Lezione 18

Fisica I – Ingegneria Automazione e Informatica

Università di Napoli "Federico II"
prof. Nicola R. Napolitano

Riepilogo della lezione precedente

1) Leve
2) Statica dei corpi rigidi
3) Leggi di Keplero

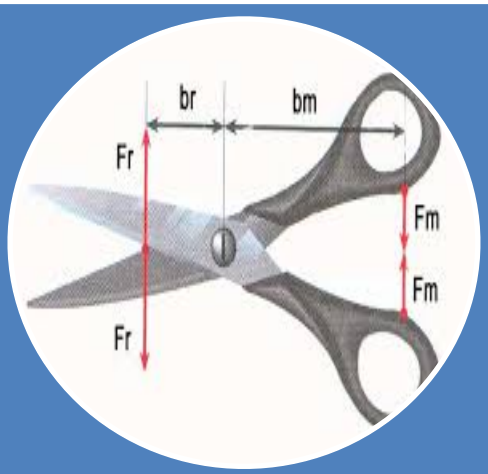
In questa lezione

1) Teorema di Gauss per il campo gravitazionale
2) Fluidi
3) Legge di Stevino

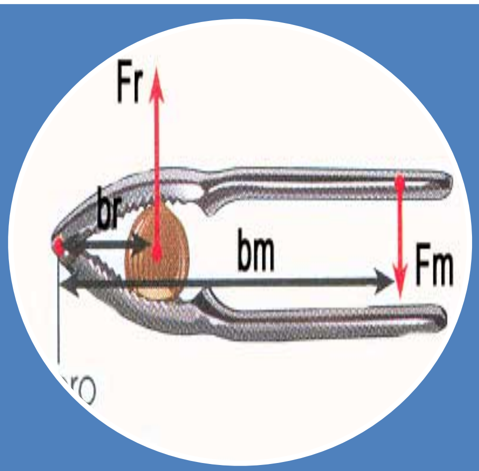
L'equilibrio di un corpo rigido

Modello	Proprietà rilevanti	Grandezze	Equilibrio
Punto materiale	Si sposta nello spazio. Non ruota.	Forze	$\vec{F}_{tot} = 0$
Corpo rigido	Si sposta nello spazio. Ruota.	Forze Momenti	$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = 0 \\ \vec{M}_{tot} = 0 \end{cases}$

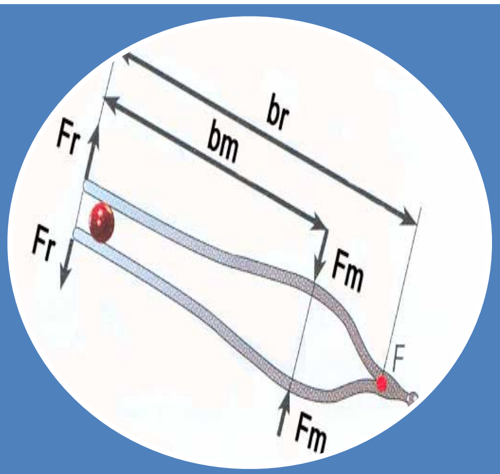
Equazioni cardinali



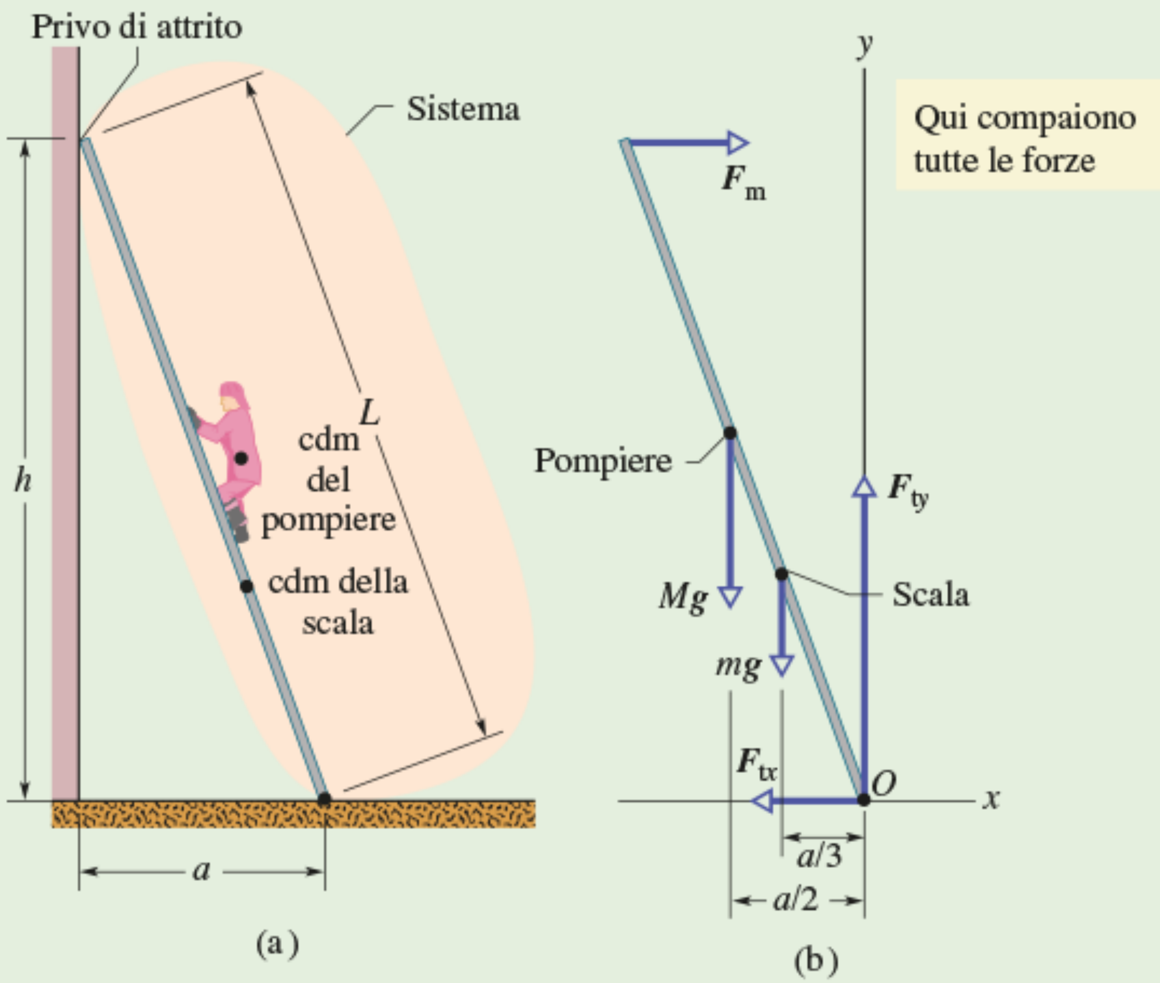
leve di primo genere: il fulcro è posto tra le due forze (interfulcrate); possono essere vantaggiose, svantaggiose o indifferenti



leve di secondo genere: la forza resistente è tra il fulcro e la forza motrice (o potenza) (interresistente); sono sempre vantaggiose

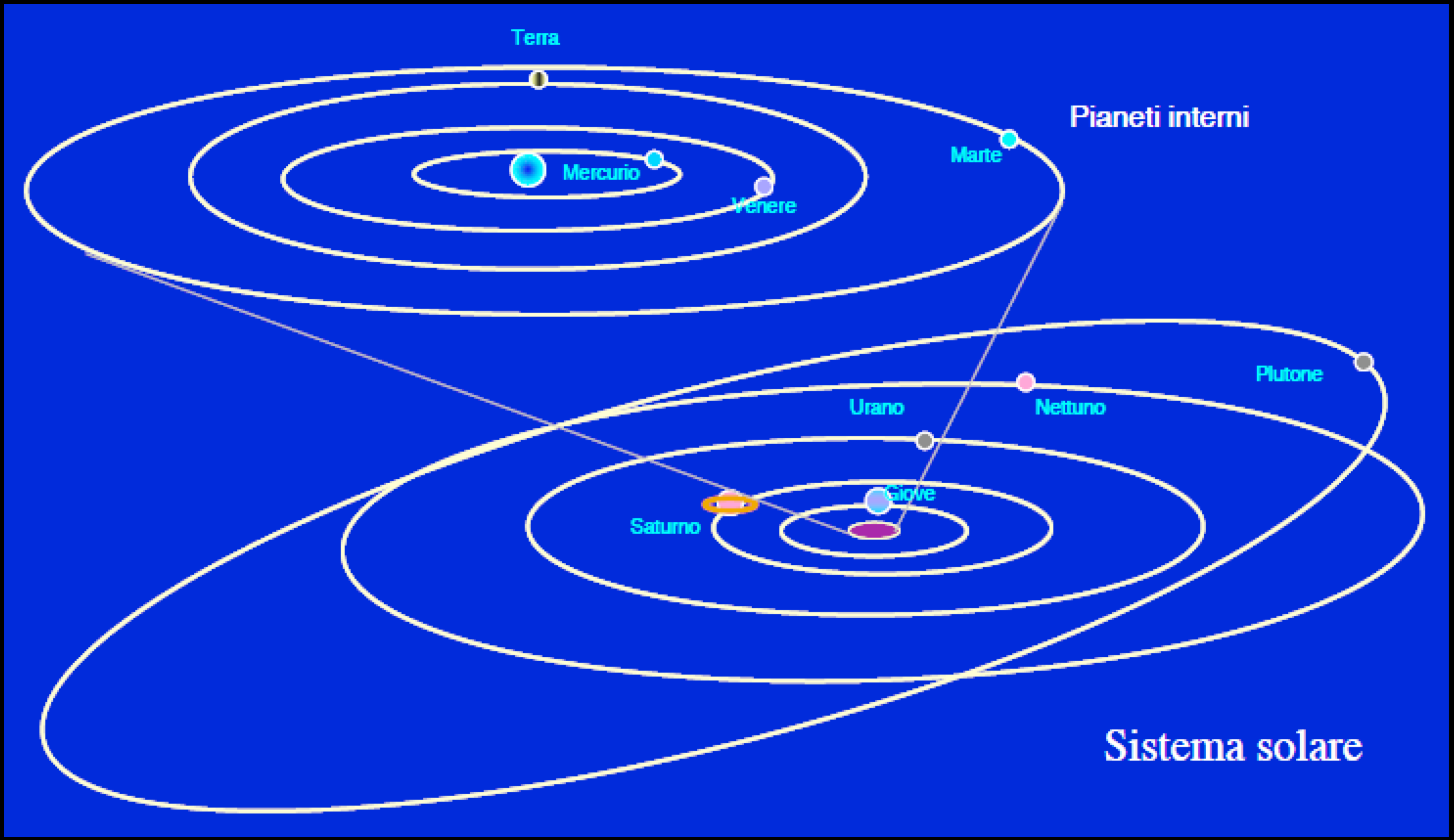


leve di terzo genere: la forza motrice (potenza) è tra il fulcro e la forza resistente; sono sempre svantaggiose



Privo di attrito
Sistema
h
L
cdm
del
pompiere
cdm della
scala
a
(a)
y
Qui compaiono
tutte le forze
F_m
Pompiere
F_{ty}
Mg
Scala
mg
F_{tx}
O
x
a/3
a/2
(b)

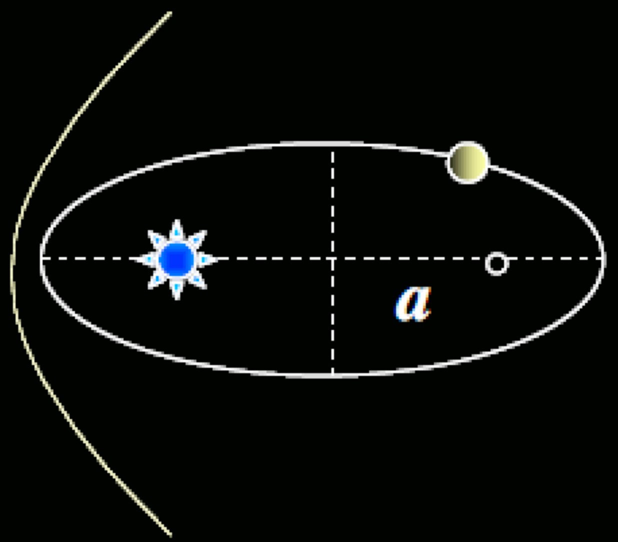
Leggi di Keplero



1ª Legge di Keplero

perche' piane?

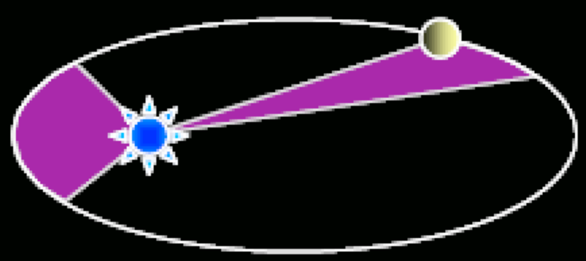
i pianeti si muovono su orbite piane ed ellittiche, aventi il sole in uno dei fuochi



nel caso più generale, l'orbita è una **conica** (ellisse, iperbole o parabola)

2a Legge di Keplero

la velocità areolare è costante



$$\frac{dA}{dt} = \text{cost}$$

Il raggio che congiunge il sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

Perche' ricorda che $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{campo\ gravita'} = \vec{r} \times \vec{F}_g = 0$ essendo $\vec{F}_g$ diretta nella direzione opposta ad $\vec{r}$

Ma allora essendo $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{costante}$, il vettore posizione e il vettore velocita' restano sullo stesso piano finche' non subentrano forze esterne.

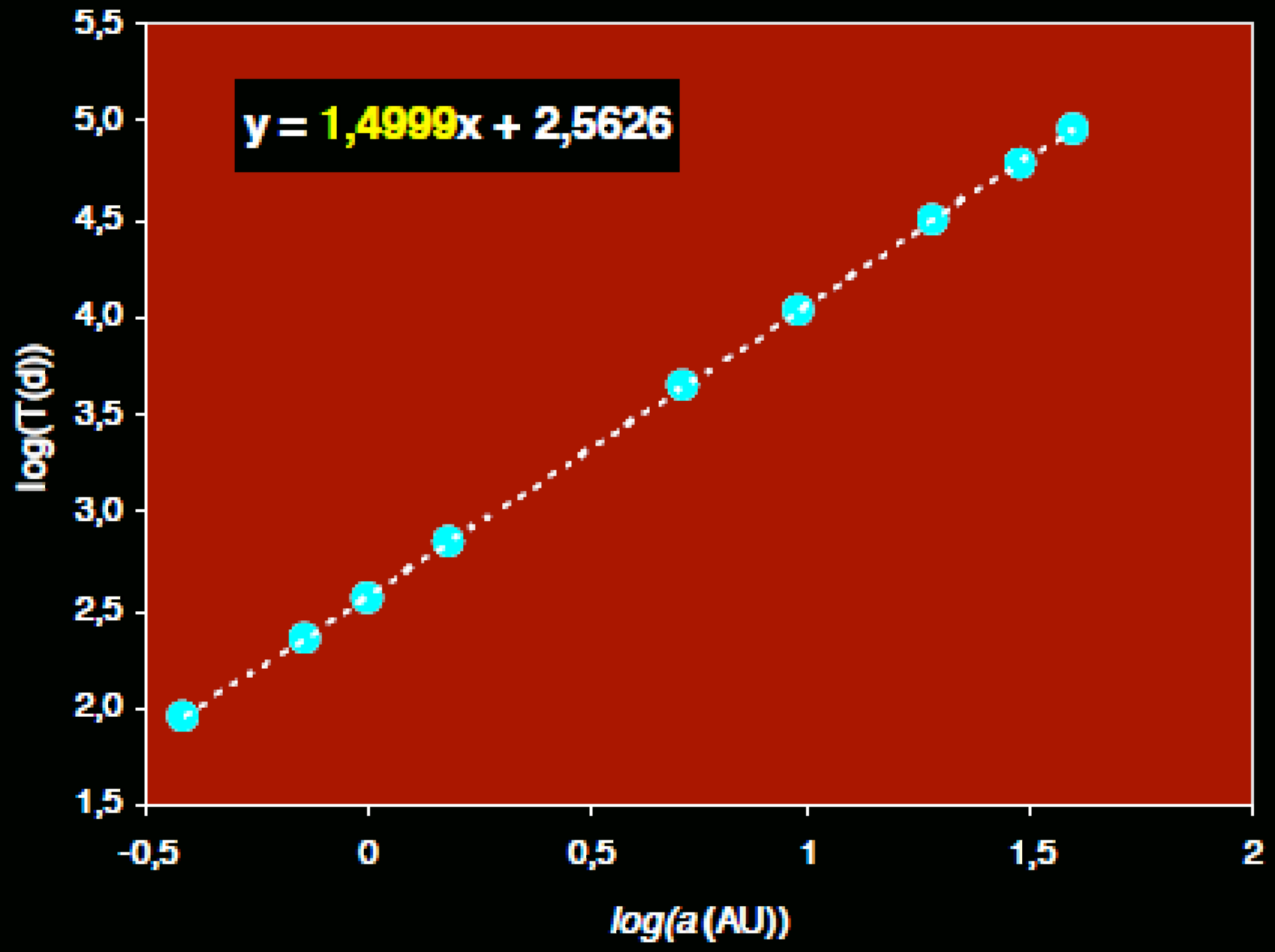
3ª Legge di Keplero

Il quadrato del tempo di rivoluzione
è proporzionale al cubo
del semiasse maggiore

$$T^2 \propto a^3$$

$$\log T = 1.5 \log a + k$$

se $M_{sole} >> M_{pianeta}$

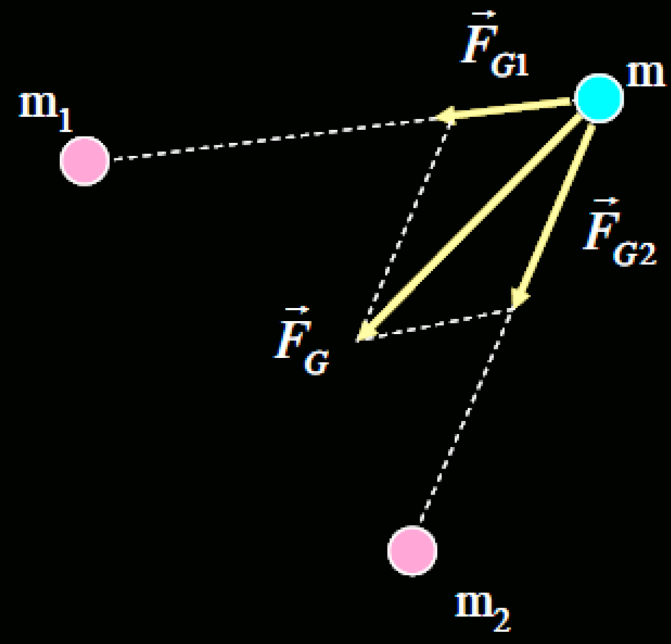


Il concetto di campo gravitazionale

Dato un corpo "puntiforme" di massa m, si definisce campo gravitazionale, nella posizione di m, la forza gravitazionale agente su m divisa per la massa m.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

Nota: il campo gravitazionale è l'accelerazione di gravità



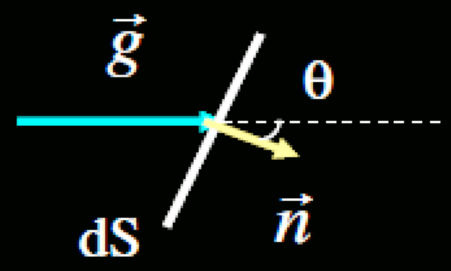
secondo la Relatività generale il campo gravitazionale è dovuto alla curvatura dello spazio-tempo prodotta dalle masse m_1 e m_2

Ad ogni modo, è una proprietà dello spazio modificato dalla presenza delle masse "sorgenti"

Il flusso del campo gravitazionale e il teorema di Gauss

Il flusso di un vettore attraverso una superficie è per definizione il prodotto scalare tra il vettore e il "vettore superficie" avente come modulo la sua area e come direzione la normale, con verso positivo uscente dalla superficie.

flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie (infinitesima)

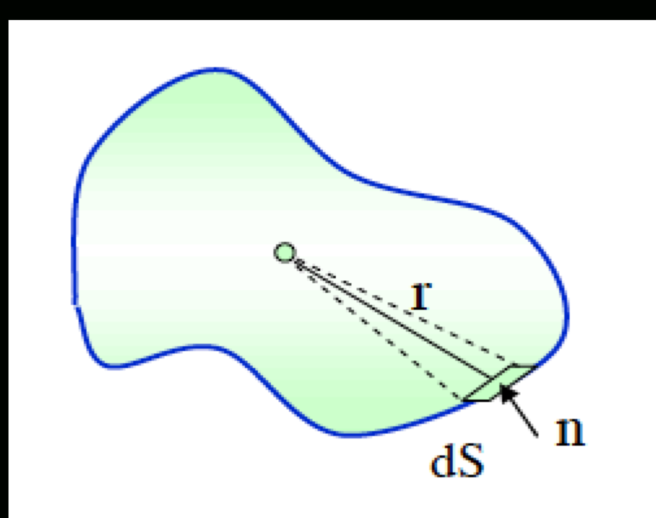


$$d\Phi = gdS\cos\theta = \vec{g}\cdot\vec{n}\,dS$$

Attenzione: il flusso ha un segno

il flusso attraverso una superficie finita S è $\Phi = \int_S gdS\cos\theta = \int_S \vec{g}\cdot\vec{n}\,dS$

Si cerca il flusso entrante attraverso una superficie chiusa del campo gravitazionale

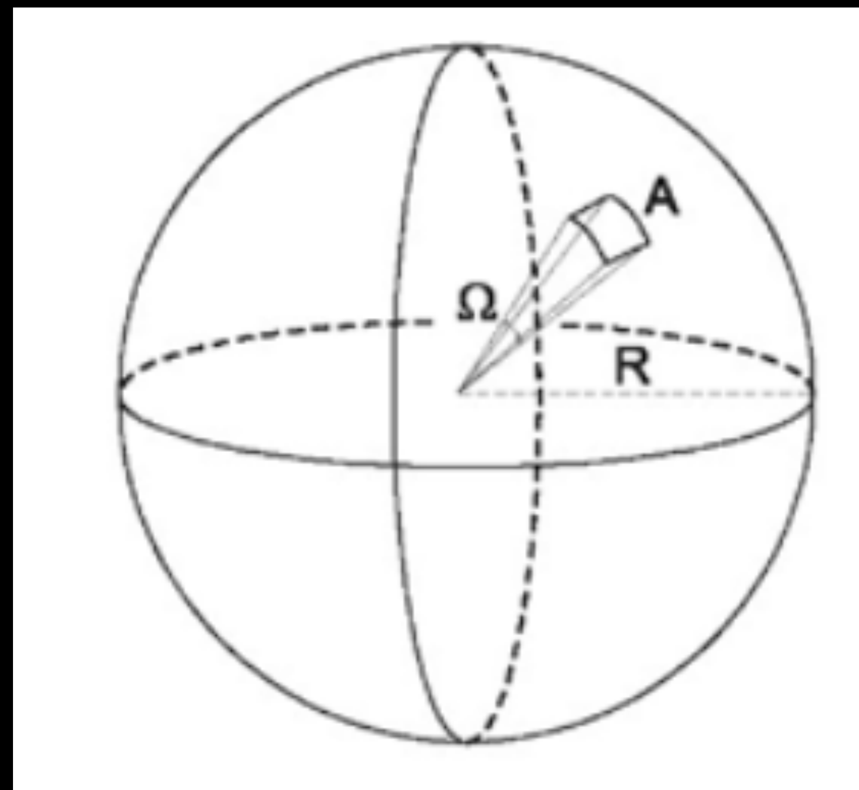


generato da una massa "puntiforme" interna

$$d\Phi = gdS\cos\theta = GM\frac{dS\cos\theta}{r^2} \qquad \text{essendo} \quad g = G\frac{M}{r^2}$$

angolo solido sotteso da dS $\quad d\Omega$

Il flusso del campo gravitazionale e il teorema di Gauss



Per ogni arco di circonferenza possiamo scrivere

$$dl = r d\alpha$$

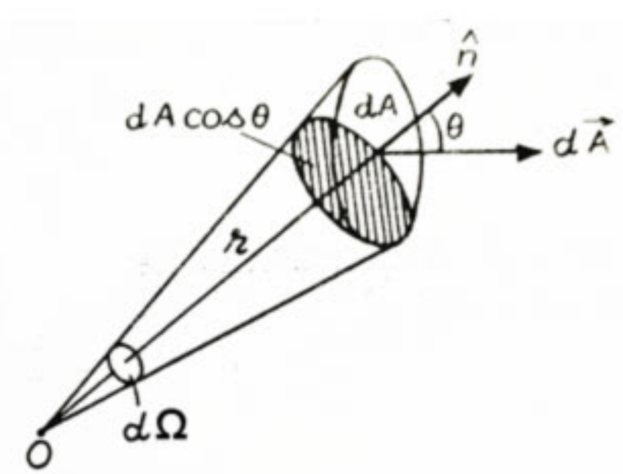
da cui

$$dl^2 = dS = r^2 (d\alpha)^2 = r^2 d\Omega$$

ossia $$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$ (in soldoni)

Ω totale su tutta la sfera vale 4π così come l'angolo giro è 2π

Generalizzando se la superficie non è una sfera



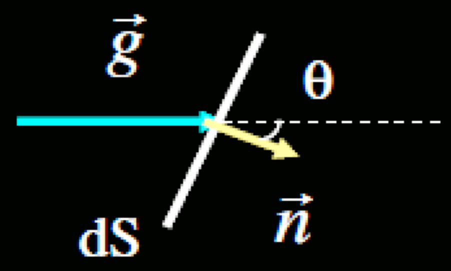
$$d\Omega = \frac{dA \cos\theta}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{d\vec{A} \bullet \hat{n}}{r^2}$$

Il flusso del campo gravitazionale e il teorema di Gauss

Il flusso di un vettore attraverso una superficie è per definizione il prodotto scalare tra il vettore e il "vettore superficie" avente come modulo la sua area e come direzione la normale, con verso positivo uscente dalla superficie.

flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie (infinitesima)

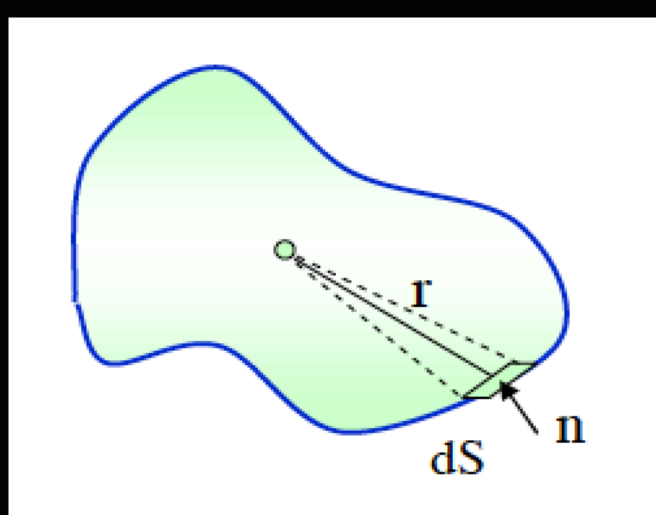


$$d\Phi = gdS\cos\theta = \vec{g}\cdot\vec{n}\,dS$$

Attenzione: il flusso ha un segno

il flusso attraverso una superficie finita S è $\Phi = \int_S gdS\cos\theta = \int_S \vec{g}\cdot\vec{n}\,dS$

Si cerca il flusso entrante attraverso una superficie chiusa del campo gravitazionale

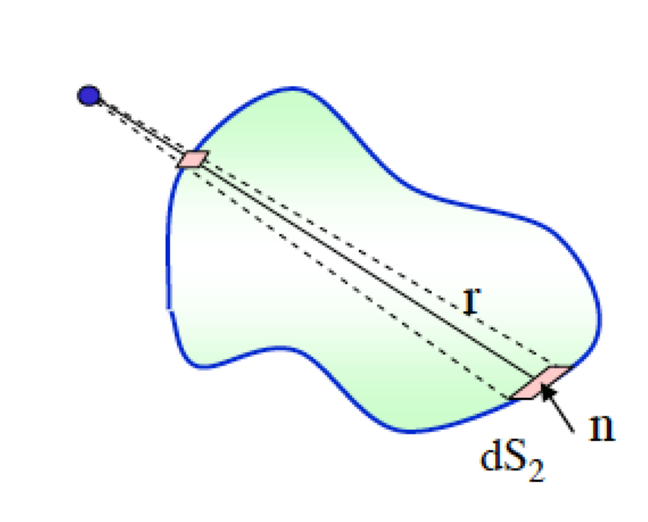


generato da una massa "puntiforme" interna

$$d\Phi = gdS\cos\theta = GM\frac{dS\cos\theta}{r^2} \qquad \text{essendo} \quad g = G\frac{M}{r^2}$$

angolo solido sotteso da dS $\quad d\Omega$

$$\Phi = GM\int_S \frac{dS\cos\theta}{r^2} = GM\int_S d\Omega$$ ovvero $$\boxed{\Phi = 4\pi GM}$$



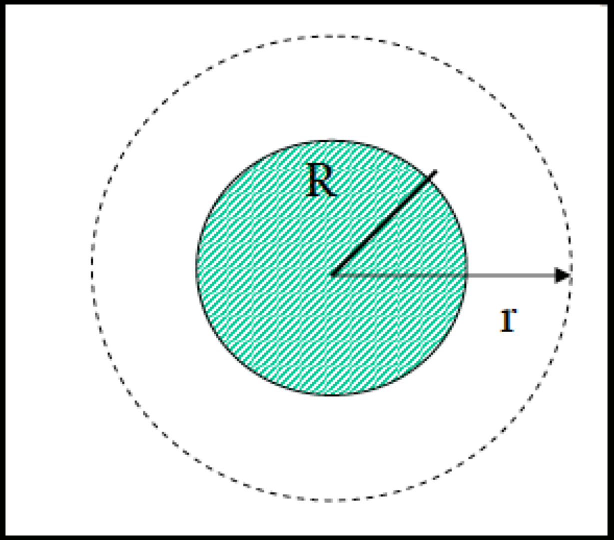
Analogamente si dimostra che il flusso entrante del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme esterna è nullo.

Applicando il teorema di sovrapposizione si ottiene

$$\boxed{\Phi = 4\pi GM_{INT}}$$ è il Teorema di Gauss

per il campo gravitazionale

è la massa totale all'interno della superficie chiusa.



campo gravitazionale generato da una distribuzione di massa sferica, ad una distanza r > R

Prendiamo una superficie sferica concentrica di raggio r. Per simmetria, il campo g è costante in modulo e ovunque ortogonale alla superficie

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS = g(r) S = 4\pi r^2 g(r)$$

Ma per il Teorema di Gauss: $\Phi = 4\pi GM_{INT} = 4\pi GM$

uguagliando si ottiene: $\boxed{g(r) = G\frac{M}{r^2}}$ il campo gravitazionale è uguale a quello generato da una massa M puntiforme, posta nel centro.

Meccanica dei Fluidi

stati della **materia**:

- solido [volume e forma definiti]
- liquido [volume definito, forma no]
- gassoso [né volume, né forma definiti]

N.B. sono definizioni **artificiose**:
lo stato di una sostanza può cambiare
con **temperatura** e **pressione**

tempo *necessario ad una sostanza a variare la sua* ***forma***
in risposta a ***forza esterna*** *determina*
lo ***stato*** *della sostanza [****solido, liquido, gassoso****]*

[es. la **pece** è un **fluido**: impiega molto tempo ad assumere la forma del contenitore, ma lo fa]

fluido: insieme di **molecole**

- sistemate casualmente
- legate da **deboli** forze di coesione e forze esercitate da pareti del contenitore

liquidi e **gas** sono **fluidi**

Solidi	FLUIDI Liquidi	Gas
•Massa	•Massa	•Massa
•Forma propria	•Forma del contenitore	•Forma del contenitore
•Superficie propria	•Superficie propria	•Superficie del contenitore
•Volume	•Volume	•Volume del contenitore
•Proprietà elastiche di trazione-compressione	•Proprietà elastiche di trazione-compressione	•Proprietà elastiche di trazione-compressione
•Proprietà elastiche di deformazione di taglio	•Scorrono/fluiscono	•Scorrono/fluiscono
	•Non reagiscono a deformazioni di taglio	•Non reagiscono a deformazioni di taglio
	•Sono poco comprimibili	•Sono altamente comprimibili

Densità
[massa volumica]

massa per unità di volume

$$\rho \underset{def}{=} \frac{m}{V}$$

unità di misura:
$[\rho]=M/L^3 \Rightarrow kg/m^3$

in condizioni **standard** (0^0 C)

$$\rho_{gas} \approx \frac{1}{1000}\rho_{solido,liquido} \Rightarrow$$ spazio molecolare di un gas **10 volte** spazio molecolare di un liquido o solido

Sostanza od oggetto	Massa volumica (kg/m^3)
Spazio interstellare	10^{-20}
Massimo «vuoto» raggiungibile in laboratorio	10^{-17}
Aria: a 20 °C e 1 bar *	1.21
a 20 °C e 50 bar	60.5
Polistirolo espanso	$3 \cdot 10^1$
Acqua: a 20 °C e 1 bar **	$0.998 \cdot 10^3$
a 20 °C e 50 bar	$1.000 \cdot 10^3$
Acqua del mare: a 20 °C e 1 bar	$1.024 \cdot 10^3$
Sangue	$1.060 \cdot 10^3$
Ghiaccio	$0.917 \cdot 10^3$
Ferro	$7.9 \cdot 10^3$
Mercurio	$13.6 \cdot 10^3$
Terra: valor medio	$5.5 \cdot 10^3$
nucleo	$9.5 \cdot 10^3$
crosta	$2.8 \cdot 10^3$
Sole: valor medio	$1.4 \cdot 10^3$
nucleo	$1.6 \cdot 10^5$
Stella nana bianca (nucleo centrale)	10^{10}
Nucleo dell'uranio	$3 \cdot 10^{17}$
Stella di neutroni (nucleo centrale)	10^{18}
Buco nero (1 massa solare)	10^{19}

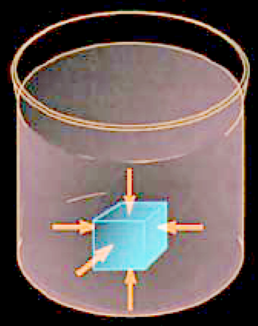
≈**40** ordini di grandezza

*bar = unita' di misura della pressione. Come mai aumentando la pressione aumenta la densità?

** come mai la pressione qui non cambia la densità?

Pressione

- i fluidi **non** reagiscono a **forze di taglio**
- forza esercitata da un fluido: sempre **perpendicolare** a superficie oggetto



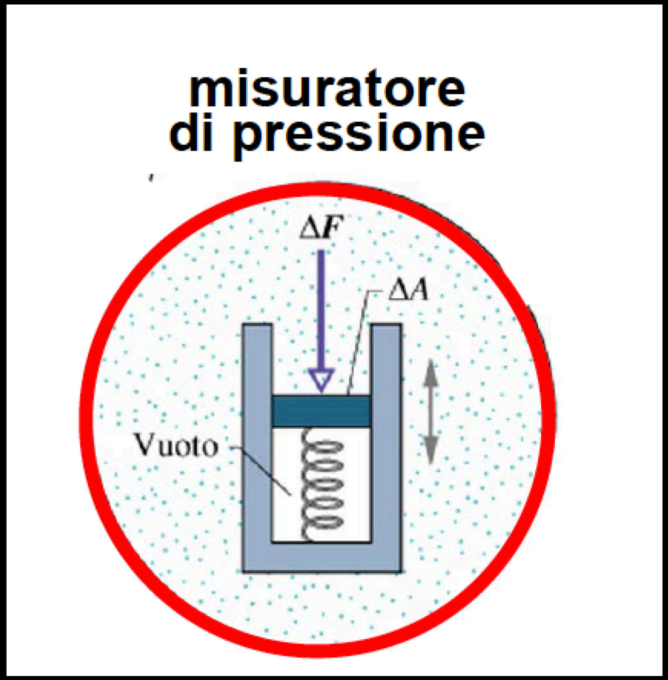
Questo ci permette di scomporre un fluido in volumetti elementari perche' ogni volumetto esercita una forza uguale e contraria sul volumetto con cui condivide la faccia

$$p \underset{def}{=} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

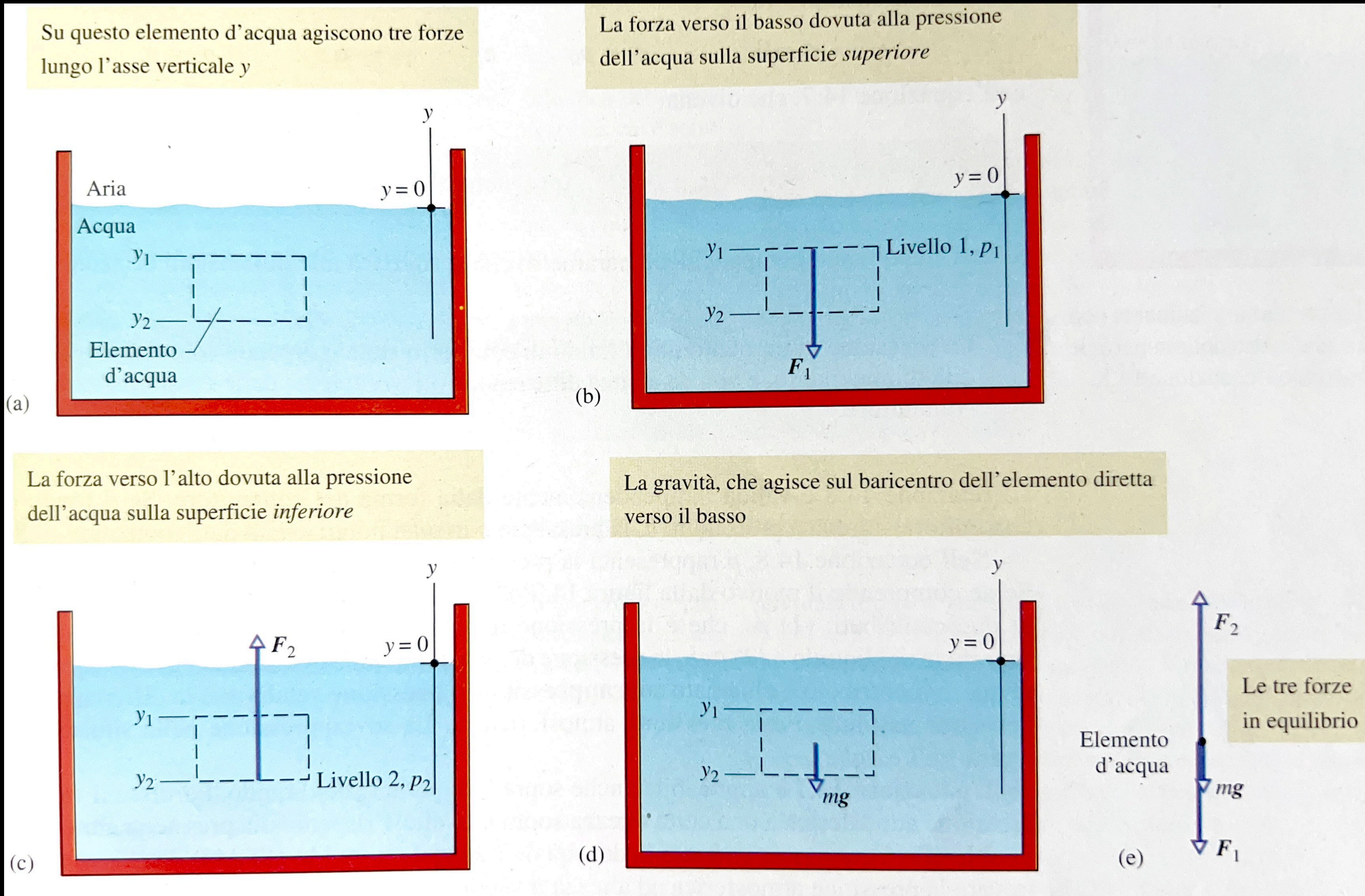
forza per unità di area

$$p = \frac{F}{A}$$

pressione su **area piana** dovuta a **forza uniforme**



La pressione che si misura in un contenitore in cui è immerso un fluido è la stessa indipendentemente dall'orientamento del sensore (le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alle dimensioni del contenitore) →**La pressione è uno scalare**



Su questo elemento d'acqua agiscono tre forze lungo l'asse verticale y
y
Aria
y = 0
Acqua
y1
y2
Elemento d'acqua
(a)
La forza verso il basso dovuta alla pressione dell'acqua sulla superficie superiore
y
y = 0
y1
Livello 1, p1
y2
F1
(b)
La forza verso l'alto dovuta alla pressione dell'acqua sulla superficie inferiore
y
F2
y = 0
y1
y2
Livello 2, p2
(c)
La gravità, che agisce sul baricentro dell'elemento diretta verso il basso
y
y = 0
y1
y2
mg
(d)
F2
Le tre forze in equilibrio
Elemento d'acqua
mg
F1
(e)

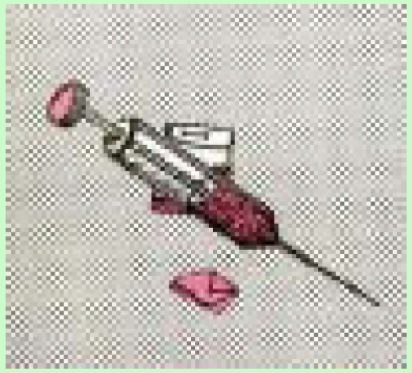
applicazioni $p = \dfrac{F}{A}$

ago ipodermico

area punta ago è piccolissima

⇒ **F piccola** produce **p elevata**

[ago penetra nella pelle]



racchette da sci

evitano che la persona

affondi nella neve

distribuiscono peso su superficie grande

⇒ **A grande** produce **p piccola**

pressione atmosferica

$1\ \text{atm} = 1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2 = 10^5\ \text{Pascal (Pa)}$

1 bar $= 1.01 \times 10^4\ (1\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m/s}^2)/\ \text{m}^2$

$= 1\ \text{kg}_p/\text{cm}^2$

Pascal: $1\ \text{Pa} = 1\text{N/m}^2$

l'aria attorno a noi esercita una forza di **1 kg_p su ogni cm^2** del nostro corpo

NON ce ne accorgiamo:

- tale forza è **uguale** in tutte le direzioni
- è contrastata da **uguale pressione** all'**interno** del nostro **corpo**

Perché il recipiente (sigillato) collassa quando aspiro aria dal suo interno?

pressione atmosferica

1 atm = 1.01×10^5 N/m^2 = 10^5 Pascal (Pa)
1 bar = 1.01×10^4 (1 kg $\times$ 9.8 m/s^2)/ m^2
= 1 kg$_p$/cm^2

Pascal: 1 Pa= 1N/m^2

l'aria attorno a noi esercita una forza di **1 kg$_p$ su ogni cm^2** del nostro corpo

NON ce ne accorgiamo:

- tale forza è **uguale** in tutte le direzioni
- è contrastata da **uguale pressione** all'**interno** del nostro **corpo**

se pompo aria fuori da recipiente sigillato pressione atmosferica produce forza non bilanciata verso l'interno:

→ collasso del recipiente

Ordini di grandezza

pressione

Centro del Sole ………………………………….2 10^{16} Pa

Centro della Terra…………............ ………….4 10^{11} Pa

Massima pressione in laboratorio ……….....1.5 10^{10} Pa

Fossa oceanica (sul fondo) ………………......1.1 10^{8} Pa

Tacchi a spillo ……………………………………1 10^{6} Pa

Pneumatici auto……………………………... ...2 10^{5} Pa

Pressione atmosferica a livello del mare ……….1 10^{5} Pa

Pressione sanguigna…. ……………………….1.6 10^{4} Pa
(in eccesso a quella atmostefrica)

Massimo vuoto in laboratorio…………………….10^{-12} Pa

1atm = 10^5 Pa

Pressione e Profondità

[legge di Stevino]

pressione:

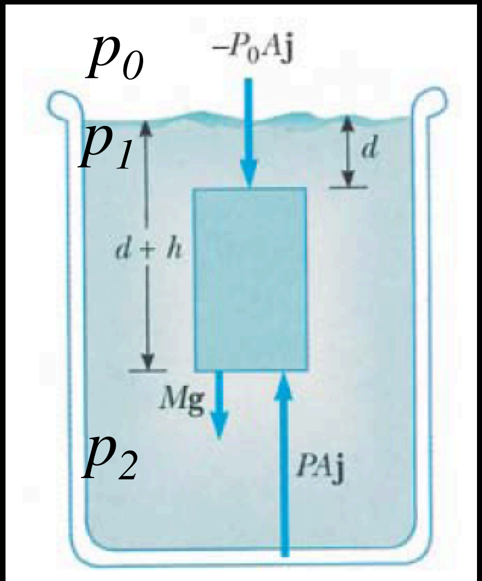
- **aumenta** con la **profondità** (come nel mare, lago, piscina)
- **diminuisce** con l'**altitudine** (come in montagna)

  [**esempio**: gli aerei devono essere pressurizzati]

$$M_{liquido} = \rho V_{liquido} = \rho A h$$

equilibrio forze $\sum F_y = 0 \Rightarrow pA - p_0 A - Mg = 0$

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$



$$p_2 = p_1 + \rho g h$$
$$p_2 = (p_0 + \rho g d) + \rho g h$$
$$p_2 = p_0 + \rho g (d + h)$$

pressione **assoluta** a profondità *h*
[per un liquido aperto a pressione atmosferica, d=0]
è **maggiore** di pressione atmosferica di $\rho g h$

stessa pressione per tutti i punti a **stessa profondità**
[indipendentemente da **forma** contenitore]

$$p = p_0 - \rho_{aria} g d$$

pressione ad **altitudine** d

Misure di Pressione

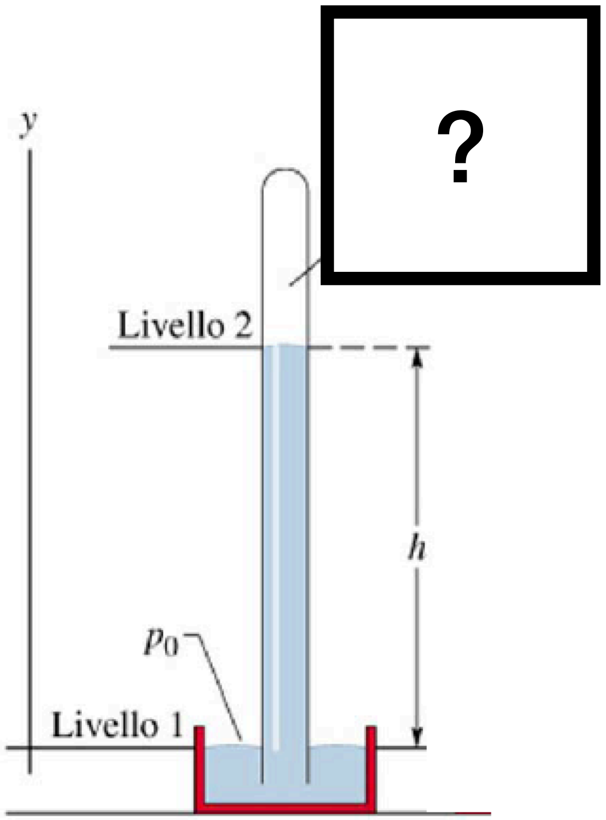
barometro a mercurio

[Torricelli 1608-1647]

tubo pieno di mercurio
rovesciato in recipiente con mercurio

$$p_0 = \rho_{Hg} g h$$

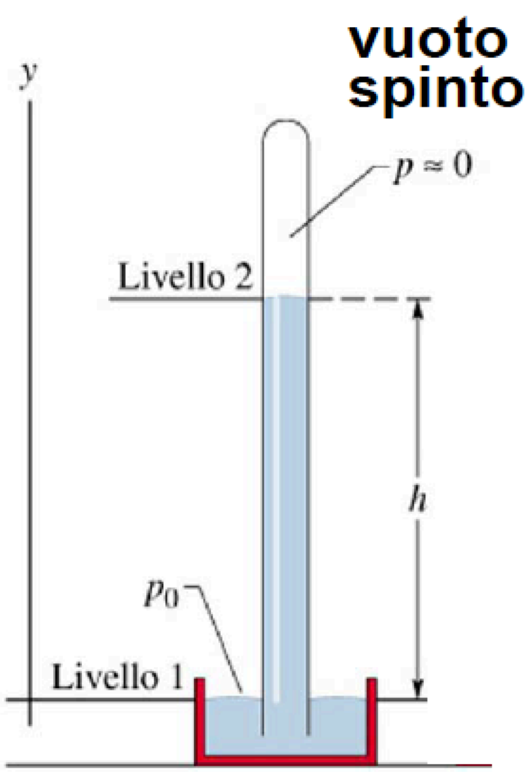
⇒ trasformo **altezza h**
in valore di **pressione**



Misure di Pressione

barometro a mercurio

[Torricelli 1608-1647]



tubo pieno di mercurio
rovesciato in recipiente con mercurio

$$p_0 = \rho_{Hg} g h$$

⇒ trasformo **altezza h**
in valore di **pressione**

N.B. **1 atm** equivale a colonnina Hg di 0.76 m a 0^0 C

$$p_0 = \rho_{Hg} g h = (13.595 \times 10^3 kg/m^3)(9.8 m/s^2)(0.76 m)$$

$$= 1.0013 \times 10^5 \; N/m^2 \; (Pa)$$

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0$$

$$y_2 = -h, \quad p_2 = p$$

manometro a tubo aperto

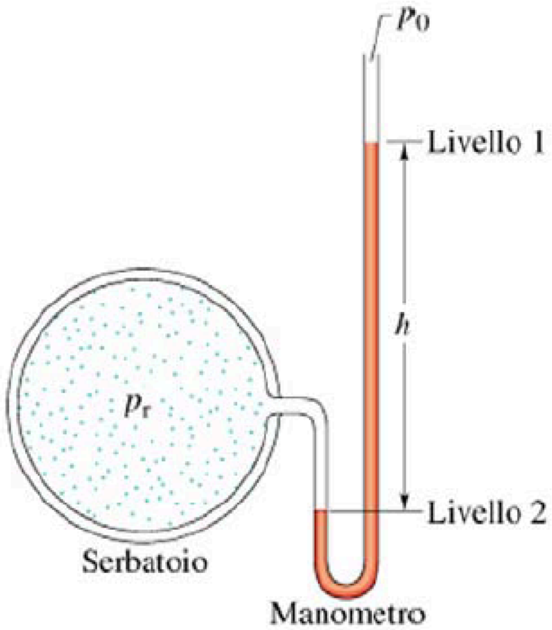
tubo aperto pieno di liquido
collegato con sistema
a pressione incognita p

$$p = p_0 + \rho g h$$

pressione **assoluta**

$$p_r = p - p_0 = \rho g h$$

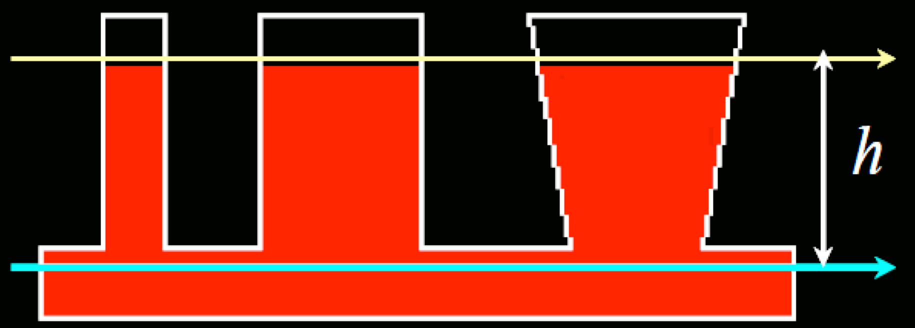
pressione **relativa**



Applicazione legge di Stevino

vasi comunicanti

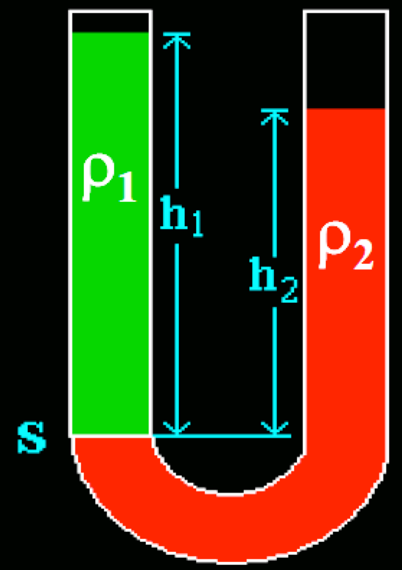
in un sistema di vasi comunicanti il fluido contenuto raggiunge la ***stessa quota*** *indipendentemente dalla forma dei recipienti*



Ossia:

la pressiona p alla base uguale per tutti
la pressione atmosferica e' uguale per tutti
la densita' e' uguale per tutti
l'altezza deve essere uguale per tutti

liquidi non miscelabili



all'**equilibrio** pressioni in S si bilanciano:

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g h_1$$

$$p_2 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

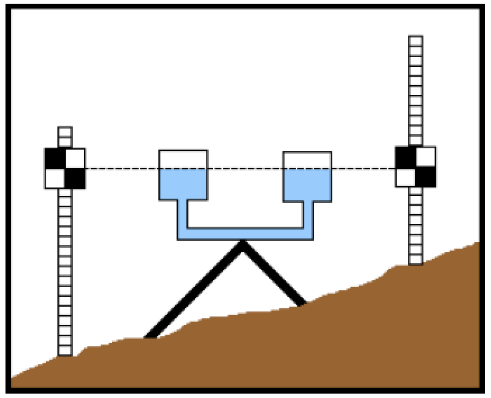
$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

[N.B. per $\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ principio dei vasi comunicanti]

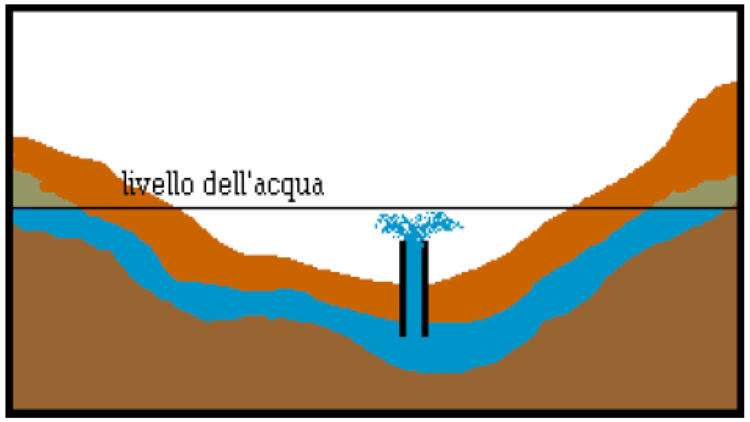
Misura di densita' relativa

livella ad acqua



i due vasi di **vetro**, contenenti acqua, collegati tramite un tubo, sfruttano la proprietà dei vasi comunicanti per evidenziare i dislivelli del terreno

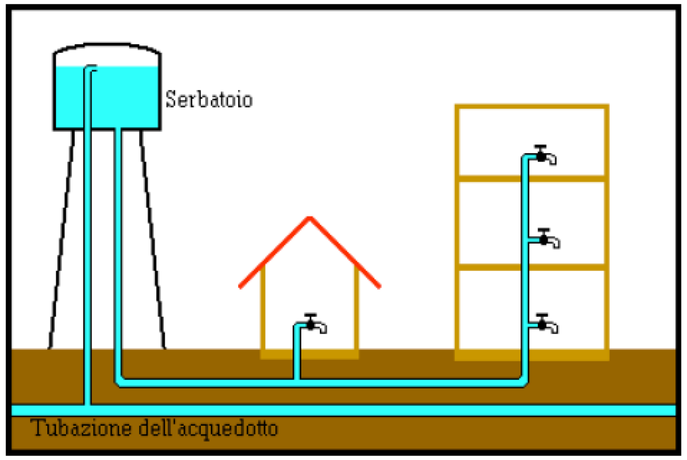
pozzo artesiano



per il principio dei **vasi comunicanti**

L'acqua tende a risalire nel pozzo fino al livello del terreno

acquedotto



sistema di distribuzione dell' **acqua potabile**:

il fluido è sollevato all'altezza necessaria nelle varie abitazioni perché esso tende a portarsi alla quota del serbatoio

Principio di Pascal

ogni **variazione** di **pressione** in liquido chiuso si trasmette

- a **tutti i punti** del liquido
- alle **pareti** del contenitore

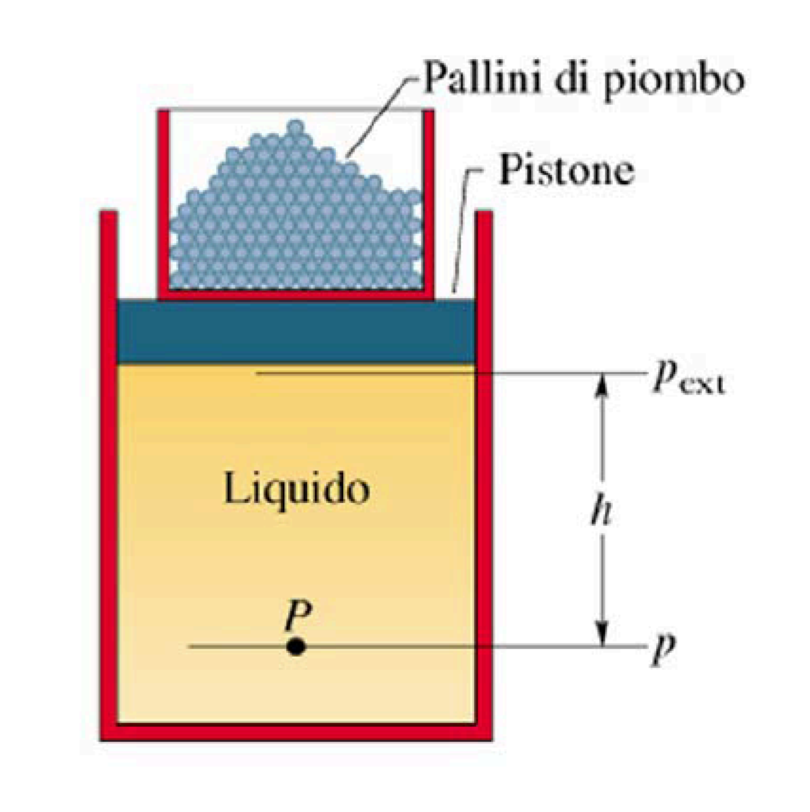
Attenzione: sono le variazioni di pressione a trasmettersi per cui se aumento la pressione esterna questa si trasferisce in un aumento di pressione tramite eq. (1) in cui ρ g e h sono rimasti invariati punto per punto. Ossia vale la (2) indipendentemente dall'altezza.

- liquido **incomprimibile**
[ρ = costante]

$$p = p_{ext} + \rho g h \quad (1)$$

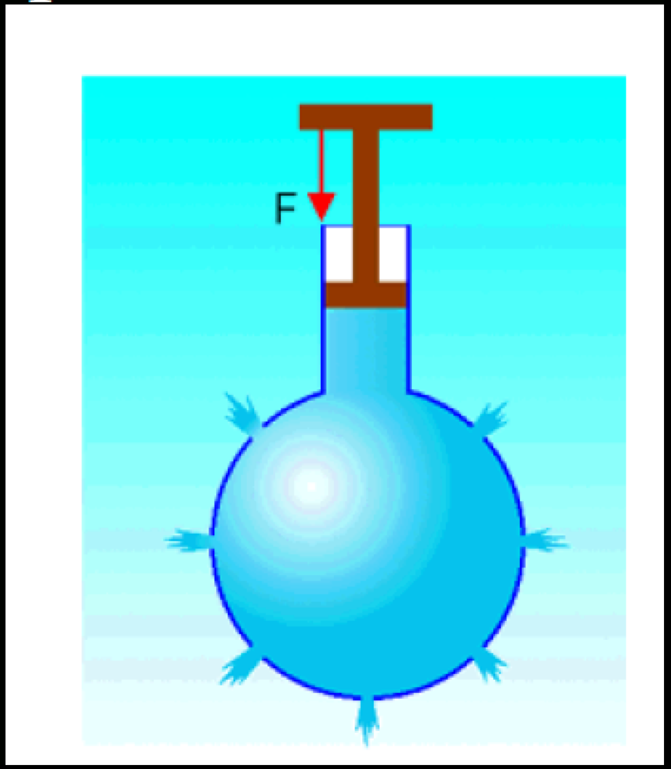
- aggiungo pallini di piombo
[⇒ **aumento** pressione esterna]

$$\Delta p = \Delta p_{ext} \quad (2)$$



Principio di Pascal

cambiamento di pressione **indipendente** da h
⇒ vale in **tutti i punti** del liquido



verifica:

forza applicata sul pistone
si trasmette in **ogni punto** del
fluido e in **tutte** le **direzioni**

conseguenze:

moltiplico intensità di F applicata

$F_1 = 10\ \text{N}$ forza applicata

$A_1 = 5\ \text{cm}^2$

$P_1 = \dfrac{10\ \text{N}}{5\ \text{cm}^2} = 2\ \text{N/cm}^2$

la pressione si trasmette inalterata nel liquido

$F_2 = P_2\, A_2 = (2\text{N/cm}^2)(500\ \text{cm}^2)$

$= 1000\ \text{N}$!! plus the force from the weight of the liquid.

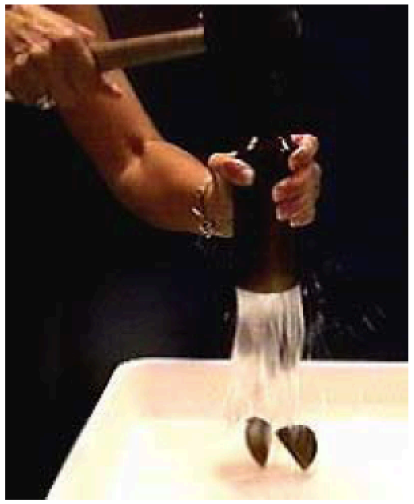
Resulting force on bottom of jug.

$A_2 = 500\ \text{cm}^2$

Leva idraulica: cambiando **area** nel fluido moltiplico le **forze** !!!

esempio:

colpendo il **tappo**
bottiglia piena di liquido
rompo **fondo** della bottiglia



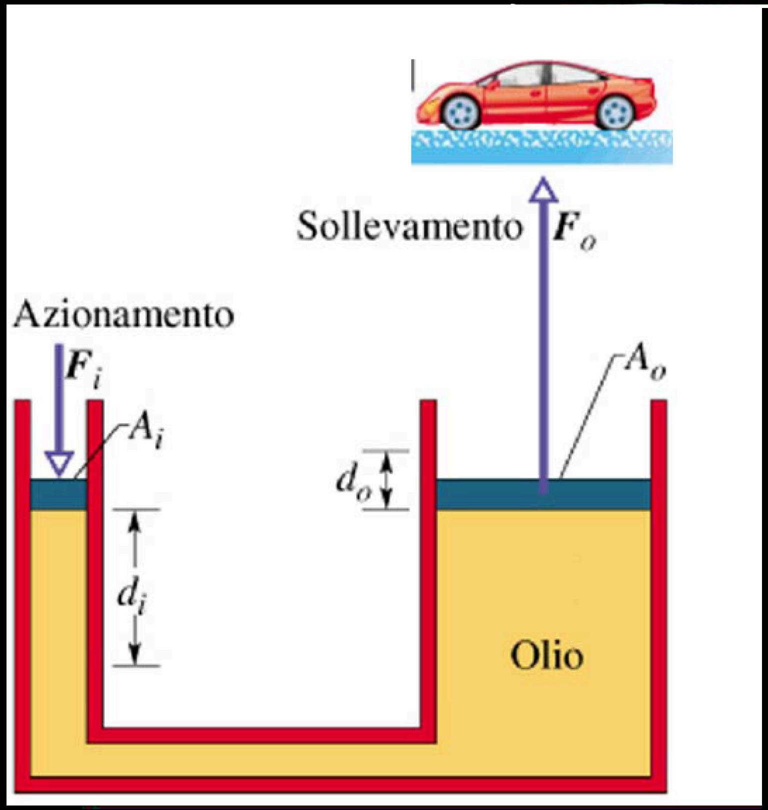
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html

Applicazione principio di Pascal
[leva idraulica]

liquido **incomprimibile**
[**ρ = costante**]

$$p = \frac{F_i}{A_i} = \frac{F_0}{A_0}$$

$$F_0 = F_i \frac{A_0}{A_i}$$



$$F_0 > F_i \quad per \quad A_0 > A_i$$

se **muovo** pistone sinistro di tratto d_i
⇒ pistone destro si muove di tratto d_0
[conservazione del volume spostato]

$$V = A_i d_i = A_0 d_0$$

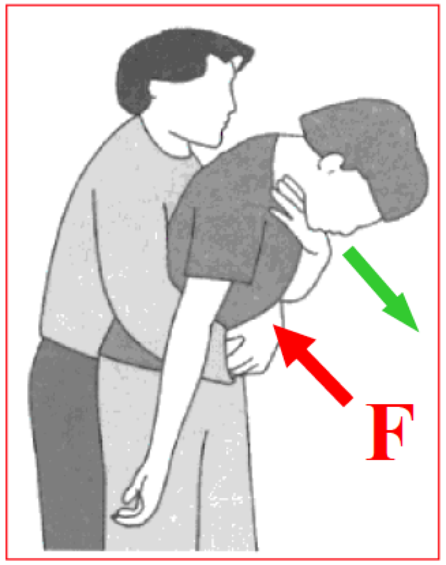
$$d_0 = \frac{A_i}{A_0} d_i$$

$$d_0 < d_i \quad per \quad A_0 > A_i$$

$$L = F_0 d_0 = \left(F_i \frac{A_0}{A_i}\right)\left(d_i \frac{A_0}{A_i}\right) = F_i d_i$$

una data forza su una certa distanza si trasforma in **forza maggiore** su **distanza minore** in **medicina**:

manovra di Heimlich



pressione sull'**addome**
si trasmette alla **gola**
permettendo fuoriuscita
di corpi estranei
dalla **trachea**

dentifricio esce dal **tappo**
schiacciando **fondo** del tubetto