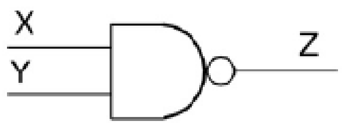
Università di Napoli Federico II – Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Calcolatori Elettronici I

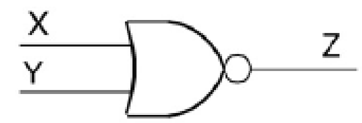
Algebra di Boole: forme NAND e NOR

Funzioni NAND e NOR

- NAND $x \uparrow y = \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$
- NOR $x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$



x	y	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Figura 3.14 - Simboli delle porte NAND e NOR e relative tabelle di verità.

- Generalizzazione a più operandi
- NAND $x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_n = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \dots + \overline{x}_n$
- NOR $x_1 \downarrow x_2 \downarrow \dots \downarrow x_n = \overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \dots \cdot \overline{x}_n$

Non associatività di NAND e NOR

- NAND e NOR **non** godono della proprietà associativa

NAND $(x_1 \uparrow x_2) \uparrow x_3 \neq x_1 \uparrow (x_2 \uparrow x_3) \neq x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3$

NOR $(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$

x_1	x_2	x_3	$x_1 \uparrow x_2$	$(x_1 \uparrow x_2) \uparrow x_3$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

x_1	x_2	x_3	$x_2 \uparrow x_3$	$x_1 \uparrow (x_2 \uparrow x_3)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

x_1	x_2	x_3	$x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

AND, OR e NOT da NAND e NOR

- E' possibile ottenere una AND e una OR tramite NAND e NOR

$$x \cdot y = \overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$$
$$x + y = \overline{x \downarrow y} = \overline{x} \uparrow \overline{y}$$

- E' possibile ottenere una NOT tramite NAND e NOR

$$x \uparrow x = \overline{x \cdot x} = \overline{x}$$
$$x \downarrow x = \overline{x + x} = \overline{x}$$

- {NAND} e {NOR} sono due insiemi funzionalmente completi

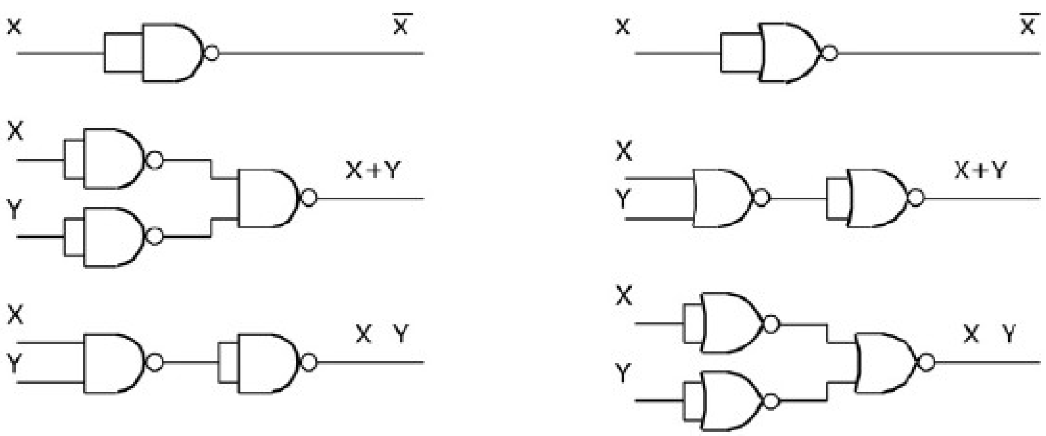


Figura 3.15 - Costruzione delle operazioni di NOT, OR e AND dalle porte NAND e NOR.

Proprietà di NAND e NOR

- Una NAND di prodotti è uguale alla NAND delle variabili indipendenti. (Duale) Una NOR di somme è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(ab) \uparrow (cd) = \overline{(ab) \cdot (cd)} = a \uparrow b \uparrow c \uparrow d$$

$$(a+b) \downarrow (c+d) = \overline{(a+b) + (c+d)} = a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$$

- Una OR di NAND è uguale alla NAND delle variabili indipendenti. (Duale) Una AND di NOR è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(a \uparrow b) + (c \uparrow d) = \overline{(a \cdot b)} + \overline{(c \cdot d)} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} = \overline{abcd} = a \uparrow b \uparrow c \uparrow d$$

$$(a \downarrow b) \cdot (c \downarrow d) = \overline{(a+b)} \cdot \overline{(c+d)} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} = \overline{a+b+c+d} = a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$$

- Una AND è uguale ad una NOR di NAND. (Duale) Una OR è uguale ad una NAND di NOR

$$(a \uparrow b) \downarrow (c \uparrow d) = abcd$$

$$(a \downarrow b) \uparrow (c \downarrow d) = a + b + c + d$$

Forma NAND di una funzione

- Una forma elementare di tipo P (somma di prodotti) si trasforma in una forma NAND a due livelli operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND, rispettando le priorità;
  - le clausole costituite da un solo letterale vengono negate
- $f = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \bar{\bar{f}} = \overline{\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{\gamma}_n} = \bar{\gamma}_1 \uparrow \bar{\gamma}_2 \uparrow \ldots \uparrow \bar{\gamma}_n$
- Dualmente per la forma di tipo S
- Nel caso in cui le γ_n sono funzioni invece che clausole:
- Una forma con operatori AND e OR a n livelli che abbia come ultimo livello una OR (AND) si trasforma in una forma NAND (NOR) ad n livelli, operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND (NOR) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano

Forma NOR di una funzione

- $f = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n) \cdot 1 = (\gamma_1 \downarrow \gamma_2 \downarrow \ldots \downarrow \gamma_n) \downarrow 0$
- Nel caso in cui le γ_n sono funzioni invece che clausole:
- Una forma con operatori AND e OR a n livelli che abbia come ultimo livello una OR (AND) si trasforma in una forma NOR (NAND) ad n+1 livelli, operando come segue:
  - si aggiunge una NOR (NAND) finale che complementa le uscite;
  - tutti gli operatori si trasformano in NOR (NAND) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano

Esempio 1

Dalla funzione a 2 livelli in forma P:

$$f = ab + \overline{a}\overline{b} + c$$

si ottiene la forma NAND

$$f = (a \uparrow b) \uparrow (\overline{a} \uparrow \overline{b}) \uparrow \overline{c}$$

ove c è negato perché singolo letterale (livello complementare 1) oppure quella NOR

$$f = ((\overline{a} \downarrow \overline{b}) \downarrow (a \downarrow b) \downarrow c) \downarrow 0$$

ove a,b sono negate in entrambe le clausole perché diventate di livello 3 e c non lo è più perché di livello 2.

Esempio 2

Dualmente dalla funzione in forma S

$$f = (a+b)\cdot(\overline{a}+\overline{b})\cdot c$$

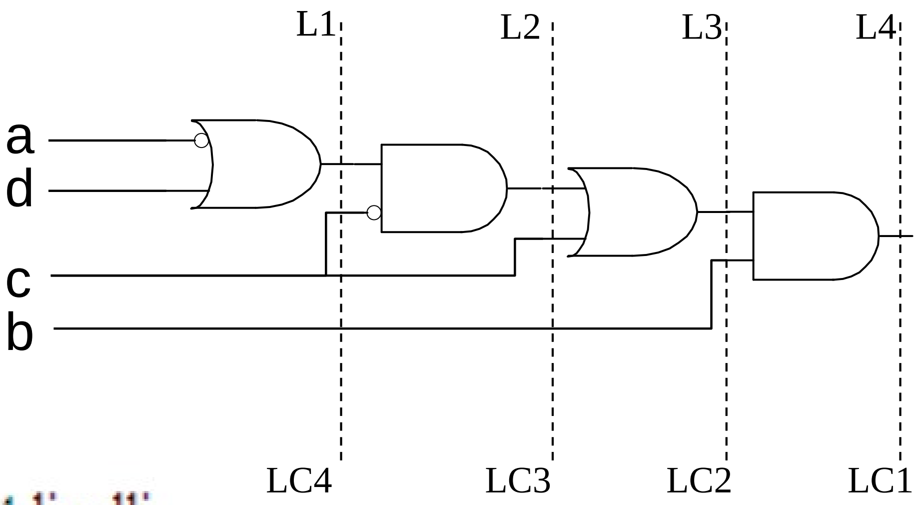
si ottiene la forma NOR

$$f = (a \downarrow b)\downarrow(\overline{a}\downarrow\overline{b})\downarrow\overline{c}$$

oppure quella NAND

$$f = ((\overline{a}\uparrow\overline{b})\uparrow(a\uparrow b)\uparrow c)\uparrow 1$$

Esempio 3



La funzione a 4 livelli

$$f = b \cdot \left(c + \bar{c} \cdot \left(\bar{a} + d\right)\right)$$

si trasforma nella forma NOR ancora a 4 livelli

$$f = \bar{b} \downarrow \left(c \downarrow \left(c \downarrow \left(\bar{a} \downarrow d\right)\right)\right)$$

dove b e $\bar{c}$ sono negate rispettivamente ai livelli complementari 1 e 3, oppure nella forma NAND a 5 livelli

$$f = \left(b \uparrow \left(\bar{c} \uparrow \left(\bar{c} \uparrow \left(a \uparrow \bar{d}\right)\right)\right)\right) \uparrow 1$$

ove $\bar{c}$ al livello 3 e $\bar{a}$,d al livello 5 sono negati.