Politecnico di Milano

Corso di Analisi e Geometria 1

(docente: F. Lastaria)

Elenco dei teoremi la cui dimostrazione è richiesta per la parte teorica della prima prova

7 Novembre 2016

1 Teoremi da studiare, con dimostrazione, per la parte teorica della prima prova

1.

Teorema 1.1 (In $\mathbb{R}$ le successioni monotone limitate convergono)**.** *Ogni successione in* $\mathbb{R}$ *che sia crescente (per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$*), cioè*

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \tag{1.1}$$

e sia superiormente limitata (cioè: esiste un $K \in \mathbb{R}$ *per il quale* $a_n < K$*, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*) è convergente. Precisamente, converge all'estremo superiore dell'insieme dei suoi termini.*

2.

Teorema 1.2 (Prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica)**.** *Siano* z, z' *numeri complessi non nulli, la cui scrittura in forma trigonometrica sia*

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad\qquad z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') \tag{1.2}$$

Allora il loro prodotto è il numero complesso:

$$z \cdot z' = rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')] \tag{1.3}$$

In particolare, vale la Formula di De Moivre*:*

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) \tag{1.4}$$

3.

Teorema 1.3. *Vale la relazione:*

$$\sin x \sim x \qquad \textit{per } x \to 0$$

(x: misura dell'angolo in radianti) ossia, in modo equivalente,

$$\sin x = x + o(x) \qquad \textit{per } x \to 0$$

4.

Teorema 1.4 (Continuità per successioni. Condizione necessaria per la continuità di una funzione.). *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, una funzione continua nel punto $x_0 \in D$. Allora, per ogni successione (x_n) ($n \in \mathbb{N}$) di elementi di D, vale la seguente implicazione:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

5.

Teorema 1.5 (Teorema degli Zeri per funzioni reali continue). *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale continua, il cui dominio sia un intervallo I di $\mathbb{R}$. Siano a, b due punti appartenenti a I, con $a < b$. Supponiamo che i valori $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti, cioè si abbia $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste almeno un punto $x^* \in (a,b)$ in cui si ha $f(x^*) = 0$.*

6.

Teorema 1.6 (Teorema dei Valori Intermedi). *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se a e b appartengono a I, la funzione f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Una formulazione equivalente del Teorema dei Valori Intermedi è la seguente:

Teorema [L'immagine continua di un intervallo è un intervallo] *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'immagine $J = f(I)$ di f è un intervallo.*

7.

Teorema 1.7 (Derivabilità implica continuità). *Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.*

8.

Teorema 1.8 (Differenziabilità implica derivabilità)**.** *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione definita su un intervallo aperto* $I \subset \mathbb{R}$ *contenente* x_0*. Supponiamo* f *differenziabile in* x_0*, cioè supponiamo che esista una funzione lineare* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $h \mapsto ah$*,* $a \in \mathbb{R}$ *(il differenziale* df_{x_0} *di* f *in* x_0*) per la quale valga*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \tag{1.5}$$

Allora f *è derivabile in* x_0 *e* $f'(x_0) = a$*.*

9.

Teorema 1.9 (Derivabilità implica differenziabilità)**.** *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione definita su un intervallo aperto* $I \subset \mathbb{R}$ *contenente* x_0*. Supponiamo* f *derivabile in* x_0*, con derivata* $f'(x_0)$*.*

Allora f *è differenziabile in* x_0*. Precisamente, la funzione lineare* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $h \mapsto f'(x_0)h$ *soddisfa:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \tag{1.6}$$

10.

Teorema 1.10 (Derivata della funzione inversa f^{-1})**.** *Siano* I, J *intervalli di* R*,* $I \xrightarrow{f} J$ *una funzione invertibile, e* $J \xrightarrow{g} I$ *la sua inversa. (Dunque:* $g = f^{-1}$ *e* $f = g^{-1}$*.) Siano* $x_0 \in I$ *e* $y_0 \in J$ *due punti tali che* $y_0 = f(x_0)$ *e* $x_0 = g(y_0)$*.*

Se f *è derivabile* $x_0 \in I$ *e* $f'(x_0)$ *è diverso da zero, allora la funzione inversa* $g = f^{-1}$ *è derivabile nel punto* $y_0 = f(x_0)$ *e si ha*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{1.7}$$

11.

Teorema 1.11 (Fermat)**.** *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali definita su un insieme* $D \subset \mathbb{R}$*. Supponiamo che:*

(a) x_0 *sia un punto di massimo (o di minimo) locale per* f*;*

(b) x_0 *sia interno a* D*;*

(c) f *sia derivabile in* x_0*.*

Allora x_0 *è un punto stazionario di* f*, cioè* $f'(x_0) = 0$*.*

12.

Teorema 1.12 (Rolle). *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo compatto* $[a, b]$ *e derivabile sull'intervallo aperto* (a, b). *Supponiamo*

$$f(a) = f(b) \tag{1.8}$$

Allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ *in cui la derivata di* f *si annulla:*

$$f'(c) = 0 \tag{1.9}$$

13.

Teorema 1.13 (del valore medio, o di Lagrange). *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo compatto* $[a, b]$ *e derivabile sull'intervallo aperto* (a, b). *Allora esiste un punto* $c \in (a, b)$ *per il quale si ha*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1.10}$$

14.

Teorema 1.14 (Funzioni con derivata nulla su un intervallo). *Una funzione* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *definita su un intervallo aperto* $I = (a, b)$ *e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è una costante.*

15.

Teorema 1.15 (Funzioni derivabili monotòne). *Sia* I *un intervallo aperto e sia* f *una funzione reale derivabile su* I. *Allora* f *è crescente (in senso lato) su* I *se e solo se* $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in I$

16.

Teorema 1.16 (Formula di Taylor con il resto di Peano). *Sia* f *una funzione di classe* C^n *su un intervallo aperto* I *dell'asse reale. Fissiamo un punto* x_0 *in* I. *Allora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

per $x \to x_0$.

17.

Teorema 1.17 (Derivata seconda e convessità). *Supponiamo che* f *sia derivabile due volte su un intervallo aperto* I. *Se per ogni punto* x *in* I *si ha* $f''(x) > 0$, *allora il grafico di* f *si trova tutto al di sopra della tangente in un punto qualsiasi del grafico.*