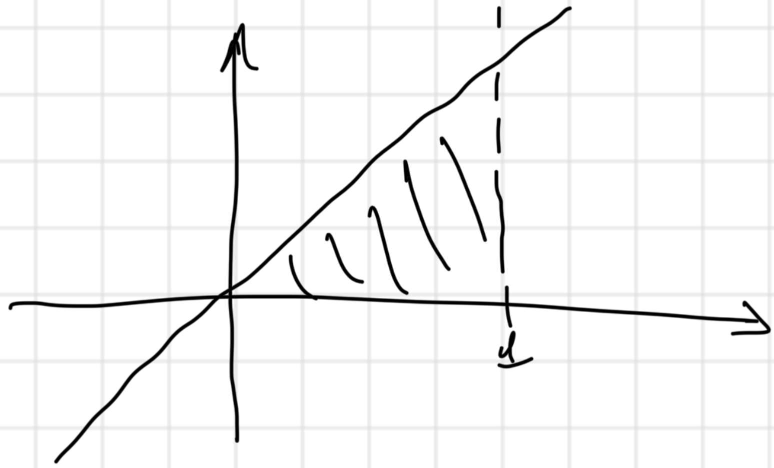
3 $\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

normale rispetto all'asse x



$$\int_0^1\left(\int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}\left.\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^x dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{3}\left[(2x^2)^{\frac{3}{2}}-x^{2\cdot\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 2\sqrt{2}x^3-x^3\,dx$$

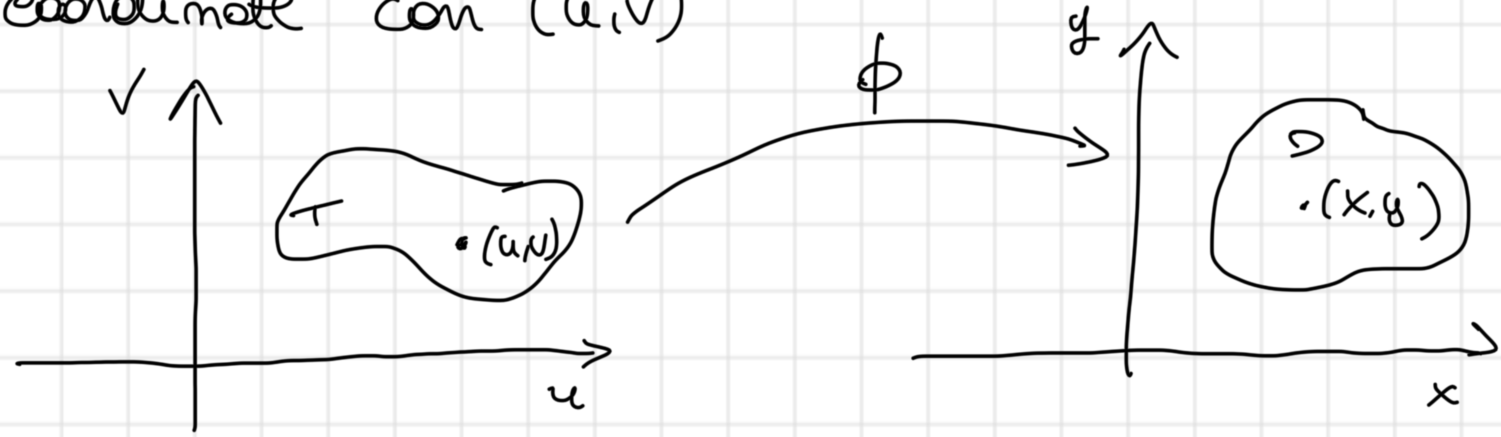
$$=\frac{1}{3}\frac{(2\sqrt{2}-1)}{4}$$

Cambio di variabili negli integrali doppi

DEF Un dominio normale regolare è tale che $\alpha < \beta$ in (a,b) e $\alpha, \beta \in C^1([a,b])$.

Un dominio è regolare se è unione finita di domini normali regolari.

Sia T un dominio regolare, denotiamo le coordinate con (u,v)



Considero una mappa

$$\phi : (u,v) \in T \longmapsto (x(u,v), y(u,v)) \in D$$

con $x, y \in C^1(T)$, $D = \phi(T)$.

Posso definire la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

e lo jacobiano di ϕ come $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = x_u y_v - x_v y_u$

TEOR Siano T, D domini regolari, $\Phi : T \to D$ invertibile, C^1, t.c. $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \ \forall (u,v) \in T$.

Se $f : D = \Phi(T) \to \mathbb{R}$ continua, allora

$$\iint_{D=\Phi(T)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{T=\Phi^{-1}(D)} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$= \iint_T f(\Phi)\,|J_\Phi|$$

ES Le coordinate polari

$$\Phi : (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\rho, \theta \rightsquigarrow \begin{cases} x = x(\rho, \theta) = \rho \cos\theta \\ y = y(\rho, \theta) = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ non è invertibile

perché non è iniettiva $\quad \Phi(0, \theta) = (0, 0) \ \forall \theta$

$\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, 2\pi) \ \forall \rho \geq 0$

Quindi ci restringiamo all'insieme $\underbrace{(0, +\infty) \times [0, 2\pi)}_{=T}$

$\Rightarrow \Phi(T) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$

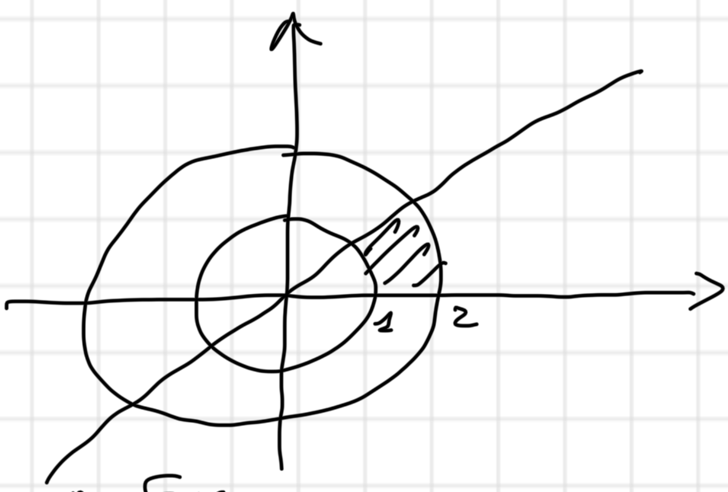
$$J_\phi = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho .$$

Se D è un dominio regolare che non contiene l'origine e $T = \phi^{-1}(D)$ è un dominio regolare contenuto in $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, allora

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_T F(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)\,\rho \, d\rho\, d\theta$$

ES 1 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{3}x , \; 1 \le x^2+y^2 \le 4 \}$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \quad 1 \le \rho \le 2$$

$$0 \le \rho\,\text{sen}\,\theta \le \sqrt{3}\rho\cos\theta \Rightarrow 0 \le \text{tg}\,\theta \le \sqrt{3}$$

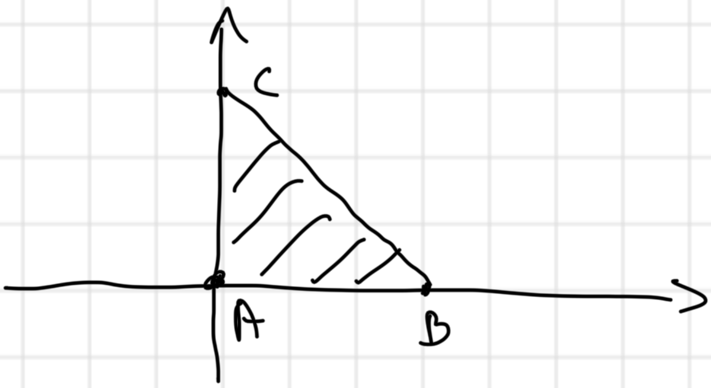
$$\Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^2 \frac{1}{1+\rho^2}\,\rho\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\log(1+\rho^2)\Big|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\log 5 - \log 2\right] = \frac{\pi}{6}\log\frac{5}{2}$$

Es 2 $\displaystyle\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$

T triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$.
$\quad A \quad B \quad C$



$$T = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq x+y \leq 1\}$$

Usiamo il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

dobbiamo invertirlo perché voglio $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

$$\begin{cases} x = u+y \Rightarrow x = u + \frac{v-u}{2} = \frac{u+v}{2} \\ v = u+2y \Rightarrow y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

$$\det J_\phi = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Dove variano u e v?

$$x \geq 0 \Rightarrow \frac{u+v}{2} \geq 0 \Rightarrow u \geq -v$$

$$y \geq 0 \Rightarrow \frac{v-u}{2} \geq 0 \Rightarrow u \leq v$$

$$\Rightarrow -v \leq u \leq v$$

$$0 \leq x+y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq v \leq 1$$

$$D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : -v \leq u \leq v, \ 0 \leq v \leq 1 \}$$

$$\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} = \int_0^1 dv \int_{-v}^{v} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^{v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 v \left[e - \frac{1}{e} \right] = \frac{1}{4} \left[e - \frac{1}{e} \right]$$

Formule di Gauss-Green

Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$, $F \in C^1(D)$.

Allora,

1) $$\iint_D \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\,dy = \int_{+\partial D} F\, dy$$

2) $$\iint_D \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\,dy = -\int_{+\partial D} F\, dx$$

<u>Dim</u> Caso 1 Sia D un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi.

$$D = \{ (x,y) : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y) \}$$

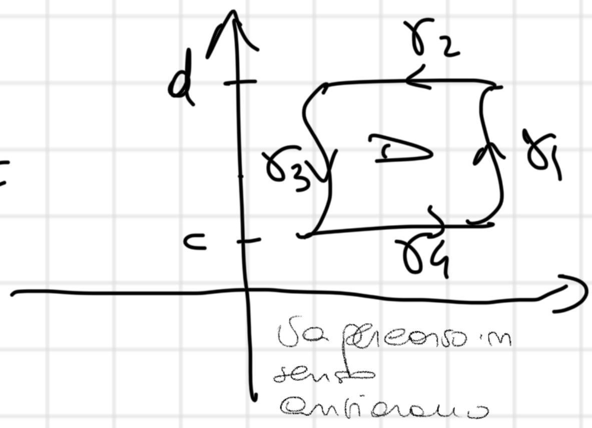
$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial F}{\partial x}\, dx \right) dy$$

$$= \int_c^d F(\delta(y), y) - F(\gamma(y), y)\, dy$$

è una forma differenziale

Ora calcoliamo $\int_{+\partial D} F\, dy$

$$= \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F + \int_{\gamma_4} F$$



$$\gamma_1(t): \begin{cases} x = \delta(t) \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [c, d]$$

$$-\gamma_2(t): \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases} \qquad t \in [\gamma(d), \delta(d)]$$

$$-\gamma_3(t): \begin{cases} x = \gamma(t) \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [c, d]$$

$$\gamma_4(t): \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \qquad t \in [\gamma(c), \delta(c)]$$

$$\int_{+\partial D} F\, dy = \int_{\gamma_1} F\, dy - \int_{\gamma_2} F\, dy - \int_{\gamma_3} F\, dy + \int_{\gamma_4} F\, dy$$

$$= \int_c^d F(\delta(t), t) \cdot 1\, dt - \int_{\gamma(d)}^{\delta(d)} F(t, d) \cdot 0\, dt +$$

$$- \int_c^d F(\gamma(t), t) \cdot 1\, dt + \int_{\gamma(c)}^{\delta(c)} F(t, c) \cdot 0\, dt$$

$$= \int_c^d F(\delta(t), t)\, dt - \int_c^d F(\gamma(t), t)\, dt$$

$$= \int_c^d [F(\delta(t), t) - F(\gamma(t), t)]\, dt$$

$$= \int_c^d F(\delta(y), y) - F(\gamma(y), y)\, dy \Rightarrow \int_{+\partial D} F\, dy = \iint_D \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy$$

Abbiamo così verificato la ①. La ② si verifica allo stesso modo servendo D come dominio normale rispetto all'asse x (perché stiamo supponendo che sia normale rispetto ad entrambi gli assi).

Caso 2 Sia D unione di domini normali $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$

$\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \phi$ se $i \neq j$

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{+\partial D_i} f\, dy$$

per il caso 1.

$$\underset{(*)}{=} \int_{+\partial D} f$$

(*)

questo tratto di bordo di Di viene percorso in due versi diversi quando lo considero come parte del bordo di D1 e D2 ⇒ le somme si cancellano e mi restano solo le parti di ∂Di che sono anche parti di ∂D.