Lezione 2

Fisica I – Ingegneria Automazione e Informatica

Università di Napoli "Federico II"

prof. Nicola R. Napolitano

GRANDEZZE

SCALARI

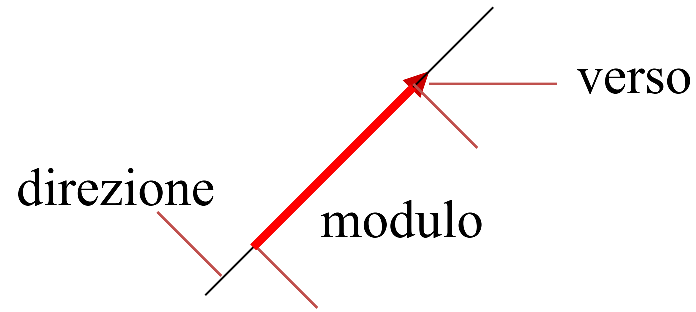
Completamente determinate da un **numero (misura)**

Lunghezza
volume
temperatura
massa
energia
tempo
resistenza
capacità
ecc

VETTORIALI

Determinate da
modulo **direzione** **verso**

Rappresentate da un vettore



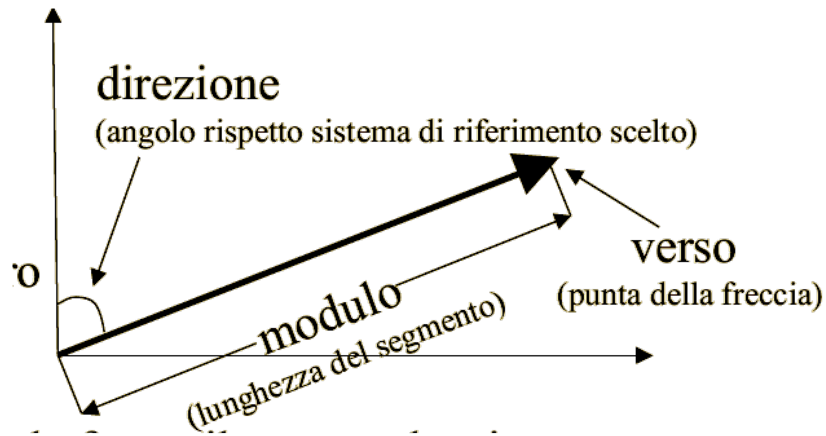
Non dipende dal punto di applicazione

Spostamento
velocità
accelerazione
forza
peso ecc.

Grandezze Vettoriali

<u>Grandezze Vettoriali</u>

Sono le grandezze che hanno bisogno di 3 numeri per essere definite
Modulo, Direzione e Verso



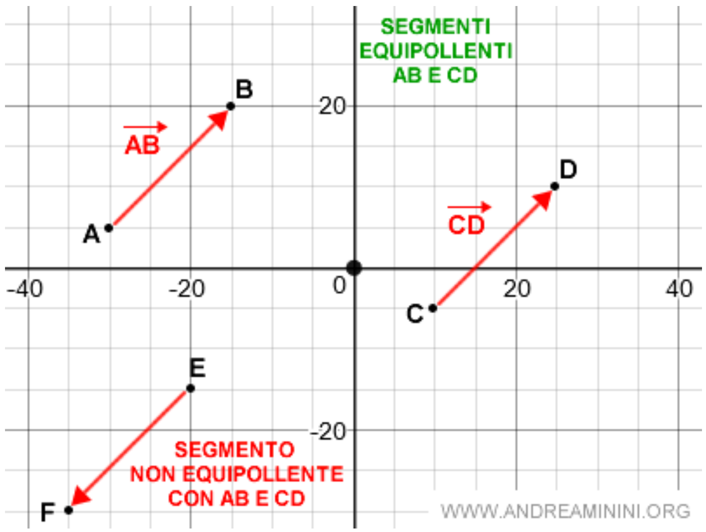
p.es. spostamento, accelerazione, forza, campo elettrico…

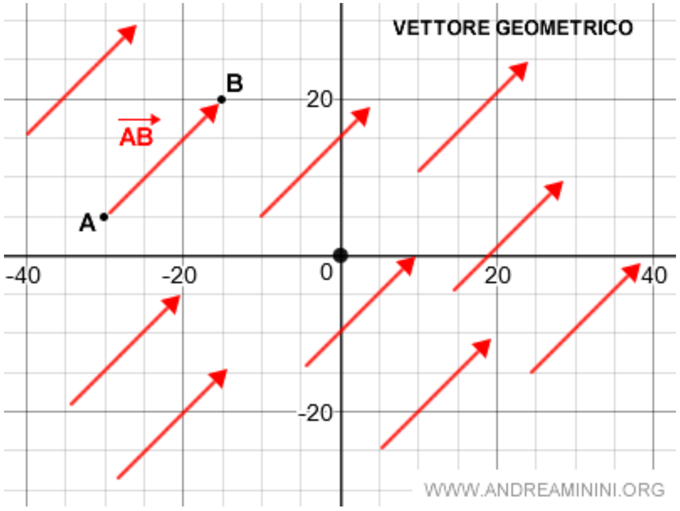
Ovviamente per fare questo occorre un sistema di riferimento di assi cartesiani

Grandezze Vettoriali

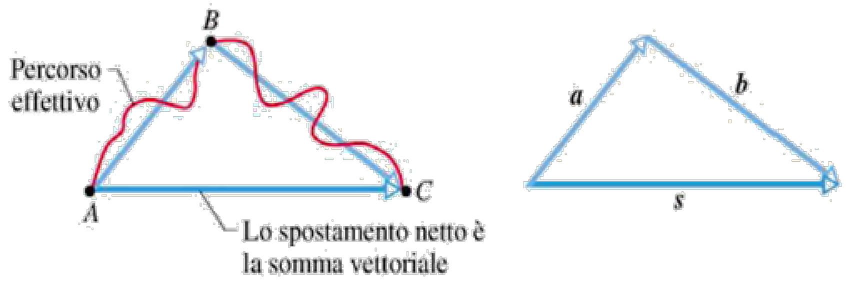
Segmenti che hanno stessa direzione, modulo (o dimensione) e verso, ma un diverso punto di applicazione (o origine) sono detti equipollenti.

L'equipollenza è una relazione di equivalenza per cui i vettori equipollenti sono anche equivalenti



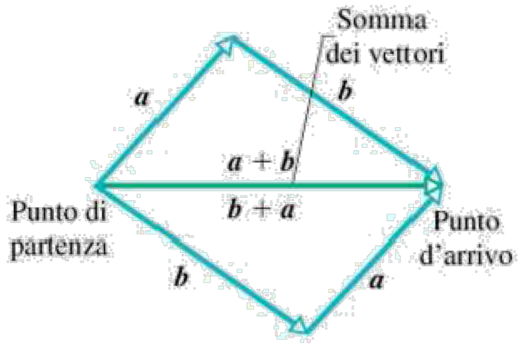


Somma Vettoriale (Metodo Grafico)



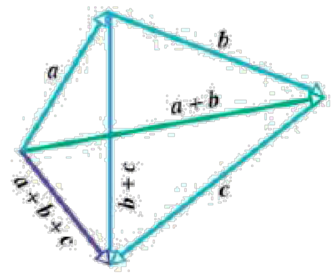
Somma (o risultante) dei vettori **a** e **b**:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$



Proprietà commutativa

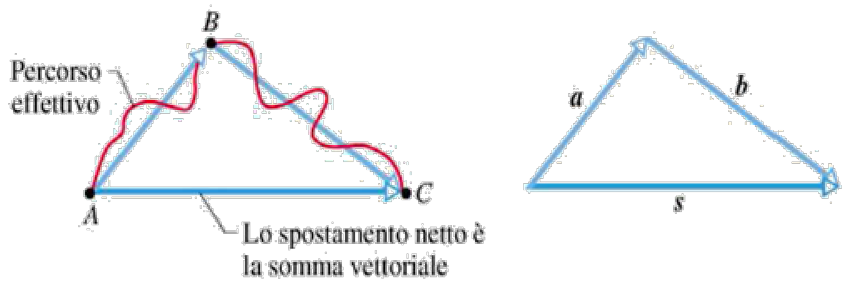
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$



Proprietà associativa

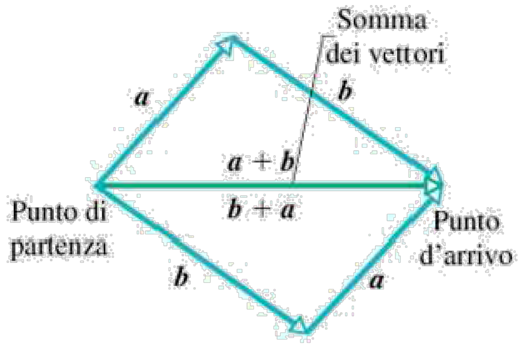
$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

Somma Vettoriale (Metodo Grafico)



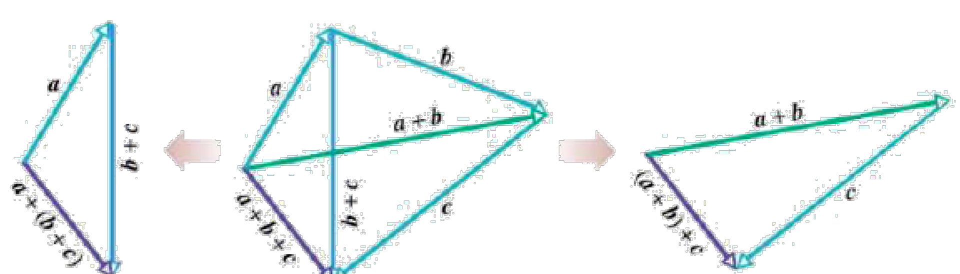
Somma (o risultante) dei vettori **a** e **b**:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$



Proprietà commutativa

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

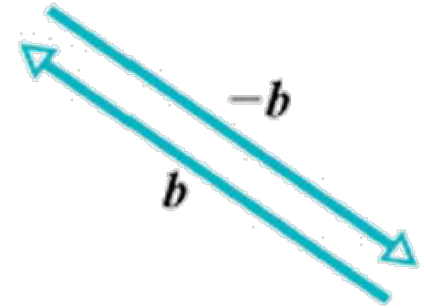


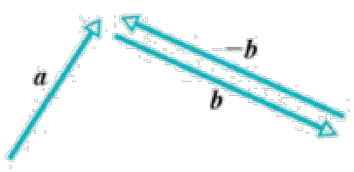
Proprietà associativa

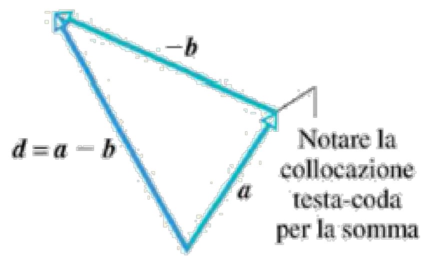
$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

Somma Vettoriale (Metodo Grafico)

Il vettore **–b**, opposto a **b**, è tale che **b** + (**–b**) = 0
–b ha lo stesso modulo e la stessa direzione di **b**
ma è orientato in verso opposto.





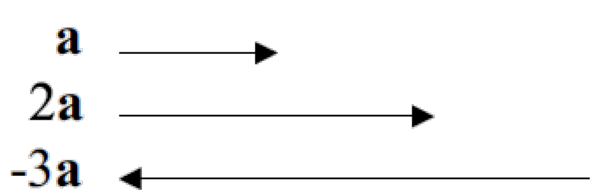


<u>Sottrazione di vettori</u>

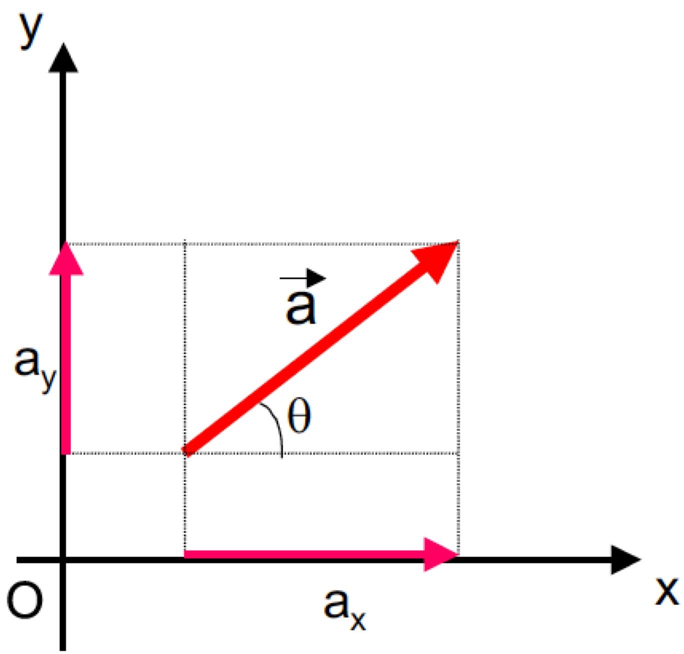
d = **a** – **b** = **a** + (**–b**)

<u>Prodotto di un vettore per uno scalare</u>

Il vettore risultante dal prodotto del vettore **a** per lo scalare s, ha la stessa direzione e lo stesso verso di **a** (se s è positivo, altrimenti ha verso opposto) e modulo sa.



Decomposizione di Vettori sul Piano



$$a_x = a\cos\vartheta$$

$$a_y = a\sin\vartheta$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

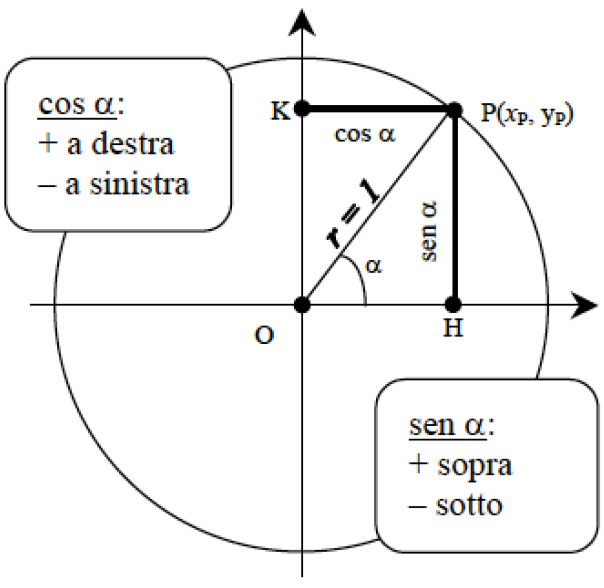
$$\tan\vartheta = \frac{a_y}{a_x}$$

Se abbiamo due vettori **a** e **b**, di componenti (a_x,a_y) e (b_x,b_y), il loro vettore somma sarà il vettore **s** di componenti (s_x,s_y).

Qualche richiamo di Matematica

Qualche richiamo di Matematica

Funzioni Trigonometriche



Si definisce *seno dell'angolo* α (e si indica con sen α) il rapporto tra la misura del segmento orientato HP e quella del raggio OP; tenendo conto che la lunghezza di OP è pari a 1, avremo dunque:

$$\boxed{\text{sen}\ \alpha = HP/OP = y_P}.$$

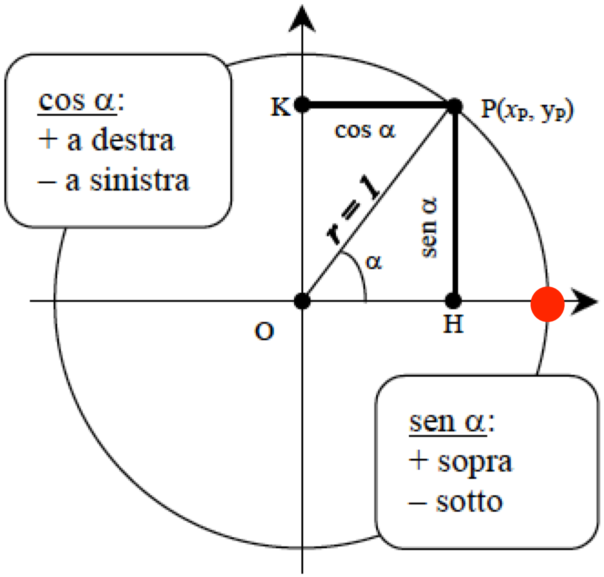
Si definisce invece *coseno dell'angolo* α (e si indica con *cos* α) il rapporto tra la misura del segmento orientato OH e quella del raggio OP; dunque:

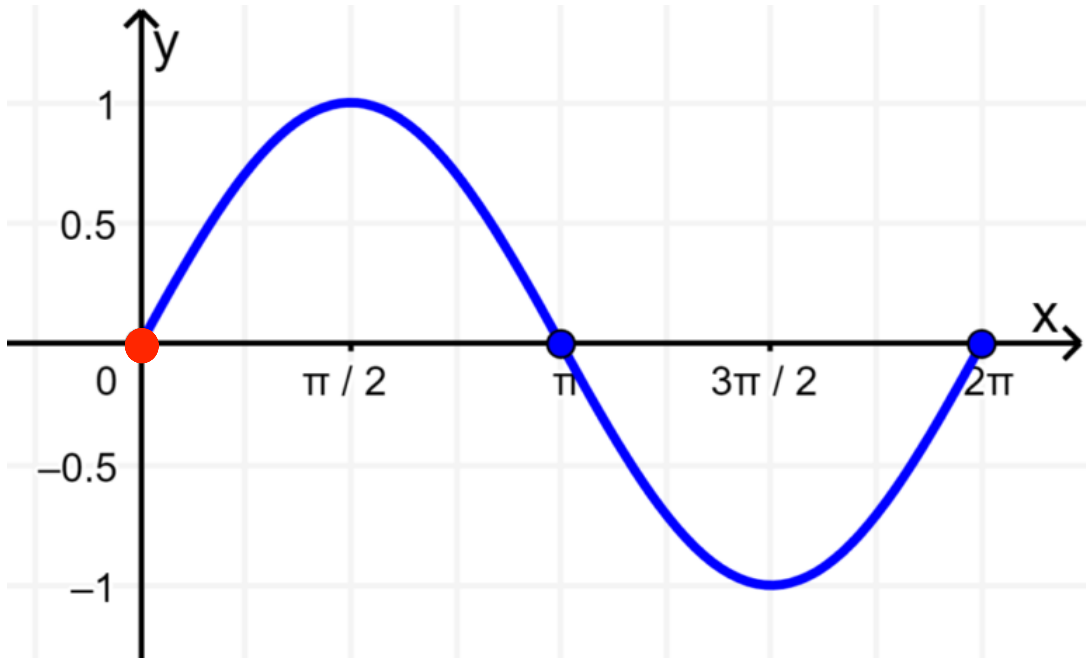
$$\boxed{\cos \alpha = OH/OP = x_P}.$$

Le funzioni definite tramite la circonferenza goniometrica si chiamano *funzioni trigonometriche* (o *goniometriche*).

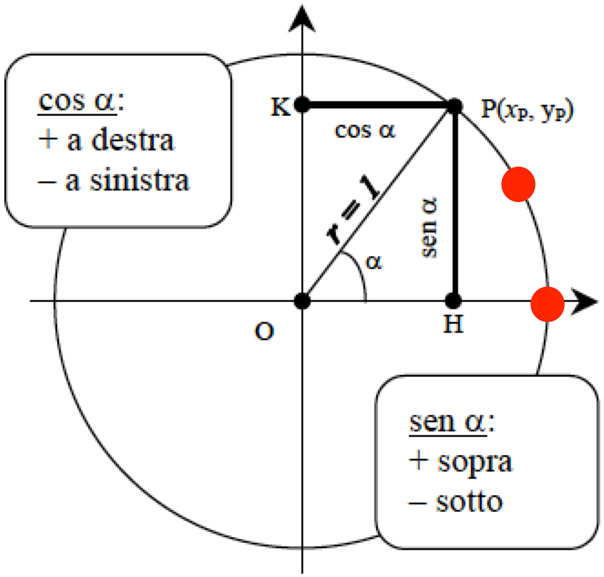
$$\boxed{\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

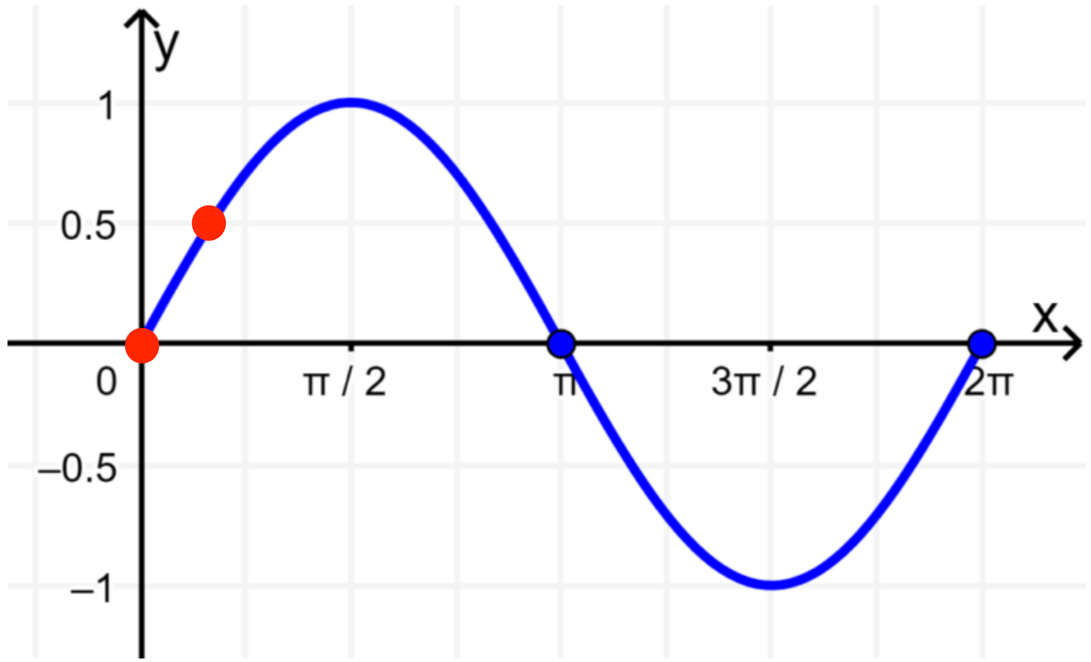
Funzione Seno



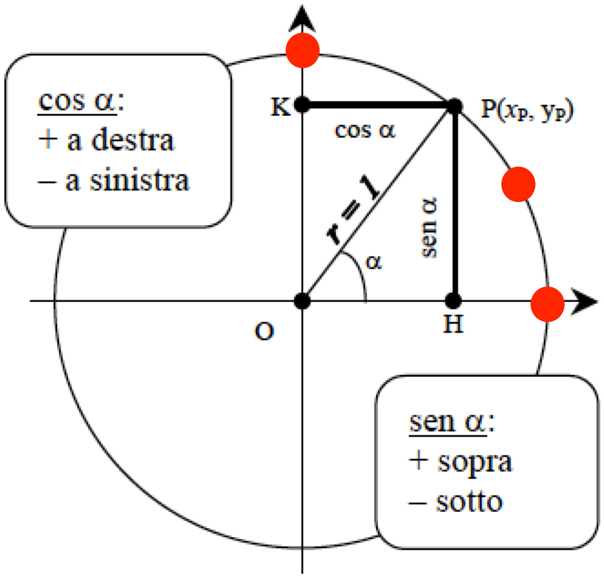


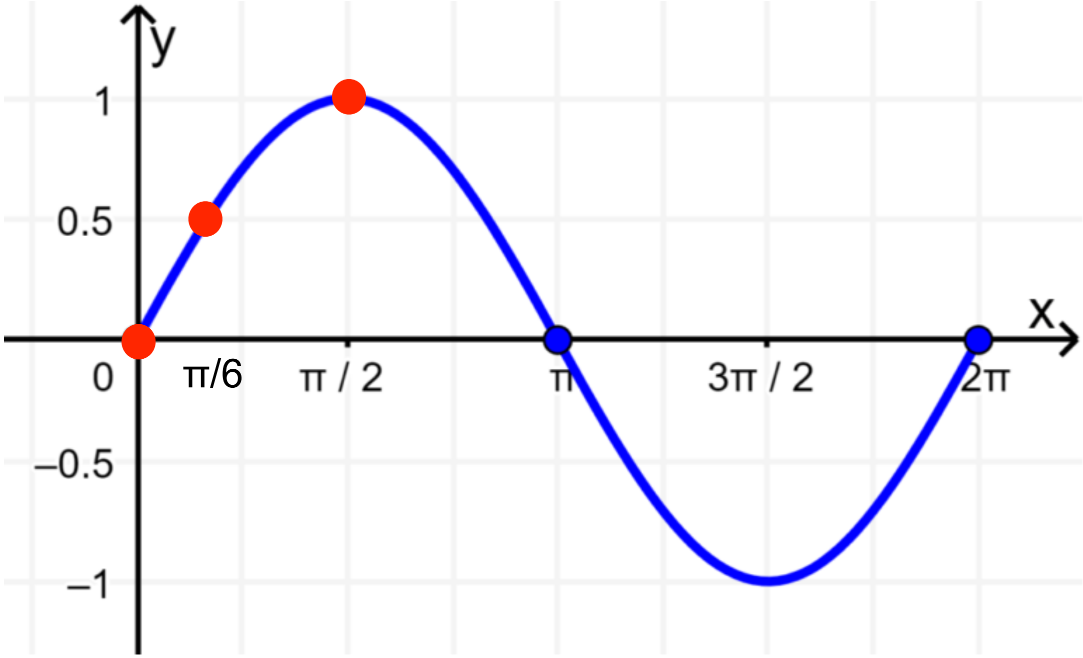
Funzione Seno



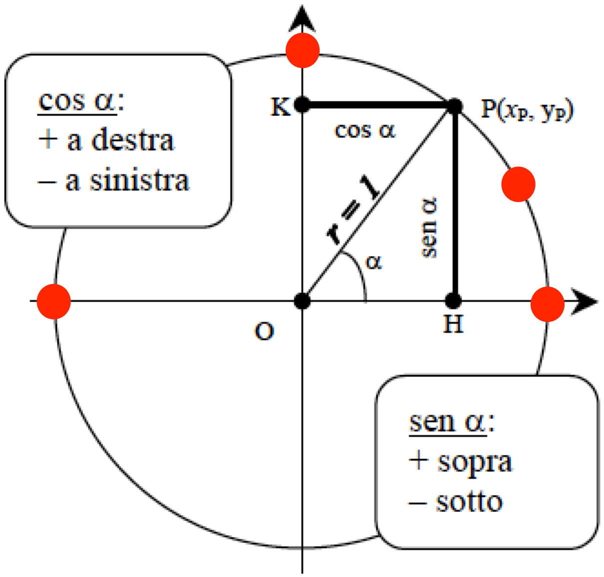


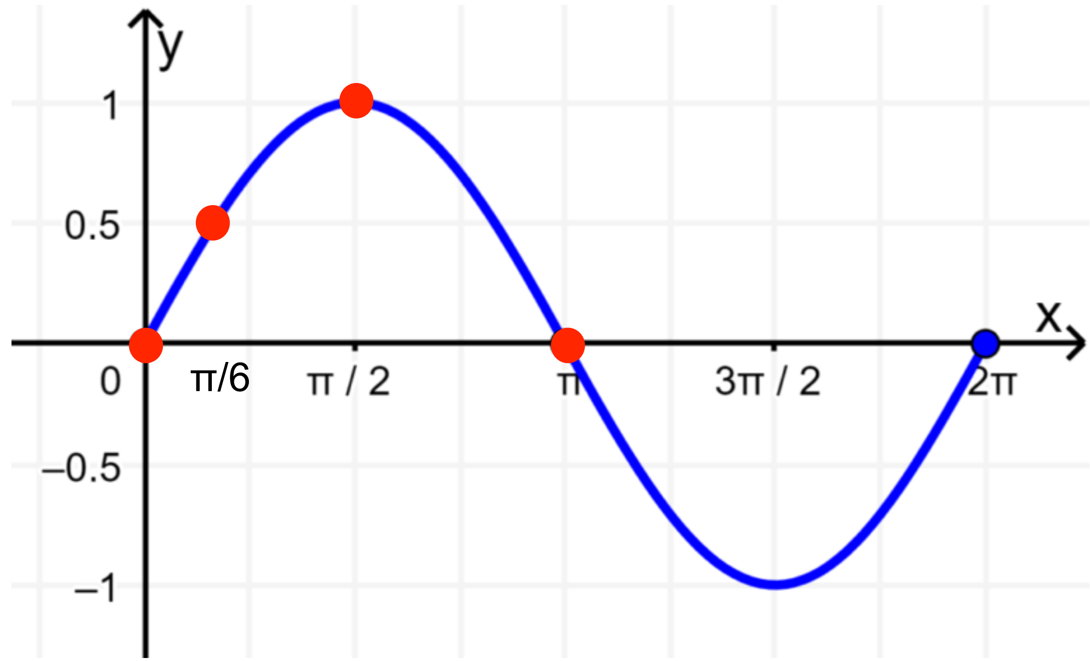
Funzione Seno



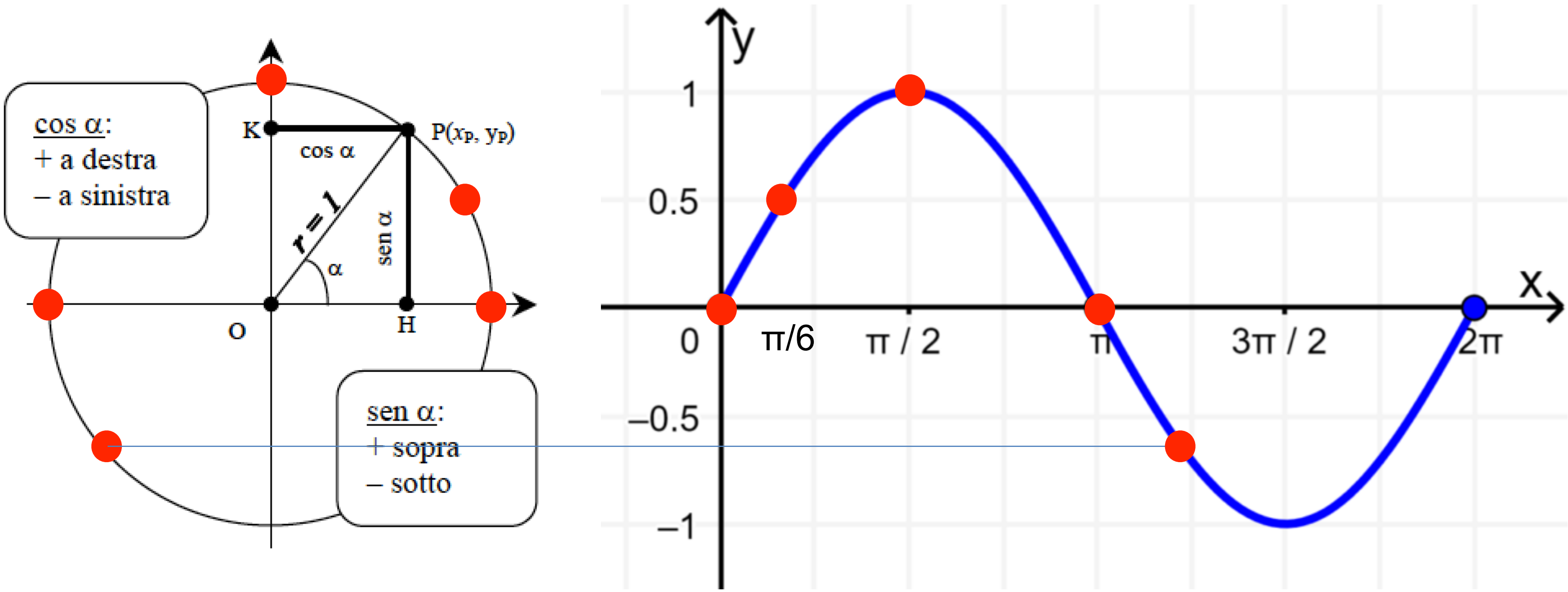


Funzione Seno

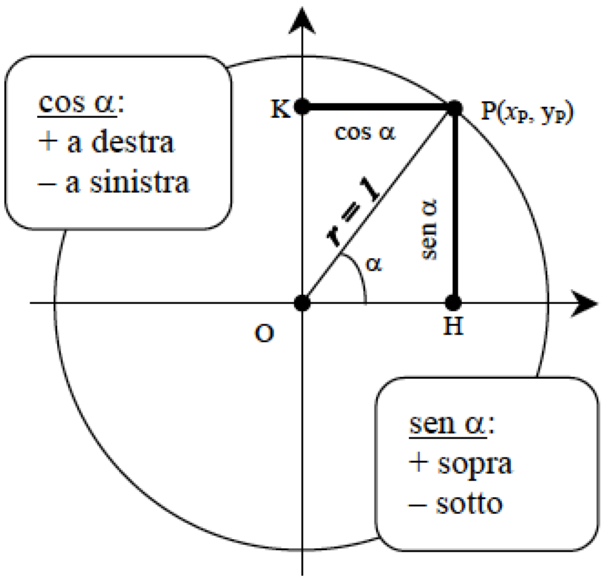


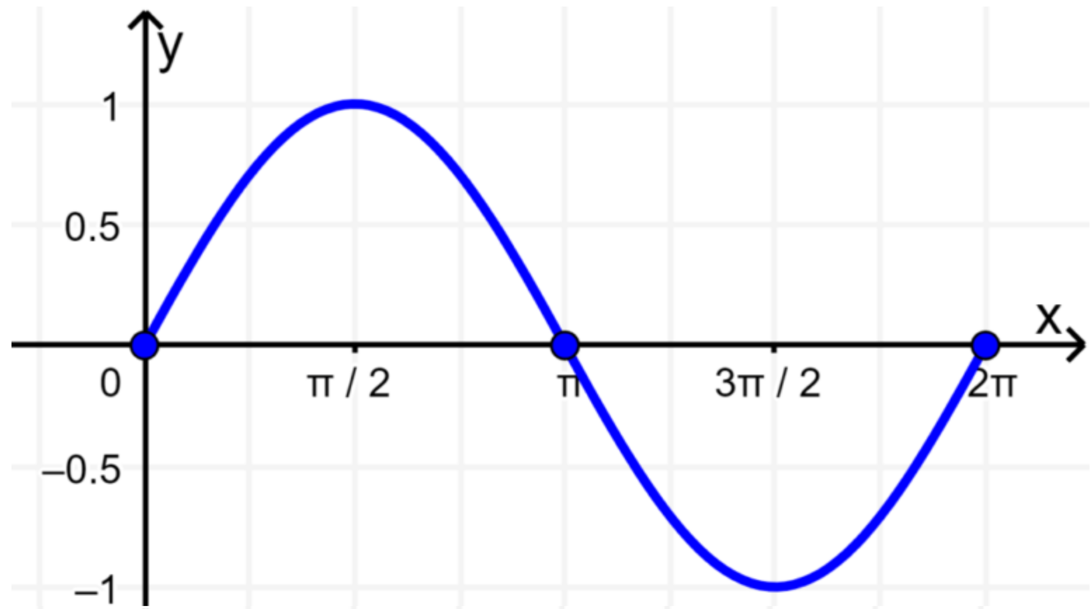


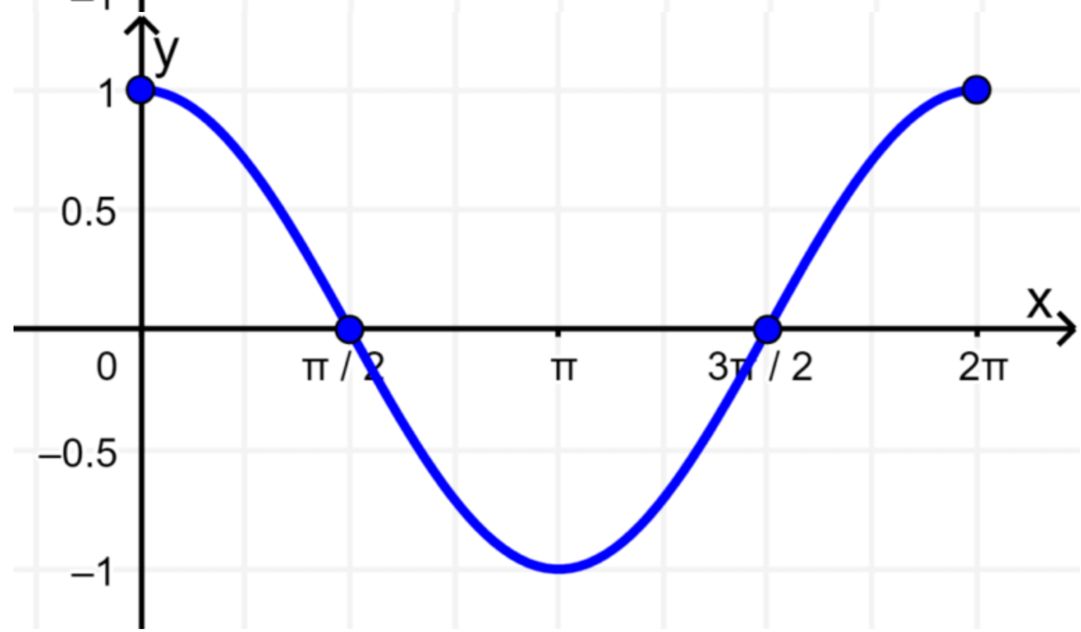
Funzione Seno



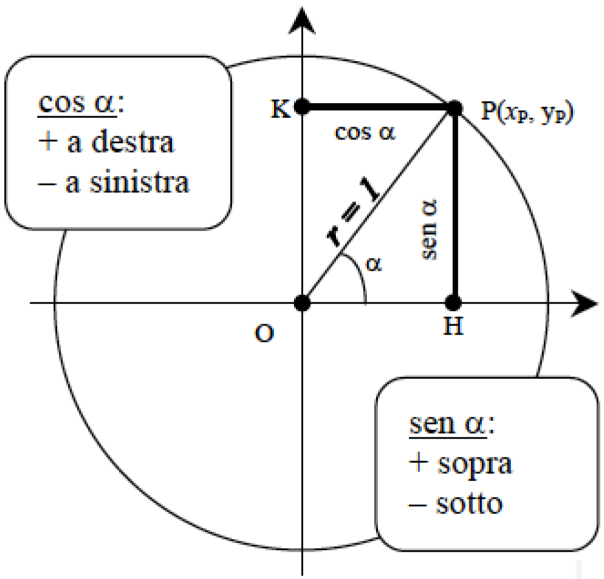
Funzione Seno e Coseno

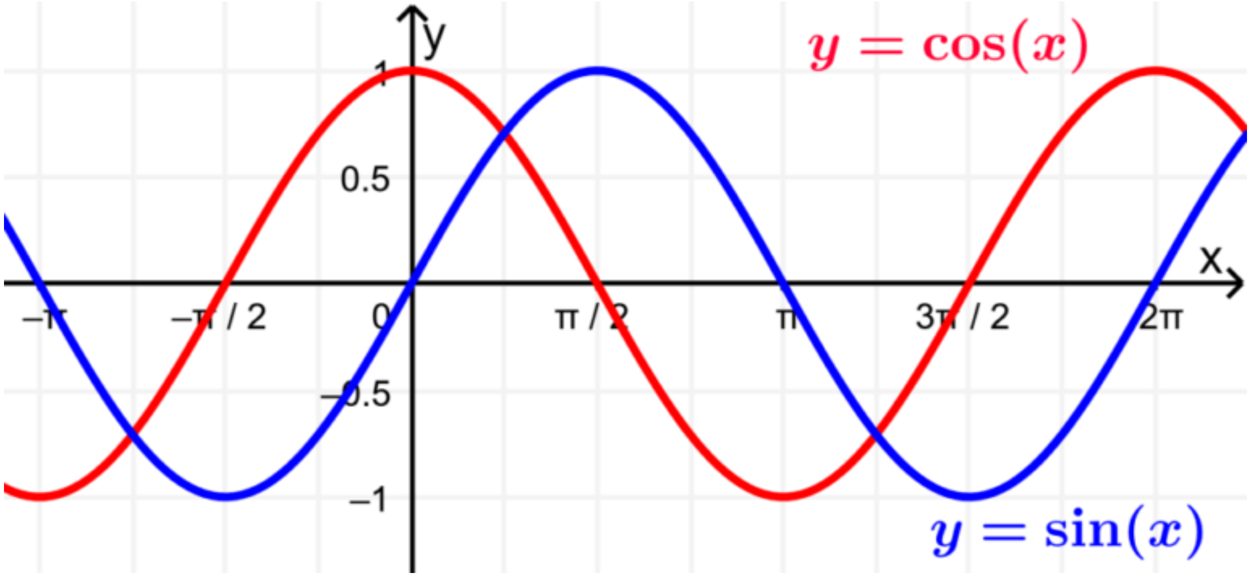




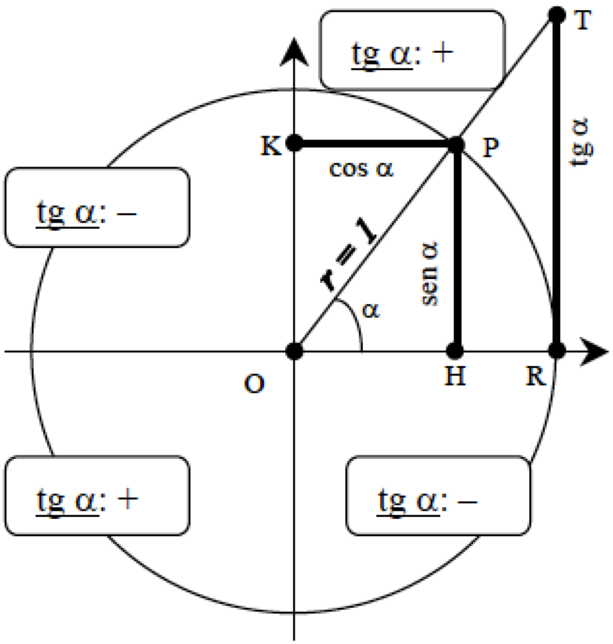


Funzione Seno e Coseno





Qualche richiamo di Matematica

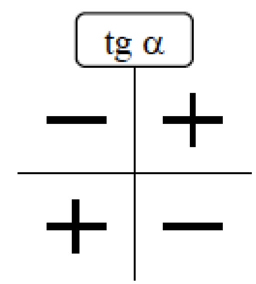


Si definisce *tangente dell'angolo* α (e si indica con *tg* α) il rapporto tra la misura del segmento orientato HP e quella del segmento orientato OH:

$$\boxed{\text{tg}\ \alpha = HP/OH = \text{sen}\ \alpha\ /\ \cos\alpha = y_P/x_P}.$$

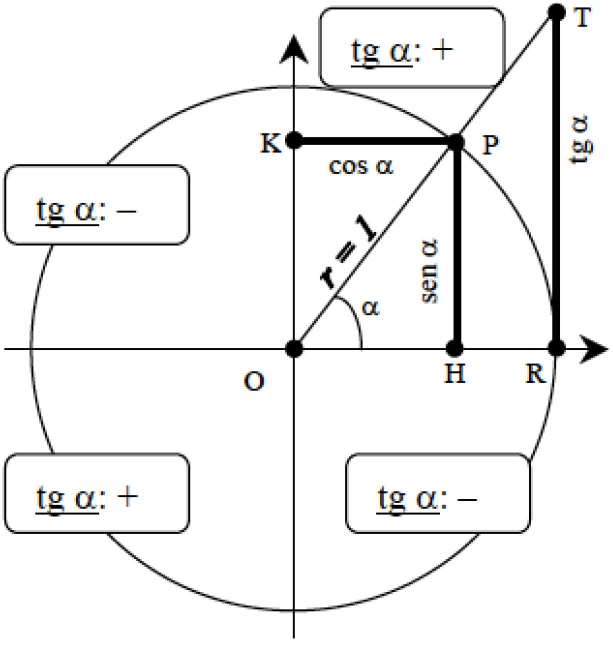
Sia R il punto di coordinate (0; 1); la tangente in R alla circonferenza incontra il prolungamento del lato OP nel punto T. Per le proprietà dei triangoli simili, il rapporto tra le lunghezze dei segmenti orientati HP ed OH è uguale a quello tra le lunghezze dei segmenti orientati RT ed OR; tenendo conto del fatto che OR è il raggio della circonferenza goniometrica, avremo dunque:

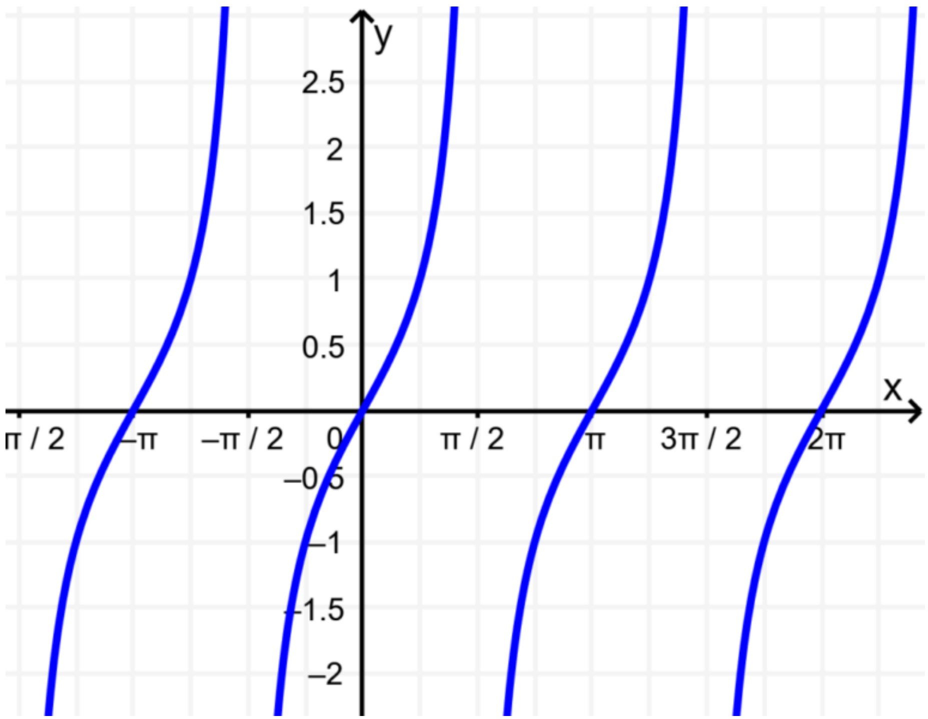
$$\boxed{\text{tg}\ \alpha = RT/OR = y_T}.$$



Il segno di tg α nei vari quadranti si ricava dal prodotto dei segni di sen α e cos α; esso sarà pertanto positivo quando le coordinate di P hanno segno concorde (nel 1° e nel 3° quadrante), negativo quando le coordinate di P hanno segno discorde (nel 2° e nel 4° quadrante).

Qualche richiamo di Matematica





Qualche richiamo di Matematica

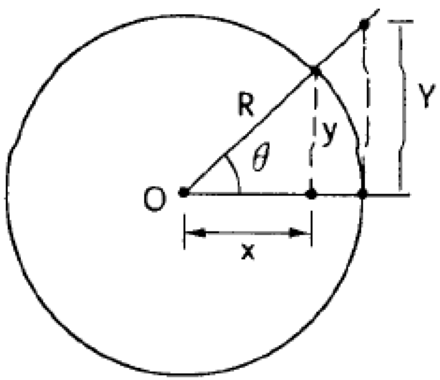
Funzioni Trigonometriche

Funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari

$\alpha°$	α_{rad}	**sen** α	**cos** α	**tg** α
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–
180°	π	0	–1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	–1	0	–
360°	0	0	1	0

Qualche richiamo di Matematica

Da “Fisica I – Meccanica e Termodinamica”, Mencuccini e Silvestrini, Liguori Editore



2. Funzioni trigonometriche

$$y = R \,\mathrm{sen}\,\theta \qquad cotg\,\theta = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}$$

$$x = R\cos\theta$$

$$Y = R\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

2.1. *Relazioni trigonometriche*

$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \mathrm{sen}\,\theta = (1-\cos^2\theta)^{1/2}$$

$$\mathrm{sen}\,(-\theta) = -\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\mathrm{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha \rightarrow \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)\right]$$

Qualche richiamo di Matematica

$$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$$

$$\operatorname{sen}x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

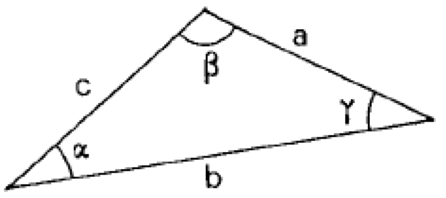
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen}x$$

$$e^{y+ix} = e^{y}\left(\cos x + i\operatorname{sen}x\right)$$

Qualche richiamo di Matematica

2.2. *Relazioni per triangoli*



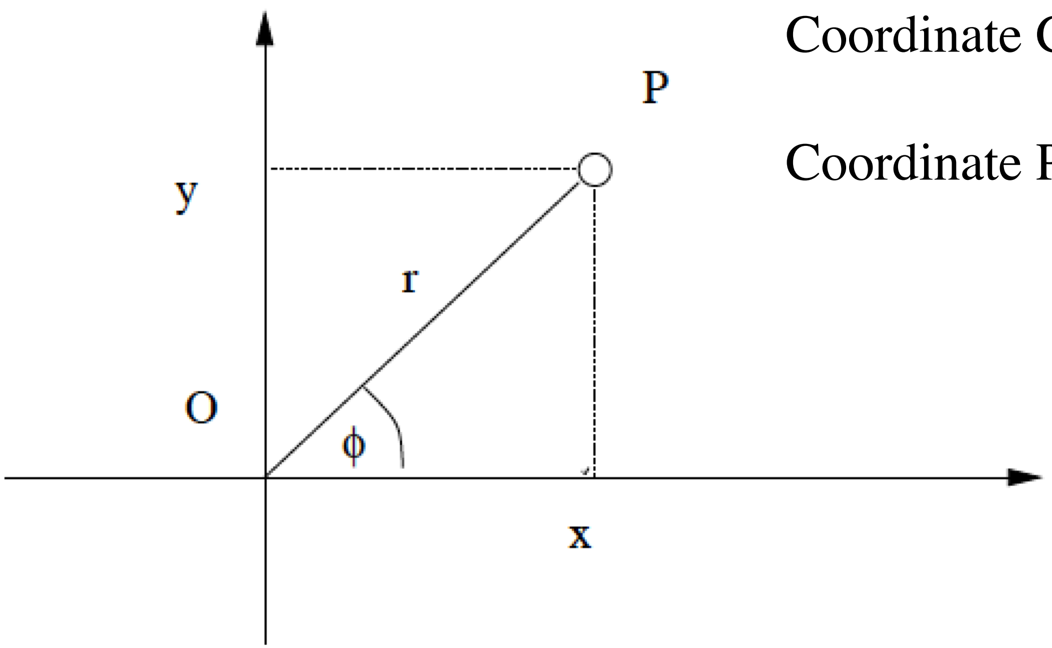
Per un triangolo qualsiasi valgono le relazioni:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \quad \text{(legge dei seni)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma \quad \text{(relazione di Carnot)}$$

Qualche richiamo di Matematica

Sistemi di coordinate nel piano



Coordinate Cartesiane P(x, y)

Coordinate Polari P(r, ϕ)

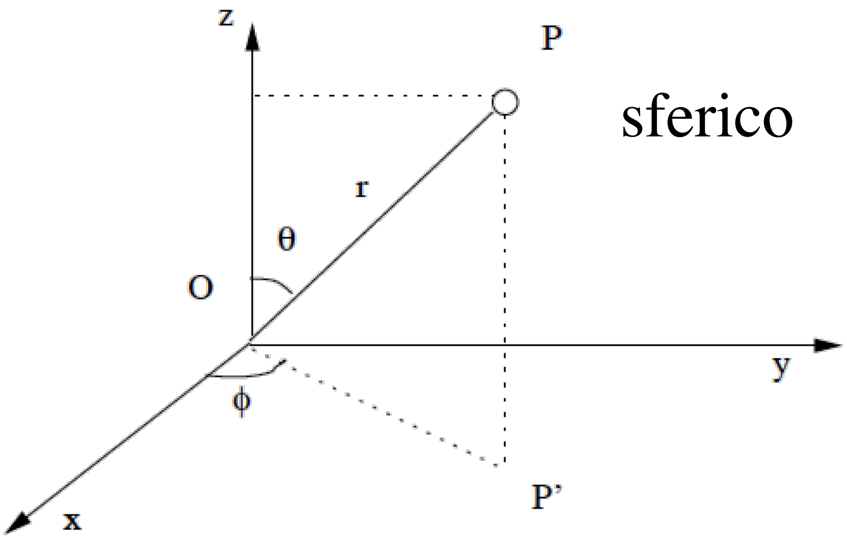
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\phi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

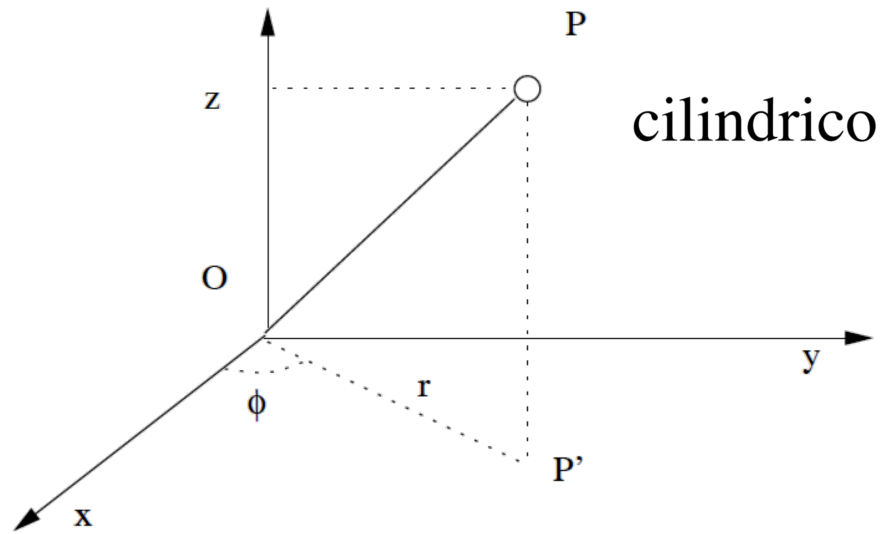
Concetto di proiezione di un punto. La proiezione di un punto P su un asse cartesiano (o su un piano) e’ il punto che si ottiene intersecando l’asse cartesiano (o il piano) con la perpendicolare all’asse (o al piano) passante per P. Questo identifica la coordinata di P su quell’asse.

Qualche richiamo di Matematica

Sistemi di coordinate



sferico



cilindrico

P(x, y, z)

P(r, θ, ϕ)

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

P(x, y, z)

P(r, ϕ, z)

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z \equiv z \end{cases}$$

Vettori in diversi sistemi di riferimento

Importanza della scelta del sistema di riferimento.

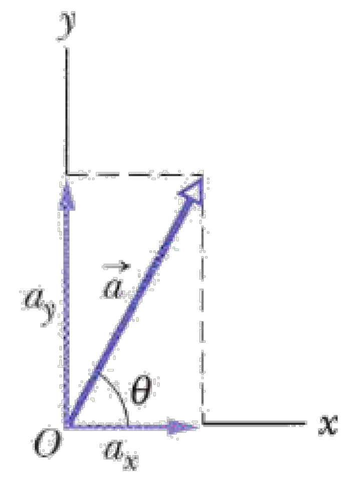
Lo stesso vettore può essere rappresentato in diversi sistemi di riferimento che sono definiti da diversi orientamenti dei versori.

Nel caso a lato questo è effettuato mediante la rotazione degli assi di un angolo ϕ.

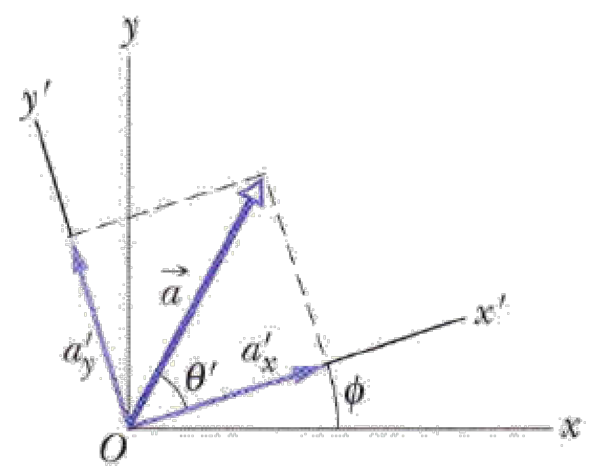
Che utilità si può ottenere da questa proprietà?

Grandezze unidimensionali in cui i vettori hanno una sola direzione (p.es. moto rettilineo): scegliere il sistema di riferimento allineato con la direzione delle grandezze in gioco.

Home work: scrivere la relazione tra a'_x, a'_y e a_x, a_y

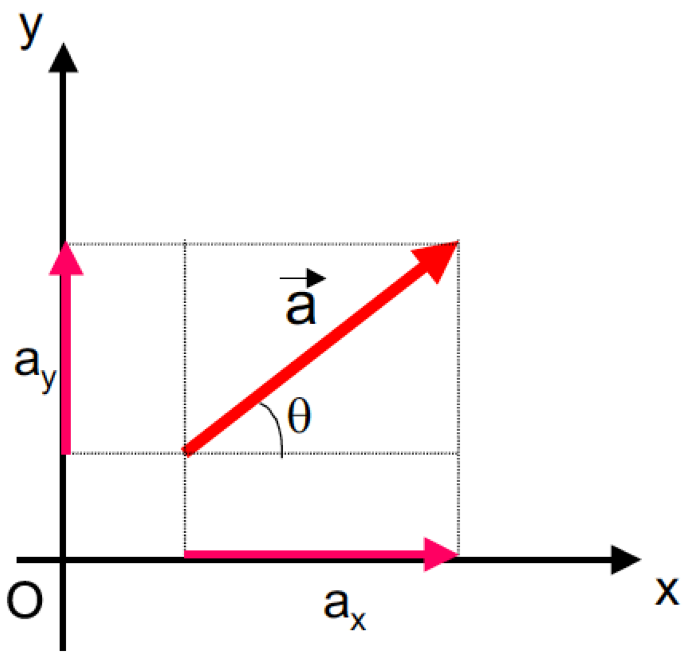


(a)



(b)

Decomposizione di Vettori sul Piano



$$a_x = a\cos\vartheta$$

$$a_y = a\sin\vartheta$$

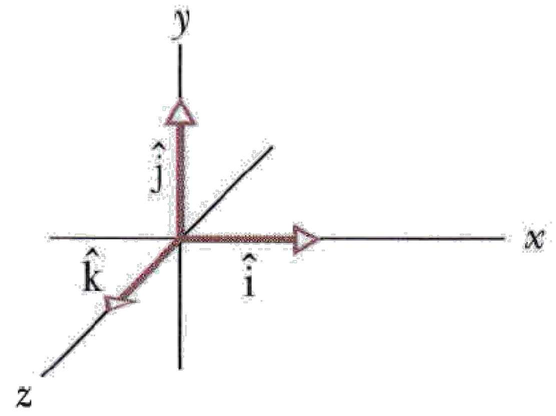
$$a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}$$

$$\tan\vartheta = \frac{a_y}{a_x}$$

Se abbiamo due vettori **a** e **b**, di componenti (a_x,a_y) e (b_x,b_y), il loro vettore somma sarà il vettore **s** di componenti (s_x,s_y).

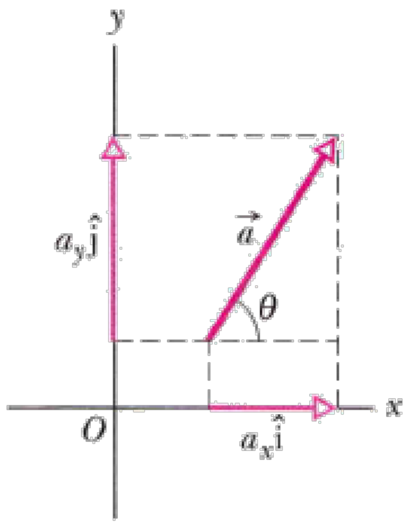
Vettori Unitari o versori

Vettori che hanno modulo uguale a uno in una particolare direzione e verso. Per esempio i vettori che definiscono gli assi cartesiani.



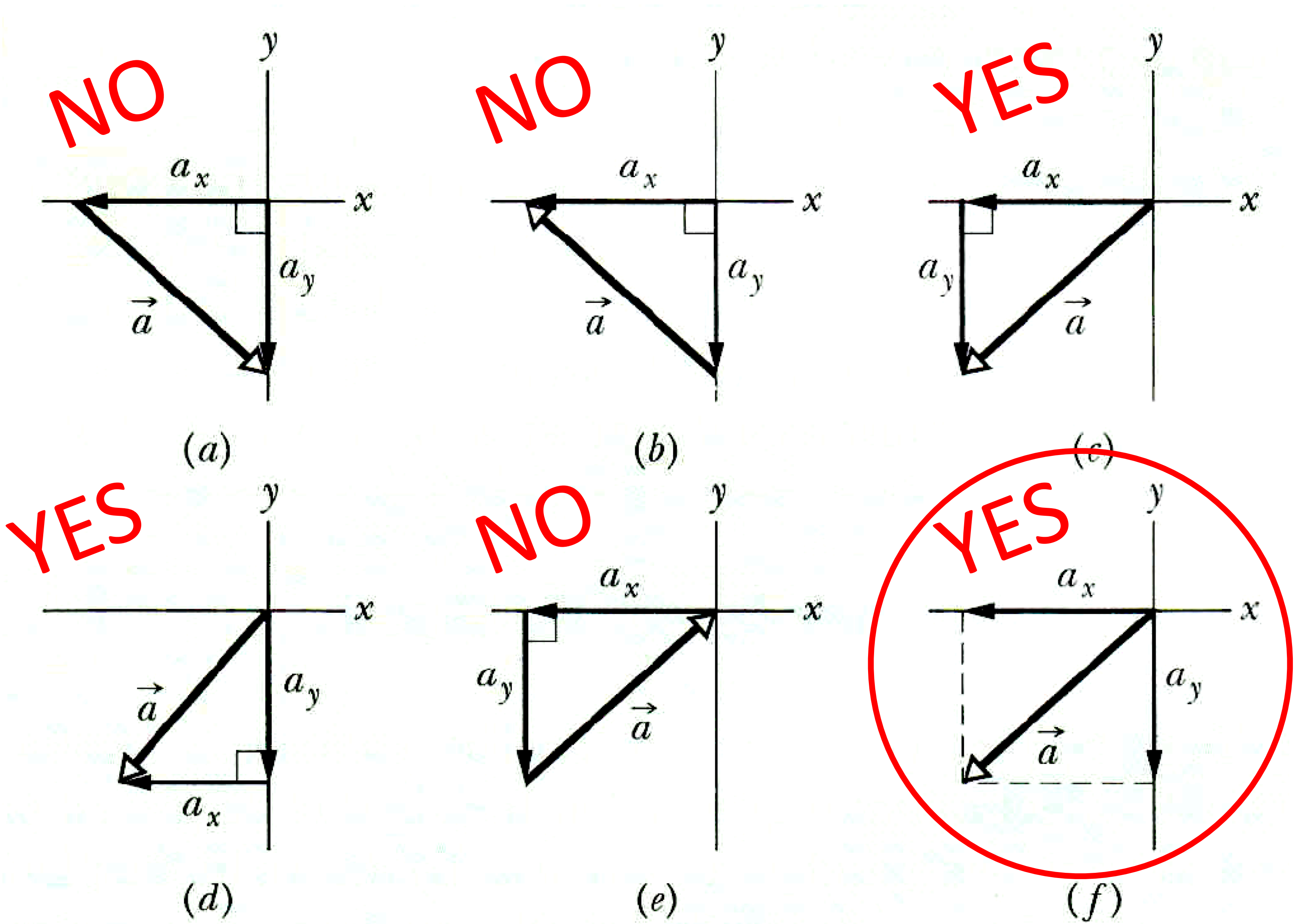
Ogni vettore lungo questi assi può essere definito come multiplo di un vettore unitario e il coefficiente rappresenta il modulo del vettore e può essere usato per operazioni tra vettori

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$



Quindi il vettore può essere dato tramite le sue componenti lungo assi coordinati (nella forma di una terna di scalari o come la somma delle componenti definite tramite versori)

Verifica?



Somma di vettori mediante le loro componenti

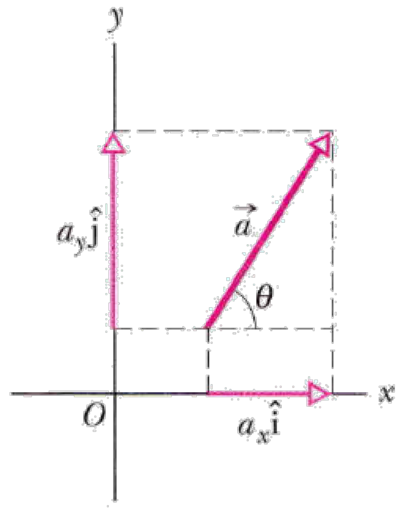
Si può usare il concetto di versori per effettuare operazioni (di somma/ differenza) tra vettori mediante le loro componenti lungo gli assi definiti dal sistema di versori.

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$r_z = a_z + b_z.$$

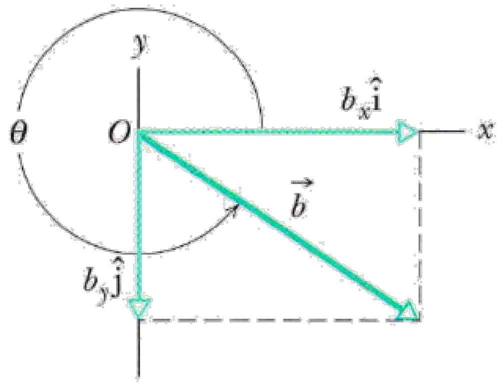


(a)

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

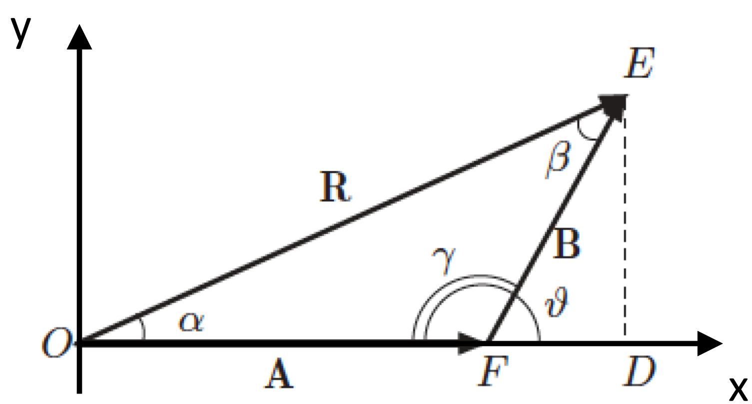
$$d_x = a_x - b_x, \quad d_y = a_y - b_y,$$

$$\vec{d} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j}$$



Somma Vettoriale (qualche esempio)

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$



$$\mathbf{A} \rightarrow (x_A, y_A) = (x_A, y_B)$$

$$\mathbf{B} \rightarrow (x_B, y_B)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \rightarrow (x_A + x_B, y_A + y_B) = (x_A + x_B, y_B)$$

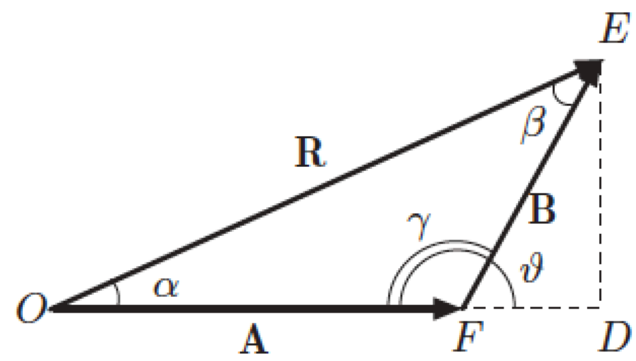
$$Mod(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = |A + B| = \sqrt{(x_A + x_B)^2 + y_B^2}$$

$$dir(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha = \text{arcsen } y_B / |\mathbf{A} + \mathbf{B}|,$$

$$dir(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha = \text{arctg } y_B / (x_A + x_B),$$

Somma Vettoriale (qualche esempio)

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$



Modulo del vettore somma

$$\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DE}^2;$$

Teorema di Pitagora

ma:

$$\overline{OD} = \overline{OF} + \overline{FD} = A + B\cos\theta, \quad \overline{DE} = B\sin\theta,$$

pertanto:

$$\begin{aligned}\overline{OE}^2 = R^2 &= (A + B\cos\theta)^2 + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + B^2\cos^2\theta + 2AB\cos\theta + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta;\end{aligned}$$

da cui:

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (1)$$

Se si prende in considerazione l'angolo γ,

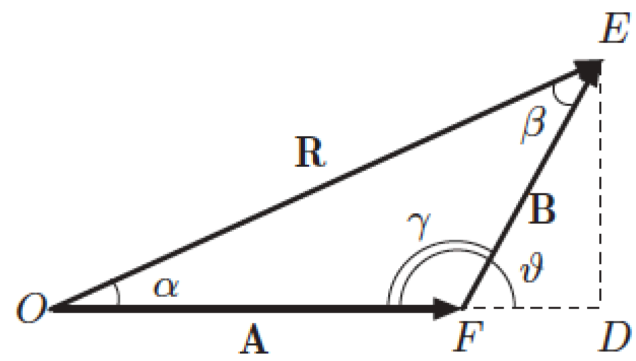
$$2AB\cos\theta = 2AB\cos(\pi - \gamma) = -2AB\cos\gamma,$$

quindi:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}. \qquad (2)$$

Somma Vettoriale (qualche esempio)

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$



MODULO DEL VETTORE SOMMA

$$\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DE}^2;$$

ma:

$$\overline{OD} = \overline{OF} + \overline{FD} = A + B\cos\theta, \quad \overline{DE} = B\sin\theta,$$

pertanto:

$$\begin{aligned} \overline{OE}^2 = R^2 &= (A + B\cos\theta)^2 + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + B^2\cos^2\theta + 2AB\cos\theta + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta; \end{aligned}$$

da cui:

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (1)$$

Se si prende in considerazione l'angolo γ,

$$2AB\cos\theta = 2AB\cos(\pi - \gamma) = -2AB\cos\gamma,$$

quindi:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}\,. \qquad (2)$$

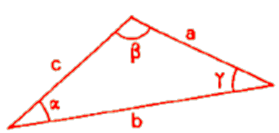
Ricorda: Lez. 1

2.2. *Relazioni per triangoli*

Per un triangolo qualsiasi valgono le relazioni:

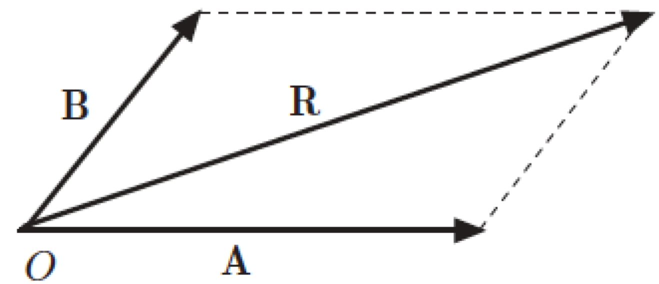
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \quad \text{(legge dei seni)}$$

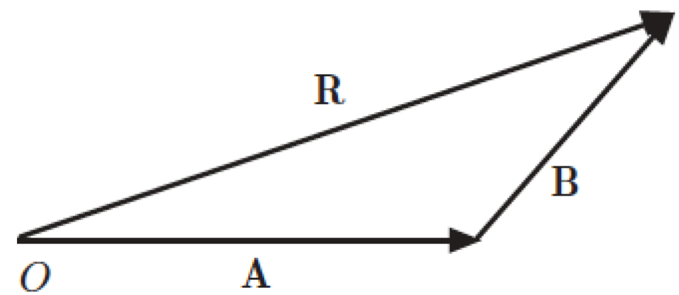
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{(relazione di Carnot)}$$



Somma Vettoriale (qualche esempio)

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$



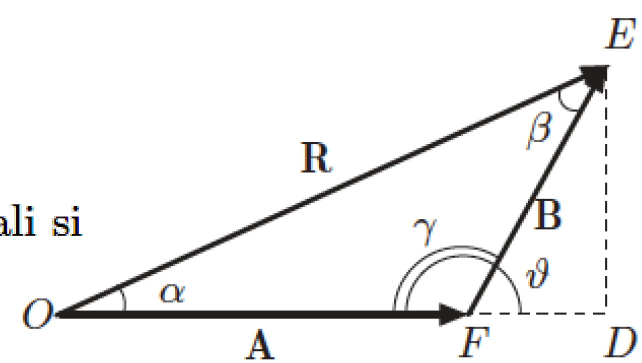


Direzione del vettore somma

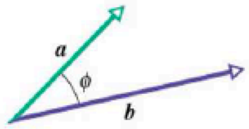
La direzione del risultante, per esempio rispetto ad $\mathbf{A}$, si ottiene mediante il teorema dei seni:

$$\frac{R}{\sin\gamma} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta},$$

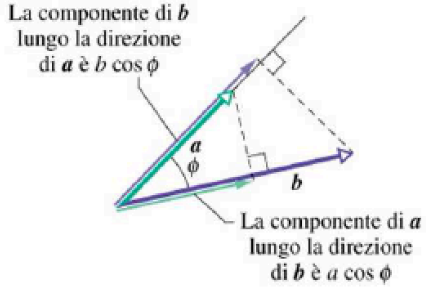
da cui si ricava α. Nel caso che i due vettori siano ortogonali si ha $\tan\alpha = B/A$.



Prodotto Scalare



(a)



(b)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi$$

- Casi notevoli

$\phi = 0^o$ ($\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ paralleli) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos(0^o) = ab$

$\phi = 180^o$ ($\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ opposti) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos(180^o) = -ab$

$\phi = \pm 90^o$ ($\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ perpendicolari) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos(\pm 90^o) = 0$

- Prodotto scalare in componenti (3 dimensioni)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Proprietà commutativa

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

Verifichiamo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

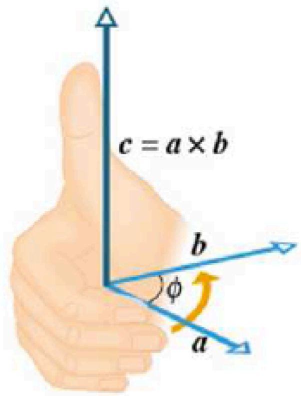
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}})$$

Siccome i versori sono ortogonali fra di loro i termini misti si annullano

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Che è un'espressione commutativa

Prodotto Vettoriale



(a)

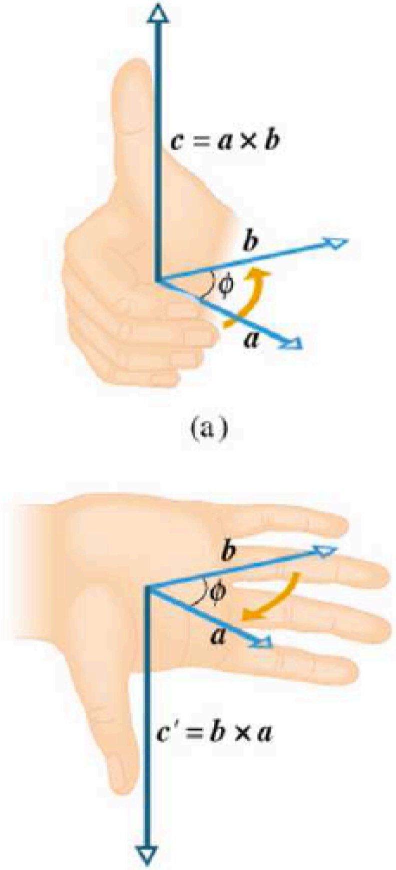
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$c = ab \sin\phi$$ MODULO

La direzione di
c è perpendicolare al piano individuato da **a** e **b**. Il suo verso si ricava con la regola della mano destra.

Sussiste la proprietà commutativa?

Prodotto Vettoriale



(a)

(b)

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$c = ab \sin\phi$ MODULO

La direzione di
c è perpendicolare al piano individuato da **a** e **b**. Il suo verso si ricava con la regola della mano destra.

Non sussiste la proprietà commutativa:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$?

- Casi notevoli

$\phi = 0^o$ (**a** e **b** paralleli) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab \sin(0^o) = 0$

$\phi = 180^o$ (**a** e **b** opposti) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab \sin(180^o) = 0$

$\phi = \pm 90^o$ (**a** e **b** perpendicolari) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab \sin(\pm 90^o) = \pm ab$

Verificare la non commutatività

Supponiamo di avere due verrori sul piano

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}}$$

Come si scrive $\vec{a} \times \vec{b}$?

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}.$$

e $\vec{b} \times \vec{a}$?

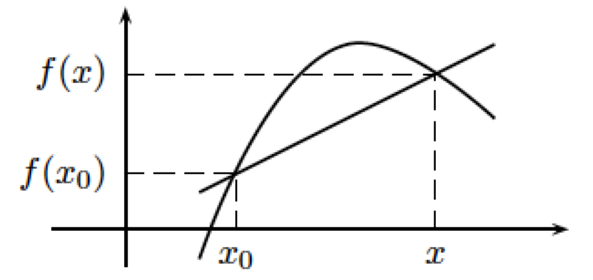
Dimostrare che $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Metodo del determinante

Qualche richiamo di Matematica

Derivata di una funzione



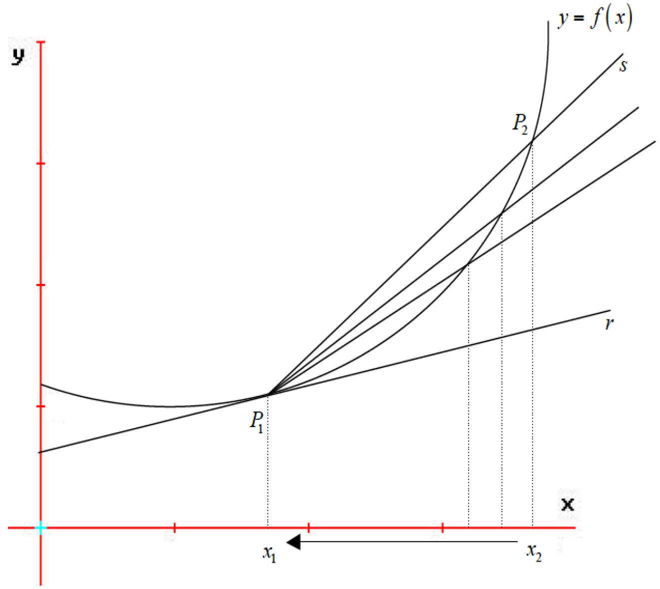
Definizione Sia I un intervallo aperto e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Sia poi $x_0 \in I$. Si chiama **rapporto incrementale** di f con punto iniziale x_0 il quoziente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ con } x \in I,\, x \neq x_0.$$

Possiamo quindi dire che la derivata di f in x_0 è il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ se questo è finito.}$$

La derivata di f in x_0 si indica con $f'(x_0)$, o anche con $Df(x_0)$ o con $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.



Dunque, quando l'incremento in x tende a zero, la corda tende a coincidere con la tangente, ovvero l'inclinazione della corda tenderà verso l'inclinazione della tangente.
Poiché il rapporto incrementale precedentemente definito non è altro che l'inclinazione della corda passante per i punti $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$, allora, quando x_2 si avvicina sempre più ad x_1, cioè quando $(x_2 - x_1)$ tende a zero, l'espressione del rapporto incrementale si avvicina al limite, precisamente:

$$\lim_{(x_2 - x_1) \to 0} \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) = l$$

che rappresenta proprio l'inclinazione della tangente nel punto $P_1 = (x_1, f(x_1))$.

Coefficiente angolare della tangente

Definiremo tale limite come la *derivata prima* della funzione $f(x)$ e la indicheremo con una della seguenti notazioni:

$$D(y) \quad \text{oppure} \quad y' \quad \text{oppure} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{oppure} \quad f'(x)$$

Qualche richiamo di Matematica

Esempi di derivate notevoli

Esempi

- Sia $f(x) = mx + q$. Allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x_0) = m$.
  Infatti
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{mx + q - mx_0 - q}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m.$$

- Sia $f(x) = x^2$. Allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x_0) = 2x_0$.
  Infatti
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

- Sia $f(x) = x^3$. Allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x_0) = 3x_0^2$.
  Infatti
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

…e la derivata di una costante? Analogo geometrico…alla lavagna

Qualche richiamo di Matematica

Differentiation Formulas:

1. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
2. $\frac{d}{dx}(ax) = a$
3. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
5. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
6. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
7. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
8. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
9. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x(\cot x)$
10. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
11. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
12. $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x \quad \rightarrow \frac{d}{dx}e^x = e^x$
13. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
15. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

NB: alcune di queste derivate possono essere ricavate usando la derivata della funzione composta:

Qualche richiamo di Matematica

Consideriamo due funzioni reali di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e chiamiamole $y = f(x),\ z = g(y)$. Sia poi $z = h(x) = g(f(x))$ la loro composizione.

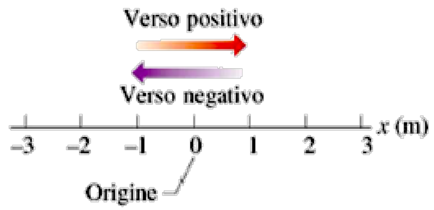
Vale allora

$$\frac{d}{dx}h(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

In parole povere, la derivata della funzione composta h(x)=g(f(x)) è data dalla derivata della funzione più esterna, *con argomento invariato*, moltiplicata per la derivata della funzione più interna. Con funzione più esterna si intende l'ultima funzione che si applica nella composizione (per noi la g) mentre la più interna è la prima che si applica (f).

Moto Unidimensionale

Il cambiamento di posizione di un corpo da un punto x_1 a uno x_2 è detto **spostamento** (grandezza vettoriale).



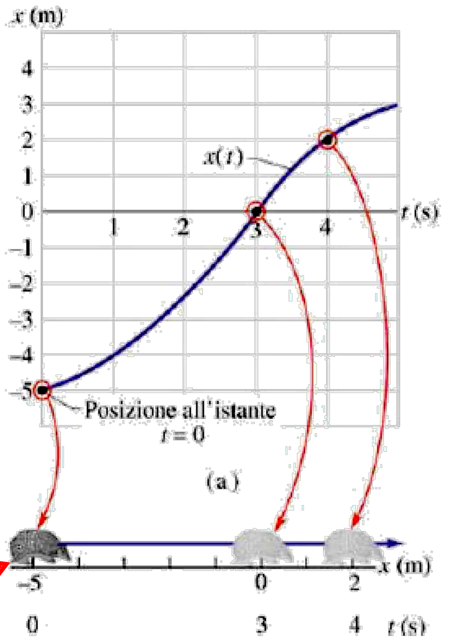
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Es. se la particella si sposta da $x_1 = 5$ m a $x_2 = 12$ m, allora $\Delta x = (12\text{ m}) - (5\text{m}) = 7$ m.

Se si sposta da $x_1 = -5$ m a $x_2 = 12$ m, allora $\Delta x = (12\text{ m}) - (-5\text{ m}) = 12\text{ m} + 5\text{ m} = 17\text{ m}$

Grafico della posizione *x* in funzione del tempo *t*:

curva *x(t)*



Armadillo!!