SERIE NUMERICA

Sia $\{a_n\}$ una successione reale.

La successione di operazioni $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_2 + a_2 + a_3 + a_n, \dots$ prende il nome di serie numerica di termine generale n e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,, \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, la seguente somma $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ … prende il nome di somma parziale $n - esima$ di $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Si dice che la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ è **regolare** se è tale la successione $\{s_n\}$ delle sue somme parziali, ovvero se esiste il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Il quale prende il nome di somma della serie se la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ è regolare. Se la successione non è regolare si dice che la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ è indeterminata.

CARATTERE DELLA SERIE

Si definisce carattere della serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ la proprietà che essa ha di essere convergente, divergente positivamente o divergente negativamente.

Si dice che una serie numerica **converge** se: $$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = l$$
Si dice che una serie numerica **diverge positivamente** se: $$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$
Si dice che una serie numerica **diverge negativamente** se: $$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$$

TEOREMA CARATTERE DELLA SERIE

"Condizione necessaria ma non sufficiente affinché una serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converga è che il suo termine generale sia infinitesimo, ossia $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$"

DIMOSTRAZIONE

I. Per ipotesi la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, ossia il limite delle sue somme parziali esiste ed è finito
II. Osserviamo che, essendo $\{s_{n-1}\}$ una successione estratta di $\{s_n\}$, è chiaro che $\lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s$
III. $a_n = s_n - s_{n-1}$ pertanto $\lim_{n\to+\infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0$

N.B. una serie è regolare quando è monotona.

SERIE NOTE

Nome	*Simbologia*	*Carattere*
Serie geometrica di ragione q	$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$	➢ Se $\lvert q \rvert < 1 \rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ ➢ Se $q \geq 1 \rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ ➢ Se $q \leq -1 \rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \nexists$
Serie armonica generalizzata	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$	➢ Se $\lvert\alpha\rvert > 1 \rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = l$ ➢ Se $0 < \alpha < 1 \rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ ➢ Se $\alpha = 1 \rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$
Serie armonica	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	➢ Tale serie diverge positivamente

LIMITI DELLE SUCCESSIONI

Nello svolgimento dei limiti sulle successioni, in generale, valgono tutte le asintoticità notevoli relative alle funzioni.

$\log_a n < n^\alpha < a^n < n! < n^n$	*GERARCHIA DI INFINITO*
$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$	*FORMULA DI STIRLING*

SERIE NUMERICA A TERMINI NON NEGATIVI

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie numerica a termini non negativi ($\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0$). Denotata con $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è chiaro che $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad s_n \leq s_{n+1}$, ovvero la successione $\{s_n\}$ è crescente, pertanto in base al teorema sui limiti delle successioni monotone la successione $\{s_n\}$ è regolare ed il suo limite è uguale al suo estremo superiore.

Quanto appena detto ci consente di affermare che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente o divergente positivamente, analogamente una serie numerica a termini non positivi o converge o diverge negativamente.

CRITERIO DEL CONFRONTO

Date le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sia:

- $0 \leq a_n \leq b_n$

se $\sum b_n$ converge $\rightarrow \sum a_n$ converge

se $\sum a_n$ diverge $\rightarrow \sum b_n$ diverge

SERIE A SEGNI ALTERNI

Si definisce una serie a **segni alterni** (o serie alternante) una serie numerica del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n$ dove è a termini positivi ($\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$).

CRITERIO DI LEIBNITZ

Assegnata la serie numerica a segni alterni $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n$ se la successione $\{a_n\}$ è decrescente e infinitesima allora la serie converge.

Data la successione $\{a_n\}$ sia: $a_n \geq 0$ Data la serie alternante $\sum(-1)^n a_n$	• se $a_{n+1} \leq a_n$ • se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$	$\rightarrow \sum(-1)^n a_n$ converge

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Assegnata la serie numerica $\{a_n\}$ la seguente serie numerica a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ è detta **serie dei moduli** di $\{a_n\}$. Si dice che $\{a_n\}$ è assolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ converge. Pertanto si ha la seguente implicazione:

$$\sum|a_n| \text{ converge} \rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Una serie convergente, ma non assolutamente convergente, prende il nome di serie "semplicemente convergente".

TEOREMA ASSOLUTA CONVERGENZA

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$$

Ciò significa che l'assoluta convergenza implica la convergenza.

CRITERIO DEL CONFRONTO SERIE DEI MODULI

Una serie numerica, la cui serie dei moduli è maggiorata da una serie numerica a termini non negativi convergente, è assolutamente convergente.

CRITERIO DELLA RADICE O DI CAUCHY

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se la successione $\sqrt[n]{|a_n|}$ è regolare, posto $l = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ si ha quanto segue:

Data la successione $\{a_n\}$ sia:	se $l < 1 \rightarrow \sum a_n$ converge
• $a_n > 0$	se $l > 1 \rightarrow \sum a_n$ diverge
• $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ con $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$	se $l = 1 \rightarrow$ non si può dire nulla

CRITERIO DEL RAPPORTO O DI D'ALEMBERT

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se la successione $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ è regolare, posto $l = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ si ha quanto segue:

Data la successione $\{a_n\}$ sia:

- $a_n > 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ con $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$

se $l < 1$	$\rightarrow$ $\sum a_n$ converge
se $l > 1$	$\rightarrow$ $\sum a_n$ diverge
se $l = 1$	$\rightarrow$ non si può dire nulla

CRITERIO DELL'ASINTOTICITÀ

Se $|a_n| \sim |b_n|$ allora la serie numerica a_n converge assolutamente se e solo se la serie numerica b_n converge assolutamente.