Esercizi forme differenziali

① $\omega(x,y) = \dfrac{y}{xy-4}\,dx - \dfrac{4-x-xy}{xy-4}\,dy$

- Chiusa nel suo dominio?
- esatta nel suo dominio?
- Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, $\gamma = \{(x,y) : y \geq 0 \; x^2+y^2=1\}$

orientata nel verso positivo delle x

② $\omega(x,y) = x\log(x^2+y^2)\,dx + y\log(x^2+y^2)\,dy$

- Chiusa nel suo dominio?
- esatta nel suo dominio?
- Calcolare, se possibile, una primitiva.

③ $\omega(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+4y^2} + \dfrac{1}{1+x^2}\right)dx + \left(\dfrac{4y}{4y^2+x^2} - y\right)dy$

- Chiusa nel suo dominio?
- esatta nel suo dominio?
- Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, $\gamma = (\operatorname{tg} t, \sqrt{\operatorname{tg} t})$ $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

orientata nel verso delle t crescenti

④ $\omega(x,y) = \dfrac{e^x y}{1+e^{2x}}\,dx + \operatorname{arctg} e^x + y\log x\,dy$

- Chiusa nel suo dominio?
- esatta nel suo dominio?
- Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è la parabola $y = 1-x^2$ di estremi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e $(1,1)$.

5) Dire se la seguente forma differenziale e' chiusa ed esatta

$$\omega(x,y) = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dy.$$

Inoltre, calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola $x = (y-1)^2$ orientato nel senso delle y crescenti, da $y=0$ a $y=2$.

6) Dire se la seguente forma differenziale e' chiusa ed esatta

$$\omega(x,y) = (ye^x - e^y)dx + (2e^x - xe^y)dy.$$

Inoltre, calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma(t) = (t, e^{-t})$ $t \in [0,2]$.

7) Studiare la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}(y-\sqrt{x})}\,dx - \frac{1}{y-\sqrt{x}}\,dy$$

e se possibile calcolarne una primitiva

(8) Studiare la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

e se possibile calcolarne una primitiva

(9) Studiare se la seguente forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{y}{4+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{4+x^2y^2}\,dy$$

è esatta e calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la semicirconferenza di raggio 1 e centrata nell'origine, percorsa nel semipiano delle y positive e orientata positivamente.

(10) Stabilire se la seguente forma è esatta e calcolarne l'integrale lungo la

semicirconferenza di raggio $\frac{1}{2}$, nel semipiano $\{y > 0\}$, percorsa in senso antiorario:

$$\omega(x,y) = \left(-\frac{\sin y}{(1+x)^2} + y\right)dx + \left(-x + \frac{\cos y}{1+x}\right)dy$$

11 Stabilire se la forma

$$\omega(x,y) = -\frac{1}{x+y}\,dx + \frac{x}{y(x+y)}\,dy$$

è esatta.

In caso affermativo, determinarne tutte le primitive.

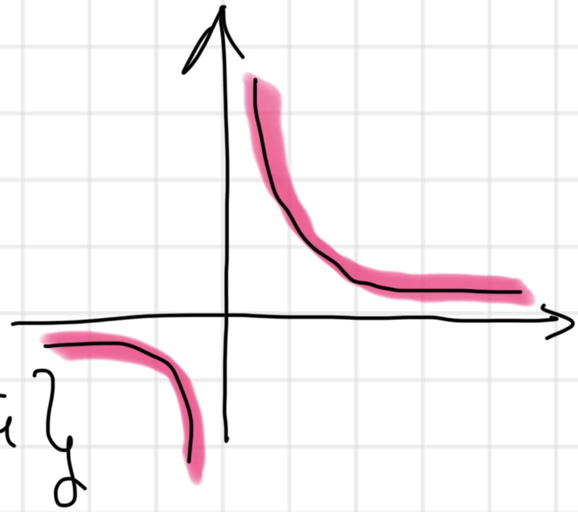
12 Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è il quadrato di lato 2 centrato nell'origine, con i lati paralleli agli assi e

$$\omega(x,y) = \frac{2xy}{1+x^2+y^2}\,dx + \log(1+x^2+y^2) + \frac{2y^2}{1+x^2+y^2}\,dy$$

svolgimenti

1) Dominio di ω:

$$xy - 4 \neq 0 \Rightarrow xy \neq 4$$



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 4 \}$$

tutto quello che non e' evidenziato e' il mio dominio

chiusa?

$$a(x,y) = \frac{y}{xy-4} \qquad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\cancel{xy} - 4 - \cancel{xy}}{(xy-4)^2} = -\frac{4}{(xy-4)^2}$$

$$b(x,y) = -\frac{4 - x - xy}{xy-4}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{(1+y)(xy-4) + (4-x-xy)y}{(xy-4)^2}$$

$$= \frac{\cancel{xy} - 4 + \cancel{xy^2} - \cancel{4y} + \cancel{4y} - \cancel{xy} - \cancel{xy^2}}{(xy-4)^2}$$

$$= -\frac{4}{(xy-4)^2}$$

la forma e' chiusa in D

D non e' semplicemente connesso, quindi non posso concludere che e' esatta.

esatta?

$$F(x,y) = \int a(x,y)\,dx = \int \frac{y}{xy-4}\,dx$$
$$= \log(xy-4) + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = b(x,y) \Rightarrow \frac{x}{xy-4} + g'(y) = -\frac{4-x-xy}{xy-4}$$

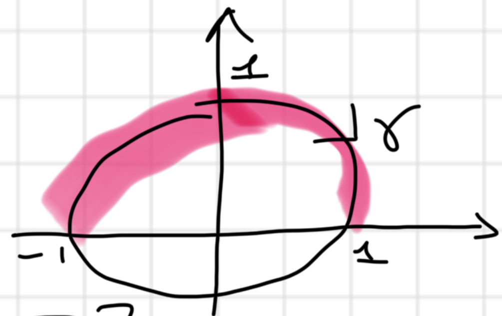
$$g'(y) = \frac{xy-4}{xy-4} = 1 \Rightarrow g(y) = \int 1\,dy$$
$$= y + c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \log|xy-4| + y + c$$

definita in $\{xy \neq 4\} = D$

$\Rightarrow \omega$ e' esatta

$\int_\gamma \omega$:



$$-\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi]$$

$\gamma \subseteq D$ perché $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$
$\Rightarrow xy \leq 1 < 4$

$\Rightarrow$ poiché ω è esatta

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$$\gamma(a) = \gamma(0) = (1,0)$$

$$\gamma(b) = \gamma(\pi) = (-1,0)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = F(1,0) - F(-1,0)$$

$$= \log 4 + c - \log 4 - c$$

$$= 0$$

② $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$a(x,y) = x \log(x^2+y^2)$ $\quad$ $b(x,y) = y \log(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

è chiusa in D

D non è semplicemente connesso.

È esatta ?

$$\int a(x,y)\,dx = \int x \log(x^2+y^2)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x^2+y^2) - \int \frac{x^3}{x^2+y^2}\,dx \quad \text{A}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+y^2 \\ \hline -x^3 - xy^2 & x \\ \hline // \; -xy^2 & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = x - \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$\int x - \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\log(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \text{A} = \frac{x^2}{2}\log(x^2+y^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\log(x^2+y^2) + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y\log(x^2+y^2)$$

$$\frac{x^2}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}y}{x^2+y^2} + \cancel{y\log(x^2+y^2)} + \frac{\cancel{2}y^3}{\cancel{2}(x^2+y^2)} + g'$$

$$= \cancel{y\log(x^2+y^2)}$$

$$g'(y) = -x^2 \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$= y \left(- \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \right) = -y$$

$$g(y) = -\frac{y^2}{2} + c$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} \log(x^2+y^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \log(x^2+y^2) - \frac{y^2}{2} + C$$

Dominio di f = dominio di ω

$\Rightarrow \exists$ una primitiva $\Rightarrow \omega$ esatta

3) Dominio di ω $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso

$$a(x,y) = \frac{x}{x^2+4y^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$b(x,y) = \frac{4y}{4y^2+x^2} - y$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{8xy}{(x^2+4y^2)^2} \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{8xy}{(4y^2+x^2)}$$

$\Rightarrow$ chiusa, ma non sappiamo se esatta, quindi cerchiamo una primitiva

$$F(x,y) = \int \frac{4y}{4y^2+x^2}\,dy - \int y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+4y^2) - \frac{y^2}{2} + g(x)$$

$$F_x = \frac{x}{x^2+4y^2} + g'(x) = \frac{x}{x^2+4y^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow g(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctg x + c$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+4y^2) - \frac{y^2}{2} + \arctg x + c$$

F ha lo stesso dominio di ω $\Rightarrow$ esatta

sia ora $\gamma(t) = (\operatorname{tg} t, \sqrt{\operatorname{tg} t})$ $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

e calcoliamo $\int_\gamma \omega$

$$\int_\gamma \omega = f\left(\gamma\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) - f\left(\gamma\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= f\left(\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}\right) - f\left(1, 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(3 + 4\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} + c +$$

$$- \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} 1 - c$$

$$= \log\sqrt{\frac{3+4\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

4) $a(x,y) = \dfrac{e^x y}{1+e^{2x}}$, $\quad b(x,y) = \operatorname{arctg} e^x + y\log x$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{y}{x}$$

il dominio e' $(0, +\infty)$

non e' chiusa $\Rightarrow$ non e' esatta, ma posso spezzarla

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad \omega_1 = \frac{e^x y}{1+e^{2x}}\,dx + \operatorname{arctg} e^x\,dy$$

$$\omega_2 = 0\,dx + y\log x\,dy$$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$$

$\int_\gamma \omega_1$ lo calcoliamo trovando una primitiva

$$F(x,y) = \int \frac{e^x y}{1+e^{2x}}\,dx = y \arctan e^x + g(y)$$

$$F_y = \arctan e^x + g'(y) = \arctan e^x$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = \text{cost}$$

$$F(x,y) = y \arctan e^x + C$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega_1 = (*)$$

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$$

$$(*) = F(\gamma(1)) - F\left(\gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$= F(1,1) - F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \arctan e + C - \frac{1}{4}\arctan e^{\frac{1}{2}} - C$$

$$= \arctan e - \frac{1}{4}\arctan \sqrt{e}$$

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \omega_2(t, t^2) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0 \cdot \underline{1} + t^2 \log t \cdot 2t\,dt$$

$$= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^3 \log t\,dt$$

P.P

$$= \cancel{2}\, \frac{t^4}{\cancel{4}\,2} \log t \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^4}{2} \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$= -\frac{1}{32} \log 2 - \frac{1}{2} \frac{t^4}{4} \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{32} \log 2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{128} = -\frac{1}{32} \log 2 - \frac{15}{128}$$

Ex
**

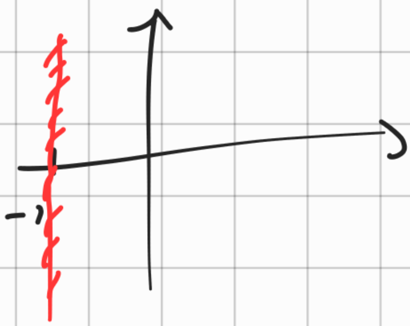
Stabilire se la seguente forma è esatta e calcolarne l'integrale lungo la semicirconferenza di raggio $\frac{1}{2}$ nel semipiano $\{y>0\}$ percorsa in senso antiorario

$$\omega = \left(-\frac{\sin(y)}{(1+x)^2} + y\right)dx + \left(-x + \frac{\cos(y)}{1+x}\right)dy$$

Svolgimento

(1) Dominio

$$x \neq -1$$



(2) Chiusura

$$X_y = -\frac{\cos(y)}{(1+x)^2} + 1$$

$$Y_x = -1 - \frac{\cos(y)}{(1+x)^2}$$

ω non è chiusa $\Rightarrow$ non è esatta

② Calcolo dell'integrale

Dal calcolo delle derivate ci rendiamo conto di poter scomporre ω in due forme di cui una chiusa

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_1 = -\underbrace{\frac{\sin(y)}{(1+x)^2}}_{F_1} dx + \underbrace{\frac{\cos(y)}{1+x}}_{F_2} dy$$ CHIUSA

$$\omega_2 = y\,dx - x\,dy$$ NON CHIUSA

Inoltre

$$\mathrm{dom}(\omega_1) = \{(x,y) \mid x \neq -1\}$$

dominio

ha componenti connesse semplicemente connesse $\Rightarrow$ ω_1 esatta

$$\int_\gamma \omega = \underbrace{\int_\gamma \omega_1}_{\text{usiamo la primitiva di } \omega_1} + \underbrace{\int_\gamma \omega_2}_{\text{calcolo esplicito}}$$

$$\omega_1 = F_1\,dx + F_2\,dy$$

Primitive

$$U(x,y) = \int F_1\,dx = \int -\frac{\sin(y)}{(1+x)^2}\,dx$$

$$= \frac{\sin(y)}{1+x} + c(y)$$

$$\partial_y U = \underbrace{\frac{\cos(y)}{1+x}}_{\text{uguale a } F_2!} + c'(y)$$

imponiamo

$$\partial_y U = F_2$$

$\Rightarrow \quad c'(y) = 0$

$\Rightarrow \quad U(x,y) = \dfrac{\sin(y)}{1+x}$ è una primitiva

punto finale

punto iniziale

$$\int_\gamma \omega_1 = U\left(-\tfrac{1}{2}, 0\right) - U\left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$$

$$= 0$$

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma y\,dx - x\,dy$$

$$= \int_0^\pi \Big(\sin(t)\cdot(-\sin(t)) - \cos(t)\cos(t)\Big)\,dt$$

$$= \int_0^\pi (-1)\,dt = -\pi$$

$\Rightarrow \quad \int_\gamma \omega = -\pi$

Ex

$\times\times\times$

Stabilire se la forma

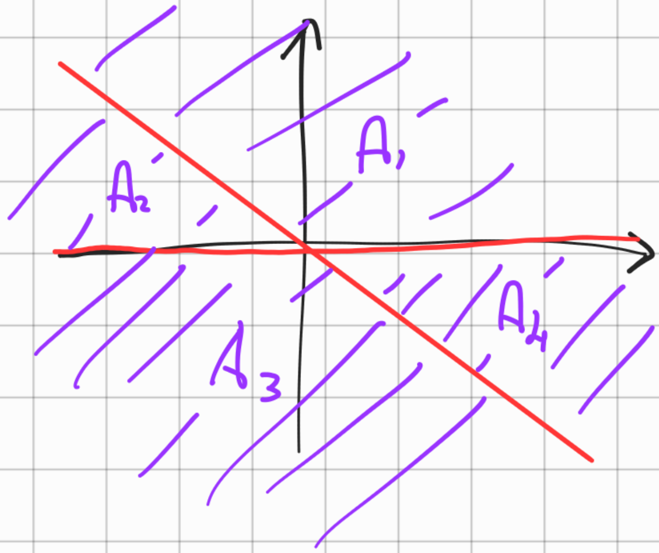
$$\omega = -\frac{1}{x+y}\,dx + \frac{x}{y(x+y)}\,dy$$

è esatta. In caso affermativo, determinare tutte le primitive di ω.

Svolgimento

① Dominio

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ y \neq -x \end{cases}$$



② Chiusura

$$X_y = \frac{1}{(x+y)^2}$$

$=$

$$Y_x = \frac{1}{y}\,\frac{x+y-x}{(x+y)^2} = \frac{1}{(x+y)^2}$$

$\Rightarrow \omega$ chiusa

Il dominio è composto di quattro componenti connesse semplicemente connesse

$\Rightarrow \omega$ esatta

3 Calcolo delle primitive

$$F(x,y) = \int X\,dx = \int -\frac{1}{x+y}\,dx$$

$$= -\log|x+y| + c(y)$$

$$\partial_y F = -\frac{1}{x+y} + c'(y)$$

Imponiamo $\partial_y F = Y$

$$-\frac{1}{x+y} + c'(y) = \frac{x}{y(x+y)}$$

$$c'(y) = \frac{x}{y(x+y)} + \frac{1}{x+y}$$

$$= \frac{1}{x+y}\left(\frac{x}{y}+1\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+y}} \frac{\cancel{x+y}}{y} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow c(y) = \log|y| + c$$

$$F(x,y) = -\log|x+y| + \log|y| + c$$

$$= \log\left|\frac{y}{x+y}\right| + c$$

Dal momento che $dom(\omega)$ non è connesso, non possiamo dire che tutte le primitive differiscono per una costante.

Questo è vero in ogni componente connessa, ma non in tutto dom(ω). Quindi possiamo caratterizzare le primitive di ω come segue

$$F(x,y) = \log\left|\frac{y}{x+y}\right| + c(x,y)$$

con

$$c(x,y) = \begin{cases} c_1 & (x,y) \in A_1 \\ c_2 & (x,y) \in A_2 \\ c_3 & (x,y) \in A_3 \\ c_4 & (x,y) \in A_4 \end{cases} \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Al variare delle costanti c_1, c_2, c_3, c_4 otteniamo tutte le primitive

Ex
*

Calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ è il quadrato di lato 2 centrato nell'origine con lati paralleli agli assi e

$$\omega = \frac{2xy}{1+x^2+y^2}\,dx + \log(1+x^2+y^2) + \frac{2y^2}{1+x^2+y^2}\,dy$$

Svolgimento

① Dominio

$$\mathrm{dom}(\omega) = \mathbb{R}^2$$

② Chiusura

$$X_y = \frac{2x(1+x^2+y^2) - 2xy^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2x+2x^3-2xy^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$Y_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x(1+x^2+y^2) - 4xy^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x + 2x^3 - 2xy^2}{(1+x^2+y^2)} = X_y$$

$\Rightarrow \omega$ chiusa in $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso

$\Rightarrow \omega$ esatta

3 Calcolo integrale

$$\int_\varphi \omega = 0 \quad \forall \varphi \text{ curve chiuse}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$$

1. Dire se la seguente forma diff è chiusa ed esatta

$$\omega = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \right) dx + \frac{2xy}{x^2+y^2} dy$$

Inoltre, calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola $x=(y-1)^2$ orientato nel senso delle y crescenti da $y=0$ a $y=2$.

2. Dire se la seguente forma diff è chiusa ed esatta

$$\omega = (ye^x - e^y)\,dx + (2e^x - xe^y)\,dy$$

Inoltre, calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma(t) = (t, e^{-t})$ $t \in [0,2]$

(1) Dire se la seguente forma diff è chiusa ed esatta

$$\omega = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{2xy}{x^2+y^2}dy$$

Inoltre, calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola $x=(y-1)^2$ orientato nel senso delle y crescenti da $y=0$ a $y=2$.

Svolgimento

Dominio della forma differenziale $x^2+y^2 \neq 0$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Attenzione non è semplicemente connesso!

Verifichiamo la chiusura della forma.

$\omega = a\,dx + b\,dy$

ω è chiusa $\Leftrightarrow \dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial b}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2y(x^2+y^2) - 4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{2y(x^2+y^2)-4xyx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2y+2y^3-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Poiché $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \Rightarrow \omega$ è chiusa.

Tuttavia non essendo il Dominio semplicemente connesso, non possiamo concludere che la forma è esatta.

Cerco la candidata primitiva, integrando $b(x,y)$ rispetto a y.
La candidata primitiva è

$$f(x,y) = \int \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dy = x\int \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= x\log(x^2+y^2) + g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y).$$

Impongo che $\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y)$

$$\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = a(x,y) = f_x(x,y) =$$

$$= \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + g'(x).$$

La precedente è verificata se e soltanto se

$$g'(x) = 0 \iff g(x) = \int g'(x)\,dx = \int 0 = c.$$

$\Rightarrow$ $f(x,y) = x\log(x^2+y^2) + c$ è la primitiva di ω, ovvero $\omega = df$.

Calcolo $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma(t) = ((t-1)^2, t)$
$t \in [0,2]$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = f(\gamma(2)) - f(\gamma(0))$$

$$= f(1,2) - f(1,0)$$

$$= 1\cdot\log(5) - 1\log(1) = \log(5).$$

(2) Dire se la seguente forma diff è chiusa ed esatta

$$\omega = (y e^{x} - e^{y})\,dx + (2 e^{x} - x e^{y})\,dy$$

Inoltre, calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma(t) = (t, e^{-t})$ $t \in [0,2]$

Svolgimento

Dominio della forma differenziale è $\mathbb{R}^2$

Verifichiamo la chiusura della forma.

$$\omega = a\,dx + b\,dy$$

$$\omega \text{ è chiusa} \iff \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y e^{x} - e^{y}) = e^{x} - e^{y}$$

$$\neq$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2 e^{x} - x e^{y}) = 2 e^{x} - e^{y}$$

$\Rightarrow$ ω non è chiusa $\Rightarrow$ ω non è esatta

Spezzo ω nella somma di 2 forme, osservo che

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 2e^x - e^y = \underbrace{e^x - e^y}_{= \frac{\partial b}{\partial y}} + e^x$$

Allora se $\omega_1 = (y e^x - e^y)\,dx + (e^x - x e^y)\,dy$
$\qquad\qquad a_1\,dx + b_1\,dx$

si ha che

$$\frac{\partial}{\partial y}(y e^x - e^y) = e^x - e^y = \frac{\partial}{\partial x}(e^x - x e^y)$$

$\Rightarrow$ ω_1 è chiusa in $\mathbb{R}^2$ (semplicemente connesso)

$\Rightarrow$ ω_1 è esatta.

$\omega = \omega_1 + \omega_2$ con $\omega_2 = 0\,dx + e^x\,dy$

Cerco la primitiva di ω_1

$$f(x,y) = \int (y e^x - e^y)\,dx = y e^x - x e^y + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x - x e^y + g'(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = b_1(x,y) \iff g'(y) = 0 \iff g(y) = c$$

$$\Rightarrow f(x,y) = ye^x - xe^y + c.$$

Calcoliamo $\int_\gamma \omega$ con $\gamma(t) = (t, e^{-t})$, $t \in [0,2]$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$$

$$\int_\gamma \omega_1 = f(\gamma(2)) - f(\gamma(0))$$

$$= f(2, e^{-2}) - f(0,1)$$

$$= e^{-2}e^2 - 2e^{e^{-2}} - 1 - 0$$

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma e^x \, dy = \int_0^2 \left(0 \cdot x'(t) + e^t y'(t)\right) dt = (*)$$

con $(x'(t), y'(t)) = (1, -e^{-t})$

$$(*) = -\int_0^2 e^t e^{-t} \, dt = -\int_0^2 1 \, dt = -2$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = \cancel{1} - 2e^{e^{-2}} - \cancel{1} - 2 = -2\left(e^{e^{-2}} + 1\right).$$

1) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{x}(y-\sqrt{x})}\,dx - \frac{1}{y-\sqrt{x}}\,dy$$

e se possibile calcolarne una primitiva

2) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{xy-4}\,dx - \frac{4-x-xy}{xy-4}\,dy$$

e calcolare l'integrale curvilineo di ω sulla semicirconferenza

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2+y^2=1\}$$

orientata nel verso delle x crescenti.

3) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

e se possibile calcolarne una primitiva

4) Studiare se la seguente forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{4+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{4+x^2y^2}\,dy$$

è esatta e calcolare $\int_\gamma \omega$

γ = semicirconferenza di raggio 1 centrata nell'origine, contenuta nel semipiano delle y positive e orientata positivamente.

(L'orientazione positiva è quella per cui la normale punta verso l'esterno)

2) Studiare la forma differenziale

$$w = \frac{y}{xy-4}\,dx - \frac{4-x-xy}{xy-4}\,dy$$

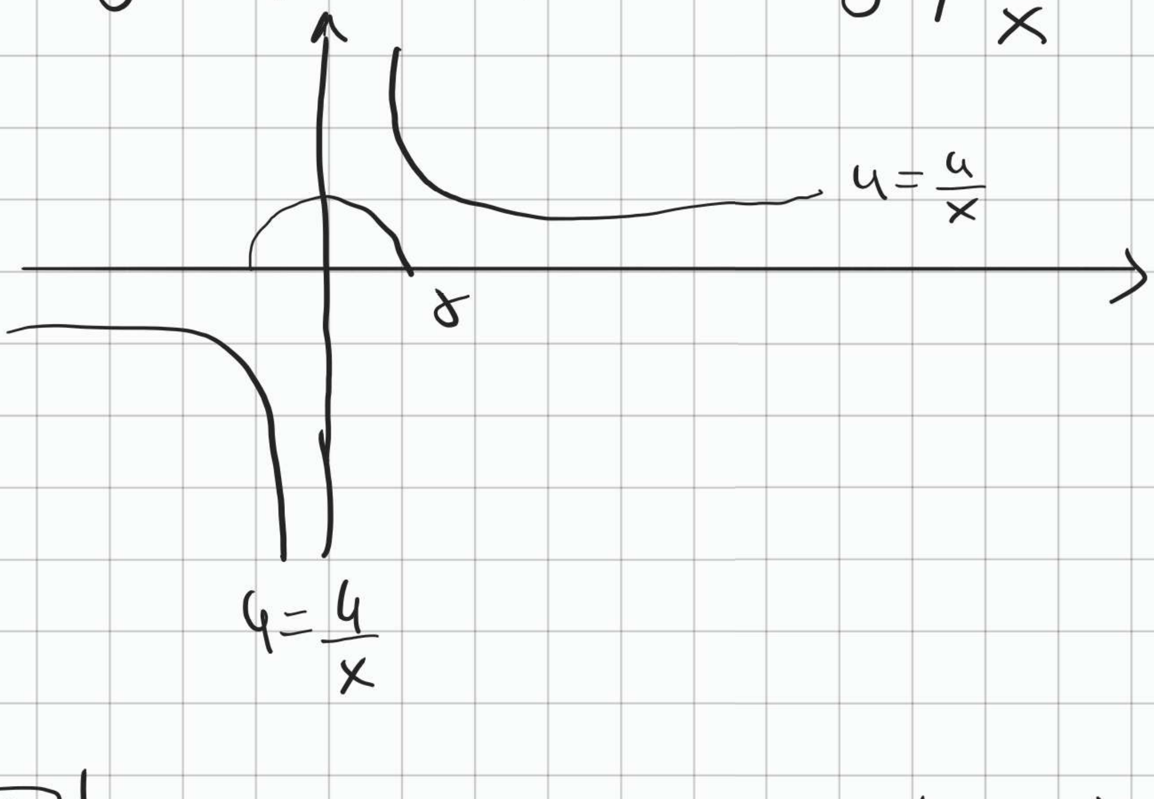
e calcolare l'integrale curvilineo di w sulla semicirconferenza

$$\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq 0 ,\ x^2+y^2=1\}$$

orientata nel verso delle x crescenti.

Dominio di w

$xy-4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad y\neq\frac{4}{x}$



Il dominio non è semplicemente connesso (non è connesso)

ω è chiusa?

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{xy-4}\right) = \frac{(xy-4)-y(x)}{(xy-4)^2} = -\frac{4}{(xy-4)^2}$$

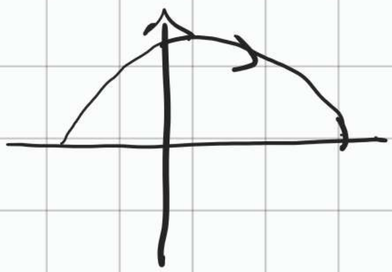
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{4-x-xy}{xy-4}\right) = -\frac{(-1-y)(xy-4)-(4-x-xy)\cdot y}{(xy-4)^2}$$

$$= -\frac{(-\cancel{xy}+4-\cancel{xy^2}-4y+\cancel{xy}+\cancel{xy^2})}{(xy-4)^2}$$

$$= \frac{-4-4y}{(xy-4)^2}$$

$\Rightarrow$ ω non è chiusa $\Rightarrow$ non può essere esatta

Calcoliamo $\int_{+\gamma} \omega$ $\qquad -\gamma = \begin{cases} x=\cos(t) & t\in[0,\pi] \\ y=\sin(t) \end{cases}$



Per farlo osserviamo che ω è somma di $\omega_1+\omega_2$

$$\omega_1 = \frac{y}{xy-4}\,dx + \frac{x}{xy-4}\,dy$$

$$\omega_2 = 0\,dx + -\frac{4-xy}{xy-4}\,dy$$

$$= 0\,dx + 1\,dy$$

ω_1 è esatta perchè $f = \log|xy-4|$

è una primitiva

$\gamma(\pi) = (-1, 0)$

$\gamma(0) = (0, 1)$

$$\Rightarrow \int_{+\gamma} \omega_1 = -\int_{-\gamma} \omega_1 = -\left(f(-\gamma(\pi)) - f(-\gamma(0))\right)$$

$$= -\left(\log(4) - \log(4)\right) = 0$$

$$\int_{+\gamma} \omega_2 = -\int_0^{\pi} 0 \cdot (-\sin(t)) + 1 \cdot (\cos(t))\,dt$$

$$= -\int_0^{\pi} \cos(t)\,dt = -\sin(t)\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$$

3) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

e se possibile calcolarne una primitiva

Dominio di ω: $\quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

ω è chiusa?

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{x\left(\sqrt{x^2+y^2} - y\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\,\cancel{2}y\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{x\left(x^2+y^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{2x\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+2y^2)\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2x(x^2+y^2) - x^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2x^3+2xy^2-x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ω è chiusa

Cerchiamo una primitiva per verificare se ω è esatta

$$f(x,y) = \int \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = y\sqrt{x^2+y^2} + c(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + c'(y)$$

$$= \frac{x^2+y^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + c'(y)$$

$$= b(x,y) = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad c' = 0$$

e una primitiva è

$$f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2} + C$$

(poiché dom f = dom ω)

4) Studiare se la seguente forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{4+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{4+x^2y^2}\,dy$$

è esatta e calcolare $\int_\gamma \omega$

γ = semicirconferenza di raggio 1 centrata nell'origine, contenuta nel semipiano delle y positive e orientata positivamente.

ω è definita in $\mathbb{R}^2$

ω è chiusa?

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{4+x^2y^2}\right) = \frac{4+x^2y^2 - y(x^2 2y)}{(4+x^2y^2)^2}$$

$$= \frac{4 - x^2y^2}{(4+x^2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4+x^2y^2}\right) = \frac{4+x^2y^2 - x(2xy^2)}{(4+x^2y^2)^2}$$

$$= \frac{4 - x^2y^2}{(4+x^2y^2)^2}$$

ω è chiusa, è definita in un s.c.

$\Rightarrow$ è esatta

Cerco f:

$$f(x,y) = \int \frac{y}{4+x^2y^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{y}{1+\left(\frac{xy}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{2}\right) + c(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{4}}\cdot\frac{x}{2} + c'(y)$$

$$= \frac{x}{4+x^2y^2} \Rightarrow c'(y) = 0$$

$$\gamma = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

questo è il verso positivo

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0))$$

$$= f(-1,0) - f(2,0)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\arctan(0)}_{0} - \arctan(0)\right)$$

$$= 0$$