FISICA GENERALE I

Annalisa Allocca

Università degli Studi di Napoli,
Compl. Univ. Monte S.Angelo – Dipartimento di Fisica
Via Cinthia, I-80126, Napoli

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
sez. Napoli
Studio: 1G16, Edificio 6
+39-081-676345
annalisa.allocca@unina.it

Organizzazione

- **Sito web:** www.docenti.unina.it/annalisa.allocca
  - La registrazione al sito si può effettuare inserendo numero di matricola e pin oppure tramite SPID per chi non fosse ancora in possesso di matricola
  - Il materiale didattico si trova sulla pagina web

- **Libri di testo adottati:**
  - Mazzoldi, Nigro, Voci «Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica» Vol. 1 - Edises Napoli
  - Halliday, Resnick, Walker «Fondamenti di Fisica» - Ambrosiana Milano
  - Serway, Jewett «Principi di Fisica» - Edises Napoli

Argomenti di oggi:

- Sistema di riferimento del centro di massa
- Dinamica dei sistemi di particelle
  - Teoremi di Koenig
  - Lavoro ed energia cinetica per un sistema di punti materiali
- Dinamica del corpo rigido
  - Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa
  - Moto di un corpo rigido

Mazzoldi, Nigro, Voci, cap 5, 6

I e II equazione cardinale

- Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{EXT} = m\vec{\boldsymbol{a}}_{CM} = m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt}$$

- Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

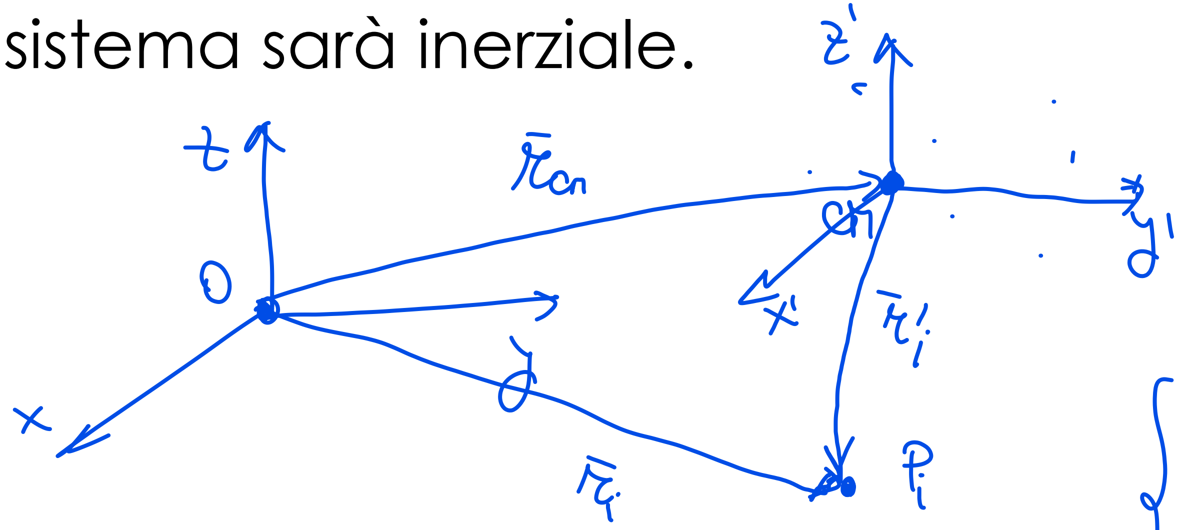
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{ext}} \boxed{- \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} \times M\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}}$$

Questo termine si annulla se:

- Il polo O è fisso, o
- Il centro di massa non si muove, o
- Il centro di massa coincide con il polo O, o
- La velocità del centro di massa e quella del polo sono parallele

Sistema di riferimento del centro di massa

- Origine nel centro di massa
- Gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto a quelli del sistema di riferimento fisso e possono essere presi paralleli a questi ultimi
- In generale, è un sistema non inerziale. Solo se la risultante delle forze esterne è zero, sarà nulla l'accelerazione del centro di massa, quindi il sistema sarà inerziale.



$$\frac{d}{dt}\left(\bar r_i = \bar r_{cm} + \bar r'_i\right.$$

$$\bar v_i = \bar v_{cm} + \bar v'_i$$

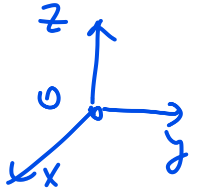
$$\begin{cases} \bar r'_{cm} = 0 = \dfrac{\sum_i m_i \bar r'_i}{\sum_i m_i} = 0 \\ \bar v'_{cm} = 0 \longrightarrow \dfrac{\sum_i m_i \bar v'_i}{\sum_i m_i} = 0 \\ \bar a'_{cm} = 0 \end{cases}$$

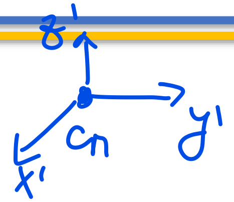
Sistema di riferimento del centro di massa

$$F^{Ex} = M\bar{a}_{CM}$$

$$m_i\bar{a}_i' = \bar{F}_i^{(I)} + \bar{F}_i^{(Ex)} - m_i\bar{a}_T$$

$$m_i\bar{a}_T \to m_i\bar{a}_{CM}$$





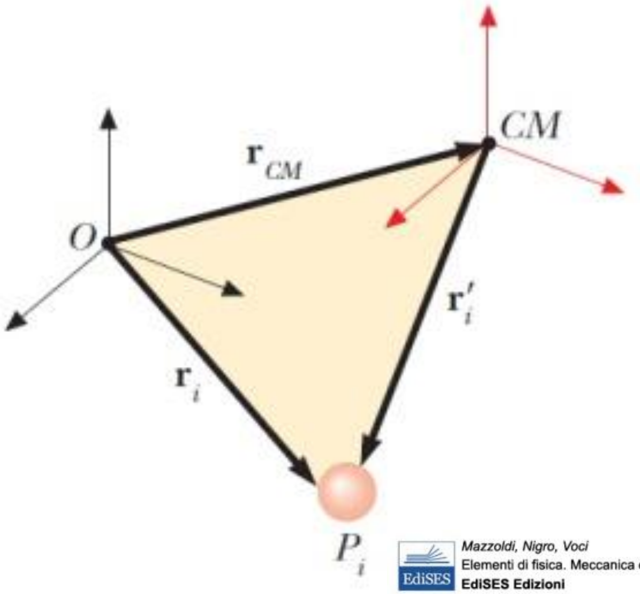
$$\bar{M}' = \sum_i \bar{r}_i' \times \left[\bar{F}_i^{(E)} - m_i\bar{a}_{CM}\right] = \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{F}_i^{(E)} - \cancel{\sum_i \bar{r}_i' \times m_i\bar{a}_{CM}} \to 0$$

$$\sum_i \bar{r}_i' \times m_i\bar{a}_{CM} = \left(\cancel{\sum_i r_i' m_i}\right) \times a_{CM} = 0$$

$$\bar{M}^{(Ex)} = \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{F}_i^{(E)}$$

$$\bar{r}_{CM}' = \frac{\sum_i \bar{r}_i' m_i}{\sum_i m_i} = 0$$

Sistema di riferimento del centro di massa



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

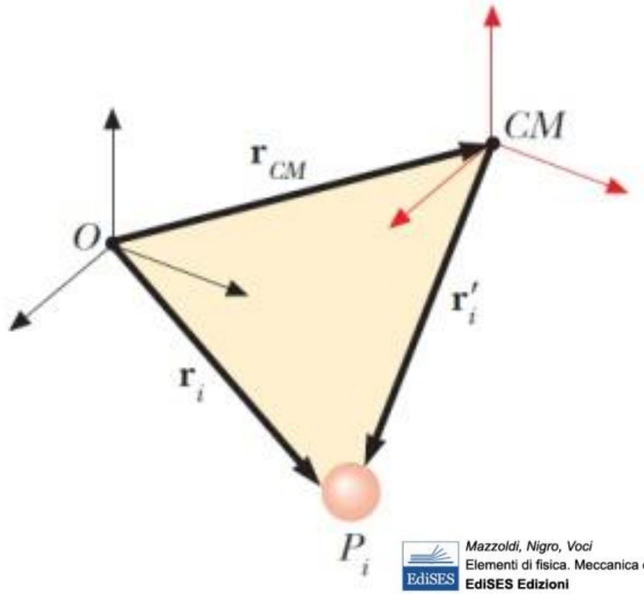
Sistema di riferimento del centro di massa

Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i + \vec{r}'_{CM} \qquad \vec{v}'_i = \vec{v}'_i + \vec{v}'_{CM}$$



Sistema di riferimento del centro di massa

Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

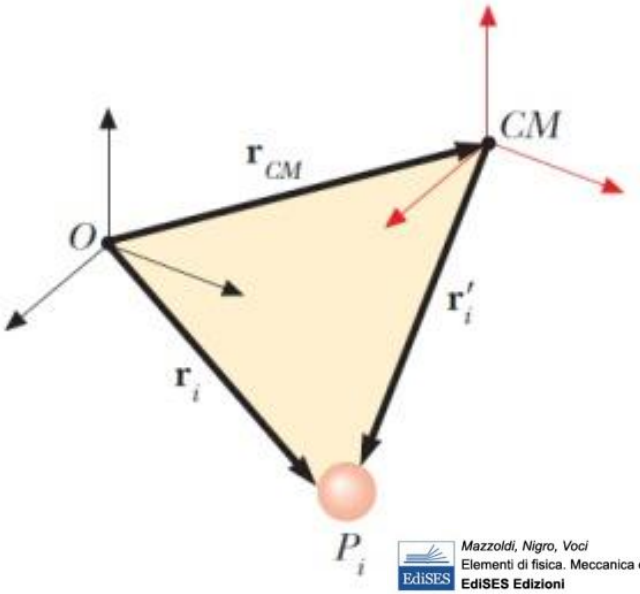
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i' + \cancel{\vec{r}_{CM}'} \qquad \vec{v}_i' = \vec{v}_i' + \cancel{\vec{v}_{CM}'}$$

La quantità di moto totale del sistema risulta sempre nulla nel sistema di riferimento del centro di massa

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

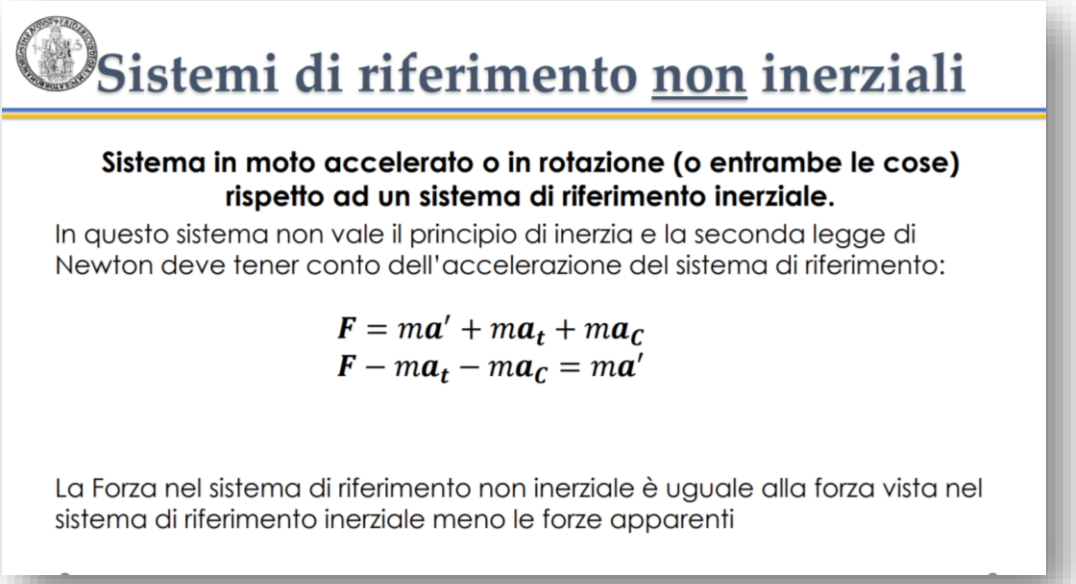
Sistema di riferimento del centro di massa

Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_i = \vec{\boldsymbol{r}}'_i + \vec{\boldsymbol{r}}_{CM}, \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_i = \vec{\boldsymbol{v}}'_i + \vec{\boldsymbol{v}}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{\boldsymbol{r}}'_i = \vec{\boldsymbol{r}}'_i + \vec{\boldsymbol{r}}'_{CM} \qquad \vec{\boldsymbol{v}}'_i = \vec{\boldsymbol{v}}'_i + \vec{\boldsymbol{v}}'_{CM}$$



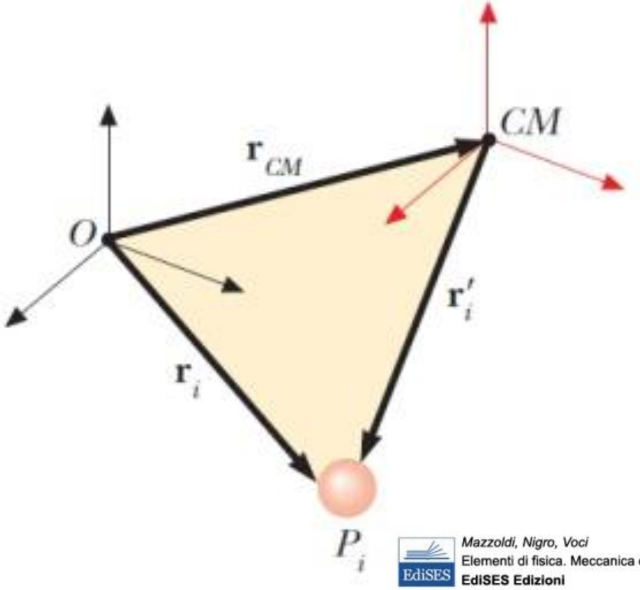
Sistemi di riferimento non inerziali

Sistema in moto accelerato o in rotazione (o entrambe le cose) rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

In questo sistema non vale il principio di inerzia e la seconda legge di Newton deve tener conto dell'accelerazione del sistema di riferimento:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}' + m\boldsymbol{a}_t + m\boldsymbol{a}_C$$
$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_t - m\boldsymbol{a}_C = m\boldsymbol{a}'$$

La Forza nel sistema di riferimento non inerziale è uguale alla forza vista nel sistema di riferimento inerziale meno le forze apparenti



Sistema di riferimento del centro di massa

Sul singolo punto agisce una forza totale

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{Ext} + \vec{F}_i^{Int} \boxed{- m\vec{a}_{CM}}$$

Accelerazione di trascinamento del sistema di riferimento del CM (non inerziale) → $\vec{F}^{app}$

Si dimostra che, oltre al momento delle forze interne, anche il momento delle forze apparenti nel sistema di riferimento del CM è nullo

$$\vec{M}'^{(app)} = -\sum_i \vec{r'}_i \times m_i\vec{a}_{CM} = -\underbrace{\boxed{\sum_i m_i\vec{r'}_i}}_{\vec{r'}_{CM} * M_{tot} = 0} \times \vec{a}_{CM}$$

Teoremi di König (I)

I teoremi di Koenig forniscono una relazione tra quantità misurate nel sistema di riferimento inerziale e le stesse quantità misurate nel sistema di riferimento del centro di massa.

I teorema di Koenig: momento angolare

$$\bar{L} = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$$

$$\begin{cases} \bar{r}_i = \bar{r}_{cm} + \bar{r}_i' \\ \bar{v}_i = \bar{v}_{cm} + \bar{v}_i' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{L} = \sum_i (\bar{r}_{cm} + \bar{r}_i') \times m_i (\bar{v}_{cm} + \bar{v}_i') =$$

$$= \underbrace{\sum_i \bar{r}_{cm} \times m_i \bar{v}_{cm}}_{\bar{r}_{cm} \times \sum_i m_i \bar{v}_{cm} \,=\, \bar{L}_{cm}} + \underbrace{\cancel{\sum_i \bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_{cm}}}_{\left(\sum_i m_i \bar{r}_i'\right) \times \bar{v}_{cm} \,=\, 0} + \underbrace{\cancel{\sum_i \bar{r}_{cm} \times m_i \bar{v}_i'}}_{0} + \underbrace{\sum_i \bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_i'}_{\bar{L}'} =$$

Teoremi di König (I)

I teoremi di Koenig forniscono una relazione tra quantità misurate nel sistema di riferimento inerziale e le stesse quantità misurate nel sistema di riferimento del centro di massa.

I teorema di Koenig: momento angolare

$$\boxed{\bar{L} = \bar{L}_{cm} + \bar{L}'}$$

Teoremi di König (I)

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{L}}' + \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} \times m\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}} = \vec{\boldsymbol{L}}' + \vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{CM}}$$

Il momento angolare del sistema nel sistema di riferimento inerziale è dato dalla somma di:

- Momento angolare nel sistema di riferimento del centro di massa $\vec{\boldsymbol{L}}'$
- Momento angolare dovuto al moto del centro di massa, con una massa pari alla massa totale del sistema $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{CM}}$

Teoremi di König (II)

Il teorema di Koenig: energia cinetica

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\boxed{\bar{v}_i = \bar{v}_{cm} + \bar{v}_i'}$$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_{cm}^2 + v_i'^2 + 2\,\bar{v}_{cm} \cdot \bar{v}_i' \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2}_{E_k^{cm}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{E_k'} + \cancel{\sum_i m_i \bar{v}_{cm} \cdot \bar{v}_i'}_{\;\to 0}$$

$$\sum_i m_i \bar{v}_{cm} \cdot \bar{v}_i' = \cancel{\sum_i \bar{v}_{cm} \cdot m_i \bar{v}_i'}$$

$$\Rightarrow E_k = E_k^{cm} + E_k'$$

Teoremi di König (II)

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM}$$

In un sistema di riferimento inerziale, l'energia cinetica del sistema complessivo si può scrivere come la somma di:

- Energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa E'_k
- Energia cinetica di un punto materiale con massa pari alla massa totale del sistema che si muove con la velocità del centro di massa $E_{k,CM}$

Teoremi di König (I)

- I teorema di Koenig del momento angolare:

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{L}}' + \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} \times m\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}} = \vec{\boldsymbol{L}}' + \vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{CM}}$$

- II teorema di Koenig dell'energia cinetica

$$E_k = E_k' + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E_k' + E_{k,CM}$$

Teoremi di König

- Grazie alla definizione di centro di massa e sistema di riferimento del centro di massa, possiamo descrivere momento angolare ed energia cinetica totali come:
  - Moto medio del sistema (moto del centro di massa)
  - Moto del sistema rispetto al centro di massa (moto interno)

  Non si può fare lo stesso con la quantità di moto, che è identicamente nulla nel sistema di riferimento del centro di massa

Il centro di massa descrive la quantità di moto totale del sistema, ma non è sufficiente a descrivere il momento angolare e l'energia cinetica del sistema, perché bisogna tener conto anche del moto «intorno» al centro di massa

Teoremi di König

Singolo punto materiale

Sistema di punti materiali

Teoremi di König

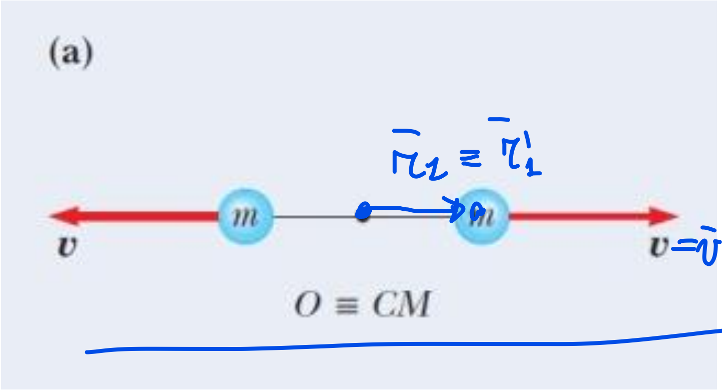
Singolo punto materiale

Sistema di punti materiali

Esempio: calcolo di $\vec{L}$ ed E_k

$M = \sum_i m_i$

Determiniamo i casi di $\vec{\boldsymbol{L}}, \vec{\boldsymbol{L}}'$ e $\vec{\boldsymbol{L}}_{CM}$ e di E_k, E_k' ed E_{CM} nei seguenti casi:



$$\bar{L} = \bar{L}_{cm} + \bar{L}'$$

$$\bar{L}_{cm} = \cancel{\bar{r}_{cm} \times M\bar{v}_{cm}} = 0$$

$$\bar{L}' = \cancel{\sum_i \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}_i} = 0$$

$$\bar{L} = 0$$

$$\bar{P} = m\left(\bar{v} + (-\bar{v})\right) = 0$$

$$E_k = \cancel{E_k^{cm}} + E_k' \qquad E_k^{cm} = 0$$

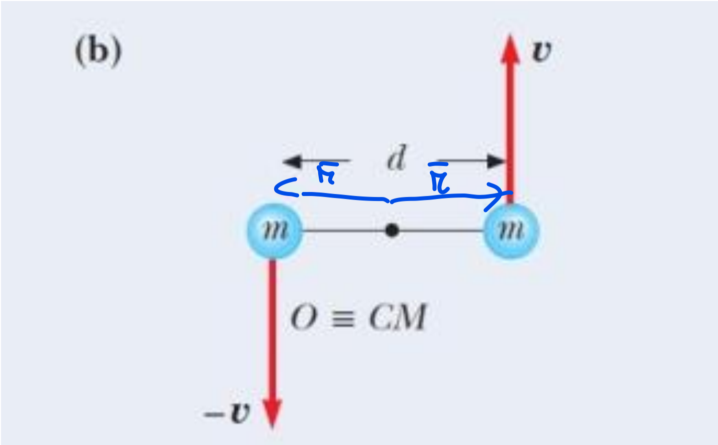
$$E_k^{cm} = \frac{1}{2} M \bar{v}_{cm}$$

$$E_k = E_k' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$\bar{v}_{cm} = \frac{m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2m}\left[\bar{v} + (-\bar{v})\right] = 0$$

Esempio: calcolo di $\vec{L}$ ed E_k

Determiniamo i casi di $\vec{\boldsymbol{L}}, \vec{\boldsymbol{L}}'$ e $\vec{\boldsymbol{L}}_{CM}$ e di E_k, E_k' ed E_{CM} nei seguenti casi:



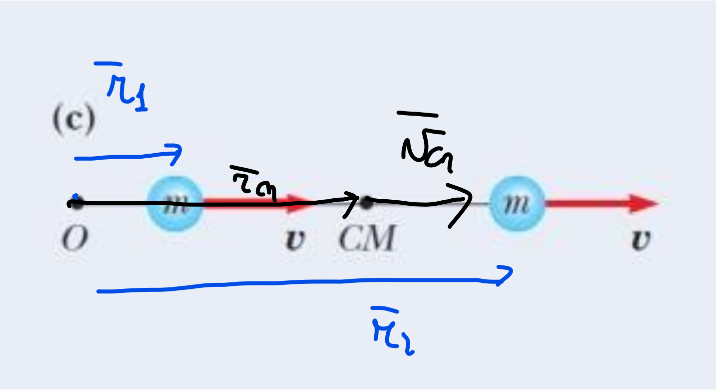
$\bar{L}$

E_k

$\bar{r} \equiv \bar{r}'$

Esempio: calcolo di $\vec{L}$ ed E_k

Determiniamo i casi di $\vec{\boldsymbol{L}}, \vec{\boldsymbol{L}}'$ e $\vec{\boldsymbol{L}}_{CM}$ e di E_k, E_k' ed E_{CM} nei seguenti casi:



$$\bar{L} = \bar{L}_{cm} + \bar{L}'$$

$$\bar{r}_{cm} = \frac{m\bar{r}_1 + m\bar{r}_2}{2m} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2} \quad \Big| \quad \bar{v}_{cm} = \frac{m\bar{v} + m\bar{v}}{2m} = \bar{v}$$

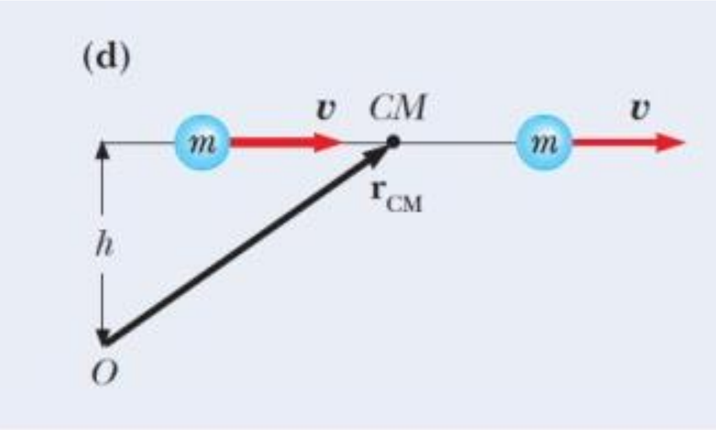
$$\bar{L} = \bar{L}_{cm} = \bar{r}_{cm} \times 2m\bar{v}_{cm} = 0$$

$$E_k = E_{k_{cm}} + E_k'$$

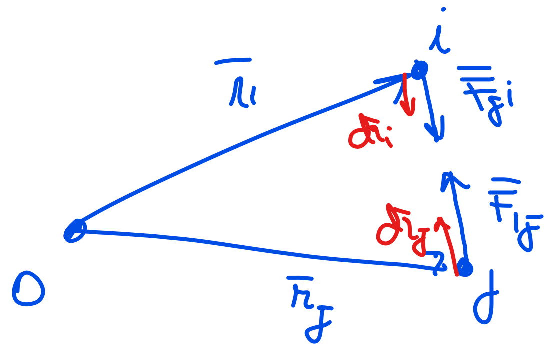
$$E_{k_{cm}} = \frac{1}{2} 2m v_{cm}^2 = m v^2$$

Esempio: calcolo di $\vec{L}$ ed E_k

Determiniamo i casi di $\vec{\boldsymbol{L}}, \vec{\boldsymbol{L}}'$ e $\vec{\boldsymbol{L}}_{CM}$ e di E_k, E_k' ed E_{CM} nei seguenti casi:



Lavoro ed energia cinetica per un sistema di punti materiali



$$m_i \bar a_i = \bar F_i^I + \bar F_i^{(E)}$$

$$dW_i = \bar F_i^I \cdot d\bar r_i + \bar F_i^{Ex} \cdot d\bar r_i = dW_i^I + dW_i^{Ex}$$

$$\bar F_{ij} \cdot d\bar r_j + \bar F_{ji} \cdot d\bar r_i = \bar F_{ij} \cdot (d\bar r_j - d\bar r_i) = \bar F_{ij} \cdot d\bar r_{ij}$$

$$\bar F_{ij} = - \bar F_{ji}$$

$$\underline{dW_i} = \bar F_i \cdot d\bar r_i = m_i \bar a_i \cdot d\bar r_i = m_i \frac{d\bar v_i}{dt} \cdot d\bar r_i = m_i \, d\bar v_i \cdot \frac{d\bar r_i}{dt}$$

$$= \underline{m_i \, d\bar v_i \cdot \bar v_i}$$

$$W = \int dW = \int_A^B m \, d\bar v \cdot \bar v = m \int_A^B v \, dv = \underbrace{\frac{1}{2} m v_B^2}_{E_{k,B}} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{E_{k,A}}$$

Lavoro ed energia cinetica per un sistema di punti materiali

Lavoro ed energia cinetica per un sistema di punti materiali

Il lavoro sull'i-sima particella del sistema di punti materiali è dato da:

$$dW_i = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{Ext}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{Int}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$$

Quindi il lavoro totale sarà:

$$W = W^{Ext} + W^{Int}$$

In generale, **il lavoro delle forze interne può essere diverso da zero**, ed è legato alla variazione delle mutue distanze tra i punti del sistema

$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = W^{Ext} + W^{Int}$$

Teorema dell'energia cinetica per un sistema di punti materiali

Lavoro ed energia cinetica per un sistema di punti materiali

Quando tutte le forze sono conservative, il loro lavoro è l'opposto della variazione di energia potenziale, sia per le forze interne che per quelle esterne

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p$$

Teorema di conservazione dell'energia meccanica per un sistema di punti materiali

Per forze non conservative, la variazione di energia meccanica è uguale al lavoro delle forze non conservative

Corpo rigido

Corpo rigido - caratteristiche

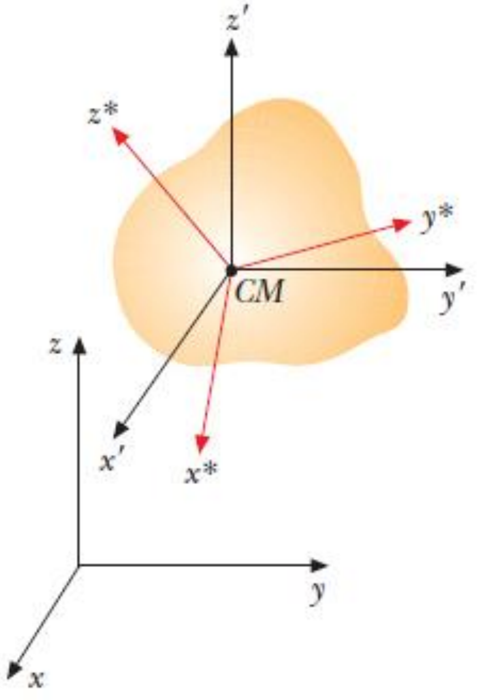
- Insieme di punti materiali sottoposti ad una tale mutua interazione da mantenerli in posizione fissa l'uno rispetto all'altro

- Modello **ideale** di corpo indeformabile a cui *si avvicinano* i corpi solidi ordinari

- Il corpo rigido non può essere trattato alla stessa stregua del punto materiale. Infatti, nel moto è possibile individuare:
  - un moto complessivo (riconducibile al moto del centro di massa)
  - Il moto dei punti intorno al centro di massa

Corpo rigido – scelta del sistema di riferimento

- Sistema di riferimento inerziale (x,y,z)
- Sistema di riferimento del centro di massa (x',y',z')
- Sistema di riferimento del corpo rigido (x*,y*,z*)



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III
EdiSES Edizioni

Corpo rigido – centro di massa

Il centro di massa è fisso rispetto ai punti del corpo rigido

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}{m_i}$$

Centro di massa di un corpo rigido?

Moto del corpo rigido

- I equazione cardinale

$$\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$$

(solo forze **esterne**)

- II equazione cardinale

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

(solo momento delle forze **esterne**)

- Teorema dell'energia cinetica

$$W = \Delta E_k$$

Il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è sempre nullo, perché non cambiano le mutue distanze tra i punti

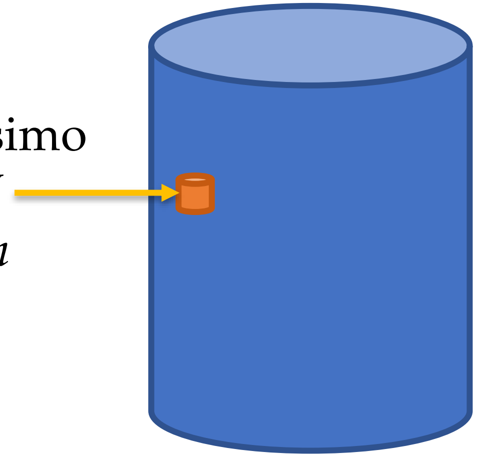
Corpo continuo

- dV è piccolo nella scala macroscopica, ma grande nella scala atomica

- Discreto → continuo

$$\Sigma \quad \rightarrow \quad \int$$

Elemento infinitesimo di volume dV con massa dm



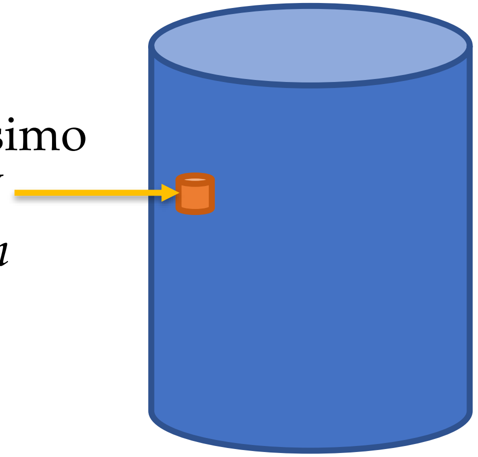
- Possiamo utilizzare i risultati che abbiamo ottenuto per il sistema di punti discreti
- Possiamo applicare i metodi del calcolo integrale per la determinazione di alcune grandezze

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Corpo continuo - densità

Definizione di **densità**:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho dV$$



- La massa può non essere uniformemente distribuita
  → $\rho(x, y, z)$ densità funzione della posizione

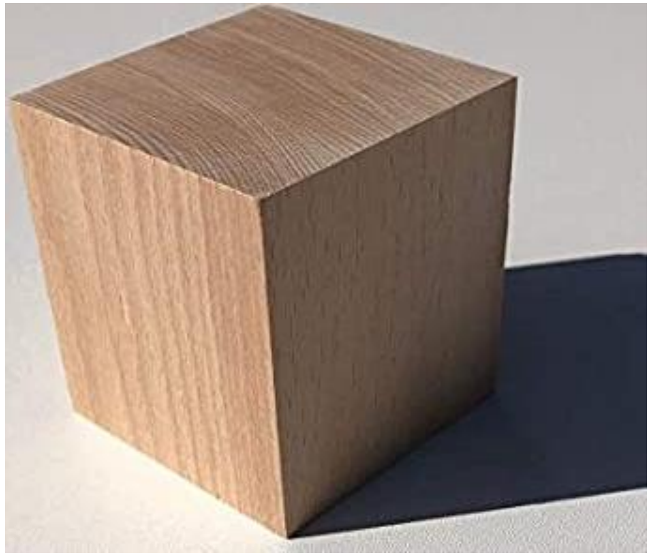
La massa totale sarà:

$$m = \int dm = \int_V \rho \, dV$$

Corpo continuo - densità

Omogeneo

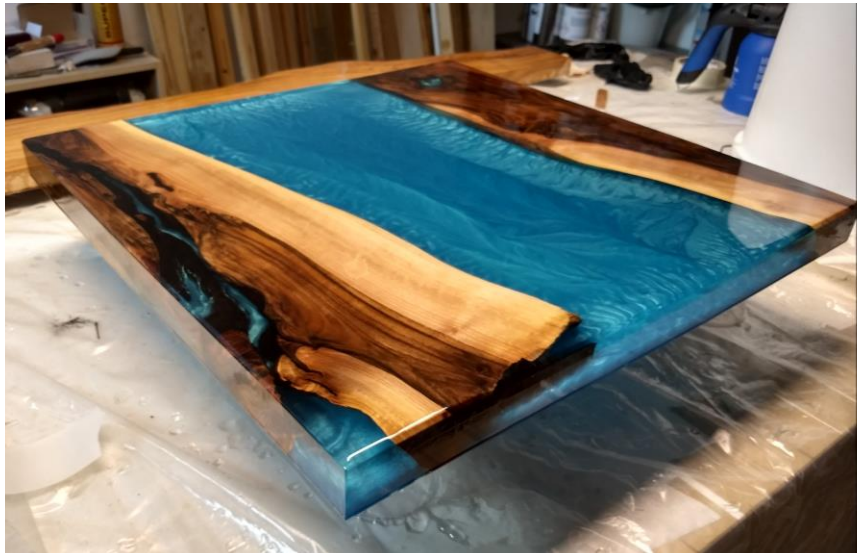
- $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V$



Non omogeneo

- Possiamo calcolare la densità media se non conosciamo la funzione puntuale $\rho(x, y, z)$

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V}$$



Corpo continuo - densità

- Densità volumica

$$\rho_V = \frac{dm}{dV}$$

Unità di misura: $kg \cdot m^{-3}$

- Densità superficiale

$$\rho_S = \frac{dm}{dS}$$

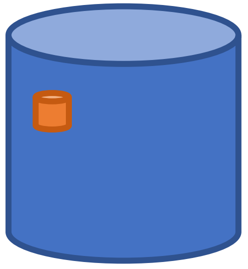
Unità di misura: $kg \cdot m^{-2}$

- Densità lineare

$$\rho_l = \frac{dm}{dl}$$

Unità di misura: $kg \cdot m^{-1}$

dV = elemento di volume



dS = elemento di superficie

dl = elemento di linea

Volume specifico

- Si definisce volume specifico di un solido la quantità:

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm}$$

Densità: massa nell'unità di volume

Volume specifico: volume nell'unità di massa

Posizione del centro di massa

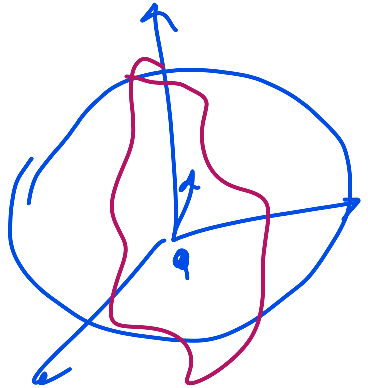
Nel discreto:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\boxed{\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho\, dV \qquad \frac{\rho}{dm} = \frac{1}{dV}}$$

Nel continuo:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\int \bar{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_V \bar{r} \rho\, dV}{\int_V \rho\, dV} = \frac{1}{M} \int_V \bar{r} \rho\, dV$$



Per un corpo omogeneo:

$$\frac{\rho}{M} \int_V \bar{r}\, dV = \frac{1}{V} \int_V \bar{r}\, dV$$

Posizione del centro di massa

Nel discreto:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}{m_i}$$

Nel continuo:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \frac{\int \vec{\boldsymbol{r}} dm}{\int dm}$$

$$= \frac{\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

$$= \frac{1}{m} \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \rho dV$$

Per un corpo omogeneo:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \frac{\rho}{m} \int_V \vec{\boldsymbol{r}}\, dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{\boldsymbol{r}}\, dV$$

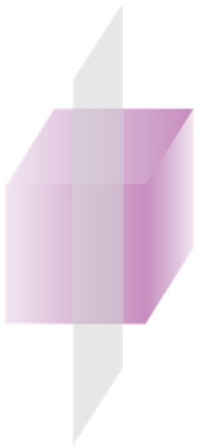
Posizione del centro di massa

- Corpo simmetrico rispetto ad un punto

- Corpo simmetrico rispetto ad un asse

asse di simmetria

- Corpo simmetrico rispetto ad un piano



piano di simmetria

Esempio: Calcolo del centro di massa di un'asta rigida

Determiniamo la posizione del centro di massa di una bacchetta rigida omogenea di massa m=1kg e lunghezza l=20 cm.

Moto di un corpo rigido

Scomponiamo il moto di un corpo rigido in due moti:

- Traslazione
- Rotazione

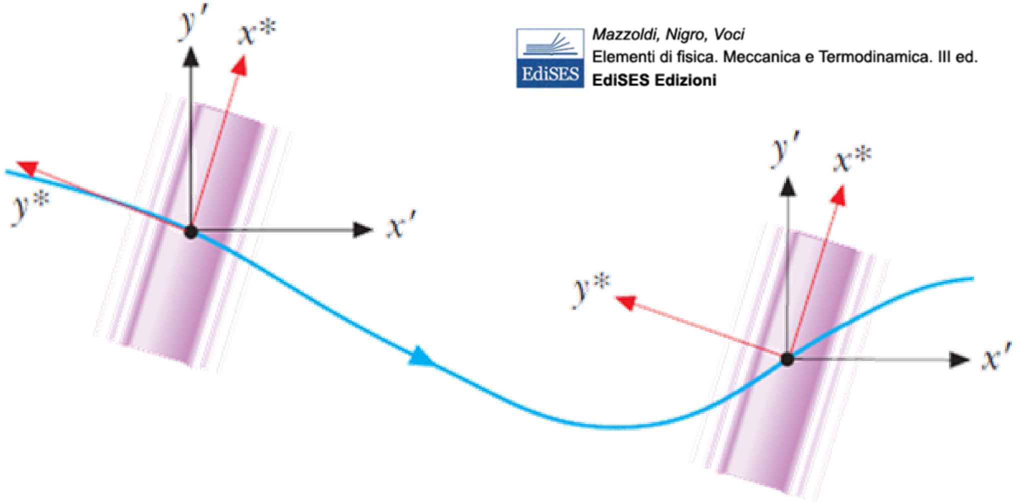
Moto di un corpo rigido

- Traslazione

Moto di un corpo rigido

- Traslazione

La posizione del sistema di riferimento solidale al corpo non cambia rispetto al sistema di riferimento del centro di massa → $\vec{L}' = 0 \;\; e \;\; E'_k = 0$



Tutti i punti del corpo descrivono traiettorie uguali e la loro velocità coincide in modulo, direzione e verso con quella del centro di massa.

Noto il moto del centro di massa, è noto il moto di qualsiasi altro punto.

- Equazione del moto del centro di massa: $\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$
- Equazione del momento angolare: $\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$

Moto di un corpo rigido

- Rotazione

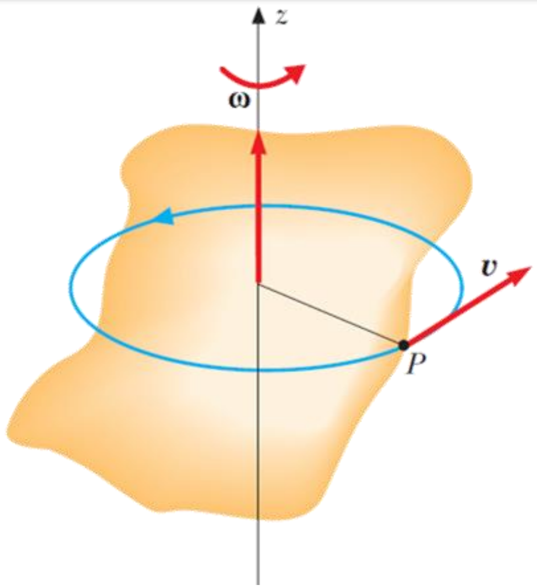
Moto di un corpo rigido

- Rotazione

La rigidità del corpo implica che tutti i punti descrivono archi di circonferenza che stanno su piani tra loro paralleli, con centro situato sull'asse di rotazione
Le velocità dei singoli punti sono diverse tra loro $(\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}})$, ma la velocità angolare è uguale per tutti i punti $\omega = \frac{v_i}{R_i}$, dove R_i è la distanza di ciascun punto dall'asse di rotazione.

Equazione del moto:

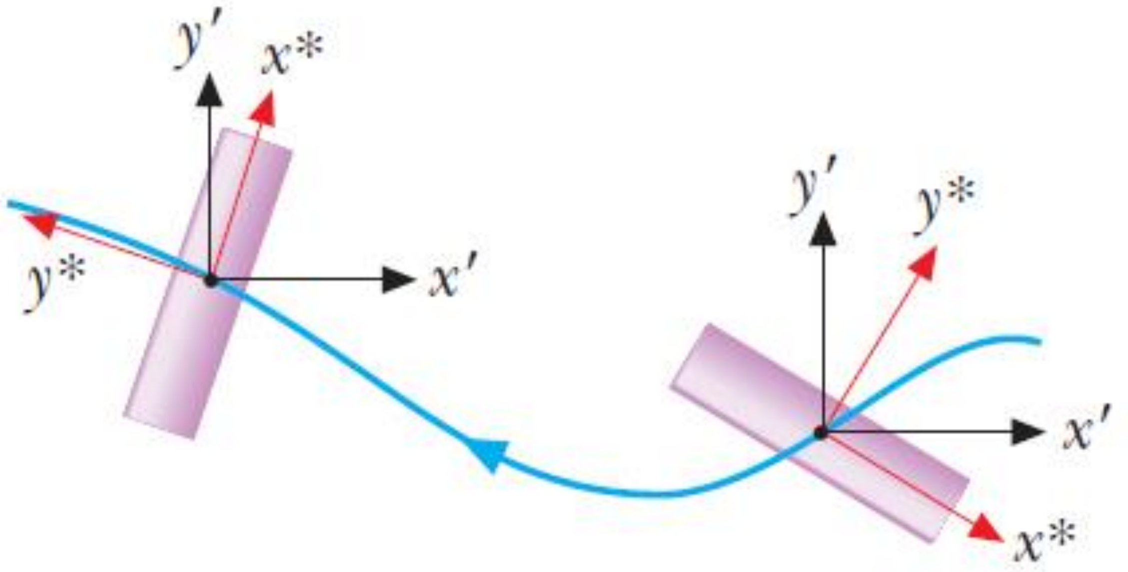
$$\vec{\boldsymbol{M}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}$$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Moto di un corpo rigido

Il moto rigido più generale è **rototraslazionale**: ogni spostamento infinitesimo può essere sempre considerato come la somma di una traslazione più una rotazione infinitesime, individuate da $\vec{\boldsymbol{v}}$ ed $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ variabili nel tempo.



Equilibrio statico del corpo rigido

Equilibrio statico del corpo rigido

- Assenza di moto traslazionale → $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{CM}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}} = 0$

  Se il corpo è inizialmente in quiete → $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}} = 0$

- Assenza di moto rotazionale → $\vec{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{M}} = 0$