FUNZIONI

Si dice che f é

- Strettamente crescente in A se $f(x) > f(y)$
- Non decrescente in A se $f(x) \geq f(y)$
- Strettamente decrescente in A se $f(x) < f(y)$
- Non crescente in A se $f(x) \leq f(y)$

Proposizione :

Se $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ é strettamente monotona, allora é iniettiva ed esiste f^{-1}

INIETTIVA $f(a_1) \neq f(a_2)$

SURIETTIVA $f(a) = b$

BIETTIVA

Proposizione disuguaglianza triangolare :

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

es $|x+1| \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -x-1 & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$

Risolvere disequazioni

① $\sqrt[n]{A} = B \quad \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \geq B^n \end{cases}$

② $\sqrt[n]{A} > B \quad \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^n \end{cases}$

③ $\sqrt[n]{A} < B \quad \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^n \end{cases}$

Funzioni Goniometriche

Il coseno é pari

Il seno é dispari

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}} \qquad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

VALORI NOTEVOLI

30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$

$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

Successioni

Def: Una successione $\{a_n\}$ é una funzione $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es. $\{a_n\} = \frac{1}{n}$

Limite finito di una successione

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$. Un numero reale $l \in \mathbb{R}$ é LIMITE di $\{a_n\}$ e si scrive $\left\{\lim_{n\to+\infty} a_n = l\right\}$ opp. $\left\{a_n \to l \text{ con } n\to+\infty\right\}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un certo $N \in \mathbb{N}$ tale che $\boxed{l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon}$ per ogni $n \geq N$

Limite infinito $\pm\infty$

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$

① Si dice $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ opp. $a_n \to +\infty$; Se $\forall M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > N$

② Si dice $\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$ opp. $a_n \to -\infty$; Se $\forall M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > N$

Proposizione:

Siano a_n e b_n successioni a valori in $\mathbb{R}$ tali che esistano finiti $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$

- $\lim_{n\to+\infty} [a_n + b_n] = a + b$
- $\lim_{n\to+\infty} [a_n \cdot b_n] = a \cdot b$
- $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{a_n}{b_n}\right] = \frac{a}{b}$ (solo se $b \neq 0$ ed $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c $b_n \neq 0$)

Def.

Una successione a valori in $\mathbb{R}$ si dice:

- Convergente se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$
- Divergente se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$

} REGOLARE

- $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$ } IRREGOLARE

- Limitata $(n_1; n_2)$
- Limitato superiormente $(-\infty; n)$
- Limitato inferiormente $(n; +\infty)$
- Illimitato $(-\infty, +\infty)$

- Monotona
- Strettamente crescente se $a_{n+1} > a_n$
- Crescente se $a_{n+1} \geq a_n$
- Strettamente decrescente $a_{n+1} < a_n$
- Decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$

- Positiva se l'insieme dei valori é contenuto in $(0; +\infty)$ cioé se $a_n > 0$
- Negativa se l'insieme dei valori é contenuto in $(-\infty, 0)$ cioé se $a_n < 0$
- Non Negativa se $a_n \geq 0$
- Non Positiva se $a_n \leq 0$

Proposizione sia $b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>0 \\ 1 & \text{se } b=0 \\ 0 & \text{se } b<0 \end{cases}$$

se $a=+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^b = a^b$$

se $a \in (0,+\infty)$

sia $K \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^K = a^K$$

se $a \in (-\infty, 0)$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^K = \begin{cases} -\infty & K \text{ dispari} \\ +\infty & K \text{ pari} \\ 1 & K=0 \\ 0 & K<0 \end{cases}$$

se $a = -\infty$

Proposizioni

$\forall a>1$ vale $\lim_{n\to+\infty} \log_a n = +\infty$

Se $\{a_n\}$ é successione positiva con $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in [a,+\infty) \cup \{+\infty\}$ e $0<b<1$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \log_b (a_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a=0 \\ \log_b a_n & \text{se } 0<a<+\infty \\ -\infty & \text{se } a \geq +\infty \end{cases}$

Teorema unicitá del limite

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$, regolare (che ammette limite), cioé esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

Se a e $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ sono tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$ allora $a=b$

Supponiamo per assurdo:

che $a \neq b$ e che $a<b$, poi fisso $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ $\quad \varepsilon>0$

Per def. di limite esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ t.c $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ e che esiste $N_2 \in \mathbb{N}$ t.c $b-\varepsilon < a_n < b+\varepsilon$

Ponendo $N = MAX\{N_1; N_2\}$ allora: $a_n > b-\varepsilon$ e $a_n < a+\varepsilon$

ma $b-\varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ e $a+\varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$

quindi vale $\boxed{\frac{a+b}{2} < a_n < \frac{a+b}{2}}$ ASSURDO

Teorema di permanenza del segno

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$ regolare.

- Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \in (0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ allora esiste un $N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n>0 \ \forall n \geq N$
- Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \in (-\infty; 0) \cup \{-\infty\}$ allora esiste un $N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n<0 \ \forall n \geq N$

Dim:

① Caso $+\infty$

Supongo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ con $a \in (0,+\infty)$; per def. di limite finito (scelgo $\varepsilon = a$) esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c $0 < a_n < 2a$ $\forall n \geq N$

$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$

$a-a < a_n < a+a$

② Caso $-\infty$

Supongo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ con $a \in (-\infty; 0)$; $(\varepsilon = -a > 0)$; x def esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c $2a < a_n < 0$

Corollario:

① Se esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n \geq 0$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$

② Se esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n \leq 0$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \in (-\infty; 0] \cup \{-\infty\}$

$a_n \to a \quad a \in \mathbb{R}$

$b_n \to b \quad b \neq 0 \in \mathbb{R}$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Limiti per eccesso/difetto

Una successione a valori in $\mathbb{R}$ si dice convergente per eccesso (o da destra) a $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: l < a_n < l + \varepsilon$ e si scrive $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l^+$

Una successione a valori in $\mathbb{R}$ si dice convergente per difetto (o da sinistra) a $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: l - \varepsilon < a_n < l$ e si scrive $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l^-$

① Teorema del confronto

Siano a_n, b_n successioni con valori in $\mathbb{R}$: $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

1) se $a_n \to +\infty$ allora $b_n \to +\infty$

2) se $b_n \to -\infty$ allora $a_n \to -\infty$

② Teorema del Confronto

Siano a_n, b_n successioni con valori in $\mathbb{R}$. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = l$ allora anche b_n converge a $l \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = l$

Osservazione: il teorema resta vero se ipotizziamo che $\exists N \in \mathbb{N}: a_n < b_n \ \forall n \geq N$

Dim: Sia $\varepsilon > 0$ devo trovare un $N \in \mathbb{N}$ t.c $l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon$

per definizione di limite $a_n \to l \Rightarrow l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$
$c_n \to l \Rightarrow l - \varepsilon \leq c_n \leq l + \varepsilon$

per $N = \max\{N_1; N_2\}$ vale $\underline{l - \varepsilon} \leq a_n \leq \underline{b_n} \leq c_n < \underline{l + \varepsilon}$

Def. Una successione a_n è detta infinitesima se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

Osservazioni:

- $|a| = b \iff a = b$ o $a = -b$
- $|a| \leq b \iff -b < a < b$
- $-|a| \leq a \leq |a|$

Se $l \in \mathbb{R}$, allora $a_n \to l$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.c $|a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - l < +\varepsilon$

Proposizione: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$

Dim (1) se $|a_n| \to 0$ allora $a_n \to 0$

Suppongo che $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$ allora vale anche $\lim\limits_{n \to +\infty} -|a_n| = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ vale $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ quindi per confronto $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dim (2) se $a_n \to 0$ allora $|a_n| \to 0$

Suppongo che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

Sia dato $\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.c $-\varepsilon < a_n < \varepsilon \ \forall n \geq N$ cioè $|a_n| < \varepsilon$ Quindi $|a_n| \to 0$

Teorema

Se $a_n \to 0$ e b_n limitata allora $(a_n \cdot b_n) \to 0$

Dim:

Per ipotesi: · $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

· esistono c e d t.c $c < b_n < d$

· $C > 0$ t.c $-C < b_n < C$

Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ ho $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n|$

$0 \le |a_n \cdot b_n| \le |a_n| \cdot |b_n| \le C \cdot |a_n|$

per il teorema di confronto $0 \le |a_n \cdot b_n| \le C \cdot |a_n|$, si ha $|a_n \cdot b_n| \to 0$ per $n \to +\infty$ quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Teorema

Sia $q \in \mathbb{R}$ vale $\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{se } q \le -1 \end{cases}$

Dim:

- Caso $q > 1$

Se $q > 1$, posto $x = q - 1$, si ha $x > 0$ e per disuguaglianza di Bernoulli: $\boxed{\text{Siano } x \in \mathbb{R},\ x > -1 \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{ allora } (1+x)^n \ge 1 + nx}$

$(1+x)^n \ge 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$q^n \ge 1 + n(q-1) = 1 + nx$

Vale $\lim_{n\to+\infty} (1 + nx) = +\infty$ poiché $x > 0$ e per confronto $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

- Caso $q = 1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ vale $q^n = 1^n = 1$ quindi $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$

- Caso $q = 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ vale $q^n = 0^n = 0$ quindi $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

- Caso $-1 < q < 1$, $q \ne 0$ in questo caso $0 < |q| < 1$ cioè $\frac{1}{|q|} > 1$; Per il Caso 1 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|q|^n} = +\infty$ da ciò $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ quindi $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

Test della radice e del rapporto

Sia a_n successione di numeri reali non negativi $(a_n \ge 0)$

- Suppongo che esista $b > 1$ e $N \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a_n} \ge b$ per ogni $n \ge N$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

- Se esiste $0 < C < 1$ e $N \in \mathbb{N}$ t.c $\sqrt[n]{a_n} \le C$ $\forall n \ge N$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Idea della dimostrazione

$\sqrt[n]{a_n} \ge b \Rightarrow a_n \ge \underbrace{b^n}_{b>1} \to +\infty$

$0 < \sqrt[n]{a_n} < C \Rightarrow 0 < a_n < \underbrace{C^n}_{0<C<1} \to 0$

Se ho una successione di $\mathbb{R}$ strettamente positivi $(a_n > 0)$

Caso $b > 1$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge b$ $\quad = a_{n+1} = b \cdot a_n \to$ In particolare $\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = b \cdot a_n \\ a_{n+2} = b^2 a_n \\ a_{n+3} = b^3 a_n \end{array}\right]$

Caso $0 \le a_n \le C$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le C$

Per induzione $\forall K \in \mathbb{N}$ vale $a_{N+K} \ge b^K \cdot a_N$

Rinominando $n = N + K$, $a_n \ge b^{n-N} \cdot a_N$

Cioè $a_n \ge \frac{a_N}{b^N} \cdot b^n$

$\sqrt[n]{a_n} \ge \sqrt[n]{\frac{a_N}{b^N}} \cdot b$

Teorema test della radice

Sia $\{a_n\}$ successione di numeri reali non negativi

- Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \in (1;+\infty) \cup \{+\infty\}$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0,1)$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ $\nexists$ soluzione

Teorema test del rapporto

Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [1,+\infty]$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0;1)$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Gerarchia degli infiniti

n^n

$n!$

b^n

n^c

$\log n$

$\downarrow$

Dati $b,c \in \mathbb{R}$ con $b>1$ $c>0$ vale $\lim_{n\to+\infty} \log_b n = \lim_{n\to+\infty} n^c = \lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$

e inoltre: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^c} = 0^+$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{b^n} = 0^+$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{\log_b n} = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^c} = +\infty$

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^c} = 0$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{b^n} = 0$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

2, 3, 4 si dimostrano con il test del rapporto

Inoltre se $a_n \to +\infty$ allora

1') $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b(a_n)}{(a_n)^c} = 0$ 2') $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_n)^c}{b^{a_n}} = 0$ 3') $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}}{(a_n)^{a_n}} = 0$

Dim 2

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{b^n} = 0$ $\quad \forall b>1$ e $c>0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(a_n)^c}{(b)^{a_n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^c}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n^c} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^c \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}} = \underbrace{\left(1+\overset{\to 0 \text{ per } n\to+\infty}{\frac{1}{n}}\right)^c}_{\to 1} \cdot \frac{1}{b} \to 1^c \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \in (0,1)$$

Dim 3

$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ $\quad \forall b>1$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(b)^{a_n}}{(a_n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{n!}{\underbrace{(n+1)!}_{n!\,(n+1)}} \cdot \frac{b^{n+1}}{b^n} = \frac{1}{n+1} \cdot b = \frac{b}{n+1} \to 0$$

Oss:

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^c}$ $\quad$ fisso $a_n = \log_b (n)^c = c \cdot \log_b n \to +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b^{a_n}} = 0$ $\quad$ cioé $\lim_{n\to+\infty} \frac{c \cdot \log_b n}{n^c} = 0$ da cui $\lim_{n\to+\infty} \frac{c \cdot \log_b n}{n^c} \cdot \frac{1}{c} = 0$

PROPRIETÁ sia a_n una successione di numeri reali, t.c esista $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ (regolare)

- Se $b \in \mathbb{R}, b>1$ allora:

$$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a = +\infty \\ b^a & \text{se } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } a = -\infty \end{cases}$$

- Se $b \in (0,1)$

$$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } a = +\infty \\ b^a & \text{se } a \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } a = -\infty \end{cases}$$

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$ e $A = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

1. Se a_n é monotona non decrescente, allora esiste $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup A$
2. Se a_n é monotona non crescente, allora esiste $\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf A$

Dim 1

Per ipotesi $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$

- Caso $\sup A \in \mathbb{R}$ $\quad l = \sup A \quad$ e voglio mostrare che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$, devo mostrare che esista N t.c $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

Per definizione l é il più piccolo dei maggioranti di A, ciò significa che egli stesso é un maggiorante

- $a_n \leq l \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$
- Ogni numero $l' < l$ non é un maggiorante per A, ogni numero in particolare $\forall l' < l$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c $l' < a_n$

In particolare $l' = l - \varepsilon$ e quindi esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n > l - \varepsilon$. Poiché a_n non é decrescente vale $l - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq l \leq l + \varepsilon$?

- Caso $\sup A = +\infty$ $\quad$ Cioé A illimitato superiormente. Voglio mostrare che $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. Dato $M \in \mathbb{R}$, devo mostrare che $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n > M \quad \forall_{n \geq N}$.

Siccome A é illimitato superiormente non esistono maggioranti di A, in particolare M non é un maggiorante quindi $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c $a_n > M$. Inp. $a_n \geq a_N > M \quad \forall_{M > N}$

Teorema (definizione di e)

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall_{n \geq 1}$ é monotona non-decrescente e limitata. $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \in (1, +\infty)$ $\quad$ osservazione: a_n é strettamente crescente

$e \approx 2{,}71$

1. Dimostrazione che la successione é non decrescente, cioé che $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall_{n \geq 2}$ ed equivale a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \quad \forall_{n \geq 2}$

che equivale a $\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}$ $\quad$ cioé $\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \geq \frac{n-1}{n} \to \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n} \to \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$

Devo provare che $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \forall_{n \geq 2}$ attraverso la disuguaglianza di Bernoulli $(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \forall_{n \geq 1}$ e $\forall_{x > -1}$

La applico con $x = -\frac{1}{n^2} > -1$ per $n \geq 2$ e ottengo che: $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) \to \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$

2. Dimostrazione che a_n é limitata. Si definisce $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall_{n \geq 1}$

$\left.\begin{array}{l} 1)\ b_n \text{ é monotona non crescente} \\ 2)\ a_n \leq b_n \quad \forall_{n \geq 1} \end{array}\right\} \to$ dimostrano che a_n é limitata perché $\forall_{n \geq 1}$ vale $a_n \leq b_n \leq \underbrace{b_1}_{=4}$

- Verifico che b_n sia non crescente. Devo mostrare che $\forall_{n \geq 2}$ vale $b_n \leq b_{n-1}$ Cioé $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ cioé $1 + \frac{1}{n} \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n =$

$= \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^n$ $\quad$ cioé $1 + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \quad \forall_{n \geq 2}$

per Bernoulli

$x = \frac{1}{n^2 - 1}$ vale $\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) \geq 1 + \frac{n}{n^2 - 1} \geq 1 + \frac{1}{n^2} > 1 + \frac{1}{n}$

MONOTONA NON CRESCENTE

Limiti notevoli

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tali che $\varepsilon_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0}$

- $\lim_{n\to+\infty} (1+a\cdot\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e^a$ $\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_n}\right)^{\varepsilon_n} = e\right)$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon_n)^a-1}{\varepsilon_n} = a$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{tg\, \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos \varepsilon_n}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sinh(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{tgh(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cosh(\varepsilon_n)-1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}$

Relazione di asintoto e o-piccolo

Def. Sia a_n successione t.c $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- Una successione b_n si dice asintotica ad a_n, e si scrive $b_n \sim a_n$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$
- Una successione c_n si dice o-piccolo di a_n e si scrive $c_n = o(a_n)$, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$

Proposizione: Sia $a_n \sim b_n$, $c_n \sim d_n$, allora $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot d_n$ $\Rightarrow \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$

Conseguenza: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = l$ e $c_n \sim b_n$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot c_n = l$

ASINTOTICI - Proposizioni

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

1) $a_n \sim a_n$
2) $a_n \sim b_n$ allora $b_n \sim a_n$
3) $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$

Principio di sostituzione degli asintotici nei prodotti e nei quozienti

1) Se $a_n \sim b_n$ e $c_n \sim d_n$ allora $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot d_n$ e $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$

dim. $\frac{a_n \cdot c_n}{b_n \cdot d_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{c_n}{d_n} = 1 \cdot 1 = 1$

2) Se $a_n \sim b_n$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n$ esiste
3) Se $a_n \cdot b_n \to l$ e $a_n \sim c_n$ allora $c_n \cdot b_n \to l$
4) Se $\frac{a_n}{b_n} \to l$ e $b_n \sim c_n$ allora $\frac{a_n}{c_n} \to l$

- Se ε_n è successione tale che $\varepsilon_n \neq 0$, $\varepsilon_n \to 0$, allora
  - $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - $e^{\varepsilon_n}-1 \sim \varepsilon_n$
  - $(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a\cdot\varepsilon_n$
  - $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - $tg(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - $\arcsin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - $\operatorname{arctg}(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - $1-\cos(\varepsilon_n) \sim \frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2$
  - $n+1 \sim n$
  - $n^2+n \sim n^2$

Sottosuccessioni

Sia a_n una successione di numeri reali. Un'altra successione b_K, con $K \in \mathbb{N}$, si dice sottosuccessione di a_n se esiste una successione n_K strettamente crescente di numeri reali tale che $b_K = a_{n_K} \quad \forall K \in \mathbb{N}$

esempio:

$a_n = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad a_n = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \ldots\ldots\}$

$b_K = \frac{1}{2K} \qquad \forall K \in \mathbb{N} \qquad\qquad b_K = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{10} \ldots\ldots\}$

$n_1 = 2 \quad n_2 = 4 \quad n_3 = 6 \quad n_4 = 8$

$b_1 = a_{n_1} = a_2 \qquad b_2 = a_4$

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione limitata di numeri reali; esiste una successione a_{n_K} convergente

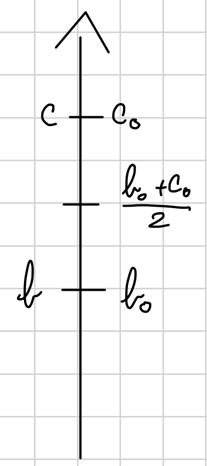
Dim:

Esistono $b, c \in \mathbb{R}$; con $b < c$ tali che $b \le a_n \le c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pongo $b = b_0$ e $c = c_0$

Considero gli intervalli $\underbrace{[b, \frac{b+c}{2}]}_{}$ e $[\frac{b+c}{2}; c]$ (J_0, J_1)

$[b_0; \frac{b_0+c_0}{2}]$ e $[\frac{b_0+c_0}{2}; c_0]$



Esiste un sottoinsieme infinito $I \subseteq \mathbb{N}$ t.c a_n con $n \in I$ é interamente contenuto in uno dei due intervalli J_0, J_1

Diciamo che si tratta dell'intervallo J_0. Allora pongo $b_1 = b_0 \quad c_1 = \frac{b_0+c_0}{2}$ in modo che sia $J_0 = [b_1; c_1]$

Fisso n_1 tale che $a_{n_1} \in J_0$

Esistono infiniti termini di a_n indicizzati da $n \ge n_1$ che si trovano in uno dei 2 intervalli $[b_1; \frac{b_1+c_1}{2}]; [\frac{b_1+c_1}{2}; c_1]$

Suppongo che esistano infiniti termini a_n, con $n > n_1$, contenuti in $[\frac{b_1+c_1}{2}; c_1]$

Pongo $b_2 = \frac{b_1+c_1}{2}$ e $c_2 = c_1$ e fisso $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_2} \in [b_2; c_2]$

Procedendo in questo modo, costruisco 3 successioni b_K, c_K, a_{n_K} con le seguenti proprietà

- $[b_1; c_1] \supseteq [b_2; c_2] \supseteq [b_3; c_3]$
- $\{n_K\}$ é successione strettamente crescente di naturali
- $a_{n_K} \in [b_K; c_K] \quad \forall K \in \mathbb{N}$

Allora $\{b_K\}$ é successione $\underbrace{\text{non decrescente}}_{b_1 \le b_2 \le b_3 \ldots}$ e $\{c_K\}$ é successione $\underbrace{\text{non crescente}}_{c_1 \ge c_2 \ge c_3}$ e $b_K \le a_{n_K} \le c_K \quad \forall K \in \mathbb{N}$

MONOTONE

Per il teorema di regolarità, esistono $l_1 = \lim_{K \to +\infty} b_K$ e $l_2 = \lim_{K \to +\infty} c_K \qquad l_1 - l_2 = \lim_{K \to +\infty} b_K - c_K$ quindi $l_1 = l_2$

e per confronto $a_{n_K} \to l$

Teorema (B-W)

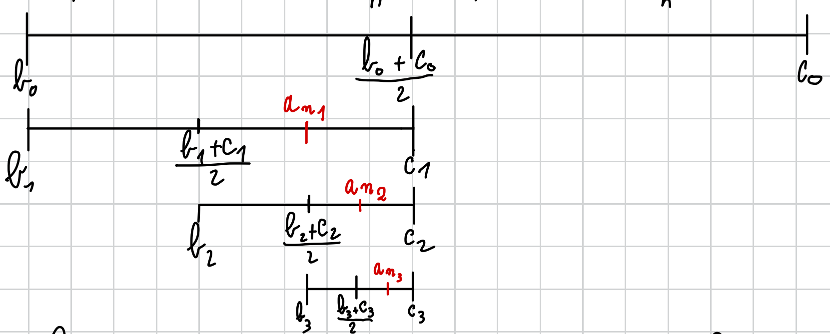
Se a_n é successione limitata di numeri reali, allora esiste una sottosuccessione a_{n_k} convergente

Dim:

- fisso $b, c \in \mathbb{R}$ t.c $b < c$ e $b \le a_n \le c$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pongo $b_0 = b$ e $c_0 = c$, costruisco le successioni b_k ; c_k ; a_{n_k} nel modo seguente:

- Per ogni $k \ge 1$, $[b_k ; c_k]$ é uno degli intervalli $\left[b_{k-1} ; \frac{b_{k-1}+c_{k-1}}{2}\right]$, $\left[\frac{b_{k-1}+c_{k-1}}{2} ; c_{k-1}\right]$ infiniti termini di a_n indicizzati da $n > n_{k-1}$
- n_k é tale che $n_k > n_{k-1}$ e $a_{n_k} \in [b_k ; c_k]$ (avendo fissato $n_0 = 0$)



- $b \le b_1 \le b_2 \le b_3 \dots \le b_k < c_k \le \dots c_3 \le c_2 \le c_1 \le c$
- $c_k - b_k = \frac{c-b}{2^k} \quad \forall k \ge 1$
- $b_k \le a_{n_k} \le c_k \quad \forall k \ge 1 \quad (n_k \ge n_{k-1} \quad \forall k \ge 1)$

Esistono i limiti di b_k e c_k ; $\lim_{k \to +\infty} b_k = l_1$ e $\lim_{k \to +\infty} c_k = l_2$

$l_2 - l_1 = \lim_{k \to +\infty} (c_k - b_k) = c - b \cdot \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2^k} = 0$

Quindi $l_1 = l_2$ $\quad$ Pongo $l = l_1 = l_2 \in \mathbb{R}$

Si ha $\lim_{k \to +\infty} b_k = \lim_{k \to +\infty} c_k = l$ (per confronto - teorema dei carabinieri) $\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = l$

Successione di Cauchy

Def: Una successione a_n di numeri reali si dice di Cauchy (o fondamentale) se soddisfa la condizione seguente:

|| Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \ge N$

Teorema (criterio di Cauchy per la convergenza)

Una successione a_n di numeri reali é convergente se e solo se é "di Cauchy"

Dim: devo dimostrare due implicazioni:

1) a_n convergente $\Rightarrow$ a_n Cauchy

2) a_n Cauchy $\Rightarrow$ a_n convergente

Dim 1

Sia a_n convergente ad un limite l; sia $\varepsilon > 0$ per definizione di $a_n \to l$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $l - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < l + \frac{\varepsilon}{2}$

Allora $\forall n, m \ge N$ vale $a_n - a_m < \underbrace{l + \frac{\varepsilon}{2} - l + \frac{\varepsilon}{2}}_{} = \boxed{\varepsilon}$

$\left(a_n < \frac{\varepsilon}{2} + l \quad , \quad \begin{matrix} a_n > l - \frac{\varepsilon}{2} \\ -a_n < -l + \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}\right)$

$\left(a_n < l + \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad -a_m < -l + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$a_n - a_m > \underbrace{l - \frac{\varepsilon}{2} - l - \frac{\varepsilon}{2}}_{} = \boxed{-\varepsilon}$

$\left(a_n > l - \frac{\varepsilon}{2} \; ; \; -a_n < -l + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\Bigg\} \; |a_n - a_m| < \varepsilon$

Dim ②

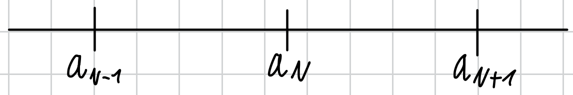
Sia a_n successione di CAUCHY bisogna mostrare che a_n è limitata:

esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c $|a_n - a_m| < 1$ $\forall n, m \geq N$; allora vale che $a_{N-1} < a_n < a_{N+1}$ $\forall n \geq N$

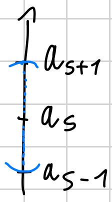
Condizione di CAUCHY con $\varepsilon = 1$

$-1 < a_n - a_N < 1$

$|a_n - a_N| < 1$



Allora $b \leq a_n \leq C$ con $\begin{cases} b = MIN\{a_1; a_2; a_3 \dots a_{N-1}\} \\ C = MAX\{a_1; a_2; a_3 \dots a_{N+1}\} \end{cases}$



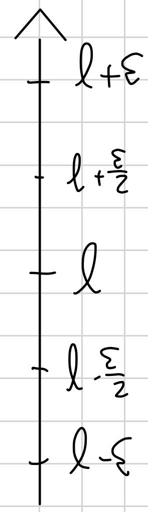
In particolare a_n è limitata e per B-W esiste una sottosuccessione a_{n_K} convergente.

Sia $\ell = \lim_{K \to +\infty} a_{n_K} \in \mathbb{R}$. Mostro che in effetti $\ell = \lim_{n \to +\infty} a_n$

Sia $\varepsilon > 0$ esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c $\ell - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n_K} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall_{K} \geq K$

Esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ t.c $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n, m \geq N_1$

Pongo $N = MAX\{N_1, n_K\}$ e fisso $n_{K_1} > N_1$



Allora per ogni $n \geq N$ posso applicare $|a_n - \ell| = |a_n - a_{n_{K_1}} + a_{n_{K_1}} - \ell|$

disuguaglianza triangolare $\leq |a_n - a_{n_{K_1}}| + |a_{n_{K_1}} - \ell|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Quindi $a_n \to \ell$ per $n \to +\infty$

Serie

Sia a_n successione di numeri reali, si definisce serie numerica di termine generale a_n, la successione $S_K = \{S_1, S_2 \dots\}$ la successione definita da $S_1 = a_1$; $S_2 = a_2$ .... $S_K = \sum_{n=1}^{K} a_n \quad \forall K \geq 1$

I termini S_K si chiamano SOMME PARZIALI o ridotte della SERIE. La serie si indica anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

es. $\{a_n\} = \frac{1}{2^n}$ $\quad S_1 = a_1 = \frac{1}{2} \quad S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice convergente se esiste finito il limite delle somme parziali: $S = \lim_{K \to +\infty} S_K = \lim_{K \to +\infty} \sum_{n=1}^{K} a_n$ (SOMMA DELLA SERIE)
- La serie si dice divergente a $+\infty$ se $\lim_{K \to +\infty} S_K = +\infty$ $\quad S = \lim_{K \to +\infty} S_K = \lim_{K \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
- La serie si dice divergente a $-\infty$ se $\lim_{K \to +\infty} S_K = -\infty$
- REGOLARE se é convergente o divergente
- IRREGOLARE se non esiste $\lim_{K \to +\infty} S_K$

$\}$ CARATTERE

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ SERIE ARMONICA
- $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ SERIE GEOMETRICA

PROPOSIZIONE: Sia a_n successione di numeri reali e sia $c \in \mathbb{N}$ e $c \neq 0$ allora

se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Converge con somma S allora $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$ Converge con somma $c \cdot S$

se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$ diverge a $\begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$

se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é irregolare anche $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$ é irregolare

SERIE GEOMETRICA: Sia $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \begin{cases} \text{é convergente con somma } \frac{x}{x-1} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{é divergente a } +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{é irregolare} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Dim

$\forall K \geq 1$ si ha $S_K = \sum_{n=1}^{K} x^n = x + x^2 + x^3 \dots\dots x^K$
$= x(1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^{K-1})$

applicato con $\begin{matrix} a = 1 \\ b = K \end{matrix}$ $\quad a^K - b^K = (a-b) \cdot (a^{K-1} + a^{K-2} \cdot b \dots\dots a \cdot b^{K-2} + b^{K-1})$ vera $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$= x \cdot \frac{1 - x^K}{1 - x}$ se $x \neq 1$

se $x = 1$ $\quad S_K = \sum_{n=1}^{K} 1^n = 1 + 1^2 + 1^3 \dots + 1^K = K \quad \forall K \geq 1$

se $-1 < x < 1$ allora $\lim_{K \to +\infty} S_K = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{1 - x^K}{1 - x} = x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$

se $x = 1$ allora $\lim_{K \to +\infty} S_K = \lim_{K \to +\infty} K = +\infty$

se $x > 1$ allora $\lim_{K \to +\infty} x^K = +\infty$ $\quad \lim_{K \to +\infty} S_K = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{x^K - 1}{x - 1} = \lim_{K \to +\infty} (x^K - 1)$

se $x = -1$ allora $S_K = -\frac{1 - (-1)^K}{1 - (-1)} = \begin{cases} 0 & \text{se } K \text{ pari} \\ 1 & \text{se } K \text{ dispari} \end{cases} \Rightarrow \lim_{K \to +\infty} S_K$ NON ESISTE

se $x < -1$ allora $S_K = \frac{x}{x-1} \cdot (x^K - 1) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} \cdot (|x|^K - 1) & \text{se } K \text{ PARI} \\ \frac{x}{x-1} \cdot (-|x|^K - 1) & \text{se } K \text{ dispari} \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} \lim_{K \to +\infty} S_{2K} = +\infty \\ \lim_{K \to +\infty} S_{2K+1} = -\infty \end{matrix}$ e non esiste $\lim_{K \to +\infty} S_K$

Condizione di CAUCHY

Sia a_n una successione di numeri reali; la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se la successione $S_K = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ delle somme parziali é una successione di CAUCHY

↳ Significa che per ogni $\varepsilon > 0$, deve esistere $K \in \mathbb{N}$ t.c $|S_K - S_p| < \varepsilon \quad \forall_{K,p \geq K}$

Corollario: Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ (se a_n non converge a 0 allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ NON converge)

Serie a termini non-negativi

Teorema: Se a_n é una successione di numeri reali non negativi $(a_n \geq 0 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}})$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente oppure diverge a $+\infty$

Dim:

$\forall_{K \in \mathbb{N}}$ vale $S_{K+1} = S_K + \underbrace{a_{K+1}}_{\geq 0} \geq S_K$

S_K é successione MONOTONA non-decrescente, quindi esiste $\lim_{K \to +\infty} S_K \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Teorema di confronto

Siano a_n e b_n successioni di numeri reali tali che $a_n \geq b_n \geq 0 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$

- Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge
- Se $\sum_{n=}^{+\infty} b_n$ diverge a $+\infty$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$

Dim:

$\forall_{K \geq 1} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

Teorema di confronto asintotico

Siano a_n e b_n successioni di numeri reali positivi

Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$

$a_n \sim b_n \iff \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.c $\frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq 2 b_n$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\iff \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge $\iff \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge

Teorema serie armonica generalizzata

- se $a > 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ converge
- se $a \leq 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge

Proposizione: Sia $a \in \mathbb{R}$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ é convergente se $a > 1$ e divergente a $+\infty$ se $a \leq 1$

- Dim caso $a = 1$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é a termini positivi, quindi può solo divergere a $+\infty$

Osservo che per ogni sottosuccessione S_{K_p} si ha $S_{K_p} = l$, basta mostrare che esiste $S_{K_p} \to l$

se $S_{2K} \to +\infty$ allora $S_K \to +\infty$ perché sottosuccessione di S_K

- Dim caso $a < 1$

Osservo che se $a < 1$ allora $n^a < n \quad \forall_{n \geq 1}$ cioè $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n} \quad \forall_{n \geq 1}$ e siccome $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$ per teorema di confronto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge a $+\infty$

- Dim caso $a > 1$

osservo che $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{(n+1)^a} \quad \forall_{n \geq 1}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}}_{\substack{< 2 \cdot \frac{1}{2^a} \\ < 2^{1-a}}} + \underbrace{\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a}}_{\substack{< 4 \cdot \frac{1}{4^a} \\ < 4^{1-a} \\ < (2^{1-a})^2}}$$

Teorema (test del rapporto)

Sia a_n successione di numeri reali non-negativi

- Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [a, 1)$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge
- Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$

es $\sum \frac{2^n}{n!}$ $\qquad \frac{2^n}{n!} \to 0$

$\lim \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim \frac{2 \cdot \cancel{2^n}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \lim \frac{2}{n+1} = 0$

Teoremi per serie a termini non di segno costante

1) se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

2) Teorema di $\boxed{\text{Leibniz}}$ per serie a segni alterni

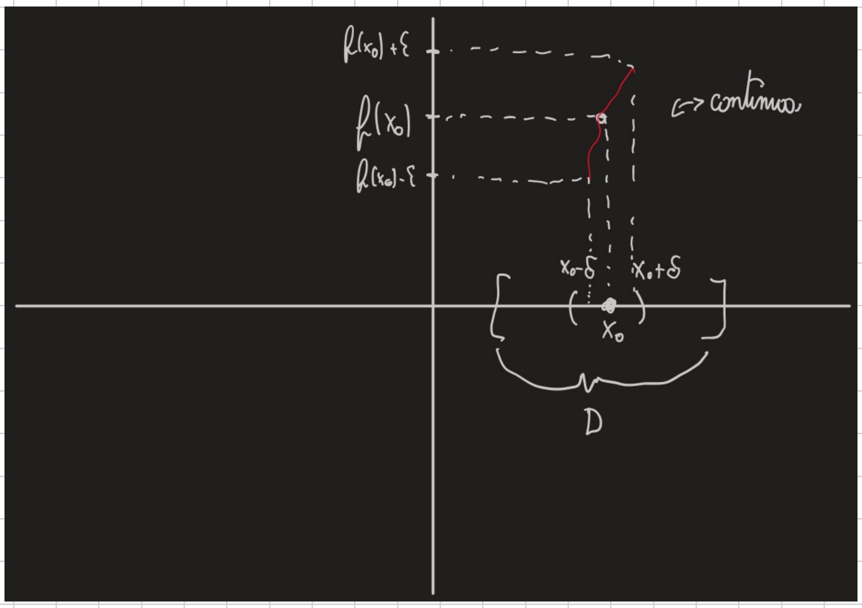
se a_n é successione tale che:

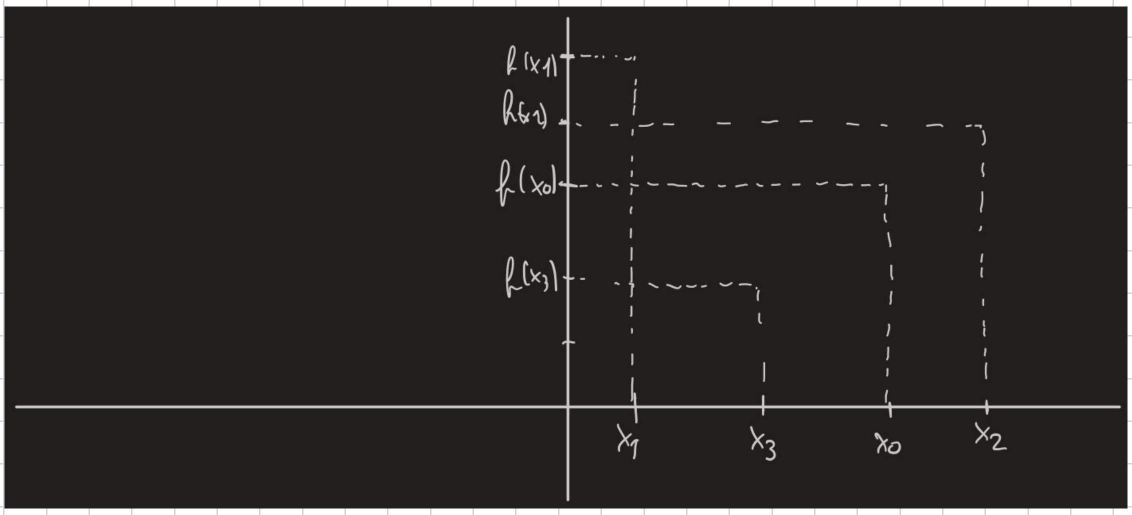
$a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$, $a_n \to 0$ allora $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n \text{ converge}}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$ // $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ $\begin{cases} \text{converge se } -1 < x < 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } x \geq 1 \\ \text{irregolare se } x \leq -1 \end{cases}$ // $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ $\begin{cases} \text{converge se } a > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$ // radice $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ $\begin{matrix} l < 1 \text{ con} \\ l > 1 \text{ div} \end{matrix}$

Funzioni continue

Def: Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $(D \neq \emptyset)$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in D$. Si dice che f é continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, tale che $f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$ $\forall x \in D$ con $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$





Proposizione: Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$
le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f é continua in x_0
2) Per ogni $\{x_n\} \subseteq D$ tale che $x_n \to 0$ e si ha $f(x_n) \to f(x_0)$

Dim ① => ② (assumo per vero che f sia continua in x_0)

Sia x_n una successione di punti di D tale che $\lim_{x \to +\infty} x_n = x_0$. Devo mostrare che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$, cioé devo mostrare che, comunque dato $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_0) - \varepsilon < f(x_n) < f(x_0) + \varepsilon$

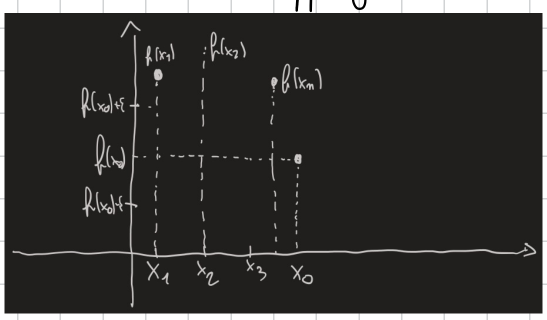
Poiché f é continua in x_0, esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, per ogni $x \in D$ con $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Poiché $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_0 - \delta < x_n < x_0 + \delta$ $\forall n \geq N$. Inoltre, per ipotesi, $x_n \in D$ $\forall n \geq 1$.

Allora per ogni $n \geq N$ vale $x_n \in D$ e $x_0 - \delta < x_n < x_0 + \delta$, da cui $f(x_0) - \varepsilon < f(x_n) < f(x_0) + \varepsilon$ che era quello desiderato.

Dim ② => ①

Per assurdo suppongo che 2 sia falsa. Allora esiste una successione $x_n \subseteq D$ tale che $x_n \to x_0$ e $|f(x_0) - f(x_n)| > \varepsilon$



Si arriva a concludere che f non é continua in x_0 (ASSURDO)

Terminologia: Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$. Si definiscono "somma" e "prodotto" di f e g le funzioni

$f + g : D \to \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto f(x) + g(x)$

$f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$

Teorema: Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $A \subseteq D$

- Se f e g sono continue in x_0 allora $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue in x_0
- Se f e g sono continue in A allora $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue in A

Teorema Siano $D, E \subseteq \mathbb{R}$; $f: D \to E$ e $g: E \to \mathbb{R}$ allora posso $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ $\longmapsto g(f(x))$ funzione che manda x in g di f di x

- Se $x_0 \in D$, f é continua in x_0 e g é continua in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ é continua in x_0
- Se f é continua in D e g é continua in E allora $g \circ f$ é continua in D

Dim: Suppongo f, g continue in x_0

1) Sia dato $\varepsilon>0$. Per continuità di f e g esistono δ_1 e $\delta_2>0$ tali che $f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$ $|x-x_0|<\delta_1$ e $g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}<g(x)<g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$ $|x-x_0|<\delta_2$

Allora ponendo $\delta=MIN\{\delta_1,\delta_2\}>0$, avrò $f(x_0)+g(x_0)-\underbrace{\varepsilon}_{-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}<f(x)+g(x)<f(x_0)+g(x_0)+\overbrace{\varepsilon}^{+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}$ $\forall x\in D$ t.c $|x-x_0|<\delta$

2) Osservo che per ogni $x,y\in D$ posso scrivere $f(x)\cdot g(x)-f(y)\cdot g(y)=$

$$=f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(y)+f(x)\cdot g(y)-f(y)\cdot g(y)=$$
$$=|f(x)\cdot[g(x)-g(y)]+g(y)\cdot[f(x)-f(y)]|=$$
$$=|f(x)|\cdot|g(x)-g(y)|+|g(y)|\cdot|f(x)-f(y)|$$

VALORE ASSOLUTO
DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Suppongo $0<\varepsilon<1$. Per definizione di continuità, esistono $\delta_1>0$ e $\delta_2>0$ tali che:

$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)|+1)}$ $\forall x\in D$ con $|x-x_0|<\delta_1$ $\rightarrow$ siccome $\varepsilon\leq 1$, segue che $|f(x)-f(x_0)|\leq\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ per dis. triang. $|f(x)|<|f(x_0)|+1$

$|g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2(|f(x_0)|}$ $\forall x\in D$ con $|x-x_0|<\delta_2$

Allora posto $\delta=MIN\{\delta_1,\delta_2\}>0$ vale $|f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)|\leq|f(x)|\cdot|g(x)-g(x_0)|+|g(x_0)|\cdot|f(x)-f(x_0)|$

$$\leq(|f(x_0)|+1)\cdot|g(x)-g(x_0)|+|g(x_0)|\cdot|f(x)-f(x_0)|$$
$$\leq\cancel{|f(x_0)|+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2(\cancel{|f(x_0)|+1})}+\cancel{|g(x_0)|}\cdot\frac{\varepsilon}{2(\cancel{|g(x_0)|}+1)}\quad\text{perché}<1$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq\varepsilon\qquad\text{con }|x-x_0|<\delta_1$$

Osservazione: Sapendo già che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dato $f(x)=x$ è continua, e sapendo che le funzioni costanti sono continue, segue che tutte le funzioni polinomiali sono continue

Teorema: $f:D\to E$, $g:E\to\mathbb{R}$ funzioni, $x_0\in D$, f continua in x_0, g continua in $f(x_0)\Rightarrow g\circ f$ continua in x_0

Dim: Sia $\varepsilon>0$, per continuità di g in $f(x_0)$ esiste $\delta>0$ t.c $|g(y)-g(f(x_0))|<\varepsilon$ $\forall y\in E$ soddisfacente $|y-f(x_0)|<\delta$

Per continuità di f in x_0, esiste $\tau>0$ t.c $|f(x)-f(x_0)|<\delta$ $\forall x\in D$ con $|x-x_0|<\tau$

Allora $\forall x\in D$ t.c $|x-x_0|<\tau$ vale $|g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon$

Proposizione: La funzione $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è continua

Corollario: Siano $f,g:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$

- Se f è continua in x_0 e g è continua in x_0 e $g(x_0)\neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0
- Se f,g sono continue in D allora $\frac{f}{g}$ è continua ovunque è ben definita

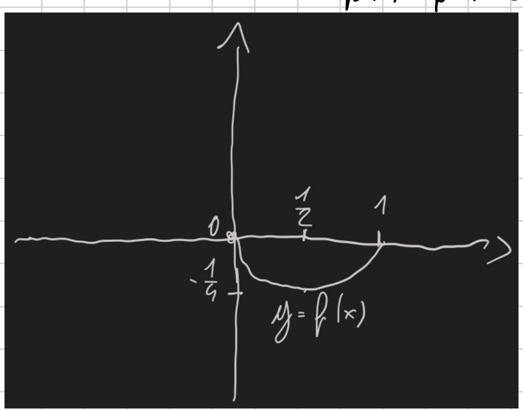
Teorema di Weierstrass

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua, dove $a,b\in\mathbb{R}$, con $a\leq b$. Allora f è limitata ed esistono $c,d\in[a,b]$ tali che $f(c)\geq f(x)$ $\forall x\in[a,b]$ e $f(d)\leq f(x)$ $\forall x\in[a,b]$, cioè f assume massimo e minimo in $[a,b]$

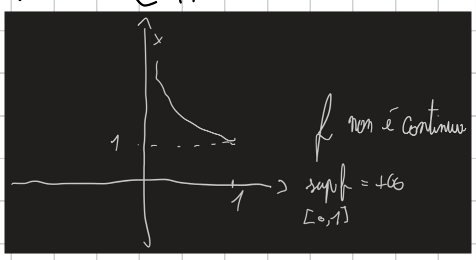
Esempi di validità:

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$

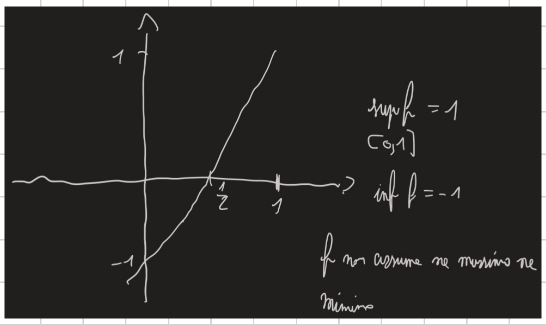
$f(x)=x(x-1)$
$f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$ MIN f
$f(0)=f(1)=0$ MAX f



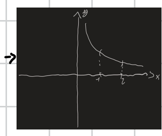
$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0\\ \frac{1}{x} & \text{se } 0<x<1\end{cases}$



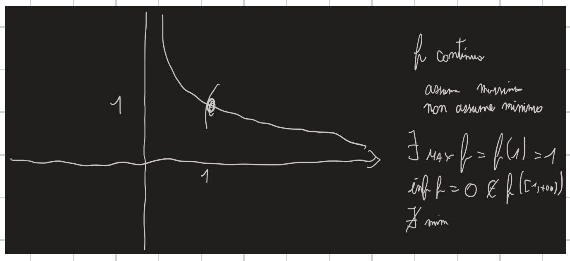
$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0 \text{ opp. } x=1\\ 2x-1 & \text{se } 0<x<1\end{cases}$



- $f(x)=\frac{1}{x}$ $f:(1,2)\to\mathbb{R}$



- $f(x)=\frac{1}{x}$ $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$



Dimostrazione (dimostro solo che f limitata superiormente e che esiste $c \in [a,b]$ t.c $f(c) = MAX\, f$)

Pongo $M = \sup_{[a,b]} f = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}$; M esiste e potrebbe essere un numero $M \in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$

Esiste una successione $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ t.c $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M = \sup f$ $] \to *$

Giustificazione di $*$

- Se $M \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) > M - \varepsilon$. In particolare per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Siccome M é maggiorante $M = \sup_{[a,b]} f$; $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ $\forall n \geq 1$ per confronto $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M$
- Se $M = +\infty$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in [a,b]$ t.c $f(x_n) > n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty = M$

Poiché $[a,b]$ é limitato anche la successione x_n é limitata. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione a_{n_k} convergente in $\mathbb{R}$

Esiste quindi $c \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = c$; Siccome $x_{n_k} \geq a$ $\forall k \in \mathbb{N}$ vale che $c \geq a$ e siccome $x_{n_k} \leq b$ $\forall k \in \mathbb{N}$ vale che $c \leq b$

In particolare $a \leq c \leq d$ cioé $c \in [a,b]$ per continuitá di f, vale $\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$; ma $\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to +\infty} f(x_n) = M = \sup_{[a,b]} f$

In particolare $f(c) = \sup_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$ cioé f é limitata superiormente e assume massimo in $[a,b]$

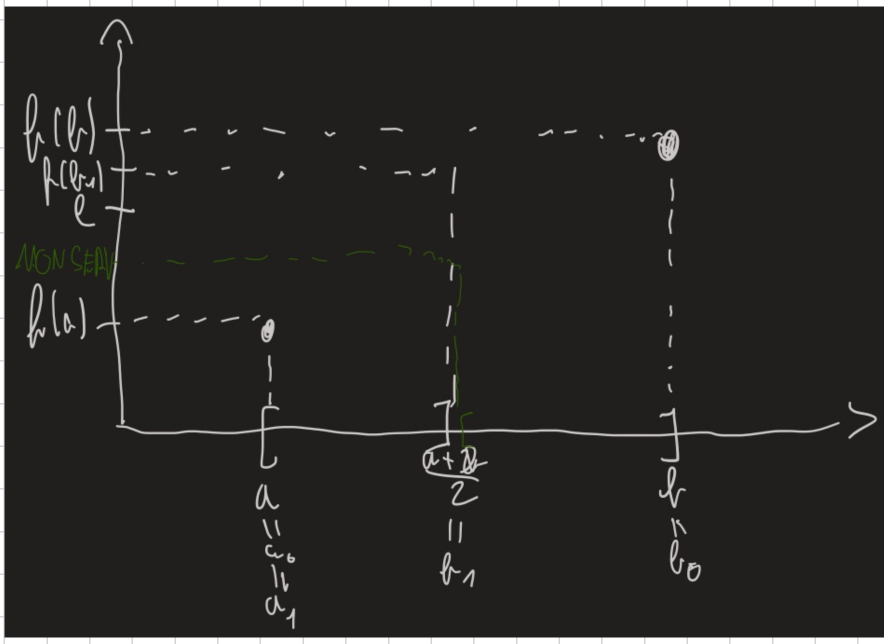
Teorema di Darboux, o dei valori intermedi

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ funzione continua, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \leq b$. Allora f assume in $[a,b]$ tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

1) se $f(a) \leq f(b)$ allora per ogni $l \in [f(a), f(b)]$ esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = l$

2) se $f(a) \geq f(b)$ allora per ogni $l \in [f(b), f(a)]$ esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = l$

Dim (1) $\quad 1) = 2) \quad 1) = -1)$



Pongo $a_0 = a$ e $b_0 = b$

Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq l$ allora pongo $a_1 = a$ e $b_1 = \frac{a+b}{2}$ altrimenti $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$

Posso costruire due successioni $a_n, b_n \subseteq [a,b]$ con le seguenti proprietá:

- $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ é una metá di $[a_n, b_n]$ $\forall n \geq 0$
- $f(a_n) \leq l \leq f(b_n)$ $\forall n \geq 0$

In particolare $\forall n \geq 0$ vale:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

La successione a_n é MONOTONA non-decrescente e limitata superiormente quindi $C_1 = \lim_{n \to +\infty} a_n \leq b$ e $C_2 = \lim_{n \to +\infty} b_n \geq a$

inoltre la differenza $C_2 - C_1 = \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0 \Longrightarrow C_1 = C_2$

Esiste $c \in [a,b]$ t.c $a_n \to c$ e $b_n \to c$ per $n \to +\infty$. Per continuitá di f $f(c) = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n$; Inoltre $f(a_n) \leq l \leq f(b_n)$

quindi $f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n) \geq l$ $\qquad f(c) = l$

Corollario: (Teorema degli zeri):

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é continua e $f(a) \leq 0$, $f(b) \geq 0$ allora esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$

Corollario

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é continua allora assume tutti i valori compresi tra $\min f$ e $\max f$

Teorema

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é un intervallo (non necessariamente chiuso o limitato) e $f: I \to \mathbb{R}$ é una funzione continua, allora l'immagine di f é un intervallo $f(I) = \{f(x): x \in I\}$

Teorema (criterio di continuitá per funzioni MONOTONE)

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ é MONOTONA allora:

1) f é continua
2) $f(I)$ é un intervallo

- Dim $1 \Rightarrow 2$ (vero per il teorema di Darboux)

Suppongo f continua e I un intervallo, devo dimostrare che $f(I)$ é un intervallo, equivalentemente devo mostrare che $\forall l_1, l_2 \in f(I)$ con $l_1 < l_2$ e $\forall l \in [l_1, l_2]$ si ha $l \in f(I)$. Dati l_1 e l_2, per definizione di $f(I)$ esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) = l_1$ e $f(b) = l_2$. f é continua e per il teorema di Darboux f assume nei punti compresi tra a e b tutti i valori compresi tra l_1 e l_2. In particolare esiste $c \in I$ t.c $f(c) = l$

- Dim $2 \Rightarrow 1$

Suppongo $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ funzione MONOTONA $f(I) = \{f(x): x \in I\}$ intervallo. Devo dimostrare che f é continua.
Suppongo f non-decrescente. Sia $x_0 \in I$ e $\varepsilon > 0$. Devo mostrare che $\delta > 0$ tale che $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ $\forall x \in I$ tale che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Se $f(x_0) + \varepsilon \in f(I)$ esiste $x_2 > x_0$ con $x_2 \in I$ tale che $f(x_2) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$
Pongo: $\delta_2 = x_2 - x_0 > 0$. Se invece $f(x_0) + \varepsilon \notin I$ pongo $\delta_2 = 1$ e allora pongo $\delta_1 = x_0 - x_1 > 0$, altrimenti pongo $\delta_1 = 1$. Pongo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Per costruzione vale $f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in I$ con $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Teorema

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona allora $f^{-1}: f(I) \to I \subseteq \mathbb{R}$ é continua

Dim:

Asserisco che essendo f strettamente MONOTONA, in particolare f é iniettiva. Quindi $f: I \to f(I)$ é iniettiva e suriettiva, cioé biettiva e quindi esiste la funzione inversa $f^{-1}: f(I) \to I$
Asserisco che $f(I)$ é un intervallo (perché I é un intervallo e f é continua), e asserisco che f^{-1} é strettamente MONOTONA

Giustifico che f^{-1} é strettamente MONOTONA

Suppongo che f sia strettamente crescente. Siano dati $x, y \in f(I)$ con $x < y$. Devo dimostrare che $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ per vedere se é strettamente crescente. Per definizione di funzione inversa $a = f^{-1}(x)$ $b = f^{-1}(y)$ sono elementi di I tali che $f(a) = x$ $f(b) = y$. Devo mostrare che $a < b$. Suppongo per assurdo che sia falso, cioé che sia $a \geq b$

- $a = b$ non puó verificarsi, poiché $f(a) = x \neq y = f(b)$
- se fosse $a > b$ allora si avrebbe $x = f(a) > f(b) = y$, poiché strettamente crescente, per ipotesi é $x < y$, quindi ASSURDO

Concludendo quindi che $a \leq b$, cioé $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$

Ragionamento analogo se f strettamente crescente

Quindi $f^{-1}: f(I) \to I$ é una funzione strettamente MONOTONA, con dominio $f(I)$ un intervallo, é immagine $f^{-1}(f(I)) = I$
Per il teorema della continuitá delle funzioni monotone f^{-1} é continua.

FUNZIONI ELEMENTARI:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, la funzione $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, n pari, f_z $[0,+\infty] \to \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, n dispari, f_z $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a>0$, f_z $[0,+\infty] \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^a$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a<0$, f_z $[0,+\infty] \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^a$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a=0$, la funzione $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^0 = 1$
- $\forall a>0$, $a \neq 1$, la f_z $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto a^x$
- $\forall a>0$, $a \neq 1$, la f_z $(0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \longmapsto \log_a(x)$
- $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $tg : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\} \to \mathbb{R}$, $\sinh$, $\cosh$, $tgh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $arctg : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

Teorema

Tutte le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione

Dim: le funzioni $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto x^{-n}$ $(n \in \mathbb{R})$ sono continue nei rispettivi domini, come conseguenza del fatto che prodotti e quozienti di funzioni continue sono continui.

Proposizione: la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto e^x$ é continua

Dim: f é continua in $x=0$, cioé devo mostrare che $\forall \varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ t.c $\underset{e^0}{1}-\varepsilon < e^x < \underset{e^0}{1}+\varepsilon$ $\forall x \in (-\delta;+\delta)$, attraverso la disuguaglianza di Bernoulli: $(1+t)^n \geq 1+nt$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall t>-1$ cioé $\frac{(1+t)^n-1}{n} \geq t$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t>-1$. Se scelgo $t = e^x-1$, con $x \in \mathbb{R}$

$\frac{(e^x)^n-1}{n} \geq e^x-1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$; $\frac{e^{n\cdot x}-1}{n} \geq e^x-1$

Sia dato $\varepsilon>0$, scelgo un $n \in \mathbb{N}$ t.c $\frac{e-1}{n} < \varepsilon$. Se $x \in [0;\frac{1}{n}]$, allora $\boxed{0 \leq e^x-1} \leq \frac{e^{\overbrace{nx}^{\leq 1}}-1}{n} < \frac{e-1}{n} < \boxed{\varepsilon}$

Se $x \in (-\frac{1}{n};0)$, allora $0 \leq \underbrace{e^x-1}_{<0} = 1-e^x = e^{-x}-1 = 1-\frac{1}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}}$

Siccome $x<0$, ho $-x>0 \Rightarrow e^{-x}>1$; inoltre $x \in (-\frac{1}{n};0) \Rightarrow -x \in (0,\frac{1}{n})$; quindi $\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}} < e^{-x}-1$; cioé $0 \leq 1-e^x < \varepsilon$

$0 \leq |e^x-1| < \varepsilon$

In conclusione: dato $\varepsilon>0$ se $n \in \mathbb{N}$ é tale che $\frac{e-1}{n} < \varepsilon$, allora se $\delta = \frac{1}{n} > 0$ si ha $-\varepsilon < e^x-1 < \varepsilon$ $\forall x \in (-\delta;+\delta)$

Quindi la $f(x) = e^x$ é continua in $x=0$

Sia in generale, $x_0 \in \mathbb{R}$, osservo che $f(x) = e^x = e^{x_0+x-x_0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. La funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto g(x) = x-x_0$ é continua in x_0. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto e^x$ é continua in 0 e osservo che $g(x_0)=0$; allora la funzione composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto e^{x-x_0}$ é continua in x_0, quindi f_z $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto e^x \cdot e^{x-x_0}$

Quindi:

- $x \longmapsto e^x$ continua in $\mathbb{R}$
- $\forall a>0$, $a \neq 1$ $\to$ $a^x = e^{(\log a)\cdot x}$
- $x \longmapsto \log a \cdot x$ é continua in $\mathbb{R}$, quindi é continua $x \longmapsto a^x$
- $\forall a>0, a \neq 1$, la f_z $(0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \longmapsto \log_a x$ é continua poiché inverso di $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto a^x$ (CIE MANCA)
- $\forall a \in \mathbb{R}$, la f_z $(0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^a$ é continua poiché $x^a = (e^{\log x})\cdot a$, $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é continua
  $a \cdot \log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é continua