Teoremi limiti

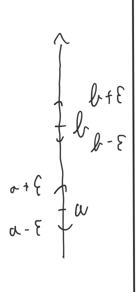
giovedì 12 ottobre 2023 17:01

Teorema (Unicità del limite).

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$ regolare (ammette limite), cioé esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Se $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sono tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$ allora $a = b$

Dim:
Considero diversi casi



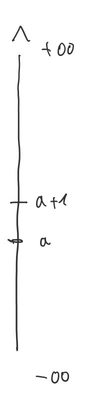
① $a, b \in \mathbb{R}$
Suppongo per assurdo che $a \neq b$, Senza perdita di generalità $a<b$
Fisso $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ $\varepsilon>0$
Per definizione di limite esiste un primo $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ $\forall n \geq N_1$
Per lo stesso motivo esiste $N_2 \in \mathbb{N}$ tale che $b-\varepsilon < a_n < b+\varepsilon$ $\forall n \geq N_2$
Pongo $N = \max\{N_1, N_2\}$ Allora $\forall n \geq N$ vale:

$a_n > b-\varepsilon$ e $a_n < a+\varepsilon$

Ma $b-\varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, $a+\varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$

quindi vale $\frac{a+b}{2} < a_n < \frac{a+b}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ASSURDO

②



Per assurdo, suppongo $a \in \mathbb{R}$ $b \in \{-\infty, +\infty\}$
Considero il caso $b = +\infty$
Per definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a-1 < a_n < a+1$ $\forall n \geq N_1$
(def di lim finito con $\varepsilon = 1$)
Per definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$ esiste $N_2 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > a+1$ $\forall n \geq N_2$
(def con $M = a+1$)

$a_n > a+1$ e $a_n < a+1$ ASSURDO

③

Suppongo per assurdo $a = -\infty$ $b = +\infty$
Per definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = a = -\infty$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < 0$ per ogni $n \geq N_1$ (def. di lim ∞ con $M = 0$)

Per definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = b = +\infty$ $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq N_2$
Quindi vale $0 < a_n < 0$ $\forall n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ ASSURDO

Teorema di permanenza del segno
Sia a_n una successione a valori in $\mathbb{R}$ regolare.
- Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ allora esiste un $N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n > 0$ $\forall n \geq N$
- Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$ allora esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n < 0$ $\forall n \geq N$

Dim: Casi $\pm\infty$
Suppongo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in (0, +\infty)$ per def. di limite finito (con scelta $\varepsilon = a$) esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:
$\underbrace{a-a}_{a-\varepsilon} < a_n < \underbrace{a+a}_{a+\varepsilon}$ $\forall n \geq N$ cioé $\boxed{0 < a_n} < 2a$ $\forall n \geq N$

Suppongo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in (-\infty, 0)$ $\varepsilon = -a > 0$
$a-(-a) < a_n < a+(-a)$
$2a < \boxed{a_n < 0}$

$a_n \to a \in \mathbb{R}$
$b_n \to b \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$

$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Corollario: Se $\{a_n\}$ é successione a valori in $\mathbb{R}$ regolare, valgono le seguenti implicazioni:
① Se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 0$ $\forall n \geq N$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$
② Se esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n \leq 0$ $\forall n \geq N$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \in (-\infty, 0] \cup \{-\infty\}$

Limiti per eccesso/difetto
Def. Una successione $\{a_n\}$ a valori in $\mathbb{R}$ si dice convergente Per ECCESSO (o da destra) a un numero reale $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $l < a_n < l+\varepsilon$ $\forall n \geq N$

si dice convergente e si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = l^+$ ($a_n \to l^+$ $n \to +\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l^+ \iff \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = l \\ a_n > l \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \text{ suff grande}$$

Si dice convergente per difetto (o da sinistra) $l-\varepsilon < a_n < l$: $\lim_{n\to+\infty} a_n = l^-$ $a_n \to l^-$
$\iff \{ a_n < l$

es
$\frac{1}{n} \to 0^+$ per $n \to +\infty$

$\frac{n-2}{n+3} \to 1^-$ $n \to +\infty$

$\log_2\left(\frac{n-2}{n+3}\right) \to 0^-$ $n \to +\infty$

Ponendo
$0^+ + 0^+ = 0^+$
$0^- + 0^- = 0^-$
$0^+ - 0^- = 0^+$
$0^- - 0^+ = 0^-$
$0^+ + a = a$
$0^- + a = a$
$0^+ \cdot 0^+ = 0^- \cdot 0^- = 0^+$
$0^+ \cdot 0^- = 0^-$
$0^+ \cdot a = 0^+$ $0^- \cdot a = 0^-$ se $a > 0$
$0^+ \cdot a = 0^-$ $0^- \cdot a = 0^+$ se $a < 0$

$\frac{a}{0^+} = +\infty$, $\frac{a}{0^-} = -\infty$ se $a > 0$

$\frac{a}{0^+} = -\infty$, $\frac{a}{0^-} = +\infty$ se $a < 0$

Con queste regole vale ancora se $a_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, 0^+, 0^-\}$
$b_n \to b$
$a_n + b_n = a+b$
$a_n - b_n = a-b$
$a_n \cdot b_n = a \cdot b$
$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Teorema (di confronto 1): Siano a_n, b_n successioni con valori in $\mathbb{R}$: $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
1) Se $a_n \to +\infty$ allora $b_n \to +\infty$
2) Se $b_n \to -\infty$ allora $a_n \to -\infty$

Teorema (del confronto 2) Siano a_n, b_n successioni con valori in $\mathbb{R}$. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ed esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$, allora b_n converge a l $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$
Oss il teorema resta vero se ipotizzo $\exists N \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dim: Sia $\varepsilon > 0$ devo trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che sia $l-\varepsilon < b_n < l+\varepsilon$, per def. di limite $a_n \to l$ esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$
per definizione $c_n \to l$ esiste $N_2 \in \mathbb{N}$ tale che $l-\varepsilon < c_n < l+\varepsilon$

per $N = \max\{N_1, N_2\}$ vale $l-\varepsilon < a_n < b_n < c_n < l+\varepsilon$

Def una successione a_n é detta infinitesima se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

es
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n}$ non esiste $\lim_{n\to+\infty} \sin(n)$ e $\lim_{n\to+\infty} \cos(n)$

Oss. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $-1 \leq \cos(n) \leq 1$
$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$ per il teorema del confronto applicato a $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

Oss: Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$
- $|a| = b \iff a = b$ oppure $a = -b$
- $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$
- $-|a| \leq a \leq |a|$

$\Rightarrow$ Se $l \in \mathbb{R}$, allora $a_n \to l$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$
$-\varepsilon < a_n - l < +\varepsilon$

Proposizione: una successione a_n a valori reali é infinitesima se $\{|a_n|\}$ é infinitesima
cioé $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

Dim ① Dimostro che $|a_n| \to 0$ implica $a_n \to 0$
Suppongo che sia $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ allora vale anche $\lim_{n\to+\infty} (-|a_n|) = 0$
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $-|a_n| \leq a_n \leq +|a_n|$ quindi per confronto $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Dim ② che $a_n \to$ implica $|a_n| \to 0$
Suppongo che sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
Sia dato $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$, cioé $|a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$
Quindi $|a_n| \to 0$

Teorema Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni a valori in $\mathbb{R}$
Se $\{a_n\}$ é infinitesima e $\{b_n\}$ é limitata, allora $\{a_n \cdot b_n\}$ é infinitesima
Dim:
Per ipotesi $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ (per il teorema precedente)
Per ipotesi esistono 2 numeri reali c e d tali che $c \leq b_n \leq d$ $\forall n \geq N$
Per ipotesi esiste $C > 0$ tale che $-C \leq b_n \leq C$

Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ ho $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n|$
$0 \leq |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq C \cdot |a_n|$
per teorema di confronto applicato a $0 \leq |a_n \cdot b_n| \leq C|a_n|$, si ha $|a_n \cdot b_n| \to 0$ per $n \to +\infty$
quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Teorema Sia $q \in \mathbb{R}$ Vale $\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} = +\infty & \text{se } q > 1 \\ = 1 & \text{se } q = 1 \\ = 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{non esiste} & q \leq -1 \end{cases}$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \in (1, +\infty)$

- Dim: per il caso $q > -1$

① Caso $q > 1$ Se $q > 1$ allora, posto $x = q-1$, si ha $x > 0$ e per disuguaglianza di Bernoulli:
$(1+x)^n \geq 1+nx$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$q^n \geq 1+n(q-1) = 1+nx$
Vale $\lim_{n\to+\infty} (1+nx) = +\infty$ poiché $x > 0$
Per confronto $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

② Caso $q = 1$ Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $q^n = 1^n = 1$, quindi $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$

③a Caso $q = 0$ Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $q^n = q^0 = 1$ quindi $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

③b Caso $-1 < q < 1$, $q \neq 0$ in questo caso $0 < |q| < 1$ cioé $\frac{1}{|q|} = \{|\frac{1}{q}|\} > 1$
Per il caso ① vale $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$
allora osservo che $\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \frac{1^n}{|q|^n} = \frac{1}{|q^n|}$
tanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|q^n|} = +\infty$ da ciò $\lim_{n\to+\infty} |q^n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

Test della radice e del rapporto
Proposizione Sia a_n una successione di numeri reali non negativi ($a_n \geq 0$)
- Suppongo se esistono $b > 1$ e $N \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a_n} \geq b$ per ogni $n \geq N$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- Se esistono un numero $0 \leq C \leq 1$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt[n]{a_n} \leq C$ per ogni $n \geq N$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

(Idea della dimostrazione)
- $\sqrt[n]{a_n} \geq \overset{\to\, b>1}{b} \Rightarrow a_n \geq b^n \to +\infty$
- $0 \leq a_n \leq C \Rightarrow 0 \leq a_n \leq C^n \longrightarrow 0$
$(0 \leq C \leq 1)$

Se ho una successione di numeri $\mathbb{R}$ strettamente positivi ($a_n > 0$)
Se esistono $b > 1$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b$
Se esistono $0 \leq a_n \leq C$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq C$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b \Rightarrow a_{n+1} \geq b \cdot a_n$

In particolare $a_{N+1} \geq b \cdot a_N$
$a_{N+2} \geq b \cdot a_{N+2} \geq b^2 \cdot a_N$
$a_{N+3} \geq b \cdot a_{+2} \geq b^3 a_N$

Per induzione per ogni $K \in \mathbb{N}$ vale che $a_{N+K} \geq b^K \cdot a_N$
Rinominando $n = N+K$, $a_n \geq b^{n-N} \cdot a_N$
Cioé $a_n \geq \frac{a_N}{b^N} \cdot b^n$ $\forall n \geq N+1$

$a_n \geq \frac{a_N}{b_N} \cdot b^n$
$\searrow > 0$

$\sqrt[n]{a_n} \geq \sqrt{\frac{a_N}{b_N}} \cdot b$

Teorema (Test della radice)
Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi
- Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$ allora la successione $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0, 1)$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- Se $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ Nessuna soluzione

Teorema test del rapporto
Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (-\infty, 1) \cup \{-\infty\}$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Gerarchia degli Infiniti
Dati $b, c \in \mathbb{R}$ con $b > 1$ $c > 0$ vale
$\lim_{n\to+\infty} \log_b n = \lim_{n\to+\infty} n^c = \lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$

$\log_{\frac{1}{b}} n = -\log_b n \to +\infty$ se $b > 1$

e inoltre
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^c} = 0^+$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{b^n} = 0^+$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{\log_b n} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^c} = +\infty$

+ in generale se $b > 1$ $c > 0$ $a_n \to +\infty$
$\frac{(a_n)^c}{\log_b a_n} \to +\infty$ $\frac{b^{a_n}}{(a_n)^c} \to +\infty$ reciproci $\to 0$