Numeri complessi

giovedì 5 ottobre 2023 17:30

estensione dei numeri reale
é chiusa

Un numero complesso é un espressione della forma

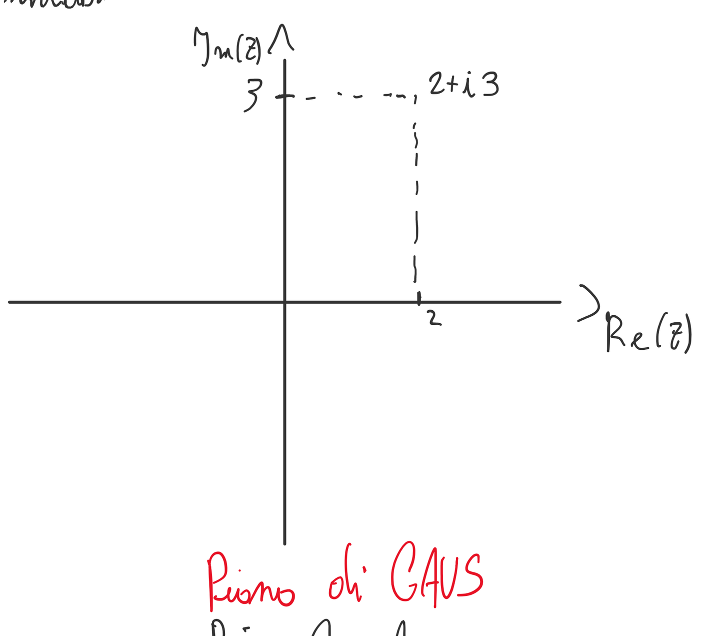
$x + iy$ con $x\,y \in \mathbb{R}$ $\qquad i^2 = -1 \qquad i = \sqrt{-1}$

x → parte reale, iy → parte immaginaria

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ $\qquad$ Campo associa Commutat.

$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$



Piano di GAUS
Piano Complesso

$Z = x + iy$

$x = \mathrm{Re}(Z)$ parte Reale
$y = \mathrm{Im}(Z)$ parte Immaginaria

Somma e prodotto in $\mathbb{C}$

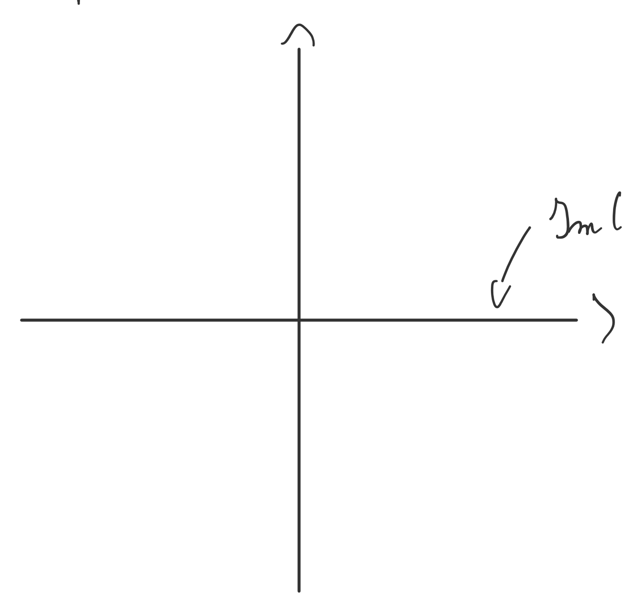
Dati 2 numeri complessi

$z = a + ib \qquad w = c + id \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$z + w = a + c + i(b + d)$

$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i(ad + bc)$

Identifico $\mathbb{R}$ con il sottoinsieme $\mathbb{C}$ dato da $\{x + i \cdot 0 \quad x \in \mathbb{R}\}$



Il numero complesso $0 + i \cdot 1$ soddisfa $(0 + i \cdot 1)(0 + i \cdot 1) = -1 + i(0 + 0) = -1 + i0$

· In generale se $x \in \mathbb{R}$ allora scrivo x al posto di $x + i \cdot 0$
· ix (opp xi) al posto di $0 + ix$

es: $2 + i0 = 2 \qquad 0 - i3 = -i3$
$-3i$

Allora vale $\boxed{i^2 = -1}$

Definizioni dato un numero complesso $z = x + iy$
Si definiscono
· il modulo di z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
· il coniugato di z: $\bar{z} = x - iy$

es
$|4 - \frac{i}{2}| = |4 + i(-\frac{1}{2})| = \sqrt{4^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{65}{4}}$

$\overline{2 - 3i} = 2 + 3i \qquad \overline{i + 5} = -i + 5$

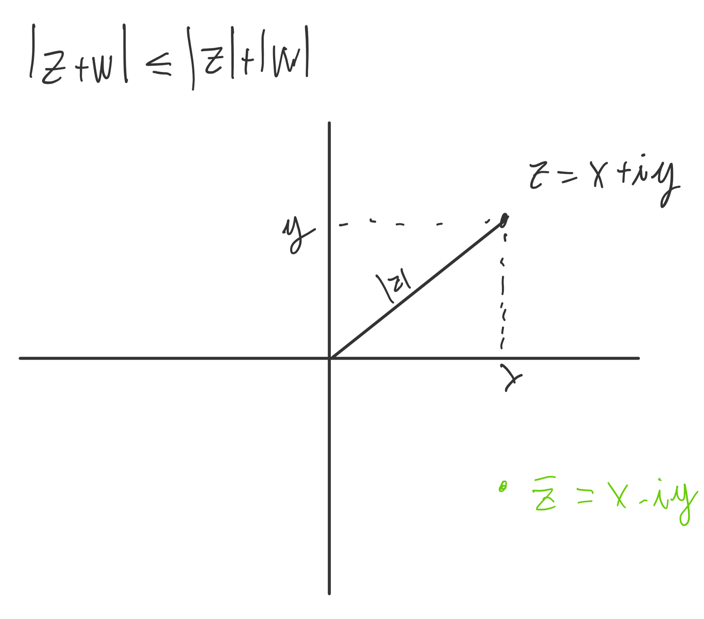
Proprietà: $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$
$|z| = 0$ se e solo se $z = 0 = 0 + i0$

$\overline{(\bar{z})} = z$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$|\bar{z}| = |z|$

$|z + w| \leq |z| + |w|$



Dato $z \in \mathbb{C} \neq 0 \;(\Rightarrow |z| > 0)$ esiste almeno un numero $\theta \in \mathbb{R}$ (teta) tale che
$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$ ARGOMENTO

$|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$z = x + iy = |z| \left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{S} + i \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{T} \right)$

$S^2 + t^2 = 1$