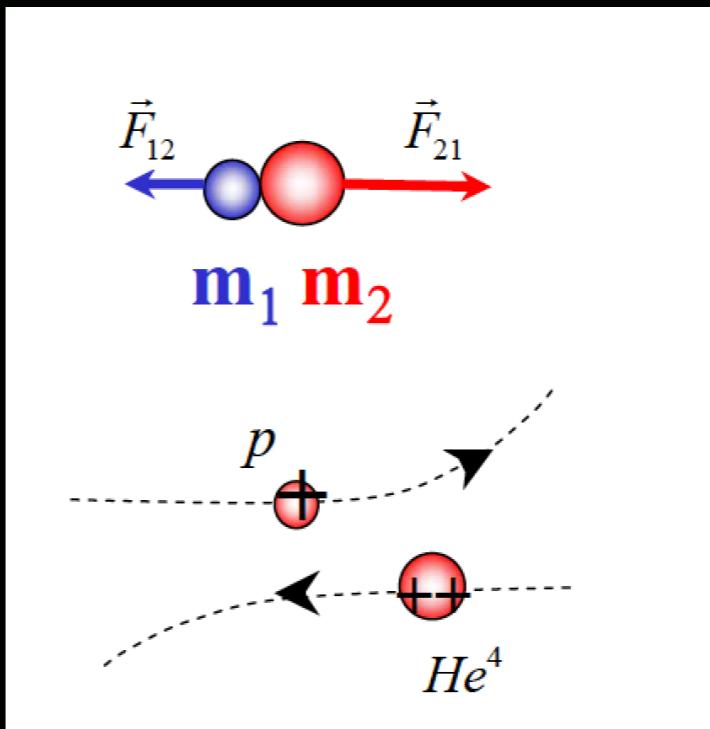
i guantoni aumentano tempo  
durante il quale la forza  
è applicata alla testa

- ⇒ riduce **picco** di intensità della **forza**
- ⇒ riduco **accelerazione** del cranio
- ⇒ riduco **traumi**

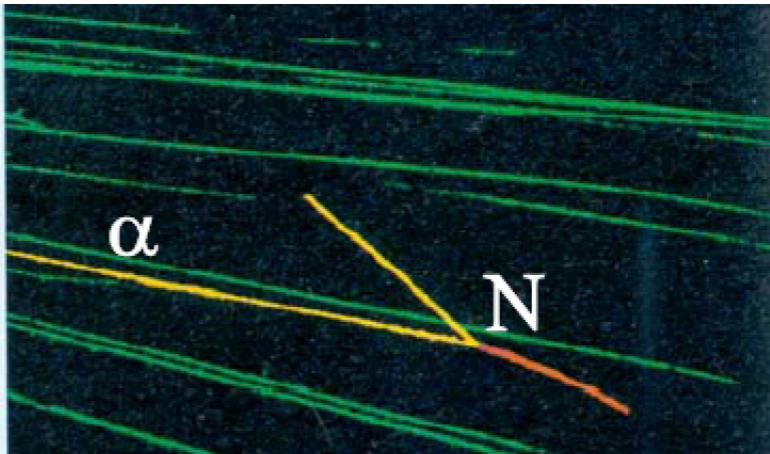
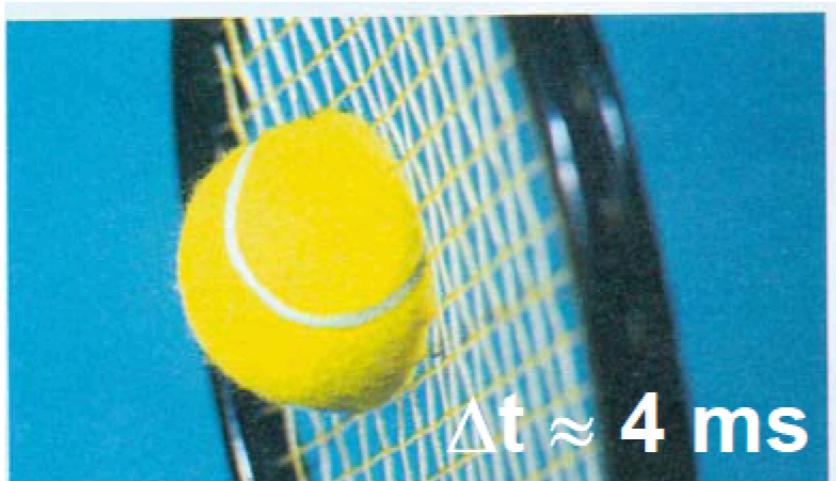
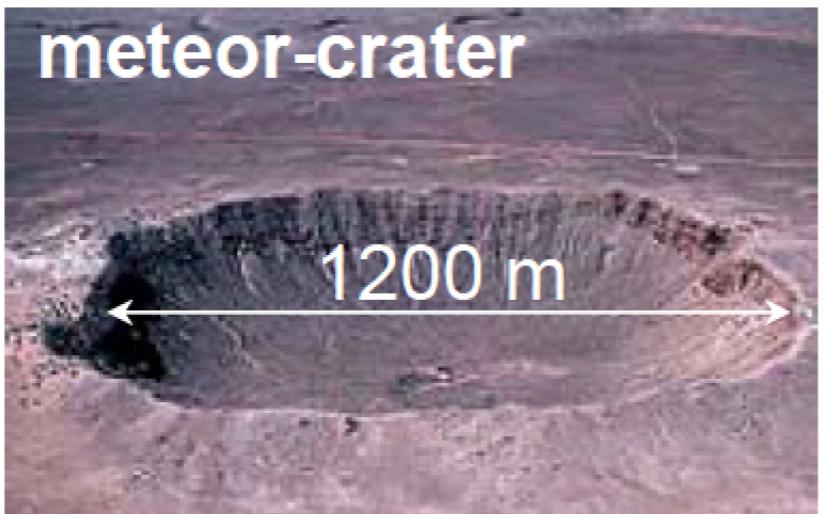
# Urti

**urto:** evento **isolato** nel quale una **forza** relativamente **intensa** agisce per un **tempo** relativamente **breve** su due o più corpi in contatto tra loro  
[**approssimazione impulsiva:** trascurro forze esterne]

- ✗ risultato di un **contatto fisico**
- ✗ risultato di una **interazione** tra particelle



# Urti su scale diverse



## eSEMPIO: forza su auto durante un urto

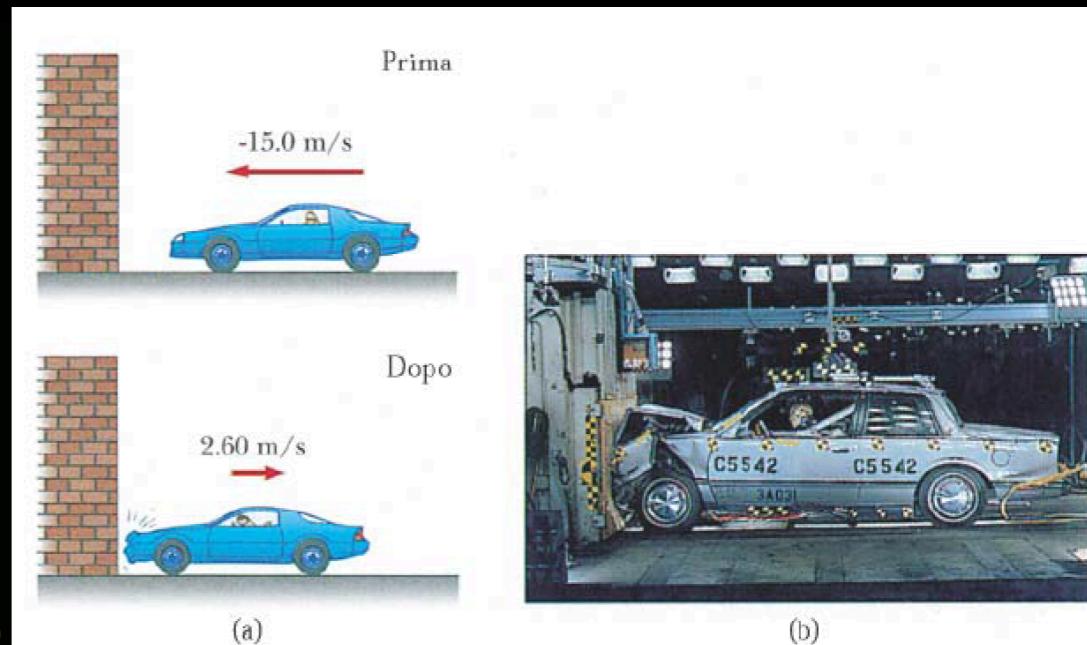
In un test d'urto, un'auto di massa  $m=1500 \text{ kg}$  urta contro un muro.

velocità iniziale è  $\mathbf{v}_i = -15.0 \mathbf{i} \text{ m/s}$

velocità finale è  $\mathbf{v}_f = 2.60 \mathbf{i} \text{ m/s}$ .

durata urto  $\Delta t = 0.150 \text{ s}$

determinare **impulso** dovuto all'urto e **forza media** esercitata sull'auto



$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = (1500 \text{ kg})(-15.0 \text{ m/s})\vec{i} = -2.25 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}$$

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = (1500 \text{ kg})(2.6 \text{ m/s})\vec{i} = 0.39 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}$$

$$I = \Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = (0.39 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}) - (-2.25 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s})$$

$$= 2.64 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}$$

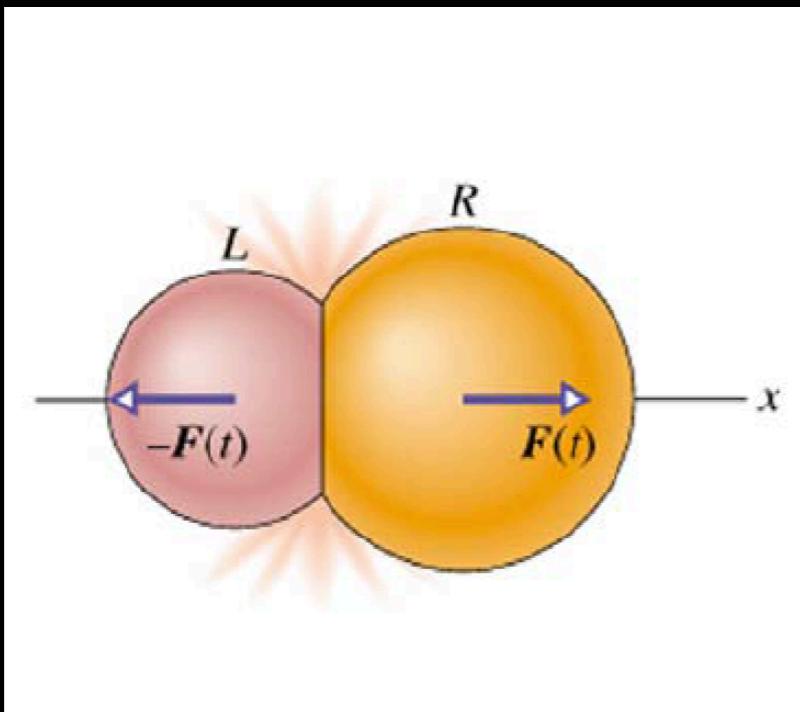
**Forza media** esercitata sull'auto:

$$\bar{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{2.64 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ kg m/s}}{0.150 \text{ s}} = 1.76 \cdot 10^5 \vec{i} \text{ N}$$



# Quantità di Moto negli Urti

*per ogni tipo di urto  
la quantità di moto totale si conserva*



L esercita su R forza  $F(t)$

R esercita su L forza  $-F(t)$

$F(t)$  e  $-F(t)$  sono  
coppia di forze **azione** e **reazione**:

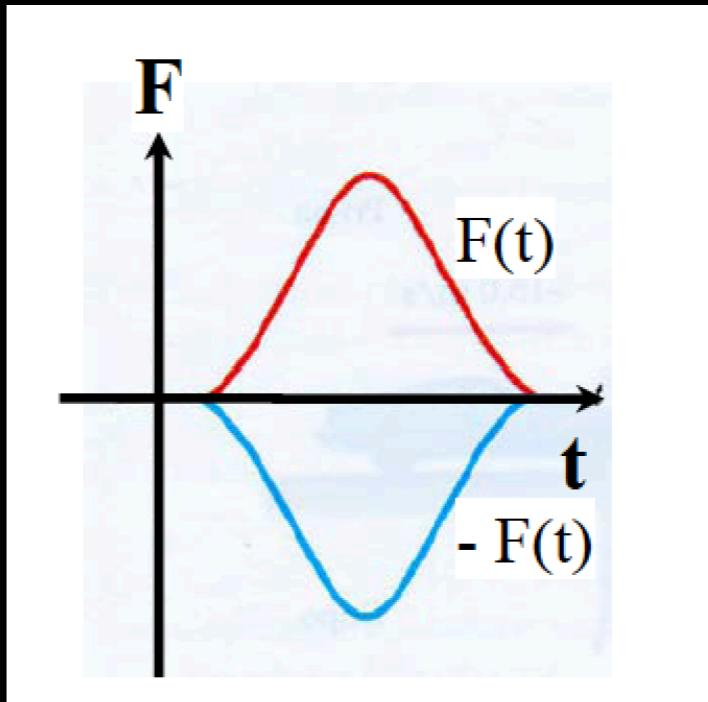
- ✖ intensità **varia nel tempo**
- ✖ intensità è **uguale** istante per istante

$$\Delta p_R = \int_{t_i}^{t_f} F(t) dt$$

$$\Delta p_L = \int_{t_i}^{t_f} (-F(t)) dt$$

$$\Delta p_R = -\Delta p_L$$

$$\Delta p_R + \Delta p_L = 0$$



$$\vec{p} = \vec{p}_R + \vec{p}_L = costante$$

→ le **forze impulsive** sono **interne** al sistema,  
quindi **NON influenzano** la quantità di moto totale

Se dovete spingere un bicchiere di carta usereste impulso?

E se dovete spostare un libro? In quel caso cosa può variare lo stato di moto?

Cosa vi ha spinto a compiere le vostre scelte?

# Energia negli Urti

*l'energia cinetica **NON** si conserva sempre negli urti*

posso avere **conversione** in

- ✗ energia termica
- ✗ energia acustica
- ✗ energia potenziale elastica (deformazione dei corpi)
- ✗ energia rotazionale

urto **anelastico**: [esempio palla che rimbalza sul pavimento]  
energia cinetica totale non si conserva  $(K_{tot})_i = (K_{tot})_f + E_{th} + E_{pot} + \dots$   
ma si trasforma in altre forme di energia

urto **elastico**:

energia cinetica totale  
non cambia  
[es. urto fra bocce]

$$(K_{tot})_i = (K_{tot})_f$$

urto **perfettamente anelastico**:

massima trasformazione  $(K_{tot})_f \neq (K_{tot})_i$   
energia cinetica totale,  
→ i due corpi rimangono uniti  $m_f = m_{i,1} + m_{i,2}$   
[es. urto palla di plastilina su pavimento]

in tutti i casi la **quantità di moto** si conserva sempre

goto 30s

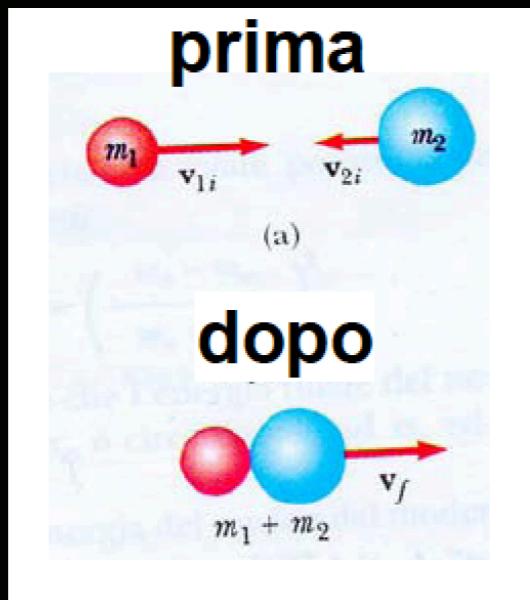


**See a Penny...**

**Si conserva la quantita' di moto?**

# Urti in UNA dimensione

**urto perfettamente anelastico**  
[conservo solo quantità di moto]



le particelle dopo l'urto  
rimangono **unite** con velocità v<sub>f</sub>

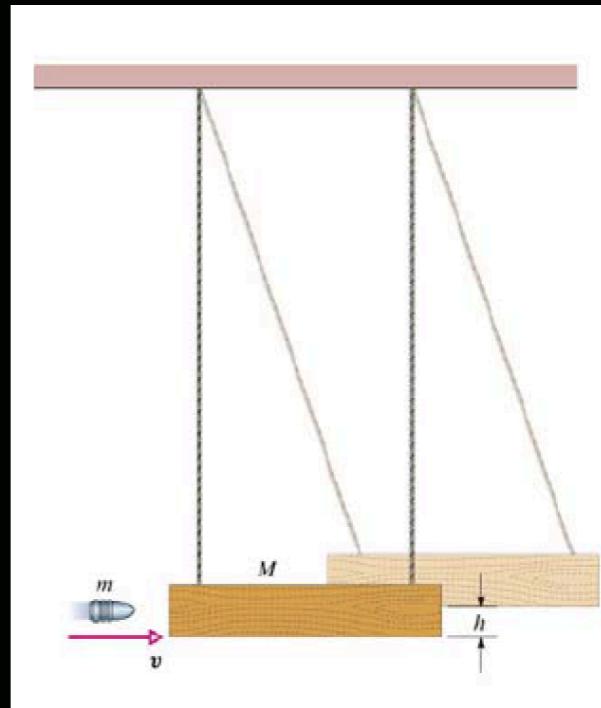
$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{(m_1 + m_2)}$$

# esempio: pendolo balistico

dispositivo per determinare  
velocità dei proiettili



$$m = 9.5 \text{ g} \quad M = 5.4 \text{ kg}$$

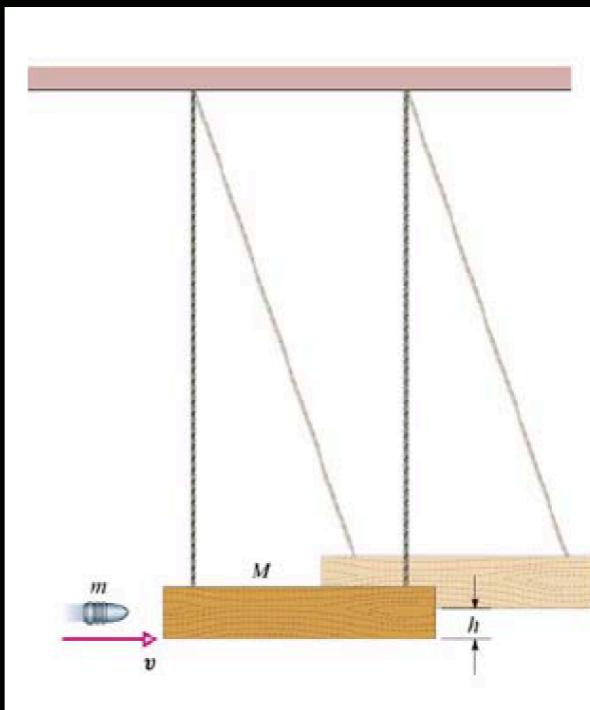
$$h = 6.3 \text{ cm}$$

# esempio: pendolo balistico

dispositivo per determinare  
velocità dei proiettili

$$V = \frac{m}{(m+M)} v \quad \text{conservazione quantità di moto}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh \quad \text{conservazione energia meccanica}$$



$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}$$

$$v = 630 \text{ m/s}$$

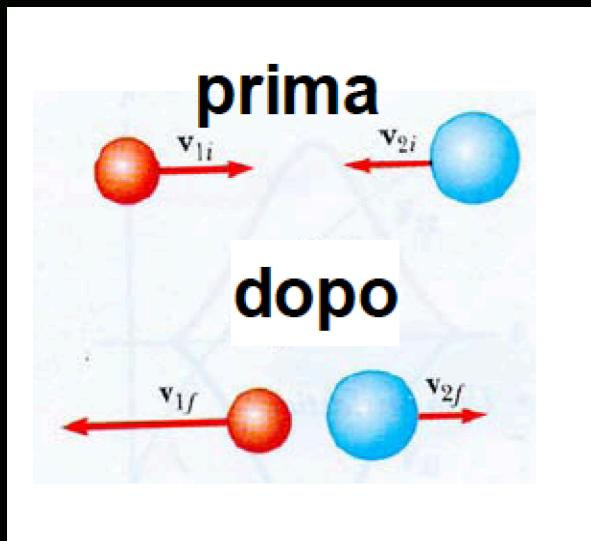
$$m = 9.5 \text{ g} \quad M = 5.4 \text{ kg}$$

$$h = 6.3 \text{ cm}$$

→ trasformo **alta velocità** proiettile  
in **bassa velocità** corpo pesante  
[di facile misurazione]

# urto elastico

[conservo quantità di moto ed energia cinetica]



$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \quad (1)$$

$$(K_{tot})_i = (K_{tot})_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

✖ masse uguali [ $m_1=m_2$ ]



**bersaglio fisso**

$$v_{2i} = 0$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1(v_{li} - v_{1f}) = m_2 v_{2f}$$

$$(K_{tot})_i = (K_{tot})_f \Rightarrow m_1(v_{li} + v_{1f})(v_{li} - v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2$$

divido le due precedenti equazioni e sostituisco ...

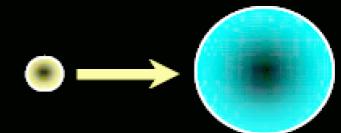
$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{li}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{li}$$

$$v_{1f} = 0$$
$$v_{2f} = v_{li}$$

**scambio** di velocità  
[es. urto fra bocce/palle da biliardo]

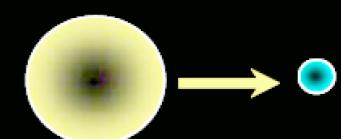
✖ bersaglio massiccio [ $m_2 \gg m_1$ ]



$$v_{1f} = -v_{li}$$
$$v_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_2} \right) v_{li}$$

**proiettile** rimbalza indietro  
[es. urto palla golf su palla cannone  
palla da baseball su mazza]

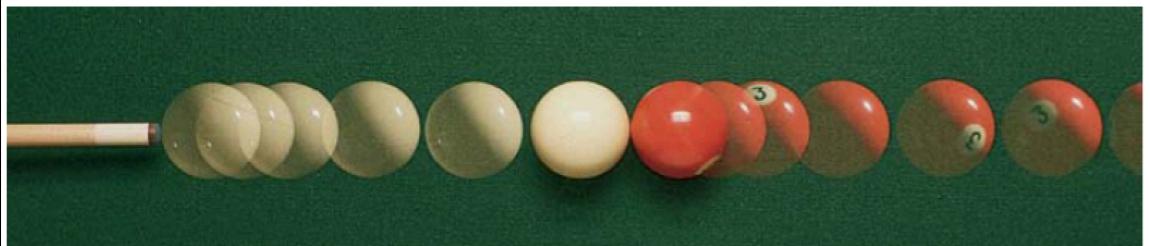
✖ proiettile massiccio [ $m_1 \gg m_2$ ]



$$v_{1f} = v_{li}$$
$$v_{2f} = 2v_{li}$$

**proiettile** indisturbato, **bersaglio** scatta in avanti  
[es. urto palla cannone su palla golf]

## esempi: urto elastico



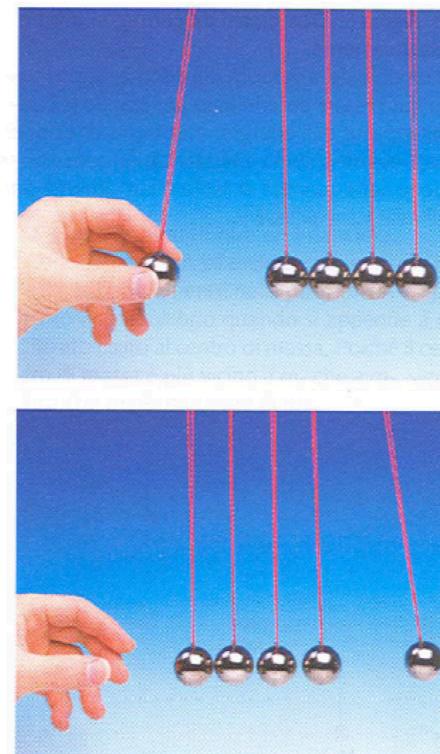
$$m_1 = m_2$$

urto fra **palle** di biliardo **uguali**:

$$\begin{aligned}v_{1f} &= 0 \\v_{2f} &= v_{1i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}\end{aligned}$$

**pendolo multiplo:** palline di uguale massa



rapida **successione**  
di urti elastici:

ad ogni urto una palla si ferma e  
palla successiva si muove  
con **stessa velocità**

**bersaglio mobile** \$v\_{2i} \neq 0\$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}) \quad \leftarrow$$

$$(K_{tot})_i = (K_{tot})_f \Rightarrow m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = -m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2)$$

$$m_1(v_{1i} + v_{1f})(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} + v_{2f})(v_{2i} - v_{1f}) \quad \leftarrow$$

divido le due precedenti equazioni e sostituisco ...

$$(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2i} + v_{2f})$$

(2)  $(v_{1i} - v_{2i}) = -(v_{1f} - v_{2f})$  velocità **relative** uguali ed opposte prima e dopo l'urto

**N.B.** note:

$$m_1, m_2$$
  
 $v_{1i}, v_{2i}$

conservazione p (1)  $\rightarrow$   
+  
velocità relative (2)

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

# Urti in DUE dimensioni

urto **non frontale**  
(corpi **non** allineati  
nella direzione del moto)

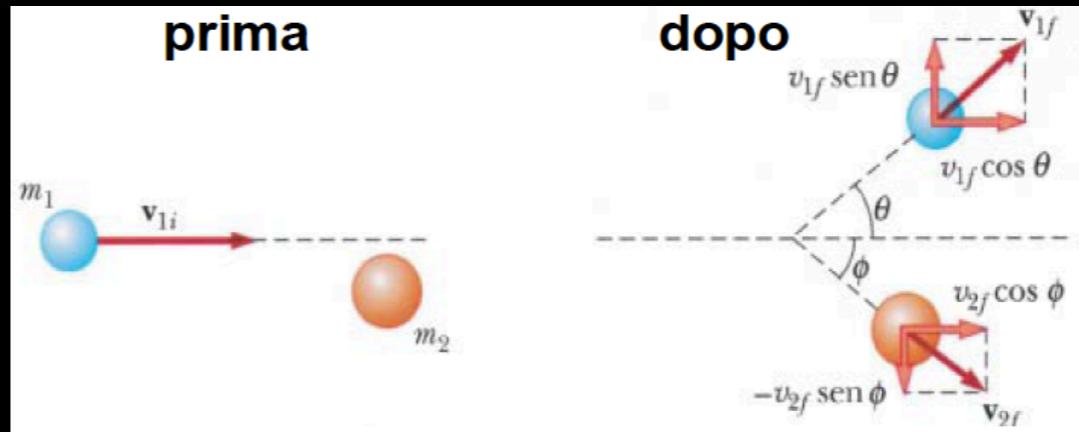
conservazione **quantità di moto**:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

per **componenti**:

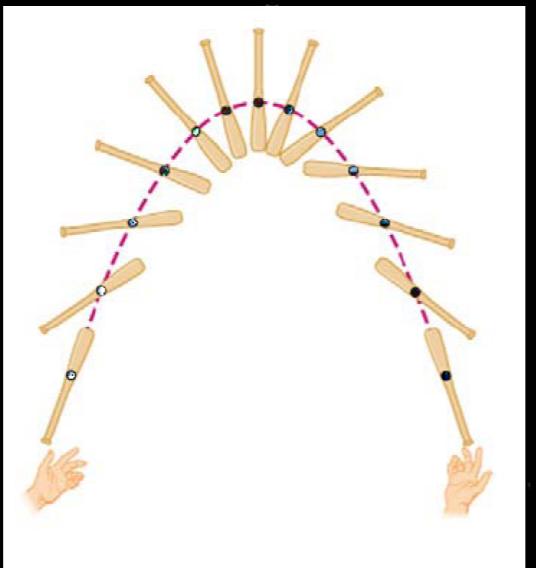
$$\begin{aligned} m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} &= m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \Rightarrow m_1 v_{1ix} + 0 &= m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi \\ m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} &= m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \qquad 0 + 0 &= m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi \end{aligned}$$



conservazione **energia cinetica**  
[per **urti elastici solamente!!!**]

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

# Centro di Massa

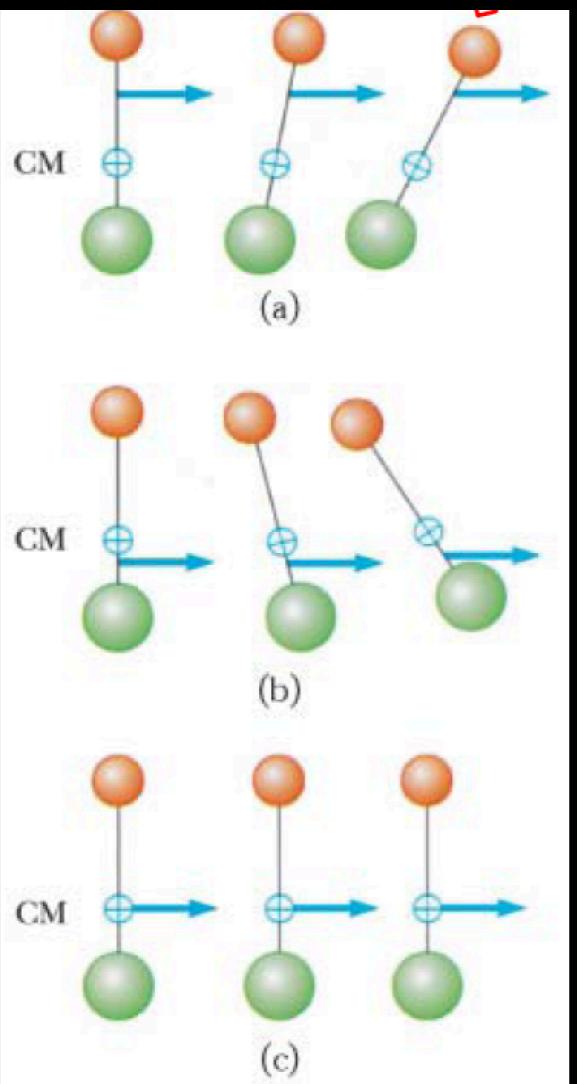


**mazza da baseball** lanciata in aria:  
moto complicato e diverso per le varie parti  
mazza = **sistema** di punti materiali  
**centro di massa**: punto che si muove lungo  
traiettoria **parabolica**  
[tipo moto proiettile]

***centro di massa** di un corpo (o sistema di corpi):  
punto che si muove come se*

- ▶ ***tutta la massa fosse lì concentrata***
- ▶ ***e le forze esterne agissero lì***

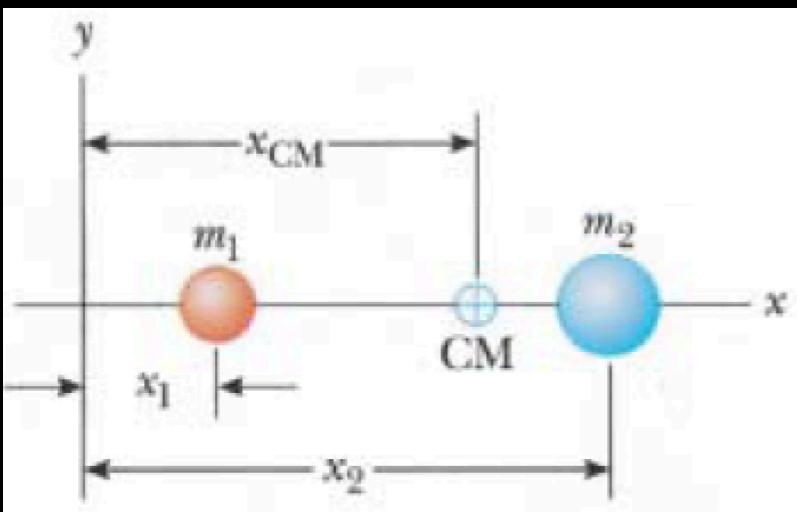
permette di descrivere  
**moto complessivo** del sistema meccanico



- ✖ applico **F** vicino ad **M<sub>1</sub>**  
sistema ruota in  
**senso orario**
- ✖ applico **F** vicino ad **M<sub>2</sub>**  
sistema ruota in  
**senso anti-orario**
- ✖ applico **F** vicino al **CM**  
sistema **trasla**  
si muove come se tutta  
la massa fosse concentrata  
nel CdM

# Centro di Massa

E' la posizione media (pesata) del sistema di particelle che rappresenta il nostro oggetto



$$x_{CM} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

esempio:

$$x_1 = 0, x_2 = d$$

$$\text{se } m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = (x_1 + x_2)/2$$

$$\text{se } m_2 = 2m_1 \Rightarrow x_{CM} = 2/3 d$$

**metà strada**

**vicino particella pesante**

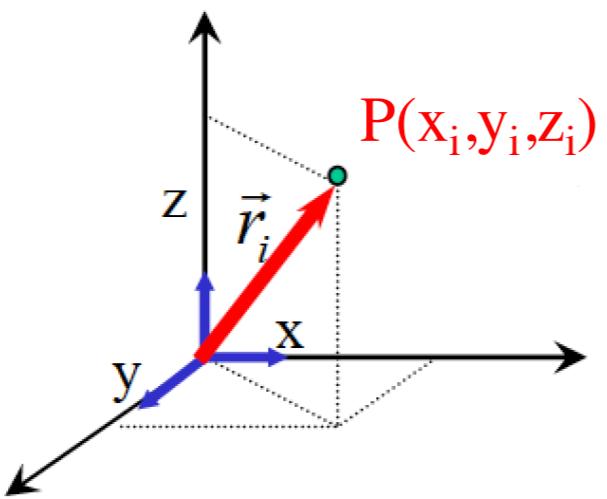
sistema **n** particelle in 3 dimensioni

$$x_{CM} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_{CM} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$z_{CM} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

## nel linguaggio dei vettori:



particella di **coordinate**  $(x_i, y_i, z_i)$

vettore **posizione**:

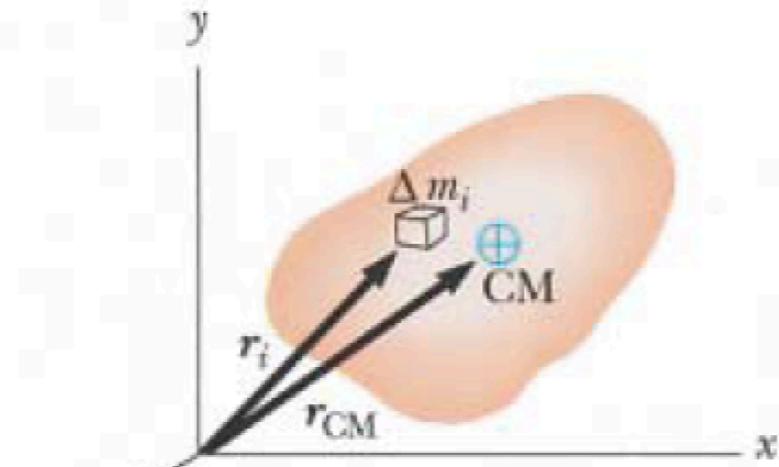
$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

sistema di n particelle

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM} \vec{i} + y_{CM} \vec{j} + z_{CM} \vec{k} = \frac{\sum_i m_i x_i \vec{i} + \sum_i m_i y_i \vec{j} + \sum_i m_i z_i \vec{k}}{M}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad \text{vettore } \mathbf{\text{posizione CM}}$$

# corpi **rigidi** [distribuzioni continue di materia]



$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

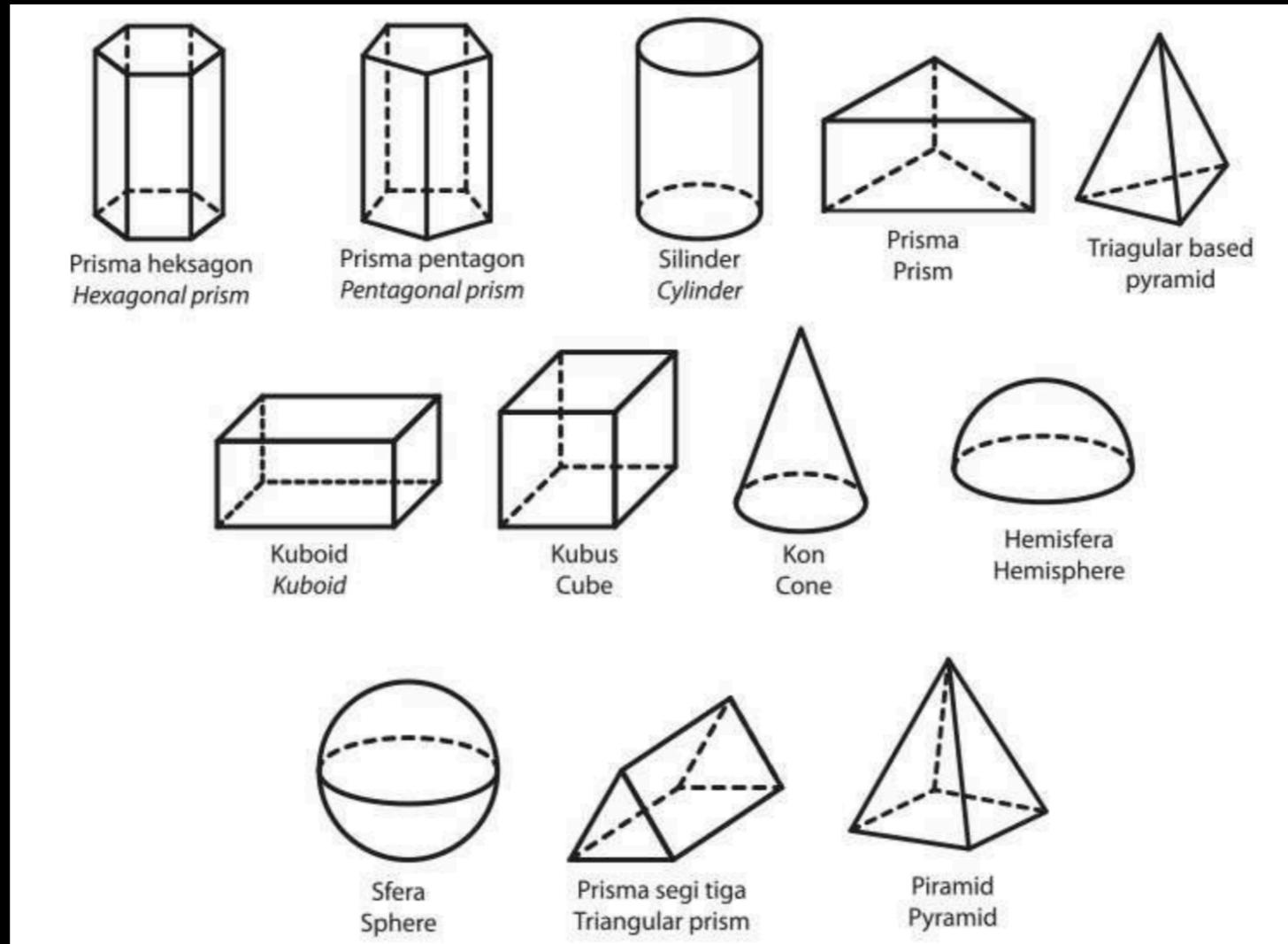
$$x_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{M} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{M} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{M} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int z dm$$

**N.B.** se oggetto possiede **simmetria**  
**CM** si trova su centro, asse o piano di simmetria

Riesci ad individuare il centro di massa di queste figure (geometricamente) ?



## Moto di un Sistema di Particelle

Il CM è importante per descrivere il moto di corpi estesi

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$M\vec{r}_{CM} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n$$

$$M\vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n$$

$$M\vec{a}_{CM} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n$$

poichè per ogni particella:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_{est}$$

le forze **interne** si elidono a due a due [azione e reazione]

*il CM si muove come particella di massa M su cui agisce la risultante delle forze esterne*

$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

**N.B. sistema isolato:**

$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{tot} = M\vec{v}_{CM} = costante$$

# Moto di un sistema di particelle

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

velocità CDM



$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_{tot}$$

quantità di moto totale è pari alla  
massa totale per la **velocità** del CdM

[moto **particella** massa M, velocità v<sub>CM</sub>]

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

somma forze **esterne**  
(quelle interne si elidono a coppie)

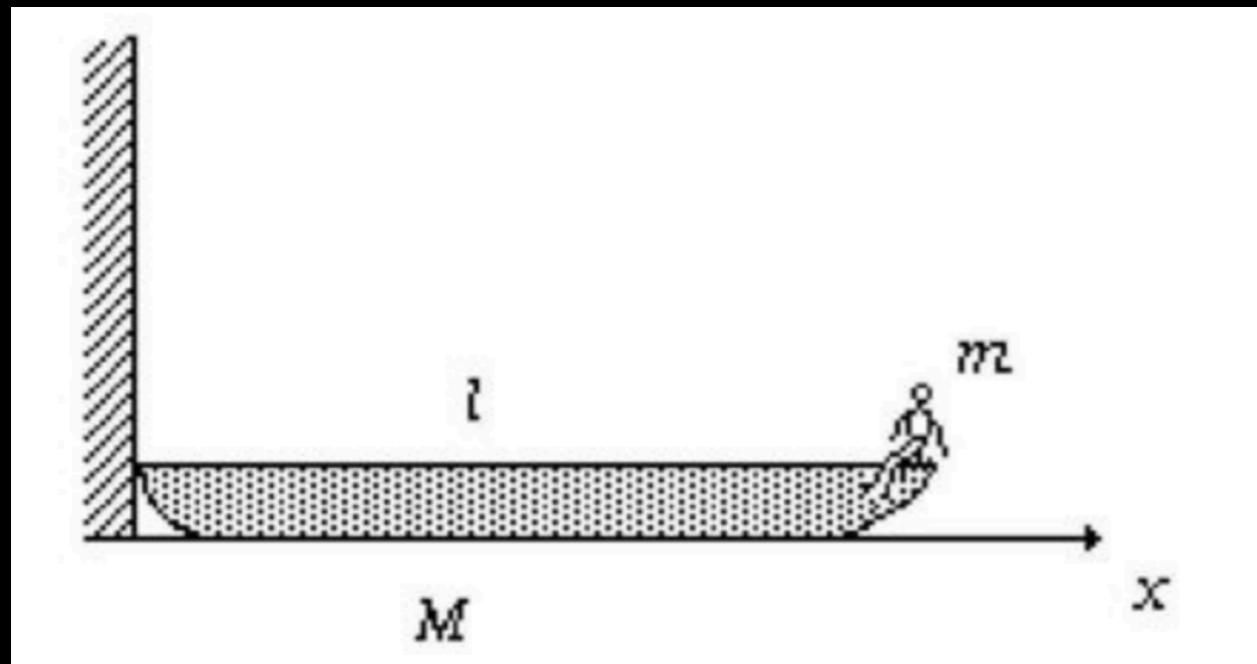
$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

il CdM si **muove** come particella di **massa M**  
su cui agisce la **risultante delle forze esterne**

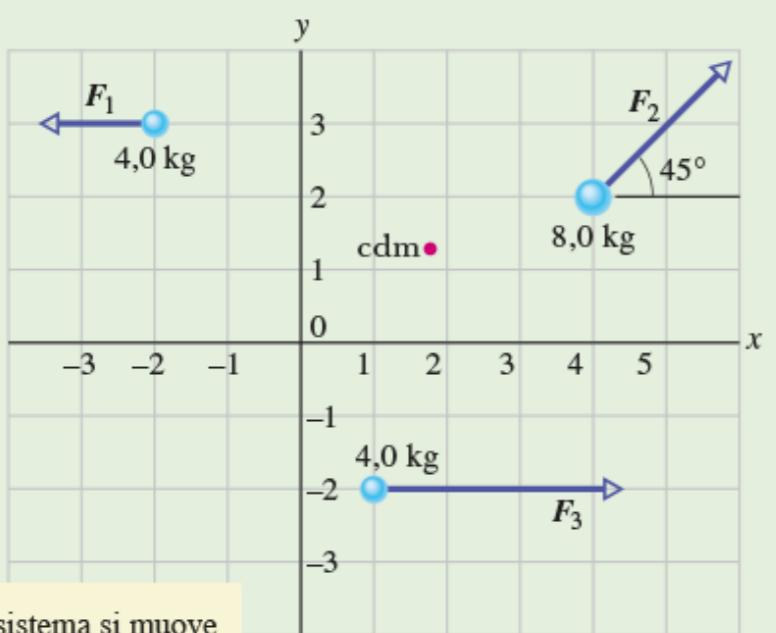
**sistema isolato:**

$$\sum \vec{F}_{est} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{tot} = costante \quad \vec{v}_{CM} = costante$$

## Esempio: barca/molo

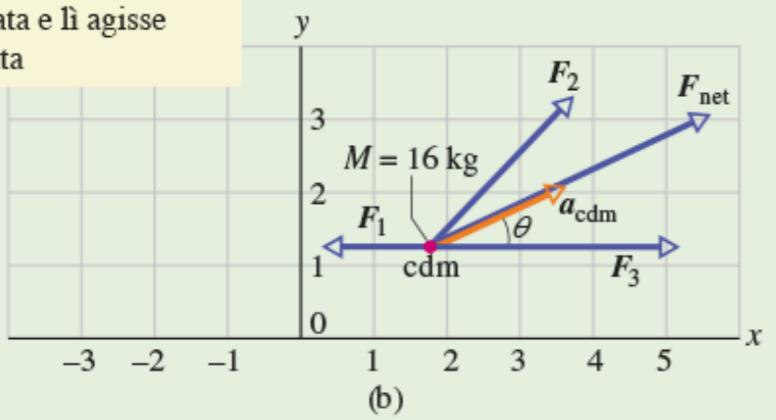


Un uomo di massa  $m = 75 \text{ kg}$  si trova a poppa di una zattera di massa  $M = 200 \text{ kg}$  e lunghezza  $\ell = 10\text{m}$  la cui prua si trova a contatto con un molo. L'uomo cammina sulla zattera per scendere sul molo; determinare la distanza fra la prua e il molo quando l'uomo ha raggiunto la prua.



Il cdm del sistema si muove come se tutta la massa fosse lì concentrata e lì agisse la forza netta

(a)

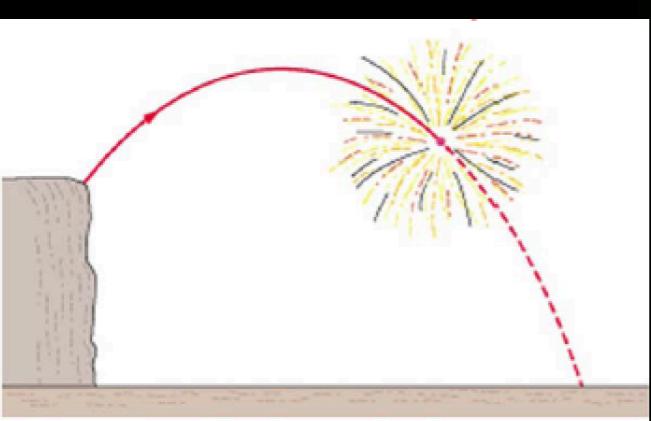


(b)

$$F_1 = 6 \text{ N}$$

$$F_2 = 12 \text{ N}$$

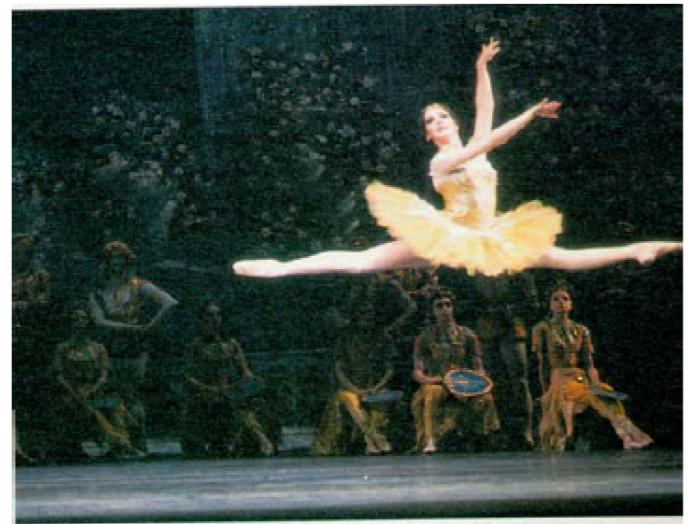
$$F_3 = 14 \text{ N}$$



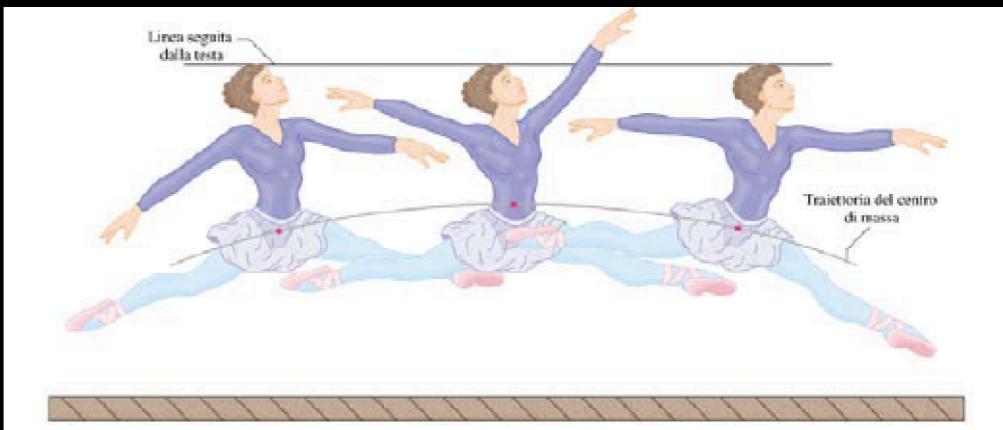
## fuoco artificiale

$$\vec{F}_{est} = \vec{F}_g$$

CM segue  
traiettoria **parabolica**  
[la stessa del razzo inesploso]



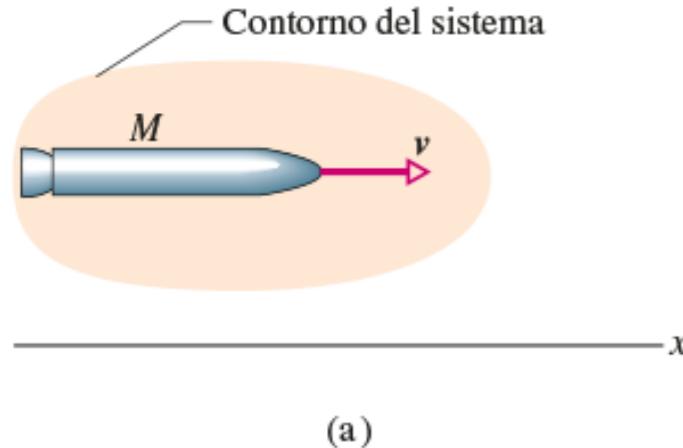
ballerina che **fluttua** in aria:  
traiettoria testa-busto  
**orizzontale !!!**  
[non **parabolica**  
come nel lancio di un corpo]



CM segue  
traiettoria **parabolica**

# Sistemi a massa variabile

L'espulsione di una massa dall'ugello del razzo ne accresce la velocità



durante il moto si conserva la **massa** del **sistema**  
[massa **combustibile** + massa **navetta**]

$$p_i = p_f$$

$$Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv) \quad \text{con } dM < 0$$

Sviluppo i prodotti e definisco

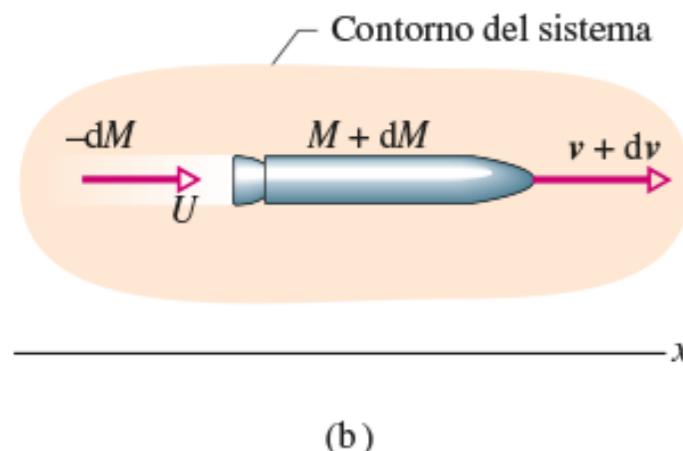
$u = (v + dv) - U$       **velocità relativa** prodotti di scarico  
da cui

$$-dM u = M dv$$

$$-\frac{dM}{dt} u = M \frac{dv}{dt}$$

ove  $R = -dM/dt$

**rapidità**  
consumo combustibile



$$Ru = Ma$$

**spinta del razzo**    (I<sup>0</sup> equazione del razzo)

$$dv = -u \frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f}$$

(II<sup>0</sup> equazione del razzo)

devo **diminuire** la massa finale  
per avere aumento di velocità

**sistema isolato:**

$$\sum \vec{F}_{est} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{tot} = \text{costante}$$