Esercizi su studi di funzione - 1

In ciascuno dei seguenti casi, determinare massimo e minimo assoluto di f sull'intervallo I

1. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ $\quad I = [-2, 3]$

2. $f(x) = x^4 - 4x$ $\quad I = [0, 2]$

3. $f(x) = x^3 - 12x$ $\quad I = [-3, 5]$

4. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ $\quad I = [0, 3]$

5. $f(x) = \log\left(\dfrac{2x-1}{x^2+2}\right)$ $\quad I = [1, 5/2]$

6. $f(x) = 2x^6 - 15x^4 + 24x^2$ $\quad I = [-3, 1]$

7. $f(x) = x^2 e^x$ $\quad I = [-3, 3]$

8. $f(x) = |x| + 2|x-1|$ $\quad I = [-1, 1]$

In ciascuno dei seguenti casi, studiare la funzione f secondo lo schema seguente:

(1) determinare l'insieme di definizione D di f
(2) determinare zeri e segno di f in D (cioè per quali $x \in D$ si ha $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$)
(3) studiare se f è continua in D e classificare eventuali punti di discontinuità
(4) calcolare i limiti di f agli estremi degli intervalli di cui è composto D
(5) determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per il grafico di f
(6) studiare se f è derivabile in D, calcolare l'espressione di f' nel sottoinsieme di D in cui è definita, e individuare eventuali punti angolosi, cuspidi o punti a tangente verticale
(7) determinare gli intervalli in cui f è crescente o decrescente, gli eventuali punti di massimo o minimo relativo, e calcolare i valori di f nei punti di massimo o minimo relativo
(8) determinare $\sup_D f$ e $\inf_D f$, e stabilire se sono anche massimo assoluto o minimo assoluto,

quindi tracciare un grafico qualitativo di f compatibile con le informazioni trovate.

9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 4x - 5}$

10. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x - 4}$

11. $f(x) = \left|\dfrac{2x+3}{4x-1}\right|$

12. $f(x) = \dfrac{|x-2|(3x+4)}{x+1}$

13. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{2x+7}}$

14. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

15. $f(x) = (x+6)e^{1/x}$

16. $f(x) = (x+1)\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

17. $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{x}}$

18. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}$

19. $f(x) = e^{\frac{x^2-x}{x^2-4}}$

20. $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+1}\right)$

21. $f(x) = x - \arctan(2x+1)$
(senza studio di zeri e segno di f)

♦ ♦ ♦

22. Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^3 - 6x + 1$$

i) Verificare che l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[-1, 1]$
ii) Determinare il più ampio intervallo I contenente $x = 0$ sul quale f risulta invertibile
iii) Detta $f^{-1} : f(I) \to I$ la funzione inversa di f su I, determinare $f(I)$ e calcolare $(f^{-1})'(6)$.