

UNICITÀ DEL LIMITE

Se la successione $a_n \rightarrow a$ allora tale successione è unica

Se a_n è regolare allora $\exists \epsilon \in a_n$

DIM P.A

Porto le successioni $a_m \rightarrow a$ e $b_m \rightarrow b$ con $a \neq b$ potremmo dire che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists V_1 : |a_m - a| < \epsilon \quad \forall m > V_1$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists V_2 : |b_m - b| < \epsilon \quad \forall m > V_2$$

Porto $V = \max \{V_1, V_2\}$ $\forall m > V$:

$$|a - b| \leq |a_m - a| + |a_m - b| < 2\epsilon$$

Porto $\epsilon' = \frac{|a - b|}{2}$ ottenendo $|a - b| < |a - b|$

PERMANENZA DEL SEGNO

Se la successione $a_n \rightarrow a > 0$ allora anche $a_n > 0$

DIM

$$\forall \epsilon > 0 \exists V : |a_m - a| < \epsilon \quad \forall m > V$$

$$|a_m - a| < \epsilon = a - \epsilon < a < a + \epsilon$$

Porto $\epsilon = \frac{a}{2}$ ottengo:

$$\frac{a}{2} < a_m < \frac{3}{2}a \quad \text{per cui } a_m > \frac{a}{2} > 0$$

da qui 2 corollari

corollario 1 | Se la successione $a_n \rightarrow a$ e $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora anche $a > 0$

corollario 2 | Se $a_n \rightarrow a$ e $b_m \rightarrow b$ con $a_n > b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$ allora anche $a_n > b_m$



TEOREMA DEI CARABINIERI

Se $a_n \rightarrow a$ e $b_m \rightarrow a$ allora $\exists c_m : a_n \leq c_m \leq b_m$

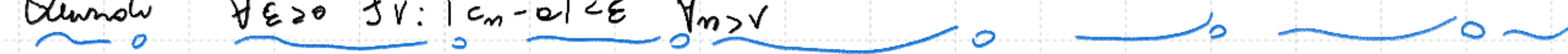
DIM

$$\forall \epsilon > 0 \exists V_1 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > V_1$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists V_2 : |b_m - a| < \epsilon \quad \forall m > V_2$$

Porto $V = \max \{V_1, V_2\}$ associato a quello che se dell' enunciato altro: $a - \epsilon < a_n \leq c_m \leq b_m < a + \epsilon$

Quindi $\forall \epsilon > 0 \exists V : |c_m - a| < \epsilon \quad \forall m > V$



TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTONE

- ① Se a_n è monotona $\Rightarrow a_n$ è regolare
- ② Se a_n è monotona limitata $\Rightarrow a_n$ è convergente

DIM

① Sia a_n crescente per cui $\forall n > v \quad a_n \geq a_v$
 a_n non è limitata $\Rightarrow \forall M > 0 \exists V: a_V > M$ per cui
 $a_M \geq a_V > M \Rightarrow a_n > M \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$

② Sia a_n crescente per cui $\forall n > v \quad a_n \geq a_v$
 a_n è limitata $\Rightarrow \exists l = \sup a_n$ per cui $l - \varepsilon < a_m$ quindi:
 $l - \varepsilon < a_m \leq l < l + \varepsilon$ quindi:

$$|a_m - l| < \varepsilon$$



TEOREMA DI COUCHY

Se la successione è di Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists V: |a_h - a_k| < \varepsilon \quad \forall h, k > V$

PROPOSIZIONE

Se a_n è convergente \Rightarrow è di Cauchy

DIM

$\forall \varepsilon > 0 \exists V: |a_m - a_l| < \varepsilon \quad \forall m > V, \forall h, k > V$ ovvero che:

$\forall \varepsilon > 0 \exists V: |a_k - a_h| < \varepsilon \quad \forall h, k > V$

$$|a_k - a_h| \leq |a_k - a_l| + |a_l - a_h| < \varepsilon$$

LEMMA 1

Se a_n è di Cauchy a_n è limitata

DIM

$\forall \varepsilon > 0 \exists V: |a_k - a_l| < \varepsilon \quad \forall h, k > V$ per cui

$a_h - \varepsilon < a_k < a_h + \varepsilon$ posto $\varepsilon = 1$ posso dire che

$$A = \min \{a_1, a_2, \dots, a_{V+1}\} \quad e \quad B = \max \{a_1, a_2, \dots, a_{V+1}\} \quad \text{quindi}$$

$$A < a_n < B$$

LEMMA 2

Se a_m è di Cauchy ed esiste $a_{m_K} \rightarrow l$ allora $a_m \rightarrow l$

Dim

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: |a_n - a_N| < \varepsilon \quad \forall n, N > N$

Sia $K_0 > N: |a_{m_K} - l| < \varepsilon \quad \forall K > K_0$

$m_K \geq K_0 > K \Rightarrow |a_m - l| \leq |a_m - a_{m_{K_0}}| + |a_{m_{K_0}} - l| < 2\varepsilon$

TEOREMA PONTE

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall x_m \rightarrow x_0 \quad \forall x \in A - \{x_0\} \Rightarrow f(x_m) \rightarrow l$

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A - \{x_0\}: |x - x_0| < \delta$

Dim

2 \Rightarrow 1 | Sia $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \quad \forall n > N$ Per sufficcia per ipotesi che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$

1 \Rightarrow 2 P.A. $\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0: |f(x) - l| \geq \varepsilon_0 \quad \exists x \in A - \{x_0\}: |x - x_0| < \delta$

Sia $\delta = \frac{1}{m}$ e sia $x_m = x(\delta)$ vale a dire che:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$x_0 - \frac{1}{m} < x < x_0 + \frac{1}{m}$$

$$x_0 - \frac{1}{m} < x < x_0 + \frac{1}{m}$$

$x_n \rightarrow x_0 \not\Rightarrow f(x) \rightarrow l$

ESISTENZA DEGLI ZERI

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ed è continua: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ allora

$\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = 0$

DIM BISEZIONE

Sia $c = \frac{a+b}{2}$ e $f(c) = 0$ mi fermo se $f(c) \neq 0$ continuo in questo nuovo intervallo definito

$$\begin{cases} f(c) > 0 & a_1 = a & b_1 = c \\ f(c) < 0 & a_1 = c & b_1 = b \end{cases}$$

RIPETO N-VOLTE OTTENGO a_m, b_m, c_m da cui:

$$\frac{b_m - a_m}{2} \Rightarrow \frac{b-a}{2^n} = b_m = a_m + \frac{b-a}{2^n}$$

osservo che è limitata e monotona crescente quindi ammette limite in x_0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} f(a_m) \leq 0 \\ \parallel \\ f(x_0) \text{ poiché continua} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_m) \geq 0 \\ \parallel \\ f(x_0) \end{array} \right\} f(x_0) = 0$$



1° TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$f(x)$ continua in $[a, b]$ allora $f(x)$ assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$, suppose $f(a) \leq f(b)$ $\forall y_0 \in [f(a), f(b)] \exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = y_0$

DIM | funzione auxiliarie

$$g(x) = f(x) - y_0$$

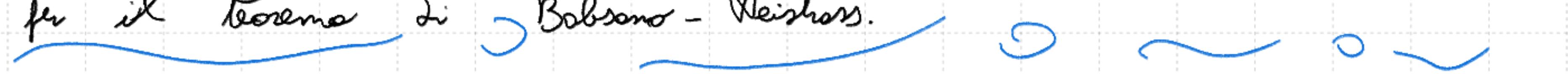
$$g(a) = f(a) - y_0 \leq 0 \quad \left\{ \exists x_0: g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0 \right.$$

$$g(b) = f(b) - y_0 \geq 0$$



2° TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

f continua in $[a, b]$ assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$ per il teorema di \circlearrowleft Bolzano-Weierstrass.



TEOREMA DI WEIERSTRASS

Una funzione continua ammette sempre massimo e minimo

DIM | analogo per l'inf

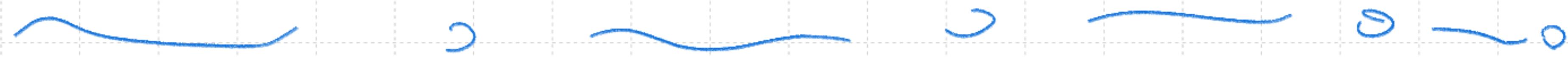
$$M = \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

$$f(x_n) \rightarrow M$$

x_m è limitata $\Rightarrow \exists x_{m_k} \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_{m_k}) \rightarrow f(x_0)$

$$M = \lim f(x_m) = \lim f(x_{m_k}) = f(x_0)$$



TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se x_0 è un max o un minimo relativo di f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$

DIM

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta$$

$$f(x_0) \geq f(x+h) \quad \forall h : |h| < \delta$$

$$\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{g(x)} = \begin{cases} \leq 0 & x \text{ o } h < 0 \\ \geq 0 & x \text{ o } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} g(h) \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) \geq 0 \quad \parallel f'(x_0) = 0$$

TEOREMA DI ROLLE

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$ allora $\exists x_0 : f'(x_0) = 0$

① Siano x_1 e x_2 punti interni rispettivamente max e min in $[a, b]$ quindi:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$$

Se $x_1, x_2 \in [a, b]$ allora $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

② Siano $x_1 = a$ e $x_2 = b$ quindi

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$$

$f(a) = f(b)$ allora $f(a) = f(x)$ la funzione è costante in $[a, b]$ dunque

$$\underbrace{f'(x)}_{=0} = 0$$

TEOREMA DI LAGRANGE

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, derivabile in (a, b) allora $\exists x_0 \in [a, b]: f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

DIM

Consideriamo la funzione auxiliare

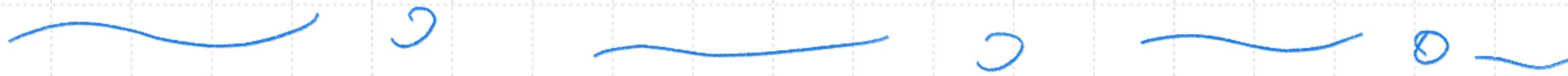
$$g(x) = f(x) - \left[f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$

se $x = a \Rightarrow g(a) = 0$

se $x = b \Rightarrow g(b) = 0$

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \stackrel{\text{nolle}}{=} 0 \quad \text{quindi}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



CRITERIO DI MONOTONIA

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b) allora

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f \text{ è crescente}$$

\Rightarrow | DIM

Siano $x_1 < x_2$ per il teorema di Lagrange so:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0) (x_2 - x_1) \geq 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

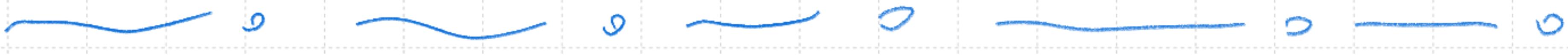
\Leftarrow | DIM

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ poiché è crescente $x+h > x$ quindi anche $f(x+h) > f(x)$
quindi il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad f'(x) \geq 0$



1° TEOREMA DELLA MEDIA || LEMMA 1

f limitata e integrabile in $[a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \sum_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

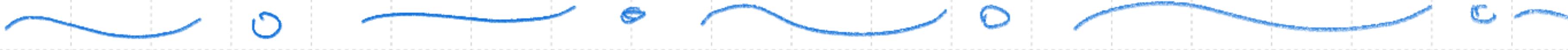


2° TEOREMA DELLA MEDIA

Se $f(x)$ continua in $[a, b]$ allora $\exists x_0 \in [a, b]: \sum_a^b f(x) dx = f(x_0)(b-a)$

$m \leq \frac{\sum_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M \quad$ Sia $y = \frac{\sum_a^b f(x) dx}{b-a} \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = y$ per il secondo teorema del valore intermedio

$$f(x_0)(b-a) = \sum_a^b f(x) dx$$



TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$$F'(x) = f(x)$$

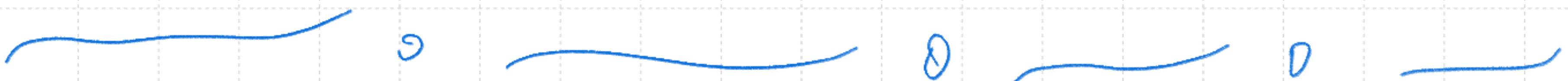
DIM

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\sum_a^{x+h} f(t) dt - \sum_a^x f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\cancel{\sum_a^x f(t) dt} + \sum_x^{x+h} f(t) dt - \cancel{\sum_a^x f(t) dt} \right] \\ &= \frac{1}{h} \sum_x^{x+h} f(t) dt = f(x(h)) \end{aligned}$$

dal secondo teorema delle medie

$$\exists x(h) : x \leq x(h) \leq x+h \text{ poiché continua} \quad \lim_{h \rightarrow 0} x(h) = x \text{ quindi}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x(h)) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$



CRITERIO DEL CONFRONTO

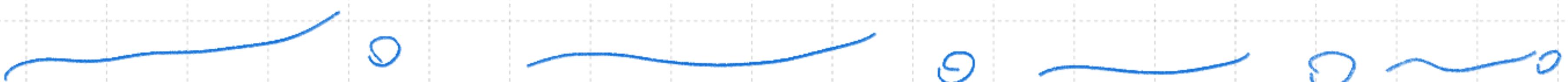
Siano a_m e b_m due successioni di cui $0 \leq a_m \leq b_m$ tale che per ognuna vale:

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^m b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^m a_k < +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=1}^m a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^m b_k = +\infty$$

Inoltre poniamo con s_m e t_m le somme parziali rispettivamente di a_k e b_k per ipotesi $a_k \leq b_k \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow s_m \leq t_m$ poiché le somme parziali sono a termini non negativi avremo:

- $\textcircled{1}$ Se t_m ha limite finito allora anche s_m avrà limite finito
- $\textcircled{2}$ Se $s_m = +\infty$ allora anche t_m diverge



CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

Sia a_n una successione a termini non negativi. Supponiamo che fissato un numero reale P , esiste il suo limite

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^P a_n$$

Si ha:

$$\textcircled{1} \quad l \neq +\infty, P > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^m a_k < +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad l \neq 0, P < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^m a_k = +\infty$$

DIM

① Per definizione di limite di successione $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$:

$$\forall n > N \quad a_n < l + \varepsilon$$

Per tali n risulta $0 < a_n < \frac{l+1}{m^p}$ applicando il teorema del confronto consideriamo $b_m = (l+1)/m^p$ dato che $p > 1$ la serie generalissima converge quindi anche la serie di termine generale a_n .

② $l \neq 0$, $\forall \varepsilon = |l|/2$, $\exists N > 0$:

$$\forall n > N \quad a_n > l - \varepsilon$$

Ma allora assumo $a_n > \frac{1}{2n^p}$ considero il teorema del confronto con $b_m = \frac{1}{2m^p}$ siccome $p > 1$ la serie generalissima diverge quindi anche la serie generale diverge.



CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia a_n una successione di termini positivi, supponiamo:

$$\exists l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Allora si ha:

$$\textcircled{1} \quad \text{Se } l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k < +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Se } l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$$

DIM

① Se $l < 1$ scegiamo un numero $x: l < x < 1$ per definizione di successione $\forall \varepsilon > 0: \varepsilon = x - l$ $\exists N > 0$ per cui:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - l < x - l \quad \forall n > N$$

Punto $N = 1$ $a_n < a_1 x^{n-1}$ con il criterio del confronto utilizzando $b_m = a_1 x^{m-1}$ poiché $0 < x < 1$ b_m converge quindi anche a_n .

② $\exists l > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

a_n è strettamente crescente per $n > N$ converge a ∞ ma non essendo soddisfatta la condizione necessaria la serie diverge necessariamente.



CRITERIO DELLA RADICE

Sia a_n una successione a termini non negativi per cui:

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora:

$$\textcircled{1} \text{ se } l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k < +\infty$$

$$\textcircled{2} \text{ se } l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$$

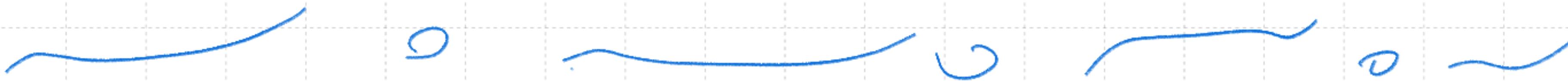
DIM

\textcircled{1} se $l < 1 \quad \forall \varepsilon > 0$ vale che $l + \varepsilon < 1 \quad \exists N > 0$:

$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \Rightarrow a_n < (l + \varepsilon)^n$ per il teorema di confronto ponendo

$b_m = (l + \varepsilon)^m$ converge quindi anche a_m converge

\textcircled{2} se $l \geq 1 \quad \exists N: \sqrt[n]{a_n} > 1$ cioè $a_n > 1 \quad \forall n > N$ poiché a_n è infinitesima la serie diverge.



CONVERGENZA ASSOLUTA

Una serie $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ si dice assolutamente convergente se risulta la convergenza dei suoi valori assoluti $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

TEOREMA CONVERGENZA ASSOLUTA

Una serie assolutamente convergente è convergente

DIM

Per ipotesi la serie è convergente con i moduli in base al criterio di Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0:$

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Per la diseguaglianza triangolare avremo:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

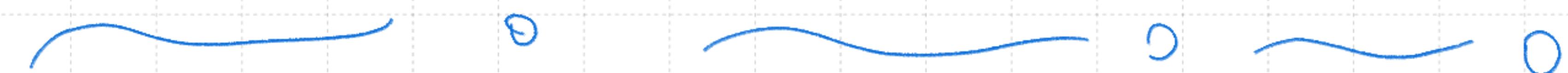
di conseguenza per il criterio di Cauchy è convergente.



DEFINIZIONE DI SERIE

Considero una successione a_n e posto $s_n = a_1 + \dots + a_n$ che è la somma

finale. Chiameremo serie di termine a_n $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

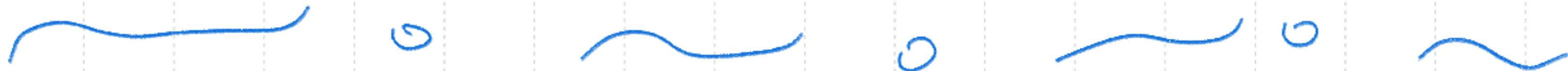


SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

x si dice radice della serie geometrica

- ① se $x > 1 \Rightarrow$ diverge
- ② $-1 < x < 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1-x}$ converge
- ③ se $x \leq -1 \Rightarrow$ indeterminato



CRITERIO DI RIEMANN

Una funzione limitata in $[a, b]$ è integrale secondo Riemann se e solo se,

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ una partizione P in $[a, b]$:

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

DIM

\Rightarrow | Se f è integrale secondo Riemann in $[a, b]$ allora $s(f) = S(f)$ in base alla definizione di \sup e \inf , $\forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ di $[a, b]$:

$$S(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P) \quad \text{e} \quad S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(Q)$$

Posto $R = P \cup Q$ si deduce che:

$$S(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(R) \leq S(R) \leq S(Q) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

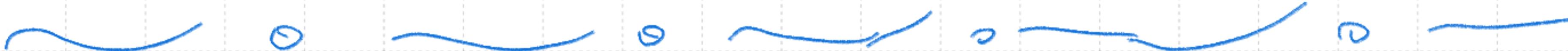
da cui essendo $s(f) = S(f)$:

$$S(R) - s(R) < [S(f) + \frac{\varepsilon}{2}] - [S(f) - \frac{\varepsilon}{2}] = \varepsilon$$

\Leftarrow | Viceversa se vale che $S(P) - s(P) < \varepsilon$, essendo $s(P) \leq s(f) \leq S(f) \leq S(P)$ ottieniamo:

$$0 \leq S(f) - s(f) \leq S(P) - s(P) < \varepsilon$$

Dato che il numero $S(f) - s(f)$ non dipende da ε , questa relazione vale se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ solo nel caso in cui $S(f) - s(f) = 0$ e quindi f è integrale secondo Riemann in $[a, b]$.



RESTO DI PEANO

Sia:

$$P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$P^{(k)}(x) = k! a_k \Rightarrow a_k = \frac{P^{(k)}(x)}{k!}$$

$$P^{(k)}(x_0) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Supponiamo adesso:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_m(x)}{(x-x_0)^m} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - R_m(x)}{(x-x_0)^m} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m]}{(x-x_0)^m}$$

Dobbiamo $m-1$ volte:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{m!} [f^{(m)}(x_0) - f^{(m)}(x)] = 0$$

In base alla definizione di \circ piccolo $R_m(x) = o((x-x_0)^m)$ per $x \rightarrow x_0$ dove $R_m(x) \rightarrow 0$

\circ

\circ

\circ

RESTO DI LAGRANGE

Se f è derivabile $n+1$ volte in $[a, b]$ con derivate $f^{(n+1)}$,

$\forall x \in [a, b], \exists x_i: x < x_i < x_0$:

$$R_m = \frac{f^{(K+1)}(x_1)}{(K+1)!} (x-x_0)^{K+1}$$

DIM

$$R_m(x) = f(x) + P_{m, x_0}(x)$$

⋮

⋮

$$R_m(x) = f(x) + P_{m, x_0}(x)$$

$$g(x) = (K+1)!$$

⋮

⋮

$$g(x) = K+1(x-x_0)$$

Valutiamo adesso in x_0 :

$$R_m(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = K+1$$

Ora il Teorema di Cauchy possiamo dire che: $\exists x_1 \in [x_0, x]$:

$$\frac{R_m(x)}{g(x)} = \frac{R_m(x) - R_m(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$\frac{R_m(x_{m+1})}{g^{(m+1)}(x_{m+1})} = \frac{f^{(m+1)}(x_{m+1}) - P^{(m+1)}(x_{m+1})}{(m+1)!}$$

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_1)}{(m+1)!} (x-x_0)^{m+1}$$