FISICA GENERALE I

Annalisa Allocca

Università degli Studi di Napoli,
Compl. Univ. Monte S.Angelo – Dipartimento di Fisica
Via Cinthia, I-80126, Napoli

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
sez. Napoli
Studio: 1G16, Edificio 6
+39-081-676345
annalisa.allocca@unina.it

Organizzazione

- **Sito web:** www.docenti.unina.it/annalisa.allocca
  - La registrazione al sito si può effettuare inserendo numero di matricola e pin oppure tramite SPID per chi non fosse ancora in possesso di matricola
  - Il materiale didattico si trova sulla pagina web

- **Libri di testo adottati:**
  - Mazzoldi, Nigro, Voci «Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica» Vol. 1 - Edises Napoli
  - Halliday, Resnick, Walker «Fondamenti di Fisica» - Ambrosiana Milano
  - Serway, Jewett «Principi di Fisica» - Edises Napoli

Argomenti di oggi:

- Dinamica dei sistemi di punti materiali
  - Richiami a:
    - Conservazione della quantità di moto
    - Teorema del momento angolare
    - Conservazione del momento angolare
  - Sistema di riferimento del centro di massa
  - Teoremi di Koenig
  - Lavoro ed energia cinetica per un sistema di punti materiali
  - Esempi

Mazzoldi, Nigro, Voci, cap 5

Sistemi di punti: forze interne e forze esterne

- Per il sistema complessivo:

  - Quantità di moto **totale**: $\vec{\boldsymbol{P}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{i}} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$

  - Momento angolare **totale**: $\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_{\boldsymbol{i}} \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times m_i \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$
    (rispetto ad un polo coincidente con l'origine)

  - Energia cinetica **totale**: $E_k = \sum_i E_{k,i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, v_i^2$

Centro di massa di un sistema di punti

Definiamo centro di massa di un sistema di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata dal raggio vettore:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \vec{\boldsymbol{r}}_2 + \ \dots + \ m_n \vec{\boldsymbol{r}}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

In coordinate cartesiane avremo:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

La posizione «fisica» del centro di massa non dipende dal sistema di riferimento, mentre le coordinate variano a seconda del sistema prescelto

Teorema del moto del centro di massa

Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne:

$$m\vec{\boldsymbol{a}}_{CM} = \vec{\boldsymbol{F}}^{EXT}$$

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{EXT} = m\vec{\boldsymbol{a}}_{CM} = m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt}$$

La risultante delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema

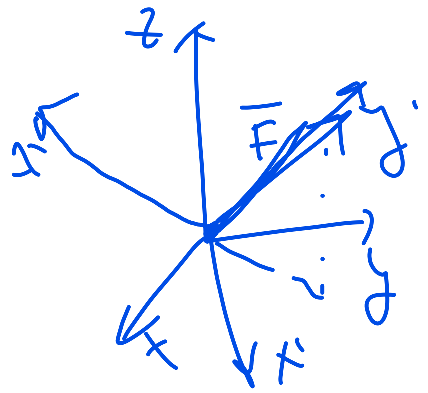
Conservazione della quantità di moto

- Se la somma delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema si conserva → il centro di massa resta in quiete o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme

Conservazione della quantità di moto

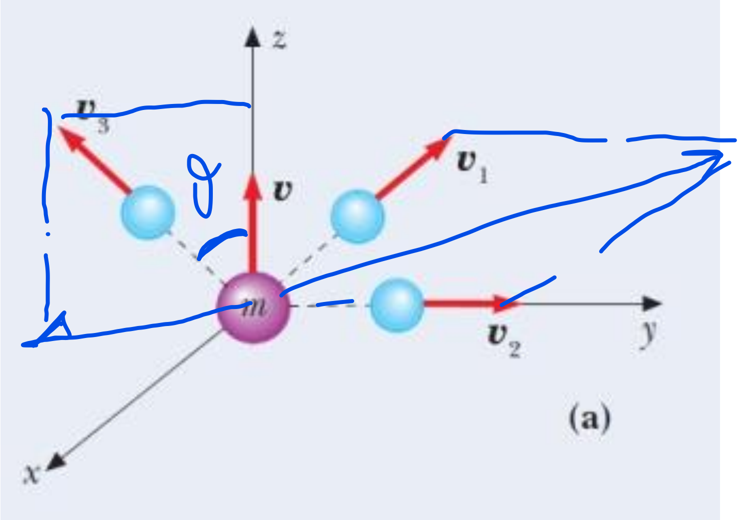
- Se la somma delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema si conserva → il centro di massa resta in quiete o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme

- Può esserci conservazione della quantità di moto anche solo lungo una direzione: ad es, $F_x = 0$ implica la conservazione del momento solo lungo la direzione x



Esempio: un razzo esplode in aria

Un razzo di massa m, quando raggiunge una certa altezza con velocità $\vec{\boldsymbol{v}} = v_0\overrightarrow{\boldsymbol{u}_z}$ con v_0=400m/s, esplode in tre frammenti di eguale massa. Al momento dell'esplosione, un frammento ha velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = -300\vec{\boldsymbol{u}}_x\, m/s$, un altro $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = 450\vec{\boldsymbol{u}}_y\, m/s$ e il terzo $\vec{\boldsymbol{v}}_3$. Calcolare il modulo della velocità del terzo frammento e la sua direzione θ rispetto alla direzione di moto del razzo. Calcolare inoltre la massima quota raggiunta dal centro di massa rispetto al punto di esplosione e il tempo impiegato per raggiungerla.



$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3$$

$$m\bar{v} = \frac{m}{3}\bar{v}_1 + \frac{m}{3}\bar{v}_2 + \frac{m}{3}\bar{v}_3$$

$$\parallel$$

$$m v_0 \hat{u}_z$$

$$\cancel{m} v_0 = \frac{\cancel{m}}{3} v_3 \cos\vartheta$$

$$\cos\vartheta = \frac{3v_0}{v_3}$$

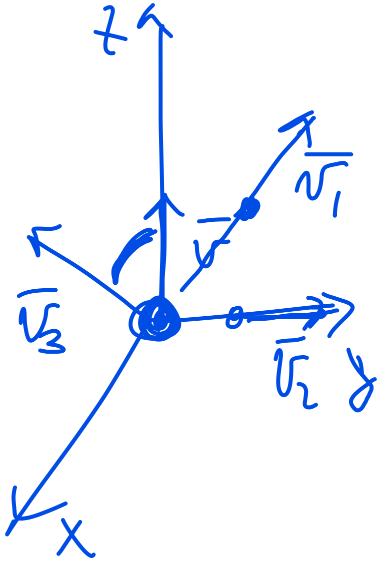
$$\vartheta = \arccos\left(\frac{3v_0}{v_3}\right)$$

$$\bar{v} = v_0 \hat{u}_z = 400 \frac{m}{s} \hat{u}_z$$

$$\cancel{m}\, v_0 \hat{u}_z = \frac{\cancel{m}}{3}\left(v_1 \hat{u}_x + v_2 \hat{u}_y + \bar{v}_3 \right)$$

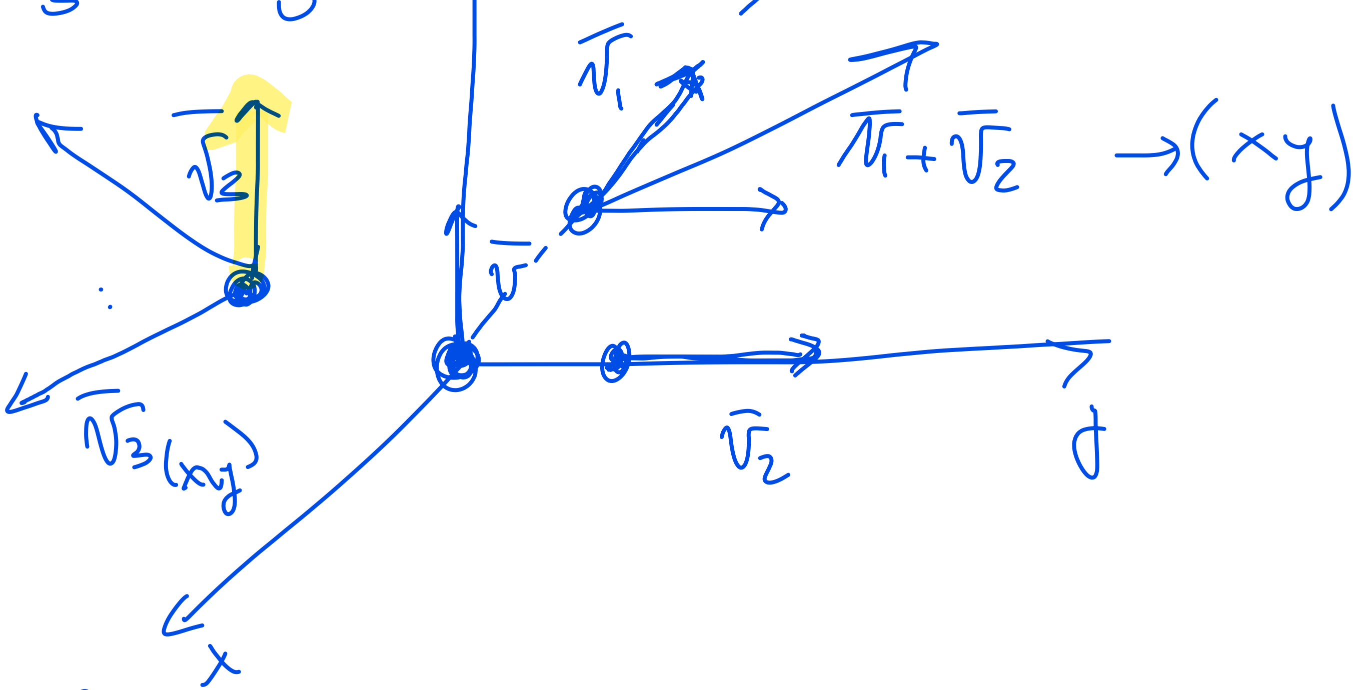
$$\bar{v}_3 = 3 v_0 \hat{u}_z - v_1 \hat{u}_x - v_2 \hat{u}_y = \left(1200\, \hat{u}_z + 300\, \hat{u}_x - 450\, \hat{u}_y\right) \frac{m}{s}$$

$$v_3 = \sqrt{\left(1200^2 + 300^2 + 450^2\right) \frac{m^2}{s^2}} = 1320 \frac{m}{s}$$



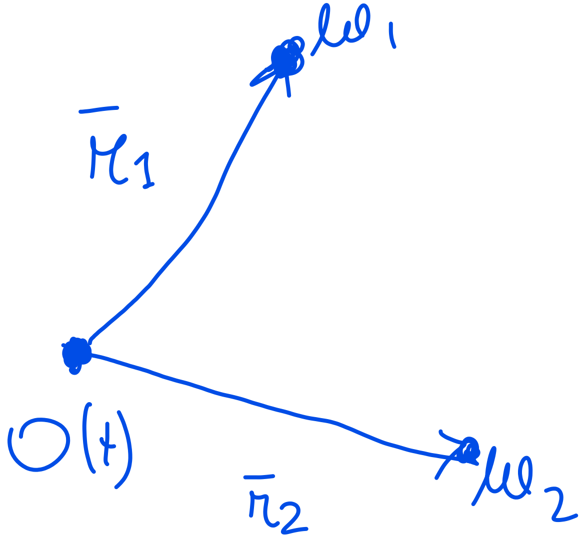
$$\overbrace{m\bar{v} = m v_0 \hat{u}_z}^{u_z} = \frac{m}{3}\bar{v}_1 + \frac{m}{3}\bar{v}_2 + \frac{m}{3}\bar{v}_3$$

$\downarrow$



$$m v_0 \hat{u}_z = \frac{m}{3} v_3 \cos\vartheta\, \hat{u}_t \Rightarrow \cos\vartheta = \frac{3 v_0}{v_3}$$

Teorema del momento angolare



$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_0$$

$$\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_0$$

$$\bar{L} = \sum_i \bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_i$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \left(\bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_i \right) =$$

$$= \sum_i \left(\frac{d\bar{r}_i'}{dt} \right) \times m_i \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}_i' \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}$$

$$= \sum_i \bar{v}_i' \times m \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}_i' \times m \bar{a}_i$$

$$= \sum_i \left(\bar{v}_i - \bar{v}_0 \right) \times m \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}_i' \times m_i \bar{a}_i$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_i \bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i - \sum_i \bar{v}_0 \times m_i \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}'_i \times m_i \bar{a}_i$$

$$\boxed{m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^{I} + \bar{F}_i^{(EX)}}$$

$$\boxed{\sum_i m_i \bar{v}_i = \bar{v}_{CM} \left(\sum_i m_i\right)}$$

$$= -\sum_i \bar{v}_0 \times m_i \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}'_i \times \left(\bar{F}_i^{I} + \bar{F}_i^{(EX)}\right)$$

$$= -\bar{v}_0 \times M \bar{v}_{CM} + \underbrace{\sum_i \bar{r}'_i \times \bar{F}_i^{I}}_{\bar{M}^{I}} + \underbrace{\sum_i \bar{r}'_i \times \bar{F}_i^{EX}}_{\bar{M}^{(EX)}}$$

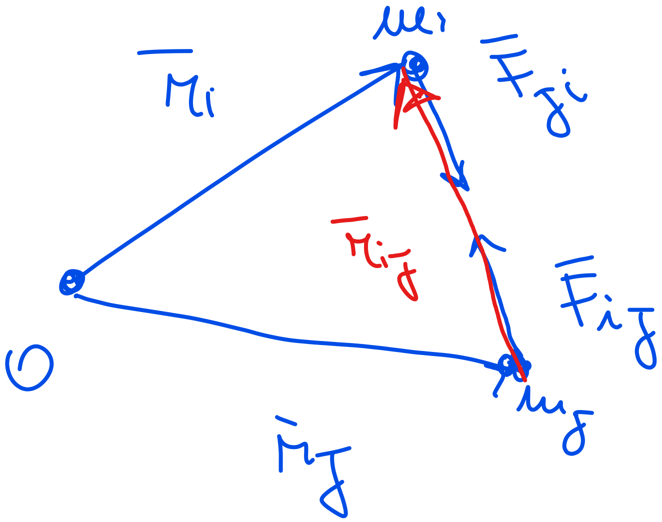
$\bar{M}^{I}$ ← zero

$$\sum_i m_i = M$$

Massa totale del sistema

Teorema del momento angolare

Dimostriamo che $\overline{M}^I = 0$



$$\overline{M}_i = \overline{r}_i \times \overline{F}_{ji}$$

$$\overline{M}_j = \overline{r}_j \times \overline{F}_{ij}$$

$$\boxed{\overline{M}^I_{tot} = \sum_{i,j} \overline{r}_i \times \overline{F}_{ij}}$$

$$\overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}$$

$$\overline{M}^I_{tot} = \overline{r}_i \times \overline{F}_{ji} + \overline{r}_j \times (-\overline{F}_{ji}) = \overbrace{(\overline{r}_i - \overline{r}_j)}^{\overline{r}_{ij}} \times \overline{F}_{ji} = \underbrace{\overline{r}_{ij} \times \overline{F}_{ji}}_{0}$$

Teorema del momento angolare

Teorema del momento angolare

Dato il momento angolare del sistema di punti materiali

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times m\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$$

Dalla sua derivata temporale ricaviamo:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}{dt} \times m\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}\right) + \left(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}}{dt}\right)$$

Dimostrando che il momento totale delle forze interne è nullo, troviamo che

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{ext}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} \times M\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}^{ext} - \underbrace{\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} \times M\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}}$$

Se:

- Il polo O è fisso, o
- Il centro di massa non si muove, o
- Il centro di massa coincide con il polo O, o
- La velocità del centro di massa e quella del polo sono parallele

$$\boxed{\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}^{ext}}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Conservazione del momento angolare

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = 0 \ \text{ implica che } \vec{\boldsymbol{L}} \text{ è } costante$$

Principio di conservazione del momento angolare

I e II equazione cardinale

- Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{EXT} = m\vec{\boldsymbol{a}}_{CM} = m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt}$$

- Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{ext}} \boxed{- \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} \times M\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}}$$

Questo termine si annulla se:

- Il polo O è fisso, o
- Il centro di massa non si muove, o
- Il centro di massa coincide con il polo O, o
- La velocità del centro di massa e quella del polo sono parallele

Leggi di conservazione

- Conservazione della quantità di moto

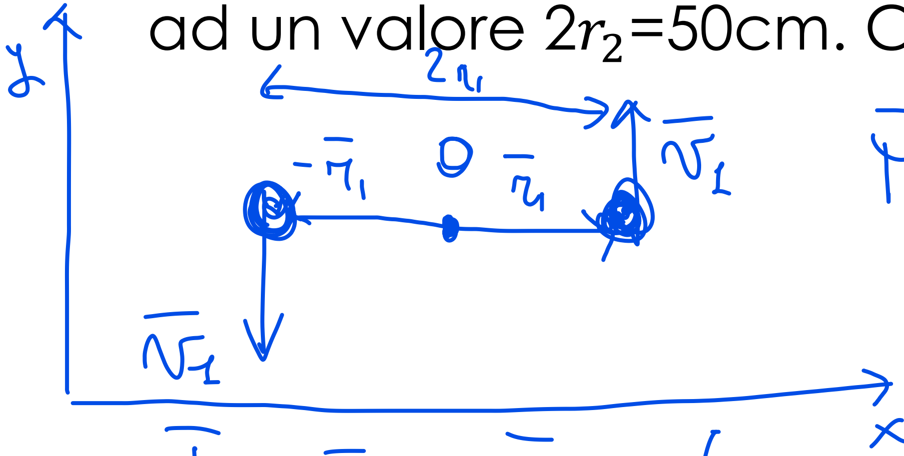
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{\boldsymbol{P}} \text{ è costante}$$

- Conservazione del momento angolare

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{\boldsymbol{L}} \text{ è costante}$$

Esempio: due punti materiali fissati ad una sbarra che ruotano

Due punti materiali di egual massa *m=0.2kg* sono legati da una sbarretta di massa trascurabile, e ruotano senza attrito su un piano orizzontale rispetto al centro della sbarretta. Nella situazione iniziale la sbarretta è lunga $2r_1$=30cm e la velocità angolare ha il valore costante $\omega_1 = 3\,rad/s$. Supponiamo che la sbarra sia telescopica e che durante il moto la lunghezza venga portata ad un valore $2r_2$=50cm. Calcolare il valore finale della velocità angolare ω_2.



$$\bar{M}^{Ex} = \bar{r} \times \bar{F} = 0$$

$$\boxed{v_1 = \omega_1 r_1}$$

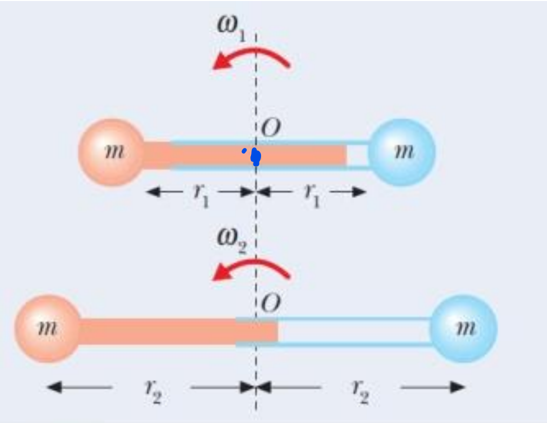


Figura 5.18

Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

$$\bar{L} = \bar{r}_1 \times m\bar{v}_1 + \left(-\bar{r}_1 \times (-m\bar{v}_1)\right) = 2\bar{r}_1 \times m\bar{v}_1$$

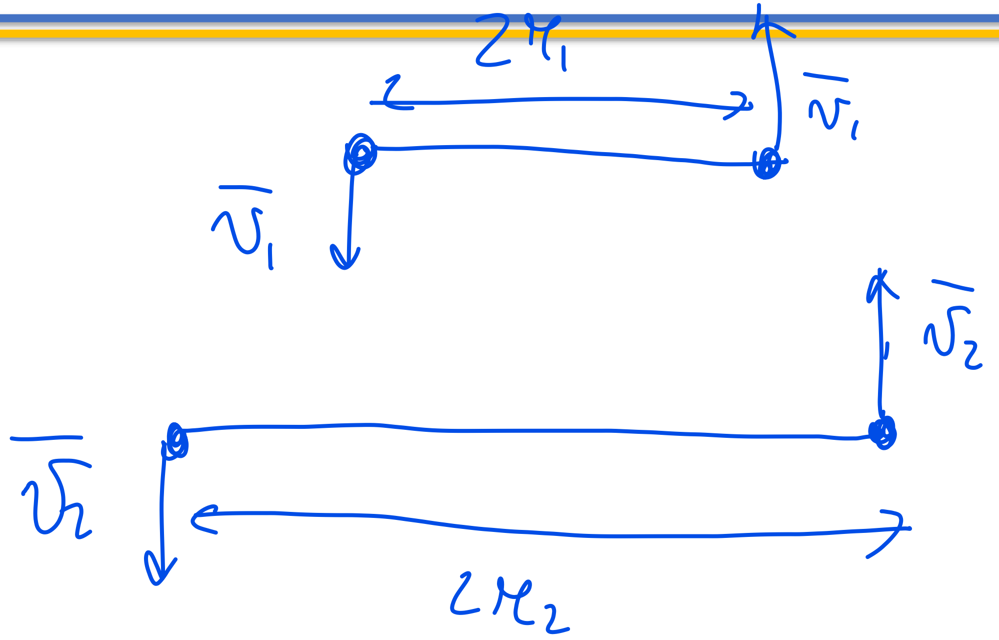
- $L_1 = 2r_1 m v_1 = 2mr_1^2\omega_1 = L_2 = 2mr_2^2\omega_2$

$$L_1 = \cancel{2m}\, r_1^2\, \omega_1$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$L_2 = \cancel{2m}\, r_2^2\, \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\,\omega_1$$

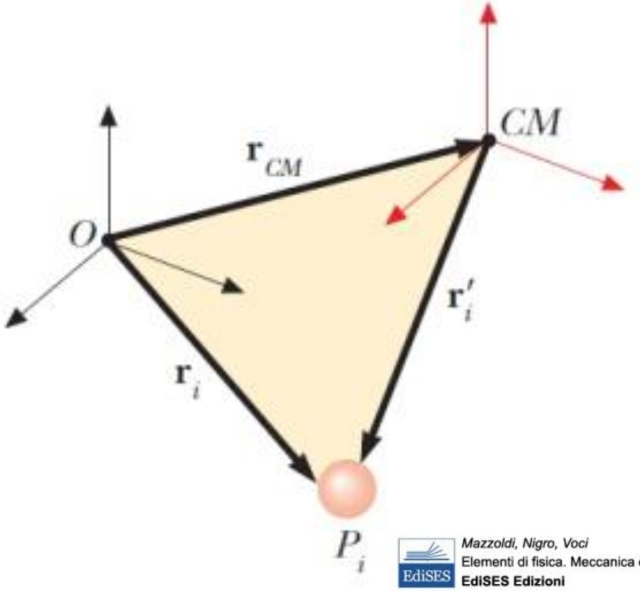


Sistema di riferimento del centro di massa

- Origine nel centro di massa
- Gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto a quelli del sistema di riferimento fisso e possono essere presi paralleli a questi ultimi
- In generale, è un sistema non inerziale. Solo se la risultante delle forze esterne è zero, sarà nulla l'accelerazione del centro di massa, quindi il sistema sarà inerziale.

Sistema di riferimento del centro di massa

Sistema di riferimento del centro di massa



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

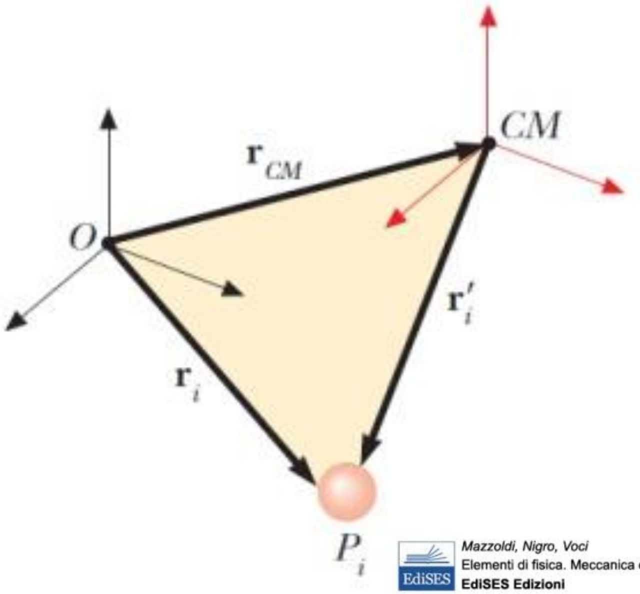
Sistema di riferimento del centro di massa

Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i + \vec{r}'_{CM} \qquad \vec{v}'_i = \vec{v}'_i + \vec{v}'_{CM}$$



Sistema di riferimento del centro di massa

Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

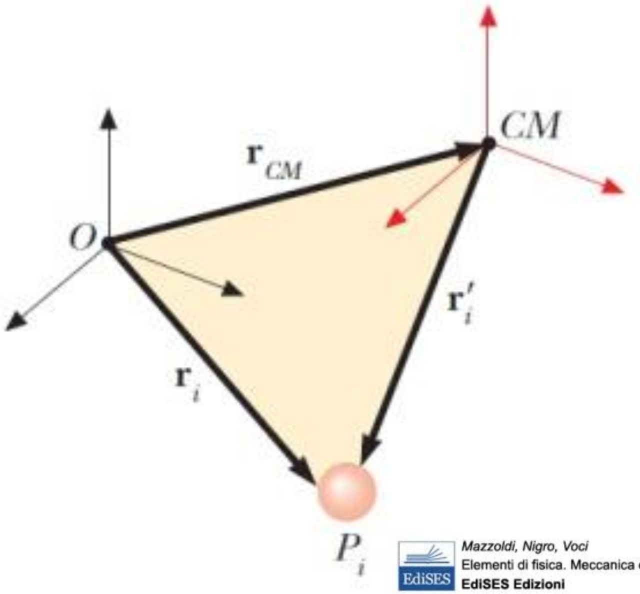
$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i + \cancel{\vec{r}'_{CM}} \qquad \vec{v}'_i = \vec{v}'_i + \cancel{\vec{v}'_{CM}}$$

La quantità di moto totale del sistema risulta sempre nulla nel sistema di riferimento del centro di massa

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

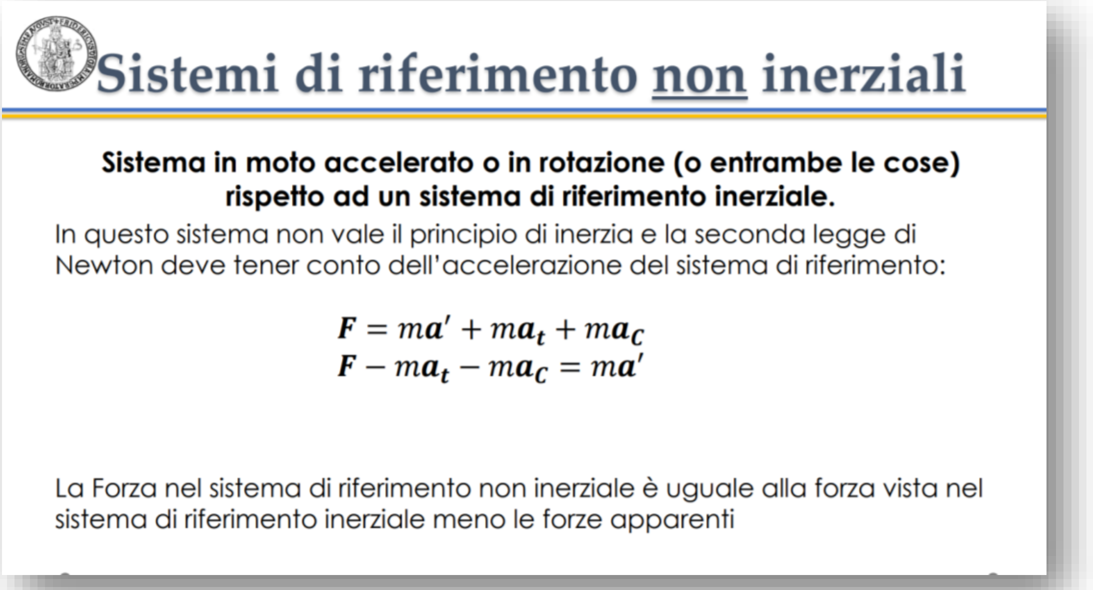
Sistema di riferimento del centro di massa

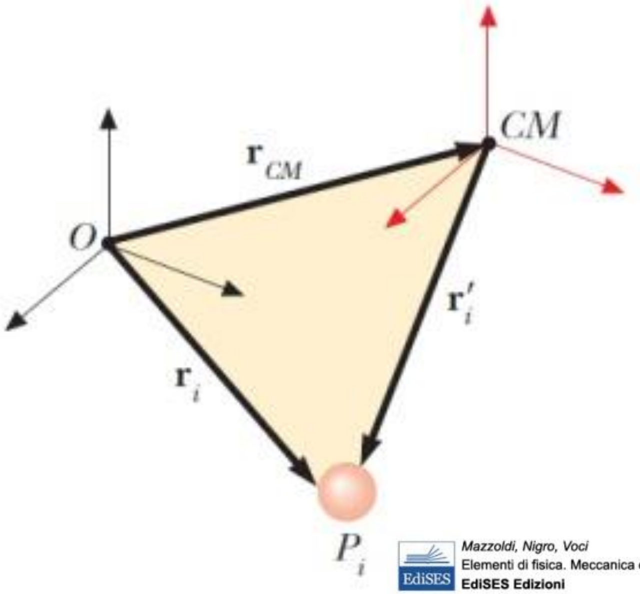
Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i + \vec{r}'_{CM} \qquad \vec{v}'_i = \vec{v}'_i + \vec{v}'_{CM}$$





Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Sistema di riferimento del centro di massa

Sul singolo punto agisce una forza totale

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{Ext} + \vec{F}_i^{Int} \boxed{- m\vec{a}_{CM}}$$

Accelerazione di trascinamento del sistema di riferimento del CM (non inerziale) → $\vec{F}^{app}$

Si dimostra che, oltre al momento delle forze interne, anche il momento delle forze apparenti nel sistema di riferimento del CM è nullo

$$\vec{M}'^{(app)} = -\sum_i \vec{r'}_i \times m_i\vec{a}_{CM} = -\boxed{\sum_i m_i\vec{r'}_i} \times \vec{a}_{CM}$$

$$\vec{r'}_{CM} * M_{tot} = 0$$

Teoremi di König (I)

I teoremi di Koenig forniscono una relazione tra quantità misurate nel sistema di riferimento inerziale e le stesse quantità misurate nel sistema di riferimento del centro di massa.

I teorema di Koenig: momento angolare

Teoremi di König (I)

I teoremi di Koenig forniscono una relazione tra quantità misurate nel sistema di riferimento inerziale e le stesse quantità misurate nel sistema di riferimento del centro di massa.

I teorema di Koenig: momento angolare

Teoremi di König (I)

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{L}}' + \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} \times m\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}} = \vec{\boldsymbol{L}}' + \vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{CM}}$$

Il momento angolare del sistema nel sistema di riferimento inerziale è dato dalla somma di:

- Momento angolare nel sistema di riferimento del centro di massa $\vec{\boldsymbol{L}}'$
- Momento angolare dovuto al moto del centro di massa, con una massa pari alla massa totale del sistema $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{CM}}$

Teoremi di König (II)

Il teorema di Koenig: energia cinetica

Teoremi di König (II)

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM}$$

In un sistema di riferimento inerziale, l'energia cinetica del sistema complessivo si può scrivere come la somma di:

- Energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa E'_k
- Energia cinetica di un punto materiale con massa pari alla massa totale del sistema che si muove con la velocità del centro di massa $E_{k,CM}$

Teoremi di König

- Grazie alla definizione di centro di massa e sistema di riferimento del centro di massa, possiamo descrivere momento angolare ed energia cinetica totali come:
  - Moto medio del sistema (moto del centro di massa)
  - Moto del sistema rispetto al centro di massa (moto interno)

  Non si può fare lo stesso con la quantità di moto, che è identicamente nulla nel sistema di riferimento del centro di massa

Il centro di massa descrive la quantità di moto totale del sistema, ma non è sufficiente a descrivere il momento angolare e l'energia cinetica del sistema, perché bisogna tener conto anche del moto «intorno» al centro di massa

Teoremi di König

Singolo punto materiale

Sistema di punti materiali

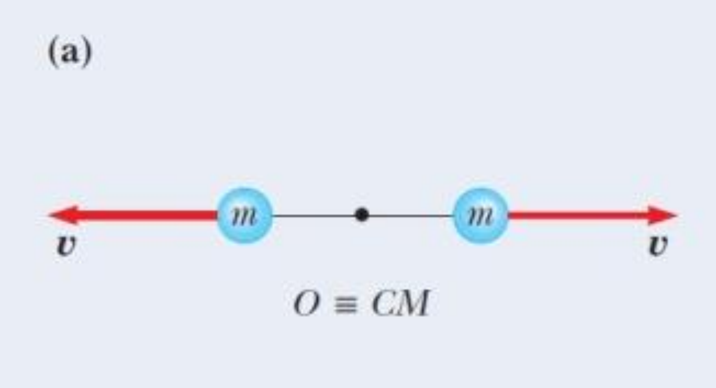
Teoremi di König

Singolo punto materiale

Sistema di punti materiali

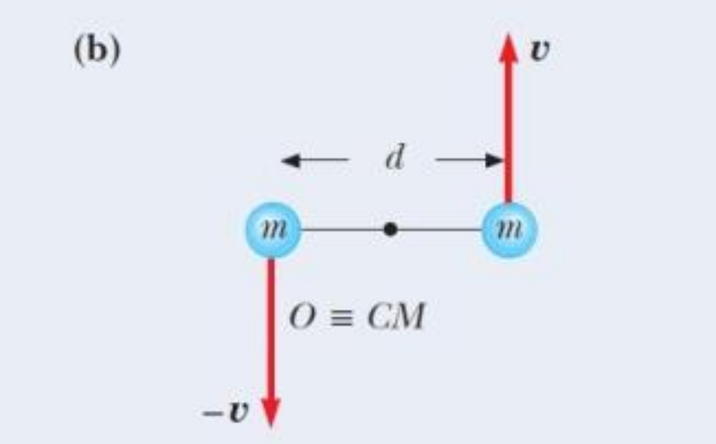
Esempio: calcolo di $\vec{L}$ ed E_k

Determiniamo i casi di $\vec{\boldsymbol{L}}, \vec{\boldsymbol{L}}'$ e $\vec{\boldsymbol{L}}_{CM}$ e di E_k, E_k' ed E_{CM} nei seguenti casi:



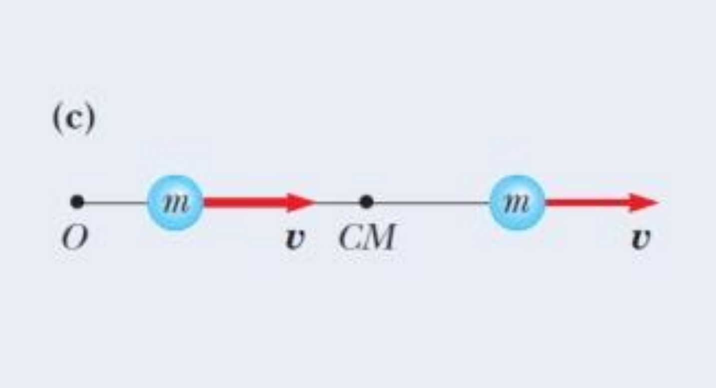
Esempio: calcolo di $\vec{L}$ ed E_k

Determiniamo i casi di $\vec{\boldsymbol{L}}, \vec{\boldsymbol{L}}'$ e $\vec{\boldsymbol{L}}_{CM}$ e di E_k, E'_k ed E_{CM} nei seguenti casi:



Esempio: calcolo di $\vec{L}$ ed E_k

Determiniamo i casi di $\vec{\boldsymbol{L}}, \vec{\boldsymbol{L}}'$ e $\vec{\boldsymbol{L}}_{CM}$ e di E_k, E_k' ed E_{CM} nei seguenti casi:



Esempio: calcolo di $\vec{\mathrm{L}}$ ed $\mathrm{E_k}$

Determiniamo i casi di $\vec{\boldsymbol{L}}, \vec{\boldsymbol{L}}'$ e $\vec{\boldsymbol{L}}_{CM}$ e di E_k, E_k' ed E_{CM} nei seguenti casi: