asintotici

mercoledì 25 ottobre 2023 08:38

Def

Siano a_n e b_n successioni di num. reali con $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
si dice b_n asintotico a_n per $n \to +\infty$ $(b_n \sim a_n)$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Osservazione

se $b_n \sim a_n$ (e $a_n \neq 0$ x def.), allora $b_n \neq 0$ definitivamente

Proposizione

Siano a_n b_n c_n successioni di numeri reali, tutte definitivamente $\neq 0$

1) $a_n \sim a_n$ $\quad \left(\frac{a_n}{a_n} = 1 \to 1\right)$

2) $a_n \sim b_n$, allora $b_n \sim a_n$ $\quad \left(\frac{a_n}{b_n} \to 1 \text{ oppure } \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = 1\right)$

3) se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$ $\quad \left(\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} = 1 \cdot 1 = 1\right)$

$\frac{a}{b}$ equivale $\frac{c}{d}$ se $a \cdot d = b \cdot c$

Se $a_n \sim b_n$, dico anche che a_n é asintoticamente equivalente a b_n (la relazione $\sim$ é una RELAZIONE DI EQUIVALENZA)

Proposizione (Principio di sostituzione degli asintotici nei prodotti e nei quozienti)

1) Se $a_n \sim b_n$ e $c_n \sim d_n$ allora $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot d_n$ e $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$
(dim. $\frac{a_n \cdot c_n}{b_n \cdot d_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{c_n}{d_n} = 1 \cdot 1 = 1$)
(dim. $\frac{a_n / c_n}{b_n / d_n} = \frac{a_n}{c_n} \cdot \frac{d_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{d_n}{c_n} \to 1$)

2) Se $a_n \sim b_n$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste se e solo se esiste $\lim_{n\to+\infty} b_n$; e se esistono sono uguali

3) Se $a_n \cdot b_n \to l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $a_n \sim c_n$, allora $c_n \cdot b_n \to l$

4) Se $\frac{a_n}{b_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $b_n \sim c_n$ allora $\frac{a_n}{c_n} \to l$

Se ε_n é successione tale che $\varepsilon_n \neq 0$, $\varepsilon_n \to 0$, allora

- $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
- $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$
- $(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a \cdot \varepsilon_n$
- $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
- $\operatorname{tg}(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
- $\arcsin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
- $\operatorname{arctg}(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
- $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2$

esempio

$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+2}\right)$

Verifico che $\frac{\sqrt{n}}{n+2} \to 0$: $\frac{\sqrt{n}}{n+2} = \frac{\sqrt{n}}{n(1+\frac{2}{n})} \to 0$

quindi $\operatorname{tg} \frac{\sqrt{n}}{n+2} \sim \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ per $n \to +\infty$

allora posso applicare il principio di sostituzione degli asintotici

$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{n+2}\right) = +\infty$

Inoltre $n+1 \sim n$ $\quad n+2 \sim n$ quindi $n+1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n}}{n+2} \sim n+1 \cdot \frac{\sqrt{n}}{n+2} \sim n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n} \to +\infty$

es

Determinare se esistono $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$

$$\frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} \sim a \cdot n^b$$

e quindi calcolare $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}$

applico limiti notevoli per determinare il comportamento asintotico

Per $n \to +\infty$ si ha $\frac{1}{n} \to 0$ $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ quindi $\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 0$

Ricorso $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

allora $\log\left(\cos \frac{1}{n}\right) = \log\left(1 + \underbrace{\cos \tfrac{1}{n} - 1}_{\varepsilon_n \to 0}\right) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$

ricordo $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2$

$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = -\frac{1}{2n^2}$

$\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$

denominatore

per $n \to +\infty$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to \frac{1}{+\infty} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{n}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)}$

Siccome $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 1$ $\quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

alternativa

RICORDA $(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim a \cdot \varepsilon_n$ per $\varepsilon_n \to 0$

per $a = \frac{1}{2}$ = $\sqrt{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \frac{1}{2}\varepsilon_n$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \sim \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

In particolare $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ quindi $\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \sim \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ per $n \to +\infty$

Sostituendo

$$\frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} \sim \frac{\left(-\frac{1}{2n^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)} = -\frac{1}{2n^2} \cdot 2\sqrt{n} = -\frac{\sqrt{n}}{n^2} = -n^{-3/2}$$

$$\frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} \sim -n^{-3/2}$$

Pertanto $a = -1$ $\quad b = -\frac{3}{2}$ quindi le successioni hanno lo stesso limite

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left(-n^{3/2}\right) = 0$

- $\underbrace{\sqrt{n^2+n}}_{\approx} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \sim n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2}$
- $\underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{\approx} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) \sim n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}\right) \sim 0$
- $\underbrace{\sqrt{n^2 + n^{3/2}}}_{\approx} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \sim n \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty$

Se $a_n \sim b_n$ non so quasi niente sul comportamento asintotico della differenza

In generale é vero che

- $a_n + b_n \sim c_n + b_n$ se $a_n \sim c_n$ e $a_n \nsim b_n$
  $\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) b_n \sim \left(\frac{c_n}{b_n} - 1\right) b_n$
- $a_n + b_n \sim c_n + b_n$ se $a_n \sim c_n$ e $a_n \nsim -b_n$

Sottosuccessioni

Def

Sia a_n una successione di numeri reali. Un'altra successione b_k con $k \in \mathbb{N}$ si dice Sottosuccessione (o succ. estratta) di a_n se esiste una successione n_k strettamente crescente di numeri reali tale che $b_k = a_{n_k}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

X esempio

$\{a_n\} = \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$\{b_k\} = \frac{1}{2k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

$\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \ldots\}$

$\{b_k\} = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{10} \ldots \ldots\}$

$n_1 = 2 \quad n_2 = 4 \quad n_3 = 6 \quad n_4 = 8$

$b_1 = a_{n_1} = a_2 \quad b_2 = a_4$

es

Data

$a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\}$

- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12} \ldots\}$ é sottosuccessione
- $\{\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8} \ldots\}$ non é sottosuccessione
- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\}$ non é sottosuccessione

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

una successione limitata di numeri reali.
Allora esiste una successione $\{a_{n_k}\}$ convergente.

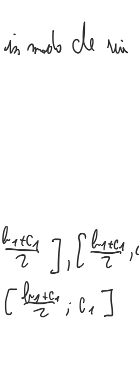
es

$\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1 \ldots\}$

$\{a_{2n}\} = \{1, 1, 1 \ldots\}$ $\quad a_{2n} \to 1$

$\{a_{2n+1}\} = \{-1, -1, -1 \ldots\}$ $\quad a_{2n+1} \to -1$

Dim.



Esistono $b, c \in \mathbb{R}$ con $b < c$ tali che $b \le a_n \le c$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pongo $b_0 = b$, $c_0 = c$

Considero gli intervalli $\overset{J_0}{\left[b, \frac{b+c}{2}\right]}$ $\quad \overset{J_1}{\left[\frac{b+c}{2}; c\right]}$

$= \left[b_0, \frac{b_0+c_0}{2}\right]$ $\quad \left[\frac{b_0+c_0}{2}; c_0\right]$

Esiste un sottoinsieme infinito $I \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\{a_n\}_{n\in I}$ é interamente contenuto in uno dei due intervalli J_0, J_1

Diciamo che si tratta dell'intervallo J_0. Allora pongo $b_1 = b_0$ $\quad c_1 = \frac{b_0+c_0}{2}$ in modo che sia $J_0 = [b_1, c_1]$

Fisso n_1 tale che $a_{n_1} \in [b_1, c_1]$

Esistono infiniti termini di a_n indicizzati da $n \ge n_1$ che si trovano in uno dei due intervalli $\left[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}\right], \left[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1\right]$

Per fissare le idee suppongo che in particolare esistono infiniti termini a_n, con $n > n_1$, contenuti in $\left[\frac{b_1+c_1}{2}; c_1\right]$

Pongo $b_2 = \frac{b_1+c_1}{2}$ $\quad c_2 = c_1$ e fisso $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_2} \in [b_2, c_2]$

Procedendo in questo modo, costruisco 3 successioni b_k c_k a_{n_k} con le seguenti proprietà

- $[b_1, c_1] \supseteq [b_2, c_2] \supseteq [b_3, c_3] \ldots$ e $(c_k - b_k) = \frac{c-b}{2k}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $\{n_k\}$ é successione strettamente crescente di naturali
- $a_{n_k} \in [b_k, c_k]$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

Allora $\{b_k\}$ é successione non decrescente $b_1 \le b_2 \le b_3 \ldots$ e c_k é successione non crescente $c_1 \ge c_2 \ge c_3 \ldots$

e $b_k \le a_{n_k} \le c_k$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

Per il teorema di regolarità, esistono $l_1 = \lim_{k\to+\infty} b_k$, $l_2 = \lim_{k\to+\infty} c_k$ MONOTONE $\quad l_1 - l_2 = \lim_{k\to+\infty} b_k - c_k = 0$ quindi $l_1 = l_2$

X confronto $a_{n_k} \to l$