

Esercizi forme di Pfaffiane

① $\omega(x, y) = \frac{y}{xy-4} dx - \frac{4-x-xy}{xy-4} dy$

- Chiusa nel suo dominio?
- Esatta nel suo dominio?
- Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, $\gamma = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$ orientata nel verso positivo della x

② $\omega(x, y) = x \log(x^2 + y^2) dx + y \log(x^2 + y^2) dy$

- Chiusa nel suo dominio?
- Esatta nel suo dominio?
- Calcolare, se possibile, una primitiva.

③ $\omega(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + 4y^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \left(\frac{4y}{4y^2 + x^2} - y \right) dy$

- Chiusa nel suo dominio?
- Esatta nel suo dominio?
- Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, $\gamma = (\log t, \sqrt{\log t})$ $t \in [\frac{1}{e}, \frac{4}{3}]$ orientata nel verso delle t crescenti

④ $\omega(x, y) = \frac{e^x y}{1+e^{2x}} dx + \arctan e^x + \log x dy$

- Chiusa nel suo dominio?
- Esatta nel suo dominio?
- Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è la perbole $y = 1 - x^2$ da estremi $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e $(1, 1)$.

5) Dire se la seguente forma differenziale è chiusa ed esatta

$$\omega(x,y) = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2xz}{x^2+y^2} \right) dx + \frac{2xy}{x^2+y^2} dy.$$

Inoltre, calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola $x = (y-1)^2$ orientato nel senso della y crescente, da $y=0$ a $y=2$.

6) Dire se la seguente forma differenziale è chiusa ed esatta

$$\omega(x,y) = (ye^x - e^y) dx + (2e^x - xe^y) dy.$$

Inoltre, calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma(t) = (t, e^{-t})$ $t \in [0, 2]$.

7) Studiare la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}(y-\sqrt{x})} dx - \frac{1}{y-\sqrt{x}} dy$$

e se possibile calcolarne una primitiva

⑧ Studiare la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

e se possibile calcolare una primitiva

⑨ Studiare se la seguente forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{y}{4+x^2y^2} dx + \frac{x}{4+x^2y^2} dy$$

è esatta e calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove γ è la circonferenza di raggio 1 e centrata nell'origine, percorsa nel semipiano delle y positive e orientata positivamente.

⑩ Stabilire se la seguente forma è esatta e calcolare l'integrale lungo la

semicirconferenza di raggio $\frac{1}{2}$, nel

semipiano $\{y > 0\}$, percorso in senso

antiorario:

$$\omega(x, y) = \left(-\frac{\sin y}{(1+x)^2} + y \right) dx + \left(-x + \frac{\cos y}{1+x} \right) dy$$

11 Stabilire se la forma

$$\omega(x, y) = -\frac{1}{x+y} dx + \frac{x}{y(x+y)} dy$$

è esatta.

In caso affermativo, determinare tutte le primitive.

12 Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è il quadrato di lato 2 centrato nell'origine, con i lati paralleli agli assi e

$$\omega(x, y) = \frac{2xy}{1+x^2+y^2} dx + \log(1+x^2+y^2) + \frac{2y^2}{1+x^2+y^2} dy$$