

Lezione 14

Fisica I – Ingegneria Automazione e Informatica
Università di Napoli "Federico II"
prof. Nicola R. Napolitano

Riepilogo della lezione precedente

- 1) Impulso
- 2) Urti
- 3) Centro di Massa

In questa lezione

- 1) Corpo rigido
- 2) Variabili rotazionali
- 3) Momento d'Inerzia

Impulso e Quantità di Moto

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

seconda legge di Newton:
la quantità di moto varia se sulla particella agisce una forza

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

$$\vec{I} = \underset{\text{def}}{\int_{t_i}^{t_f}} \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$$

Teorema dell' impulso:

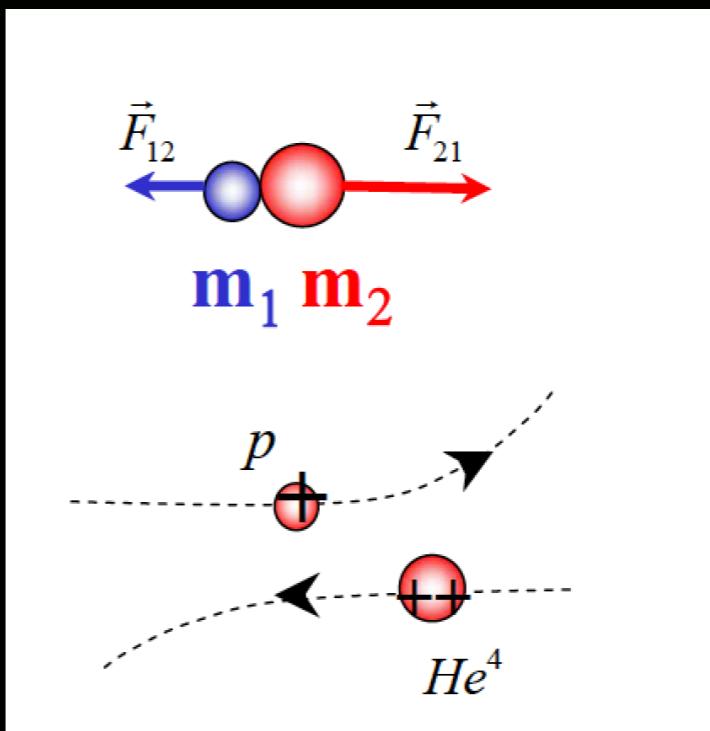
*l' **impulso** di una forza
(integrale della forza nell'intervallo di tempo)
è pari alla **variazione** della **quantità di moto***

$$[I] = [p] = [M][L/T]$$

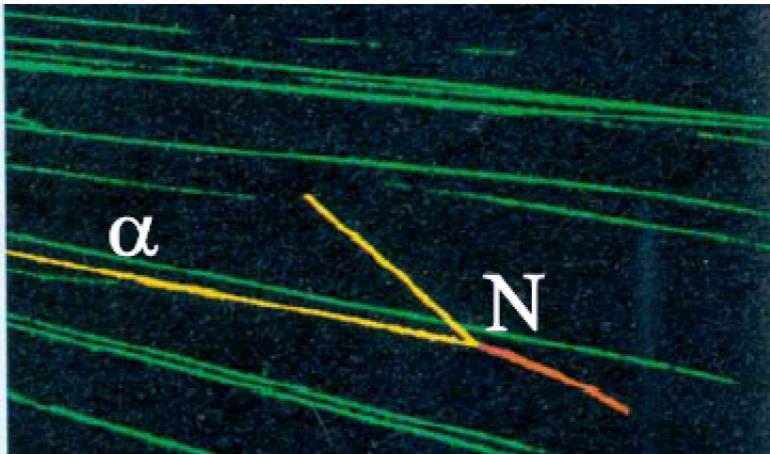
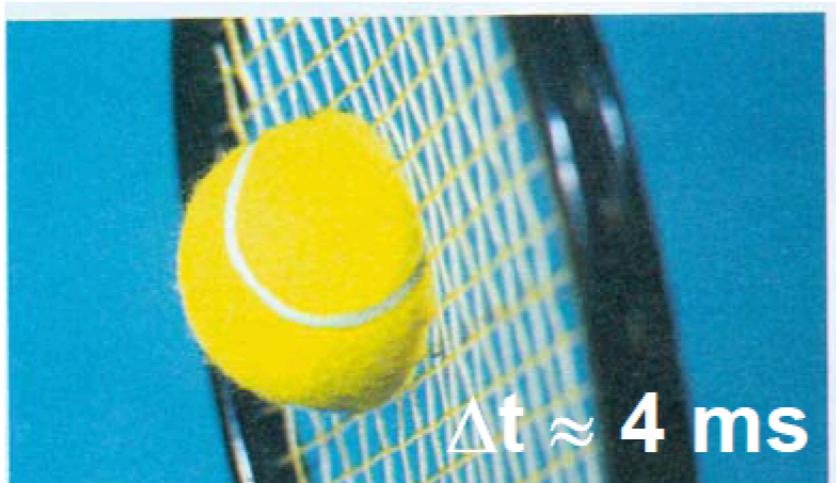
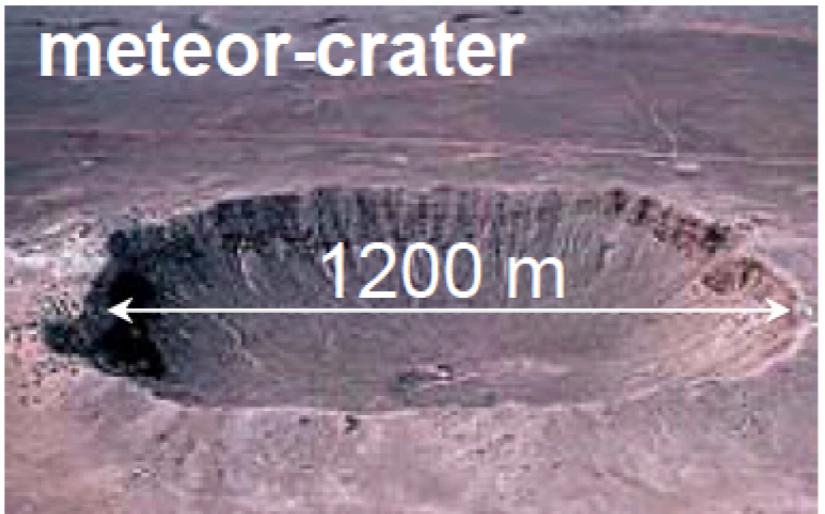
Urti

urto: evento **isolato** nel quale una **forza** relativamente **intensa** agisce per un **tempo** relativamente **breve** su due o più corpi in contatto tra loro
[**approssimazione impulsiva:** trascurro forze esterne]

- ✗ risultato di un **contatto fisico**
- ✗ risultato di una **interazione** tra particelle

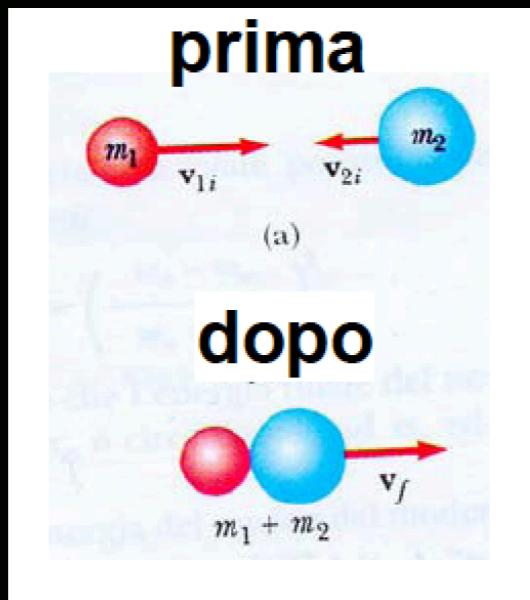


Urti su scale diverse



Urti in UNA dimensione

urto perfettamente anelastico
[conservo solo quantità di moto]



le particelle dopo l'urto
rimangono **unite** con velocità v_f

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

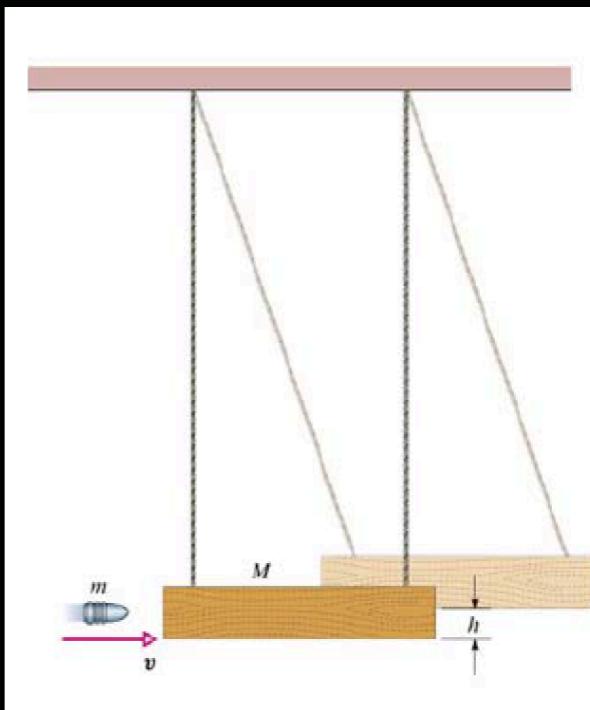
$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{(m_1 + m_2)}$$

esempio: pendolo balistico

dispositivo per determinare
velocità dei proiettili

$$V = \frac{m}{(m+M)} v \quad \text{conservazione quantità di moto}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh \quad \text{conservazione energia meccanica}$$



$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}$$

$$v = 630 \text{ m/s}$$

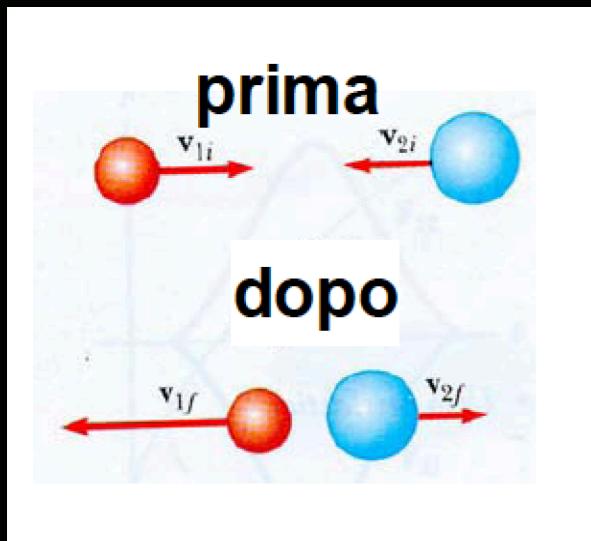
$$m = 9.5 \text{ g} \quad M = 5.4 \text{ kg}$$

$$h = 6.3 \text{ cm}$$

→ trasformo **alta velocità** proiettile
in **bassa velocità** corpo pesante
[di facile misurazione]

urto elastico

[conservo quantità di moto ed energia cinetica]



$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \quad (1)$$

$$(K_{tot})_i = (K_{tot})_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

✖ masse uguali [$m_1=m_2$]



bersaglio fisso

$$v_{2i} = 0$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1(v_{li} - v_{1f}) = m_2 v_{2f}$$

$$(K_{tot})_i = (K_{tot})_f \Rightarrow m_1(v_{li} + v_{1f})(v_{li} - v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2$$

divido le due precedenti equazioni e sostituisco ...

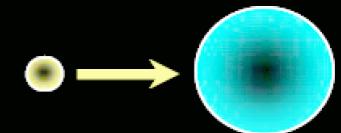
$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{li}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{li}$$

$$v_{1f} = 0$$
$$v_{2f} = v_{li}$$

scambio di velocità
[es. urto fra bocce/palle da biliardo]

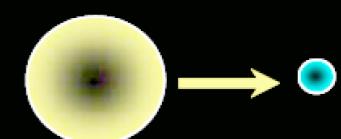
✖ bersaglio massiccio [$m_2 \gg m_1$]



$$v_{1f} = -v_{li}$$
$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_2} \right) v_{li}$$

proiettile rimbalza indietro
[es. urto palla golf su palla cannone
palla da baseball su mazza]

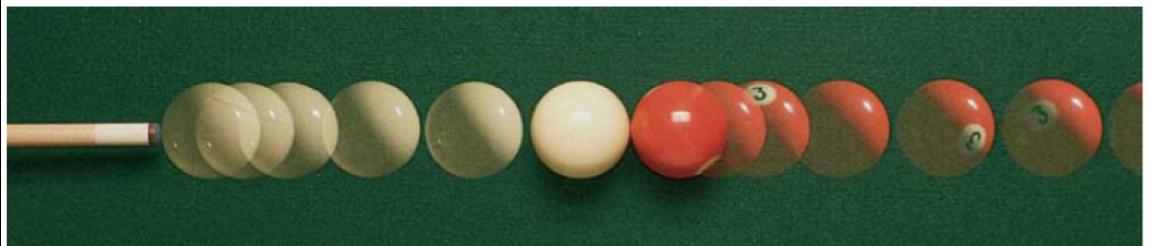
✖ proiettile massiccio [$m_1 \gg m_2$]



$$v_{1f} = v_{li}$$
$$v_{2f} = 2v_{li}$$

proiettile indisturbato, **bersaglio** scatta in avanti
[es. urto palla cannone su palla golf]

esempi: urto elastico



$$m_1 = m_2$$

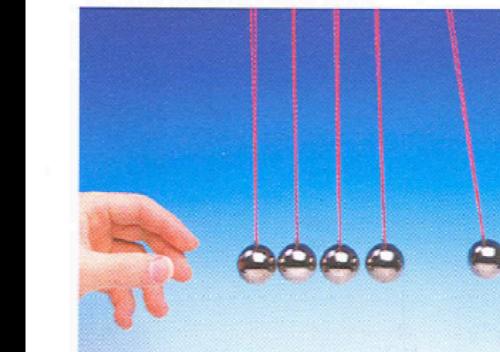
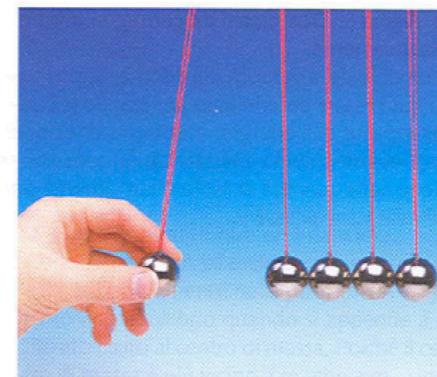
urto fra **palle** di biliardo **uguali**:

$$\begin{aligned}v_{1f} &= 0 \\v_{2f} &= v_{1i}\end{aligned}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

pendolo multiplo: palline di uguale massa



rapida **successione**
di urti elastici:

ad ogni urto una palla si ferma e
palla successiva si muove
con stessa velocità

Centro di Massa



mazza da baseball lanciata in aria:
moto complicato e diverso per le varie parti
mazza = **sistema** di punti materiali
centro di massa: punto che si muove lungo
traiettoria **parabolica**
[tipo moto proiettile]

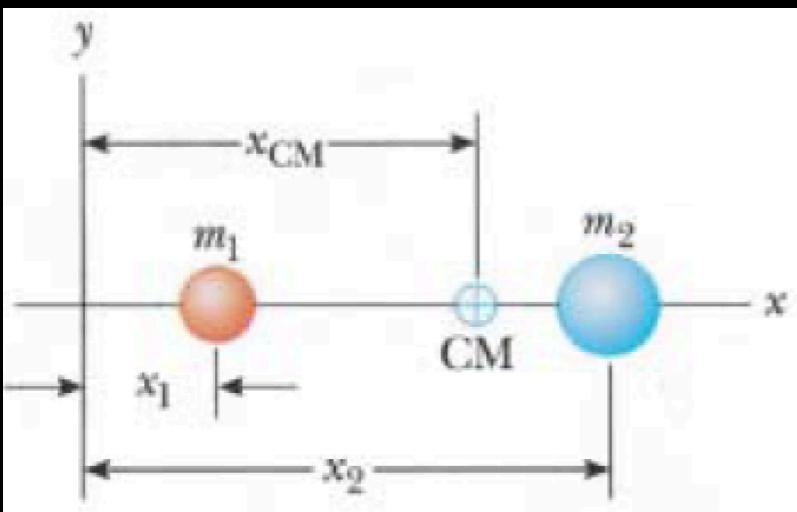
***centro di massa** di un corpo (o sistema di corpi):
punto che si muove come se*

- ▶ ***tutta la massa fosse lì concentrata***
- ▶ ***e le forze esterne agissero lì***

permette di descrivere
moto complessivo del sistema meccanico

Centro di Massa

E' la posizione media (pesata) del sistema di particelle che rappresenta il nostro oggetto



$$x_{CM} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

esempio:

$$x_1 = 0, x_2 = d$$

$$\text{se } m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = (x_1 + x_2)/2$$

$$\text{se } m_2 = 2m_1 \Rightarrow x_{CM} = 2/3 d$$

metà strada

vicino particella pesante

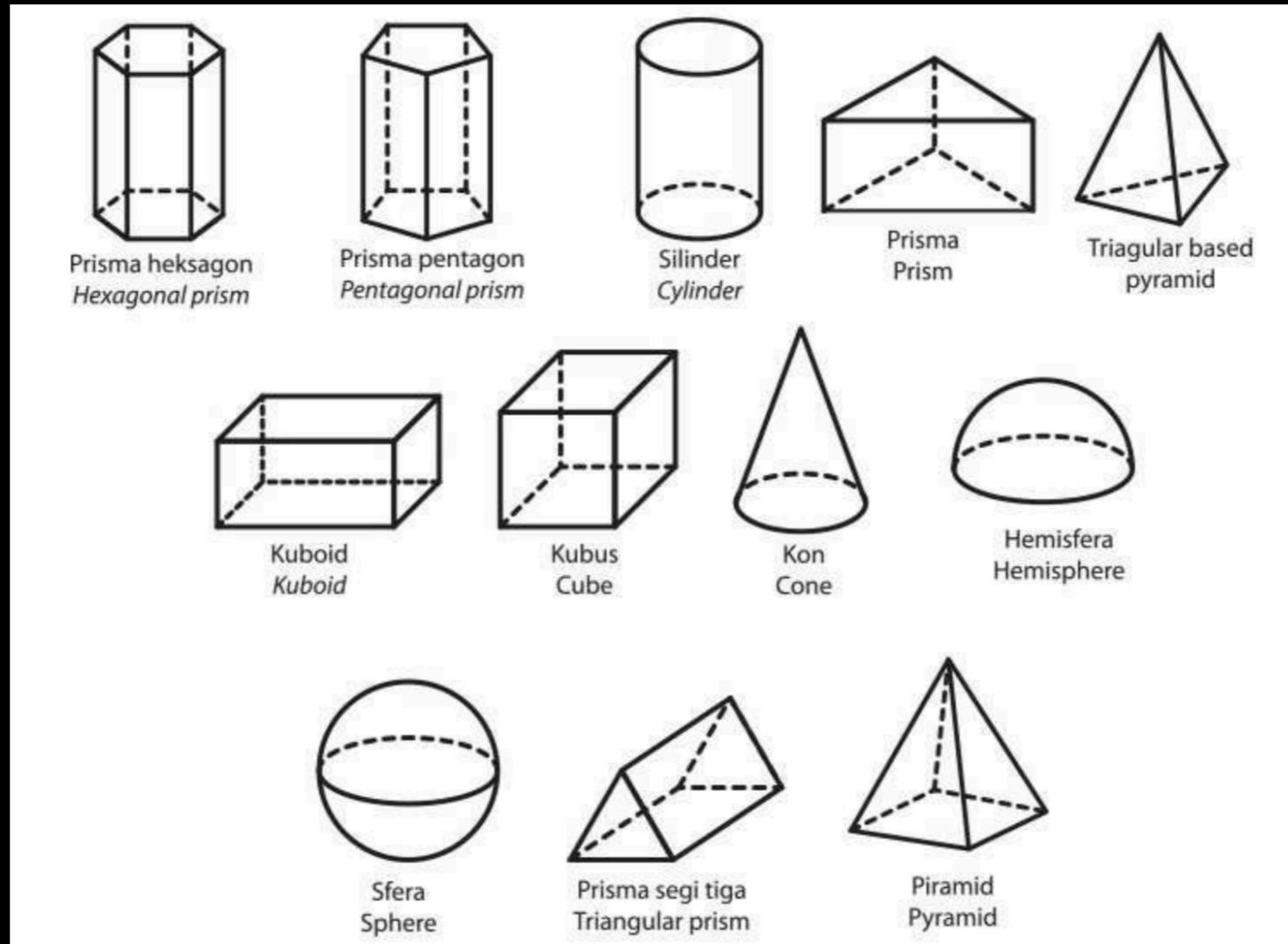
sistema **n** particelle in 3 dimensioni

$$x_{CM} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_{CM} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$z_{CM} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Riesci ad individuare il centro di massa di queste figure (geometricamente) ?



Moto di un Sistema di Particelle

Il CM è importante per descrivere il moto di corpi estesi

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$M\vec{r}_{CM} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n$$

$$M\vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n$$

$$M\vec{a}_{CM} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n$$

poichè per ogni particella:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_{est}$$

le forze **interne** si elidono a due a due [azione e reazione]

il CM si muove come particella di massa M su cui agisce la risultante delle forze esterne

$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

N.B. sistema isolato:

$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{tot} = M\vec{v}_{CM} = costante$$

Moto di un sistema di particelle

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

velocità CDM



$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_{tot}$$

quantità di moto totale è pari alla
massa totale per la **velocità** del CdM

[moto **particella** massa M, velocità v_{CM}]

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

somma forze **esterne**
(quelle interne si elidono a coppie)

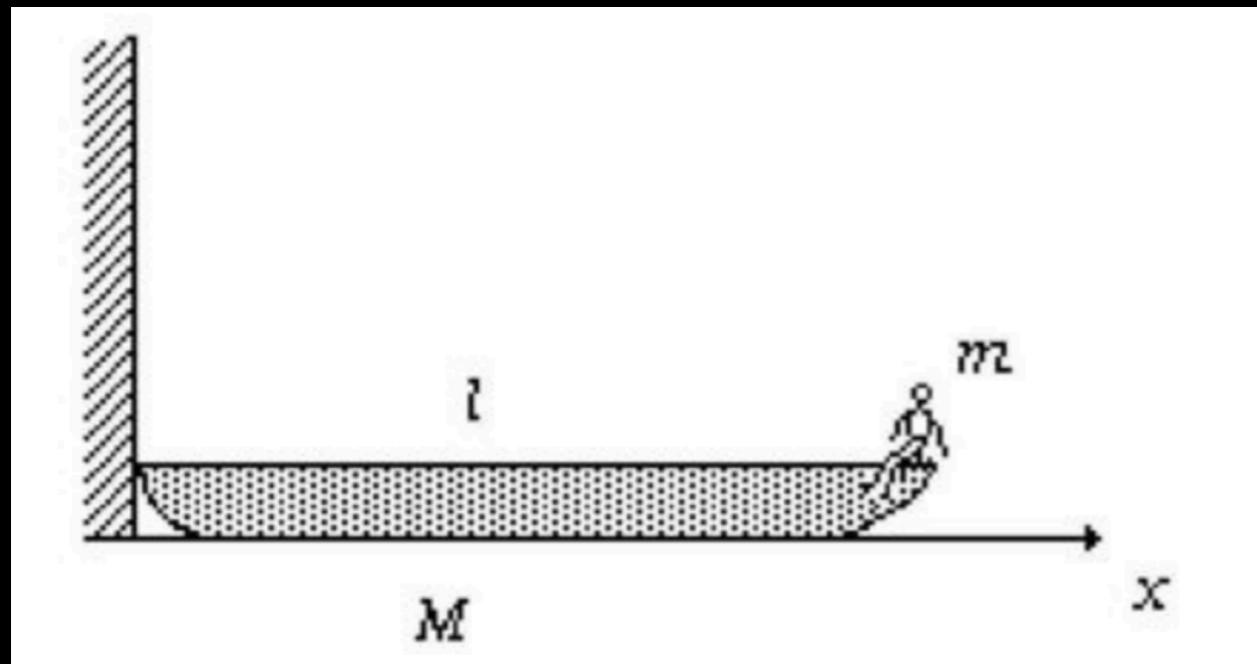
$$\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

il CdM si **muove** come particella di **massa M**
su cui agisce la **risultante delle forze esterne**

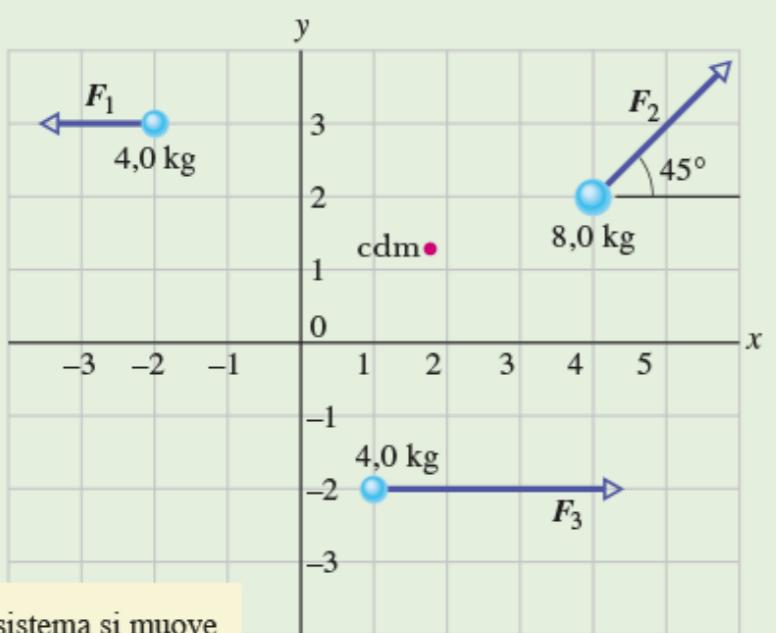
sistema isolato:

$$\sum \vec{F}_{est} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{tot} = \text{costante} \quad \vec{v}_{CM} = \text{costante}$$

Esempio: barca/molo

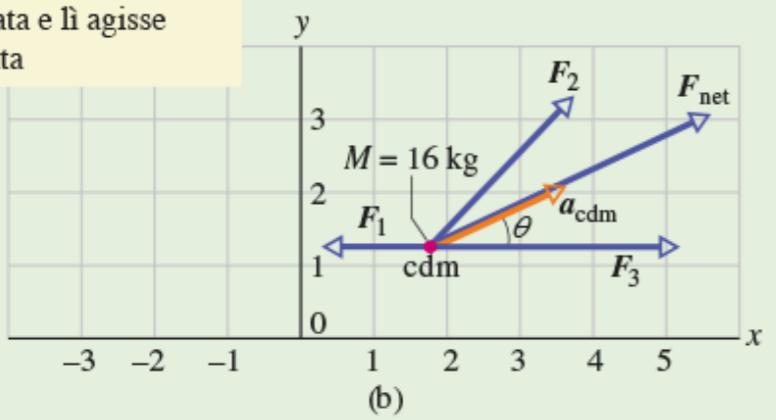


Un uomo di massa $m = 75 \text{ kg}$ si trova a poppa di una zattera di massa $M = 200 \text{ kg}$ e lunghezza $\ell = 10\text{m}$ la cui prua si trova a contatto con un molo. L'uomo cammina sulla zattera per scendere sul molo;
determinare la distanza fra la prua e il molo quando l'uomo ha raggiunto la prua.



Il cdm del sistema si muove come se tutta la massa fosse lì concentrata e lì agisse la forza netta

(a)

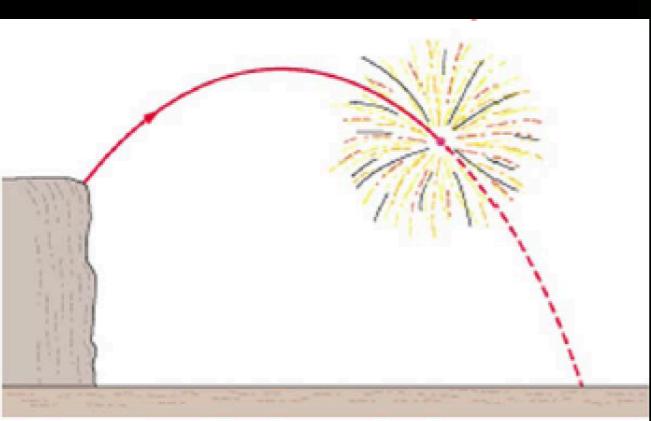


(b)

$$F_1=6\text{N}$$

$$F_2=12\text{N}$$

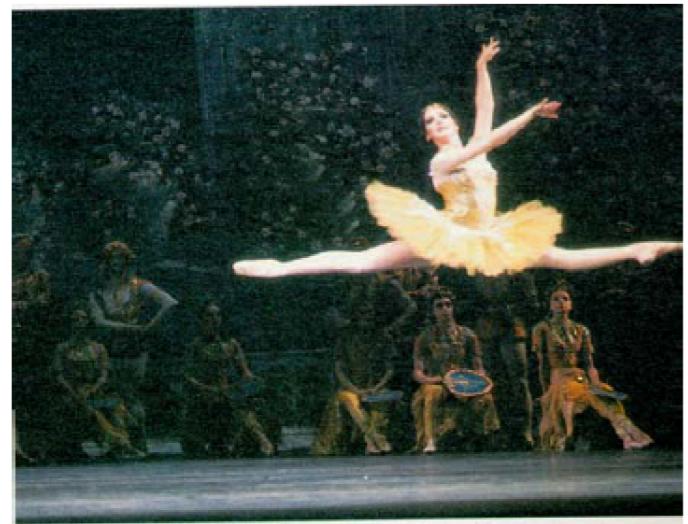
$$F_3=14\text{N}$$



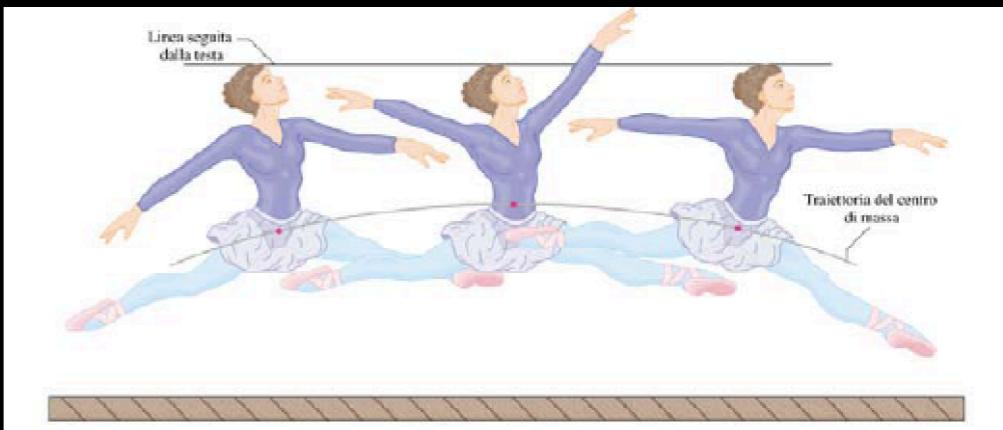
fuoco artificiale

$$\vec{F}_{est} = \vec{F}_g$$

CM segue
traiettoria **parabolica**
[la stessa del razzo inesploso]



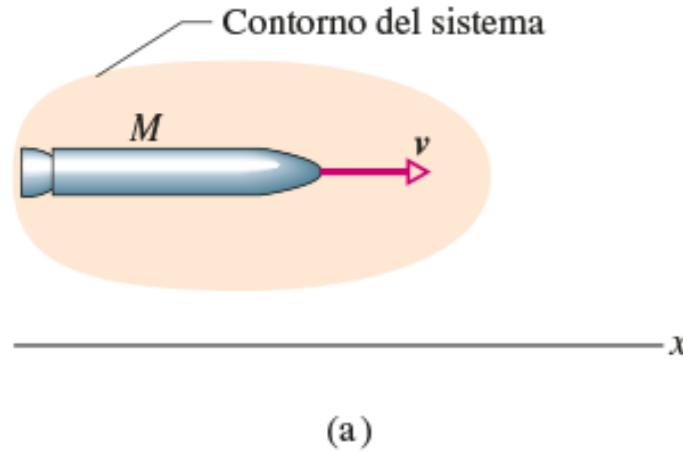
ballerina che **fluttua** in aria:
traiettoria testa-busto
orizzontale !!!
[non **parabolica**
come nel lancio di un corpo]



CM segue
traiettoria **parabolica**

Sistemi a massa variabile

L'espulsione di una massa dall'ugello del razzo ne accresce la velocità



durante il moto si conserva la **massa** del **sistema**
[massa **combustibile** + massa **navetta**]

$$p_i = p_f$$

$$Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv) \quad \text{con } dM < 0$$

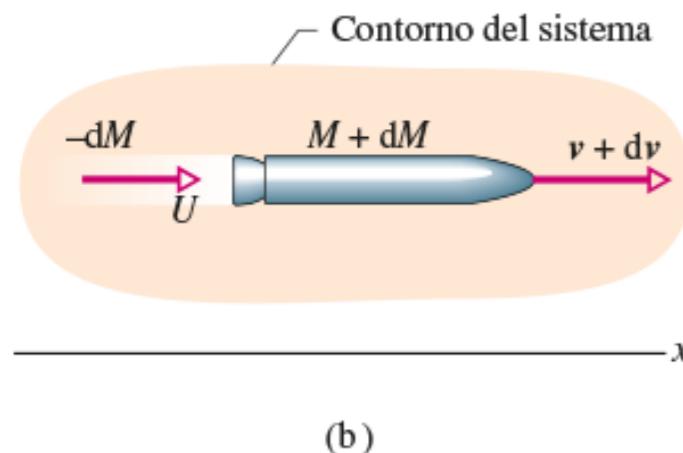
Sviluppo i prodotti e definisco

$u = (v + dv) - U$ velocità **relativa** prodotti di scarico
da cui cambiando di nuovo segno a dM ($dM > 0$)

$$-dM u = M dv$$

$$-\frac{dM}{dt} u = M \frac{dv}{dt} \quad \text{ove } R = -\frac{dM}{dt}$$

rapidità
consumo combustibile



$$Ru = Ma \quad \text{spinta del razzo} \quad (\text{I}^{\text{a}} \text{ equazione del razzo})$$

$$dv = -u \frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{II}^{\text{a}} \text{ equazione del razzo})$$

devo **diminuire** la massa finale
per avere aumento di velocità

sistema isolato:

$$\sum \vec{F}_{\text{est}} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \text{costante}$$

Moti del corpo rigido

1) Traslazione

- le orientazioni degli assi della terna solidale rimangano costanti (gli assi si muovono mantenendosi paralleli a se stessi)
- Tutti i punti del corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo che è lo stesso di quello subito dal CM
- Tutti i punti sono fermi rispetto al centro di massa
- È sufficiente determinare il moto del CM

$$\sum \vec{F}_{\text{est}} = M \vec{a}_{\text{CM}}$$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M \vec{v}_{\text{CM}}$$

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$$

Moti del corpo rigido

1) Traslazione

- le orientazioni degli assi della terna solidale rimangano costanti (gli assi si muovono mantenendosi paralleli a se stessi)
- Tutti i punti del corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo che è lo stesso di quello subito dal CM
- Tutti i punti sono fermi rispetto al centro di massa
- È sufficiente determinare il moto del CM

$$\sum \vec{F}_{\text{est}} = M \vec{a}_{\text{CM}}$$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M \vec{v}_{\text{CM}}$$

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$$

2) Rotazione

Moti del corpo rigido

1) Traslazione

- le orientazioni degli assi della terna solidale rimangano costanti (gli assi si muovono mantenendosi paralleli a se stessi)
- Tutti i punti del corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo che è lo stesso di quello subito dal CM
- Tutti i punti sono fermi rispetto al centro di massa
- È sufficiente determinare il moto del CM

$$\sum \vec{F}_{\text{est}} = M \vec{a}_{\text{CM}}$$

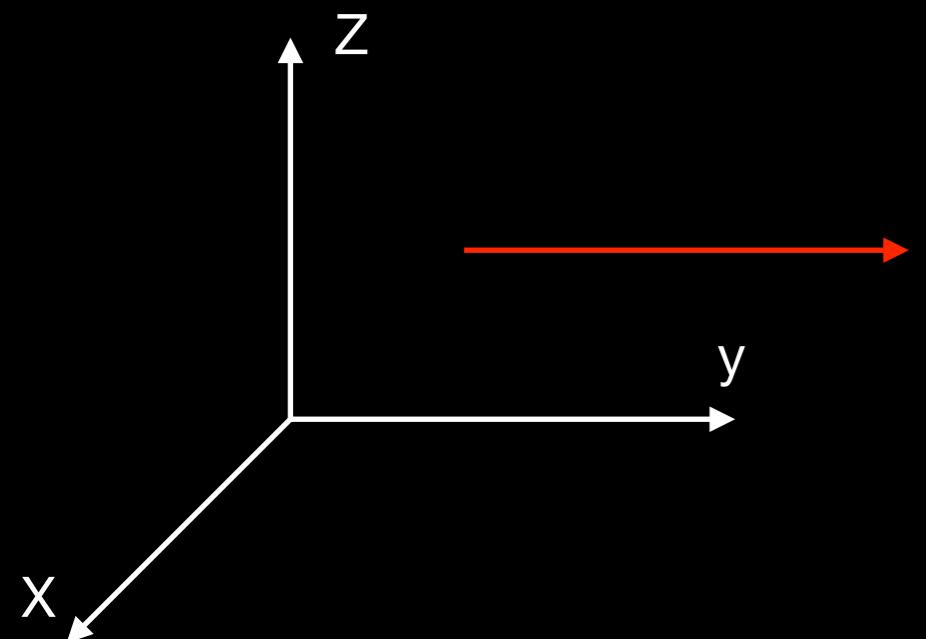
$$\vec{P}_{\text{tot}} = M \vec{v}_{\text{CM}}$$

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$$

2) Rotazione

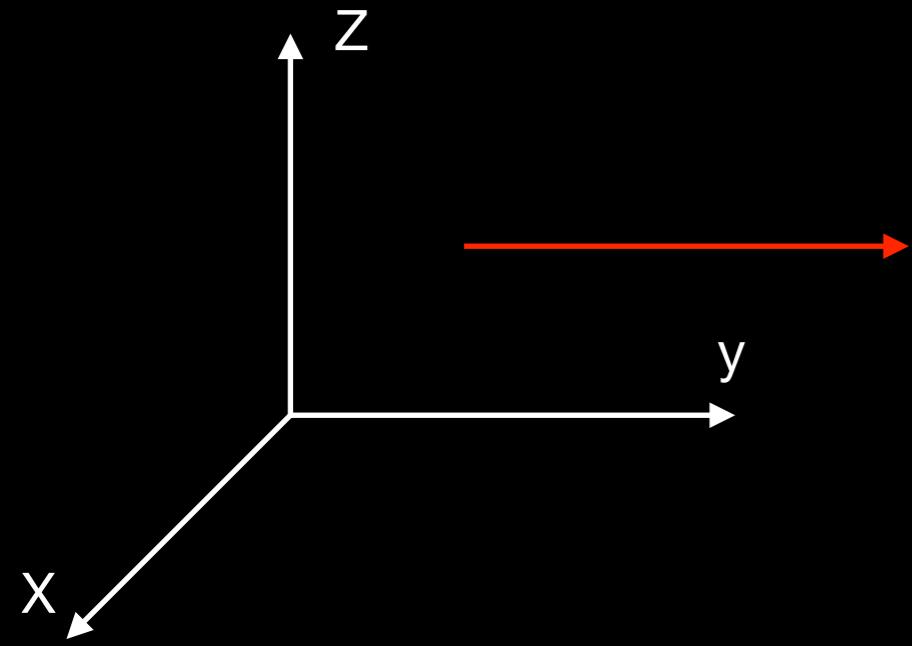
3) Rototraslazione

Moti del corpo rigido

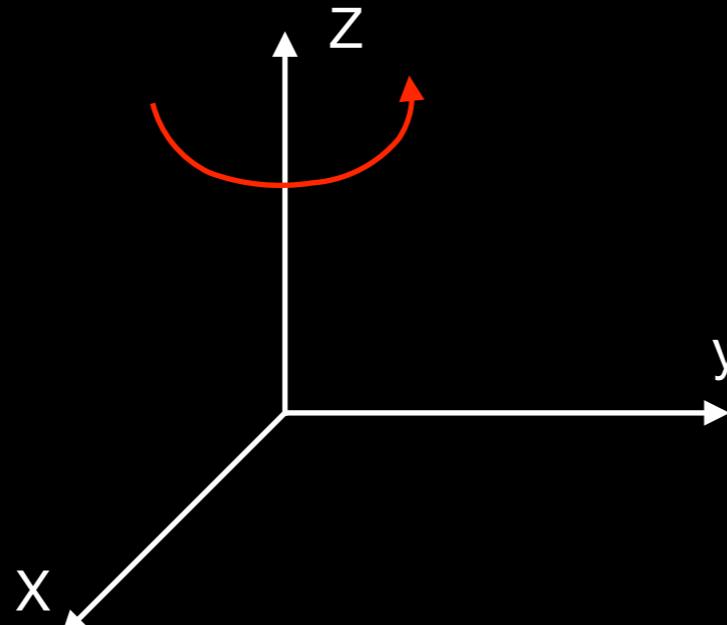


Traslazione

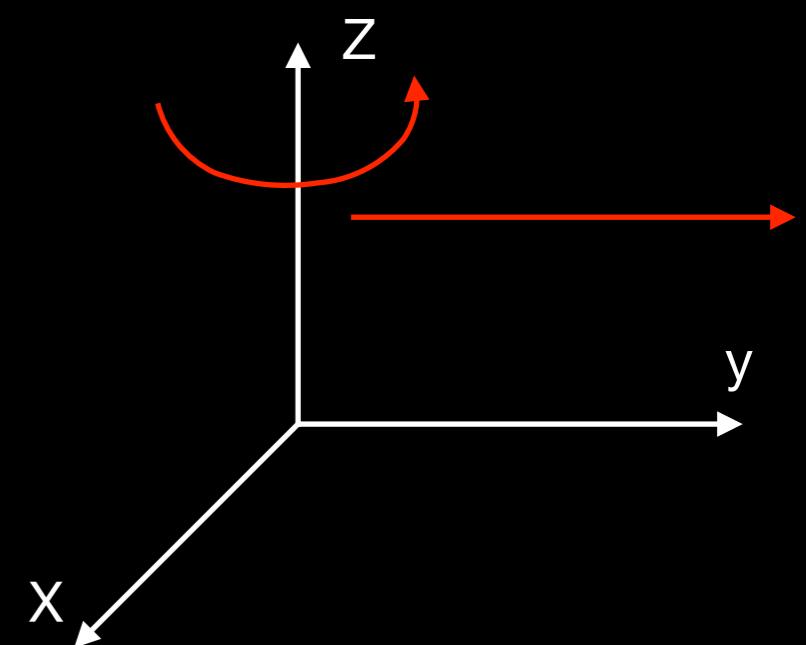
Moti del corpo rigido



Traslazione

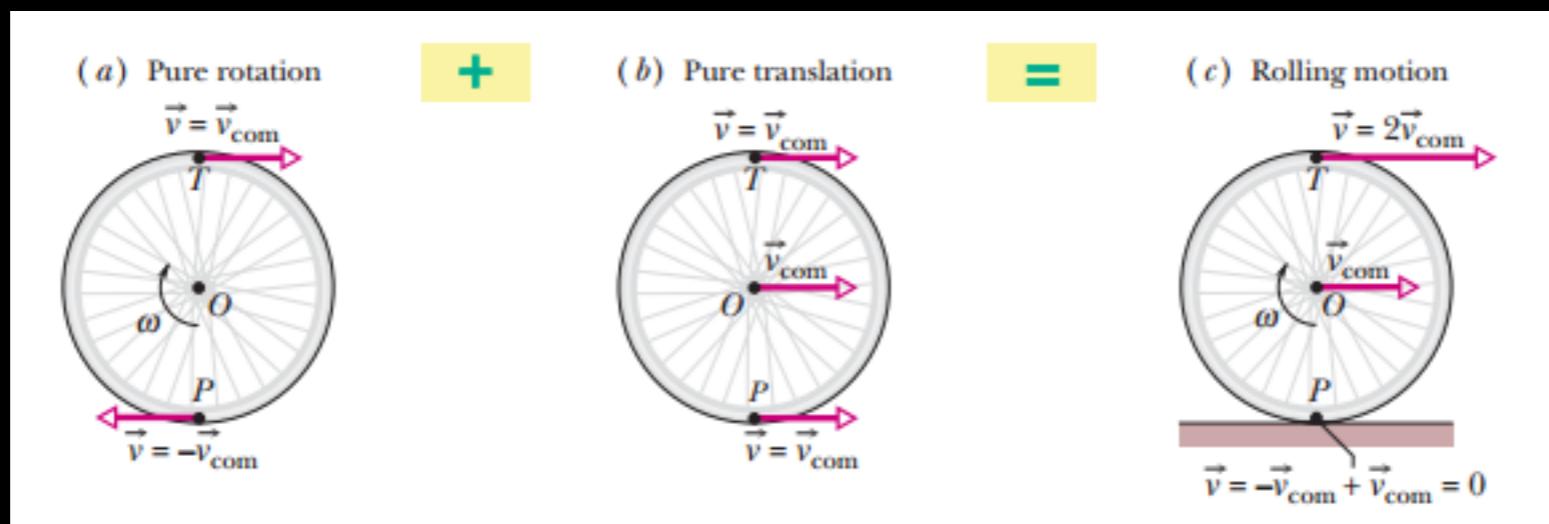
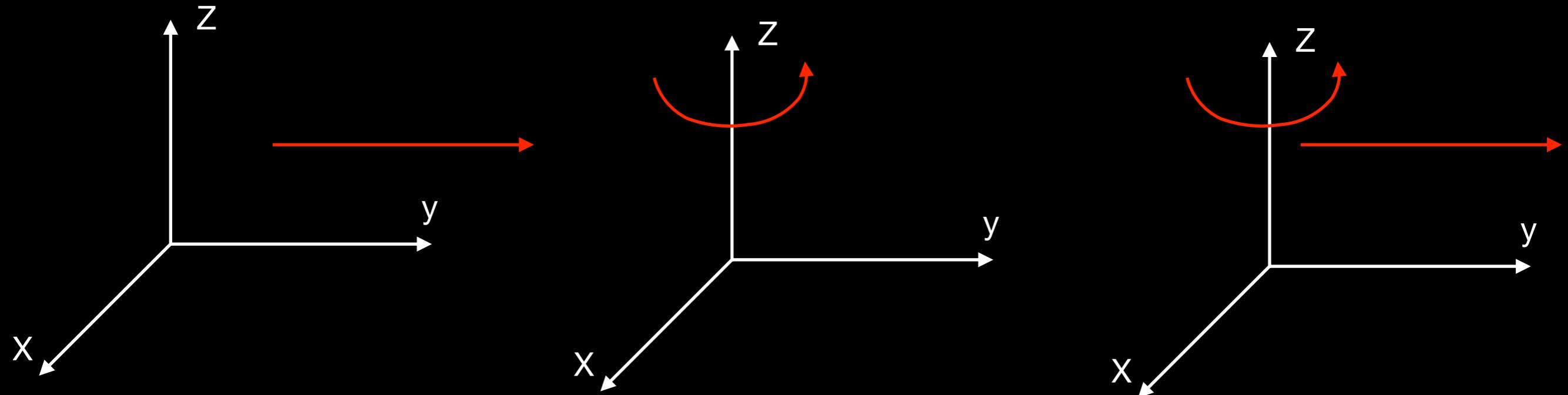


Rotazione

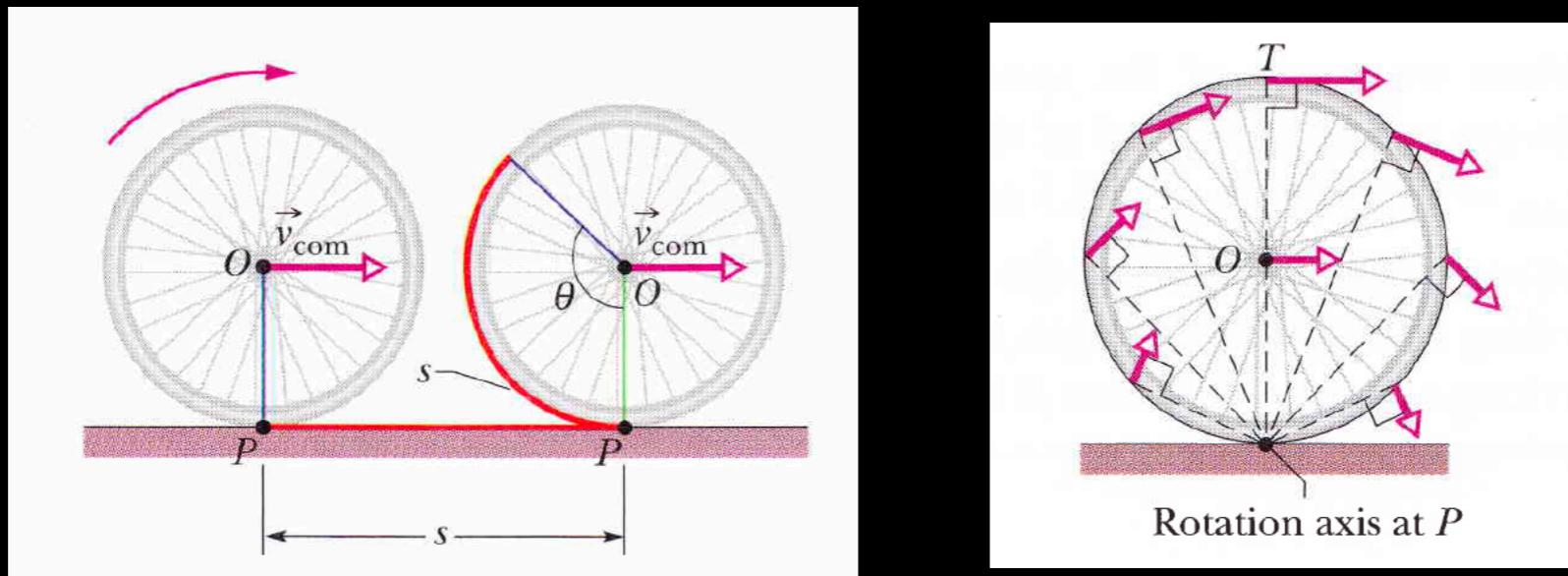
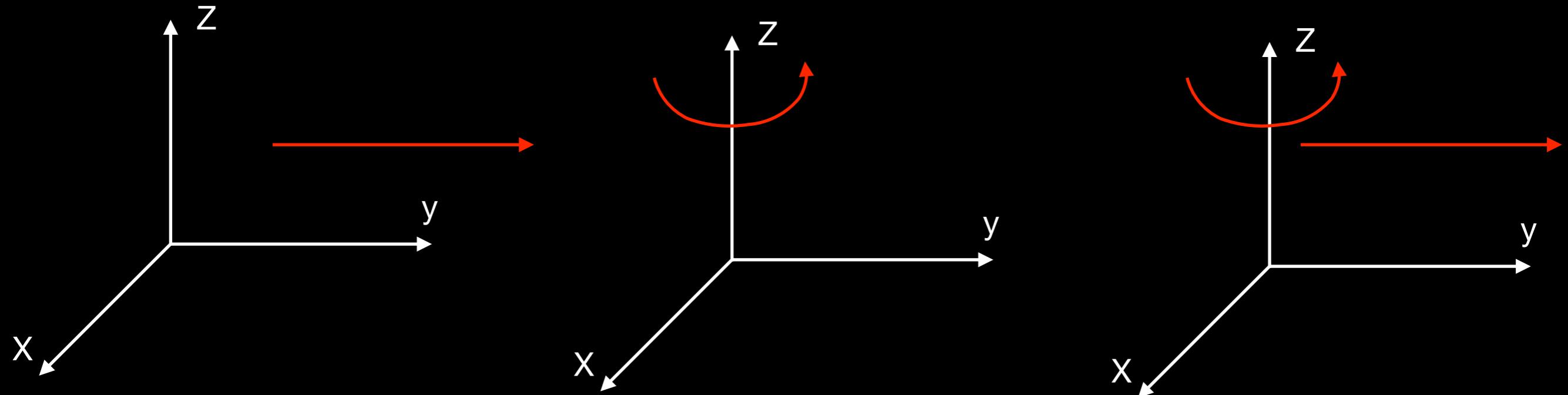


Roto-traslazione

Moti del corpo rigido

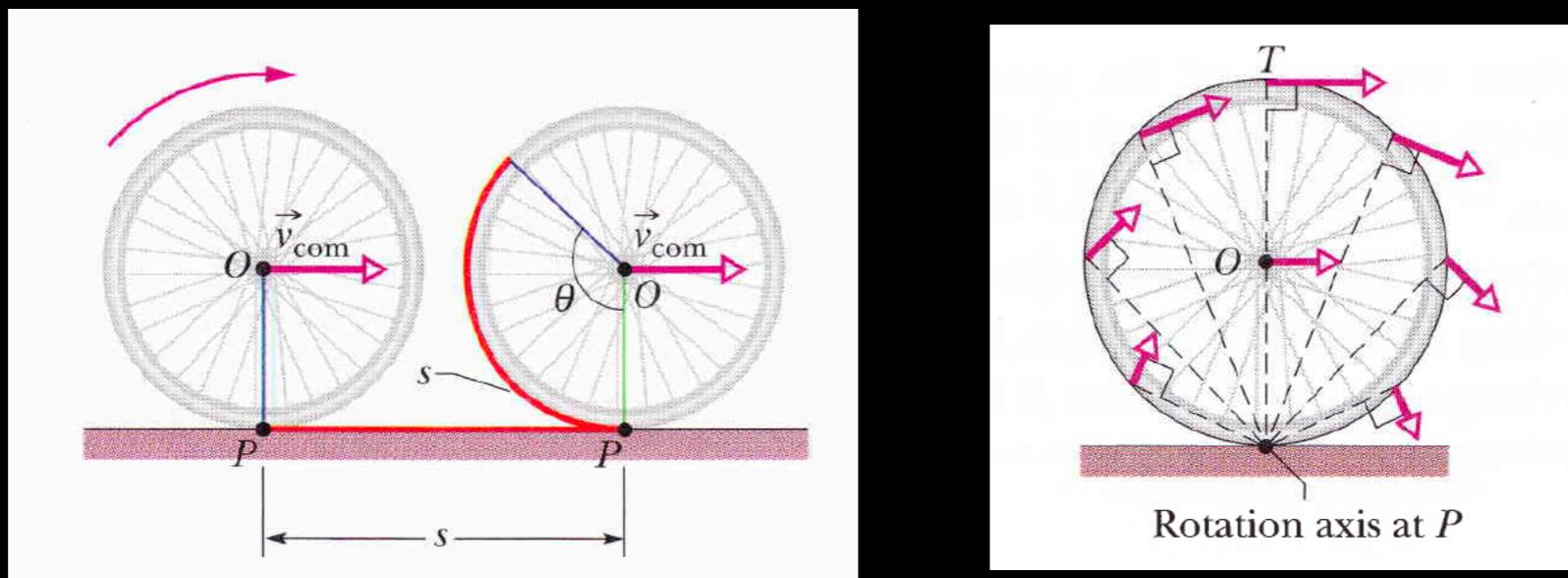
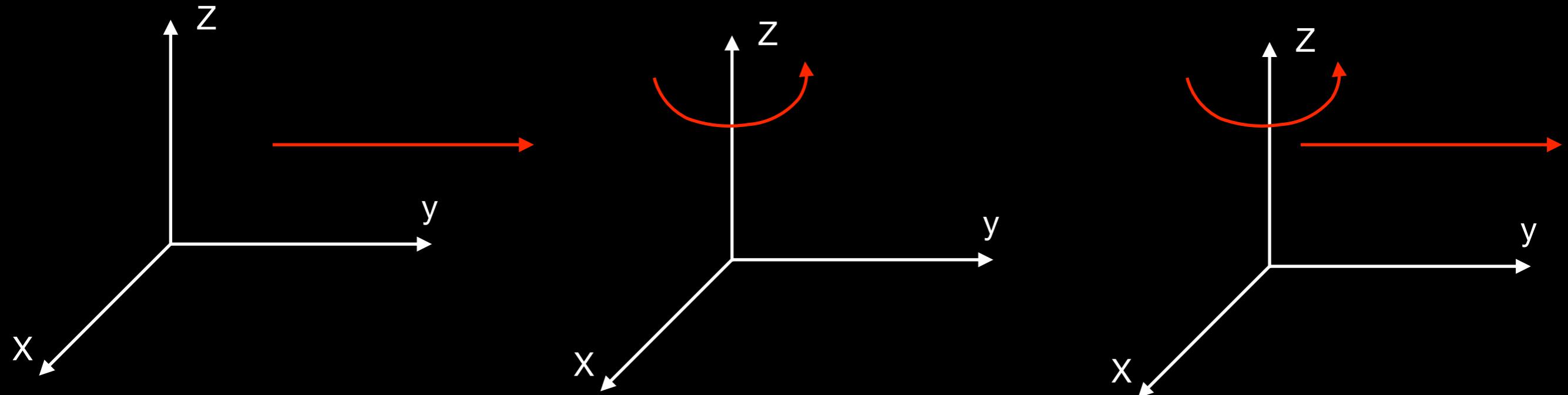


Moti del corpo rigido



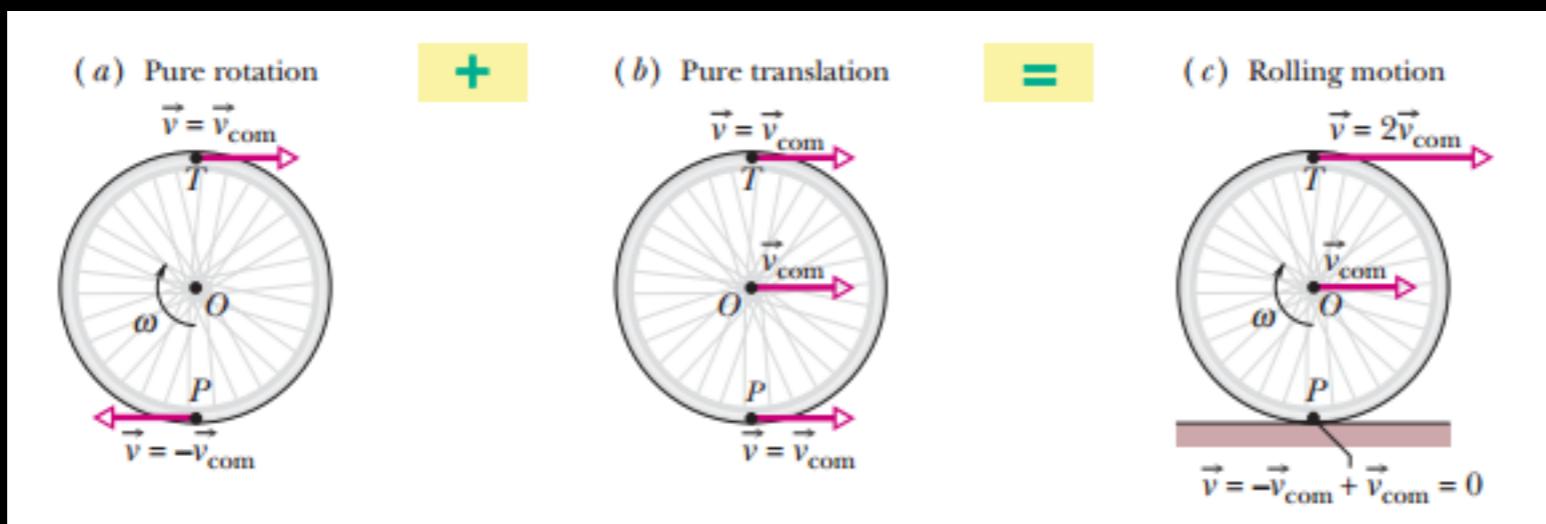
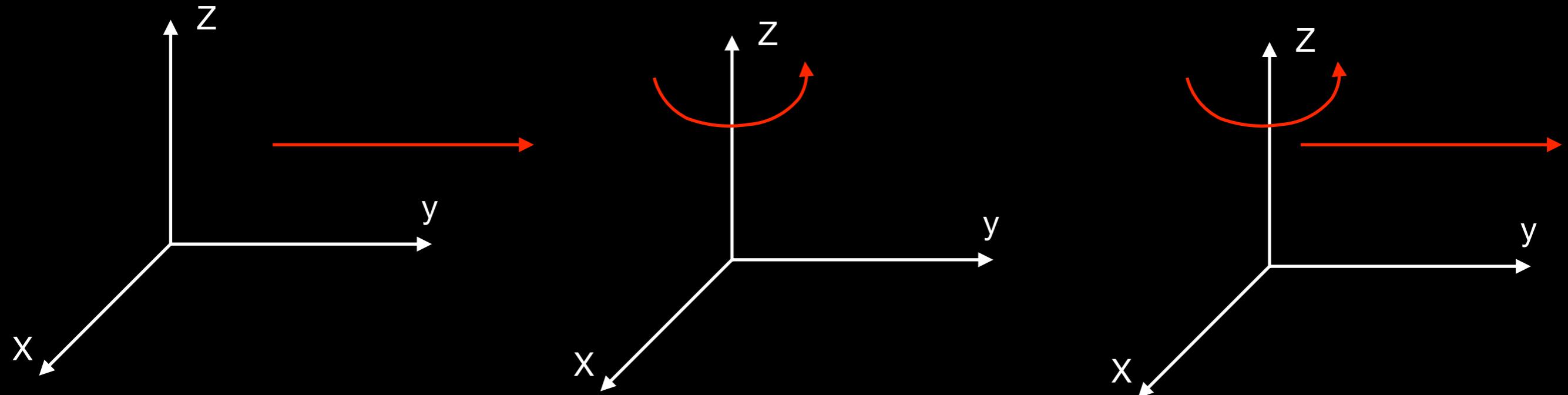
si parte considerando prima che la ruota nel rotolamento ha sempre un punto fisso che poggia a terra e rispetto al quale la velocità del centro di massa è quella di un punto che si muove su una traiettoria circolare $v = \omega r$

Moti del corpo rigido



come vedremo questo comporta che il centro di massa avrà una velocità traslazione uguale a $V = \omega r$

Moti del corpo rigido



Dimostrazione geometrica

Moti del corpo rigido

Nella prima parte del corso abbiamo trattato solo i moti traslazioni considerando i corpi fisici come punti materiali.

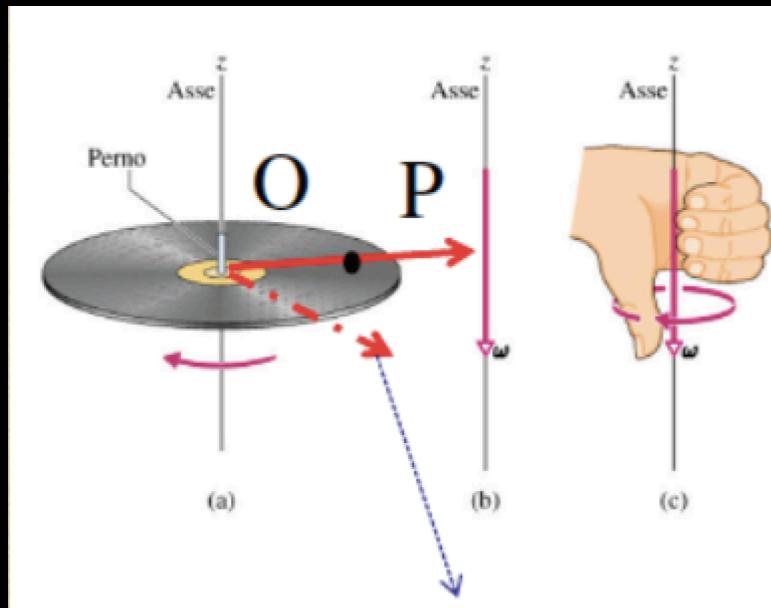
Nella dinamica dei corpi rigidi occorre tenere in considerazione anche le rotazioni e, di conseguenza, il fatto che rotazioni e traslazioni possono avvenire insieme generando i moti roto-traslazionali.

E' importante quindi definire le quantità associate a questi moti e partiamo con le rotazioni.

Per esempio, è importante associare alle rotazioni l'energia cinetica che deriva dal fatto che un corpo in rotazione ha delle velocità con cui tutti i punti che appartengono ad un corpo ruotano intorno ad un asse fisso



Moto Rotatorio



Linea di riferimento

Moto di un corpo rigido si dice puramente rotatorio: se e solo se tutti gli elementi del corpo si muovono lungo una traiettoria circolare. I centri di tutte le circonferenze devono cadere su una stessa retta detta asse di rotazione. Il piano della traiettoria è perpendicolare all'asse di rotazione.



Moto di un corpo rigido si dice puramente rotatorio attorno ad un asse se e solo se tutte le **linee di riferimento** ortogonali all'asse descrivono angoli uguali in intervalli di tempo uguali.

Variabili rotazionali

The diagram shows a 3D coordinate system with axes x , y , and z . A purple sphere represents a rigid body, with point P on its surface. A red arrow labeled "Linea di riferimento" indicates a reference line from P to the x - y plane. A green arrow labeled "2D" points to a 2D coordinate system centered at the origin O of the x - y plane. In this 2D plane, point P is at distance r from the origin, and the angle θ is measured counter-clockwise from the positive x -axis to the "Linea di riferimento".

La posizione del corpo è specificata dalla posizione di un suo elemento P.

Asse di rotazione

Corpo

P

Linea di riferimento

Definisce un piano di riferimento

2D

Asse di rotazione

A

P

Linea di riferimento

θ

r

$\vartheta = \frac{s}{r}$ radianti

2π rad = 360°

1 rad = 57.3°

Moto 2D di un elemento lungo una circonferenza di raggio r (PA). Verso positivo è scelto quello antiorario rispetto all'asse z.

θ individua la posizione angolare della linea di riferimento

Variabili rotazionali

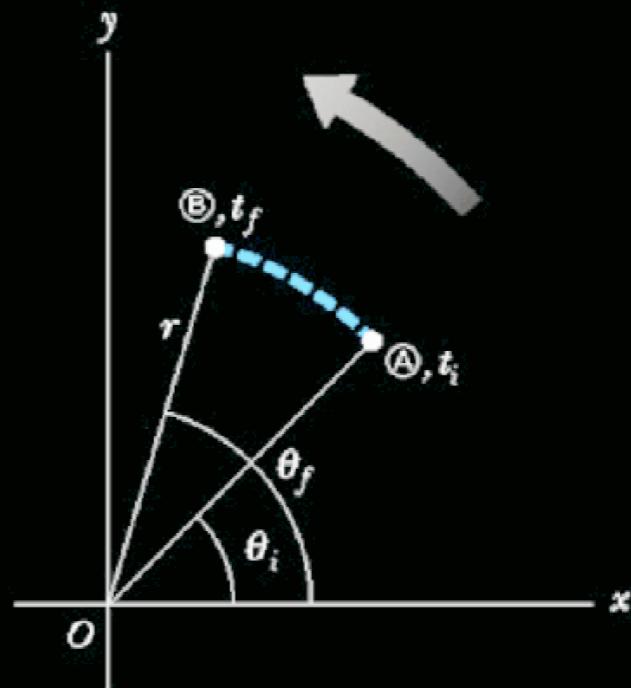
- Lo spostamento angolare è definito come l'angolo di rotazione dell'oggetto in un intervallo di tempo finito:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

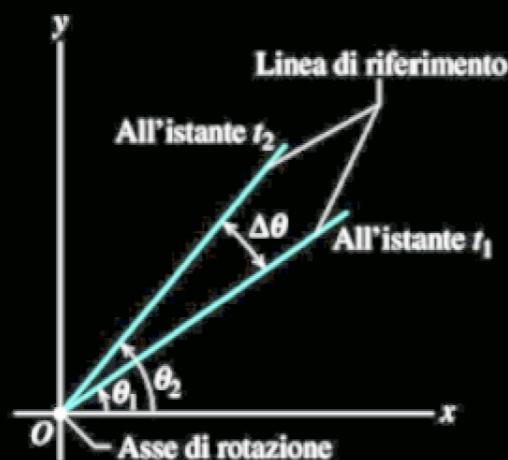
- E' l'angolo spazzato dalla linea di riferimento di lunghezza r

- La velocità angolare *media* $\bar{\omega}$ di un corpo rigido in rotazione è il rapporto fra spostamento angolare e intervallo di tempo:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$



Variabili rotazionali



Spostamento angolare: $\Delta\vartheta$

$$\text{la velocità angolare media: } \bar{\omega} = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \quad [\text{rad/s}]$$

$$\text{la velocità istantanea: } \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

In un moto puramente rotatorio di un corpo rigido: tutti i suoi elementi hanno la stessa ω .

Se P ha una ω non costante:

[rad/s²]

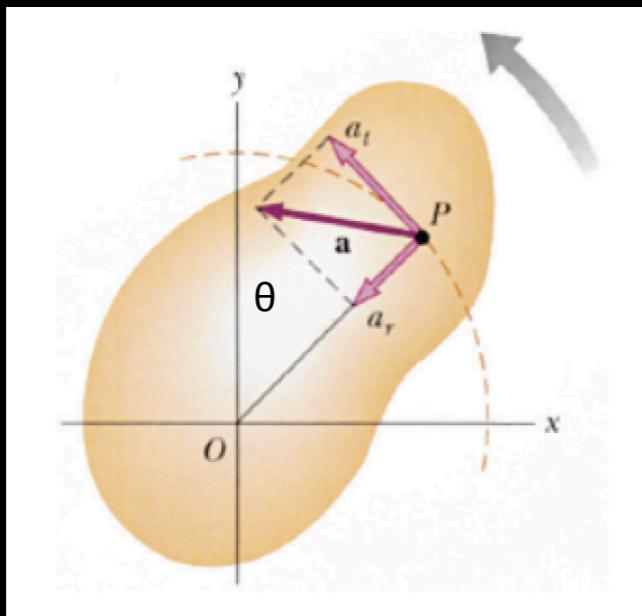
$$\text{accelerazione angolare media: } \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\text{accelerazione istantanea: } \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

In un moto puramente rotatorio di un corpo rigido: tutti i suoi elementi hanno la stessa α .

Velocità e accelerazione

Un moto rotatorio può essere sempre decomposto in una componente tangenziale ed in un radiale o centripeta



$$\vartheta = \frac{s}{r} \text{ radiant}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} r \Leftrightarrow v_T = \omega r$$

Velocità e accelerazione

La velocità in un corpo che ruota attorno ad un asse è sempre *tangente* al percorso:
 $v = v_T$ (velocità tangenziale).

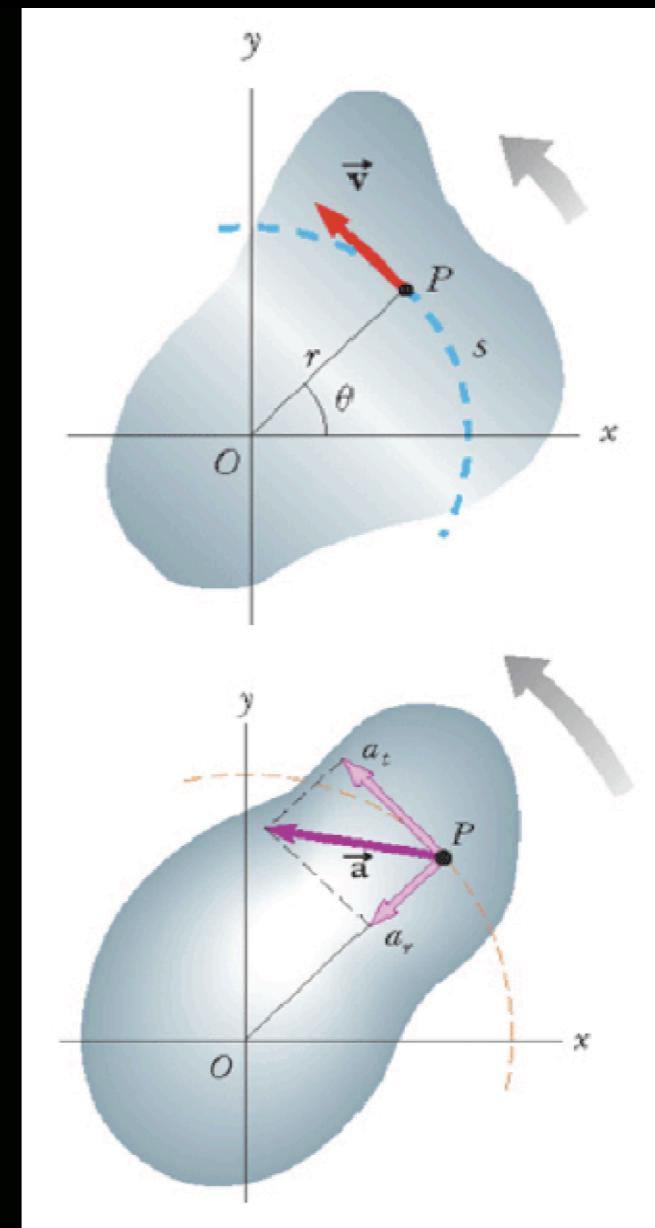
L'accelerazione ha una componente *tangenziale*:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\alpha$$

e una radiale, o *centripeta*: dimensioni?

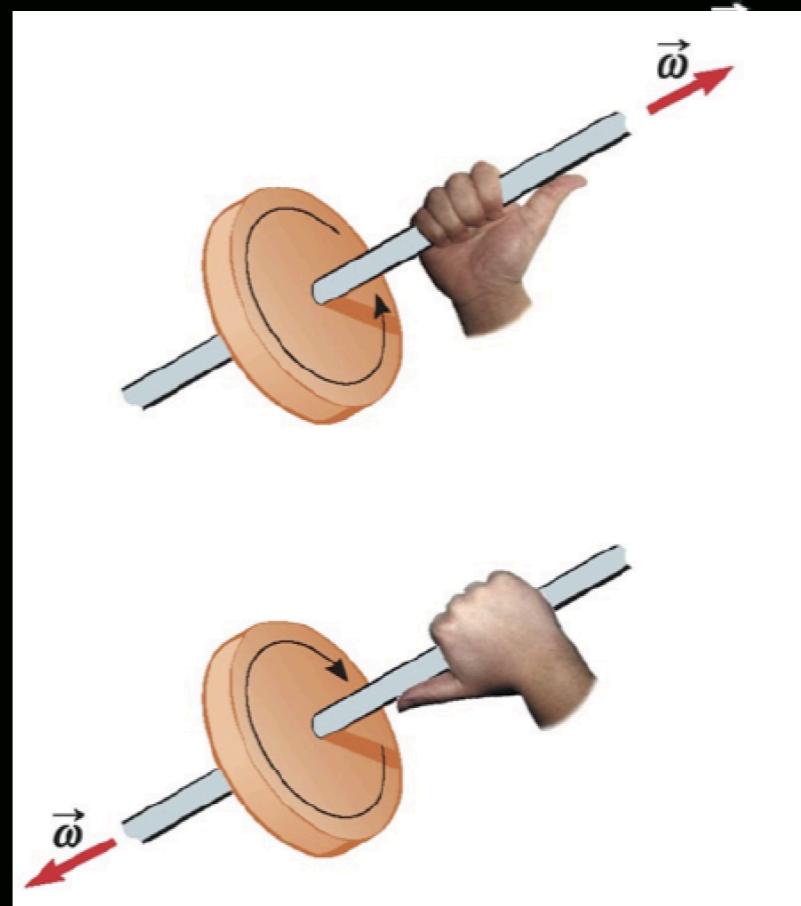
$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$\text{con } |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



Direzione e verso

- Velocità e accelerazione angolare possono essere definiti come vettori $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$, rispettivamente di modulo ω e α , diretti lungo l'asse di rotazione
- Il verso di $\vec{\omega}$ è dato dalla regola della mano destra
- $\vec{\alpha}$ è diretto come $\vec{\omega}$ se la velocità angolare aumenta, in senso opposto se la velocità angolare diminuisce



Con questa definizione, la velocità di un punto del corpo rigido può essere scritta in generale come $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, ovvero $v = \omega r_{\perp}$, dove r_{\perp} è la distanza dall'asse. Questa è l'espressione da usare in tre dimensioni.

Cinematica Rotazionale

Per *accelerazione angolare costante* (in modulo, direzione e verso!) si può descrivere il moto del corpo rigido usando delle equazioni cinematiche: l'analogo rotazionale delle equazioni cinematiche del moto lineare. Matematicamente:

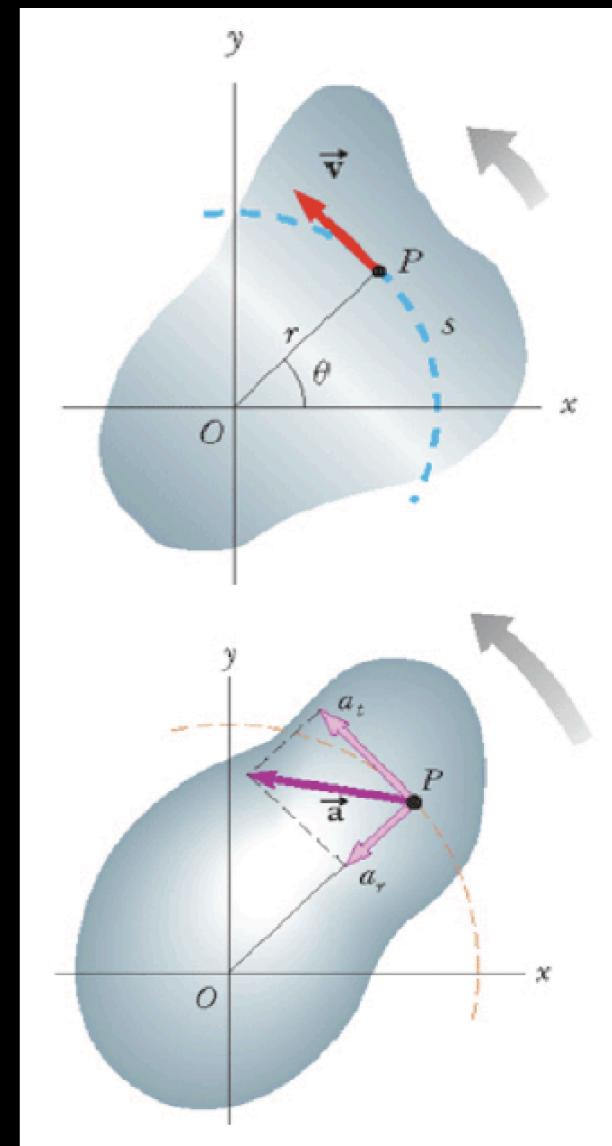
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

La relazione fra quantità lineari ed angolari è semplicemente

$$s(t) = \theta r_{\perp} \quad , \quad v(t) = \omega r_{\perp} \quad , \quad a_t = \alpha r_{\perp}$$

dove a_t è l'accelerazione tangenziale e r_{\perp} la distanza dall'asse di rotazione (attenzione: non dall'origine!)

Notare che tutti i punti del corpo ruotante hanno lo stesso moto angolare, ma hanno moto lineare differente.



Energia Cinetica Rotazionale

Un corpo ruotante con velocità angolare ω possiede un'energia cinetica rotazionale. Ogni particella del corpo ha energia cinetica $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, dove $v_i = \omega r_{\perp i}$. L'energia cinetica rotazionale è la somma di tali energie:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove I è noto come *momento d'inerzia*.

Notare l'analogia fra energie cinematiche associate al moto lineare:

$K = \frac{1}{2}mv^2$, e associate al moto rotazionale, $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$.

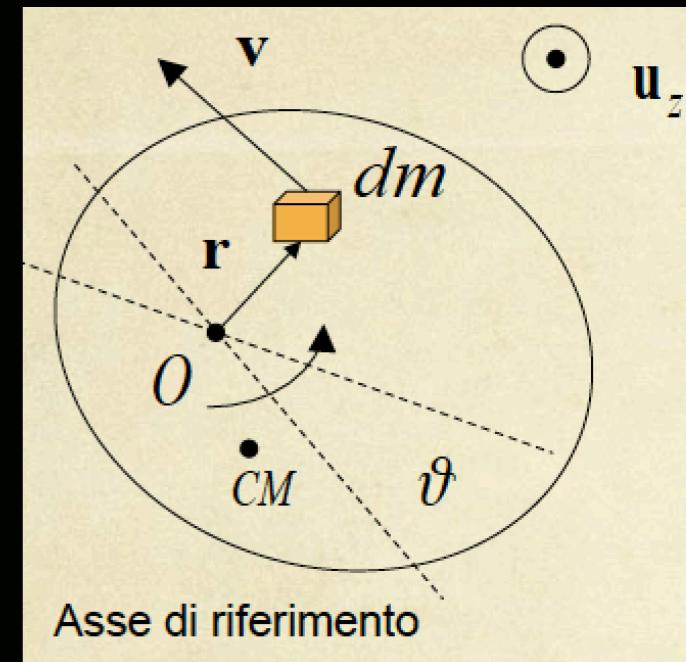
L'energia cinetica rotazionale non è un nuovo tipo di energia! E' energia cinetica e si misura nelle stesse unità, joule (J)

Momento d'Inerzia

Definizione del momento d'inerzia: $I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$ (Unità SI: $\text{kg}\cdot\text{m}^2$).

- Il momento d'inerzia *dipende dall'asse di rotazione!* (ma può essere calcolato rispetto a qualunque origine, purché sull'asse di rotazione).
- Si può calcolare il momento d'inerzia di un corpo dividendolo in piccoli elementi di volume, ognuno di massa Δm_i . Nel limite continuo:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 = \int r_{\perp}^2 dm.$$



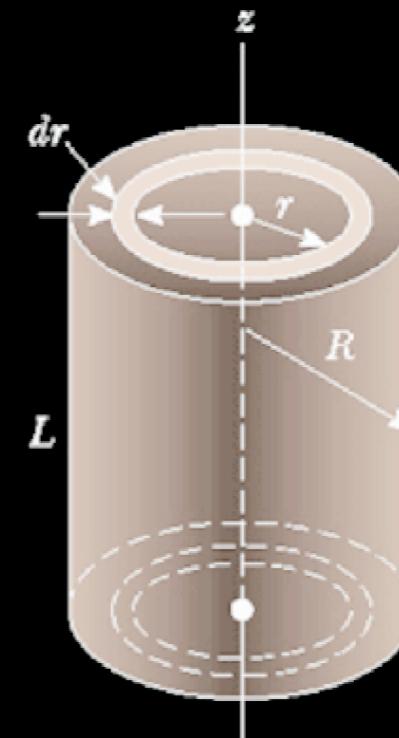
- Come per il centro di massa, tale integrale è in generale complicato, salvo per corpi di densità ρ costante (in tal caso $dm = \rho dV$ e ci si riduce a un integrale di volume), oggetti di forma semplice, asse di rotazione simmetrico.

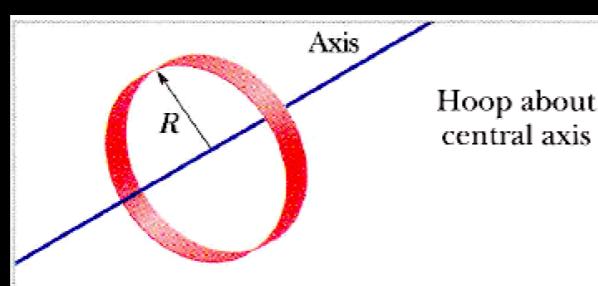
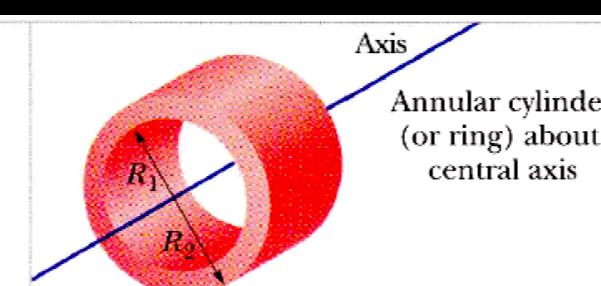
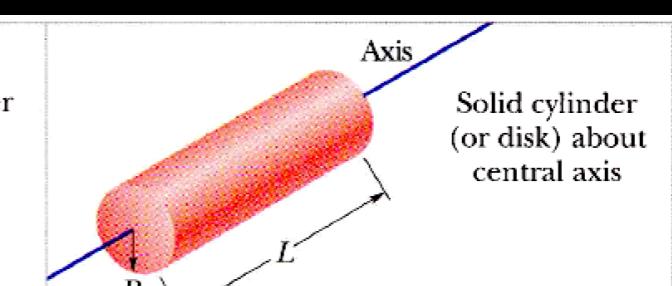
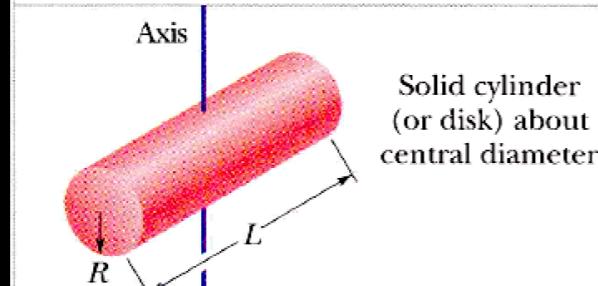
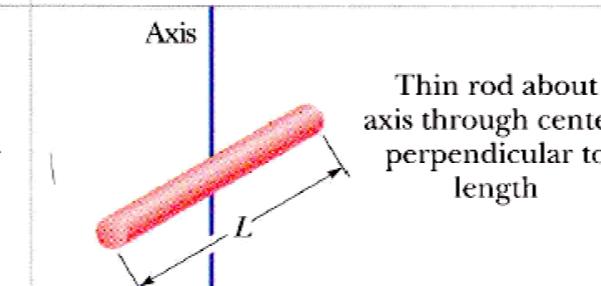
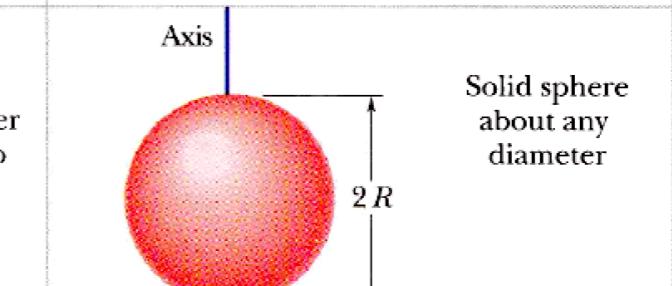
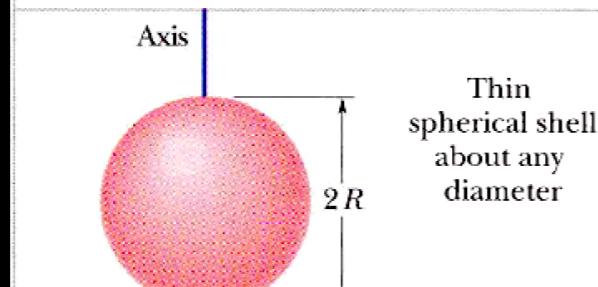
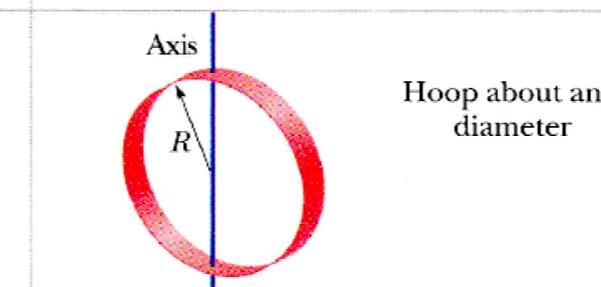
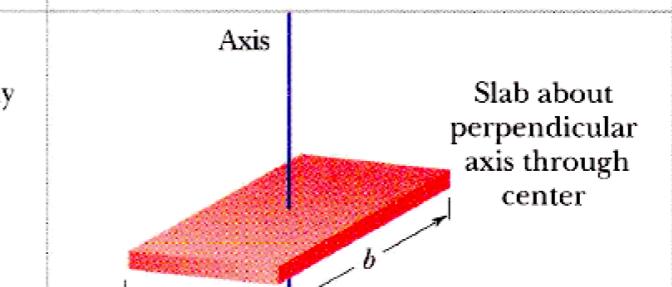
- Modello di una molecola biatomica omonucleare: due atomi di massa M a distanza d , rispetto ad un asse passante per il centro:

$$I = M \left(\frac{d}{2}\right)^2 + M \left(\frac{-d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} M d^2$$

- Momento d'inerzia di un cilindro omogeneo attorno al suo asse: poniamo $\rho = M/(\pi R^2 L)$, $dm = \rho(2\pi r L)dr$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r^2 \rho (2\pi r L) dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2M R^4}{R^2} \frac{4}{4} = \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$



 <p>Hoop about central axis</p> $I = MR^2$	 <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	 <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> $I = \frac{1}{2}MR^2$
 <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$	 <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> $I = \frac{1}{12}ML^2$	 <p>Solid sphere about any diameter</p> $I = \frac{2}{5}MR^2$
 <p>Thin spherical shell about any diameter</p> $I = \frac{2}{3}MR^2$	 <p>Hoop about any diameter</p> $I = \frac{1}{2}MR^2$	 <p>Slab about perpendicular axis through center</p> $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

Teorema di Huyghens-Steiner

Prendiamo un corpo piano qualsiasi che ruota intorno al punto O

Calcoliamo ora il momento d'inerzia rispetto al punto O

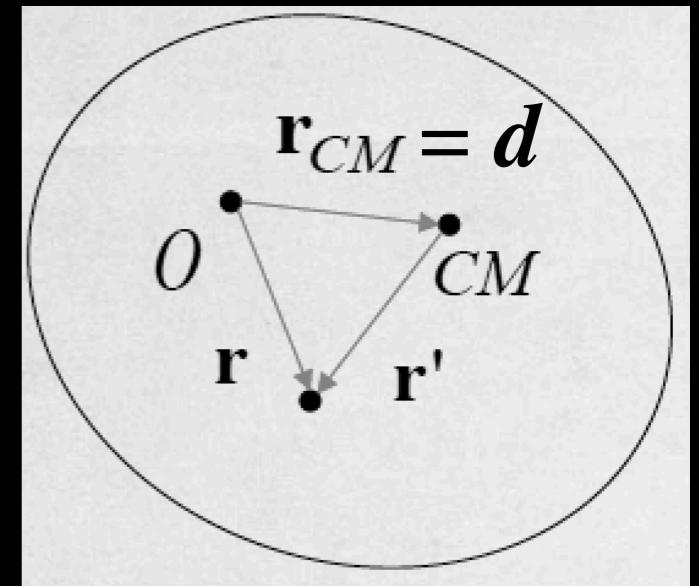
$$I_0 = \int r^2 dm = \int (r_{CM} + r')^2 dm$$

$$I_0 = \int (r_{CM}^2 + r'^2 + 2r_{CM}r') dm =$$

$$I_0 = \int r_{CM}^2 dm + \int r'^2 dm + 2r_{CM} \int r' dm$$

ossia

$$I_0 = mr_{CM}^2 + \int r'^2 dm = mr_{CM}^2 + I_{CM}$$

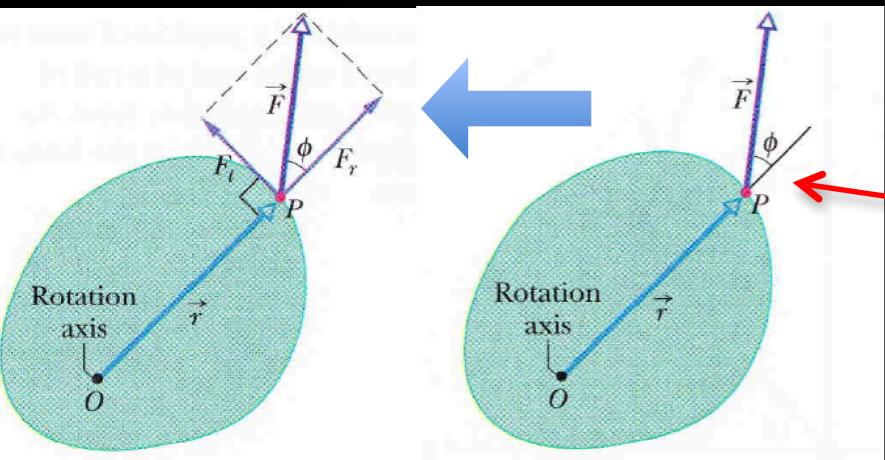


definizione del CM nel suo
stesso sistema di riferimento,
ossia =0

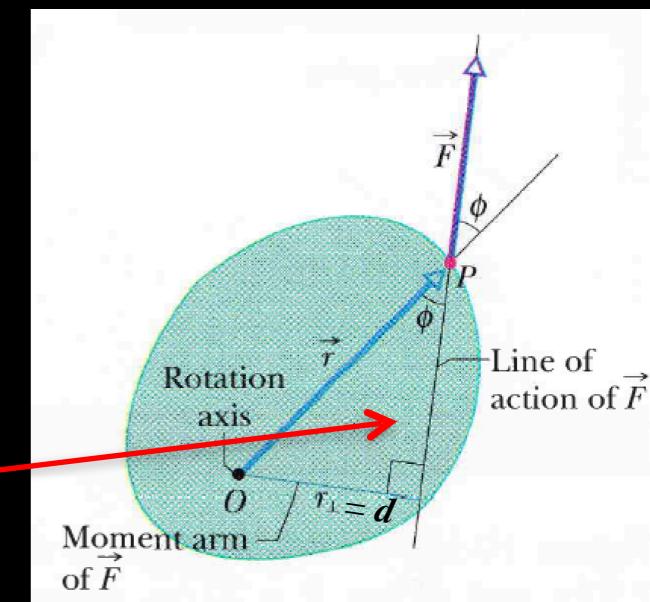
Momento della forza

Se è la forza che cambia il moto, cos'è che cambia la rotazione?

- *Momento, $\vec{\tau}$, di una forza, \vec{F} :* è un vettore definito come
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$
.
- Il momento di una forza *dipende dall'origine e dal punto ove la forza è applicata!* (tipicamente, l'origine è scelta su di una asse di rotazione)



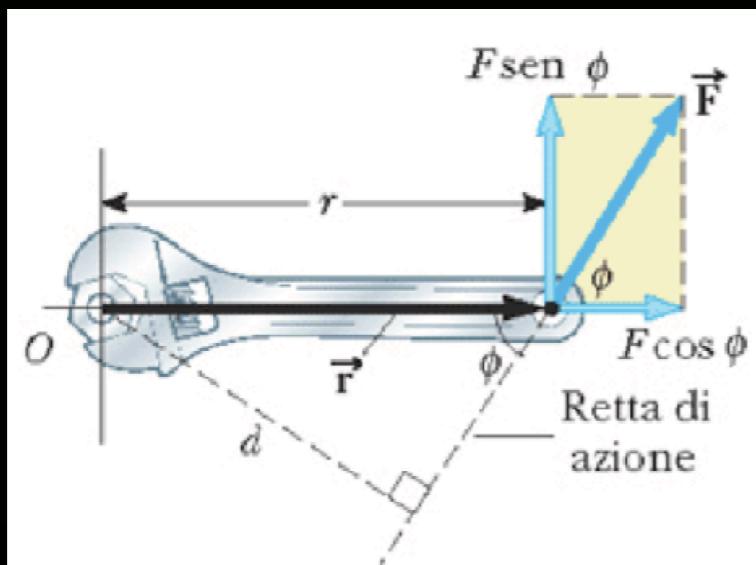
- ϕ è l'angolo fra la forza \vec{F} e il vettore \vec{r} fra l'origine e il punto di applicazione della forza
- $\tau = rF \sin \phi = dF$ dove $d = r \sin \phi$ è il *braccio del momento* o della leva



Momento della forza

Se è la forza che cambia il moto, cos'è che cambia la rotazione?

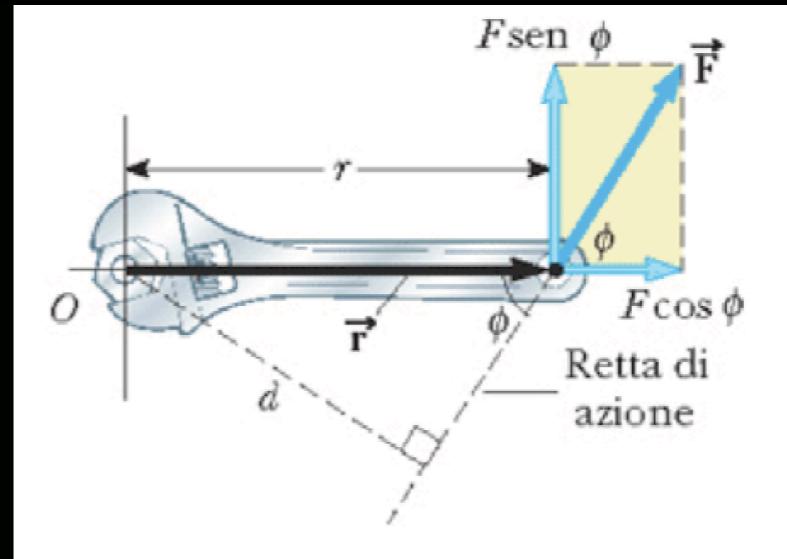
- *Momento, $\vec{\tau}$, di una forza, \vec{F} :* è un vettore definito come
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$
.
- Il momento di una forza *dipende dall'origine e dal punto ove la forza è applicata!* (tipicamente, l'origine è scelta su di una asse di rotazione)



- ϕ è l'angolo fra la forza \vec{F} e il vettore \vec{r} fra l'origine e il punto di applicazione della forza
- $\tau = rF \sin \phi = dF$ dove $d = r \sin \phi$ è il *braccio del momento* o della leva

Momento della forza

- Il momento della forza ci dà la "tendenza" di una forza a far ruotare un corpo (attorno ad un certo asse).
- Solo la componente della forza ortogonale a \vec{r} produce momento, ovvero tende a far ruotare un corpo



- La componente lungo \vec{r} della forza non produce momento, ovvero non tende a far ruotare un corpo
- Il momento è *positivo* se la rotazione indotta è *antioraria*

Unità SI del momento: N·m. Attenzione: benché il momento sia una forza moltiplicata per una distanza, è molto diverso da lavoro ed energia! Il momento non si indica mai in Joule.