FISICA GENERALE I

Dott.ssa Annalisa Allocca

Università degli Studi di Napoli,
Compl. Univ. Monte S.Angelo – Dipartimento di Fisica
Via Cinthia, I-80126, Napoli

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
sez. Napoli
Studio: 1G16, Edificio 6
+39-081-676345
annalisa.allocca@unina.it

Organizzazione

- **Sito web:** www.docenti.unina.it/annalisa.allocca
  - La registrazione al sito si può effettuare inserendo numero di matricola e pin oppure tramite SPID per chi non fosse ancora in possesso di matricola
  - Il materiale didattico si trova sulla pagina web

- **Libri di testo adottati:**
  - Mazzoldi, Nigro, Voci «Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica» Vol. 1 - Edises Napoli
  - Halliday, Resnick, Walker «Fondamenti di Fisica» - Ambrosiana Milano
  - Serway, Jewett «Principi di Fisica» - Edises Napoli

Argomenti di oggi:

- Elementi di cinematica
  - Accelerazione in funzione della posizione
  - Moto armonico
  - Moti su traiettoria curvilinea
  - Moto circolare
  - Moto parabolico

Equazioni cinematiche

- Moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0} t \\ v(t) = v_{x0} = \text{costante} \end{cases}$$

Posizione in funzione del tempo

Velocità costante

- Moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v(t) = v_{x0} + a_x t \\ a(t) = a_{x0} = \text{costante} \end{cases}$$

Posizione in funzione del tempo

Velocità in funzione del tempo

Accelerazione costante

Riassunto

Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$v = v[x(t)]$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v(x(t))\right) = \frac{dv}{dx}\,\boxed{\frac{dx}{dt}} = \frac{dv}{dx}\cdot v$$

$$\int_{x_0}^{x_f} a\,dx' = \int_{v_0}^{v_f} v\,dv \implies a(x_f - x_0) = \frac{v_f^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

$$\boxed{v_f^2 = v_0^2 + 2a(x_f - x_0)}$$

Velocità e accelerazione in funzione della posizione

Moto armonico

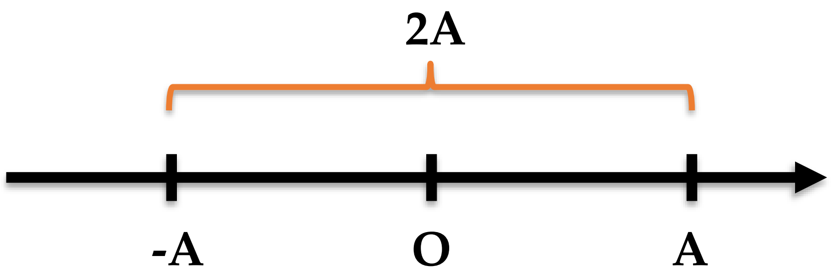
Moto oscillatorio (il corpo ripercorre avanti e indietro lo stesso tragitto)

Ampiezza del moto

$$x(t) = A\,cos(\boxed{\omega t + \ \varphi})$$

Fase del moto

MOTO PERIODICO!



$\boldsymbol{\varphi} \rightarrow$ fase iniziale

$\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{T}} \rightarrow$pulsazione del moto

Periodo del moto

$\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}} = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{2\pi}} \rightarrow$ frequenza del moto

Moto armonico semplice

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

- Spostamento:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

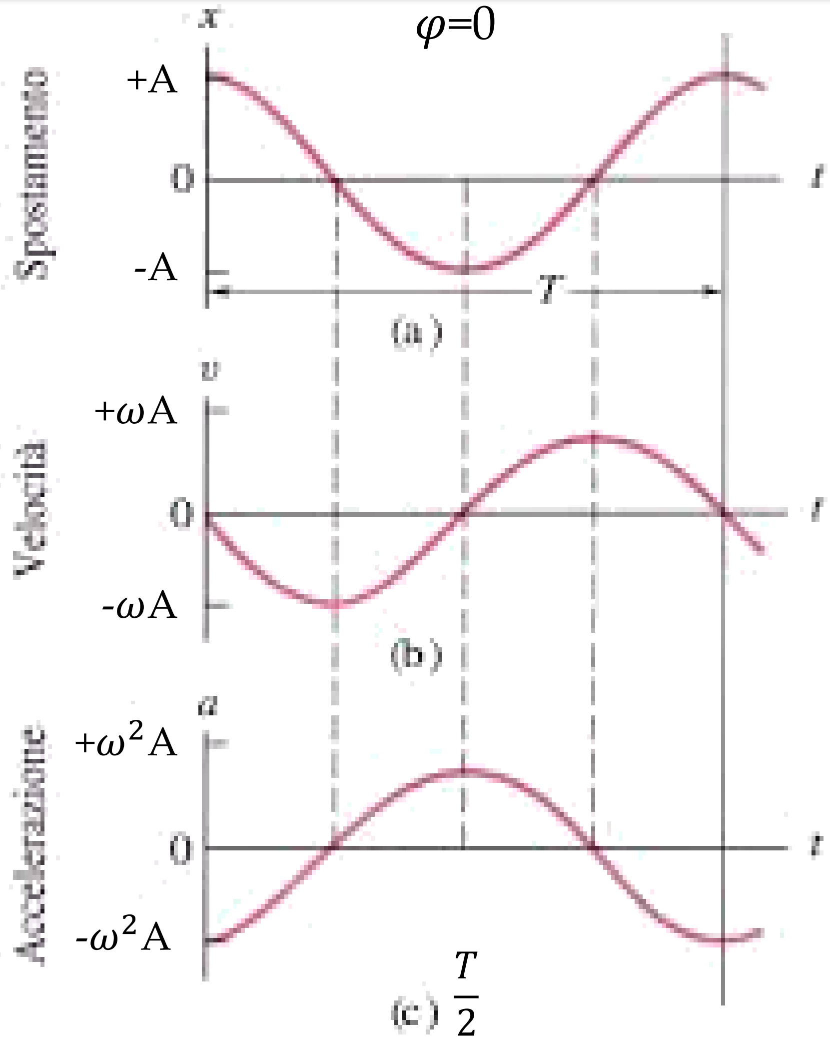
- Velocità:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Accelerazione:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$



Equazione differenziale del moto armonico

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2\,x(t) = 0}$$

Moto armonico semplice

- Spostamento:

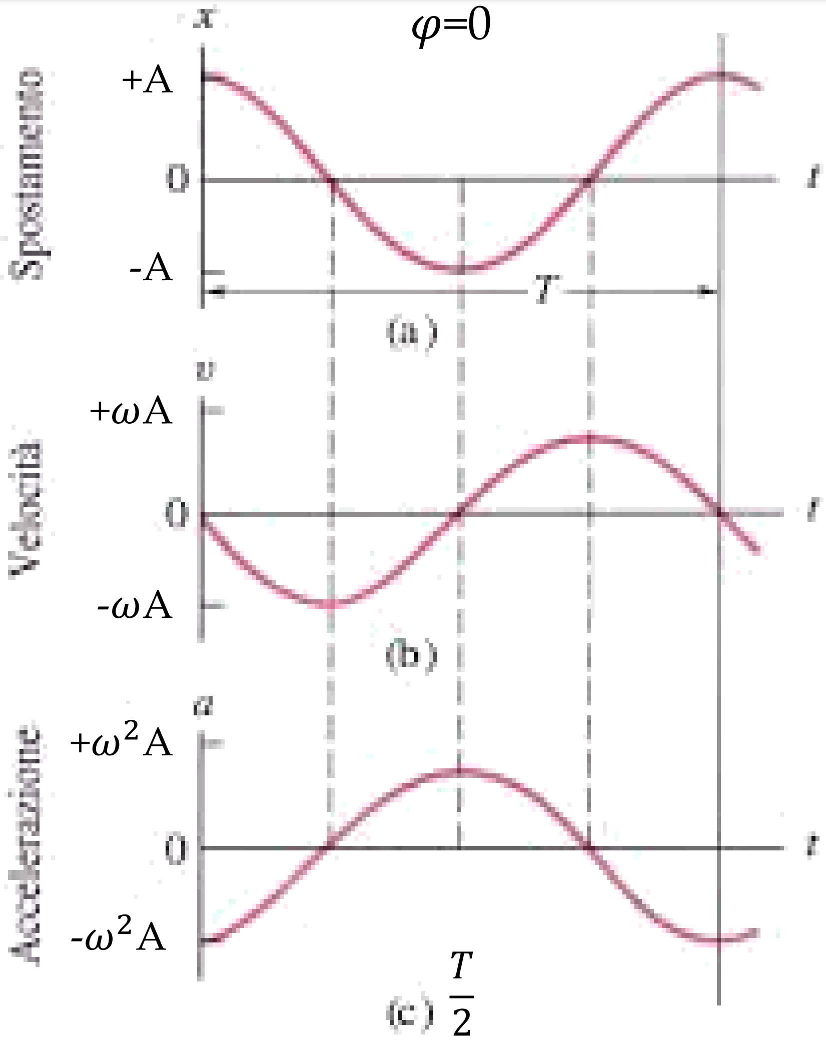
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- Velocità:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

- Accelerazione:

$$\mathrm{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$



Equazione differenziale del moto armonico

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0}$$

Moto armonico semplice

$\boxed{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1}$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t+\varphi) \\ v(t) &= -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{aligned}}$$

Le costanti A e φ determinano le condizioni iniziali:

$\boxed{t=0}$ $\quad x_0 = A\cos\varphi \quad v_0 = -A\omega\sin\varphi \Rightarrow \frac{v_0}{x_0} = -\omega\, tg\,\varphi \Rightarrow tg\,\varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \Rightarrow \varphi = \text{arct}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$

Viceversa, note le condizioni iniziali possiamo ricavare A e φ

$t=0 \quad x_0^2 = A^2\cos^2\varphi \quad v_0^2 = A^2\omega^2\sin^2\varphi$

$$\Rightarrow x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = A^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Moto armonico semplice

Le costanti A e φ determinano le condizioni iniziali:

Viceversa, note le condizioni iniziali possiamo ricavare A e φ

Moto armonico semplice

Le costanti A e φ determinano le condizioni iniziali:

$x(t = 0) = x_0 = \ A\, cos(\varphi)$ v$(t = 0) = v_0 = -A\omega\, sin(\varphi)$

Viceversa, note le condizioni iniziali possiamo ricavare A e φ

$\text{tg}\,\varphi = -\frac{v_0}{\omega\, x_0}$ $A^2 = \ x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$

Moto armonico semplice

Le costanti A e φ determinano le condizioni iniziali:

$x(t=0) = x_0 = A\,cos(\varphi)$ $\qquad$ $\mathrm{v}(t=0) = v_0 = -A\omega\,sin(\varphi)$

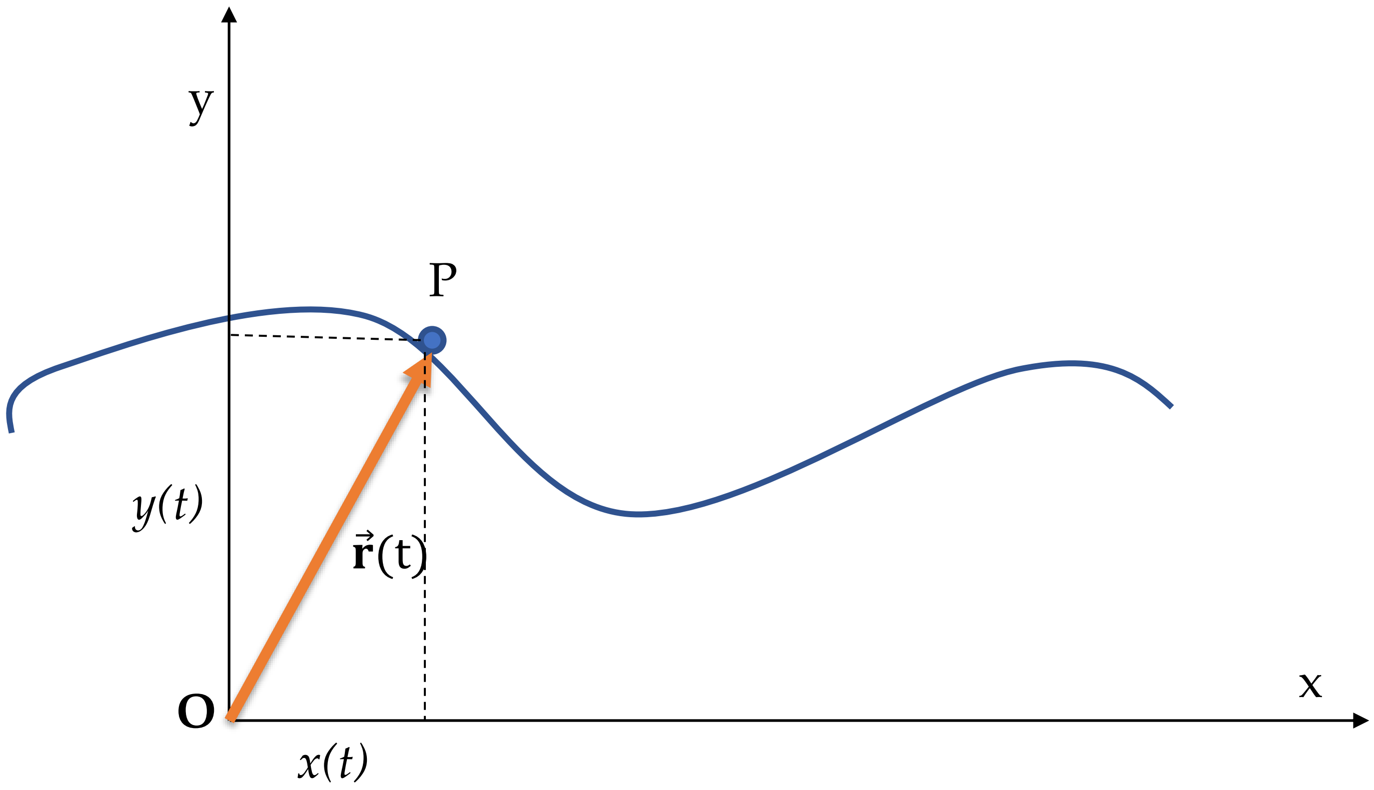
Viceversa, note le condizioni iniziali possiamo ricavare A e φ

$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{v_0}{\omega\,x_0}$ $\qquad$ $A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$

Accelerazione e velocità in funzione della posizione:

$$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx = \frac{1}{2}\omega^2(x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

Moto su traiettoria curvilinea



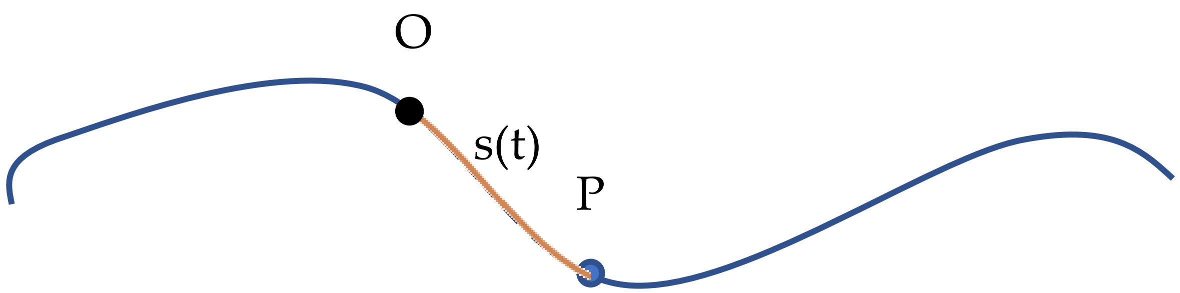
$$\vec{\mathbf{r}}(\mathrm{t}) = x(t)\widehat{\boldsymbol{u}_x} + y(t)\widehat{\boldsymbol{u}_y}$$

Per ciascuna coordinata va risolta l'equazione del moto

Il moto è scomposto nei moti rettilinei proiettati sui due (o tre) assi

Ascissa curvilinea

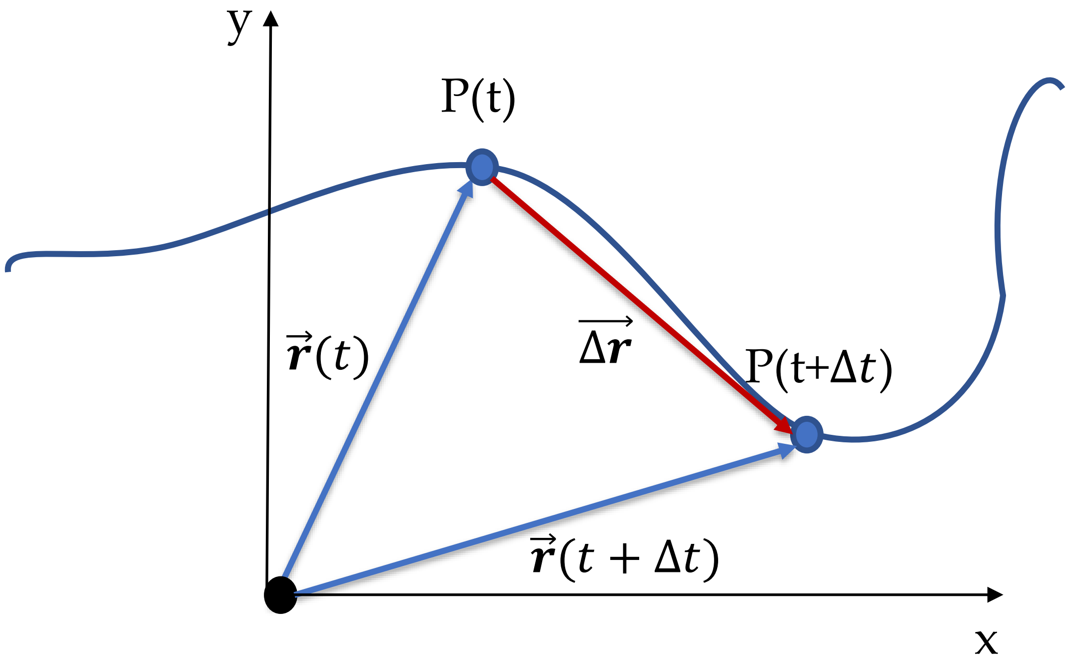
Nota la traiettoria, la posizione del punto nello spazio può essere individuata da una singola coordinata curvilinea *s*, detta **ascissa curvilinea**



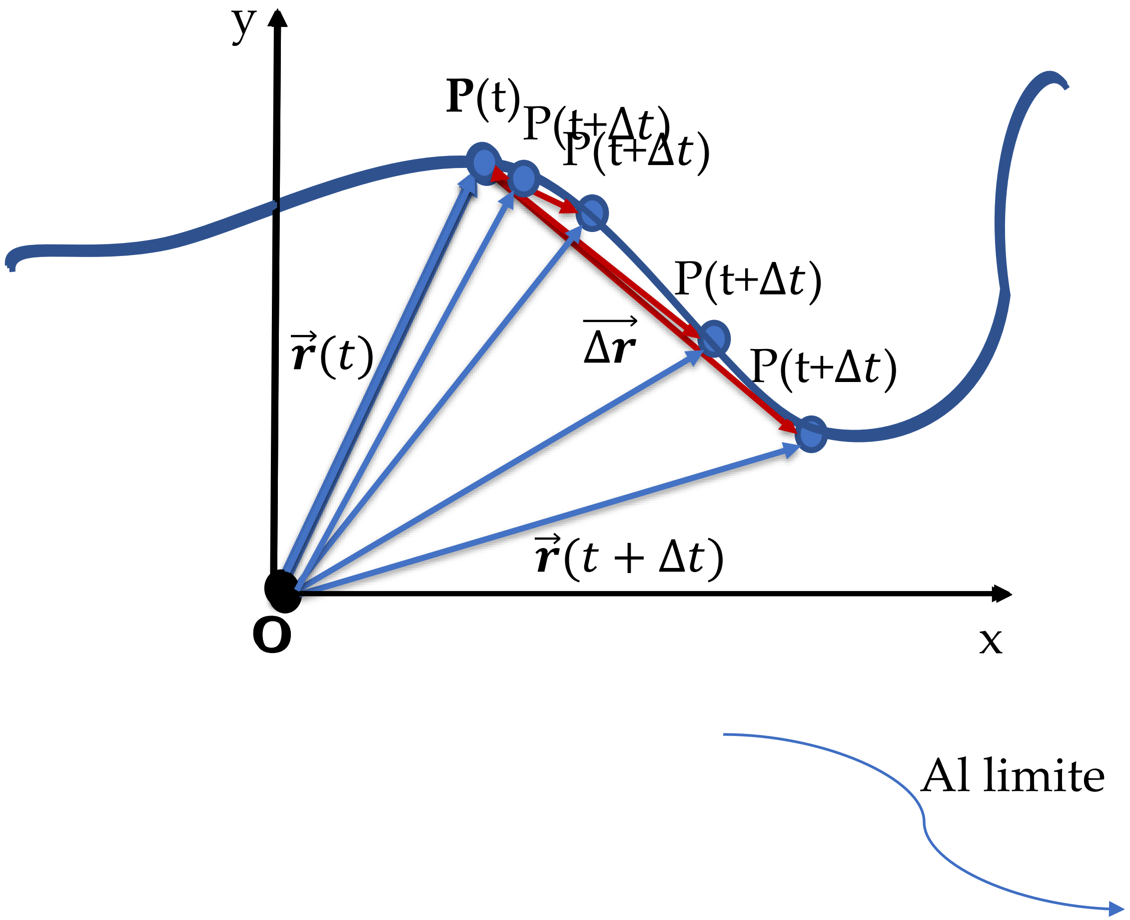
'*s*' esprime la lunghezza del tratto di traiettoria tra un'origine arbitraria **O** e la posizione del punto **P**.

Nota la forma della traiettoria e la s(t), abbiamo una descrizione completa del moto: velocità e accelerazione si ricavano da s(t) e dalla geometria della traiettoria

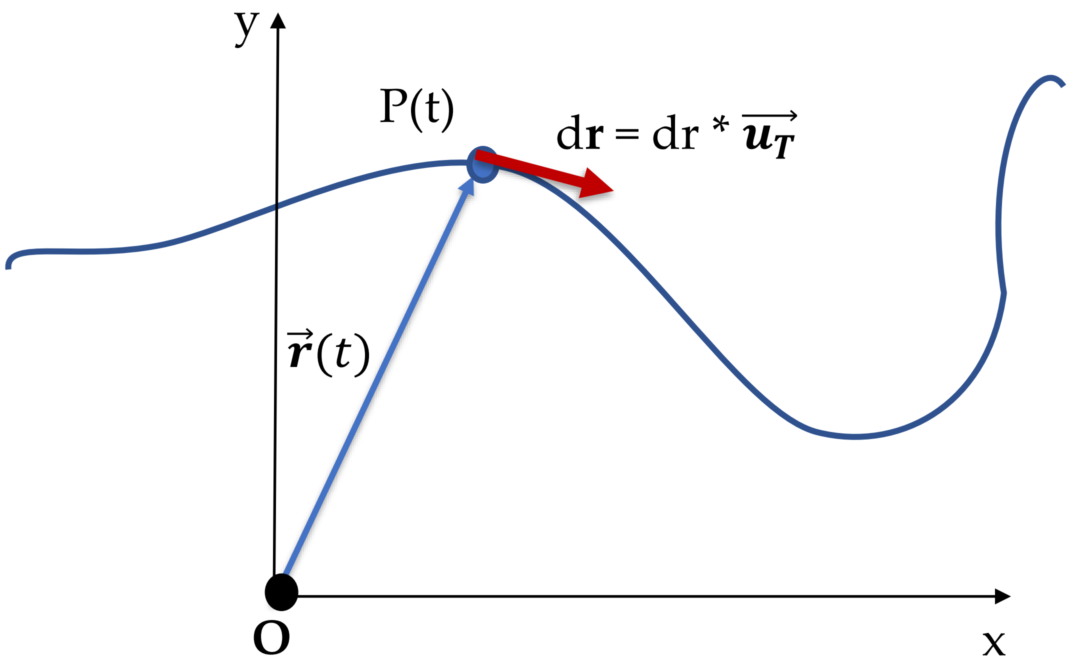
Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea



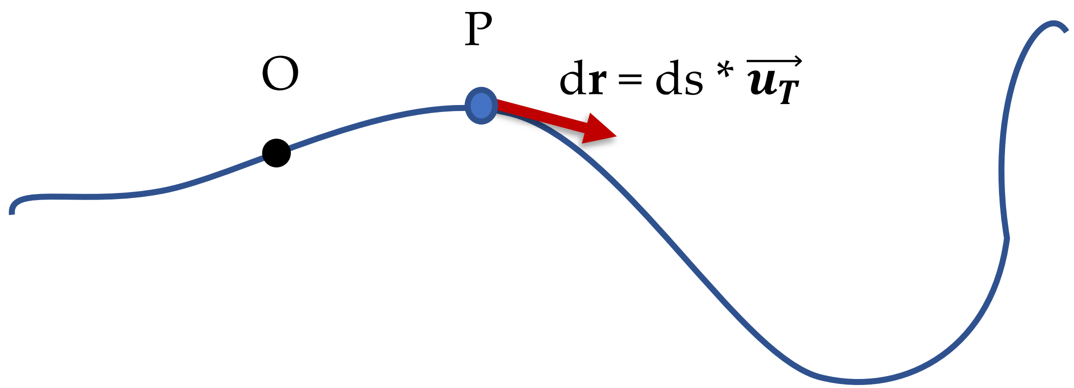
Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea



L'incremento d**r** del raggio vettore è tangente alla traiettoria nel punto P



Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea



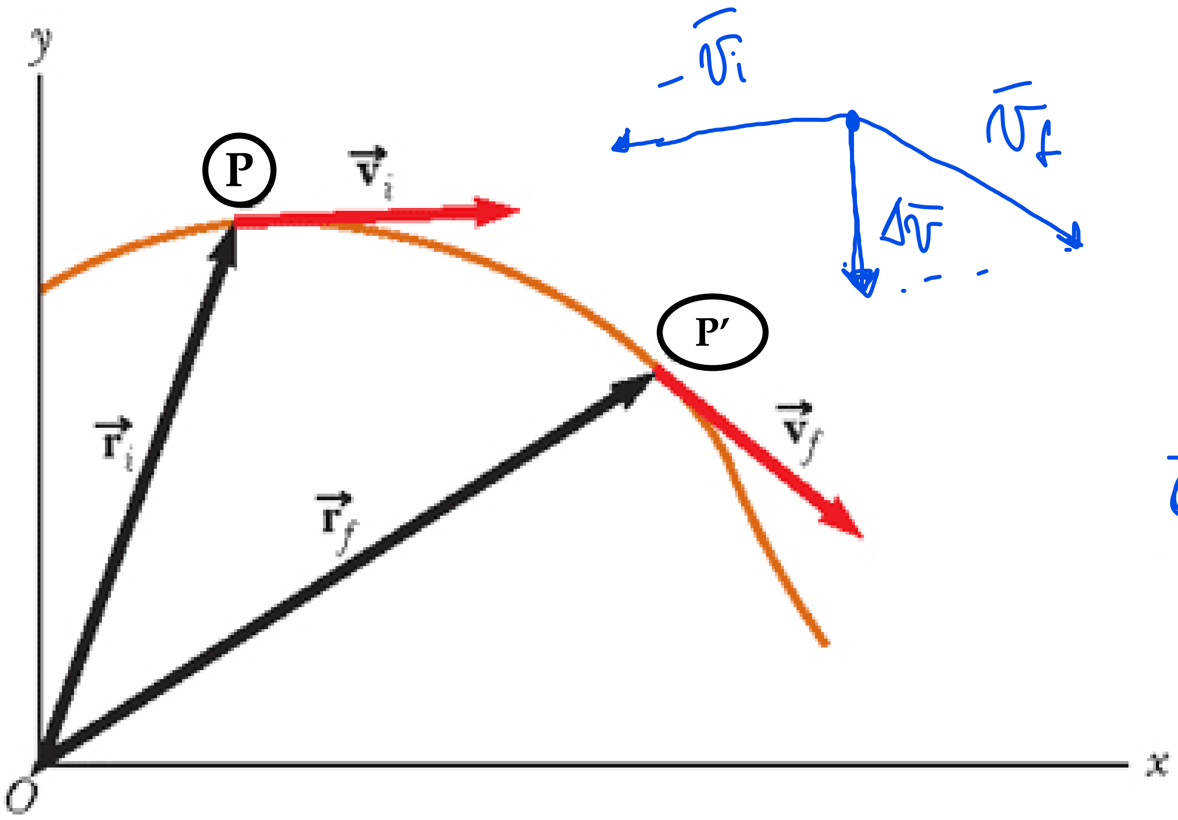
Scomponiamo il moto in una successione di spostamenti infinitesimi d**r**, ciascuno tangente alla traiettoria

→ La direzione istantanea del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto occupato da P nell'istante considerato

Velocità

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_T} = v\overrightarrow{u_T}$$

Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea



Anche se il modulo della velocità è costante, lungo una traiettoria curvilinea la sua **direzione cambia** continuamente

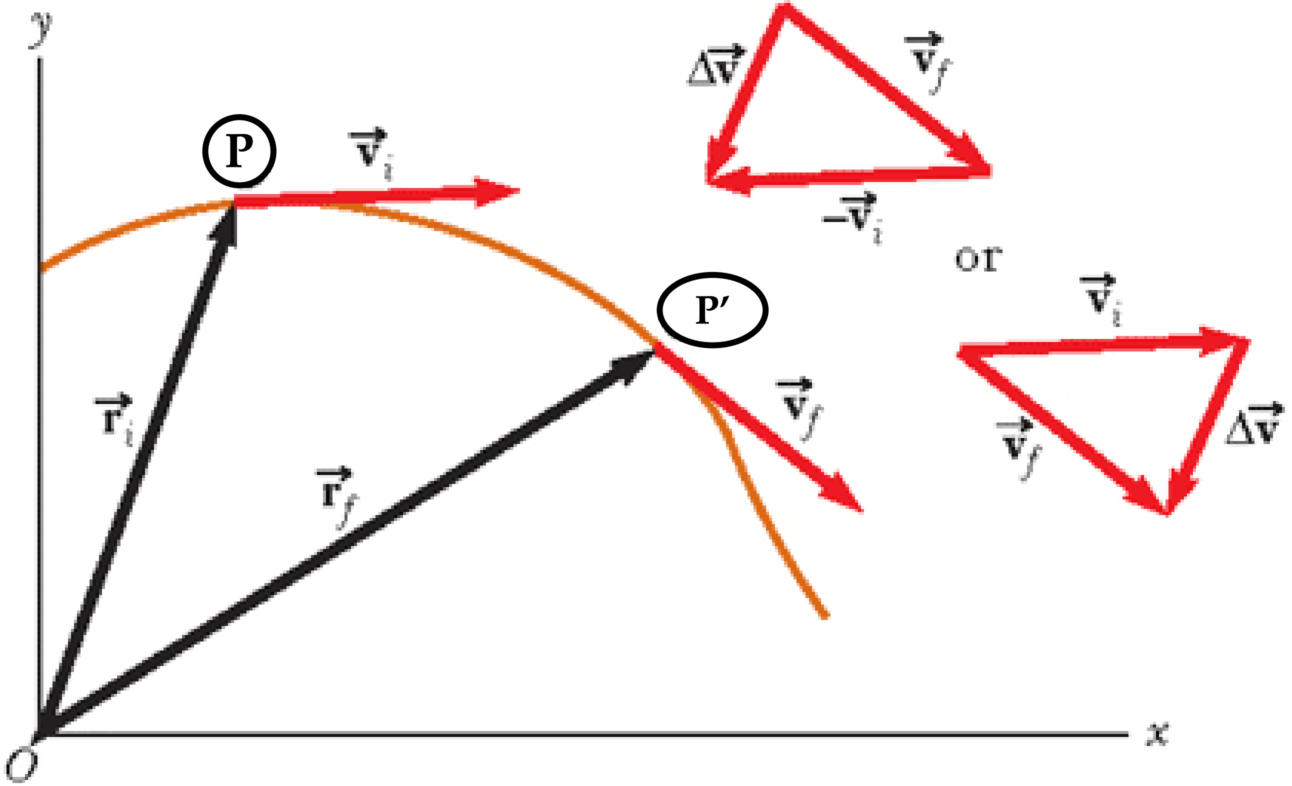
Variazione di velocità → accelerazione

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Che **direzione** ha il vettore accelerazione su una traiettoria curvilinea?

Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea



Anche se il modulo della velocità è costante, lungo una traiettoria curvilinea la sua **direzione cambia** continuamente

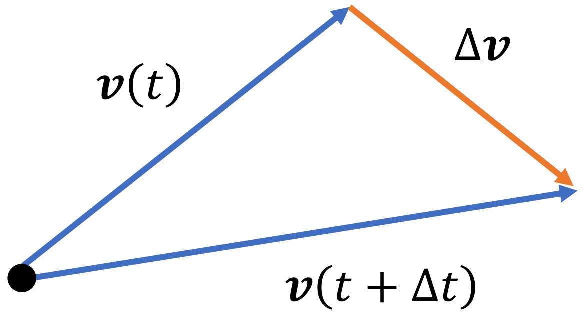
Variazione di velocità → accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Che **direzione** ha il vettore accelerazione su una traiettoria curvilinea?

Derivata di un vettore

- Derivata di un vettore $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$



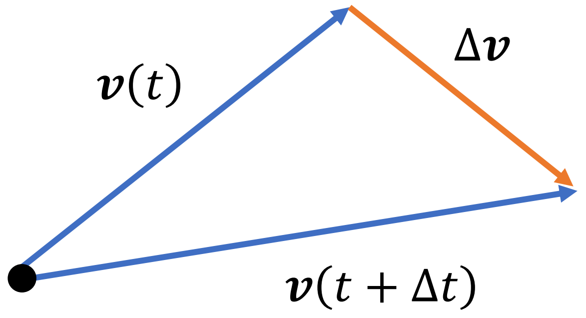
In un sistema di assi cartesiani ortogonali: $\bar{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$

$$\bar{v} = v\,\hat{u}_T$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\,\hat{u}_T\right) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\,\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

Derivata di un vettore

- Derivata di un vettore $$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

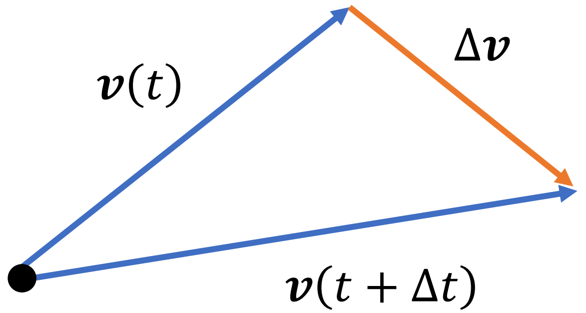


In un sistema di assi cartesiani ortogonali: $$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{dv_z}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$$

Versori fissi, non variabili nel tempo

Derivata di un vettore

- Derivata di un vettore $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$

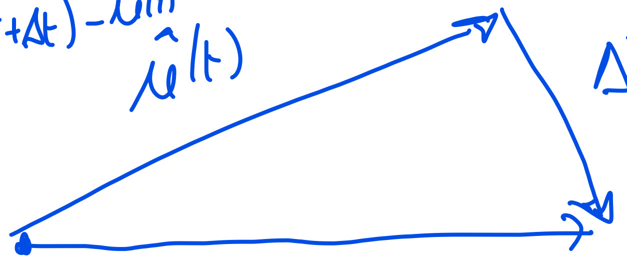


In un sistema di assi cartesiani ortogonali (dove i versori non cambiano nel tempo):

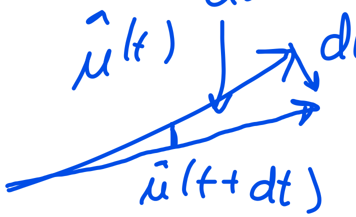
$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_z$$

- Se anche il versore cambia: derivata di un versore ($|\boldsymbol{u}| = 1$)

$\Delta\bar{u} = \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)$



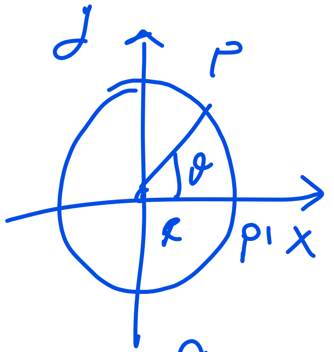
$\lim_{\Delta t \to 0}$



$d\vartheta = \dfrac{|d\bar{u}|}{|\hat{u}(t)|} \Rightarrow$

$|\hat{u}(t)| = 1$

$d\vartheta = du$



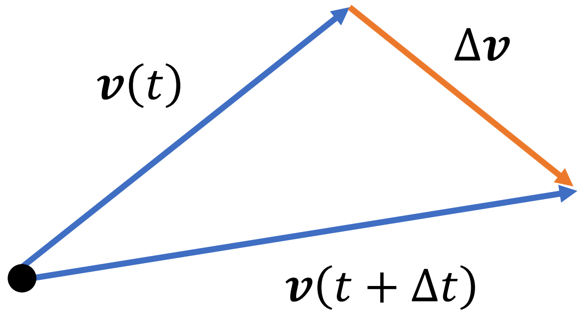
$\vartheta = \dfrac{PP'}{R}$

$\dfrac{d\bar{u}}{dt} = \dfrac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_N$

Derivata di un vettore

- Derivata di un vettore $$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

In un sistema di assi cartesiani ortogonali (dove i versori non cambiano nel tempo): $$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_z$$



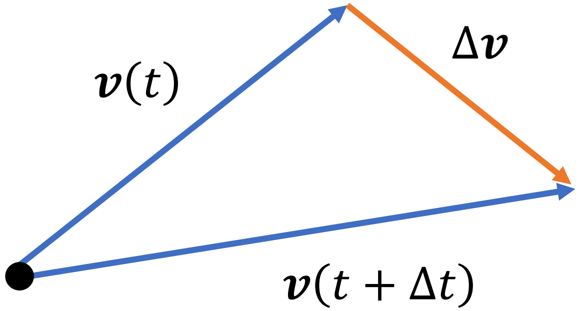
- Se anche il versore cambia: derivata di un versore ($|\boldsymbol{u}| = 1$)

Derivata di un vettore

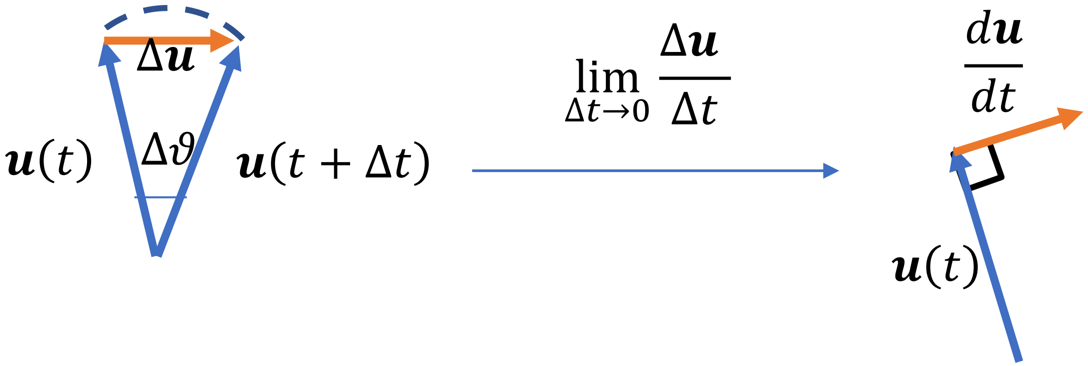
- Derivata di un vettore $$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

In un sistema di assi cartesiani ortogonali (dove i versori non cambiano nel tempo):

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{dv_z}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$$



- Se anche il versore cambia: derivata di un versore ($|\boldsymbol{u}| = 1$)



$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{N}}$$

Versore normale al versore **u**(t) di partenza

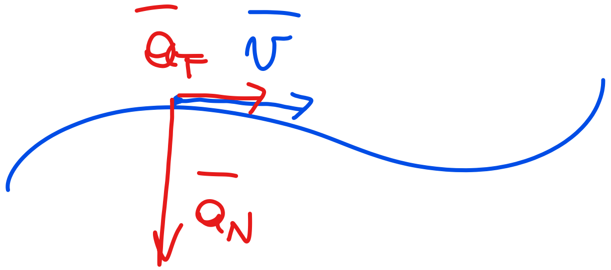
Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea

Accelerazione

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\left(v\hat{u}_T\right) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

parallela a v

perpendicolare e v



Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea

Accelerazione

$$d\vartheta = \frac{ds}{R}$$

$$ds = d\vartheta \cdot R$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \cdot v$$

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{R}}$$

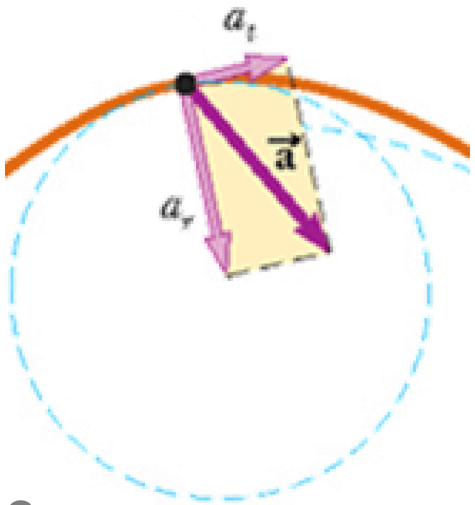
Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea

Accelerazione: regole di derivazione dei vettori

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{u_T}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u_T} + v\frac{d\boldsymbol{u_T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u_T} + v\frac{d\vartheta}{dt}\boldsymbol{u_N}$$

$$\frac{v^2}{R}$$



Componente parallela alla velocità
(tangente alla traiettoria)
Variazione in modulo della velocità

Componente ortogonale alla velocità
(diretta lungo il raggio del *cerchio osculatore* alla curva)
Variazione in direzione della velocità

Accelerazione tangenziale e centripeta

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u_T} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{u_N}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_T} + \boldsymbol{a_N}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

Moto circolare uniforme

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$

$x(t) = x_0 + vt$

Moto di un punto materiale che avviene lungo una circonferenza con **velocità costante**

Si può descrivere usando **l'ascissa curvilinea** s(t)

oppure **l'angolo** $\theta(t) = \dfrac{s(t)}{R}$

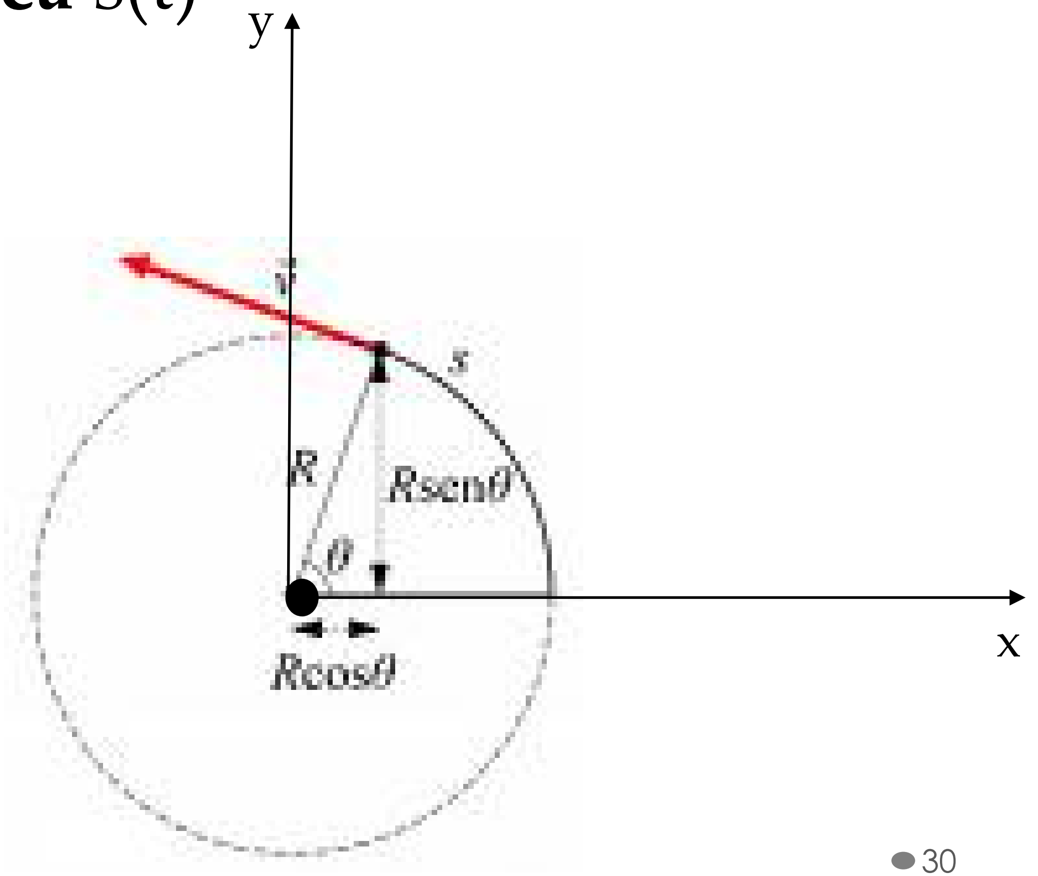
LEGGE ORARIA:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \underbrace{\boxed{\frac{d\vartheta}{dt}}}_{\omega} t$$

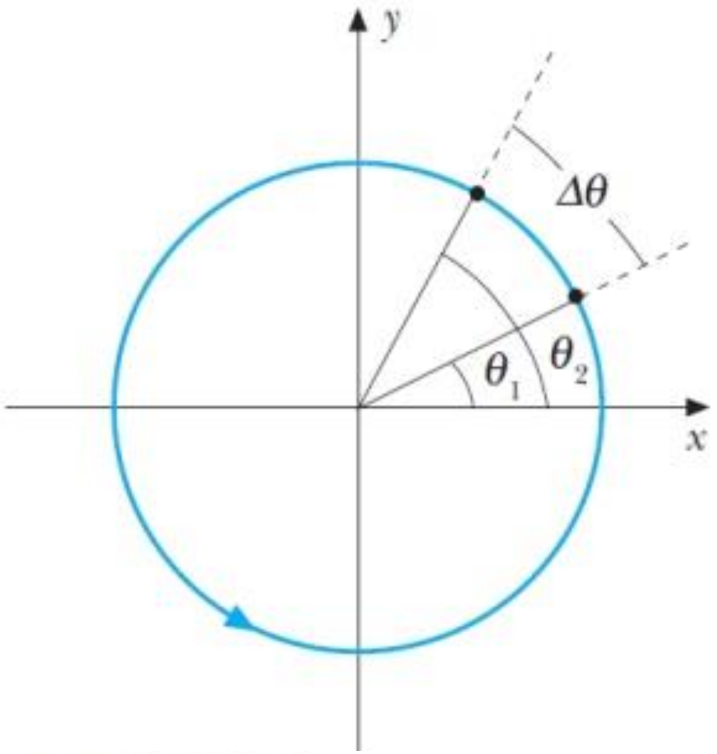
$$\begin{cases} x(t) = R \cdot \cos\theta\,(t) \\ y(t) = R \cdot sen\theta(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a} = \cancel{\frac{dv}{dt}}\boldsymbol{u_T} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{u_N}$$

La velocità è costante in modulo



Velocità e accelerazione angolari

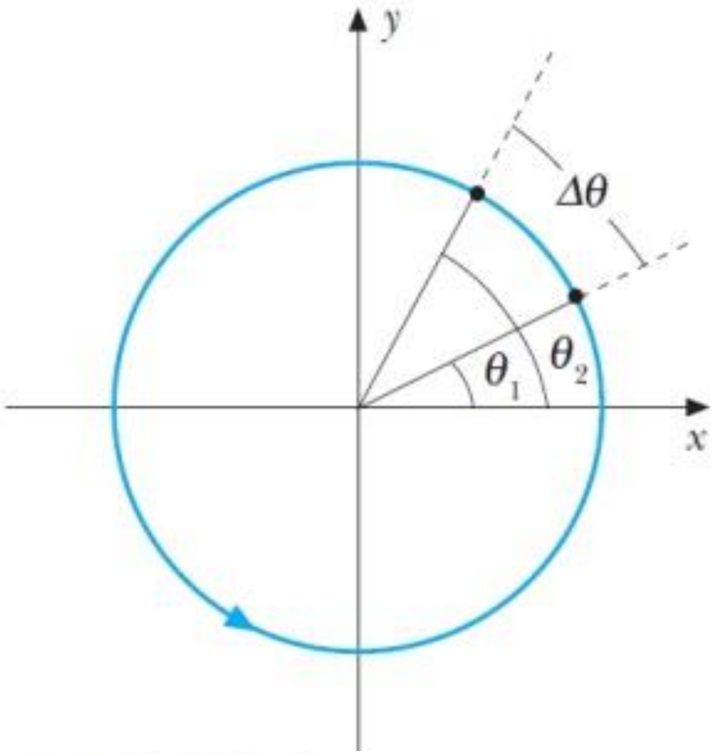


Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodina
EdiSES Edizioni

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \xrightarrow{\lim_{\Delta t \to 0}} \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

Velocità e accelerazione angolari



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodina
EdiSES Edizioni

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \xrightarrow{\lim_{\Delta t \to 0}} \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Moto accelerato con accelerazione costante in modulo (centripeta) perché la **direzione** della velocità cambia sempre, punto per punto

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Moto circolare uniforme

Si definiscono:

1. Periodo T: tempo impiegato dal corpo a percorrere un'intera circonferenza (*s*).

2. Frequenza f: è il numero di giri che il corpo percorre in un s.

Si misura in **hertz** (simbolo Hz): $1\ Hz = 1\ s^{-1}$.

La frequenza di un corpo è pari a 1 Hz quando il corpo percorre 1 giro al secondo.

T e **f** sono due grandezze dipendenti:

Se il corpo impiega T = 3 s a percorrere una circonferenza vuol dire che percorre 1/3 di circonferenza al secondo, se impiega T = 4 s a percorrere una circonferenza vuol dire che percorre 1/4 di circonferenza al secondo ecc.

$$\mathbf{f = 1 / T}$$

Moto circolare uniforme

3. **Velocità tangenziale**: spazio percorso dal corpo in un certo tempo (*m/s*)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$$

Dato che f = 1/ T, si può anche definire come

$$v = 2\pi \cdot R \cdot f$$

4. **Velocità angolare**: angolo percorso dal corpo in un certo tempo (*rad/s*)

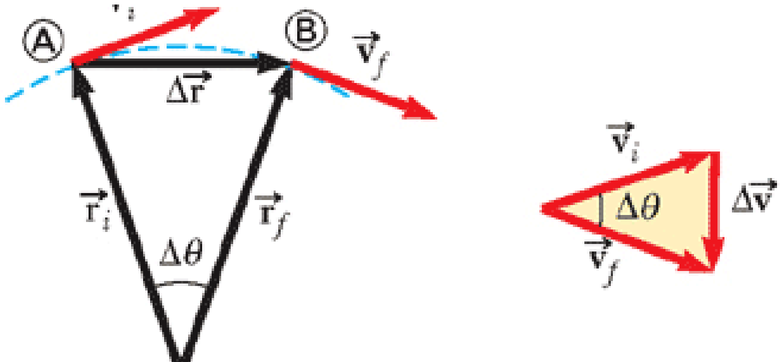
$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

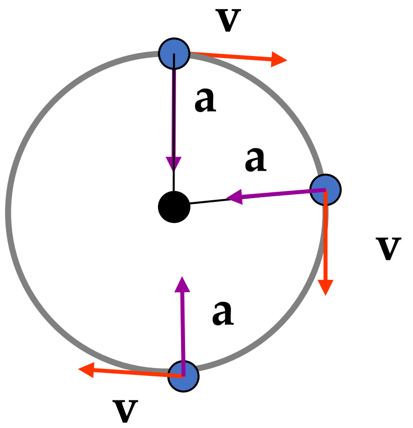
Pertanto la relazione matematica che intercorre tra velocità tangenziale e velocità angolare è $v = \omega R$.

Moto circolare uniforme

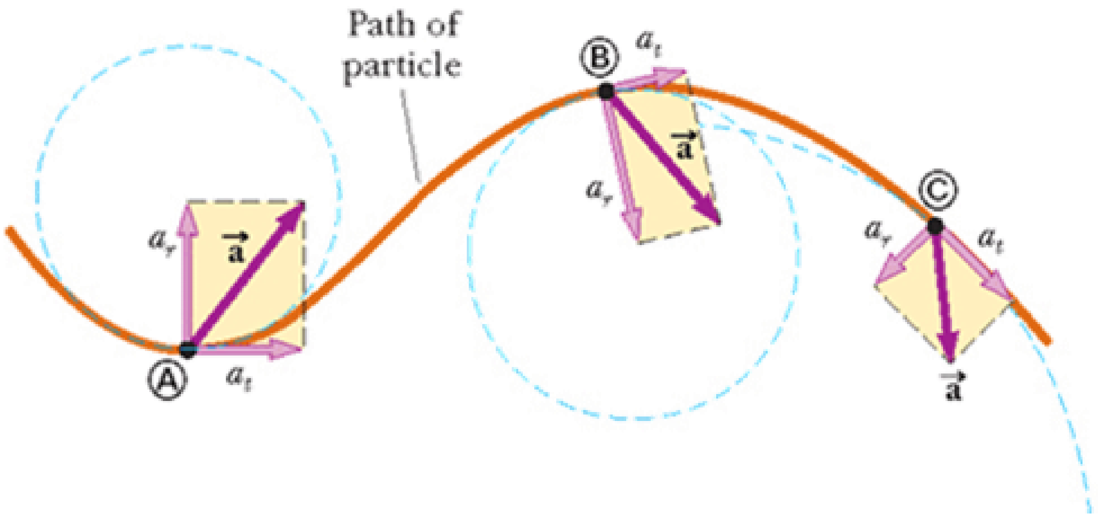
- Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme se si muove su una circonferenza (o su un arco di circonferenza) con velocità di modulo costante.
- La velocità scalare (o modulo) non varia, varia la sua direzione!

- Al procedere del moto i vettori v e a restano costanti in modulo ma variano le loro direzioni!





Accelerazione tangenziale e radiale



$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\alpha_T = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

In questo caso varia anche il modulo della velocità e il vettore accelerazione presenta una componente radiale (dovuta alla variazione della direzione) e una tangenziale (dovuta alla variazione del modulo) rispetto alla traiettoria

Leggi orarie

- Moto circolare uniforme

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$$
$$s(t) = s_0 + vt$$

con accelerazione centripeta $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

Leggi orarie

- Moto circolare non uniforme

Leggi orarie

- Moto circolare uniformemente accelerato

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha_T t^2$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha_T t$$

dove $\alpha_T = \frac{a_T}{R} \rightarrow$ accelerazione angolare

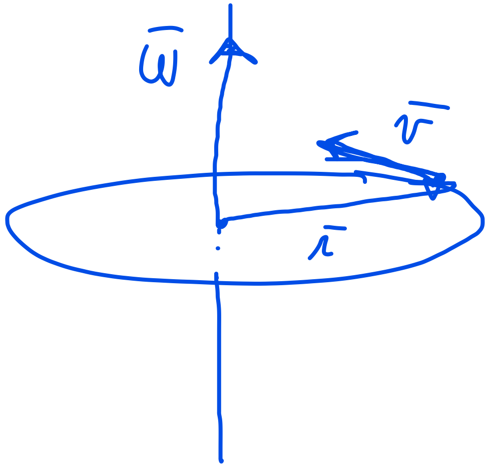
L'accelerazione totale è sempre data dalla somma $a = a_T + a_N$

Notazione vettoriale nel moto circolare

Velocità angolare come vettore

- Di modulo $|\vec{\boldsymbol{\omega}}| = \frac{d\theta}{dt}$
- Ortogonale al piano del moto
- Verso tale che dall'estremo di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ il moto appaia antiorario

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}$$



$$\bar a = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar\omega \times \bar r) = \underbrace{\overset{\bar\alpha}{\frac{d\bar\omega}{dt}} \times \bar r}_{\hat u_T} + \underbrace{\bar\omega \times \overset{\bar v}{\frac{d\bar r}{dt}}}_{\hat u_N}$$

Notazione vettoriale nel moto circolare

Velocità angolare come vettore

- Di modulo $|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$
- Ortogonale al piano del moto
- Verso tale che dall'estremo di $\vec{\omega}$ il moto appaia antiorario

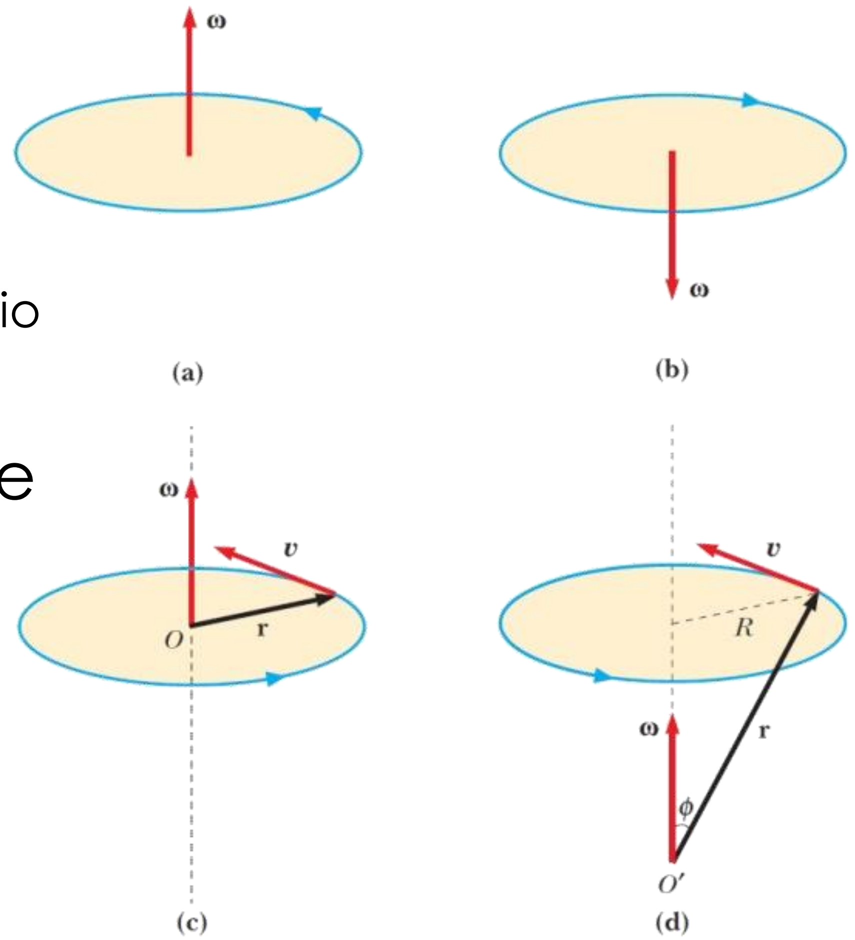
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Dato il vettore $\vec{\omega}$ si individua l'asse di rotazione

Accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_T} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_N}$$



EdiSES
Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Moto circolare e moto armonico

$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$

Proiettiamo il moto circolare uniforme sugli assi cartesiani:

$\theta(t) = \vartheta_0 + \omega t$

$$x(t) = R \cdot \cos\theta\,(t) = R \cdot \cos(\theta_0 + \omega t)$$ $\varphi = 0$

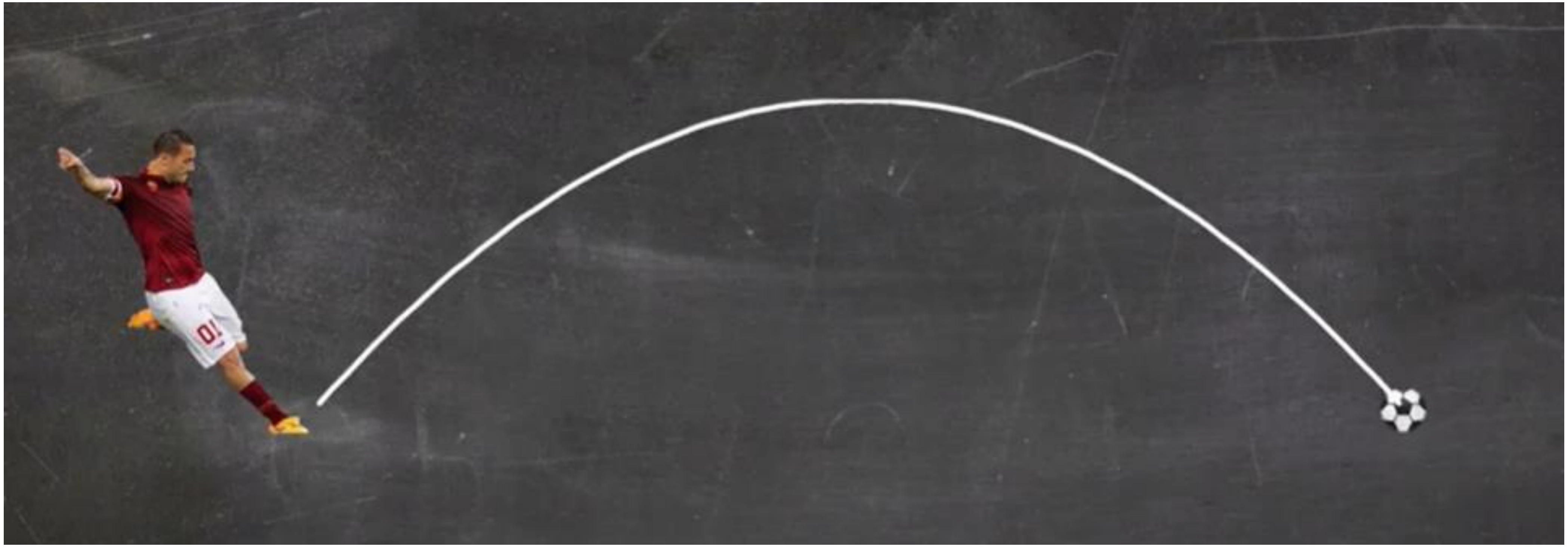
$$y(t) = R \cdot sin\theta(t) = R \cdot \sin(\theta_0 + \omega t)$$

$\varphi = \pi/2$

Il moto circolare può essere scomposto in due moti armonici di eguale ampiezza, sfasati tra loro di $\frac{\pi}{2}$

http://bachecaesperimenti.blogspot.com/2016/07/il-moto-armonico.html

Moto parabolico

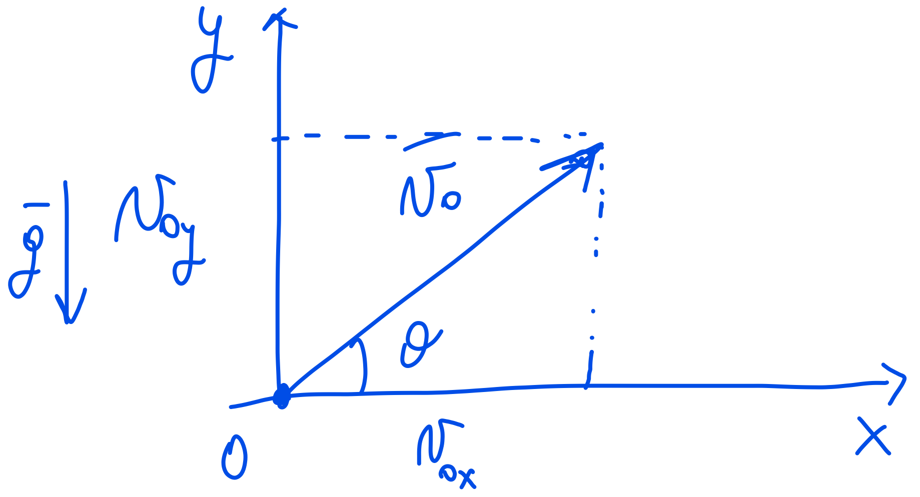


Moto parabolico

Moto bidimensionale

$$v_{0x} = v_0 \cos\vartheta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\vartheta$$

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 - \bar{g}t$$
$$= \bar{v}_0 - g t \hat{u}_y$$



$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\vartheta \\ v_y = v_0 \sin\vartheta - g t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos\vartheta \, t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin\vartheta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Moto parabolico

Moto bidimensionale

- Moto rettilineo uniforme

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t \quad \text{con } v_{x_0} \; costante$$

- Moto verticale uniformemente accelerato

$$y(t) = y_0 + v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{con g } \textit{accelerazione di gravità (costante)}$$

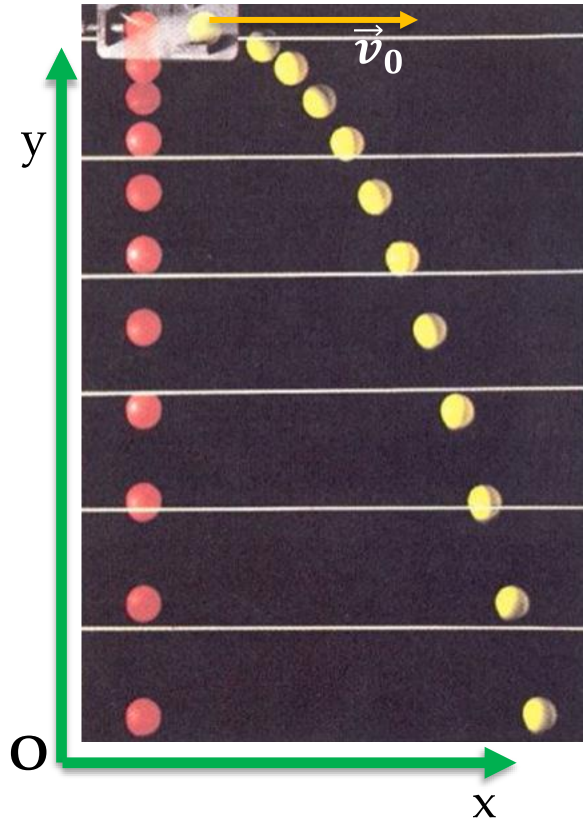
→Combinando i due moti in un piano otteniamo un moto parabolico!

Moto parabolico

La pallina rossa è lasciata cadere da ferma ($\vec{v}_0$ =0) mentre la pallina gialla cade con una velocità iniziale diretta lungo l'asse x: $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x$

Il moto lungo l'asse verticale delle due palline è identico (sono descritte dalla stessa legge del moto)

Il moto lungo l'asse orizzontale è diverso per le due palline e fa sì che la pallina gialla cada in un punto diverso dall'ascissa iniziale

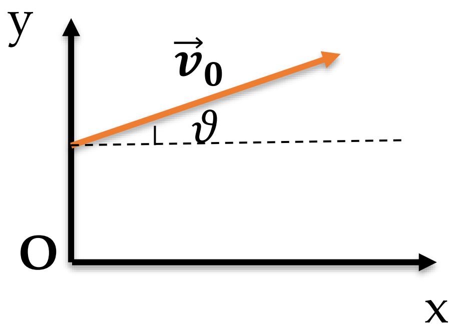


- **Il moto lungo i due assi è <u>indipendente</u>**

Moto parabolico

Lancio un proiettile con velocità iniziale $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} = v_{0x}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + v_{0y}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$

Velocità iniziale in componenti:



- Il moto è caratterizzato da **accelerazione costante** $\vec{\boldsymbol{a}} = -g\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$
- Condizioni iniziali: $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}}$

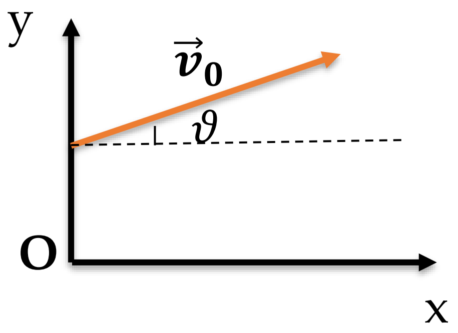
Equazione del moto <u>in forma vettoriale</u>:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} - gt\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$$

Moto parabolico

- Moto orizzontale:

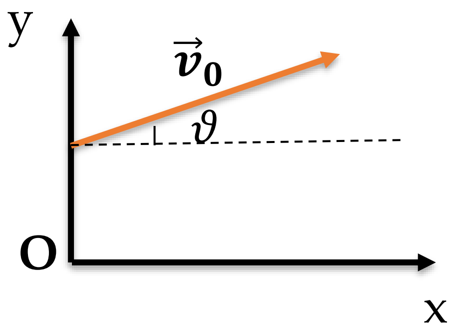
Equazione del moto <u>in forma vettoriale</u>:
$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} - gt\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$$



Moto parabolico

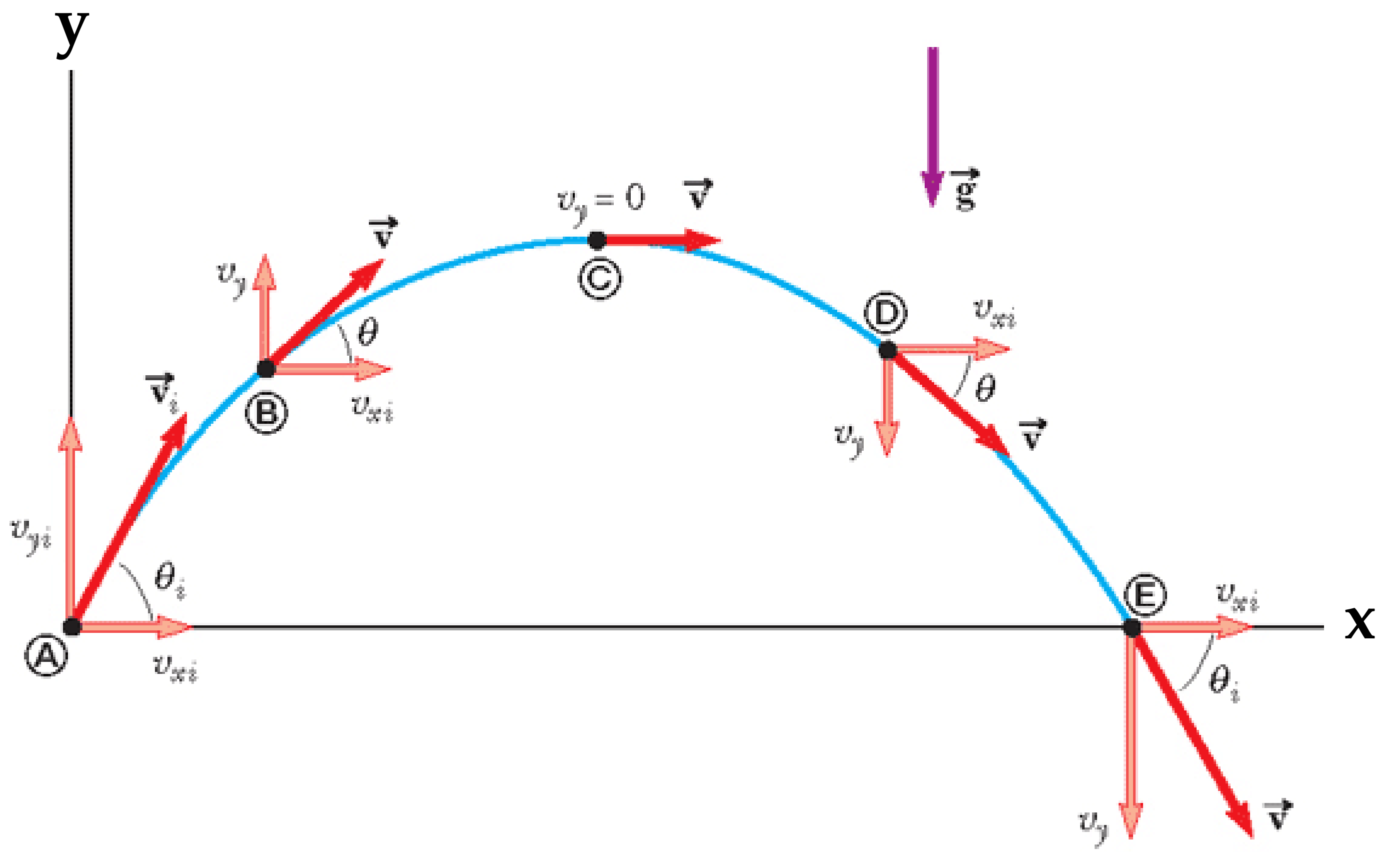
- Moto verticale:

Equazione del moto <u>in forma vettoriale</u>:
$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} - gt\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$

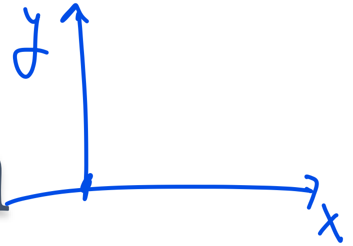


Moto del proiettile

Moto di un proiettile in due dimensioni con $y_0 = 0$



$x(t)$ e $y(t)$ $\qquad$ $y(x)$



Moto parabolico - traiettoria

Equazione della traiettoria: eliminiamo il parametro temporale dalle equazioni del moto

$x_0 = 0$

$$x(t) = \cancel{x_0} + v_0 \cos\vartheta \, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\vartheta}$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin\vartheta \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= y_0 + \frac{\cancel{v_0} \sin\vartheta}{\cancel{v_0} \cos\vartheta} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\vartheta} = \underbrace{y_0}_{c} + \underbrace{\mathrm{tg}\,\vartheta}_{b}\, x \underbrace{- \frac{1}{2} g \frac{1}{v_0^2 \cos^2\vartheta}}_{a} x^2$$

$y(t) = 0$

$$a x^2 + b x + c = 0$$

Moto parabolico - traiettoria

Equazione della traiettoria: eliminiamo il parametro temporale dalle equazioni del moto

$$y(x) = y_0 + \tan\vartheta_0\, x - \frac{g}{2v_0^2\,(\cos\vartheta_0)^2}\,x^2$$

Moto parabolico - gittata

$$\boxed{y(x) = y_0 + \tan\vartheta_0 \, x - \frac{g}{2v_0^2 \, (\cos\vartheta_0)^2} x^2}$$

Si ottiene:

- Ponendo y=0 nell'equazione della traiettoria

Moto parabolico - gittata

Dall'equazione della traiettoria:

$$x_G = \frac{\tan\vartheta_0 \pm \sqrt{\tan^2\vartheta_0 + \dfrac{2gy_0}{v_0^2\,(\cos\vartheta_0)^2}}}{\dfrac{g}{v_0^2\,(\cos\vartheta_0)^2}}$$

Moto parabolico - gittata

Dall'equazione della traiettoria:

$$x_G = \frac{\tan\vartheta_0 \pm \sqrt{\tan^2\vartheta_0 + \frac{2gy_0}{v_0^2(\cos\vartheta_0)^2}}}{\frac{g}{v_0^2(\cos\vartheta_0)^2}}$$

Per $y_0 = 0$:

$$x_G = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\vartheta_0$$

$\downarrow$

Gittata massima per $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{Quando } y_0 = 0}$

Moto parabolico - gittata

Si ottiene:

- Ponendo y=0 nell'equazione della traiettoria
- Ricavando il tempo di volo dall'equazione del moto verticale (uniformemente accelerato) e sostituendolo nell'equazione del moto orizzontale (rettilineo uniforme) – equazione più complessa ma porta allo stesso risultato

Moto parabolico – altezza massima

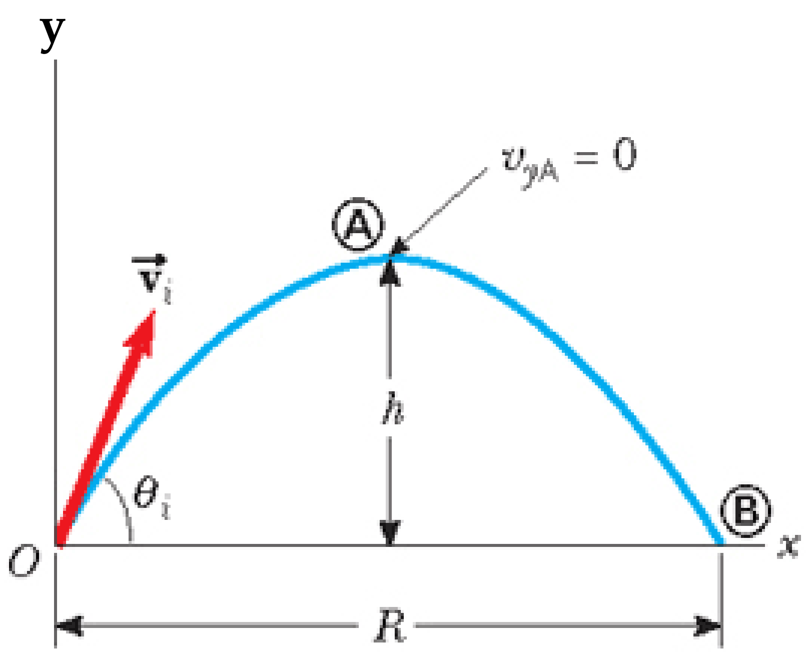
- Il moto lungo x è rettilineo uniforme, quindi, **nel caso in cui** $y_0 = 0$, nota la gittata (percorso totale), l'altezza massima si troverà a metà percorso:
  $x_M = \frac{x_G}{2}$

Moto parabolico – altezza massima

- Il moto lungo y è uniformemente accelerato. L'altezza massima è quella per cui la velocità si annulla. Dall'equazione della velocità v_y ricavo t_M e lo sostituisco nella y(t)

Moto parabolico – altezza massima

- Il moto lungo y è uniformemente accelerato. L'altezza massima è quella per cui la velocità si annulla. Dall'equazione della velocità v_y ricavo t_M e lo sostituisco nella y(t)

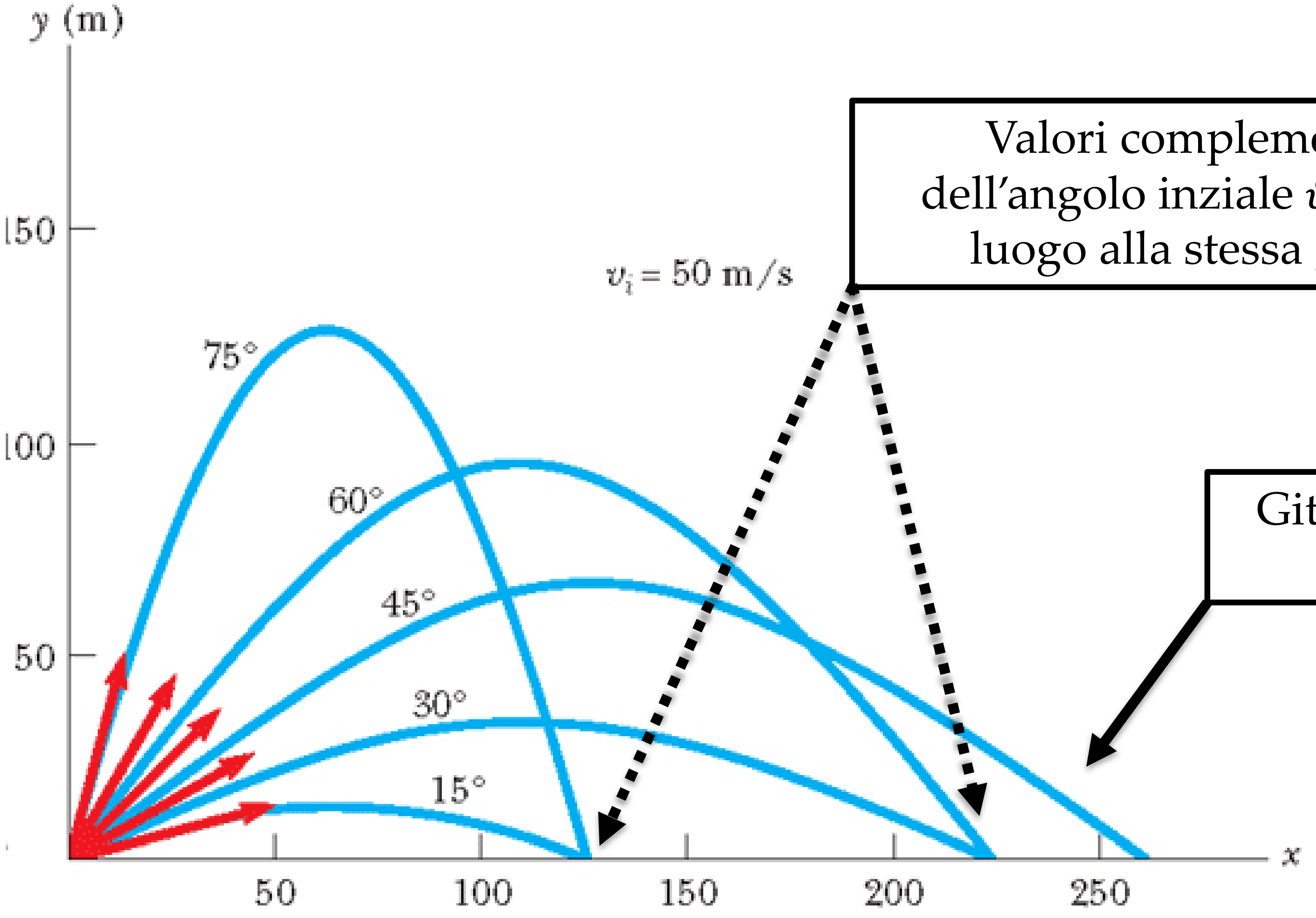


Moto parabolico – altezza massima

Ricaviamo il tempo necessario ad azzerare la componente verticale della velocità e lo sostituiamo nella legge oraria y(t):

$$y(t_M) = \; y_0 + \frac{v_0^2 sin^2\vartheta_0}{2g}$$

Gittata al variare dell'angolo dell'angolo di lancio (direzione)



Valori complementari dell'angolo inziale ϑ_0 danno luogo alla stessa gittata

Gittata massima per $\vartheta_0 = 45°$

Esercizio

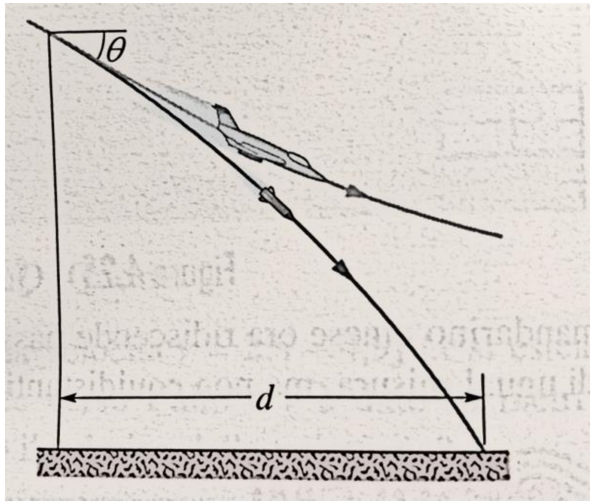
Il signore degli anelli

Legolas si trova sulle mura del Fosso di Helm, ad una altezza di 32 m. Vuole colpire un Uruk-Hai alto 2 m e distante 100 m. Calcolare la velocità della freccia necessaria per l'impresa considerando che l'angolo di tiro è di 45°.

Esercizio

Un aeroplano, volando alla velocità di 290 km/h con un angolo θ = - 30°, sgancia un falso bersaglio radar. La distanza orizzontale fra il punto di rilascio e il punto in cui il bersaglio colpisce il terreno è di 700m

a) Per quanto tempo è rimasto in aria il falso bersaglio?
b) A che quota si trovava l'aereo al momento dello sgancio?

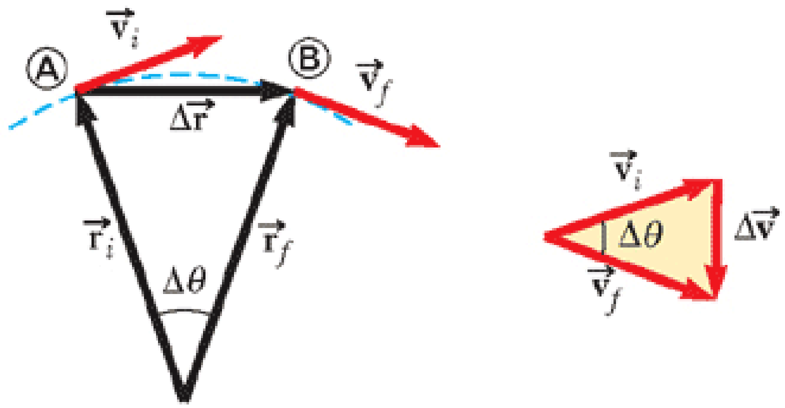


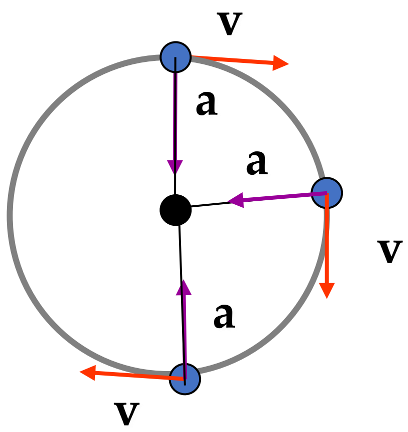
- https://www.geogebra.org/m/un72Kmr3

Moto circolare uniforme

Punto materiale che si muove su una traiettoria circolare a **velocità di modulo costante**.

La velocità cambia in direzione → accelerazione





Vettore accelerazione diretto verso il centro della circonferenza → **accelerazione centripeta di modulo** $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

con R raggio della circonferenza e v velocità scalare della particella

Nel moto circolare uniforme, il **vettore accelerazione centripeta è di modulo costante e sempre perpendicolare al vettore velocità** (che è tangente alla traiettoria) → **direzione radiale**

Moto circolare uniforme

- **Periodo**: la particella percorre una circonferenza con velocità scalare costante nel tempo $T = \frac{2\pi R}{v}$
- **Velocità angolare**: angolo spazzato dalla particella in un periodo $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Relazione tra velocità *lineare* e velocità angolare

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi R}{v}} = \frac{v}{R}$$

$$v = \omega R$$

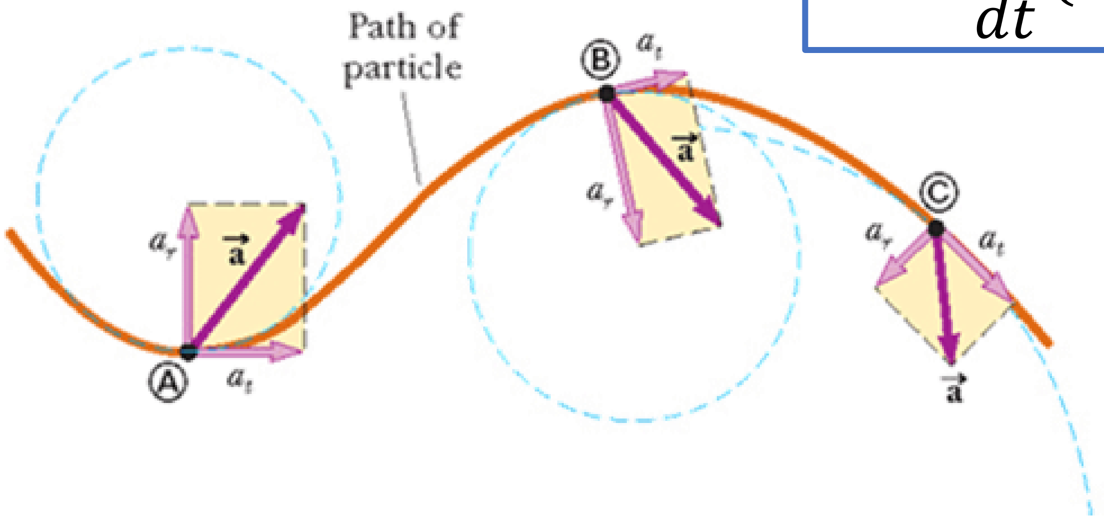
Esempio: accelerazione centripeta della Terra

Qual è l'accelerazione centripeta della Terra dovuta al suo moto orbitale intorno al Sole?

Moto su traiettoria curvilinea

Nel caso in cui **varia anche il modulo della velocità**, il vettore accelerazione presenta una componente radiale (dovuta alla variazione della direzione) e una tangenziale (dovuta alla variazione del modulo) rispetto alla traiettoria

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{u_T}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u_T} + v\frac{d\boldsymbol{u_T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u_T} + v\frac{d\vartheta}{dt}\boldsymbol{u_N}}$$



$$\boxed{[a] = \frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}}$$

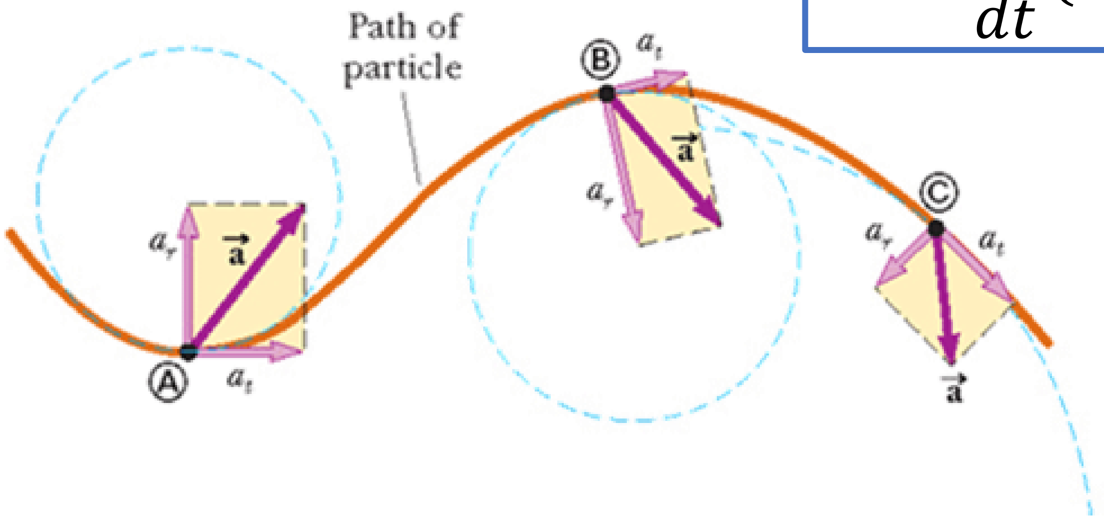
$$\boxed{a_T}$$

$$\boxed{a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$

Moto su traiettoria curvilinea

Nel caso in cui **varia anche il modulo della velocità**, il vettore accelerazione presenta una componente radiale (dovuta alla variazione della direzione) e una tangenziale (dovuta alla variazione del modulo) rispetto alla traiettoria

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{u_T}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u_T} + v\frac{d\boldsymbol{u_T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u_T} + v\frac{d\vartheta}{dt}\boldsymbol{u_N}$$



$$[a] = \frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}$$

$$a_T$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Accelerazione angolare

$$\alpha_T = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

$$[\alpha_T] = \frac{rad}{s^2} = s^{-2}$$

Leggi orarie del moto curvilineo

- Moto circolare uniforme

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$$
$$s(t) = s_0 + vt$$

con accelerazione centripeta $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

- Moto curvilineo uniformemente accelerato

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha_T t^2$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha_T t$$

dove $\alpha_T = \frac{a_T}{R}$ → accelerazione angolare

L'accelerazione totale è sempre data dalla somma $a = a_T + a_N$

Notazione vettoriale nel moto circolare

Velocità angolare come vettore

- Di modulo $|\vec{\boldsymbol{\omega}}| = \frac{d\theta}{dt}$
- Ortogonale al piano del moto
- Verso tale che dall'estremo di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ il moto appaia antiorario

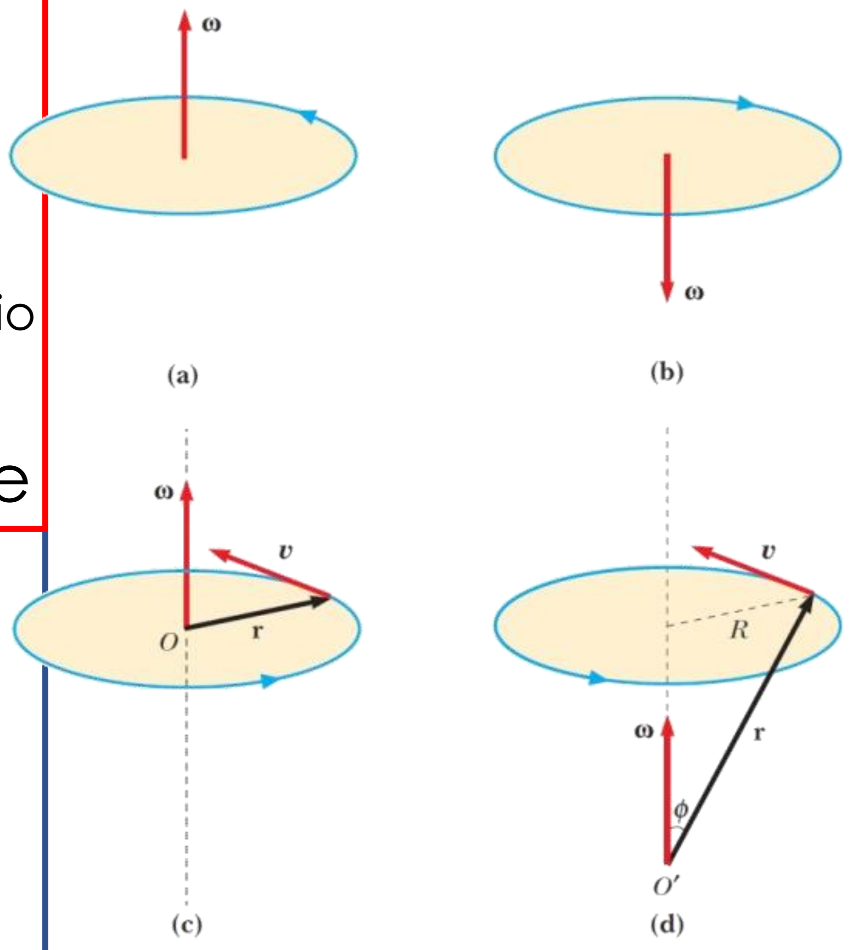
$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$$

Dato il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si individua l'asse di rotazione

Accelerazione:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\boldsymbol{r}}}_{\vec{\boldsymbol{a}}_T} + \underbrace{\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}}_{\vec{\boldsymbol{a}}_N}$$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Esercizio

Un astronauta che orbita intorno alla Terra si appresta ad attraccare ad un satellite. Il satellite si muove secondo un'orbita circolare a 600 km dalla superficie della Terra, e a questa distanza l'accelerazione di gravità è $8{,}21 m/s^2$. Assumere il raggio della Terra pari a 6400 km. Determinare:

- La velocità del satellite
- Il tempo richiesto per completare un giro intorno alla Terra (Periodo del satellite)