



FISICA GENERALE I

Annalisa Allocca

**Università degli Studi di Napoli,
Compl. Univ. Monte S.Angelo – Dipartimento di Fisica
Via Cinthia, I-80126, Napoli**

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
sez. Napoli
Studio: 1G16, Edificio 6
+39-081-676345
annalisa.allocca@unina.it**



Organizzazione

- **Sito web:** www.docenti.unina.it/annalisa.allocca
 - La registrazione al sito si può effettuare inserendo numero di matricola e pin oppure tramite SPID per chi non fosse ancora in possesso di matricola
 - Il materiale didattico si trova sulla pagina web
- **Libri di testo adottati:**
 - Mazzoldi, Nigro, Voci «Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica» Vol. 1 - Edises Napoli
 - Halliday, Resnick, Walker «Fondamenti di Fisica» - Ambrosiana Milano
 - Serway, Jewett «Principi di Fisica» - Edises Napoli



Argomenti di oggi:

- Dinamica del corpo rigido
 - Moto di un corpo rigido
 - Equilibrio statico
 - Sistemi di forze parallele e condizioni di equilibrio
 - Rotazioni rigide intorno ad un asse fisso



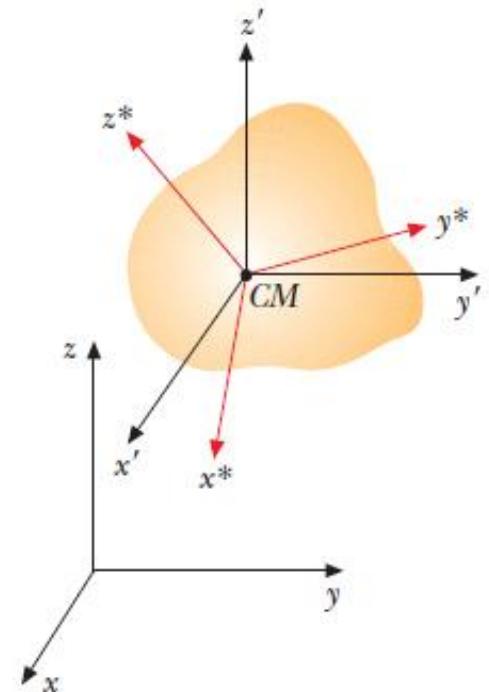
Corpo rigido - caratteristiche

- Insieme di punti materiali sottoposti ad una tale mutua interazione da mantenerli in posizione fissa l'uno rispetto all'altro
- Modello **ideale** di corpo indeformabile a cui si avvicinano i corpi solidi ordinari
- Il corpo rigido non può essere trattato alla stessa stregua del punto materiale. Infatti, nel moto è possibile individuare:
 - un moto complessivo (riconducibile al moto del centro di massa)
 - Il moto dei punti intorno al centro di massa



Corpo rigido – scelta del sistema di riferimento

- Sistema di riferimento inerziale
 (x,y,z)
- Sistema di riferimento del centro di massa
 (x',y',z')
- Sistema di riferimento del corpo rigido
 (x^*,y^*,z^*)





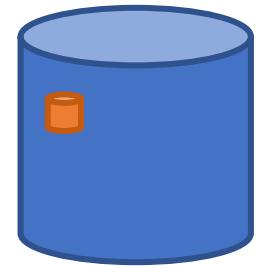
Corpo continuo - densità

- Densità volumica

$$\rho_V = \frac{dm}{dV}$$

Unità di misura: $kg \cdot m^{-3}$

dV = elemento di volume



- Densità superficiale

$$\rho_S = \frac{dm}{dS}$$

Unità di misura: $kg \cdot m^{-2}$

dS = elemento di superficie



- Densità lineare

$$\rightarrow \rho_l = \frac{dm}{dl}$$

Unità di misura: $kg \cdot m^{-1}$

dl = elemento di linea





Posizione del centro di massa

Nel discreto:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Nel continuo:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \\ &= \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} \\ &= \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV\end{aligned}$$

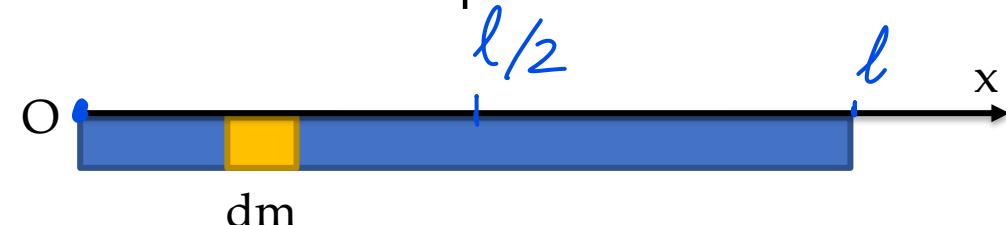
Per un corpo omogeneo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\rho}{m} \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$$



Esempio: Calcolo del centro di massa di un'asta rigida

Determiniamo la posizione del centro di massa di una bacchetta rigida omogenea di massa $m=1\text{kg}$, lunghezza $l=20\text{ cm}$ e spessore trascurabile.



$$\bar{r}_{cm} = \frac{\rho}{m} \int_V \bar{r} dV$$
$$\rho_l = \frac{m}{l}$$

↓ 1D

$$x_{cm} = \frac{\rho_l}{m} \int_0^l x dx = \frac{\rho_l}{l} \frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}$$



Moto di un corpo rigido

Scomponiamo il moto di un corpo rigido in due moti:

- Traslazione
- Rotazione



Moto del corpo rigido

- I equazione cardinale

$$\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$$

(solo forze **esterne**)

- Il equazione cardinale

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

(Origine del sistema di riferimento = CM)

(solo momento delle forze **esterne**)

- Teorema dell'energia cinetica

$$W = \Delta E_k$$

-

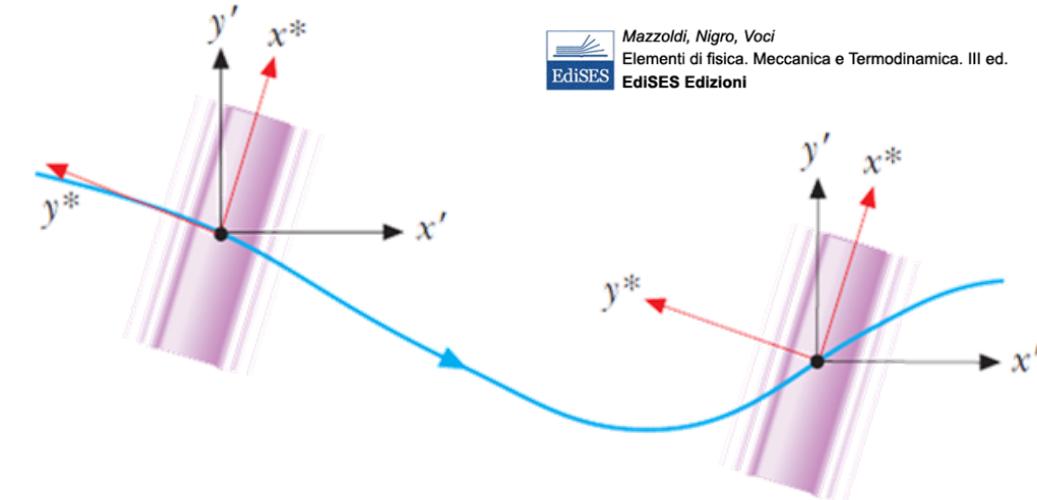
Il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è sempre nullo, perché non cambiano le mutue distanze tra i punti



Moto di un corpo rigido

- Traslazione

La posizione del sistema di riferimento solidale al corpo non cambia rispetto al sistema di riferimento del centro di massa →
 $\vec{L}' = 0$ e $E'_k = 0$



Tutti i punti del corpo descrivono traiettorie uguali e la loro velocità coincide in modulo, direzione e verso con quella del centro di massa.

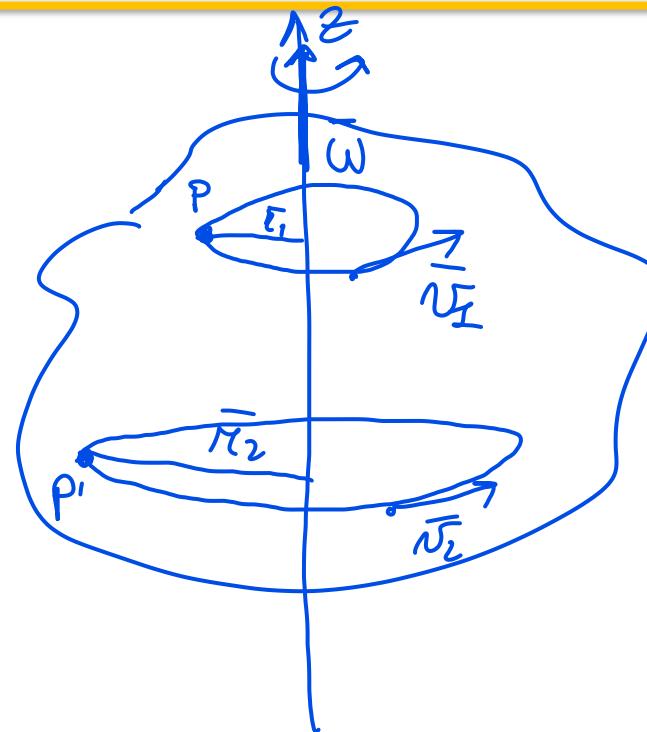
Noto il moto del centro di massa, è noto il moto di qualsiasi altro punto.

- Equazione del moto del centro di massa: $\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$
- Equazione del momento angolare: $\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$



Moto di un corpo rigido

- Rotazione



$$\bar{\omega} = \text{cost}$$

$$v = \omega R$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$



Moto di un corpo rigido

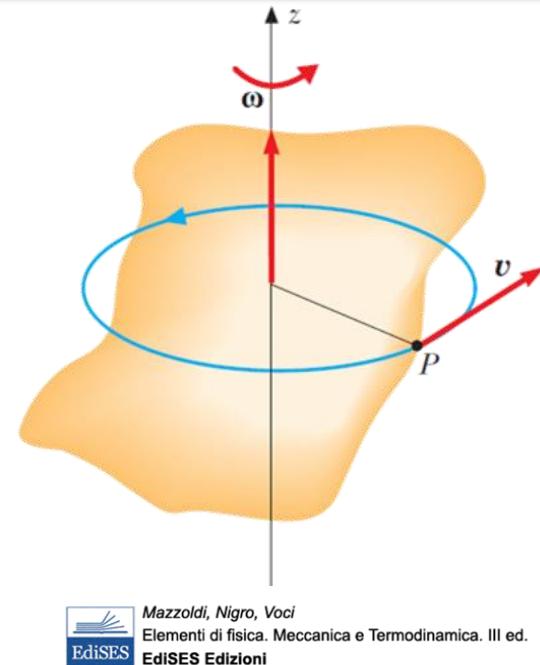
- Rotazione

La rigidità del corpo implica che tutti i punti descrivono archi di circonferenza che stanno su piani tra loro paralleli, con centro situato sull'asse di rotazione

Le velocità dei singoli punti sono diverse tra loro (\vec{v}_i), ma la velocità angolare è uguale per tutti i punti $\omega = \frac{v_i}{R_i}$, dove R_i è la distanza di ciascun punto dall'asse di rotazione.

Equazione del moto:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{L}}}{dt}$$

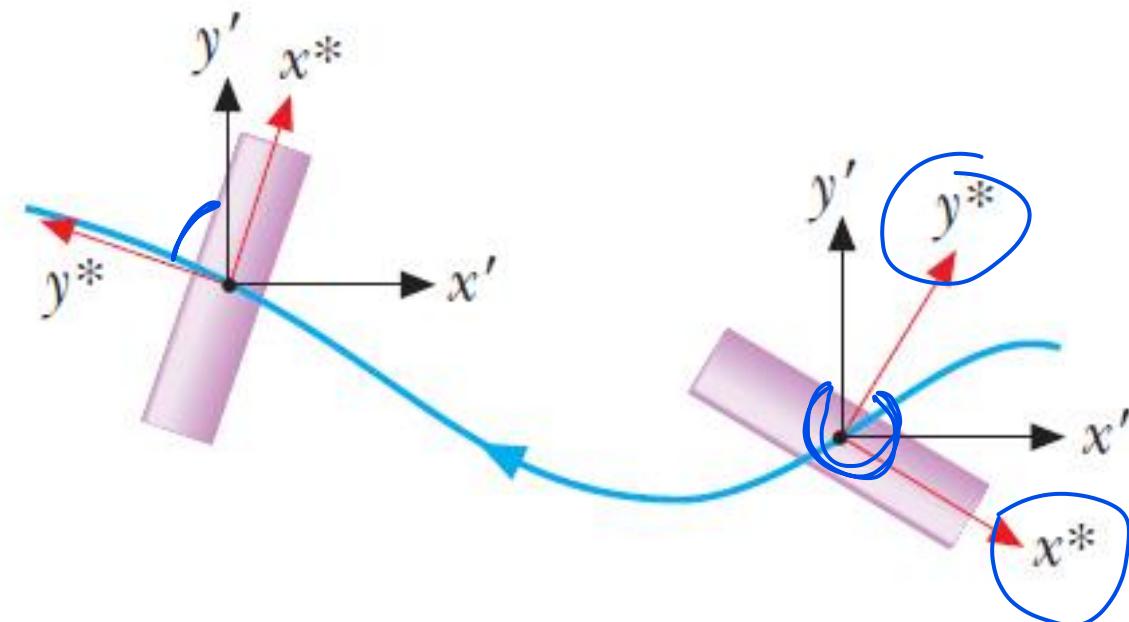


Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni



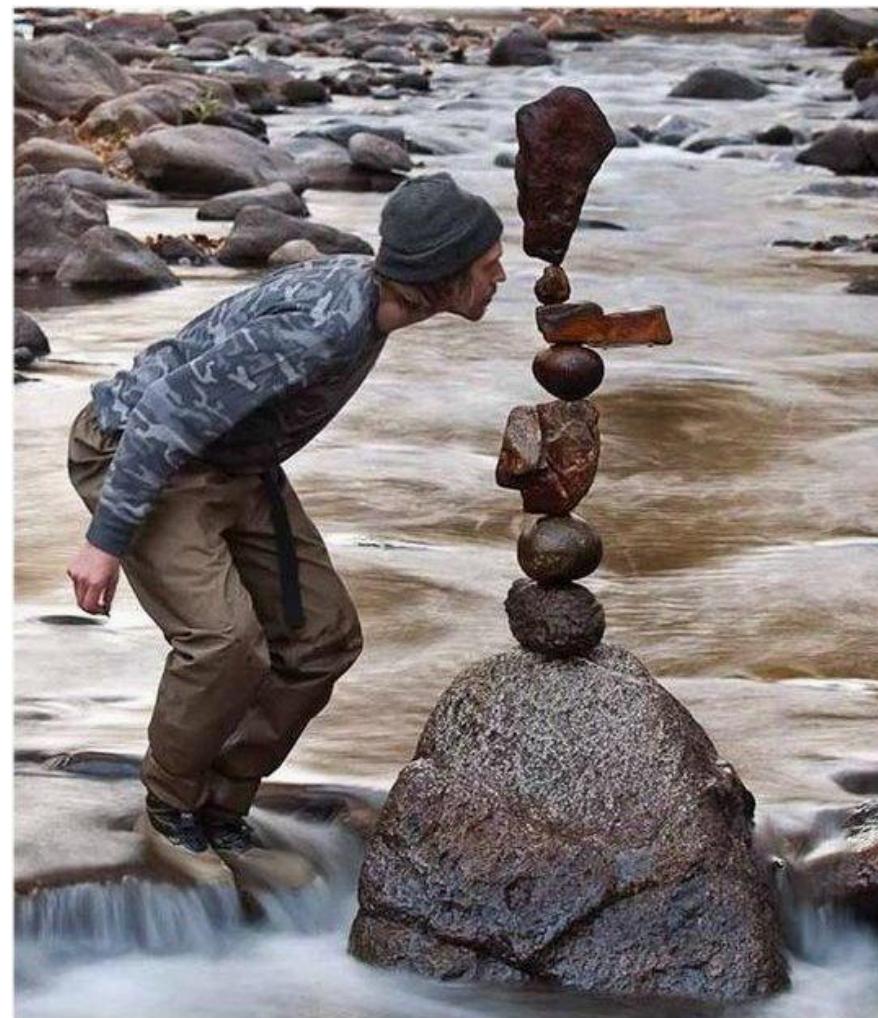
Moto di un corpo rigido

Il moto rigido più generale è **rototraslazionale**: ogni spostamento infinitesimo può essere sempre considerato come la somma di una traslazione più una rotazione infinitesime, individuate da \vec{v} ed $\vec{\omega}$ variabili nel tempo.





Equilibrio statico del corpo rigido



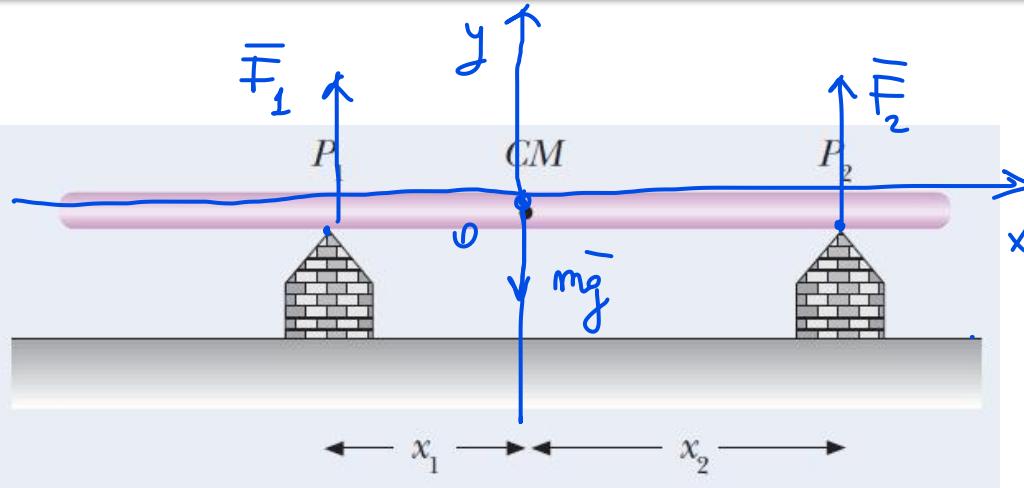


Equilibrio statico del corpo rigido

- Assenza di moto traslazionale $\rightarrow \vec{a}_{CM} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = 0$
Se il corpo è inizialmente in quiete $\rightarrow \vec{v}_{CM} = 0$
- Assenza di moto rotazionale $\rightarrow \vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = 0$



Esempio: asta orizzontale in equilibrio



Un'asta di massa m , orizzontale in quiete, è appoggiata su due supporti P_1 e P_2 . Determinare le reazioni F_1 e F_2 dei due supporti.

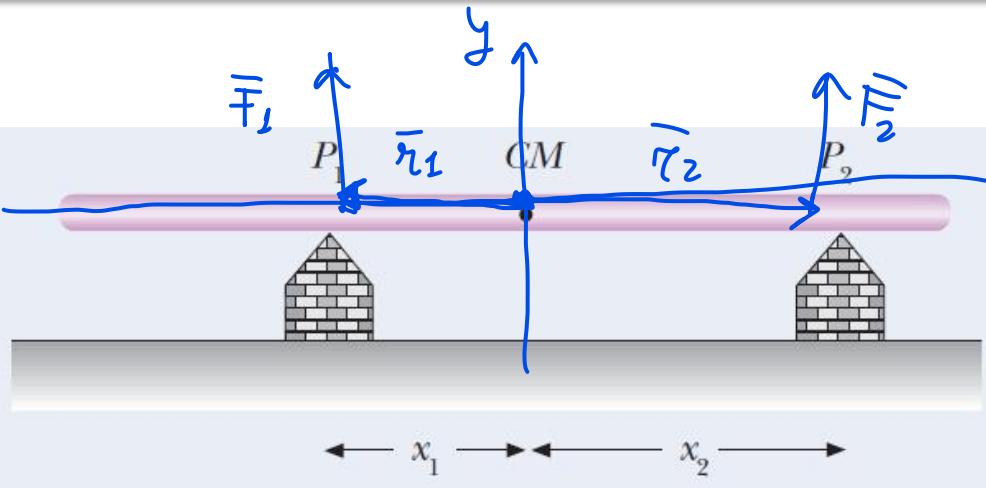
$$\sum \bar{F}^{\text{ex}} = 0 \quad \& \quad \sum \bar{M} = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = -mg + F_1 + F_2 = 0 \Rightarrow mg = F_1 + F_2 \\ mg = \frac{r_2 \bar{F}_2}{r_1} + F_2 = \left(\frac{r_2}{r_1} + 1 \right) F_2 \Rightarrow F_2 = mg \frac{r_1}{r_1 + r_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{r_2 \bar{F}_2}{r_1} = \\ &= \frac{r_2}{r_1} mg \frac{r_1}{r_1 + r_2} = mg \frac{r_2}{r_1 + r_2} \end{aligned}$$



Esempio: asta orizzontale in equilibrio



Un'asta di massa m , orizzontale in quiete, è appoggiata su due supporti P_1 e P_2 . Determinare le reazioni F_1 e F_2 dei due supporti.

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 = 0$$

Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

$$\bar{M}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 \Rightarrow |\bar{M}_1| = r_1 F_1$$

$$\bar{M}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 \Rightarrow |\bar{M}_2| = r_2 F_2 \Rightarrow r_2 F_2 - r_1 F_1 = 0 \Rightarrow r_2 F_2 = r_1 F_1$$

$$F_1 = \frac{r_2}{r_1} F_2$$



Problema della scala

Una scala di massa m e lunghezza l è appoggiata con un estremo A ad un muro verticale e con l'altro estremo B al suolo. L'attrito in A è considerato nullo, mentre in B c'è attrito. Determinare la reazione vincolare in B.

$$\sum \bar{F} = 0 = \bar{F}_A + \bar{F}_{B,O} + \bar{F}_{B,V} + m\bar{g} = 0$$

$$\begin{aligned}\beta &= 90 - \alpha \\ \sin \beta &= \cos \alpha\end{aligned}$$

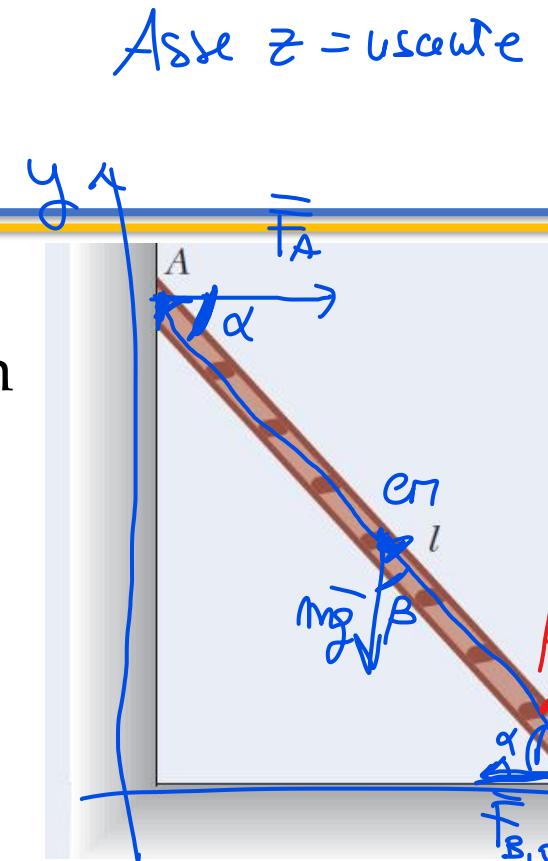
$$\sum \bar{F}_x = \bar{F}_A - \bar{F}_{B,O} = 0 \Rightarrow \bar{F}_A = \bar{F}_{B,O}$$

$$\sum \bar{F}_y = \bar{F}_{B,V} - mg = 0 \Rightarrow \bar{F}_{B,V} = mg$$

$$\sum \bar{M}_B = 0$$

$$\bar{M}_A = \bar{l} \times \bar{F}_A \Rightarrow |\bar{M}_A| = -l\bar{F}_A \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_a &= \frac{\bar{l}}{2} \times mg \Rightarrow |\bar{M}_a| = \frac{l}{2}mg \sin \beta \\ &= \frac{l}{2}mg \cos \alpha\end{aligned}$$





Problema della scala

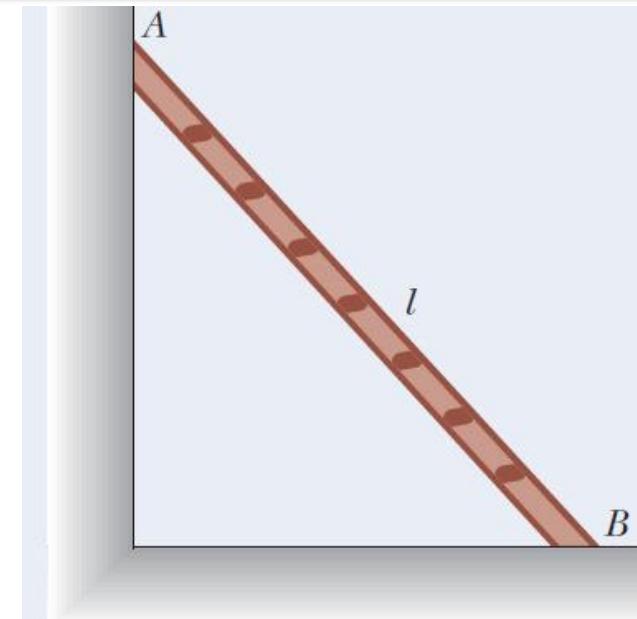
Una scala di massa m e lunghezza l è appoggiata con un estremo A ad un muro verticale e con l'altro estremo B al suolo. L'attrito in A è considerato nullo, mentre in B c'è attrito. Determinare la reazione vincolare in B.

$$\sum \bar{H} = 0$$

$$T_A = - l F_A \sin \alpha$$

$$M_{cn} = \frac{l}{2} mg \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad R F_A \sin \alpha = \frac{l}{2} mg \cos \alpha$$

$$F_A = \frac{mg}{2} \cot \alpha = \frac{mg \tan \theta}{2}$$



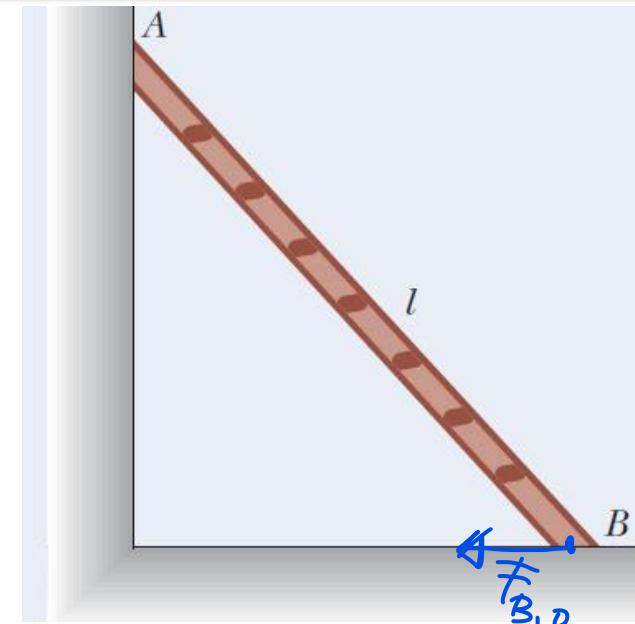


Problema della scala

Una scala di massa m e lunghezza l è appoggiata con un estremo A ad un muro verticale e con l'altro estremo B al suolo. L'attrito in A è considerato nullo, mentre in B c'è attrito. Determinare la reazione vincolare in B.

$$\bar{F}_A = \bar{F}_{B,0} = \frac{1}{2}mg \tan \beta \leq \mu_s Mg$$

$$\tan \beta \leq \mu_s$$



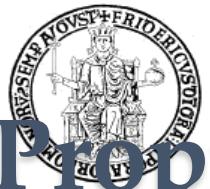




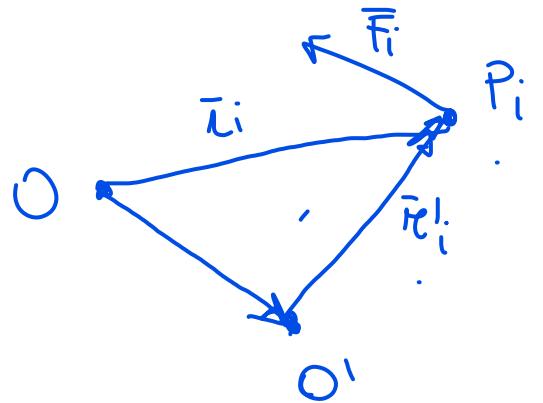


Sistemi di forze

...



Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi



$$\bar{r}_i = \bar{o}o' + \bar{r}'_i \Rightarrow \bar{r}'_i = \bar{r}_i - \bar{o}o' = \bar{r}_i + \bar{o}'o$$

$$\bar{M}_{O_i} = \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

$$\bar{M}_{O_i} = \sum_i \bar{r}'_i \times \bar{F}_i = \sum_i (\bar{r}_i + \bar{o}'o) \times \bar{F}_i$$

$$= \underbrace{\left(\sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i \right)}_{\bar{M}_O} + \sum_i \bar{o}'o \times \bar{F}_i$$

$$\bar{M}_O + \bar{o}'o \times \sum_i \bar{F}_i = \bar{M}_O + \bar{o}'o \times \bar{F}$$

14



Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi

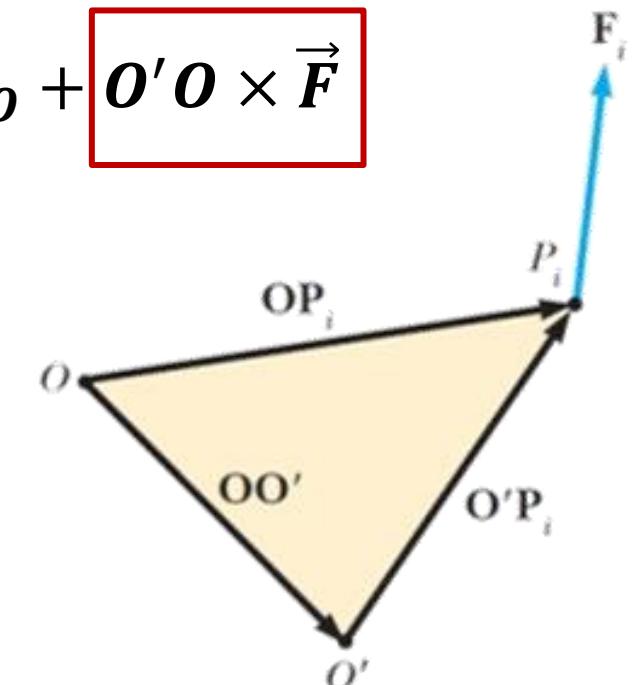
- Momento di un sistema rispetto al polo O

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

- Momento di un sistema rispetto al polo O'

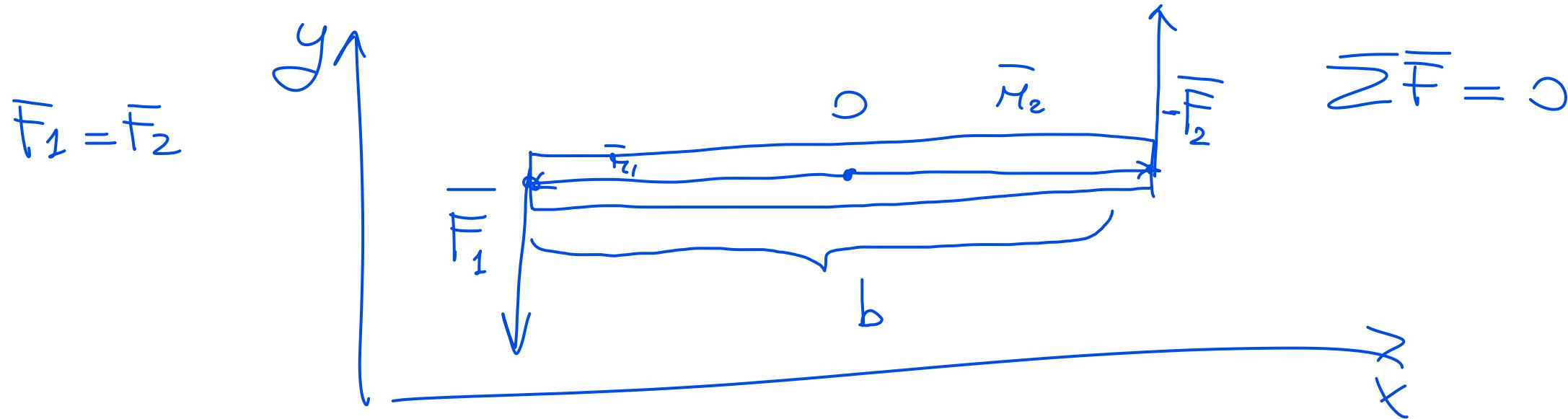
$$\vec{M}_{O'} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{o}'\vec{o} \times \vec{F}_i = \vec{M}_O + \boxed{\vec{o}'\vec{o} \times \vec{F}}$$

Se la forza totale su un sistema è zero, il momento non dipende dal polo





Applicazione: coppia di forze



$$\bar{M}_0 = \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 + \bar{r}_1 \times \bar{F}_1$$

$$M = r_2 F_2 + r_1 F_1 = F(r_1 + r_2) = Fb$$



Applicazione: coppia di forze

Due forze uguali di verso opposto aventi in generale diversa retta d'azione
La distanza tra le rette d'azione è detta braccio della coppia, b .



Applicazione: coppia di forze

Due forze uguali di verso opposto aventi in generale diversa retta d'azione
La distanza tra le rette d'azione è detta braccio della coppia, b .

In generale, dati una forza \vec{F} e un momento \vec{M}_o , questi due vettori non sono necessariamente ortogonali, e in questo caso non è possibile trovare due punti O e P tali che $\vec{M}_o = \vec{OP} \times \vec{F}$

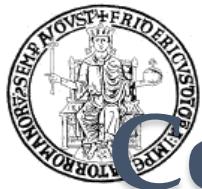
Questa scrittura implica che M e F sono ortogonali
per la definizione di prodotto vettoriale



Sistema di forze parallele



Sistema di forze parallele



Centro di massa e forza peso per un corpo rigido



Sistema di forze parallele

Dato un sistema di forze parallele, la **forza risultante** sarà (con \vec{u} versore che ne individua la direzione)

$$\vec{F}_r = F_r \vec{u}$$

e il **momento risultante**:

$$\vec{M} = \sum_i (\vec{r}_i \times F_i \vec{u}) = \sum_i (F_i \vec{r}_i) \times \vec{u}$$

Il momento è ortogonale alla forza. Deve quindi essere possibile trovare un punto C dove applicare la forza, tale che:

$$\vec{M} = \vec{OC} \times \vec{F}$$

Questo vettore è detto **centro delle forze parallele**

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i}$$





Sistema di forze parallele

- Se la forza in questione è la **forza peso**, il centro delle forze (**baricentro** o centro di gravità) risulta essere il **centro di massa del sistema**

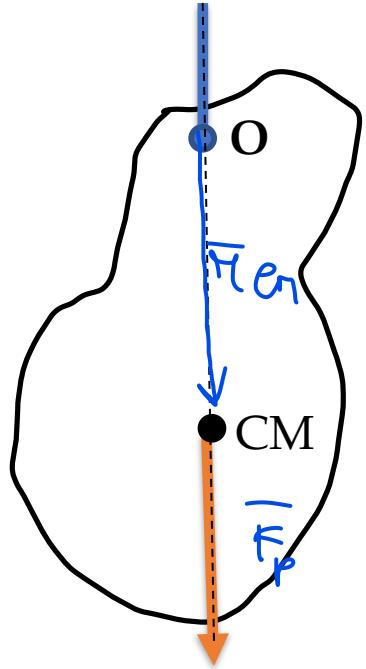
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i g \vec{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{r}_{CM}$$

Il momento risultante della forza peso sarà:

$$\vec{M} = \vec{r}_c \times m \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m \vec{g}$$



Condizioni di equilibrio di un corpo rigido

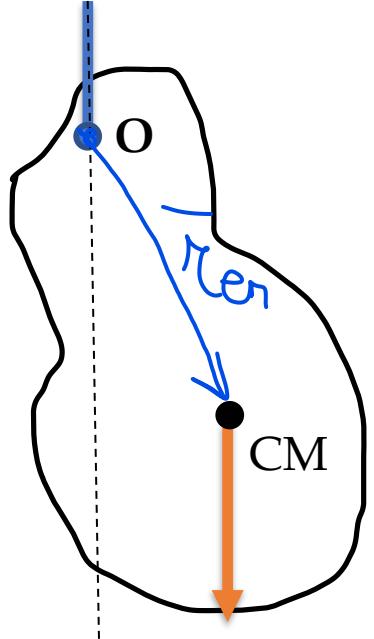


Se il centro di massa si trova lungo la verticale passante per il centro di sospensione, il momento della forza peso rispetto ad O è zero e tutto è in equilibrio

$$\bar{M}_O = \bar{r}_{CM} \times \bar{F}_p = 0$$



Condizioni di equilibrio di un corpo rigido



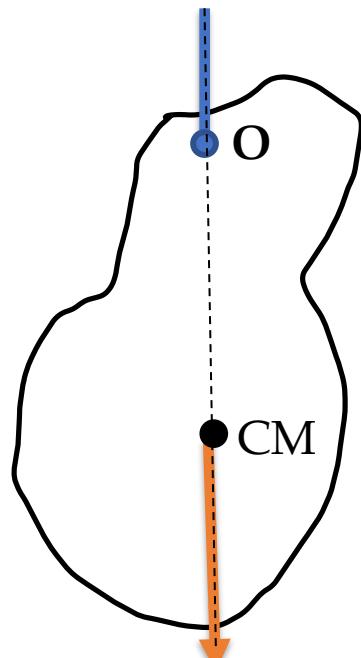
Se il centro di massa non si trova lungo la verticale passante per il centro di sospensione, il momento della forza peso rispetto ad O è diverso da zero e comunica al corpo un'accelerazione angolare

$$\overline{M}_O = \overline{r}_{er} \times \overline{\overline{F}_p}$$

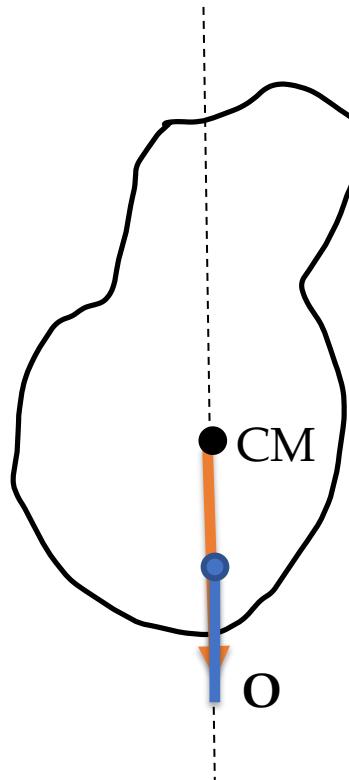


Condizioni di equilibrio

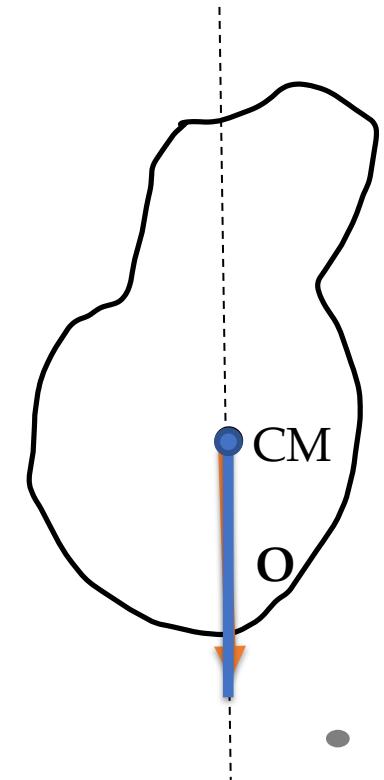
Baricentro sotto il punto di sospensione

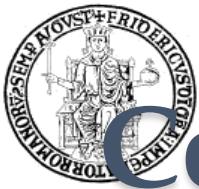


Baricentro sopra il punto di sospensione



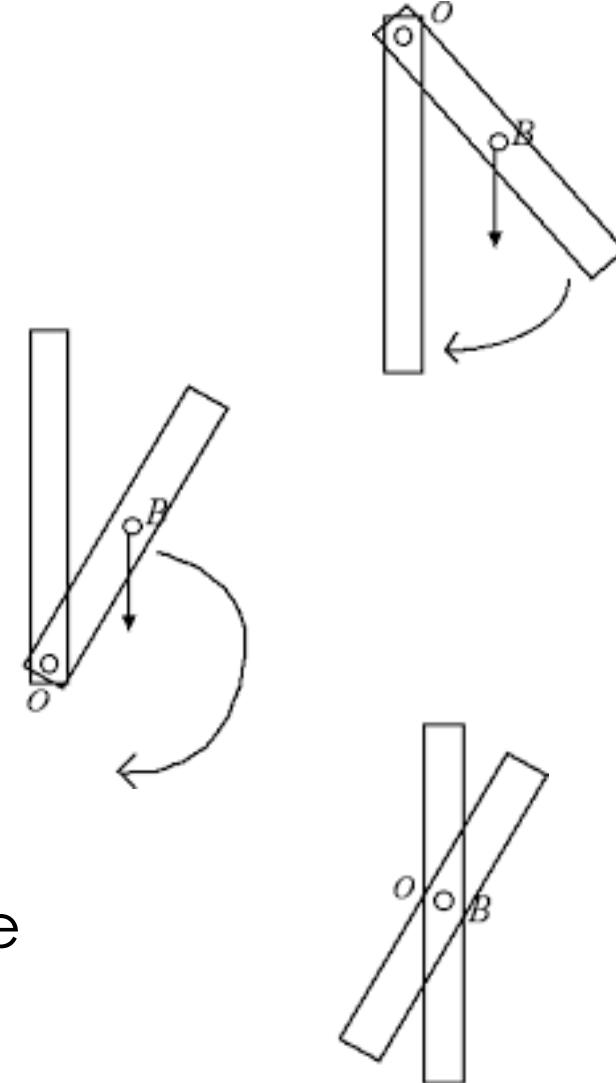
Baricentro coincidente con il punto di sospensione

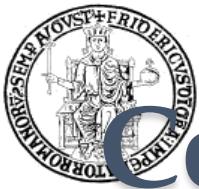




Condizioni di equilibrio di un corpo rigido

- Il centro di massa sta sotto il punto di sospensione → equilibrio stabile (allontanando il corpo dalla sua posizione, tende a tornarci)
- Il centro di massa sta sopra il punto di sospensione → equilibrio instabile (allontanando il corpo dalla sua posizione, la forza peso tende a portare il centro di massa sotto il punto di sospensione)
- Il centro di massa coincide con il punto di sospensione → equilibrio indifferente (il momento della forza peso è sempre nullo, quindi rimarrebbe sempre fermo)

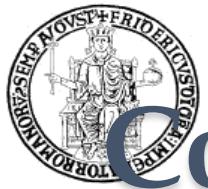




Condizioni di equilibrio di un corpo rigido



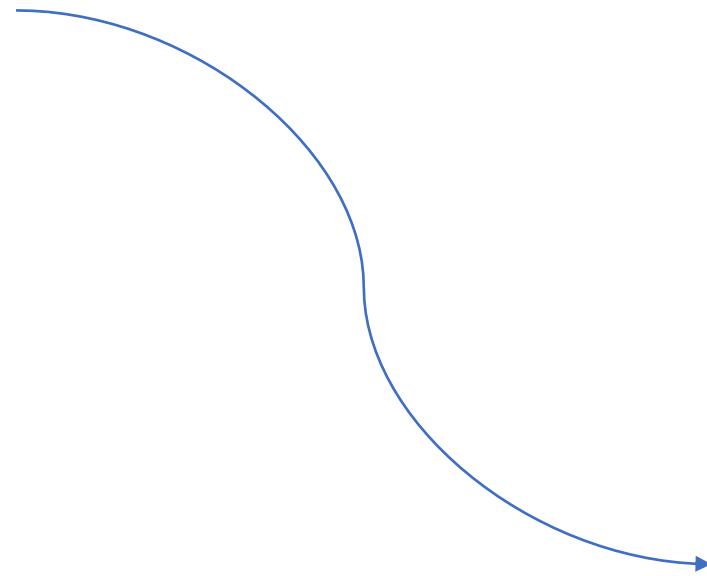
Perché non casca?



Condizioni di equilibrio di un corpo rigido



Perché non casca?





Condizioni di equilibrio di un corpo rigido



Perché non casca?

La torre è un corpo che poggia su un piano orizzontale che ha con questo più punti di contatto. Da ciascuno di questi punti viene esercitata una forza di reazione verticale e diretta verso l'alto → sistema di forze parallele equivalenti ad una sola forza totale **N** applicata in un solo punto **interno alla superficie di appoggio**.

L'equilibrio si verifica solo se **la proiezione del baricentro del corpo sul piano di appoggio cade entro la base di appoggio**



Rotazioni

• • •



Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

- Punti dell'asse di rotazione → fissi: possono essere usati come polo nel calcolo dei momenti
- La velocità angolare è diretta lungo l'asse di rotazione
- Se $\vec{\omega}$ varia, anche l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ sarà diretta lungo l'asse di rotazione
- In un corpo rigido, ciascun elemento infinitesimo di massa dm descrive una traiettoria circolare nel piano ortogonale all'asse di rotazione, con raggio R dato dalla distanza del corpo dall'asse



Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

- Momento angolare, momento d'inerzia



Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

- Momento angolare, momento d'inerzia



Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

Momento angolare, momento d'inerzia

Qual è la relazione tra il momento angolare e la velocità angolare?

- Momento angolare di un elemento di massa dm :

$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm\vec{v}$$

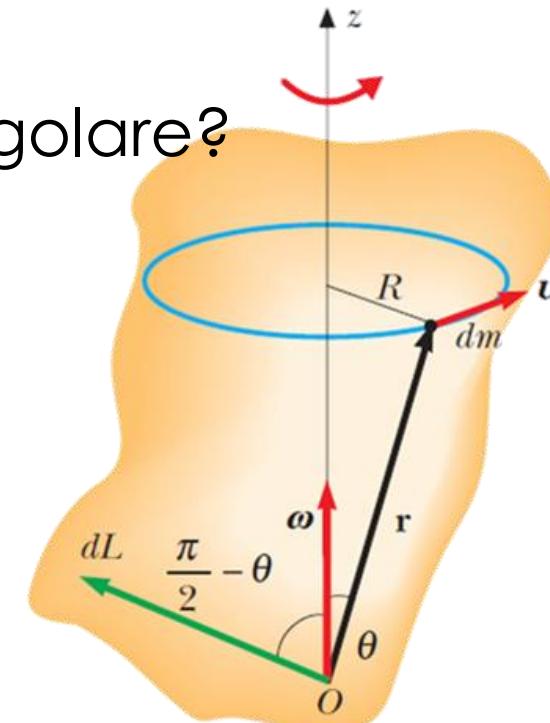
In modulo: $dL = dm r v = dm r \omega R$

- Momento angolare assiale $dL_z = dL \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = dL \sin(\vartheta)$

$$dL_z = dm\omega R r \sin(\vartheta) = dm\omega R^2$$

Integrando:

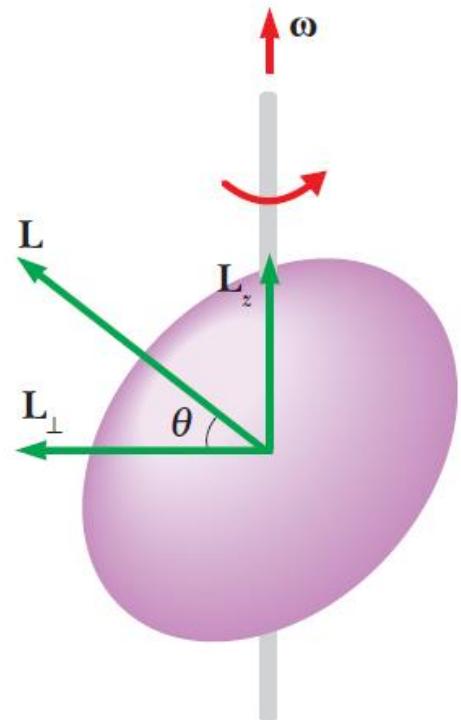
$$L_z = \int dL_z = \boxed{\int dmR^2 \omega} = I_z \omega$$





Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

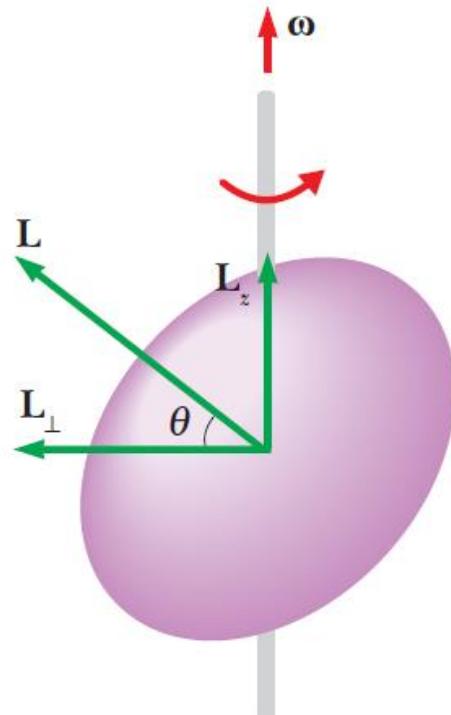
Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse e ruota attorno all'asse insieme al corpo





Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse e ruota attorno all'asse insieme al corpo



$$L_{||} = \omega \int dm R^2 = I_z \omega$$

Può variare solo in modulo, la direzione è sempre quella dell'asse di rotazione

$$L_{\perp} = \int dL \cos\theta = \int dm r \omega R \cos\theta$$

Varia in direzione perché ruota intorno all'asse
Varia in modulo se varia ω



Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

- Caso particolare: L parallelo a ω

