Sviluppo di (a+b)^n

mercoledì 4 ottobre 2023 18:50

$(a+b)^n$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

- $n=2 \to a^2+2ab+b^2$
- $n=3 \to a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$
- $n=4 \to a^4+4a^3b+6a^2b^2+4a^2b^3+b^4$
- $n=5 \to a^5+5a^4b^3+10a^3b^2+10a^2b^3+5b^4+b^5$

```
        1
       1 2 1
      1 3 3 1
     1 4 6 4 1
   1 5 10 10 5 1
```
← triangolo di tartaglia

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ vale $(a+b)^n = T_{n,0}a^n + T_{n,1}a^{n-1}$ dove $T_{n,0}$ ...... sono i numeri che compaiono nella n-esima riga del triangolo

Fattoriale di un numero $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$0! = 1$
$1! = 0! \cdot 1 = 1$
$2! = 1! \cdot 2 = 2$
$3! = 2! \cdot 3 = 6$
$4! = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$

$n! = (n-1)! \cdot n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Coefficiente Binomiale $\binom{n}{k}$ di n su k

Dati $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $k \leq n$ si definisce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

es $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

Teorema = se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ allora $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \ldots\ldots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \binom{1}{0}$$
$$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{0}$$
$$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{2}{3}$$
$$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$$

triangolo Tartaglia

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

La 1) è vera: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1$

$\binom{n}{n} = \frac{n! \, 1}{(n!-n!) \cdot n! \, 1} = \frac{1}{0} = \frac{1}{1} = 1$

$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1}b^n =$$
$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k} + b^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$$

Teorema: Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$
$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b^n$, se inoltre $a \neq 0$ e $b \neq 0$ allora $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

SOMMATORIA $\quad \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots a_n$

• Potenze a Esponente in $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ è definito: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots\ldots}_{n \text{ volte}}$

Proprietà
$\forall a \in \mathbb{N}$
1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
3) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$a^k = a^n$ se $k = n \in \mathbb{N}$

$a^k = a^0 = 1$ se $k = 0$

$a^k = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ se $k = -n$

Proprietà 1 2 3 $\quad \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n, m \in \mathbb{Z}$

- $\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a^{-\frac{1}{n}} = a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$

D: $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $\forall q \in \mathbb{Q}$ si definisce $a^q = (a^{\frac{1}{k}})^n = (a^n)^{\frac{1}{k}}$ se $q = \frac{n}{k}$ $\quad a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n} = (\sqrt[k]{a})^n$

se $a > 0$ allora se $\frac{n}{k} \overset{\text{equivalenti}}{=} \frac{n'}{k'}$ allora $(a^{\frac{1}{k}})^n$ $(a^{\frac{1}{k'}})^{n'}$ coincidono

se $a < 0$ non succede $\quad (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = -2$
$\quad (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

Proprietà $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $\forall q \in \mathbb{Q}$ è definito a^q in modo tale che valgono:

1) $a^q \cdot a^p = a^{q+p}$

2) $(a^q)^p = a^{qp}$

3) $a^q \cdot b^q = (a \cdot b)^q$

Proposizione

se $a = 1$ $\quad a^q = 1$ $\quad \forall q \in \mathbb{Q}$

se $a > 0$ $\quad a^q < a^p$ se $q < p$ $\quad \forall q\,p \in \mathbb{Q}$

se $0 < a < 1$ allora $a^q > a^p$ se $q < p$

Teorema: esiste un unico modo di definire $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, un numero reale a^x in modo tale che valgano le seguenti proprietà:

- a^x se $x = \frac{n}{k}$ $\quad \sqrt[k]{a^n}$
- $a^x > 0$ $\quad a > 0$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

Logaritmo

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ allora esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$

$x = \log_a y$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x)^k = k \log_a x$
- $(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x$

- se $a > 1$ allora $\log_a x > \log_a y$ se $x > y > 0$
- se $a > 0$ e $a < 1$ allora $\log_a x < \log_a y$ se $x > y > 0$