Assioma di completezza

Dati due insiemi A e B non vuoti di numeri reali, per cui vale la seguente proprietà:

$$a \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

Allora esisterà un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque sia $a \in A$ e $b \in B$.

Due insiemi che soddisfano ($a \leq b$) si dicono separati, mentre gli insiemi che hanno un unico elemento di separazione si dicono contigui.

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ non soddisfa questo assioma

Conseguenza dell'assioma di completezza

Conseguenza dell'assioma di completezza è il teorema dell'esistenza dell'estremo superiore (inferiore): dato un insieme A non vuoto, limitato superiormente (inferiormente). Esiste il minimo (massimo) dell'insieme dei maggioranti (dei minoranti).

DIMOSTRAZIONE

Sia B l'insieme dei maggioranti di A, $B \neq \emptyset$ siccome A e limitato superiormente. Per l'assioma di completezza esiste un $M \in \mathbb{R}$:

$$a \leq M \leq b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

M e quindi maggioranti di A ed e' il minimo di B. Similmente si dimostra per A limitato inferiormente.

DEFINIZIONE

Sia A un insieme limitato superiormente. Diremo che $\bar{M} \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A se esso è un maggiorante di A e il minimo dell'insieme dei maggioranti B:

$$\bar{M} = \sup A \iff \begin{cases} \bar{M} \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : \bar{M} - \varepsilon < a \end{cases}$$

Equivalentemente $\bar{m}$ è l'estremo inferiore di A se esso è un minorante di A e massimo dell'insieme dei minoranti B:

$$\bar{m} = \inf A \iff \begin{cases} \bar{m} \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : \bar{m} + \varepsilon > a \end{cases}$$

Per gli insiemi non limitati diremo $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$

Principio di induzione

Supponiamo di avere una proposizione P_n, dipendende da un indice $n \in \mathbb{N}$. Supposta vera per $n = 1$ e supposto che sia vera per n, se è vera anche per $n+1$, allora la proposizione è vera.

ESEMPIO

dimostra la formula della somme dei primi n numeri naturali:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

① Per $n = 1$, $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ è vera;

② Supposto ver per n, verifichiamo per $n+1$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Disuguaglianza Triangole (P2S6)

Per ogni coppia di valori reali x_1 e x_2 vale la seguente disequazione:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$$

DIMOSTRAZIONE

$\forall x \in \mathbb{R}$ vale che $|x| \leq |x|$. Assumiamo $|x| = r$ avremo che:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

ma quindi :

$$-|x_1| \leq x_1 \leq |x_1| \quad e \quad -|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|$$

sommando membro a membro avremo :

$$-(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq |x_1| + |x_2|$$

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$$

Estremi di una funzione

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ si dice crescente se, $\forall x_1$ e $x_2 \in X$ vale che:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

la funzione si dice strettamente crescente se :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Una funzione si dice decrescente se :

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Si dice invece strettamente decrescente se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Una funzione di dice monotona se è crescente o decrescente, mentre si dice strettamente monotona se è strettamente crescente o decrescente.

Funzione Iniettiva, Suriettiva e Biettiva

Una funzione si dice iniettiva quando elementi distinti hanno immagini distinte:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Una funzione si dice surriettiva se a ogni elemento di $y \in Y$ corrisponde un elemento di $x \in X$:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$$

Una funzione si dice biettiva se è sia iniettiva che surrietti-va:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X : y = f(x)$$

Estremo superiore e estremo inferiore

L'estremo superiore del codominio di una funzione si indica con $\sup f = M$:

1. $f(x) \leq M \quad \forall x \in X$ (X e' il dominio)
2. $\forall \varepsilon > 0 , \exists \bar{x} \in X : f(\bar{x}) > \bar{M} - \varepsilon$

L'estremo inferiore // // // // // si indica con $\inf f = m$:

① $f(x) \geq m \quad \forall x \in X$

② $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in X : f(\bar{x}) < m + \varepsilon$

Se la funzione non e' limitata superiormente (o inferiormente), qualunque sia il numero reale K, $\exists$ almeno un punto $x_K \in X$:

$$f(x_K) > K \quad o \quad f(x_K) < K$$

L'estremo sup f e inf f saranno rispettivamente $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$.

Programma analisi

- **Teoremi prima delle successioni**
  - assioma di completezza
  - $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di completezza
  - conseguenze assioma di completezza
  - principio di induzione
  - estremi di una funzione

- **Successioni** 2
  - definizione limite di una successione
    - regolare
      - convergente
      - divergente
    - irregolari
  - unicità del limite
  - Successione convergente $\Rightarrow$ limitata
  - Teoremi del confronto
    - Permanenza del segno
      - I corollario
      - II corollario
    - Teorema carabinieri
    - Criteri convergenza a zero
    - Teorema prodotto (limitata × infinitesima)
  - Successioni monotone
    - Teorema regolarità sulle succ. monotone
  - successioni estratte
    - lemma sulle successioni estratte
    - criterio regolarità delle estratte
    - Bolzano - Weierstrass
  - Successioni di Cauchy
    - La convergenza implica Cauchy
    - Lemma I e II
    - Criteri di Cauchy per le successioni

Successioni

Definizione di successione

Una successione e' una legge che associa ad un numero naturale n, un solo e unico numero reale a_n. Ricordando la definizione di funzione, una successione e' una funzione da $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Indichiamo la successione con (a_n), o nella forma estesa $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Successione convergente

Un numero reale a e' il limite della successione a_n, e si scrive:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \ \forall n > \nu$$

(oppure $|a_n - a| < \varepsilon$)

Successione divergente

Il limite di una successione a_n e' uguale a $+\infty$ (oppure $-\infty$), si dice anche che a_n diverge a $+\infty$ (o $-\infty$) e si scrive:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \ (o \ -\infty)$$

se, nel caso diverge a $+\infty$:

$$\forall M > 0, \exists \nu : a_n > M \quad \forall n > \nu$$

se, nel caso diverge a $-\infty$:

$$\forall M > 0, \exists \nu : a_n < -M \quad \forall n > \nu$$

Nel caso di funzioni che convergono o divergono, parliamo di successioni regolari. Tutte le altre che non ammettono limite sono succ. irregolari. Le successioni che convergono a 0 sono dette infinitesime, mentre tutte quelle che divergono sono dette infinite.

Unicità del limite

Una successione convergente non può avere due limiti distinti.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>: Supponiamo per assurdo che a_n ammette due limiti distinti, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$ con $a \neq b$. Assumiamo $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$.

Per definizione:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_1 \qquad e \qquad \forall \varepsilon>0 : \exists \nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_2$$

Considerando $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, le due relazioni scritte sopra valgono contemporaneamente, quindi con la disuguaglianza triangolare possiamo dire che:

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a-a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|$$

siamo arrivati ad un assurdo, infatti $|a-b| < |a-b|$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = \text{NON ESISTE}}$$

Successione Limitata e Teorema

Una successione a_n si dice limitata se esiste un $M>0$:

$$|a_n| \leq M \quad \text{(o equivalentemente)} \quad -M \leq a_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una successione limitata non sempre ammette limite (o converge), mentre una successione che converge è sempre limitata.

TEOREMA : una successione convergente e' limitata.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo una successione a_n convergente in a, e scegliamo $\varepsilon = 1$. Per definizione $|a_n - a| < 1 \quad \forall n > \nu$ Tramite la disuguglianza Triangolare, dimostriamo che:

$$|a_n| = ||a_n - a| + |a|| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \forall n > \nu$$

Possiamo quindi dire che, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_m| \leq M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, 1 + |a|\}$$

Teorema della permanenza del segno

Se una successione $a_n \to a > 0$ allora esisterà un ν per cui avremo che $a_n > 0 \quad \forall n > \nu$.

DIMOSTRAZIONE

dato che $a > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Per definizione abbiamo $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{a}{2}$:

$$-\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2} \quad \to \quad a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

Da questo Teorema ricaviamo due corollari :

COROLLARIO 1 :

se la successione a_n converge in a, e $a_n \geq 0$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE:

se considero $a < 0$, allora per il Teorema della permanenza del segno, applicato alla successione $-a_n$ comporterebbe che $a_n < 0$ per un n grande.

COROLLARIO 2:

se il $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ e $\lim_{n \to +\infty} b_n = b$, e $a_n \geq b_n$ per ogni n, allora $a \geq b$.

DIMOSTRAZIONE:

basta applicare il Teorema della permanenza del segno alla successione $(a_n - b_n)$.

Teorema dei carabinieri

Date le successioni a_n, b_n e c_n Tali che $a_n \leq c_n \leq b_n$, se il

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = a$ allora c_n e' convergente e il $\lim_{n \to +\infty} c_n = a$.

DIMOSTRAZIONE:

Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_1 \quad e \quad \exists \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_2$$

Per il valore assoluto possiamo scrivere:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad e \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

Se, $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ posso scrivere:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b < a + \varepsilon \quad \rightarrow \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$$

possiamo quindi dire che $|c_n - a| < \varepsilon$ e dimostriamo il teorema.

Tale teorema è applicabile per successioni divergenti:

se $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

se $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

DIMOSTRAZIONE:

Per ipotesi, possiamo dire che $\forall M > 0, \exists \nu : a_n > M \quad \forall n > \nu$, ma:

$$b_n \geq a_n > M$$

di conseguenza anche $b_n > M$ e divergente. (analogamente si dimostra con meno infinito)

Criterio di convergenza a 0

a_n converge a 0 se e soltanto se $|a_n|$ converge a 0.

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo $b_n = |a_n|$, per definizione, se b_n converge a 0 allora:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |b_n| < \varepsilon \quad \forall n > \nu \qquad (*)$$

ma $|b_n| = ||a_n|| = |a_n|$ e quindi l'equazione è equivalente alla convergenza a 0 di a_n.

Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Sia a_n una successione limitata e b_n una successione convergente a 0, allora il limite di $a_n \cdot b_n$ converge a 0.

DIMOSTRAZIONE METODO 1:

Per ipotesi: $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|$

Possiamo scrivere l'equazione come:

$$-M \cdot |b_n| < a_n \cdot b_n < M \cdot |b_n|$$

Siccome $b_n \to 0$ per la proposizione (sugli infinitesimi) anche $|b_n| \to 0$ e per il teoreme dei carabinieri, dato che $-M \cdot |b_n|$ e $M \cdot |b_n|$ sono uguali a 0 di conseguenzo lo e' anche $a_n \cdot b_n$.

DIMOSTRAZIONE METODO 2: ← slide radice

Per la definizione di limite: $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |b_n| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$. Per ipotesi:

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| < M \cdot \varepsilon$$

cio' equivale al fatto che la successione $a_n \cdot b_n$ converge a 0.

Successioni monotone

Una successione a_n si definisce monotona se si verifica una delle seguenti condizioni:

① strettamente crescente: $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

② crescente: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

③ strettamente decrescente: $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

④ decrescente: $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a_n si definisce strettamente monotona se si verifica o la ① o la ③.

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora la successione è costante. Una successione costante è sia crescente che decrescente.

Teorema delle successioni monotone

Ogni successione monotóna ammette limite, in particolare, se una successione è monotóna e limitata allora ammette limite finito.

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo una successione a_n crescente e limitata. Posto $\ell = \sup_n a_n$ e $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\ell - \varepsilon < a_\nu$$

Per ogni $n > \nu$ risulta che:

$$\ell - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$$

da cui otteniamo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$

Consideriamo ora una successione a_n crescente, non limitata superiormente. Fissato un $M > 0$, esiste un $\nu \in \mathbb{N}$: $a_\nu > M$, ma dato che a_n è crescente:

$$a_n \geq a_\nu > M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Cio' vale anche per le successioni decrescenti. In base alla definizione di successioni, il Teorema afferma che ogni successione monotona è regolare.

Criterio del rapporto per le successioni

Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo $b_n = a_{n+1}/a_n$. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora la successione a_n tende a 0.

DIMOSTRAZIONE

- Per il Teorema della permanenza del segno applicato alla successione $(1 - b_n)$, esiste un ν per cui $b_n < 1$ per ogni $n > \nu$.
- Quindi $a_{n+1}/a_n < 1$, cioè $a_{n+1} < a_n$, per ogni $n > \nu$.
- Il Teorema delle successioni monotone assicura l'esistenza del limite a, che è un numero reale non negativo, dato che la successione è decrescente.
- Supponendo per assurdo $a \neq 0$ e passando al limite di $n \to +\infty$ per la relazione $b_n = a_{n+1}/a_n$, allora $b = a/a = 1$ in contrasto con l'ipotesi $a < 1$.
- Pertanto $a = 0$.

Successioni estratte e il Teorema di Bolzano - Weierstrass

Sia a_n una successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente cresente di numeri naturali. La successione a_{n_k} si dice successione estratta da a_n di indici n_k.

LEMMA

Per ogni successione n_k strettamente crescente di numeri naturali, vale che:

$$n_K \geq K \quad \forall K \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRAZIONE

Per $K=1$ si ha ovviamente che $n_1 \geq 1$. Supponiamo che $n_K \geq K$ sia vera, dimostriamolo per $n_{K+1} \geq K+1$. Per ipotesi $n_{K+1} > n_K \geq K$ allora $n_{K+1} > K$ e perciò $n_{K+1} \geq K+1$.

PROPOSIZIONE

Se a_n converge ad a, allora ogni estratta a_{n_K} converge a a.

DIMOSTRAZIONE

Fissato un $\varepsilon > 0$ esiste un K_0 tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > K_0$. Se $K > K_0$, essendo $n_K \geq K$ per il lemma precedente, allora si ha che $n_K > K_0$ e quindi $|a_{n_K} - a| < \varepsilon$.

Abbiamo dimostrato che ogni successione estratta da una successione convergente in a converge in a, ma non è detto che se converge un'estratta allora converge anche la sua successione di partenza. Sussiste tuttavia il seguente Teorema:

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione limitata, esisterà almeno una sua successione estratta convergente.

Successioni di Cauchy

Sia a_n una successione di numeri reali. Si dice che a_n è una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ν tale che per ogni $h, K > \nu$ vale:

$$|a_k - a_h| < \varepsilon$$

PROPOSIZIONE

Una successione convergente e' di Cauchy

DIMOSTRAZIONE

Se a_n converge allora, $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > \nu$. Dalla disuguaglianza Triangolare segue allora che per ogni $h, k > \nu$:

$$|a_k - a_h| \leq |a_k - a| + \overbrace{|a - a_h|}^{=|a_h - a|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Per dimostrare che viceversa una successione di Cauchy è convergente dobbiamo introdurre due lemmi.

LEMMA 1

Una successione di Cauchy è limitata

DIMOSTRAZIONE

Sia $\varepsilon = 1$. Per ipotesi $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|a_k - a_h| < \varepsilon \qquad \forall h, k > \nu$$

Poniamo l'indice $h_0 > \nu$. Per le proprietà del valore assoluto:

$$a_{h_0} - 1 < a_k < a_{h_0} + 1 \qquad \forall h_0, k > \nu$$

Poniamo $A = \min\{a_1, \dots, a_\nu, a_{h_0} - 1\}$ e $B = \max\{a_1, \dots, a_\nu, a_{h_0} + 1\}$ avremo:

$$A \leq a_k \leq B$$

quindi la successione è limitata.

LEMMA 2

Se una successiane di Cauchy a_n contiene un' estratta a_{n_K} convergente a ℓ, allora anche a_n convergera' a ℓ.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\varepsilon > 0$, esiste ν tale che:

$$|a_K - a_H| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall K, H > \nu$$

Sia $K_0 > \nu$ tale che:

$$|a_{n_K} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall K \geq K_0$$

Per il lemma delle successione estratte $n_{K_0} \geq K_0 > \nu$, per ogni $n > \nu$ si ha che:

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_{K_0}}| + |a_{n_{K_0}} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Combinando i due lemmi si dimostra il seguente

Criterio di convergenza di Cauchy

Una successione a_n e' convergente se e solo se e' di Cauchy

DIMOSTRAZIONE

Con la proposizione iniziale si e' detto che una successione convergente e' di Cauchy. Viceversa se una succesione e' di Cauchy, per il LEMMA 1 è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass a_n ammette una estratta convergente, per il LEMMA 2 a_n e' convergente.

Limiti

- 2 def. limiti di funzioni
  - Teorema ponte
  - Permanenze del segno
  - Esistenza degli zeri
  - I teorema esistenza valori intermedi
- def. continuità
  - Teorema di Weierstrass
  - II teorema esistenza valori intermedi
  - Criteri di invertibilità
  - Teorema limiti di funzioni monotone

x poco chiesti
- Criterio di continuità per le funzioni monotone
- Teoreme continuità funzioni inverse

1° definizione di limite di funzione

Si dice che $f(x)$ ha limite uguale a ℓ (o tende o converge a ℓ) per x che tende a x_0 se per ogni successione $x_n \to x_0$ con $x_n \in A - \{x_0\}$ per ogni n, risulta $f(x_n) = \ell$.

2° definizione di limite di funzione

Si ha il limite di $f(x) = \ell$ per $x \to x_0$, se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un δ (delta) > 0, tale che $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, per ogni $x \in A - \{x_0\}$, tale che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Possiamo anche scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon, \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

Teorema Ponte

Date le due seguenti definizioni di limite di funzione, equivalenti tra loro:

① $\forall x_n \to x_0 : x_n \in A - \{x_0\}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) = \ell$

② $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A, \ 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Proviamo che la ② implica la ①. Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$. Consideriamo una generica successione x_n, convergente a x_0, di punti A, con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Per la definizione di limite di successione, esiste un indice ν per cui $|x_n - x_0| < \delta$ per ogni $n > \nu$, inoltre essendo $x_n \neq x_0$ risulta che:

$$\forall x_n \in A, \ 0 \neq |x_n - x_0| < \delta$$

Per l'ipotesi due segue che:

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$$

che significa che $f(x_n) \to \ell$ per $n \to +\infty$.

Proviamo per assurdo che ① implichi la ②, ciò vuol a dire:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta, |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$$

Poniamo $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ e indichiamo con $x = x_n$ il valore che compare nella relazione precedente:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A : 0 \neq |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$$

risulta che:

$$x_n \neq x_0, \quad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$$

perciò $x_n \in A - \{x_0\}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to x_0$, ma $f(x_n)$ non converge a ℓ poiché la disuguaglianza $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ è in contrasto con la definizione di limite di successione.

Funzione continua

Una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua in un intervallo $[a,b]$ se è continua in ogni punto $x_0 \in [a,b]$. (Se $x_0 = a$ si considera solo il limite destro $x \to a^+$, mentre se $x_0 = b$ si considera solo il limite sinistro $x \to b^-$).

Teorema della permanenza del segno

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0, e continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$, esisterà un $\delta > 0$ per cui $f(x) > 0$ con $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione è analoga a quella delle successioni. Dato che $f(x_0) > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, esiste un $\delta > 0$ per cui $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$ per ogni x appartenente all'intervallo $|x - x_0| < \delta$. Ciò equivale a: $-f(x_0)/2 < f(x) - f(x_0) < f(x_0)/2$, in particolare:

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

Teorema dell'esistenza degli zeri

Sia $f(x)$ una funziane continua nell'intervallo $[a,b]$. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (oppure $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$) allora esisterà un $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamolo con il metodo di bisezione. Consideriamo $c = \frac{a+b}{2}$, punto intermedio dell'intervallo $[a,b]$. Se $f(c)=0$ abbiamo trovato la radice, altrimenti se $f(c)<0$ ($o >0$) indichiamo $[a_1,b_1]$ come:

$$\begin{cases} \text{se } f(c)<0 \rightarrow a_1 = c \text{ e } b_1 = b; \\ \text{se } f(c)>0 \rightarrow a_1 = a \text{ e } b_1 = c; \end{cases}$$

Abbiamo trovato in questo modo un intervallo $[a_1, b_1]$ di ampiezza metà a $[a,b]$. Ripetiamo il procedimento con $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
Otterremo tre successioni a_n, b_n e c_n:

$$\begin{cases} \text{se } f(c_n)<0 \rightarrow a_{n+1} = c_n \text{ e } b_{n+1} = b_n \\ \text{se } f(c_n)>0 \rightarrow a_{n+1} = a_n \text{ e } b_{n+1} = c_n \end{cases}$$

Se per qualche n risulta $f(c_n)=0$ ci si ferma perchè si è trovata una radice, altrimenti per costruzione avremo:

$$f(a_n)<0 \quad e \quad f(b_n)>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Possiamo scrivere la relazione che lega a_n e b_n:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Per costruzione a_n e' limitata e crescente e per il teorema sulle successioni monotone a_n ammette limite finito x_0.
La successione b_n è decrescente e per il teorema delle succ. mon. e' convergente proprio in x_0 per $n \to +\infty$. Dalla continuità della funzione e dato che $f(a_n)<0$ e $f(b_n)>0$ si ottiene che:

$$f(x_0) = \lim_{x\to+\infty} f(a_n) \leq 0 \quad e \quad f(x_0) = \lim_{x\to+\infty} f(b_n) \geq 0$$

Perciò $f(x_0)=0$ ed il teorema e' dimostrato.

Primo Teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo $f(a) \leq f(b)$. La tesi consiste nel provare che, qualunque sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$, esiste un $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = y_0$. Ovviamente per $f(a) = y_0$ allora $x_0 = a$ mentre per $f(b) = y_0$ allora $x_0 = b$. Per trattare il caso $x_0 \in (a,b)$ consideriamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - y_0 \quad \forall x \in [a,b].$$

Siccome $f(a) < y_0 < f(b)$ allora:

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0 \quad e \quad g(b) = f(b) - y_0 > 0$$

Per il Teorema di esistenza degli zeri, esiste un x_0 per cui $g(x_0) = 0$ e di conseguenza $f(x_0) = y_0$.

Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua definita nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a,b]$ esistono cioè x_1 e $x_2 \in [a,b]$:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$$

DIMOSTRAZIONE

Posto $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$, verifichiamo che esista una successione x_n di punti $[a,b]$ tale che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x_n) = M$$

Se $M = +\infty$ per le proprietà dell'estremo superiore $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > n$ e perciò $f(x_n) \to M = +\infty$.

Se $M < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$: $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \Rightarrow f(x_n) \to M$.

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste un'estratta x_{n_k} da x_n ed un punto $x_0 \in [a,b]$:

$$x_{n_k} \to x_0$$

Poichè $f(x)$ è continua, ne segue che:

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

siccome abbiamo dimostrato che la funzione $f(x_n)$ è regolare, possiamo dire che le sue estratte convergono allo stesso limite:

$$M = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

$M < +\infty$ è quindi il massimo assoluto della funzione assunta nel punto x_0. Analogamente si ragiona per determinare il minimo partendo dall'estremo inferiore.

Secondo Teorema dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

DIMOSTRAZIONE

I valori di massimo M e minimo m sono assunti dal Teorema di Weier-strass. Dobbiamo dimostrare che $\forall y_0 \in (m, M)$, $\exists x_0 \in [a,b]$: $f(x_0) = y_0$.

Consideriamo due punti x_1 e x_2 tali che $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e consideriamo la funzione: $g(x) = f(x) - y_0 \quad \forall x \in [a,b]$.

Siccome $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$, possiamo dire che:

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0 \quad e \quad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$$

Per il Teorema di esistenza degli zeri, esiste un punto x_0 appartenente all'intervallo aperto x_1 e x_2, tale che $g(x_0) = 0$ e quindi $f(x_0) = y_0$.

TEOREMI PER MONOTONIA

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a,b]$ è invertibile in tale intervallo.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il caso di f strettamente crescente in $[a,b]$, risulta:

$$f(a) < f(x) < f(b) \quad \forall x \in (a,b)$$

quindi $f(a)$ è il minimo di f e $f(b)$ è il massimo. Per il secondo Torema dei valori intermedi f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$: $\forall y \in [f(a), f(b)], \exists x \in [a,b]: f(x) = y$. Tale x inoltre è unica. Se esistessero x_1 e x_2: $x_1 < x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$, allora siccome f è stret. crescente dovrebbe risultare che $f(x_1) < f(x_2)$. Quindi $f: [a,b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ è invertibile, cioè esiste un $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a,b]$.

Teorema sul limite delle funzioni monotone

Sia $f(x)$ una funzione monotona in $[a,b]$ allo esistono finiti i limiti:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \lim_{x\to b^-} f(x) \qquad \forall x_0 \in (a,b)$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo $f(x)$ crescente in $[a,b]$. Dimostriamo che esiste finito il limite di $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, osserviamo che $f(x)$ e' limitata in $[a,b]$:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

$f(a)$ e' quindi il minimo di $f(x)$ e $f(b)$ e' il massimo.

Consideriamo $x_0 \in (a,b]$ e poniamo:

$$l = \sup\{f(x) : x \in [a, x_0)\}$$

Dato che $f(x)$ e' limitata l'estremo superiore e' finito, e per le sue proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1 \in [a, x_0) : \quad l - \varepsilon < f(x_1)$$

Per $x > x_1$ risulta che $f(x) \geq f(x_1)$ e quindi:

$$l - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq l < l + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$$

Si procede analogamente con $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ considerando $x_0 \in [a,b)$. E dunque:

$$f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x) \leq \lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x) \leq \lim_{x\to b^-} f(x) \leq f(b) \qquad \forall x_0 \in (a,b)$$

Derivate

- Definizione derivata
- Legame continuità e derivabilità
- Teorema di derivazione delle funzioni composte (mai chiesto)
- Teorema di derivazione delle funzioni inverse (senza dimostr.

- Teoremi sulle derivabilità –
  - Teorema di Fermat
  - Teorema di Rolle
  - Teorema di Lagrange
  - Criteri di monotonia
  - Criteri di strette monotonia
  - Criteri di convessità
  - Teorema De l'Hôpital

[redacted]

Definizione

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo aperto (a,b) e sia x un qualsiasi punto $\in (a,b)$. f si dice derivabile in x se esiste il limite finito del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tale limite è la derivata di $f(x)$ e si indica con $f'(x)$ (o $Df(x)$).

La funzione f si dice derivabile in (a,b) se f è derivabile in ogni $x \in (a,b)$.

Teorema (legame tra derivabilità e continuità)

Se f e' derivabile in un punto x allora in tale punto f e' continua.
Vogliamo far vedere che:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} f(x) + \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} \cdot h =$$

$$= f(x) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h =$$

e' possibile siccome $f'(x) \in \mathbb{R}$

$$= f(x) + f'(x) \cdot 0 =$$

$$= f(x)$$

N.B: un esempio di funzione non derivabile, ma continua e' $f(x) = |x|$

Teorema di derivazione delle funzioni composte (poco chiesto)

Sia g una funzione derivabile nel punto x e f una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ e' derivabile in x e la derivata risulta:

$$D f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo il caso di $g(x+h) \neq g(x)$ per ogni $h \neq 0$:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Ponendo $K = g(x+h) - g(x)$, che è il rapporto incrementale per f nel punto $g(x)$, K tende a 0 per h che tende a 0 dato che g è continua in x. Quindi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{K \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{K} = f'(g(x))$$

Teorema di derivazione delle funzioni inverse (NO DIM.)

Sia f una funzione continua e strettamente crescente (o strettamente descrescente) in un intervallo $[a,b]$. Se $f(x)$ è derivabile in $x \in (a,b)$ e la $f'(x) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ e la sua derivata è:

$$D f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Significato geometrico della derivata

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0 e si consi= deri sul piano x, y il suo grafico.
Ci proponiamo di determinare l'equazione della retta r tangente al grafico nel punto P_0 di coordinate $(x_0, f(x_0))$.
Bisogna prima determinare l'equazione della retta r' secante nei pun= ti P_0 e P di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.
L'equazione di una retta non verticale è $y = mx + q$, sostituiamo P_0 e P e mettiamo a sistema:

sistema a due incognite m e q

$$\begin{cases} f(x_0) = m x_0 + q \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q \end{cases} \xrightarrow{\text{otterremo}} y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

Abbiamo così ottenuto l'equazione della retta secante, per ricavare l'equazione della retta tangente basterà fare il limite della retta secante per $h \to 0$, solo se f è derivabile in x_0, così da ottenere la seguente retta:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Notiamo che $m = f'(x)$, che è il coefficiente angolare della retta tangente. Quindi la derivata è la misura della pendenza della retta nel grafico.

Massimo e minimo assoluto/relativo

Data una funzione f definita in un intervallo $[a,b]$, $f(x_0)$ con $x_0 \in [a,b]$ si dice massimo assoluto (o minimo assoluto) se $f(x_0)$ è maggiore (minore) di ogni $f(x)$ con $x \in [a,b]$.

Mentre invece.

se esiste $\delta > 0$ per cui:

MAX RELATIVO $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta$

MIN RELATIVO $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta$

TEOREMA DI FERMAT

Sia f una funzione definita in un intervallo $[a,b]$ e x_0 un punto $\in [a,b]$, se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo, se f è derivabile in x_0 allora la $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il caso di x_0 massimo relativo, significa che esiste un $\delta > 0$ per cui:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall h : |h| < \delta$$

Studiamo separatamente i casi $h<0$ e $h>0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0<h<\delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta<h<0 \end{cases}$$

e studiamo il limite destro e sinistro per $h \to 0$:

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

siccome per ipotesi f e' derivabile in x_0, il limite destro e sinistro coincidono e quindi $f'(x_0)=0$.

TEOREMA DI ROLLE

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso $[a,b]$ e derivabile nell' intervallo (a,b). Se $f(a)=f(b)$, allore esistera un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0)=0$.

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con x_1 e x_2 due punti rispettivamente di massimo e minimo per f nell' intervallo $[a,b]$:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$$

Tali punti esistono per il Teorema di Weierstrass. Se almeno uno dei punti x_1 e x_2 e' interno ad $[a,b]$ allora per il Teorema di Fermat in corrispondenza la derivata si annulla.
Resta il caso in cui i due punti non sono interni e quindi $x_1=a$ e $x_2=b$ (oppure $x_1=b$ e $x_2=a$). Allora:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

Dato che per ipotesi $f(a) = f(b)$, allora $f(a) = f(x)$, la funzione è costante in $[a,b]$ e la derivata nulla in tutto l'intervallo.

TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ per cui:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione $g(x)$ data da $f(x)$ meno la retta congiungente gli estremi dell'intervallo $[a,b]$:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

se $x = a$ allora: $g(a) = f(a) - f(a) = 0$

se $x = b$ allora: $g(b) = f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)] = 0$

La funzione $g(x)$ è continua in $[a,b]$ siccome è data dalla somma di funzioni continue, ed è derivabile in (a,b) siccome è data dalla somme di derivate. La sua derivata vale:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in (a,b)$$

Per il Teorema di Rolle, esiste un punto x_0 per cui $g'(x_0) = 0$.
Quindi si ha:

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \rightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Criteri di monotonia

Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora:

$$f'(x) \geq 0, \ \forall x \in (a,b) \iff f \text{ è crescente in } [a,b]$$
$$f'(x) \leq 0, \ \forall x \in (a,b) \iff f \text{ è decrescente in } [a,b]$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la prima, la seconda è analoga.

($\Rightarrow$)

Supponendo che $f'(x) \geq 0$, dobbiamo dimostrare che la funzione è crescente cioè che se $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Applichiamo il Teorema di Laugrange alla funzione f definita in $[a,b]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

Per ipotesi $f'(x_0) \geq 0$ e $x_2 > x_1$ quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$ e abbiamo dimostrato che la funzione è crescente.

($\Leftarrow$)

Viceversa, se la funzione è crescente in $[a,b]$, per ogni $x \in (a,b)$ e $h > 0$ tale che $x + h \in (a,b)$ risulta $f(x+h) \geq f(x)$ e quindi:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

e inoltre se $h < 0$ si avrà $x + h < x$ e quindi $f(x+h) \leq f(x)$ ma allora il numeratore è una quantità non positiva, ma al denominatore h è negativo e quindi il rapporto è comunque non negativo. Quindi in entrambi i casi:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Passando al limite per $h \to 0$ otteniamo che $f'(x) \geq 0$.

Criterio di stretta monotonia

Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora:

se $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$ e $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ f e' strettamente crescente in $[a,b]$
se $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$ e $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ f e' strettamente decrescente in $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE

($\Rightarrow$) Essendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, quindi per il criterio di monotonia $f(x)$ e' crescente in $[a,b]$. Se non fosse strettamente crescente $\exists x_1$ e x_2, $x_1 < x_2$: $f(x_1) = f(x_2)$, ma allora $f(x)$ e' costante nell' intervallo $[x_1, x_2]$ e $f'(x) = 0$ contrariamente all' ipotesi.

($\Leftarrow$) Essendo f strettamente crescente in $[a,b]$, per il criterio di monotonia $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$, inoltre $f'(x)$ non puo' annullarsi in nessun intervallo $[x_1, x_2] \in (a,b)$ poiche' altrimenti in tale intervallo $f(x)$ sarebbe costante.

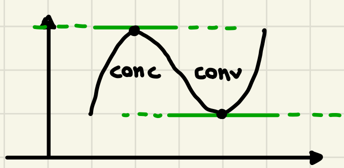
Funzioni convesse e concave

La funzione f, definita in $[a,b]$, si dice convessa se per ogni punto $x_0 \in [a,b]$, il grafico della funzione e' al di sopra della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$:

f convessa in $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $\forall x, x_0 \in [a,b]$

Si dice concava in $[a,b]$ se per ogni $x_0 \in [a,b]$ il grafico della funzione e' al di sotto della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$:

f concavo in $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $\forall x, x_0 \in [a,b]$



Criterio di convessità

Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione derivabile in $[a,b]$ e che ammetta derivata seconda in (a,b) allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $f(x)$ è convessa in $[a,b]$
2. $f'(x)$ è crescente in $[a,b]$
3. $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

$2 \Leftrightarrow 3$ il criterio di monotonia applicato alla derivata prima $f'(x)$ stabilisce che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$ se e solo se $f'(x)$ è crescente in $[a,b]$.

DIMOSTRAZIONE

$1 \Rightarrow 2$ consideriamo due punti x_1 e $x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$. Poniamo $x_0 = x_1$ e $x_0 = x_2$ consecutivamente nella definizione di convessità:

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \forall x, x_1 \in [a,b]$$
$$f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \quad \forall x, x_2 \in [a,b]$$

x è un punto generico di $[a,b]$. Scegliamo $x = x_2$ nella prima e $x = x_1$ nella seconda. Sommando membro a membro e semplificando si ottiene che:

$$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

$$[f'(x_2) - f'(x_1)](x_2 - x_1) \geq 0$$

Essendo $x_2 > x_1$ si ottiene che $f'(x_2) \geq f'(x_1)$.

$2 \Rightarrow 1$ Consideriamo $x, x_0 \in [a,b]$ con $x \neq x_0$. Per il Teorema di Lagrange esiste un punto $x_1 \in (x_0, x)$:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$$

Distinguiamo i due casi : $x > x_0$ e $x < x_0$. Se $x > x_0$, essendo $x_1 \in (x_0, x)$ per la monotonia di $f'(x)$ dato che $x_1 > x_0$ si ha che per ipotesi $f'(x_1) \geq f'(x_0)$:

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

Se $x < x_0$ si procede in modo analogo visto che $x_1 \in (x_0, x)$ si ha che $x_1 < x_0$ e quindi $f'(x_1) \leq f'(x_0)$ ma dato che $x - x_0 < 0$ moltiplicando si ottiene che :

$$f'(x_1)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

quindi $f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ e abbiamo ritrovato la definizione di convessità.

Il criterio vale anche per le funzioni concave, in questo caso le seguenti proposizioni sono equivalenti :

① f è concava in $[a, b]$
② $f'(x)$ è decrescente in $[a, b]$
③ $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

TEOREMA DI L'HOPITAL

Siano f, g funzioni derivabili in un intorno di x_0 (con eventuale eccezione di x_0) tali che :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Se in un intorno di x_0 risulta $g(x), g'(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$, allora si ha :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

DIMOSTRAZIONE

Se f e g sono derivabili in x_0 con derivata continua e $g'(x) \neq 0$. Per la derivabilità delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ in x_0 si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \quad \text{analogamente} \quad g(x_0) = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f'(x)}{\lim_{x \to x_0} g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Sviluppi di Mc Laurin
- Formule di Taylor
- Resto di Peano
- Criteri di massimo e minimo
- Resto di Lagrange

[redacted]

Sviluppi di Mc Laurin

Sia:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (1)$$

un polinomi di coefficienti $\mathbb{R}$ e grado n. La funzione p e' indefinitivamente derivabile in $\mathbb{R}$ e le sue derivate di ordine maggiore di n sono tutte nulle.
Mentre se $n \geq 1$ e $k \leq n$ l'espressione della derivata kesime sarà:

$$p^{(k)}(x) = k!\,a_k + (k+1)k \dots 2\,a_{k+1} x + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)\,a_n x^{n-k} \quad (2)$$

Ponendo nella (1) e (2) $x = 0$ si avranno le seguenti formule che forniscono il significato del polinomio (1):

$$p(0) = a_0 \qquad p^{(k)}(x) = k!\,a_k$$

Sostituendo i coefficienti nel polinomio (1) otteremo la seguente formule detta formula di Mc Laurin per i polinomi:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p^{n}(0)}{n!}x^n$$

La formula rappresenta il polinomio p mettendo in risalto i valori assunti da se stesso e dalle sue derivate nel punto 0.

Formula di Taylor

Per rappresentare il polinomio mediante una formula che evidenzi i valori assunti dal polinomio e dalle sue derivate in un qualsiasi punto x_0, fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e un polinomio di grado della variabile t:

$$q(t) = p(x_0 + t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Applicando a tale polinomio la formula di Mc Laurin si ha:

$$q(t) = q(0) + \frac{q'(0)}{1!} t + \frac{q''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{q^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$q^{(k)}(t) = p^{(k)}(x_0 + t) \quad \text{da cui} \quad q^{(k)}(0) = p^{(k)}(x_0)$$

quindi abbiamo:

$$p(x_0 + t) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!} t + \frac{p''(x_0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} t^n$$

ponendo in tale uguaglianza $t = x - x_0$ si ottiene infine:

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

che si chiama formula di Taylor per i polinomi di punto iniziale x_0.

Se f è derivabile n volte nel punto x_0 esiste uno ed un solo polinomio reale p_n, di grado non superiore a n, che ha la seguente espressione:

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Tale formula si chiama polinomio di Taylor di ordine n della funzione f relativo al punto iniziale x_0.

Formula di Taylor con il resto di Peano

Definiamo R_n, la funzione resto come differenza di f e p_n.

Se f e' derivabile n volte in x_0, il resto $R_n(x)$ e' un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Supponiamo che la funzione $C^n(x_0)$.

DIMOSTRAZIONE

Tenendo presente la definizione di resto $R_n(x)$ facciamo vedere che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^n(x_0)(x-x_0)^n/n!]}{(x-x_0)^n}$$

Siamo nell'ipotesi di poter applicare il Teorema di Hopital, facciamdo $n-1$ volte e otterremo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)]}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}[f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)] = 0$$

In base alla definizione di o-piccolo possiamo dire che:

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{per} \quad x \to x_0$$ ← resto di Peano

Possiamo ora scrivere la formula di Taylor con il resto di Peano:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Se $x_0 = 0$ si ottiene la formula di Mc Laurin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Criteri di punti di massimo e di minimo

Se esistono le derivate sottoindicate della funzione $f(x)$ nel punto x_0 vale lo schema sottoindicato:

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) > 0 \text{minimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) < 0 \text{massimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) = 0 \begin{cases} f^{(3)}(x_0) \neq 0 \text{nè minimo nè massimo} \\ f^{(3)}(x_0) = 0 \begin{cases} f^{(4)}(x_0) > 0 \text{minimo relativo} \\ f^{(4)}(x_0) < 0 \text{massimo relativo} \\ f^{(4)}(x_0) = 0 \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo un $f(x)$ derivabile n volte in x_0 per qualche $n \geq 2$ e risulta:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad e \quad f^n(x_0) \neq 0$$

Considerando il caso in cui $f^n(x_0) > 0$. Per l'annullarsi delle derivate la formula di Taylor diventa:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{x!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

e si ha che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^n(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \right] = \frac{f^n(x_0)}{n!} > 0$$

Per il Teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ Tale che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} > 0 \quad , \quad \forall x : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

Se n è pari il denominatore $(x-x_0)^n$ è positivo per $x \neq x_0$ perciò risulta $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e quindi x_0 e' un punto di minimo relativo per $f(x)$.

Se n è dispari, dato che il denominatore cambia segno, per $x >$ o $<$ di x_0, risulta $f(x) > f(x_0)$ oppure $f(x) < f(x_0)$ per $x > x_0$ o $x < x_0$. Perciò la funzione non ha ne massimo ne minimo in x_0.

Formula di Taylor con il resto di Laugrange

Se f e' derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$ con derivata $f^{(n+1)}$, $\forall x \in [a,b]$, $\exists\, x_1$, $x < x_1 < x_0$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

DIMOSTRAZIONE (METODO RADICE)

Fissati $x, x_0 \in [a,b]$ con $x \neq x_0$, definiamo la funzione $g(t)$:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-t)^k + R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$g(t)$ risulta derivabile nell'intervallo di estremi x_0 e x inoltre agli estremi dell'intervallo assume i valori $g(x) = f(x)$ e

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) = f(x)$$

Essendo anche $g(x) = f(x)$ si ha che $g(x) = g(x_0)$, il Teorema di Rolle assicura l'esistenza di un punto x_1 nell'intervallo aperto di estremi x_0 e x tale che $g'(x_1) = 0$. Esplicitando la derivata di $g(t)$ si ha:

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$$

sostituendo a t il valore $t = x_1$ si ha $g'(x_1) = 0$ e quindi la tesi.

Stima del resto

Sia $f(x)$ una funzione derivabile $n+1$ volte in un intervallo $[a,b]$ contenente x_0 con derivata $f^{(n+1)}$ continua in $[a,b]$. Posto:

$$M_{n+1} = \max\{|f^{(n+1)}(x)| : x \in [a,b]\}$$

il resto $R_n(x)$ della formula di Taylor verifica la disuguaglianza:

$$|R_n(x)| \leq M_{n+1} \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall x \in [a,b]$$

6 Integrali

Definizione di partizione

Sia $f(x)$ una funzione limitata nell'intervallo chiuso $[a,b]$ in $\mathbb{R}$. Una partizione è un insieme ordinato di $n+1$ punti distinti tali che:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$$

Gli $n+1$ punti individuano n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$ con $k = 1, 2, \dots, n$.

Per ogni partizione P di $[a,b]$ poniamo:

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \qquad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Definiamo poi le somme integrali inferiori e superiori:

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \qquad e \qquad S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

Se $f(x)$ è positiva in $[a,b]$ le somme integrali hanno il significato delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti alla funzione

Dato che $m_k \le M_k$ risulta che $s(P) \le S(P)$ $\forall P$.

Lemma

Se denotiamo con $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ e $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Sia $m \le f(x) \le M$ per $x \in [a,b]$, allora per ogni coppia di partizioni P e Q di $[a,b]$ si ha che:

$$m(b-a) \le s(P) \le S(Q) \le M(b-a)$$

DIMOSTRAZIONE

Poniamo $R = P \cup Q$. Confrontiamo fra loro le somme integrali inferiori $s(P)$ e $s(R)$. Supponendo che R contenga solo un punto $\bar{x}$ in più di P e siano x_{k-1}, x_k due punti consecutivi della partizione P tali che $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Siano

$$\overline{m_1} = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \bar{x}]\} \quad e \quad \overline{m_2} = \inf\{f(x) : x \in [\bar{x}, x_k]\}$$

Allora:

$$s(R) - s(P) = [\overline{m}_2(x_k - \bar{x}) + \overline{m}_1(\bar{x} - x_{k-1})] - m_k(x_k - x_{k-1})$$

Essendo $\overline{m}_1 \geq m_k$ e $\overline{m}_2 \geq m_k$, otteniamo:

$$s(R) - s(P) \geq m_k(\bar{x} - x_{k-1} + x_k - \bar{x} - x_k + x_{k-1}) = 0$$

Analogamente si dimostra che $S(R) \leq S(Q)$. Si ottiene:

$$s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q)$$

Per dimostrare che

$$m(b-a) \leq s(R) \leq S(R) \leq M(b-a)$$

Basta prendere nella prima disuguaglianza la partizione $P = [a, b]$

Indichiamo con A l'insieme delle somme integr. inferiori $s(P)$ e con B l'insieme delle somme superiori $S(P)$:

$$A = \{s(P)\} \quad e \quad B = \{S(P)\}$$

Dal lemma segue che i due insiemi sono separati: $a \leq b \ \forall a \in A$ e $\forall b \in B$, quindi dall'assioma di completezza $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$.

Definizione di Integrale Definito

Se vi è un unico elemento di separazioni c tra A e B allora si dice che f(x) è integrabile in [a,b] secondo Reiman e l'elemento c si indica:

$$\int_a^b f(x)dx$$

E si chiama integrale definito di f in [a,b].

Inoltre posto:

$$s(f) = \sup\{s(P) : P \text{ partizione di } [a,b]\}$$

$$S(f) = \inf\{S(P) : P \text{ partizione di } [a,b]\}$$

si ha che se:

$$s(f) = S(f)$$

Allora f(x) è integrabile secondo Reiman in [a,b].

Criterio di Riemann

Una funzione limitata in [a,b] è ivi integrabile secondo Reimann se e solo se, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una partizione P di [a,b]:

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ Se f è integrabile secondo Riemann in [a,b] allora $s(f) = S(f)$.

In base alla definizione di sup e inf, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P, Q di [a,b]:

$$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P) \quad e \quad S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(Q)$$

Posto $R = P \cup Q$ si deduce che:

$$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui essendo $s(f) = S(f)$:

$$S(R) - s(R) < \left[S(f) + \frac{\varepsilon}{2}\right] - \left[s(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right] = \varepsilon$$

sommando membro a membro

$\Leftarrow$ Viceversa se vale che $S(P) - s(P) < \varepsilon$, essendo $s(P) \leq s(f)$ e $S(f) \leq S(P)$ otteniamo:

$$0 \leq S(f) - s(f) \leq S(P) - s(P) < \varepsilon$$

Dato che il numero $S(f) - s(f)$ non dipende da ε, questa relazione vale solo se $\forall \varepsilon > 0$ solo nel caso in cui $S(f) - s(f) = 0$ e quindi f è integrabile secondo Reimann in $[a,b]$.

Funzione continua e Uniformemente continua

Una funzione f si dice continua in un intervallo I quando:

$$\forall x_0 \in I \ e \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : se \ x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Una funzione f si dice uniformemente continua in I se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, x' \in I, \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

La differenza tra le due e' che nell' uniforme continua, δ dipende solo da ε e non da x_0.

Teorema di Cantor

Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora f e' uniformemente continua in $[a,b]$.

Funzione Lipschitziana

Sia $f(x)$ una funzione lipschitziana nell'intervallo I di $\mathbb{R}$, cioè tale che esista una costante $L>0$ per cui:

$$|f(x)-f(x')| \leq L|x-x'| \quad \forall x,x' \in I$$

Una tale funzione e' anche uniformemente continua in I, in quanto:

fissato $\varepsilon>0$, posto $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$ risulta $|f(x)-f(x')|<\varepsilon \quad \forall x,x' \in I : |x-x'|<\delta_\varepsilon$

Teorema di caratterizzazione delle funzioni lipschitziane

Sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo I. Allora $f(x)$ e' lipschitziana in I con costante L se e solo se $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in I$.

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ Se $|f'(x)| \leq L, \forall x \in I$ applicando Lagrange all'intervallo di estremi x, x', esiste $x_0 \in I$:

$$|f(x)-f(x')| = |f'(x_0)(x-x')| \leq L|x-x'|$$

dunque la funzione e' lipschitziana.

$\Leftarrow$ Se f e' lipschitziana in I, per $x \in I$ e $x' = x+h \in I$ (con $h \neq 0$) si ha

$$|f(x)-f(x+h)| = |f(x+h)-f(x)| \leq L(h)$$

dividendo ambo i membri per $|h|$ e passando al limite per $h \to 0$ si ottiene $|f'(x)| \leq L$.

Integrabilità delle funzioni continue

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$. Allora $f(x)$ è integrabile secondo Reimann in $[a,b]$.

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema di Cantor $f(x)$ è uniformemente continua e perciò:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \forall x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta$$

Se P è una porzione di $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ con $x_0 = a$ e $x_n = b$ tale che $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, $\forall k = 1,2,\ldots,n$ allora, posto:

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad e \quad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Risulta che:

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall k = 1,2,\ldots,n$$

Tale relazione è verificata siccome per il Teorema di Weierstrass il sup e inf sono il massimo e il minimo, quindi valori assunti dalla funzione. Posso quindi applicare il Teorema di Cantor:

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon$$

Primo Teorema della media

Sia $f(x)$ una funzione limitata in $[a,b]$ e integrabile secondo Reimann in $[a,b]$, allora:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

con $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ e $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

DIMOSTRAZIONE

L'integrale e' l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e superiori. Perciò qualsiasi sia la partizione P di $[a,b]$ si ha che:

$$s(P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(P)$$

Scegliendo la partizione banale di $[a,b]$ risulta: $s(P) = m(b-a)$ e $S(P) = M(b-a)$.

Secondo Teorema della media

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ allora esiste un $x_0 \in [a,b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$$

DIMOSTRAZIONE

Per il Teorema di Weierstrass esistono un valore minimo m ed un valore massimo M di $f(x)$ in $[a,b]$. Dividendo per $b-a>0$ risulta:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Definiamo con y il valore medio di $f(x)$ in $[a,b]$ compreso tra il massimo e il minimo. Per il secondo Teorema dell'esistenza dei valori intermedi, $\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y$ che equivale alla Tesi:

$$y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua in $[a,b]$. La funzione integrale $F(x)$ e' derivabile e la sua derivata e':

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

DIMOSTRAZIONE

Calcoliamo il rapporto incrementale di $F(x)$ per l'incremento che tende a 0:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Trasformiamo l'ultimo integrale per mezzo del secondo teorema della media. Esiste un punto compreso tra x e $x+h$, che indichiamo con $x(h)$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x(h))$$

Dato che $x(h)$ è compreso tra x e $x+h$ e dato che la funzione è continua:

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} F(x+h) - F(x)/h} = \underbrace{\lim_{h \to 0} 1/h \int_x^{x+h} f(t)\,dt} = \overbrace{\lim_{h \to 0} f(x(h))}^{f(x)} = f(x)$$

Primimitive

Una funzione $F(x)$ derivabile in $[a,b]$ si dice primitiva di $f(x)$ se $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono le primitive di una stessa funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ allora esiste una costante c tale che:

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$$

DIMOSTRAZIONE

Posto $H(x) = G(x) - F(x)$, derivando abbiamo $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ che per l'appunto e' una costante.

Formula fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua nell' intervallo $[a,b]$. Sia $G(x)$ una primi= tiva di f, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione integrale con t la variabile di integrazione.
$F(x)$ e $G(x)$ sono entrambe primitive di f, per cui esiste una costante c tale che:

$$G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt + c$$

Per $x = a$ abbiamo:

$$G(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + c = c$$

Sostituendo $c = G(a)$ avremo:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + G(a)$$

Ponendo $x = b$ avremo:

$$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + G(a)$$

da cui:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

7- Serie Numeriche

Serie Numeriche

Sia a_n una successione di numeri reali. Definiamo la somme dei termini della successione come:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Definiamo la somme dei primi n termini, detta anche somma parziale (o ridotta n-esima), come:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Tale successione prende il nome di serie di termine generale a_n.
Definendo l'espressione per $n \to +\infty$ delle successione s_n di somme parziali:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n \to +\infty} s_n$$

Il carattere di una serie e' la sua proprietà di convergere, divergere oppure di essere indeterminata.

- se per $n \to +\infty$, $s_n \to l$, con $l \in \mathbb{R}$ la serie converge;
- se per $n \to +\infty$, $s_n \to \pm\infty$, la serie diverge;
- se per $n \to +\infty$, il limite della s_n non esiste allora la serie e' indeterminata.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e' convergente, allora la successione a_n e' un infinitesima.

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con s_n la successione delle somme parziali e con s è

$\mathbb{R}$ la somma della serie. Essendo:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

risulta che:

$$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} S_{n+1} - \lim_{n \to +\infty} S_n = S - S = 0$$

Tale condizione è necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie.

Serie armonica

E' una serie di termine generale $a_n = \frac{1}{n}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Tale serie diverge

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che $\forall k \in \mathbb{N}: x \geq k \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$. Calcolando l'integrale definito nell'intervallo $[k, k+1]$ otteniamo:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dx = \frac{1}{k}$$

Sommando per k che varia da 1 a n, otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Al secondo membro si ottiene la somma parziale della serie armonica. Si ottiene:

$$S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

La successione $\log(n+1)$ per $n \to +\infty$ tende a $+\infty$ e quindi anche s_n.

Criterio di Cauchy per le serie

Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ converga è che $\forall \varepsilon > 0$, esista un $\nu > 0$ tale che:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n\right| = \left|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}\right| < \varepsilon \quad \forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRAZIONE

Dal criterio di Cauchy, s_n converge se e solo se $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu > 0$ tale che per $m > \nu$ e $n > \nu$ si ha

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

Essendo $m > n$ e $m = n+p$ con $p \in \mathbb{N}$ allora:

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

da cui la tesi.

Serie a termini non negativi

Una serie si dice a termini non negativi se $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Una serie si dice a termini positivi se $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
In questo caso s_n è crescente:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

ma allora s_n è regolare e non può essere indeterminata.

Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$ consideriamo la serie geometrica :

$$\sum_{K=0}^{+\infty} x^K = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Il numero x si dice ragione della serie geometrica.

- se $x \geq 1$, la successione $a_n = x^n$ non tende mai a 0 e quindi la serie diverge non essendo soddisfatta la condizione $a_n \to 0$;
- se $|x| < 1$:

$$S_n = \sum_{K=0}^{n} x^K = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad \text{per } n \to +\infty,\ x^n \text{ Tende a 0 e quindi } \overset{\text{somma}}{S} = \frac{1}{1-x}$$

- se $x \leq -1$, la serie e' indeterminata.

Serie armonica generalizzata

Per ogni parametro p positivo consideriamo la sa seguente serie armoni-ca generalizzata :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

Per $p = 1$ ovviamente avremo la serie armonica.

Se $K \leq x \leq K+1$ risulta :

$$\frac{1}{(K+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{K^p}$$

Integriamo nell' intervallo $[K, K+1]$ e sommiamo rispetto a K :

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{(K+1)^p} \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^p} \leftarrow$$ qui alcuni passaggi visti con le s.a. sono gia' stati fatti.

Si vede facilmente che:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^p} = S_{n+1} - 1$$

Possiamo scrivere quindi:

$$S_n - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \leq S_n$$

- se $p < 1$ la serie è divergente:

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

dato che $1-p>0$ l'ultimo membro diverge positivamente e quindi anche S_n.

- se $p>1$ la serie è convergente:

$$S_{n+1} \leq 1 + \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

in questo caso $1-p<0$ per $n \to +\infty$ la successione $(n+1)^{1-p}$ tende a 0. Quindi S_{n+1} è regolare perché a termini positivi risulta essere convergente.

Criterio del confronto

Siano a_n e b_n due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni n, allora si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_n < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty$$

Indichiamo con S_n e T_n le somme parziali $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Per ipotesi $a_n \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n \leq T_n$.

Le due somme parziali sono regolari perché le serie sono a term. non neg.

Se T_n ha limite finito => S_n ha limite finito. Se invece $S_n = +\infty$ anche T_n diverge.

Criterio degli infinitesimi

Sia a_n una successione a termini non negativi. Supponiamo che fissato un numero reale p, esista il limite:

$$l = \lim_{n \to +\infty} n^p a_n$$

si ha:

(2) $l \neq +\infty, p > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$ (3) $l \neq 0, p \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$

DIMOSTRAZIONE

Nella 2 per definizione di limite di successione, $\forall \varepsilon = 1, \exists \nu > 0$:

$$n^p a_n < l + 1 \quad \forall n > \nu$$

Per tali n risulta $0 \leq a_n < \frac{(l+1)}{n^p}$. Applicando il teorema del confronto considerando la successione $b_n = (l+1)/n^p$, dato che $p > 1$ la serie generalizzata relativa b_n è convergente e di conseguenza anche quella di termine generale a_n.

Nella 3 con $l \neq 0$, $\forall \varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists \nu > 0$:

$$n^p a_n > \frac{1}{2} \quad \forall n > \nu$$

ma allora $a_n > 1/2n^p$. Consideriamo $b_n = 1/2n^p$ applicando il criterio del confronto, siccome $p \leq 1$ la serie di termine generale b_n diverge e di conseguenza anche la serie di termine generale a_n.

Criterio del rapporto

Sia a_n una successione a termini positivi. Supponiamo:

$$\exists\, l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Allora si ha:

se $l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$ se $l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$

DIMOSTRAZIONE

Se $l < 1$ e scegliamo un numero x : $l < x < 1$, per la definizione di limite di successione $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon = x - l$ esiste un $\nu > 0$:

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} \cancel{-l} < x \cancel{-l} \quad \forall n > \nu$$

Posto $\nu = 1$ avremo che: $a_n < a_1 x^{n-1}$. La serie associata alla successione $b_n = a_1 x^n$ e una serie geometrica di regione x. Dato che $0 < x < 1$ la serie e' convergente e per il criterio del confronto converge anche la serie di termine generale a_n.

Se $l > 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n > \nu$$

La successione a_n e' strettamente crescente per $n > \nu$ e percio' non puo' convergere a 0, ma diverge necessariamente.

Criterio della radice

Sia a_n una successione a termini non negativi. Supponiamo esista:

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora:

$$\text{se } l<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \qquad \text{se } l>1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $l<1$, $\forall \varepsilon>0$ tale che $l+\varepsilon<1$. Per la definizione di limite di successione $\exists \nu>0$:

$$\sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon \rightarrow a_n < (l+\varepsilon)^n \quad \forall n>\nu$$

Poiché la serie geometrica di ragione $(l+\varepsilon)$ converge, per il teorema del confronto converge anche la serie di termine generale a_n.

Se $l>1$, $\exists \nu : \sqrt[n]{a_n}>1$ cioè $a_n>1$ $\forall n>\nu$, poiché a_n non può essere infinitesima la serie non è convergente ma divergente.

Serie alternate

Le serie alternate, sono le serie del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

con $a_n>0$.

Criterio di Leibenitz

Sia $a_n \geq 0$ una successione decrescente e infinitesima, allora la serie alternata è convergente.

Convergenza assoluta

Una serie, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, si dice assolutamente convergente se risulta convergente la serie dei valori assoluti $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

Teorema convergenza assoluta

Una serie assolutamente convergente è convergente.

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi la serie con i moduli e' convergente. In base al criterio di Cauchy, $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu > 0$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > \nu \text{ e } \forall p \in \mathbb{N}$$

Per la disuguaglianza Triangolare avremo:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > \nu \text{ e } \forall p \in \mathbb{N}$$

Di conseguenza per il criterio di Cauchy è convergente anche la serie di Termine generale a_n.

Serie di Taylor

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intorno di x_0. Supponiamo che $f(x)$ ammetta infinite derivate in x_0, allora possiamo considerare la serie, detta serie di Taylor:

$$f'(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

La funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor se per ogni $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, la serie è convergente e la somma e' $f(x)$:

$$\exists \delta > 0 : \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \forall x : |x - x_0| < \delta$$

Teorema (taylor)

Sia $f(x)$ una funzione che ammette infinite derivate nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ con $\delta > 0$. Supponiamo che:

$$|f^n(x)| \leq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora $f(x)$ e' sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0.

DIMOSTRAZIONE

Per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sia $S_n(x)$ la somme parziale della serie e $R_n(x)$ il resto delle formule di Taylor. Allora:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

In base alla formula del resto di Lagrange si ha, dato che $|x - x_0| \leq \delta$:

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} M$$

L'ultimo membro tende a 0 e di conseguenza anche $|R_n(x)| \to 0$ e $R_n(x) \to 0$ e di conseguenza:

$$S_n(x) = f(x) - R_n(x) = f(x)$$