Analisi II

Barbato Rosa

a.a. 2024-2025

Author

Alessio Romano

November 17, 2025

Contents

1 Successioni e Serie di Funzioni **3**
1.1 Successioni di funzioni 3
1.2 Serie di funzioni 4

1 Successioni e Serie di Funzioni

1.1 Successioni di funzioni

Definition 1.1 (Successione di funzioni)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Una *successione di funzioni* è un'applicazione matematica tale che:

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N} \to F_n(x)$$

Dove $f_n(x) : X \to \mathbb{R}$

Prendiamo per esempio la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$, potremmo chiederci intuitivamente che cosa succede alla successione di funzioni quando $n \to +\infty$. Per farlo fissiamo x, Si ottiene che

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ se } -1 < x < 1 \\ 1 \text{ se } x = 1 \\ +\infty \text{ se } x > 1 \\ \nexists \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$$

Abbiamo introdotto intuitivamente il concetto di **convergenza puntuale**. Definiamo ora la convergenza puntuale rigorosamente

Definition 1.2 (Convergenza puntuale)**.** Data una successione di funzioni $f_n(x)$ tale che $X \to \mathbb{R}$, tale successione *converge puntualmente* ad $f(x)$, in X se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$

Ossia

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_{\epsilon,x} : \forall n > \nu, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Insomma, stiamo dicendo che data una successione di funzioni, se per ogni $x \in X, \epsilon > 0$ esiste un certo indice della successione ν dipendente dal punto x e il valore ϵ, tale che preso un valore n della successione più grande dell'indice nu, la distanza tra la funzione limite $f(x)$ e la successione di funzioni è sempre minore di ϵ...

Definition 1.3 (Convergenza Uniforme)**.** f_n *converge uniformemente* a $f(x)$ in x se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_\epsilon : \forall n > \nu, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X$$

Dunque per convergenza uniforme si intende che dopo un certo indice ν, dipendente unicamente da ϵ, la distanza tra la successione di funzioni e la funzione limite è minore di ϵ, non più in un unico punto x_0, ma su tutto l'intervallo. Si noti che l'uniforme convergenza implica la convergenza puntuale, ma l'inverso non è sempre valido

Theorem 1.4 (Criterio di Cauchy convergenza uniforme)**.** *$f_n(x) \to f$ uniformemente in X se e solo se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_\epsilon : \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

In altre parole, una successione di funzioni converge uniformemente se e solo se il limite per $n \to \infty$ del suo estremo superiore tende a 0

Theorem 1.5 (Continuità del limite)**.** *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni. Se $f_n \to f$ uniformemente in X e f_n è continua $\Rightarrow f$ è continua in X*

Theorem 1.6 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata)**.** *Sia f_n una successione di funzione continua in [a,b], con $f_n \to f$ uniformemente in $[a, b]$ allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Theorem 1.7 (Criterio di Cauchy uniforme)**.** *$f_n \to f$ uniformemente in X se e solo se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_\epsilon : |f_n(x) - f_m(x) < \epsilon, \quad \forall m, n > \nu_\epsilon, \forall x \in X$$

Theorem 1.8. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni (derivabile con derivate continue). Se*

- $\exists x_0 \in [a,b] : f_n(x_0)$ *converge*
- $f'n$ *converge uniformemente in $[a,b]$ ad una funzione g*

Allora f_n converge uniformemente ad una funzione f con derivata continua in $[a,b]$ e

$$\lim_n f_n'(x) = f'(x) = (\lim_n f_n(x))'$$

1.2 Serie di funzioni

Definition 1.9 (Serie di funzioni)**.** Una serie di funzioni è un oggetto della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Ossia una somma infinita di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}$ definite sull'insieme A. Data la successione di **somme parziali**, $s_1, s_2, ..., s_n$:

$$s_1(x) = f_1(x)$$
$$s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$...$$
$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

Si definisce s_n come la **Serie di funzioni** associata alla successione $f_n(x)$. Se questa serie converge, convergerà ad una certa funzione $F(x)$, dove:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = F(x)$$

Procediamo definendo i due tipi di convergenza a cui una serie di funzioni può essere soggetta:

Definition 1.10 (Convergenza Puntuale)**.** Data una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ Fissato un valore numerico per $x = x_0 \in \mathbb{R}$, si viene a formare una serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$$

Se converge, la serie di partenza converge in x_0, l'insieme dei valori di x che rendono la serie convergente è detto **Insieme di convergenza**

Definition 1.11. Consideriamo una serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

Quest'ultima converge uniformemente su un insieme A, se le sue somme parziali, convergono uniformemente alla funzione limite $F(x)$, ossia:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu, \forall x \in A |s_n(x) - F(x)| > \epsilon$$