funzioni

venerdì 22 novembre 2024 08:30

Funzioni Continue

Def

Sia $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}$ e sia $\bar{x}\in D$ si dice funzione è continua in $\bar{x}$ se $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

Se f è continua in $\bar{x}$ se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che

$|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D$ con $|x-\bar{x}|<\delta$

Es $f(x)=x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

Se $\bar{x}$ è un numero fissato allora $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

Esempio

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\geq 0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

Il segnale differenza sono significati

$\Rightarrow$ f è continua in $\bar{x}$

$\Rightarrow$ Se sup numeri $\{x_n\}\subset\mathbb{R}$ tale che $x_n\to x$ per $n\to+\infty$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$

f è continua in $\bar{x}$ se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D$ con $|x-\bar{x}|<\delta$

f è continua in $\bar{x}$ se per ogni $\{x_n\}\subset D$ con $x_n\to\bar{x}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$

Esempio

Sia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $x\in D$

$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

Il segnale differenza sono significati

$\Rightarrow$ f è continua in x

$\Rightarrow$ Se sup numeri $\{x_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $x_n\to x$ per $n\to+\infty$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$

f è continua in $\bar{x}$ se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D$ con $|x-\bar{x}|<\delta$

f è continua in $\bar{x}$ se per ogni $\{x_n\}\subset D$ con $x_n\to\bar{x}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$

Esempio

Sia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\geq 0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

Il segnale differenza sono significati

$\Rightarrow$ f è continua in $\bar{x}$

$\Rightarrow$ Se sup numeri $\{x_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $x_n\to x$ per $n\to+\infty$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$

f è continua in $\bar{x}$ se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D$ con $|x-\bar{x}|<\delta$

f è continua in $\bar{x}$ se per ogni $\{x_n\}\subset D$ con $x_n\to\bar{x}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$

Es $f(x)=0$

Sia x_n un numero tale che $x_n\to x$. Per definizione di continuità, sappiamo che $f(x_n)\to f(x)$ cioè per ogni $\varepsilon>0$ esiste $n_0\in\mathbb{N}$ tale che $|f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Dato $\bar{x}$ e x_n tale che $x_n\to\bar{x}$ si ha $|f(x_n)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$ $\forall\varepsilon>0$

Dato $\{x_n\}\to x$ (per ipotesi)

Allora prendo $n_0\in\mathbb{N}$ tale $x_n\in D$ e $x_n\geq 0$ e $x_n<0$ $\forall n\geq n_0$

Tutte $x_n\in\mathbb{R}$ $\forall n\geq n_0$ (per ipotesi)

Allora prendo $n_0\in\mathbb{N}$ tale $x_n\in D$ e $x_n\geq 0$ e $x_n<0$ $\forall n\geq n_0$

Tutte $x_n\in\mathbb{R}$ $\forall n\geq n_0$ (per ipotesi)

Dato $\{x_n\}\to x$ tale che $x_n\in D$ e $x_n\geq 0$ e $x_n<0$ $\forall n\geq n_0$

Allora $f(x_n)=1$ $\forall n\geq n_0$ e $f(x_n)=-1$ $\forall n\geq n_0$

Sia $\varepsilon=0$

Sia $\varepsilon>0$ e $n_0\in\mathbb{N}$ tale che $|f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Dato $\bar{x}$ e x_n tale che $x_n\to\bar{x}$ si ha $|f(x_n)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$ $\forall\varepsilon>0$

Allora $f(x_n)=1$ $\forall n\geq n_0$ e $f(x_n)=-1$ $\forall n\geq n_0$

Sia $\varepsilon=0$

Sia $\varepsilon>0$ e $n_0\in\mathbb{N}$ tale che $|f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Dato $\bar{x}$ e x_n tale che $x_n\to\bar{x}$ si ha $|f(x_n)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$ $\forall\varepsilon>0$

Allora $f(x_n)=1$ $\forall n\geq n_0$ e $f(x_n)=-1$ $\forall n\geq n_0$

Teorema

Sia $f:D\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

Se f è continua in $\bar{x}$ e g è continua in $\bar{x}$ e $g(\bar{x})\neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$

Se f e g sono continue allora $\frac{f}{g}$ è continua tranne il loro zeri

Def

Sia $f:D\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

Se f è continua in $\bar{x}$ e g è continua in $\bar{x}$ e $g(\bar{x})\neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$

Se f e g sono continue allora $\frac{f}{g}$ è continua tranne il loro zeri

Es $f(x)=x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Sappiamo sono punti di continuità, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Per definizione di continuità, sappiamo che $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|f(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta_1$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|g(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta_2$

assumo δ sia il minimo tra δ_1 e δ_2 $\Rightarrow$ sono punti di continuità $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|f(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|g(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta$

Allora prendo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ e $\varepsilon>0$ sono punti di continuità, sappiamo che $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|f(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|g(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta$

Allora prendo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ e $\varepsilon>0$ sono punti di continuità, sappiamo che $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|f(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|g(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta$

Allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$

Es $f(x)=\frac{x}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Sappiamo sono punti di continuità, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Per definizione di continuità, sappiamo che $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|f(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta_1$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|g(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta_2$

assumo δ sia il minimo tra δ_1 e δ_2 $\Rightarrow$ sono punti di continuità $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|f(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|g(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta$

Allora prendo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ e $\varepsilon>0$ sono punti di continuità, sappiamo che $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|f(x)-f(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|f(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_f$ $|x-\bar{x}|<\delta$

$|g(x)-g(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{1+|g(\bar{x})|}$ $\forall x\in D_g$ $|x-\bar{x}|<\delta$

Allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$

Def

Sia $f:D\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

Se f è continua in $\bar{x}$ e g è continua in $\bar{x}$ e $g(\bar{x})\neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$

Se f e g sono continue allora $\frac{f}{g}$ è continua tranne il loro zeri

Teorema

Sia $f:D\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

Se f è continua in $\bar{x}$ e g è continua in $\bar{x}$ e $g(\bar{x})\neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$

Se f e g sono continue allora $\frac{f}{g}$ è continua tranne il loro zeri

Def

Sia $f:D\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

Se f è continua in $\bar{x}$ e g è continua in $\bar{x}$ e $g(\bar{x})\neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$

Se f e g sono continue allora $\frac{f}{g}$ è continua tranne il loro zeri

Teorema

Sia $f:D\to\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in D$

Se f è continua in $\bar{x}$ e g è continua in $\bar{x}$ e $g(\bar{x})\neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$

Se f e g sono continue allora $\frac{f}{g}$ è continua tranne il loro zeri