FISICA GENERALE I

Dott.ssa Annalisa Allocca

Università degli Studi di Napoli,
Compl. Univ. Monte S.Angelo – Dipartimento di Fisica
Via Cinthia, I-80126, Napoli

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
sez. Napoli
Studio: 1G16, Edificio 6
+39-081-676345
annalisa.allocca@unina.it

Organizzazione

- **Sito web:** www.docenti.unina.it/annalisa.allocca
  - La registrazione al sito si può effettuare inserendo numero di matricola e pin oppure tramite SPID per chi non fosse ancora in possesso di matricola
  - Il materiale didattico si trova sulla pagina web

- **Libri di testo adottati:**
  - Mazzoldi, Nigro, Voci «Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica» Vol. 1 - Edises Napoli
  - Halliday, Resnick, Walker «Fondamenti di Fisica» - Ambrosiana Milano
  - Serway, Jewett «Principi di Fisica» - Edises Napoli

Argomenti di oggi:

- Dinamica del corpo rigido
  - Esercizi
  - Moto di rotolamento puro

Mazzoldi, Nigro, Voci, cap 6

Moto del corpo rigido

- I equazione cardinale

$$\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{CM}}$$

(solo forze **esterne**)

- II equazione cardinale

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = I\bar{\alpha}$$

(solo momento delle forze **esterne**)

- Teorema dell'energia cinetica

$$W = \Delta E_k$$

Il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è sempre nullo, perché non cambiano le mutue distanze tra i punti

Equilibrio statico del corpo rigido

- Assenza di moto traslazionale → $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{CM}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}} = 0$

  Se il corpo è inizialmente in quiete → $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}} = 0$

- Assenza di moto rotazionale → $\vec{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{M}} = 0$

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

- Punti dell'asse di rotazione → fissi: possono essere usati come polo nel calcolo dei momenti

- La velocità angolare è diretta lungo l'asse di rotazione

- Se $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ varia, anche l'accelerazione angolare $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ sarà diretta lungo l'asse di rotazione

- In un corpo rigido, ciascun elemento infinitesimo di massa *dm* descrive una traiettoria circolare nel piano ortogonale all'asse di rotazione, con raggio R dato dalla distanza del corpo dall'asse

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

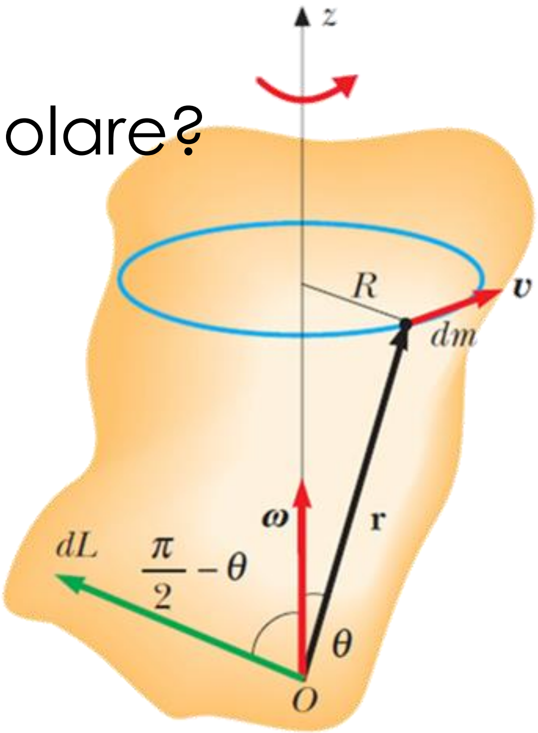
Momento angolare, momento d'inerzia

Qual è la relazione tra il momento angolare e la velocità angolare?

- Momento angolare di un elemento di massa *dm*:

$$d\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times dm\vec{\boldsymbol{v}}$$

- Momento angolare assiale dL_z



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

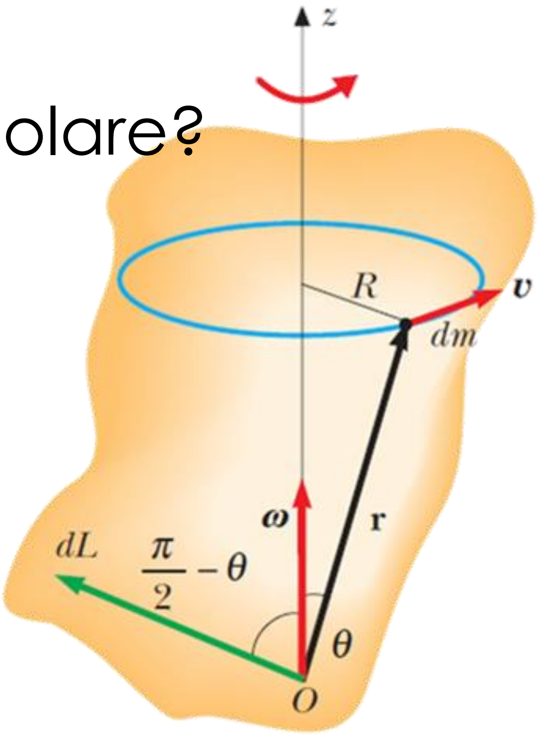
Momento angolare, momento d'inerzia

Qual è la relazione tra il momento angolare e la velocità angolare?

- Momento angolare di un elemento di massa *dm*:

$$d\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times dm\vec{\boldsymbol{v}}$$

In modulo: $dL = dm\, r\, v = dm\, r\, \omega R$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

- Momento angolare assiale $dL_z = dL\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = dL\, sin(\vartheta)$

$$dL_z = dm\omega Rrsin(\vartheta) = dm\omega R^2$$

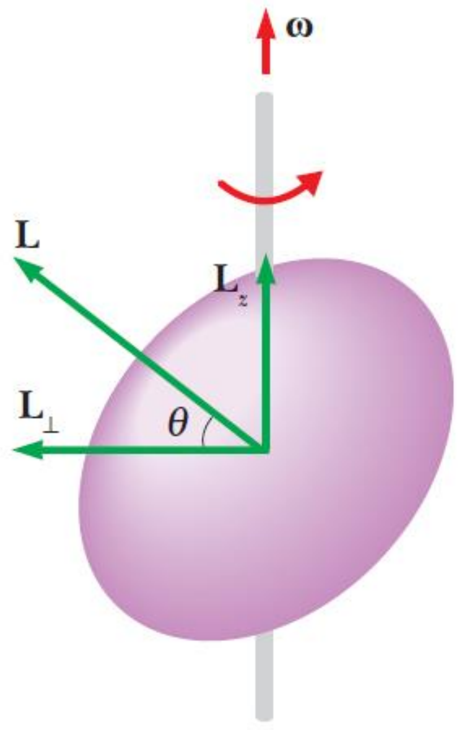
Integrando:

$$L_z = \int dL_z = \boxed{\int dmR^2}\,\omega = I_z\,\omega$$

I_z = Momento di inerzia rispetto all'asse z

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse e ruota attorno all'asse insieme al corpo



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

$$L_{||} = \omega \int dmR^2 = I_z\omega$$

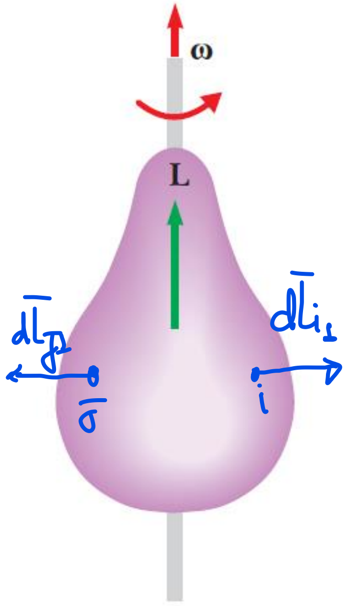
Può variare solo in modulo, la direzione è sempre quella dell'asse di rotazione

$$L_\perp = \int dLcos\vartheta = \int dm\, r\omega Rcos\vartheta$$

Varia in direzione perché ruota intorno all'asse, dipende dal polo e varia in modulo se varia ω

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
$\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

- Caso particolare: $\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$ **quando l'asse di rotazione coincide con un asse di simmetria del corpo**



Per ogni $d\vec{L}_i$ c'è un $d\vec{L}_j$ simmetrico ortogonale all'asse che lo cancella

$$\vec{L} = I_z\vec{\omega} \qquad \mathrm{L} = \mathrm{L_z} \qquad L_\perp = 0$$

Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Se $\vec{L}$ è variabile, le variazioni sono sempre parallele a $\vec{\omega}$

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
$\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

- Caso particolare: $\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

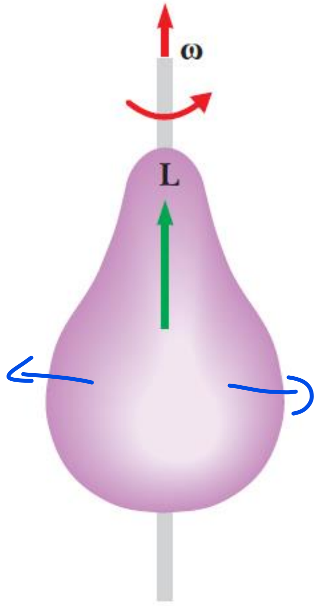
$\bar{L} = I_z \bar{\omega}$

$\parallel$

L_z

Equazioni del moto

$$\bar{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}) = I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \boxed{I_z\vec{\alpha} = \vec{M}}$$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Legge oraria

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \quad \rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt \quad \rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega\, dt$$

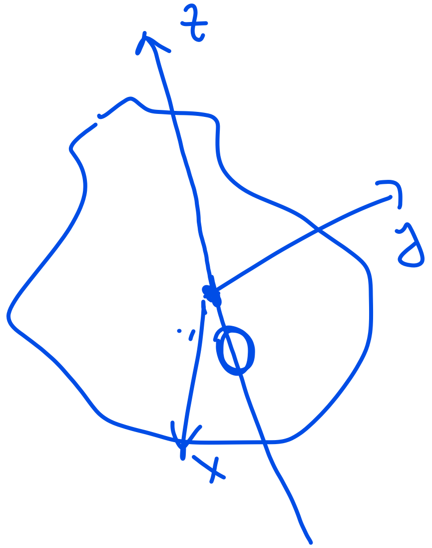
$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso

$\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

Assi principali di inerzia

Fissato un punto O di un corpo rigido, è sempre possibile trovare almeno tre assi cartesiani mutuamente ortogonali con centro in O tali che, se si sceglie uno di questi assi come asse di rotazione, $\underbrace{\vec{\boldsymbol{L}} \text{ risulta parallelo a } \vec{\boldsymbol{\omega}}}$.



Conservazione del momento angolare

$$\vec{M}^{ext} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{L} \text{ è } \boldsymbol{costante}$$

$$\boxed{\vec{L} = I_z\vec{\omega} \text{ è costante}}$$

Min. 0:40 → https://www.youtube.com/watch?v=5KYrR7n_j8Q

https://www.ted.com/talks/arleen_sugano_the_physics_of_the_hardest_move_in_ballet/transcript?language=it#t-241948

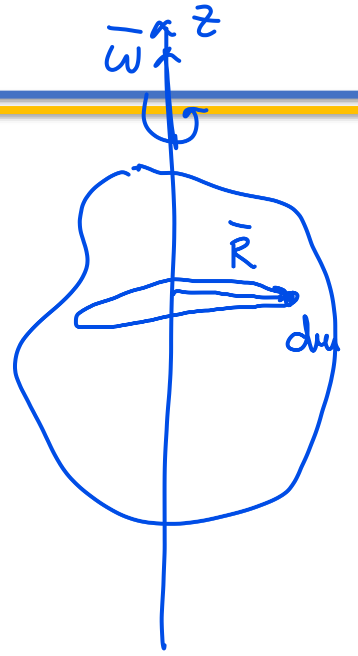
Energia cinetica e lavoro
di un corpo rigido in rotazione

- Energia cinetica

$v = \omega R$

$$dE_k = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2} dm\, \omega^2 R^2$$

$$E_k = \int dE_k = \int \frac{1}{2} dm\, \omega^2 R^2 = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\int dm\, R^2}_{I_z} = \underbrace{\frac{1}{2} I_z \omega^2}_{= \frac{1}{2} L_z \omega}$$



$$L_z = I_z \omega$$

$$E_z = \frac{1}{2} \frac{I_z^2}{I_z} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L_z^2}{I_z}$$

Energia cinetica e lavoro
di un corpo rigido in rotazione

- Lavoro e potenza istantanea

$\omega_{in} \longrightarrow \omega_{fin} \Rightarrow \Delta\omega = \alpha$

II eq. card. $\quad \bar{M} = I_z \bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{M}}{I_z}$

$$\boxed{\alpha = \frac{M}{I_z}} \leftarrow$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2$$

$$\frac{dE_k}{d\omega} = \frac{1}{\cancel{2}} I_z \cancel{2}\omega = I_z \omega \Rightarrow$$

$d\vartheta / dt$

$$dE_k = I_z \omega \, d\omega = I_z \frac{d\vartheta}{dt} d\omega = I_z \frac{d\omega}{dt} d\vartheta = I_z \alpha \, d\vartheta$$

$$= \cancel{I_z} \frac{M}{\cancel{I_z}} d\vartheta = M \, d\vartheta$$

Energia cinetica e lavoro
di un corpo rigido in rotazione

- Lavoro e potenza istantanea

$$dE_R = dW = M\,d\vartheta$$

$$W = \int_{\vartheta_{in}}^{\vartheta_{fin}} M(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\vartheta}{dt} = M\omega$$

Energia cinetica e lavoro
di un corpo rigido in rotazione

- Energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{L^2}{2I_z}$$

- Lavoro e potenza istantanea

$$W = \int_0^\theta M(\theta) d\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

Momento di inerzia

Il momento di inerzia ha un ruolo simile a quello della massa nella seconda legge di Newton, perché rappresenta l’inerzia di un corpo a ricevere una certa accelerazione

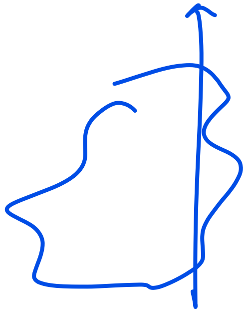
Seconda legge di Newton

$$a = \frac{F}{m}$$

Si può sempre assegnare una massa ad un corpo

Equazione del moto di rotazione di un corpo rigido

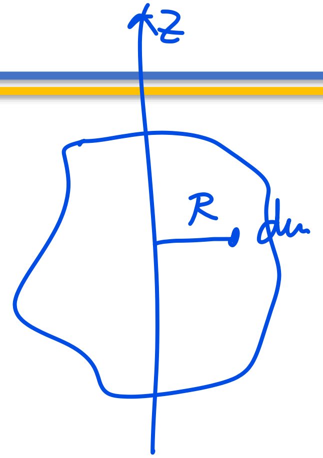
$$\alpha = \frac{M}{I_z}$$



Il momento di inerzia **ha bisogno di un asse** per essere definito

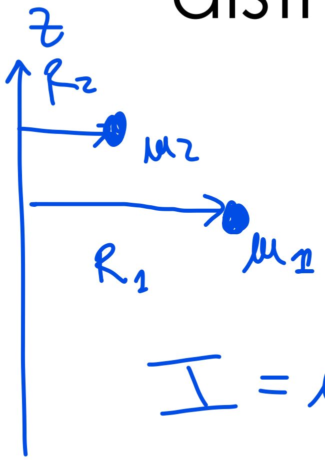
Momento di inerzia

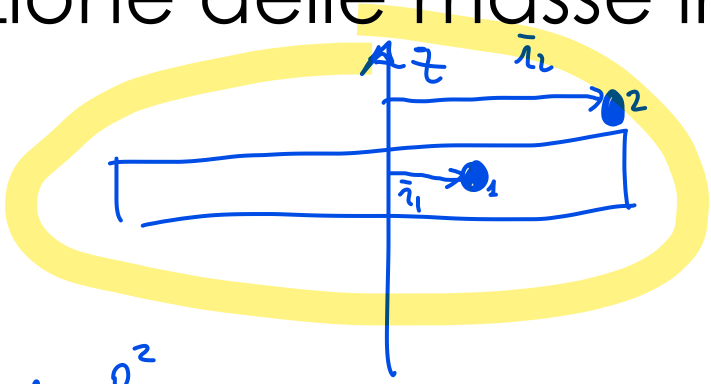
$I_z = \int dm\, R^2$



$$I_z = \int R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$$

L'inerzia rotazionale di un corpo rigido dipende dalla distribuzione delle masse intorno all'asse di rotazione





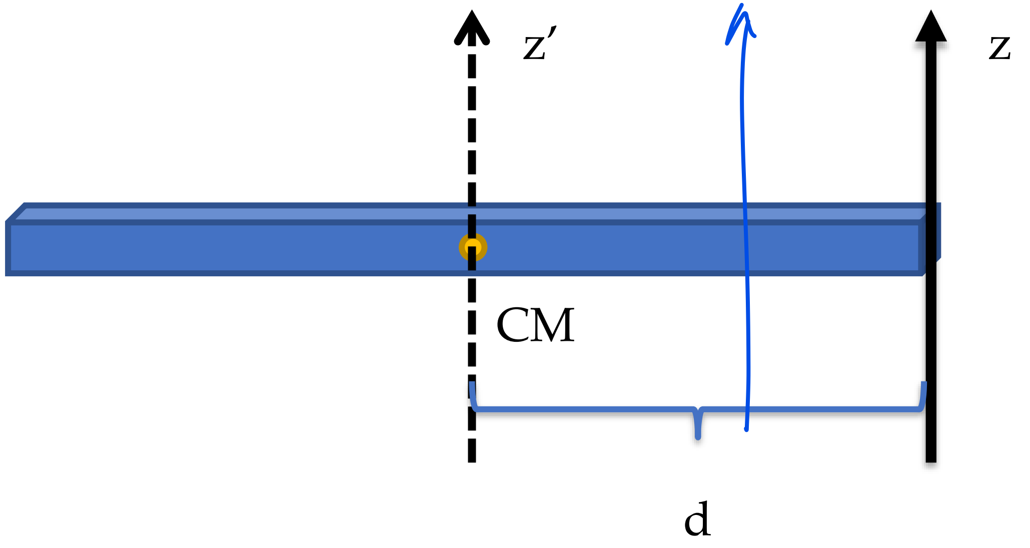
$I_{tot} = I_{ASTA} + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2$

Teorema di Huygens-Steiner

Il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse non passante per il centro di massa è dato da:

$$I_z = I_{CM} + md^2$$



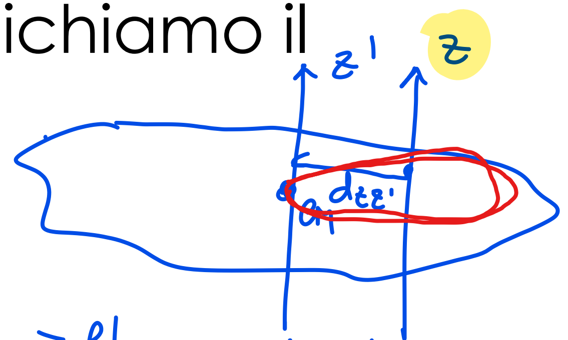
dove:

- I_{CM} è il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo al primo
- d è la distanza dell'asse dal centro di massa

Teorema di Huygens-Steiner e teorema di Koenig

Riprendiamo l'espressione dell'energia cinetica e applichiamo il teorema di Huygens-Steiner

$$I_z = I_{cm} + m d_{zz'}^2$$



z è l'asse di rotazione

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{cm} + m d_{zz'}^2\right)\omega^2 =$$

$$\boxed{d_{zz'}\,\omega = v_{cm}}$$

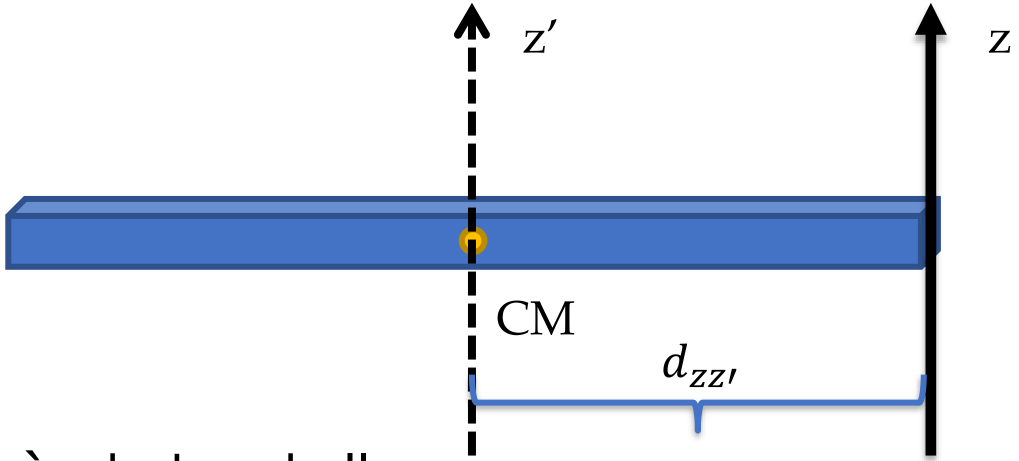
$$= \underbrace{\frac{1}{2} I_{cm}\,\omega^2}_{E_{k,cm}} + \frac{1}{2} m d_{zz'}^2\,\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_{cm}\,\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

Teorema di Huygens-Steiner e teorema di Koenig

Riprendiamo l'espressione dell'energia cinetica e applichiamo il teorema di Huygens-Steiner

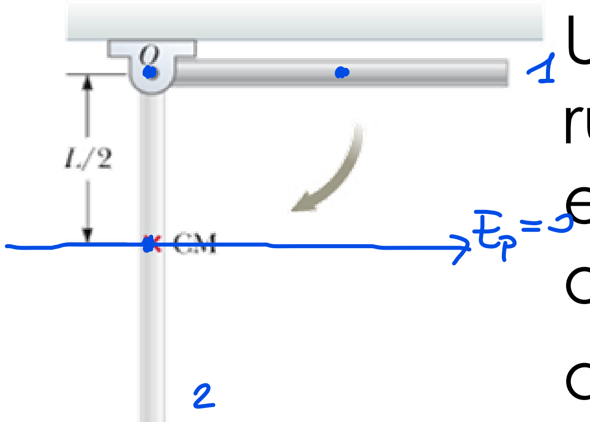
$$E_k = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \boxed{\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2}$$



L'energia cinetica totale di un corpo rigido è data dalla somma dell'**energia cinetica rotazionale** intorno ad un asse passante per il centro di massa più l'**energia cinetica traslazionale** del centro di massa

Notare che ω e v_{CM} **non** sono indipendenti ($v_{CM} = \omega\, d_{zz'}$)

Esempio: l'asta rotante



R.A. Serway, J. W. Jewett Jr
Principi di Fisica - V Ed.
EdiSES

Un'asta uniforme di lunghezza L e massa M è libera di ruotare intorno ad un asse passante per una delle sue estremità. L'asta è lasciata libera da ferma in posizione orizzontale.

a) qual è la velocità angolare dell'asta quando raggiunge la posizione verticale?

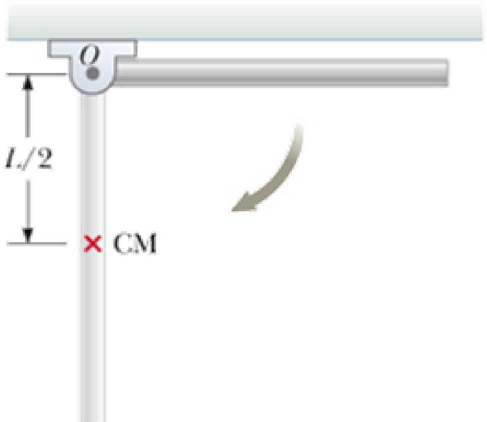
$\rightarrow I_O = \frac{1}{3} M L^2$

$I_{cm} = \frac{1}{12} M L^2$

$$\begin{cases} E_{p,1} = Mg\frac{L}{2} \\ E_{k,1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{p,2} = 0 \\ E_{k,2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \end{cases} \implies E_{p,1} = E_{k,2}$$

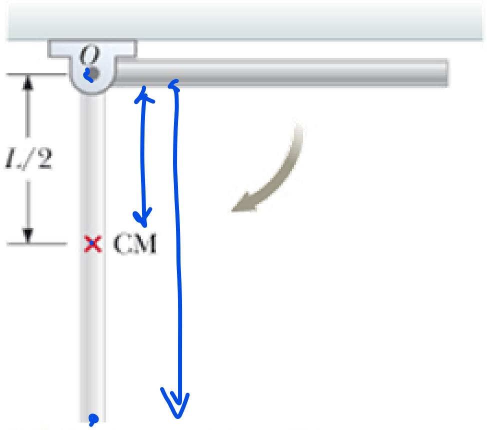
$$\cancel{M} g \frac{\cancel{L}}{\cancel{2}} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{\cancel{2} \cdot 3} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \omega^2 \implies \frac{\omega^2 L}{3} = g \implies \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Esempio: l'asta rotante



R.A. Serway, J. W. Jewett Jr
Principi di Fisica - V Ed.
EdiSES

Esempio: l’asta rotante

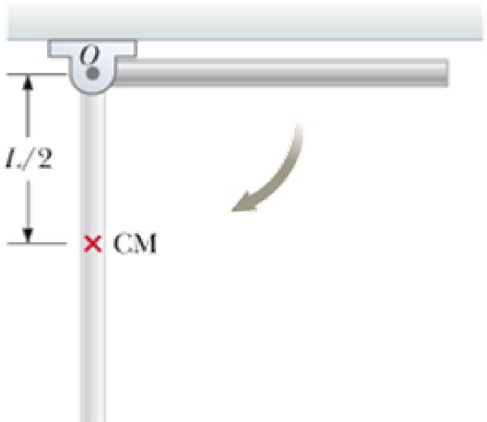


R.A. Serway, J. W. Jewett Jr
Principi di Fisica - V Ed.
EdiSES

Un’asta uniforme di lunghezza L e massa M è libera di ruotare intorno ad un asse passante per una delle sue estremità. L’asta è lasciata libera da ferma in posizione orizzontale.

(b) Calcolare la velocità tangenziale del centro di massa e quella del punto più basso dell’asta quando si trova in posizione verticale

Esempio: l'asta rotante



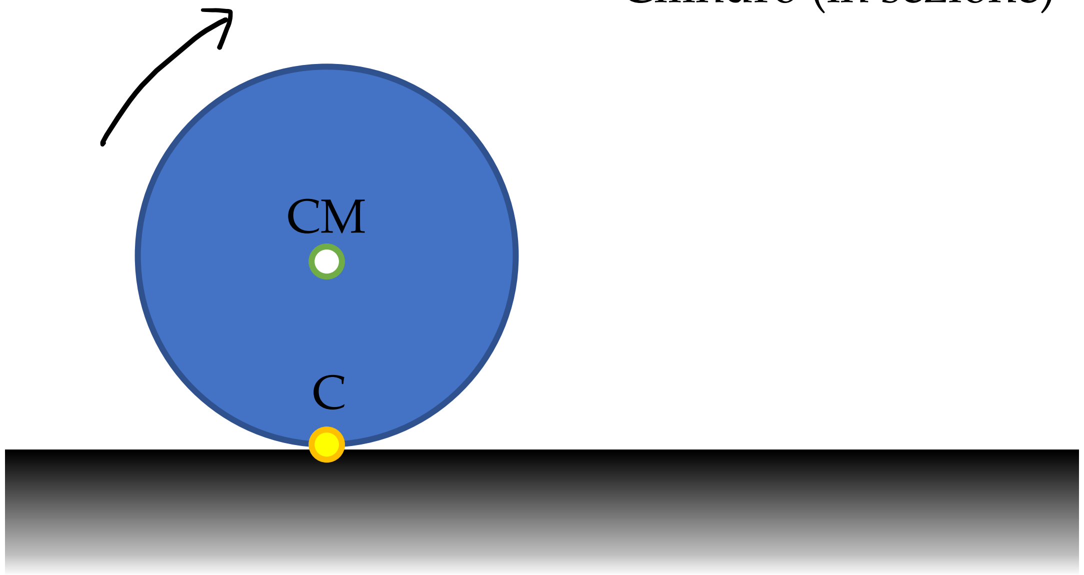
R.A. Serway, J. W. Jewett Jr
Principi di Fisica - V Ed.
EdiSES

Moto di puro rotolamento

Fino ad ora abbiamo considerato il moto di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso. Ora studiamo il caso in cui **l'asse di rotazione non è fisso**, ossia il **moto di rotolamento.**

Esempi: ruota di una bicicletta, yo-yo, pallina che rotola senza strisciare su un piano, …

Cilindro (in sezione)



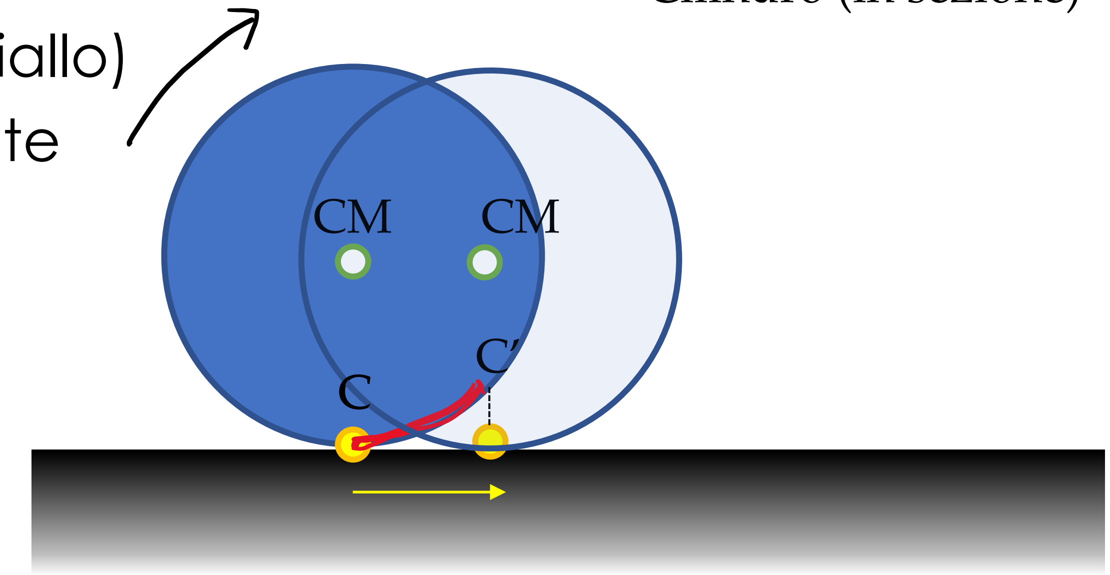
Moto di puro rotolamento

Fino ad ora abbiamo considerato il moto di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso. Ora studiamo il caso in cui **l'asse di rotazione non è fisso**, ossia il **moto di rotolamento.**

Esempi: ruota di una bicicletta, yo-yo, pallina che rotola senza strisciare su un piano, …

L'asse di rotazione (individuato dal pallino giallo) non è fermo, ma sta traslando parallelamente a se stesso

Cilindro (in sezione)



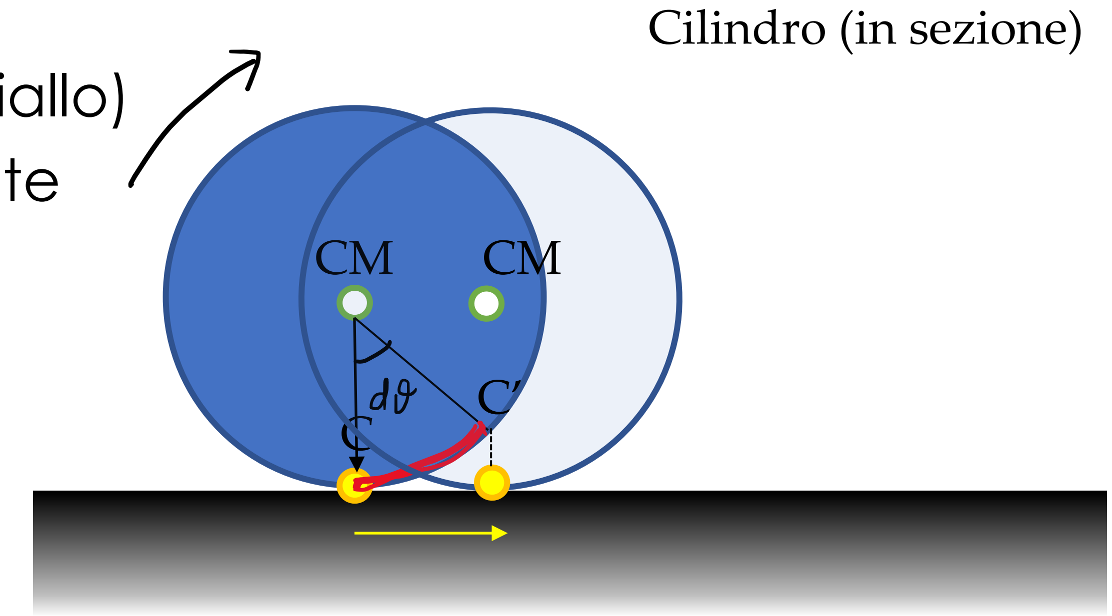
Moto di puro rotolamento

Fino ad ora abbiamo considerato il moto di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso. Ora studiamo il caso in cui **l'asse di rotazione non è fisso**, ossia il **moto di rotolamento.**

Esempi: ruota di una bicicletta, yo-yo, pallina che rotola senza strisciare su un piano, …

L'asse di rotazione (individuato dal pallino giallo) non è fermo, ma sta traslando parallelamente a se stesso

$$d\vartheta = \frac{\overline{CC'}}{R}$$



Moto di puro rotolamento

Consideriamo solo corpi che rotolano su una superficie **senza slittare:**

- Il centro del cilindro segue una traiettoria rettilinea parallela alla superficie
- Un punto sul bordo segue una traiettoria più complessa

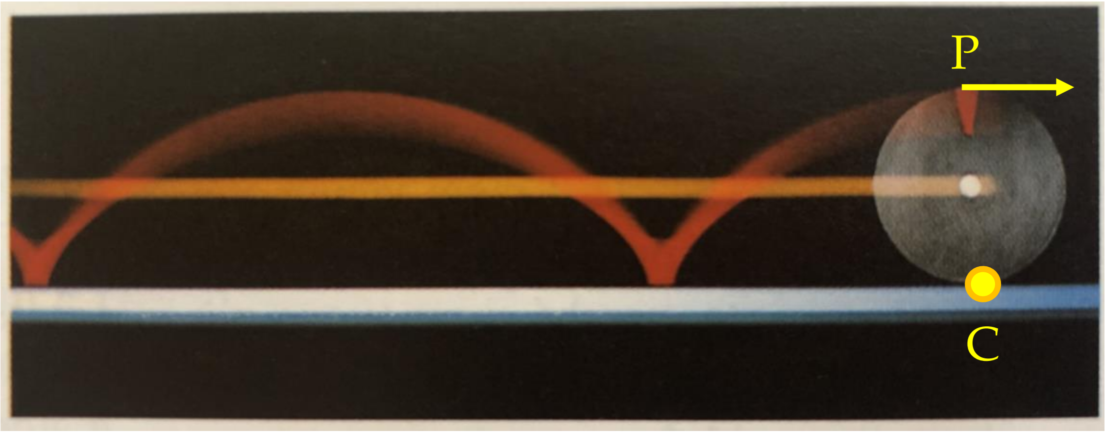
Analizziamo questo moto come traslazione del centro di massa e rotazione degli altri punti intorno allo stesso centro

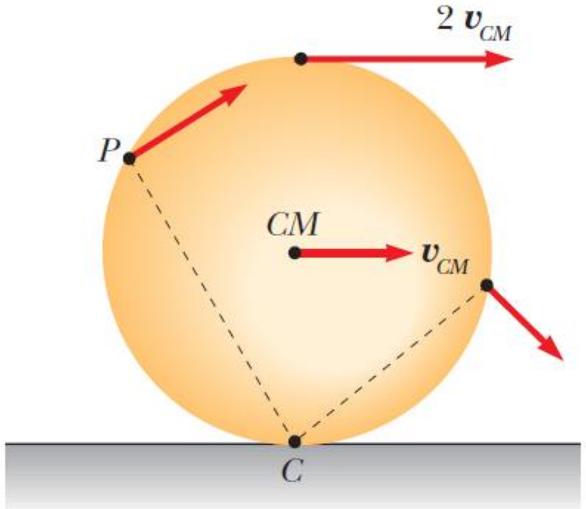
Moto di puro rotolamento

Il corpo ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto ad un asse fisso passante per il punto C che cambia istante per istante, man mano che il corpo avanza

Moto di puro rotolamento

Il corpo ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto ad un asse fisso passante per il punto C che cambia istante per istante, man mano che il corpo avanza





Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

La velocità di ciascun punto è perpendicolare alla congiungente con l'asse

$$v_P = |\overline{PC}|\omega$$