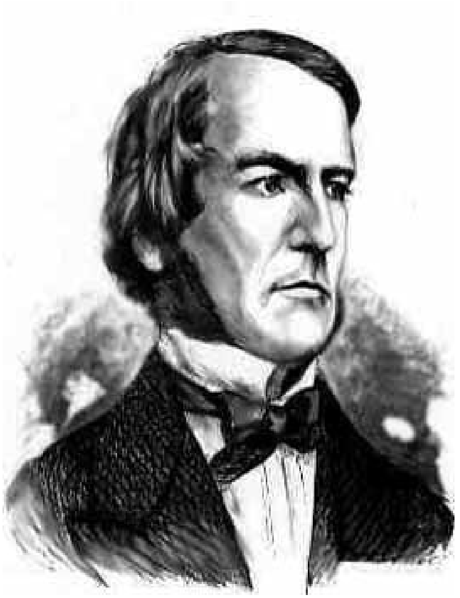
Università di Napoli Federico II – Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole

Algebra di Boole

- L’Algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
  - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities (1854)*
- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
  - *A symbolic analysis of relay and switching circuits (1938)*



George Boole
(1815-1864)

Algebra di Boole

- Un'algebra astratta è una terna <K,⊗,⊕> costituita da un insieme K (*sostegno*) sul quale sono definite due leggi binarie di composizione interna:
  - $\otimes \ : K \times K \rightarrow K$
  - $\oplus \ : K \times K \rightarrow K$
- Un'algebra astratta <K,⊗,⊕> si dice **reticolo** se per ogni coppia di elementi di K le operazioni ⊕ e ⊗ soddisfano le proprietà commutativa, associativa, di idempotenza e assorbimento

Proprietà di un reticolo

- **Proprietà commutativa**:

  $x \otimes y = y \otimes x \qquad x \oplus y = y \oplus x$

- **Proprietà associativa:**

  $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

  per la proprietà associativa si possono quindi definire $\otimes$ e $\oplus$ a più di due operandi, ad esempio $(x \otimes y \otimes z)$

- **Proprietà di idempotenza**

  $x \otimes x = x \qquad x \oplus x = x$

- **Proprietà dell'assorbimento:**

  $x \otimes (x \oplus y) = x \qquad x \oplus (x \otimes y) = x$

Reticolo distributivo

- Un reticolo nel quale vale la proprietà distributiva sia di $\oplus$ rispetto a $\otimes$ che di $\otimes$ rispetto a $\oplus$ si dice **reticolo distributivo**

Proprietà distributiva

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$
$$x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z)$$

- Un reticolo distributivo si dice **dotato di minimo e massimo assoluti** se in K sono presenti due elementi – che indicheremo con O e I rispettivamente - i quali verificano la:

Proprietà del minimo e del massimo:

$$x \otimes O = O \qquad x \oplus I = I$$

Algebra di Boole

- Un reticolo distributivo si dice **complementato** se per ogni elemento x di K esiste ed è unico un elemento (che diremo complemento di x ed indicheremo con x') per il quale è valida la proprietà del complemento

Proprietà del complemento:

$\forall x \; \exists x': x \oplus x' = I \qquad x \otimes x' = O$

- **Un reticolo distributivo, dotato di minimo e massimo assoluti e complementato, è un'algebra di Boole**

L’algebra di Boole - proprietà

Commutativa	P1	a+b=b+a	P'1	a*b=b*a
Associativa	P2	(a+b)+c=a+(b+c)	P'2	(a*b)*c=a*(b*c)
Idempotenza	P3	(a+a)=a	P'3	(a*a)=a
Assorbimento	P4	a+(a*b)=a	P'4	a*(a+b)=a
Distributiva	P5	a*(b+c)=a*b+a*c	P'5	a+(b*c)=(a+b)*(a+c)
Min e max	P6	a*O=O	P'6	a+I=I
Complemento	P7	a*(a')=O	P'7	a+(a')=I

Legge di dualità

- Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per dualità, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi O ed I il rispettivo duale
- In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

Teorema di De Morgan

Teorema di De Morgan:

1) $\neg (x \otimes y) = (\neg x) \oplus (\neg y)$

2) $\neg (x \oplus y) = (\neg x) \otimes (\neg y)$

La 1) si dimostra verificando la proprietà del complemento:

$(x \otimes y) \oplus (\neg x \oplus \neg y) =$ (commutativa)

$(\neg x \oplus \neg y) \oplus (x \otimes y) =$ (distributiva, assoc.)

$(\neg x \oplus \neg y \oplus x) \otimes (\neg x \oplus \neg y \oplus y) =$ (commutativa)

$(\neg x \oplus x \oplus \neg y) \otimes (\neg x \oplus \neg y \oplus y) =$ (complemento)

$(I \oplus \neg y) \otimes (\neg x \oplus I) =$ (massimo)

$I \otimes I = I$

Algebra di Boole: altre proprietà

- O ed I sono l'uno il complemento dell'altro

$$\neg O = I \qquad \neg I = O$$

- Convoluzione: complementando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso

$$\neg(\neg\, a) = a$$

- O è l'elemento neutro della somma

$$a + O = a$$

- I è l'elemento neutro del prodotto

$$a \cdot I = a$$

- Assorbimento del complemento

$$a + \overline{a}b = a + b$$

Algebra dei circuiti

- La sestupla <{0,1}, AND, OR, NOT, 0, 1> è un'algebra di Boole
  - 0 è il minimo, 1 è il massimo

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	NOT x
0	1
1	0

Algebra della logica delle proposizioni

- L’insieme K={F,V} su cui siano definite le operazioni
  - Congiunzione(^)
  - Disgiunzione (v)
  - Negazione (¬)
- è un algebra di Boole con F = 0, V = 1, congiunzione = · , disgiunzione = +, negazione = ¬

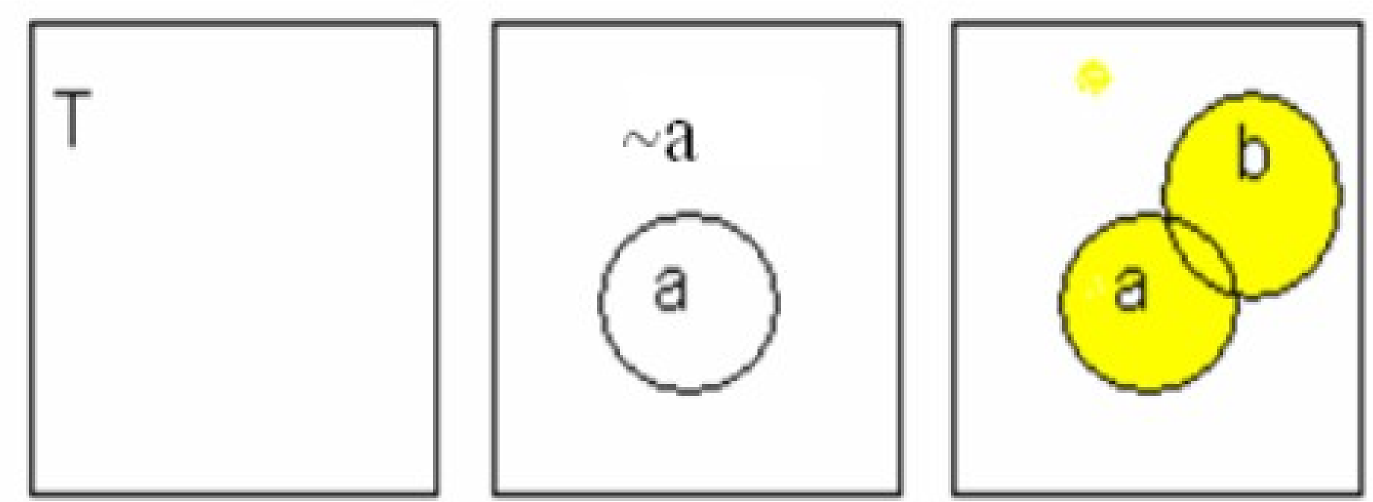
x	y	x ^ y
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

x	y	x v y
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

x	¬ x
F	V
V	F

Algebra degli insiemi

- La sestupla $<\mathcal{P}(T),\cup,\cap,\sim,\oslash,T>$ è un'algebra di Boole
  - T insieme universo, $\oslash$ insieme vuoto
  - $\mathcal{P}$(T) insieme delle parti di T
  - Unione ($\cup$), intersezione ($\cap$), complementazione ($\sim$)



a) Insieme universo b) ~a c) $a \cup b$

Circuiti logici

- I circuiti logici sono circuiti elettronici nei quali una grandezza elettrica ai morsetti di ingresso e di uscita può assumere solo due valori, convenzionalmente rappresentati con i due elementi dell'algebra di Boole 0 ed 1.
- In elettronica digitale si studia come realizzare circuiti elettronici per il quale il legame tra ingressi ed uscite corrisponde a quello delle operazioni fondamentali AND, OR e NOT dell'algebra di Boole
  - PORTE LOGICHE
- Nelle reti logiche *unilaterali*, le uscite della rete corrispondono a valori di grandezze elettriche misurate in opportuni punti del circuito; il flusso dell'elaborazione procede fisicamente in un'unica direzione, dai segnali di ingresso verso i segnali di uscita
  - Es. la d.d.p. misurata rispetto a massa
- Nelle reti logiche *bilaterali*, invece, l'uscita della rete è determinata dalla presenza o dall'assenza di "contatto" tra due punti della rete

Segnali in circuiti elettronici digitali

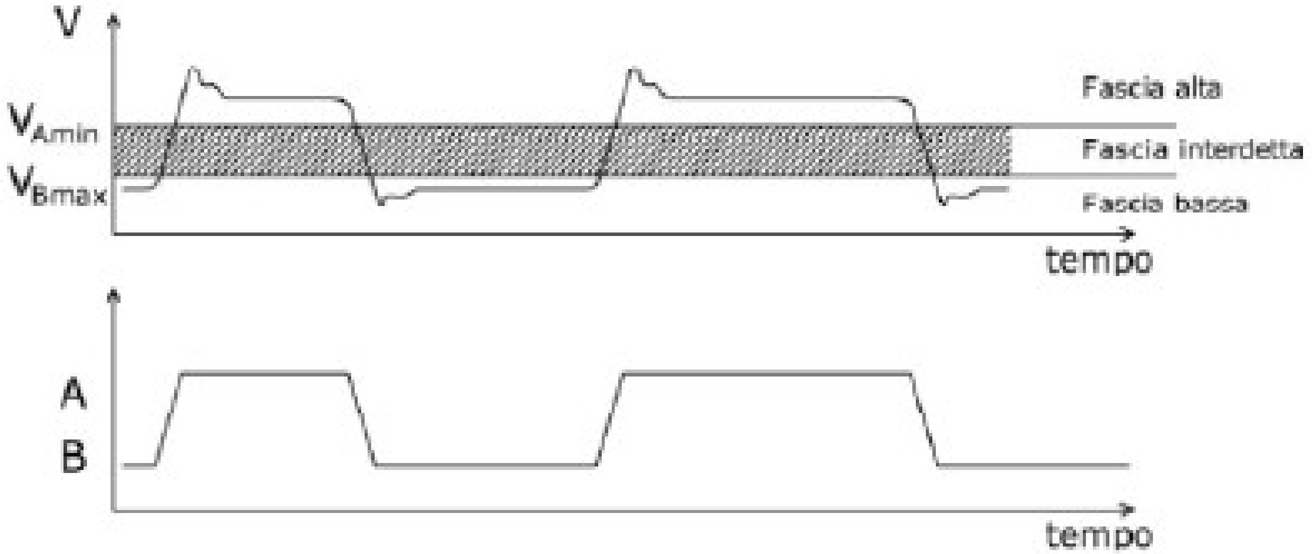


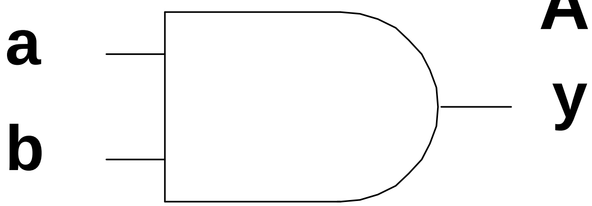
Figura 3.1 - La figura in alto mostra un possibile andamento di un segnale binario reale (si fa riferimento a un segnale di tensione). Il segnale può stare in due zone distinte corrispondenti alla fascia alta e alla fascia bassa. La zona interdetta viene solo attraversata nel passaggio tra le due fasce. V_{Amin} e V_{Bmax} rappresentano rispettivamente gli estremi inferiore e superiore della fascia alta e della fascia bassa. La figura in basso dà una rappresentazione idealizzata del segnale. Questa rappresentazione, per quanto idealizzata, mostra che i tempi di *salita* e di *discesa* non sono nulli.

Porte logiche (*gates*)

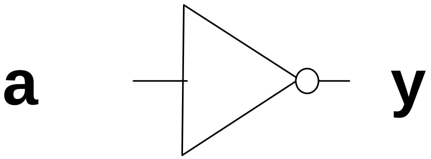
Sono circuiti logici elementari che realizzano le operazioni fondamentali. Le reti logiche possono essere costruite connettendo più porte logiche.

Simboli delle principali porte logiche:

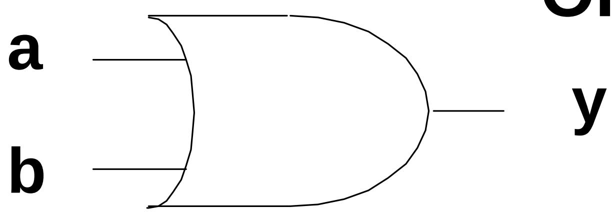
AND



NOT



OR



(se connesso ad un’altra porta, il NOT si indica talora con un semplice pallino)

Nella forma algebrica si può indicare sinteticamente: 1) per la porta AND $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 2) per la porta OR $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 3) per la porta NOT $\overline{\mathbf{a}}$

Un esempio di rete logica

- $y = b \cdot c \cdot (a \cdot \overline{d} + \overline{b} + c) + \overline{c} \cdot (d + \overline{a}) \cdot (b + c)$

Livello 1
Livello 2
Livello 3
Livello 4