Analisi Matematica I
Corsi di Laurea in Ingegneria Informatica e Ingegneria dell'Automazione
Simulazione seconda prova in itinere – dicembre 2023

Scrivere uno svolgimento completo per ogni esercizio

1. Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin(3x) + a\cos(2x) & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{b - x}{2 + x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

i) Determinare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta continua in $\mathbb{R}$

ii) Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta anche derivabile in $\mathbb{R}$

Esempio di svolgimento.

i) La funzione f è continua (almeno) in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per tutti i valori di $a, b \in \mathbb{R}$.
Inoltre, f è continua in 0 se e solo se è verificata la condizione

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\,.$$

Per qualsiasi valore di $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\sin(3x) + a\cos(2x)) = a = f(0)\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{b - x}{2 + x} = \frac{b}{2}$$

e quindi f è continua in 0 se e solo se $a = \dfrac{b}{2}$. In conclusione, f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se $\boxed{2a = b}$

ii) La funzione f è derivabile (almeno) in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per tutti i valori di $a, b \in \mathbb{R}$, con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 3\cos(3x) - 2a\sin(2x) & \text{se } x < 0 \\ -\dfrac{2 + b}{(2 + x)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Affinché f sia derivabile in 0, è necessario che f sia continua in 0, quindi gli eventuali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali f risulti derivabile anche in 0 dovranno essere tali che $2a = b$.
Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 3\cos(3x) = 3\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{2 + b}{(2 + x)^2} = -\frac{2 + b}{4}$$

dunque per ogni coppia di parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua in $x = 0$ esistono derivata sinistra e destra di f in 0, di valori

$$f'_-(0) = 3\,, \qquad f'_+(0) = -\frac{2 + b}{4}\,.$$

La funzione f è derivabile in 0 se e solo se $f'_-(0) = f'_+(0)$, perciò se e solo se è soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} 2a = b \\ 3 = -\dfrac{2 + b}{4} \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -7$, $b = -14$. In conclusione, f è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se $\boxed{a = -7,\ b = -14}$

2. Studiare la seguente funzione e tracciarne un grafico qualitativo

$$f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}$$

In particolare determinare:

i) dominio di f, zeri, segno, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti;

ii) espressione di f' nell'insieme in cui è definita, eventuali punti di non derivabilità di f e loro natura, gli intervalli in cui f risulta crescente o decrescente, eventuali punti di massimo o minimo relativo per f e valori assunti da f in tali punti;

iii) espressione di f'' nell'insieme in cui è definita, gli intervalli in cui f risulta convessa o concava, eventuali punti di flesso.

Esempio di svolgimento (con commenti).

i) Il dominio di f è $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \qquad & \text{se } x = -1 \text{ oppure } x = 0 \\ f(x) > 0 \qquad & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty) \\ f(x) < 0 \qquad & \text{se } x \in (0, 1) \end{aligned}$$

Per il resto dello svolgimento può essere utile esprimere $f(x)$ esplicitando il valore assoluto: si ha

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 + x}{x-1} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ \dfrac{x^2 + x}{x-1} & \text{se } x \in [-1, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Vale

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

dunque il grafico di f ha un asintoto verticale di equazione $x = 1$, e potrebbe avere degli asintoti obliqui per $x \to -\infty$ o per $x \to +\infty$. Per verificare se effettivamente esistano asintoti obliqui, controlliamo innanzitutto se $f(x)/x$ ammette limiti finiti per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$:

$$m_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x-1}{x-1} = -1\,, \qquad m_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1\,.$$

I limiti m_1 e m_2 esistono finiti, quindi controlliamo se le differenze $f(x) - m_1 x$ e $f(x) - m_2 x$ hanno limite finito rispettivamente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$:

$$q_1 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - m_1 x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x-1} = -2\,,$$

$$q_2 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - m_2 x) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2\,.$$

Anche i limiti q_1 e q_2 esistono finiti, quindi le rette di equazioni $y = m_1 x + q_1$ e $y = m_2 x + q_2$ sono asintoti obliqui per il grafico di f rispettivamente a $-\infty$ e a $+\infty$. In conclusione,

$$\begin{aligned} x = 1 \quad & \text{è asintoto verticale per il grafico di } f \\ y = -x - 2 \quad & \text{è asintoto obliquo a } -\infty \text{ per il grafico di } f \\ y = x + 2 \quad & \text{è asintoto obliquo a } +\infty \text{ per il grafico di } f \end{aligned}$$

ii) f è certamente derivabile almeno in ciascuno degli intervalli aperti $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, +\infty)$, cioè in tutto $D \setminus \{-1\}$. In particolare, per $x \in D \setminus \{-1\}$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} & \text{se } x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Verifichiamo se anche -1 è un punto di derivabilità per f. Osserviamo che f è continua in -1 (essendo continua in tutto il suo dominio) e che esistono finiti i limiti

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -\frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \frac{1}{2}$$

perciò f ammette derivata sinistra e destra in -1, distinte tra loro: $f'_-(-1) = -1/2$, $f'_+(-1) = 1/2$. Dunque f non è derivabile in -1, che risulta essere un punto angoloso per f, e quindi l'insieme dei punti in cui è definita la derivata prima f' è effettivamente solo $D \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Per individuare gli intervalli in cui f è crescente o decrescente, studiamo il segno di f'. Il denominatore $(x-1)^2$ che appare nell'espressione analitica di $f'(x)$ è sempre positivo nell'insieme di definizione di f'. La quantità $x^2 - 2x - 1$ è invece positiva per $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$, nulla per $x = 1 \pm \sqrt{2}$ e negativa per $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 0 && \text{per } x = 1 \pm \sqrt{2} \\
&f'(x) > 0 && \text{per } x \in (-1, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty) \\
&f'(x) < 0 && \text{per } x \in (-\infty, -1) \cup (1-\sqrt{2}, 1) \cup (1, 1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned}
&f \text{ è strettamente crescente in } [-1, 1-\sqrt{2}] \text{ e in } [1+\sqrt{2}, +\infty)\,, \\
&f \text{ è strettamente decrescente in } (-\infty, -1]\,, \text{ in } [1-\sqrt{2}, 1) \text{ e in } (1, 1+\sqrt{2}]\,.
\end{aligned}$$

I punti $x_1 = -1$ e $x_3 = 1+\sqrt{2}$ sono di minimo relativo per f, mentre il punto $x_2 = 1-\sqrt{2}$ è di massimo relativo per f. Vale

$$f(-1) = 0\,, \qquad f(1-\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}\,, \qquad f(1+\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$$

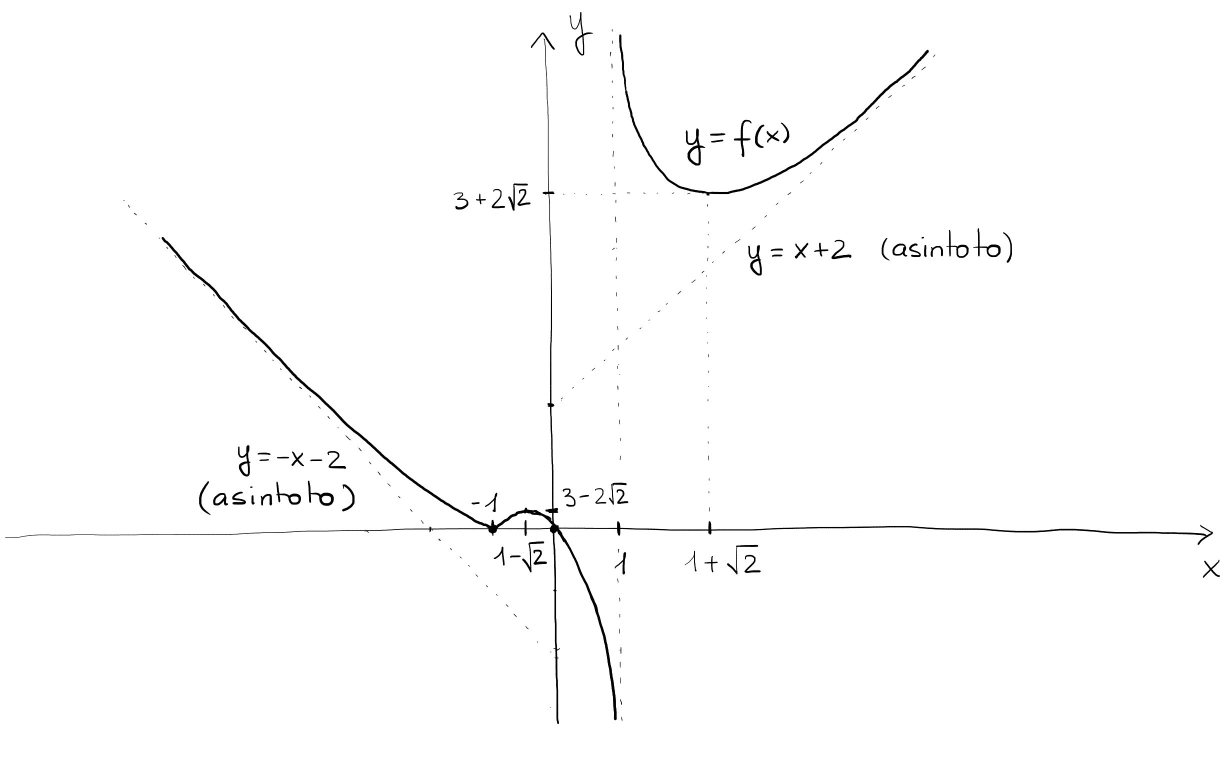
iii) f' è derivabile in tutto il suo insieme di definizione $D \setminus \{-1\}$, con

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(x-1)^3} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\[2ex] \dfrac{4}{(x-1)^3} & \text{se } x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Si ha $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty - 1) \cup (1, +\infty)$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$, perciò

$$\begin{aligned}
&f \text{ è convessa in } (-\infty, -1) \text{ e in } (1, +\infty) \\
&f \text{ è concava in } (-1, 1)
\end{aligned}$$

e non esistono punti di flesso per f.



3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x\cos(\log(1+x)) - \sin(3x+3x^3)}{x\sin x - \sin(x^2)}$$

Esempio di svolgimento 1.

Applicando gli sviluppi di Taylor notevoli si ha, per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
x\sin x - \sin(x^2) &= x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)\right) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5) - x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^8) \\
&= -\frac{x^4}{6} + o(x^4) \sim -\frac{x^4}{6}\,, \\
3x\cos(\log(1+x)) &= 3x\cos\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= 3x\left[1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3\right)\right] \\
&= 3x\left[1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3)\right] \\
&= 3x\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right] \\
&= 3x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)\,, \\
\sin(3x+3x^3) &= (3x+3x^3) - \frac{1}{6}(3x+3x^3)^3 + o((3x+3x^3)^4) \\
&= 3x + 3x^3 - \frac{9}{2}x^3(1+x^2)^3 + o(x^4) \\
&= 3x + 3x^3 - \frac{9}{2}x^3(1+3x^2+3x^4+x^6) + o(x^4) \\
&= 3x + 3x^3 - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4) \\
&= 3x - \frac{3}{2}x^3 + o(x^4)\,,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
3x\cos(\log(1+x)) - \sin(3x+3x^3) &= 3x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) - 3x + \frac{3}{2}x^3 + o(x^4) \\
&= \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \sim \frac{3}{2}x^4
\end{aligned}$$

perciò il limite assegnato vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x\cos(\log(1+x)) - \sin(3x+3x^3)}{x\sin x - \sin(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^4}{-\frac{1}{6}x^4} = \frac{3}{2}\cdot(-6) = -9$$

Esempio di svolgimento 2.

Poniamo

$$f(x) = 3x\cos(\log(1+x)) - \sin(3x+3x^3)\,, \qquad g(x) = x\sin x - \sin(x^2)$$

Le funzioni f e g sono continue e derivabili infinite volte in un intorno di $x = 0$. Risulta $f(0) = g(0) = 0$, quindi il limite da calcolare si presenta nella forma indeterminata $[0/0]$. Si prova a risolvere la forma di indeterminazione applicando il teorema di de l'Hôpital, se necessario più volte. Calcoliamo f' e g'.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos(\log(1+x)) - \frac{3x\sin(\log(1+x))}{1+x} - 3(1+3x^2)\cos(3x+3x^3) \\ g'(x) &= \sin x + x\cos x - 2x\cos(x^2) \end{aligned}$$

Risulta $f'(0) = g'(0) = 0$. Calcoliamo quindi f'' e g''.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{6\sin(\log(1+x))}{1+x} - \frac{3x\cos(\log(1+x))}{(1+x)^2} + \frac{3x\sin(\log(1+x))}{(1+x)^2} \\ &\quad - 18x\cos(3x+3x^3) + 9(1+3x^2)^2\sin(3x+3x^3) \\ g''(x) &= 2\cos x - x\sin x - 2\cos(x^2) + 4x^2\sin(x^2) \end{aligned}$$

Risulta ancora $f''(0) = g''(0) = 0$. Calcoliamo f''' e g'''.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -\frac{9\cos(\log(1+x))}{(1+x)^2} + \frac{9\sin(\log(1+x))}{(1+x)^2} - \frac{3x\sin(\log(1+x))}{(1+x)^3} + \frac{9x\cos(\log(1+x))}{(1+x)^3} \\ &\quad - 18\cos(3x+3x^3) + 162x(1+3x^2)\sin(3x+3x^3) + 27(1+3x^2)^3\cos(3x+3x^3) \\ g'''(x) &= -3\sin x - x\cos x + 12x\sin(x^2) + 8x^3\cos(x^2) \end{aligned}$$

Risulta ancora $f'''(0) = g'''(0) = 0$. Calcoliamo f'''' e g''''.

$$\begin{aligned} f''''(x) &= -\frac{12\sin(\log(1+x))}{(1+x)^3} + \frac{36\cos(\log(1+x))}{(1+x)^3} - \frac{30x\cos(\log(1+x))}{(1+x)^4} \\ &\quad + [54(1+3x^2) + 162(1+9x^2) - 81(1+3x^2)^4]\sin(3x+3x^3) + 972x(1+3x^2)^2\cos(3x+3x^3) \\ g''''(x) &= -4\cos x + x\sin x + 12\sin(x^2) + 48x^2\cos(x^2) - 16x^4\sin(x^2) \end{aligned}$$

Risulta $f''''(0) = 36$ e $g''''(0) = -4$. Dunque applicando 4 volte il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)}{g''(x)} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} \overset{(4)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f''''(x)}{g''''(x)} = \frac{f''''(0)}{g''''(0)} = \frac{36}{-4} = -9\,.$$

Osservazione: per giustificare l'applicazione del teorema di de l'Hôpital, si dovrebbe verificare che g', g'', g''' e g'''' non si annullano mai in un opportuno intorno destro di 0, cioè in un intervallo del tipo $(0,\delta)$ per qualche $\delta > 0$. Siccome $g''''(0) = -4$ e g'''' è continua in $\mathbb{R}$, si ha $g'''' < 0$ in un opportuno intorno $(-\delta,\delta)$ di 0 per il teorema di permanenza del segno. Allora g''' è strettamente decrescente in $(-\delta,\delta)$ e quindi, poiché $g'''(0) = 0$, si ha necessariamente $g'''(x) < 0$ per ogni $x \in (0,\delta)$. Ragionando in maniera analoga si conclude che anche g'' e g' sono strettamente decrescenti in $[0,\delta)$, e negative in $(0,\delta)$, e quindi in particolare mai nulle in $(0,\delta)$.

4. Calcolare l'integrale

$$\int_2^3 \frac{x^4}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$$

Esempio di svolgimento.

Il numeratore x^4 dell'integranda è un polinomio di grado non minore del grado del denominatore x^3-1. Eseguendo la divisione del polinomio $P(x)=x^4$ per il polinomio $Q(x)=x^3-1$ si ottengono il quoziente $P_1(x)=x$ e il resto $P_2(x)=x$, per cui vale l'identità

$$x^4 = x(x^3-1)+x$$

e l'integranda si riscrive come

$$\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1}\,.$$

Scomponiamo la frazione $x/(x^3-1)$ come somma di fratti semplici. Il quoziente x^3-1 si esprime come prodotto di fattori irriducibili come

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\,.$$

(I due fattori $x-1$ e x^2+x+1 compaiono nella fattorizzazione di x^3-1 ciascuno con molteplicità 1, perciò è possibile esprimere $x/(x^3-1)$ come somma di due fratti semplici con denominatori $x-1$ e x^2+x+1, rispettivamente; il fratto semplice di denominatore $x-1$ avrà come numeratore una costante; il fratto semplice di denominatore x^2+x+1 avrà come numeratore un polinomio di grado ≤ 1, che si potrà esprimere come somma di un multiplo della derivata $(2x+1)$ del denominatore, più una costante.)

Cerchiamo tre costanti $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B(2x+1)+C}{x^2+x+1}\,.$$

Poiché

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1} + \frac{B(2x+1)+C}{x^2+x+1} &= \frac{Ax^2+Ax+A+2Bx^2-Bx-B+Cx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= \frac{(A+2B)x^2+(A-B+C)x+A-B-C}{(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

dobbiamo imporre che A, B, C soddisfino

$$\begin{cases} A+2B=0\\ A-B+C=1\\ A-B-C=0\end{cases}$$

La soluzione del sistema è data da $A=1/3$, $B=-1/6$, $C=1/2$, perciò troviamo

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

Calcoliamo quindi l'integrale indefinito

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^3-1}\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.\end{aligned}$$

La funzione $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ è quindi una primitiva di $f(x)=\frac{x^4}{x^3-1}$ su $(1,+\infty)$. Poiché f è continua in $[2,3]$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_2^3 \frac{x^4}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = F(3)-F(2) = \frac{5}{2} + \frac{\log 2}{3} - \frac{\log(13/7)}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right].$$