Alcuni limiti notevoli di successioni

Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione di numeri reali tale che $\varepsilon_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0\,.$$

Allora valgono le seguenti relazioni:

Limiti notevoli con logaritmi ed esponenziali

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+\varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} = e$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon_n)^a-1}{\varepsilon_n} = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$

  $\displaystyle\Big($da cui: $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{3}\,, \quad \ldots\Big)$

Più in generale:

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+a\varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} = e^a \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\log b} \qquad \forall\, b>0,\ b\neq 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \log b \qquad \forall\, b>0$

Limiti notevoli con funzioni goniometriche

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\arcsin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\varepsilon_n}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{1}{2}$

Limiti notevoli con funzioni iperboliche

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sinh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\tanh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cosh\varepsilon_n-1}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{1}{2}$