NOZIONI PRELIMINARI

$\forall$ *per ogni* $\exists$ *esiste* $\exists|$ *esiste un solo* : *oppure* | *tale che* $\in$ *appartiene* $\emptyset$ *vuoto*

GLI INSIEMI

Una collezione di elementi rappresenta un *insieme* se esiste un criterio oggettivo che permette di decidere univocamente se un qualunque elemento fa parte o no del raggruppamento.
Indichiamo gli insiemi con lettere **maiuscole** A, B, . . . e gli elementi di un insieme con lettere minuscole a, b, x, t . . .

INSIEMI PIÚ IMPORTANTI
- N = insieme dei numeri naturali
- N_0 = insieme numeri naturali diversi da 0
- Z = insieme dei numeri interi relativi
- Q = insieme dei numeri razionali (cioè di tutte le frazioni p/q con p $\in$ Z, q $\in$ N_0)
- R = insieme dei numeri reali

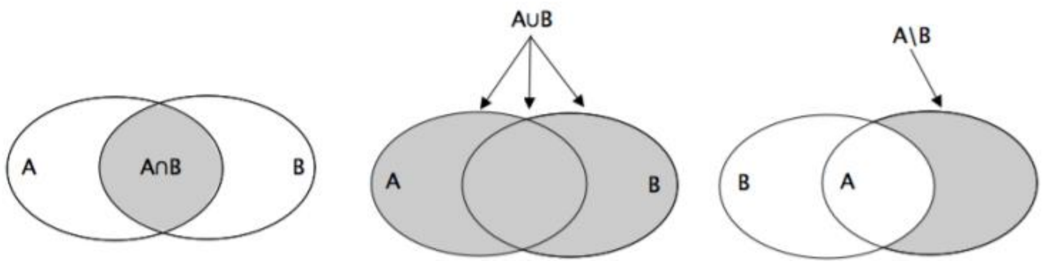
Notiamo che valgono le inclusioni proprie:

$$\mathbf{N_0 \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$$

Dati due insiemi A e B, essi si dicono **uguali** quando contengono gli stessi elementi. La scrittura è **A = B**.
Siano A e B due insiemi, con B $\neq \emptyset$, si dice che A è **incluso** in B se ogni elemento di A è anche elemento di B. La scrittura è **A $\subseteq$ B**, B $\supseteq$ A significano: A è contenuto in B, ovvero B contiene A, ovvero A è sottoinsieme/parte di B.
Siano A e B due insiemi, con B $\neq \emptyset$, si dice che A è **strettamente incluso** in B se ogni elemento di A è anche elemento di B ma esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A. La scrittura è **A $\subset$ B**, B $\supset$ A significano: A è strettamente contenuto in B, ovvero A è sottoinsieme proprio di B.

Siano A e B due insiemi qualunque, si definisce **unione** di A e B l'insieme costituito dagli elementi di A e B. La scrittura è **A $\cup$ B**. Siano A e B due insiemi qualunque, si definisce **intersezione** di A e B l'insieme costituito dagli elementi comuni ad A e B. La scrittura è **A $\cap$ B**.

Siano A e B due insiemi qualunque, si definisce **differenza** di A e B l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A e non a B. La scrittura è **A \ B** oppure **A – B**.



Inoltre, siano α e β due proposizioni, si dice che α **implica** β (α → β) se il verificarsi di α fa scaturire il verificare di β. Mentre si dice che α è **equivalente** a β (α ↔ β) se α → β e β → α.

INSIEME $\mathbb{R}$

Dicesi numero reale un qualunque allineamento decimale periodico e non. Un allineamento decimale è la rappresentazione decimale del numero razionale dato dal rapporto p e q con p $>$ 0 e q $>$ 0. Le proprietà dei numeri reali si possono classificare in tre gruppi: proprietà algebriche, proprietà di ordinamento e proprietà di continuità.

PROPRIETÁ ALGEBRICHE

L'insieme dei numeri reali munito delle proprie operazioni assume il nome di *campo reale*. In $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni (dette anche interne) che sono **somma** e **prodotto**.

Queste operazioni godono delle seguenti proprietà:

Si definisce allora la differenza di a e b, la somma di a e l'opposto di b. Mentre il rapporto tra due numeri a e b con b ≠ 0 il prodotto di a col reciproco di b.

- *Proprietà commutativa*: a + b = b + a, ab = ba per ogni a, b ∈ $\mathbb{R}$;
- *Proprietà associativa*: a + (b + c) = (a + b) + c, a(bc) = (ab)c per ogni a, b, c ∈ $\mathbb{R}$;
- *Proprietà distributiva*: a(b + c) = ab + ac per ogni a, b, c ∈ $\mathbb{R}$;
- *Esistenza degli elementi neutri*: esistono due numeri reali distinti, che indichiamo con 0 e 1, tali che a + 0 = a, a · 1 = a per ogni a ∈ $\mathbb{R}$;
- *Esistenza degli opposti*: per ogni a ∈ R esiste un (unico) -a ∈ R tale che a + (- a) = 0;
- *Esistenza dei reciproci*: per ogni a ∈ R \ {0} esiste un (unico) a^{-1} ∈ R tale che a*a^{-1} = 1;
- Sia $n \in \mathbb{N}$, si pone per definizione $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x^n = \begin{cases} x & se\, n = 1 \\ x * x * x \ldots & se\, n < 1 \end{cases}$
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \leftrightarrow ac < bc \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$ con c > 0;
- $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x| * |y|$;
- Sia $x \in \mathbb{R}$, si pone per definizione $|x| = \begin{cases} x & se\, x \geq 0 \\ -x & se\, x < 0 \end{cases}$ quindi $\forall\, x \in \mathbb{R}\{0\}\ |x| > 0\ e\ |-x| = |x|$;
- $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad con\, y \neq 0 \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;
- $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad |x^n| = |x|^n$.

TEOREMA 1	TEOREMA 2
Sia α > 0, $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ |x| \leq \alpha \leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$ $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ |x| < \alpha \leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$ $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ |x| > \alpha \leftrightarrow x < -\alpha\ o\ x > \alpha$ $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ |x| \geq \alpha \leftrightarrow x \leq -\alpha\ o\ x \geq \alpha$	Siano $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ $||x| - |y|| \leq |x + y|$ *N.B. LE DUE DISUGUAGLIANZE SONO UGUALI PER x = 0 OPPURE y = 0*

RAPPRESENTAZIONE n IN $\mathbb{R}$

Consideriamo due punti O e U di una retta r il cui verso di percorrenza prevede che O preceda U. In tal modo la retta r è orientata e si dice che su di essa sia stata stabilita un'origine e il *verso di percorrenza* dicesi **verso positivo dell'asse**. La semiretta di origine O cui U appartiene si chiama semiasse positivo, mentre la semiretta cui U non appartiene prende il nome di semiasse negativo. Il punto O rappresenta lo zero ed U *(punto unità)* il numero 1. Per ogni coppia A e B di r indichiamo con AB la misura del segmento di estremi A e B rispetto al segmento con estremi OU.

Per ogni punto P appartenente a *r* si chiama ascissa di P il numero reale:

$$x_P = \begin{cases} 0 & se\ P \equiv O \\ OP & se\ O\ precede\ P \\ -OP & se\ P\ precede\ O \end{cases}$$

In tal modo ad ogni punto P di r viene assegnato un unico numero reale che è la sua ascissa e ad ogni ascissa si dimostra esistere un unico punto P. Per questo motivo tale punto è detto **rappresentazione geometrica del numero reale x**.

Se x e y sono due numeri reali qualunque il segmento di estremi x e y la lunghezza del segmento è |x + y| e il punto medio è $\frac{x+y}{2}$. Pertanto i numeri reali si dicono anche **punti di** $\mathbb{R}$ ed il modulo prende il nome di **distanza**.

PROPRIETÁ DI DENSITÁ

Se x e y sono due numeri reali tali che $x < y$ si dimostra che esistono infiniti numeri razionali ed irrazionali maggiori di *x* e minori di *y*. Ciò si esprime dicendo che gli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

INSIEMI NUMERICI LIMITATI

Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato inferiormente se $\exists\ h\ \in \mathbb{R}: h \leq x\quad \forall\ x\ \in \mathbb{R}$. Ogni numero reale *h* soddisfacente alla relazione dicesi **minorante** dell'insieme numerico *X*.
Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se $\exists\ h\ \in \mathbb{R}: h \geq x\quad \forall\ x\ \in \mathbb{R}$. Ogni numero reale k soddisfacente alla relazione dicesi **maggiorante** dell'insieme numerico *X*.
Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato se lo è sia inferiormente che superiormente, ovvero se esistono due numeri reali *h* e *k* tali che $h \leq x \leq k$. Da ciò si deduce che un $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se esiste $\alpha > 0$ numero tale che $|x| \leq \alpha\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice dotato di minimo se $\exists\ m' \in X: x \leq m'\quad \forall\ x\ \in \mathbb{R}$, mentre un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice dotato di massimo se $\exists\ m'' \in X: x \leq m''\quad \forall\ x\ \in \mathbb{R}$. Se un tale elemento esiste prende il nome rispettivamente di minimo di *X* e si denota dalla scrittura *minX* e massimo di *X* e si denota con *maxX.*

N.B. Se X è una parte di $\mathbb{R}$ limitata inferiormente/superiormente, allora l'insieme dei suoi minoranti/maggioranti è dotato di massimo/minimo (assioma di completezza di $\mathbb{R}$). L'assioma di completezza di R asserisce la possibilità di interporre un numero reale fra gli elementi di qualunque coppia di insiemi separati. L'enunciato preciso è il seguente: per ogni coppia A, B di sottoinsiemi di R non vuoti e separati, esiste almeno un elemento separatore, cioè un numero reale ξ tale che a ≤ ξ ≤ b ∀a ∈ A, ∀b ∈ B.

A questo punto, se $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato inferiormente, allora, è dotato di un massimo dei minoranti, il quale prende il nome di **estremo inferiore di *X*** e si indica col simbolo *infX*. Pertanto se $infX \in X$ allora l'estremo inferiore coincide con il minimo. Se *X* non è limitato inferiormente si pone per definizione $infX = -\infty$.

Proprietà estremo inferiore di un insieme numerico

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente, un numero reale e' è l'estremo inferiore di *X* se e solo se gode delle seguenti proprietà:

- $e' \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in X : x < e' + \varepsilon$;

Analogamente, se $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente, allora, in base al teorema della completezza, l'insieme dei maggioranti di X è dotato di minimo. Quest'ultimo prende il nome di **estremo superiore di *X*** e si denota con $supX$. Pertanto se $supX \in X$, allora il maggiorante minimo coincide col massimo.

Proprietà estremo superiore di un insieme numerico

Sia X una parte di $\mathbb{R}$ limitata superiormente, un numero reale e'' è l'estremo superiore di X se e solo se gode delle seguenti proprietà:

- $e'' \geq x \; \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in X : x > e'' - \varepsilon$.

GLI INTERVALLI NUMERICI

Siano a, b ∈ $\mathbb{R}$ $con \; a < b$:

- $\{x \in \mathbb{R} \; a \leq x \leq b\} = [a; b]$ *intervallo chiuso;*
- $\{x \in \mathbb{R} \; a < x < b\} =]a; b[$ intervallo aperto;
- $\{x \in \mathbb{R} \; a \leq x < b\} = [a; b[$ *intervallo semiaperto a destra*;
- $\{x \in \mathbb{R} \; a < x \leq b\} =]a; b]$ *intervallo semiaperto a sinistra.*

Per ciascuno degli intervalli $\frac{a+b}{2}$ prende il nome di *centro dell'intervallo* mentre $b - a$ prende il nome di dimensione o **ampiezza dell'intervallo**.

INSIEME AMPLIATO DEI NUMERI REALI

Introdotti i simboli $-\infty$ e $+\infty$ allora $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ prende il nome di insieme ampliato dei numeri reali. Sia $c \in \mathbb{R}$,

- $\{x \in \mathbb{R}: x \leq c\} =]-\infty; c]$ *intervallo chiuso illimitato inferiormente;*
- $\{x \in \mathbb{R}: x \geq c\} = [c, +\infty[$ *intervallo chiuso illimitato superiormente;*
- $\{x \in \mathbb{R}: x > c\} =]c, +\infty[$ *intervallo aperto illimitato superiormente di estremo c;*
- $\{ x \in \mathbb{R}: x < c\} =]-\infty; c[$ *intervallo aperto illimitato inferiormente di estremo c.*

INSIEMI CONTIGUI

Due parti X e Y di $\mathbb{R}$ si dicono separate se l'estremo superiore di una di esse è minore o uguale dell'altra. In tal caso, ogni numero reale appartenente all'intervallo chiuso i cui estremi sono $supX$ e $infY$ dicesi un **elemento di separazione** di X e Y. Le parti separate *X* ed *Y* di $\mathbb{R}$ si dicono contigue quando $supX = infY$.

STUDIO DI FUNZIONI

Siano X e Y insiemi non vuoti, si definisce *funzione* definita in X ed a valori in Y, una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa uno e un solo elemento $y \in Y$, ciò viene scritto in questi termini $f: X \to Y$, mentre il suo valore si denota come $y = f(x)$.

L'insieme X prende il nome di **dominio** o campo di esistenza o insieme di definizione della funzione, mentre si definisce **codominio** di f il sottoinsieme di *Y* composto dagli elementi di *Y* che sono immagine di *X* tramite f.

TIPI DI FUNZIONI

a. La funzione che ad ogni x di X associa un c prende il nome di *funzione costante* in *X*. In questo caso, il codominio della funzione considerata è costituito da un solo elemento di *Y*.
b. Una funzione è *identica* in X se associa ad ogni x di X sé stesso.
c. La funzione *identicamente nulla* associa ad ogni x di X uno stesso elemento 0.
d. Sia A un sottoinsieme non vuoto di X, la funzione f $\forall x \in X$ associa il numero 1 se x appartiene ad A, 0 se non appartiene. Questa funzione si denota con χ_A. e il codominio in questo caso presenta solo due elementi 1 e 0.

RESTRIZIONI E PROLUNGAMENTI DI UNA FUNZIONE

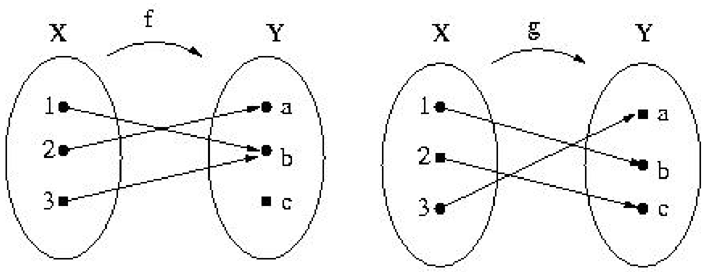
Siano X e Y insiemi qualunque con $A \subset X$, la funzione con dominio in X e codominio in Y, la funzione $\forall\, x \in A$ prende il nome di f ad A e si indica con $f_{/A}$. Se $B \subseteq X$, esso si chiama prolungamento di f su B ogni funzione g definita in B ed a valori in Y la cui restrizione ad X coincide con f.

EQUAZIONE

Siano X e Y insiemi qualunque, $f: X \to Y$ consideriamo il seguente problema: stabilire se esistono elementi $\bar{x} \in X: f(\bar{x}) = \bar{y}$. Il problema posto prende il nome di equazione nell'incognita x e viene indicato brevemente tramite la scrittura $f(x) = \bar{y}$. Ogni elemento soddisfacente alla 1 dicesi soluzione alla 2. Pertanto la 2 è risolubile se e solo se y=f(X).

FUNZIONI INVERTIBILI ED INVERSE

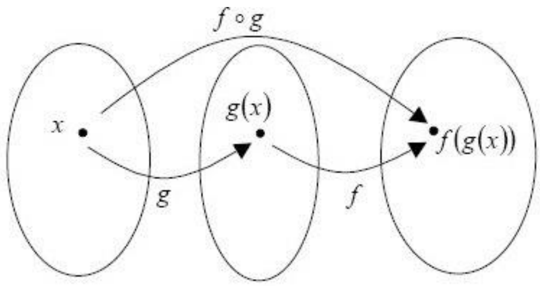
Siano X e Y insiemi qualunque, f una funzione in X con valori in Y, si dice che f è invertibile se comunque scegliamo due elementi nel suo dominio diversi tra loro risulta $f(x') \neq f(x'')$. Dunque f è invertibile se e solo se comunque scegliamo un elemento y nel suo codominio l'equazione nell'incognita x ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione dell'equazione nell'incognita x dicesi inversa di f e si denota con f^{-1}, la quale è definita nel codominio di f ed ha per codominio il dominio di f.



Se A è un sottoinsieme non vuoto di x e se la restrizione di f ad A è invertibile si dice che f è invertibile in A o localmente invertibile e l'inversa della restrizione di f ad A è detta l'inversa locale di f in A.

FUNZIONE COMPOSTA

Siano X, Y, X', Y' insiemi qualunque e f: X→Y e g: X'→ Y' posto $A = \{x \in X: f(x) \in X'\}$ se $A \neq 0$ $x \in A \rightarrow g(f(x))$ si chiama funzione composta da f e da g e si denota col simbolo $g \circ f$. In particolare la funzione g è detta componente esterna, mentre f è la componente interna.



SUCCESSIONE

Sia A un insieme qualunque si chiama successione di elementi di A ogni funzione definita in N ed a valori in A.

INSIEMI NUMERABILI

Si dice che due insiemi sono **equipotenti** o che hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione definita in X ed a valori in Y invertibile ed avente per codominio Y. Un insieme Y si dice finito se esiste un numero naturale m tale che Y sia equipotente all'insieme costituito dai numeri naturali fino ad m. In tal caso il numero naturale m dicesi la cardinalità di Y. Un insieme Y si dice numerabile se è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$, cioè se è il codominio di una successione invertibile. Si dimostra che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

FUNZIONE REALE

Si chiama funzione reale ogni funzione definita in un insieme qualunque ed a valori in $\mathbb{R}$. Si dice che f è dotata di minimo/massimo se è tale nel suo dominio $f: X \to \mathbb{R}\ \forall x \in X\ \ m'[m''] \in f(x)$. Si dice che f è limitata inferiormente /superiormente se è tale il suo dominio.

Ogni elemento x'$\in X$: $f(x') = minf$ prende il nome di minimo assoluto per f. Analogamente ogni elemento x''$\in X$: $f(x') = maxf$ prende il nome di massimo assoluto per f. Si chiama estremo inferiore/superiore di f l'estremo inferiore/superiore del suo codominio. E si denota con uno dei simboli inf$f$ / sup*f.*

La funzione f definita in X a valori in $\mathbb{R}$ è limitata se e solo se esiste un numero $\alpha > 0$ tale che il $|f(x)| \leq \alpha \leftrightarrow -\alpha \leq f(x) \leq \alpha$.

Sia f: X→ $\mathbb{R}$ limitata inferiormente, un numero reale è l'estremo inferiore se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- $e' \leq f(x)\ \forall x \in X$;
- $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in X: f(x) < e' + \varepsilon$

Sia f: X→R limitata superiormente: un numero reale è l'estremo superiore se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- $e'' \geq f(x)\ \forall x \in X$;
- $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in X: f(x) > e'' - \varepsilon$

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Sia f definita in X, la funzione $x \in X \to -f(x)$ si dice **opposta di f** e si denota con - f, mentre la funzione $x \in X \to |f(x)|$ si dice **modulo di f** e si denota con | f |.

Posto X' l'insieme costituito dagli elementi di X tranne quelli la cui immagine siano nulli se X'$\neq 0$ la funzione $x \in X' \to \frac{1}{f(x)}$ dicesi **reciproca di f**.

Siano $f: X' \to R$; $g: X'' \to R$ se $X = X' \cap X'' \neq 0$ allora le funzioni $x \in X \to f(x) \pm g(x)$ e $x \in X \to f(x) * g(x)$ si dicono rispettivamente **somma/differenza e prodotto di due funzioni**.

Posto $X^* \neq \emptyset$ la funzione $X \in X^* \to \frac{f(x)}{g(x)}$ si dice **rapporto di f su g.**

FUNZIONE REALE DI UNA VARIABILE REALE

Si chiama funzione reale di una variabile reale ogni funzione reale definita in una parte di $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$. Il piano cartesiano è il prodotto di $\mathbb{R}$ per se stesso e si denota con $\mathbb{R}^2$. Si chiama grafico di f il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dalle coppie di punti $(x, f(x))$ ottenute al variare di x nel dominio di f. La rappresentazione geometrica del grafico di f prende il nome di **digramma di f** o luogo dei punti del piano di equazione $y = f(x)$.

Sia $f: X \subset R$, $\bar{y} = f(\bar{x})$ dal punto di vista geometrico risolvere l'equazione vuol dire determinare le ascisse dei punti di intersezione del diagramma di f con la retta di $\bar{y}$. Evidentemente f è invertibile se e solo se per ogni $\bar{y}$ appartenente a $f(\bar{x})$ cioè al codominio la retta di equazione $y = \bar{y}$ interseca il diagramma di f in un solo punto.

FUNZIONI MONOTONE

Sia $f: X \subset R$, si dice che f è **crescente** se comunque presi due elementi x_1 e x_2 con $x1 < x2$ risulta $f(x_1) \leq (x_2)$. Analogamente, sia $f: X \subset R$, si dice che f è **decrescente** se comunque presi due elementi x_1 e x_2 con $x1 < x2$ risulta $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Si dice che f è **strettamente crescente** se comunque presi due punti x_1 e x_2 con $x1 < x2$ risulta $f(x_1) < (x_2)$. Analogamente, si dice che f è **strettamente decrescente** se comunque presi due punti x_1 e x_2 con $x1 < x2$ risulta $f(x_1) > (x_2)$.

Le funzioni crescenti/decrescenti si dicono **monotone** mentre quelle strettamente crescenti/decrescenti si dicono **strettamente monotone**.

Si osserva che ogni funzione strettamente monotona è invertibile, inoltre:

a. **Sia $f: X \subset \mathbb{R}$, strettamente monotona allora la sua inversa è strettamente monotona**;
b. **Siano $f: X' \to R; g: X'' \to \mathbb{R}$, X = {x $\in X': f(x) \in X''$} siano f e g entrambe crscenti o decrescenti allora g composto f è crescente. Se una delle due funzioni è crescente e l'altra decrescente la composta è decrescente**.

FUNZIONE PARI, DISPARI E PERIODICA

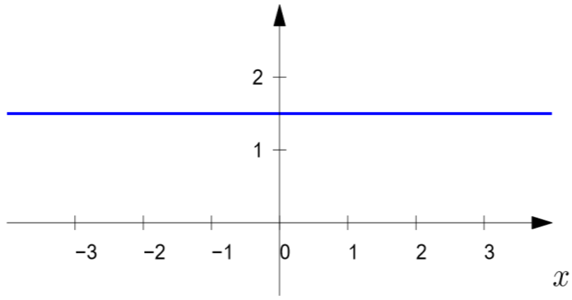
Sia $f: X \to \mathbb{R}$ ammesso che $\forall x \in X \; -x \in X$ si dice che f è *pari* se comunque scegliamo un elemento del suo dominio il valore che f assume ne suo opposto è proprio uguale al valore che f assume in X. Sia $f: X \to \mathbb{R}$ ammesso che $\forall x \in X \; -x \in X$ si dice che f è *dispari* se comunque scegliamo un elemento del suo dominio il valore che - f assume ne suo opposto è proprio uguale al valore che f assume in $-x$.

N.B. Dal punto di vista geometrico dire che una funzione è pari significa dire che il suo diagramma è simmetrico rispetto all'asse y, mentre dispari se è simmetrico all'origine degli assi.

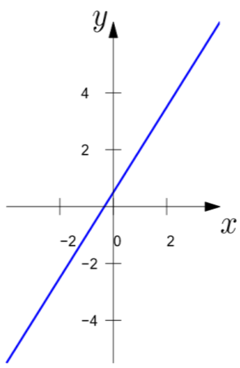
Siano $f: X \to \mathbb{R} \; e \; \omega > 0 \;\; \forall x \in X \; e \; \forall k \in Z \;\; x + k\omega \in X$ si dice che f è periodica se $\forall x \in X \; e \; \forall k \in Z$ allora f(x+$k\omega$) = $f(x)$.

LE FUNZIONI ELEMENTARI NEL CAMPO REALE

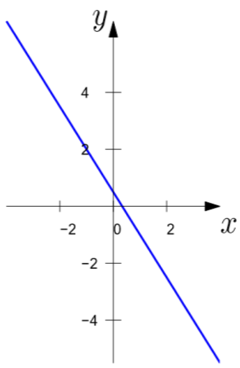
Funzione costante
$y = f(x) = c$, con c parametro reale assegnato
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{i}m(f) = \{c\}$.



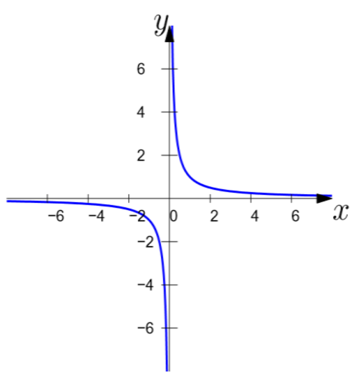
Retta obliqua $y = f(x) = ax+b$, con $a > 0$ e b parametri reali assegnati
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{i}m(f) = \mathbb{R}$.



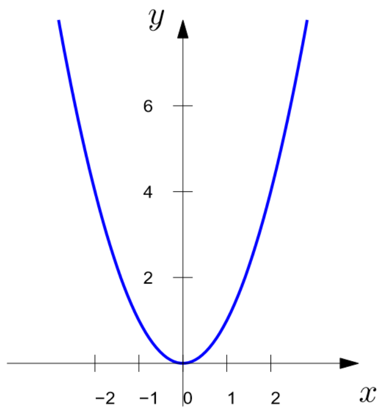
Retta obliqua $y = f(x) = ax+b$, con $a < 0$ e b parametri reali assegnati
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{i}m(f) = \mathbb{R}$.



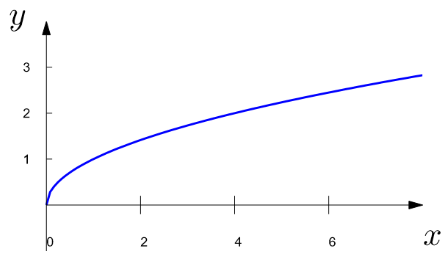
$y = f(x) = \frac{1}{x}$
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{i}m(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



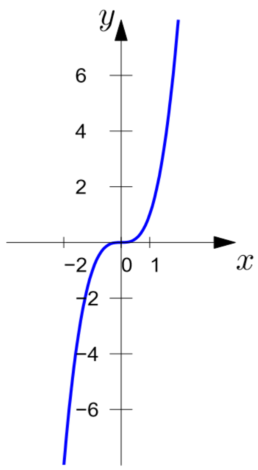
Funzione quadratica (parabola con vertice nell'origine)
$y = f(x) = x^2$
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{i}m(f) = [0, +\infty)$.



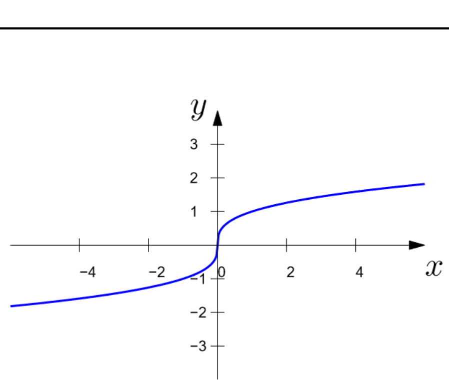
Radice quadrata
$y = f(x) = \sqrt{x}$
$\mathrm{d}om(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{i}m(f) = [0, +\infty)$.



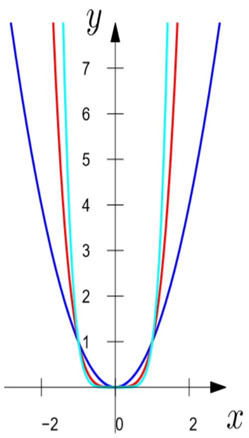
Funzione cubica
$y = f(x) = x^3$
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{i}m(f) = \mathbb{R}$.



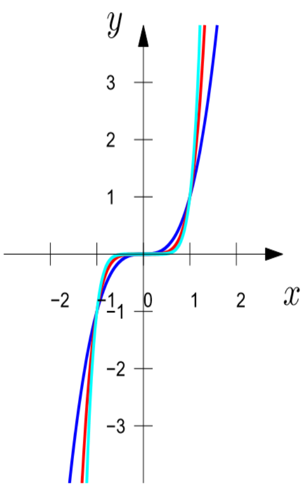
Radice cubica
$y = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{i}m(f) = \mathbb{R}$.



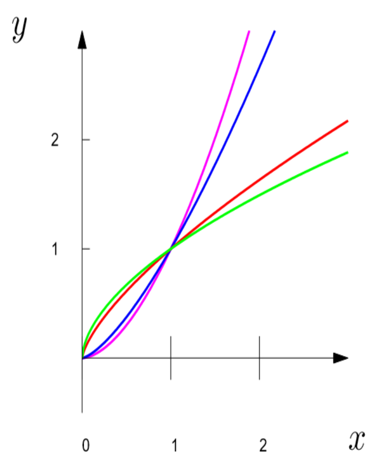
Potenza con esponente intero pari
$y = f(x) = x^n$, con n pari
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{i}m(f) = [0, +\infty)$.
Legenda: — x^2 , — x^4 , — x^6 ,



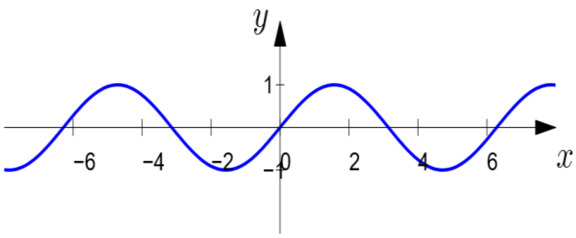
Potenza con esponente intero dispari
$y = f(x) = x^n$, con n dispari
$\mathrm{d}om(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{i}m(f) = \mathbb{R}$
Legenda: — x^3 , — x^5 , — x^7 .



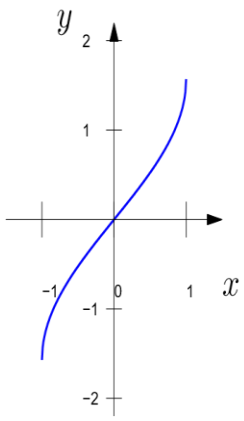
Potenza con esponente reale positivo
$y = f(x) = x^\alpha$, con $\alpha > 0$
$\mathrm{d}om(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{i}m(f) = [0, +\infty)$.
Legenda: — $x^{\sqrt{3}}$, — $x^{\sqrt{2}}$, — $x^{1/\sqrt{2}}$,
— $x^{1/\sqrt{3}}$.



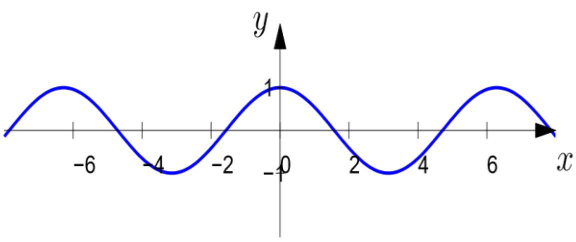
Funzione seno
$f(x) = \sin(x) = \sin x$
$dom(f) = \mathbb{R}$, $im(f) = [-1, 1]$



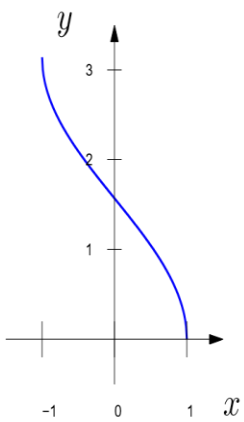
Funzione arcseno
$f(x) = \arcsin(x)$
$dom(f) = [-1, 1]$, $im(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



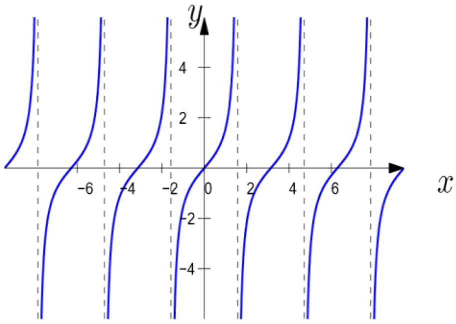
Funzione coseno
$f(x) = \cos(x) = \cos x$
$dom(f) = \mathbb{R}$, $im(f) = [-1, 1]$



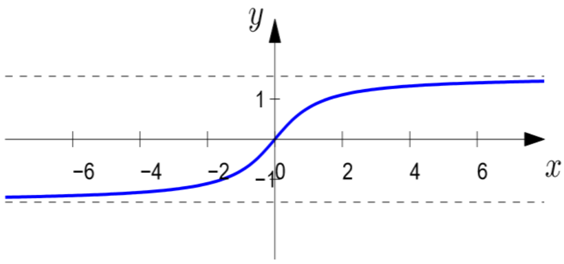
Funzione arccoseno
$f(x) = \arccos(x)$
$dom(f) = [-1, 1]$, $im(f) = [0, \pi]$



Funzione tangente
$f(x) = \tan(x) = \tan x$
$dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $im(f) = \mathbb{R}$



Funzione arctangente
$f(x) = \arctan(x)$
$dom(f) = \mathbb{R}$, $im(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



PROPRIETÀ FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)cos(\beta) \pm \cos(\alpha)sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)cos(\beta) - \cos(\alpha)sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{1+cotg^2(\alpha)}$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+tg^2(\alpha)}$
- $sin(\alpha) = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
- $sin(\alpha) = \frac{1-tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

INTORNI DI UN PUNTO DI $\mathbb{R}$

Siano $x_0 \in \mathbb{R},\ \delta > 0$:

- si definisce intorno di x_0 ogni intervallo aperto $I(x_0)$ del tipo $]\, x_0 - \delta\, ; x_0 + \delta\, [$
- si definisce intorno sinistro di x_0 ogni intervallo aperto $I(x_0)$ del tipo $]\, x_0 - \delta\, ; x_0\, [$
- si definisce intorno destro di x_0 ogni intervallo aperto $I(x_0)$ del tipo $]\, x_0\, ; x_0 + \delta\, [$

INTORNI DI INFINITO

Sia $\delta > 0$,

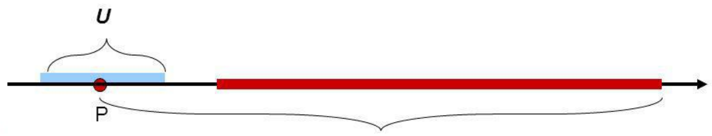
- si definisce intorno di $+\infty$ ogni intervallo aperto del tipo $]\,\delta\,;+\infty[$
- si definisce intorno di $-\infty$ ogni intervallo aperto del tipo $]-\infty\,;-\delta[$

PROPRIETÀ DEGLI INTORNI

I. L'intersezione di un numero finito di intorni di x_0 è ancora un intorno finito di x_0.
II. Se x_0 e y_0 sono punti distinti di $\mathbb{R}$ esistono un intorno $I(x_0)$ e $J(y_0)$ disguinti (privi di elementi in comune) ovvero tali che $I \cap J = \emptyset$.

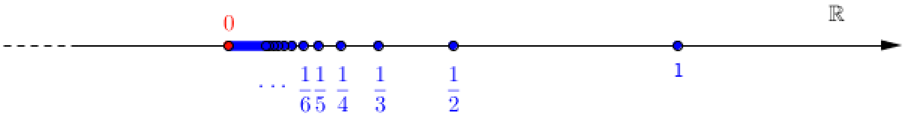
PUNTO ISOLATO

Siano $f: X \to \mathbb{R}\ e\ x_0 \in X$, si dice che x_0 è un punto isolato di X se esiste almeno un intorno $I(x_0)$ che non contiene altri elementi di X diversi da x_0.



PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Siano $f: X \to \mathbb{R}\ e\ x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è un punto di accumulazione di X se ad ogni suo intorno appartiene almeno un punto di X diverso da x_0.



L'insieme A è rappresentato in blu; 0 è un punto di accumulazione per A.

Se x_0 è di accumulazione per X allora ad ogni suo intorno appartengono infiniti punti di X.

INSIEME APERTO

- Un insieme X si dice aperto se $\forall x_0 \in X$ esiste un intorno $I(x_0)$ contenuto in X.
- Un insieme X si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

Un insieme X è chiuso se e soltanto se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Un insieme infinito ha sempre almeno un punto di accumulazione.

$\mathbb{R}\ e\ \emptyset\ unici\ insiemi\ sia\ aperti\ che\ chiusi$

TEOREMA DI BOLZANO – WEIERSTRASS

Un insieme infinito e limitato ammette almeno un **punto di accumulazione**.

TEOREMA DEL MINIMO E DEL MASSIMO

Ogni insieme chiuso e limitato superiormente o inferiormente è dotato di massimo e minimo.

DIMOSTRAZIONE:

I. Guardando l'enunciato del teorema, vediamo che sono richieste le seguenti condizioni: chiusura e limitatezza dell'intervallo in cui cerchiamo massimo e minimo;
II. Se X è chiuso allora ogni punto di accumulazione appartiene ad esso;
III. Supponiamo $e'' = supX < +\infty$;
IV. Per provare che X è dotato di massimo bisogna dimostrare che $e'' \in X$;
V. Se e'' è di accumulazione per X allora $e'' = max$;
VI. Se e'' non è di accumulazione per X allora esisterebbe $]\, e'' - \delta; e'' + \delta[$ un intorno al quale non appartengono punti di X, per cui $e'' - \delta$ risulterebbe un maggiorante di X.

LIMITI

Siano $f: X \subset \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X e $l \in \overline{\mathbb{R}}$, si dice che al tendere di x ad x_0, $f(x)$ tende ad l e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se $\forall\, J_l \exists\, I(x_0): \forall x \in I \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \in J$.

Se $l \in \mathbb{R}$ si dice che f converge in x_0.

Se $l = +\infty$ si dice che f converge positivamente in x_0.

Se $l = -\infty$ si dice che f converge negativamente in x_0.

Se $l = 0$ si dice che f è infinitesimo in x_0.

TEOREMA UNICITÀ DEL LIMITE

Il teorema di unicità del limite afferma che se esiste il limite di una funzione che tende ad un numero, questo numero è uno solo. In altre parole, preso un valore di x della funzione si può calcolare un solo limite per quella funzione in quel valore.

DIMOSTRAZIONE:

I. La dimostrazione si fa per assurdo. Si inizia assumendo che esistano due limiti l e l' diversi tra loro e che risolvano entrambi la definizione di limite di una funzione nel medesimo punto,
II. In base all'ipotesi fatta assumiamo che esistano due intorni I_1 e I_2: $\forall x \in I_{1,2} \cap X - \{x_0\}\, f(x) \in J_{1,2}$
III. Poniamo $I_0 = I_1 \cap I_2$ ancora un intorno di x_0;
IV. Si giunge all'assurdo in quanto a due elementi distinti di $\mathbb{R}$ corrispondono due intorni disguinti.

In accordo a tale teorema l è unico e prende il nome di limite di f nel punto x_0.

LIMITE PER ECCESSO E PER DIFETTO

Siano $f: X \subset \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ la scrittura $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+$ implica che siano verificate le seguenti condizioni:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
- $\exists\, I_{(x_0)}: \forall\, x \in I \cap X - \{x_0\} \;\; f(x) > l.$

Mentre, siano $f: X \subset \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ la scrittura $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$ implica che siano verificate le seguenti condizioni:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
- $\exists\, I_{(x_0)}: \forall\, x \in I \cap X - \{x_0\} \;\; f(x) < l.$

LIMITE SINISTRO E LIMITE DESTRO

Siano $f: X \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione a sinistra per X. Poniamo $X_{(x_{0-})} = \{\, x \in X: x < x_0\}$ si dice che f è regolare a sinistra nel punto se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Rispettivamente, siano $f: X \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione a destra per X. Poniamo $X_{(x_{0+})} = \{\, x \in X: x > x_0\}$ si dice che f è regolare a destra nel punto se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

CASI DI LIMITI

LIMITE FINITO PER X CHE TENDE A x_0	Considerati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta_\varepsilon$ risulta $\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$.
LIMITE FINITO PER X CHE TENDE A +∞	Considerati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} = +\infty \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta_\varepsilon$ risulta $f(x) > \varepsilon$.
LIMITE FINITO PER X CHE TENDE A -∞	Considerati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l = -\infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta_\varepsilon$ risulta $f(x) < -\varepsilon$.
LIMITE +∞ PER X CHE TENDE A x_0	Considerati $x_0 = +\infty$ e $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $x > \delta_\varepsilon$ risulta $\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$.
LIMITE +∞ PER X CHE TENDE A +∞	Considerati $x_0 = +\infty$ e $l = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $x > \delta_\varepsilon$ risulta $f(x) > \varepsilon$.
LIMITE +∞ PER X CHE TENDE A -∞	Considerati $x_0 = +\infty$ e $l = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $x > \delta_\varepsilon$ risulta $f(x) < -\varepsilon$.
LIMITE -∞ PER X CHE TENDE A x_0	Considerati $x_0 = -\infty$ e $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $x < -\delta_\varepsilon$ risulta $\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$.
LIMITE -∞ PER X CHE TENDE A +∞	Considerati $x_0 = -\infty$ e $l = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $x < -\delta_\varepsilon$ risulta $f(x) > \varepsilon$.
LIMITE -∞ PER X CHE TENDE A -∞	Considerati $x_0 = -\infty$ e $l = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon: \forall x \in X$ con $x < -\delta_\varepsilon$ risulta $f(x) < -\varepsilon$.