Lezione 8

Fisica I – Ingegneria Automazione e Informatica

Università di Napoli "Federico II"

prof. Nicola R. Napolitano

Riepilogo della lezione precedente

1) Forze centripete: caso della tensione, della normale, della forza di gravita’
2) forze apparenti: forza centrifuga
3) forza elastica
4) Massa della galassia

Massa della Via Lattea?

Il sole ruota a circa 220 km/s ad una distanza dal centro della galassia di circa 8kpc (kiloparsec).

Sapendo che 1pc=3x10^16m di che ordine di grandezza è la massa contenuta entro il raggio tracciato dal sole, assumendo un’orbita circolare e che tutta la massa della galassia sia contenuta nel suo centro? [$G=6.67\times10^{-11}\ m^3s^{-2}kg^{-1}$]

Esprimere il risultato in masse solari sapendo che $M_{sun} \sim 2\times10^{30}$kg

Massa della Via Lattea?

Da Wikipedia: In 2010, a measurement of the radial velocity of halo stars found that the mass enclosed within 80 kiloparsecs is 7×10^{11} Msun

Questo corrisponde al conto fatto a casa? se no, di quanto? e perche'?

Monthly Notices of the ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY

MNRAS **465,** 76–94 (2017) doi:10.1093/mnras/stw2759
Advance Access publication 2016 October 26

The mass distribution and gravitational potential of the Milky Way

Paul J. McMillan[1,2]★

[1]*Lund Observatory, Department of Astronomy and Theoretical Physics, Lund University, Box 43, SE-22100 Lund, Sweden*
[2]*Rudolf Peierls Centre for Theoretical Physics, 1 Keble Road, Oxford OX1 3NP, UK*

Accepted 2016 October 21. Received 2016 October 21; in original form 2016 August 1

ABSTRACT

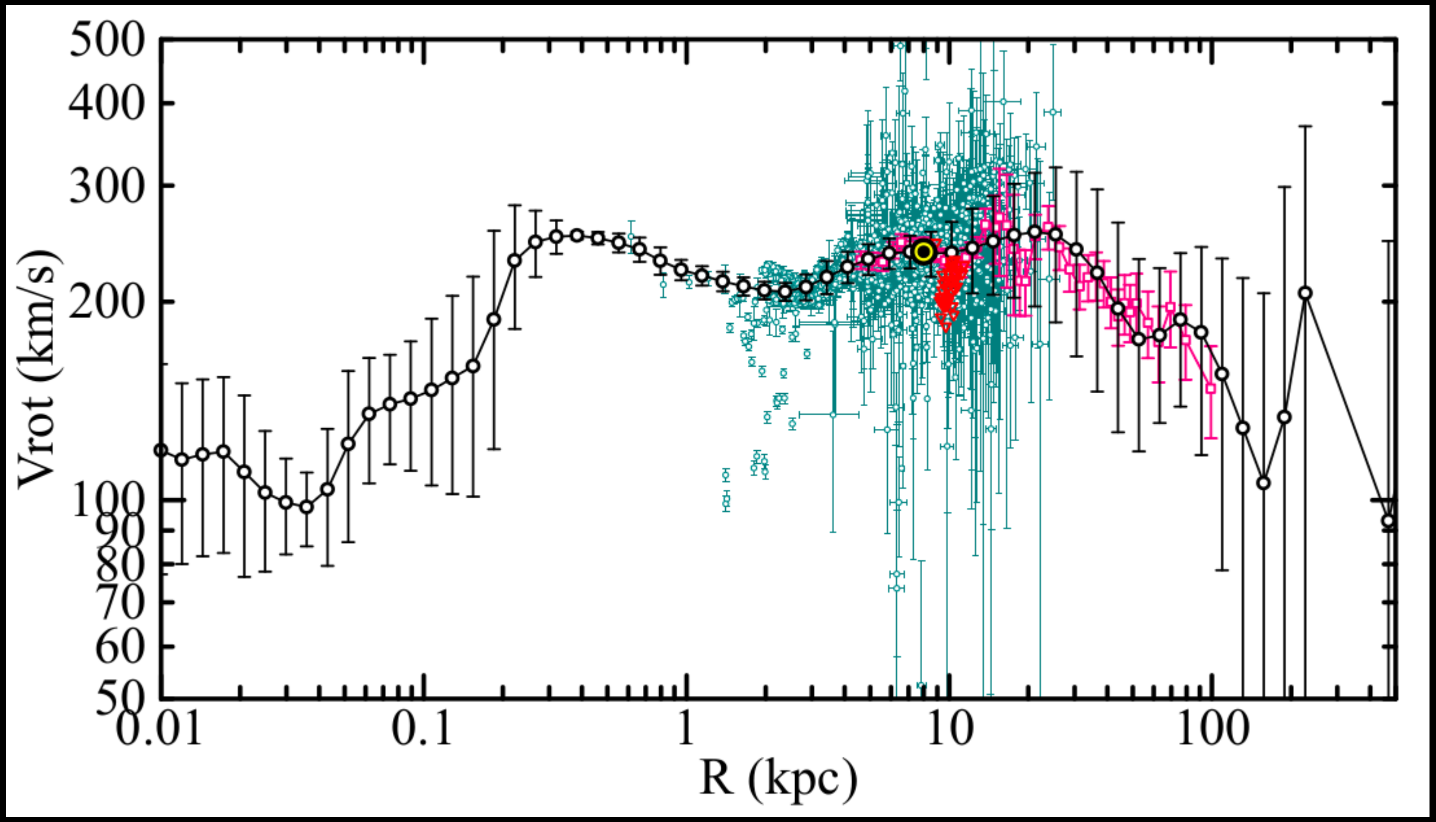
We present mass models of the Milky Way created to fit observational constraints and to be consistent with expectations from theoretical modelling. The method used to create these models is that demonstrated in our previous study, and we improve on those models by adding gas discs to the potential, considering the effects of allowing the inner slope of the halo density profile to vary, and including new observations of maser sources in the Milky Way amongst the new constraints. We provide a best-fitting model, as well as estimates of the properties of the Milky Way. Under the assumptions in our main model, we find that the Sun is $R_0 =$ 8.20 ± 0.09 kpc from the Galactic Centre, with the circular speed at the Sun being $v_0 =$ 232.8 ± 3.0 km s^{-1}; and that the Galaxy has a total stellar mass of (54.3 ± 5.7) × 10^9 M$_\odot$, a total virial mass of (1.30 ± 0.30) × 10^{12} M$_\odot$ and a local dark-matter density of 0.40 ± 0.04 GeV cm^{-3}, where the quoted uncertainties are statistical. These values are sensitive to

Questo e' un lavoro scientifico piu' recente (2017)

Massa della Via Lattea?

Da Wikipedia: In 2010, a measurement of the radial velocity of halo stars found that the mass enclosed within 80 kiloparsecs is 7×10^{11} Msun

Questo corrisponde al conto fatto a casa? se no, di quanto? e perche'?



Usando la formula

$$G\frac{M_{\mathrm{MW}}m_{\mathrm{sun}}}{R_0^2} = m_{\mathrm{sun}}\frac{v_{\mathrm{sun}}^2}{R_0} \rightarrow M_{\mathrm{MW}} = \frac{v_{\mathrm{sun}}^2 R_0}{G}$$

G=6.67x10^{-11} m^{3}s^{-2}kg^{-1}

```
G0 = 6.67 * 10^(-11) / (1000^2) / (3 * 10^19) (*km^2/s^2 kpc kg-1*);
Msun = 2 * 10^30 (*kg*);

(Debug) In[59]:=
vrot = 220 (*km/s*);
Rad = 8. (*kpc*);
Mass = vrot^2 / G0 * Rad / (Msun)

(Debug) Out[61]=
8.70765 × 10^10

(Debug) In[62]:=
vrot80 = 200 (*km/s*);
Rad80 = 80 (*kpc*);
Mass80 = vrot80^2 / G0 * Rad80 / (Msun)

(Debug) Out[64]=
7.1964 × 10^11

(Debug) In[68]:=
vrotMM = 233 (*km/s*);
RadMM = 8.2 (*kpc*);
MassMM = vrotMM^2 / G0 * RadMM / (Msun)

(Debug) Out[70]=
1.00113 × 10^11
```

Your Calculation

Wikipedia

McMillan

7×10^{11} Msun within 80 kiloparsecs

8.20 ± 0.09 kpc from the Galactic Centre, with the circular speed at the Sun being v_0 = 232.8 ± 3.0 km s^{-1}; and that the Galaxy has a total stellar mass of (54.3 ± 5.7) × 10^9 M$_\odot$ a total virial mass of (1.30 ± 0.30) × 10^{12} M$_\odot$ and a local dark-matter density of 0.40 ±

Forza viscosa e velocità limite

Consideriamo un fiuido che scorre lentamente e in condizioni di regime in un tubo : il moto avviene in modo ordinato e per strati (*moto laminare), ossia un arbitrario piccolo volume di liquido si muove parallelamente all'asse del tubo*.

Un corpo immerso in tale fluido sperimenta una forza che si oppone al suo moto causata dall'attrito tra la sua superficie ed il fluido circostante e che è *proporzionale alla sua velocità e al suo coefficiente di viscosità*.

Forze ritardanti [dipendenti dalla velocità]

studio **interazione** tra corpo e mezzo nel quale si muove:

*il mezzo (liquido o gas) esercita una **forza ritardante** R sul corpo che si muove attraverso di esso*

- **modulo** di R: funzione complessa di velocità **v**
- **direzione** e **verso**: opposti al moto

Caso 1. $R \propto v$

Caso 2. $R \propto v^2$

Forza ritardante in un fluido

*la **forza ritardante** (frenante) che agisce su un corpo che cade in un fluido dipende dalla **velocità** e dalla **viscosità***

$$\vec{R} = -b\vec{v} = -\gamma\eta\,\vec{v}$$

η = coefficiente viscosità

γ = coefficiente forma corpo

per corpi **sferici** di raggio **r,** si ha $\gamma = 6\pi r$

$$\vec{R} = -b\vec{v} = -6\pi\, r\,\eta\,\vec{v}$$

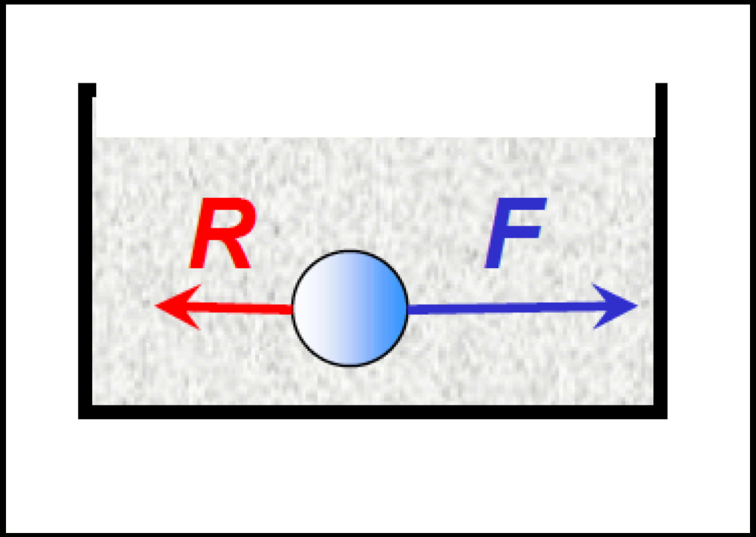
legge di Stokes

Caso 1. Forza ritardante proporzionale a v

equazione di moto in un fluido sotto azione di forza ***F***

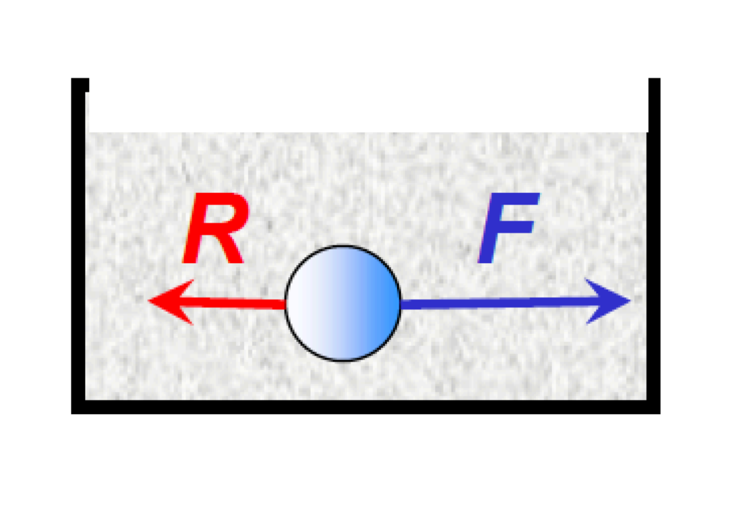
$$\vec{F}_{net} = \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a} = md\vec{v} / dt$$

$$F - bv = mdv / dt$$



Caso 1. Forza ritardante proporzionale a v

equazione di moto in un fluido
sotto azione di forza ***F***



$$\vec{F}_{net} = \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a} = md\vec{v} / dt$$

$$F - bv = mdv / dt$$

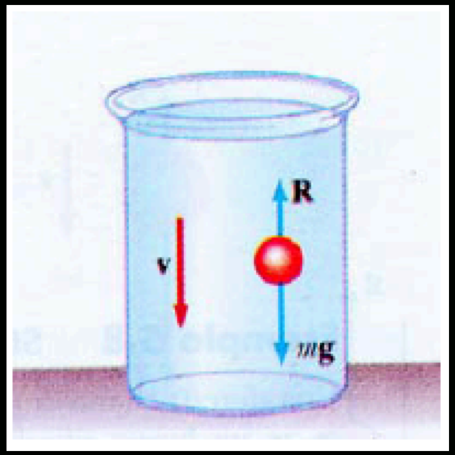
per a=0 si ottiene la velocità limite:

$$v = v_L = \frac{F}{b} \quad \Rightarrow F_{net} = 0$$ moto rett. uniforme

$$v < v_L \quad \Rightarrow F_{net} > 0$$ moto accelerato

$$v > v_L \quad \Rightarrow F_{net} < 0$$ moto ritardato

[**esempio**: oggetti che cadono in fluidi con bassa velocità;
oggetti piccoli in aria (polvere)]



$$\vec{R} = -b\,\vec{v}$$

b = coeff. dipendente da proprietà oggetto [forma, dimensioni]

$$\Sigma F_y = mg - b\,v = ma = m\frac{dv}{dt}$$

seconda legge di Newton

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v}$$

equazione **differenziale**

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v}$$

equazione **differenziale**

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

Soluzione

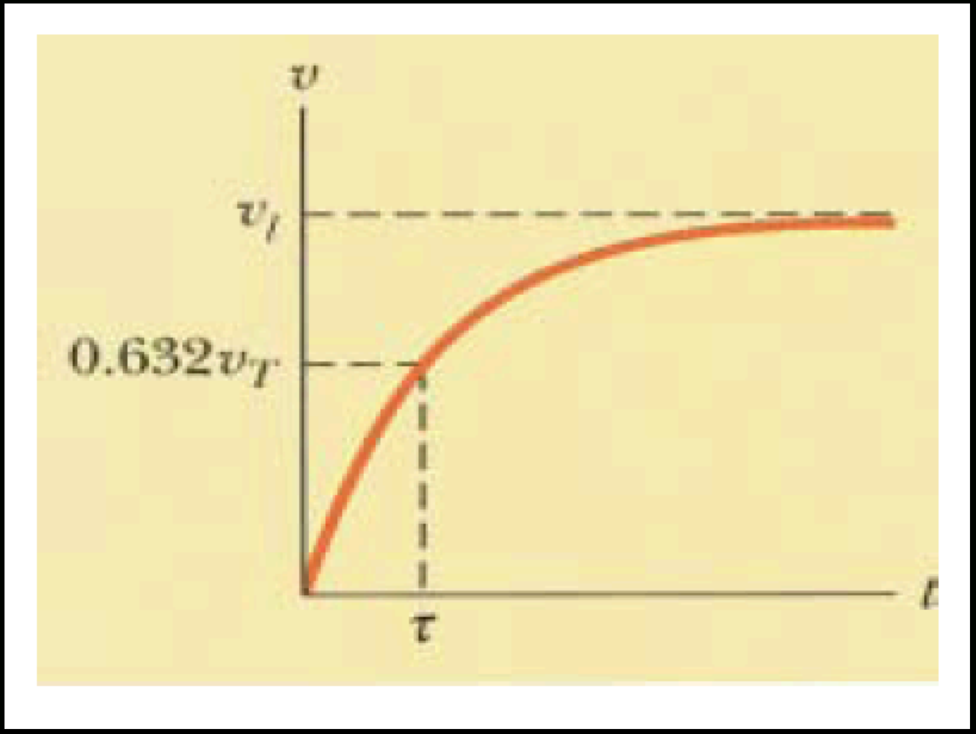
$$y = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx$$

dove $A(x) = \int a \mathrm{d}x$ e' la primitiva di $a(x)$

$\rightarrow v(t=0)=0$

$\rightarrow v(t \to \infty) = v_{\text{limite}} = \dfrac{mg}{b} \qquad per\ \ R = mg \quad \left(a = \dfrac{dv}{dt} = 0\right)$

$$\boxed{v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right) = v_{\text{limite}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



per $t = \tau = m/b$

$v = 63\%\ v_{\text{limite}}$

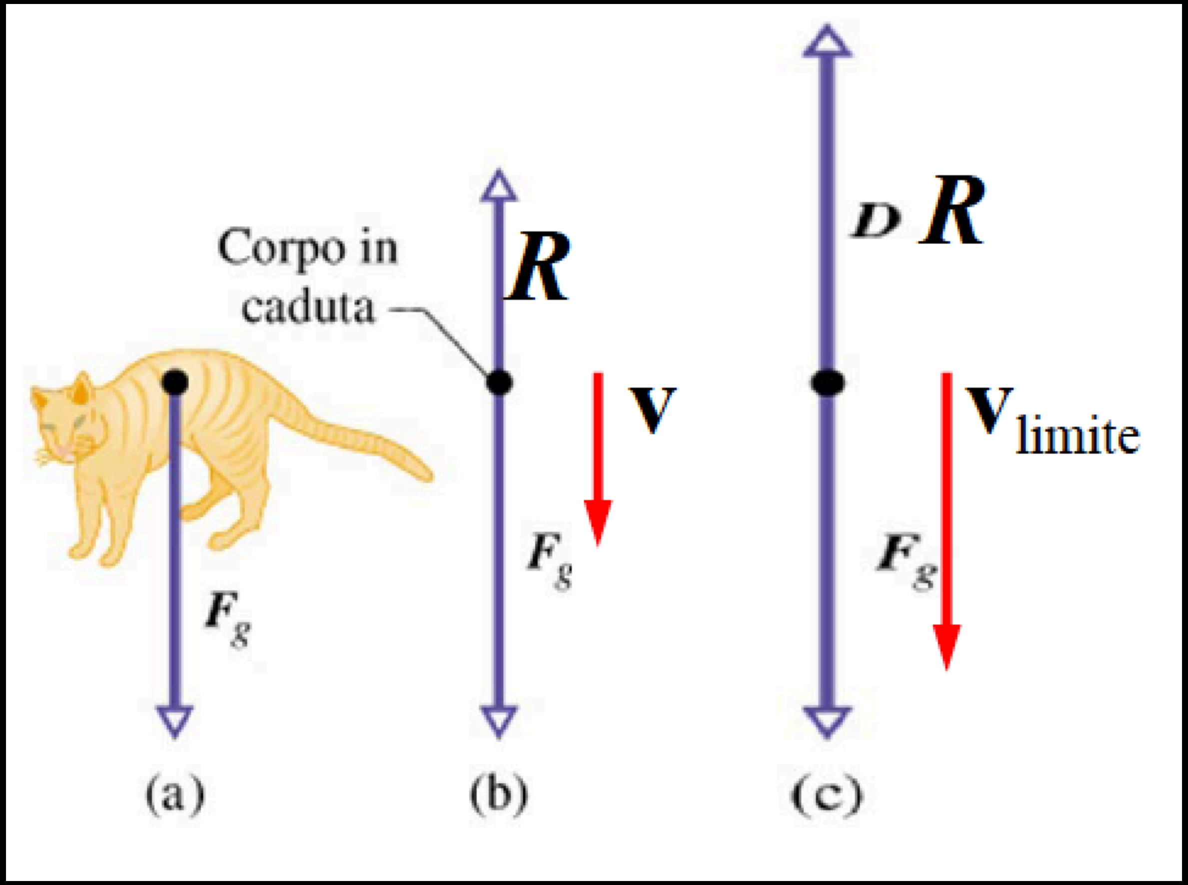
[$e \approx 2.72$, $1/e \approx 0.37$]

Caso 2. Forza ritardante **proporzionale** a v^2

[**esempio**: oggetti di grandi dimensioni che cadono in aria velocità elevate (aerei, paracadutisti …)]

$$R = \frac{1}{2} D \rho A\, v^2$$

ρ = densità **aria**
A = area sezione **oggetto**
D = coeff. di **resistenza**
(coeff. aerodinamico)
[≈0.5 sfera, …
≈2 oggetto irregolare]



$$\Sigma F_y = mg - \frac{1}{2} D\rho A v^2 = ma = m\frac{dv}{dt}$$

Risultante delle Forze

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{D\rho A}{2m} v^2}$$

Alcuni valori di velocità in aria

Oggetto	Velocità limite (m/s)	Distanza di regime* (m)
Proiettile (dallo sparo)	145	2500
Paracadutista in caduta libera (tipico)	60	430
Palla da baseball	42	210
Palla da tennis	31	115
Palla da pallacanestro	20	47
Pallina da ping pong	9	10
Goccia di pioggia (raggio = 1.5 mm)	7	6
Paracadutista con paracadute (tipico)	5	3

* Distanza attraverso la quale il corpo deve cadere da fermo per raggiungere il 95% della velocità limite.

velocità **limite**:

$per\ R = mg \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$

$$g - \frac{D\rho A}{2m} v_{\text{limite}}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\text{limite}} = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}}$$

N.B. dipende da dimensioni oggetto

Lavoro ed Energia

Aspetto Pratico: si possono risolvere problemi complicati senza passare per le equazioni del moto

P.es.: calcolare le velocità a diverse quote di una montagna russa senza conoscere i dettagli della traiettoria (come si farebbe conoscendo la x(t)?)

dinamica + eq. moto

Un blocco viene lanciato su per un piano privo di attrito, inclinato di un angolo θ = 32°, con velocità iniziale v_0 = 3.50 m/s.

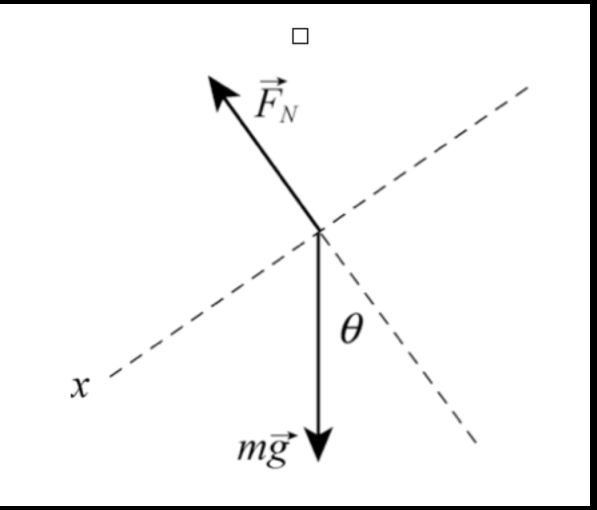
(a) Fino a che distanza risalirà (misurata lungo il piano)?

(b) Quanto tempo impiegherà?

(c) Al ritorno, con quale velocità arriverà in fondo al piano inclinato?

Scelto un opportuno sistema di assi cartesiani allineato al piano inclinato:

$F_{p,x} = mg \sin\theta = ma_x$ (dove il verso positivo delle ascisse e verso il basso)



accelerazione lungo il piano

$$a = g \sin\theta$$

distanza risalita

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$x = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{(-3{,}50\ \text{m/s})^2}{\left(9{,}8\ \text{m/s}^2\right)\sin 32{,}0°}\right) = -1{,}18\ \text{m}$$

tempo impiegato

$$v = v_0 + at$$

$$t = \frac{v_0}{a} = -\frac{v_0}{g\sin\theta} = -\frac{-3{,}50\,\text{m/s}}{\left(9{,}8\,\text{m/s}^2\right)\sin 32{,}0°} = 0{,}674\,\text{s}$$

velocita' finale

$$v = v_0 + at = v_0 + gt\sin\theta = -3{,}50 + (9{,}8)(1{,}35)\sin 32° = 3{,}50\ \text{m/s}.$$

energia: *quantità* ***scalare*** *associata allo stato (condizione) di uno o più oggetti*

legge di ***conservazione*** *dell'****energia****:*
la quantità ***totale*** *di energia rimane costante*

forme di **energia** presenti nell'universo:

- energia meccanica
- energia elettromagnetica
- energia chimica
- energia termica
- energia nucleare

energia cinetica:
energia associata
allo **stato di moto** del corpo

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2$$

[N.B. × più un corpo è **veloce**, maggiore è la sua energia
× corpo a **riposo** ha energia cinetica nulla]

dimensioni e **unità** di **misura**:

$$[K] = [m][v]^2$$

$$1\,joule = 1J = 1kg\frac{m^2}{s^2}$$

ordini di grandezza

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2$$

proiettile	m= 4.2 g	v=950 m/s	K = 1895 J
giocatore di rugby	m=110 kg	v=8.1 m/s	K = 3609 J
portaerei	m= 91400 t	v=32 nodi	K = 12 10^6 J

1 t = 10^3 kg
1 nodo = 1 miglio marino/h=1852m/h=0.52 m/s

TABELLA 6.1 Energie cinetiche tipiche di vari corpi

Corpo	Energia cinetica (J)
Terra	3×10^{33}
Luna	4×10^{28}
Space shuttle in orbita	3×10^{12}
Velocista	4×10^{3}
Ape	6×10^{-1}
Lumaca	6×10^{-8}
Elettrone in un monitor	4×10^{-15}

lavoro: *energia* ***trasferita*** *a un corpo o da un corpo per mezzo di una* ***forza***

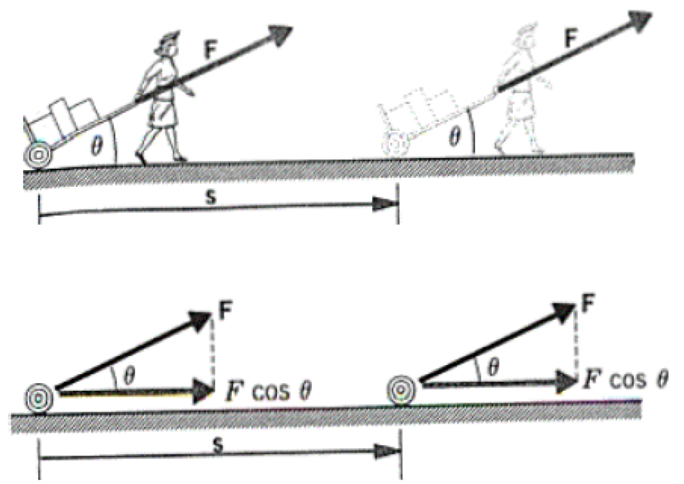
- *lavoro > 0* *cedo energia*
- *lavoro < 0* *prelevo energia*

$$L \underset{def}{=} F s \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

il lavoro ha le **stesse unità** di misura dell'**energia**]

$$[L] = [K] = [m][v]^2 \quad \Rightarrow \quad joule$$

espressione del **lavoro [forza costante]**:



corpo → puntiforme
F → **costante**
s = spostamento finale
θ= angolo forza-spostamento

v_0 = velocità iniziale
v = velocità finale

Scriviamo un po' in dettaglio il lavoro per il caso della forza costante.

Forza costante significa…accelerazione costante. Per esempio?

Caso di forza costante lungo l'asse x:

$$F_x = m\,a_x$$ seconda legge di Newton su **asse x**

dal moto uni. acc.

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x s \Longrightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = a_x$$

relazione tra velocità spostamento e accelerazione per il moto uniformemente accelerato, da cui, moltiplicando ambo i membri per *m*, si ottiene

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma_x s$$

prodotto scalare

$$\boxed{\Delta K = L = F_x s \Longrightarrow L \underset{def}{=} F s \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

N.B. solo la componente della forza **parallela** allo **spostamento** compie lavoro

Teorema dell'energia cinetica

[o delle forze vive]

*il **lavoro** svolto da una forza costante*
nello spostare un corpo puntiforme
*è pari alla **variazione** di **energia cinetica** del corpo*

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2, \quad K_f = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$L = F \cdot s = (ma) \cdot s$$

$$\Rightarrow$$

$$\Delta K = K_f - K_i = L$$

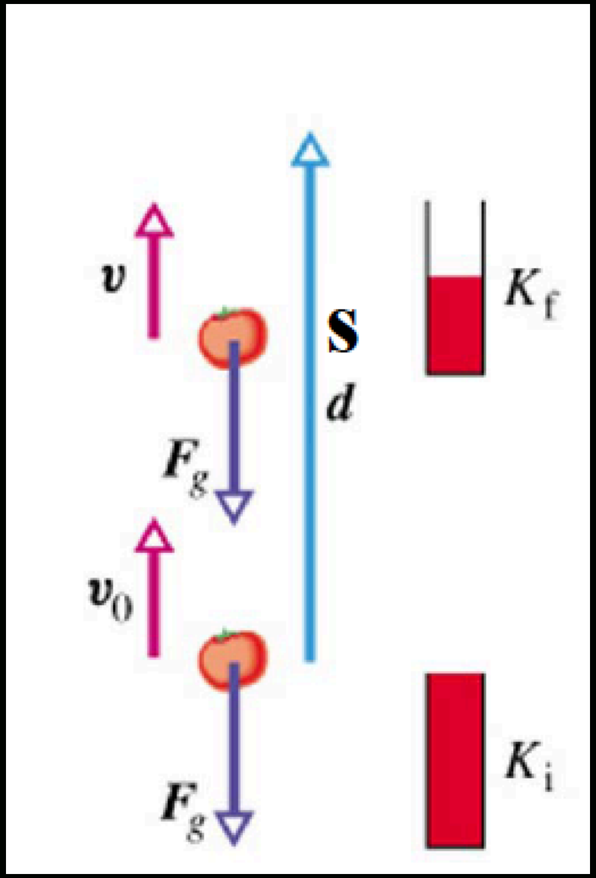
$$K_f = K_i + L$$

proprietà del lavoro:

- è un **numero** (non necessita di direzione e verso)
- è **nullo** se la forza è nulla
- è **nullo** se lo spostamento è nullo

  [spingere contro una cassa che rimane ferma non dà lavoro !!]
- è **nullo** se lo spostamento è **perpendicolare** alla forza
- è **positivo** se la forza è parallela e **concorde** allo spostamento
- è **negativo** se la forza è **opposta** allo spostamento

esempio: lavoro svolto della forza peso [forza costante]



- lancio in aria un **pomodoro** (particella di massa m)
- la velocità diminuisce ($v_0 \rightarrow v$) per effetto della forza peso

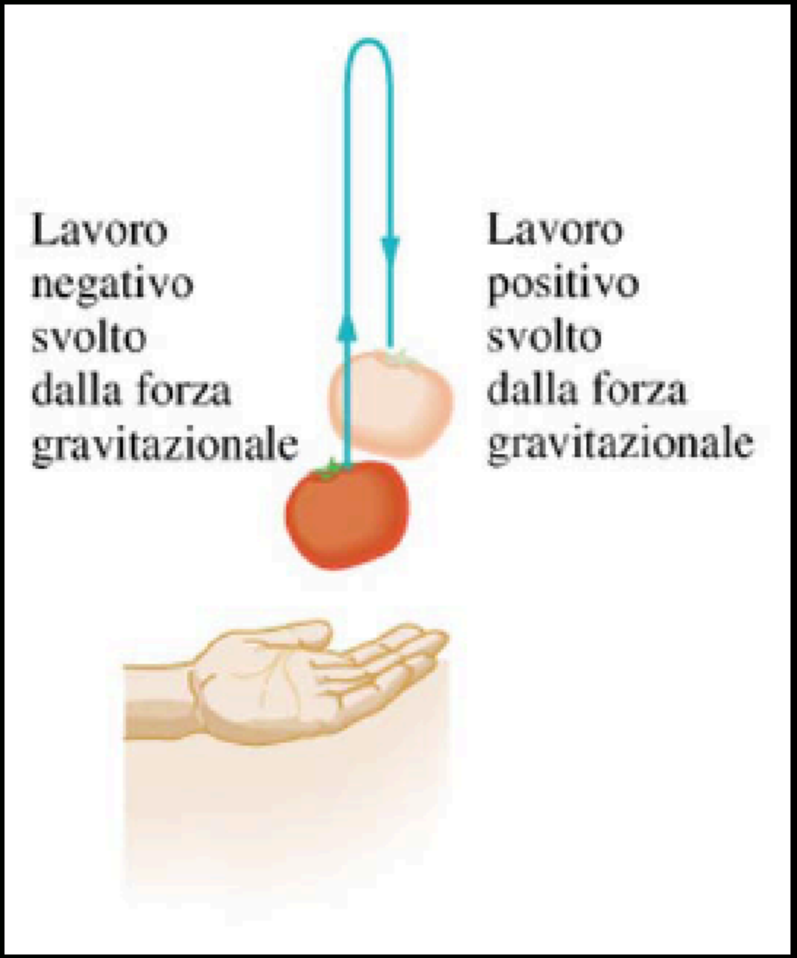
$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \Rightarrow \quad K_i > K_f$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v^2$$

Nella fase di volo la diminuzione di velocità è fatta ad opera del lavoro (negativo) della forza peso
Qual'è il lavoro totate?

× **lavoro** fatto dalla forza peso [in salita]:

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = mg\,s\cos(180^0) = -mg\,s$$



dopo avere raggiunto la **massima elevazione** il corpo cade:

× **lavoro** fatto dalla forza peso [in discesa]:

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = mg\,s\cos(0^0) = +mg\,s$$

Il lavoro totale è nullo e tale è la variazione di energia cinetica:
la velocità finale è uguale a quella di partenza (vedi equazioni del moto)

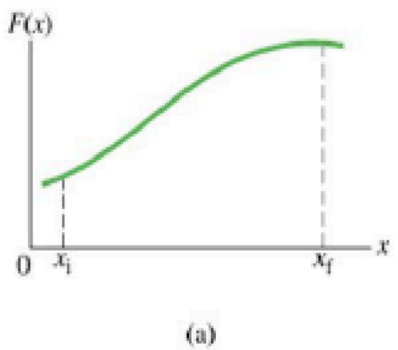
unità di misura del lavoro:

$$[L]=[K]=joule$$

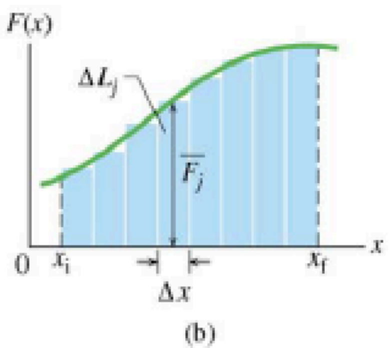
$$[L]=[F][s]=[m][a][l]=kg\frac{m}{s^2}m=Newton\cdot m$$

$$\boxed{1\ joule=1\ Newton\cdot m}$$

Lavoro svolto da Forza Variabile



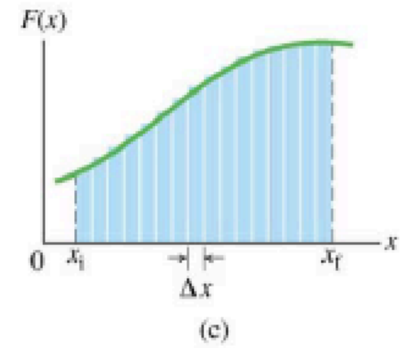
- forza **F(x)** varia con la posizione x



- **suddivido** il percorso in Δx piccoli, così che F(x) = costante in Δx

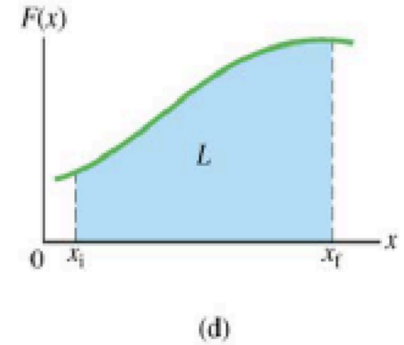
$$\overline{F}_j \;=\; \text{valore medio di F(x) in } \Delta x$$

$$\Delta L_j = \overline{F}_j \Delta x$$



- espressione **approssimata** del lavoro:

$$L = \sum \Delta L_j = \sum \overline{F}_j \Delta x$$



- risultato **esatto**:

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \left[\overline{F}_j \Delta x \right] = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx$$

lavoro = area sottesa dalla curva F(x) tra x_i e x_f

Teorema dell'energia cinetica

[forza variabile]

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2}$$

quando si svolge lavoro su un sistema e
la sola variazione del sistema è il modulo della velocità
il ***lavoro totale*** *compiuto dalla forza risultante è pari alla* ***variazione*** *di* ***energia cinetica*** *del corpo*

N.B. il teorema dell'energia cinetica
è correlato ad una variazione del **modulo della velocità**
non ad una variazione del vettore velocità

$\Longrightarrow$ risolvo molti problemi maneggiando solo **grandezze scalari**

Analisi tridimensionale

In tre dimensioni la forza si scrive $\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}} + F_z\hat{\mathrm{k}},$

L'incremento del lavoro dovuto allo spostamento 3D è

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

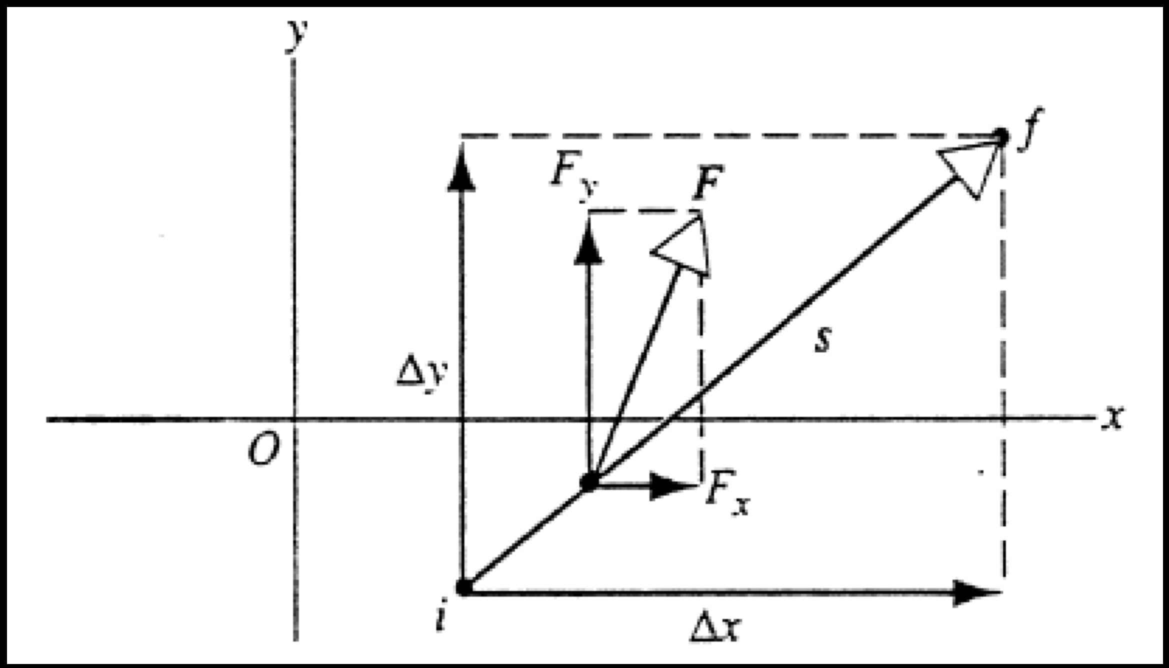
Il lavoro tra due posizioni iniziali e finali in 3D è

$$L = \int_{r_i}^{r_f} dL = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\, dz$$

Facciamo alcuni esempi di calcolo del lavoro e il significato del teorema dell’energia cinetica e le sue applicazioni.

Analisi tridimensionale

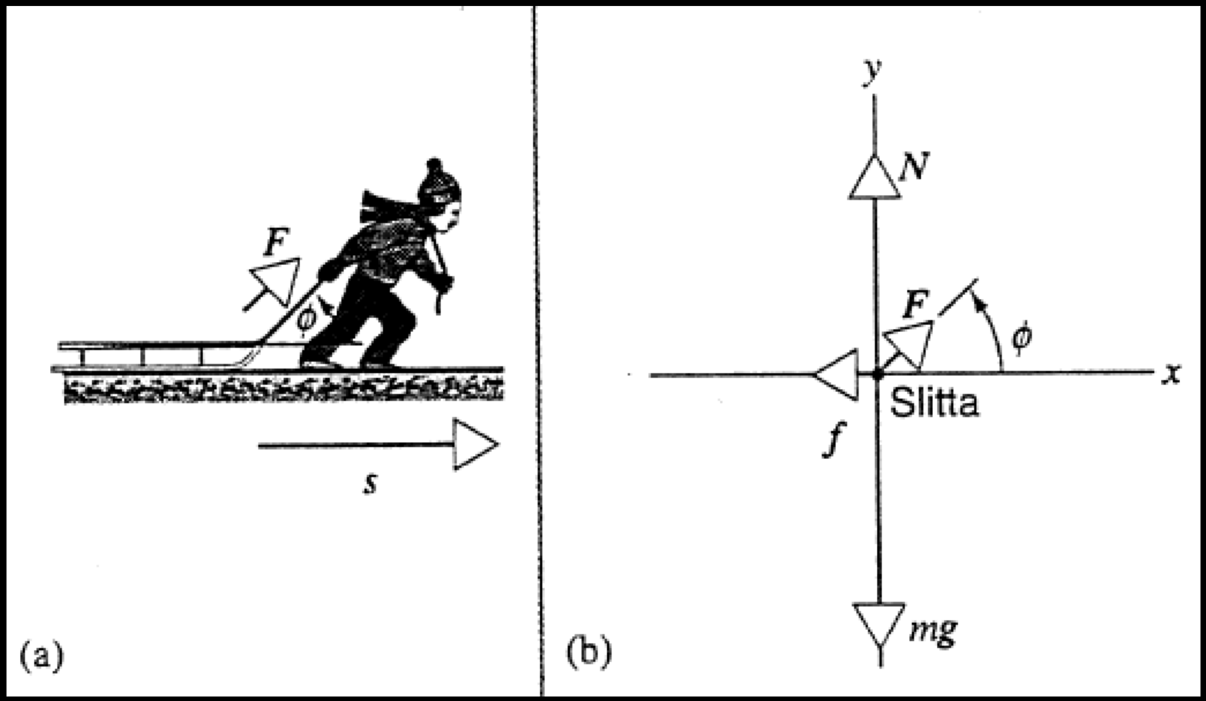
In tre dimensioni la forza si scrive $\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}}$



$$L=F_x\Delta x + F_y\Delta y$$

Il lavoro dipende del punto iniziale e finale e non dal percorso

Esempio



massa slittino = 5kg
spostamento = 12m
coeff. attrito = 0.2

calcolare il lavoro

$$\sum F_x = F \cos\phi - f$$

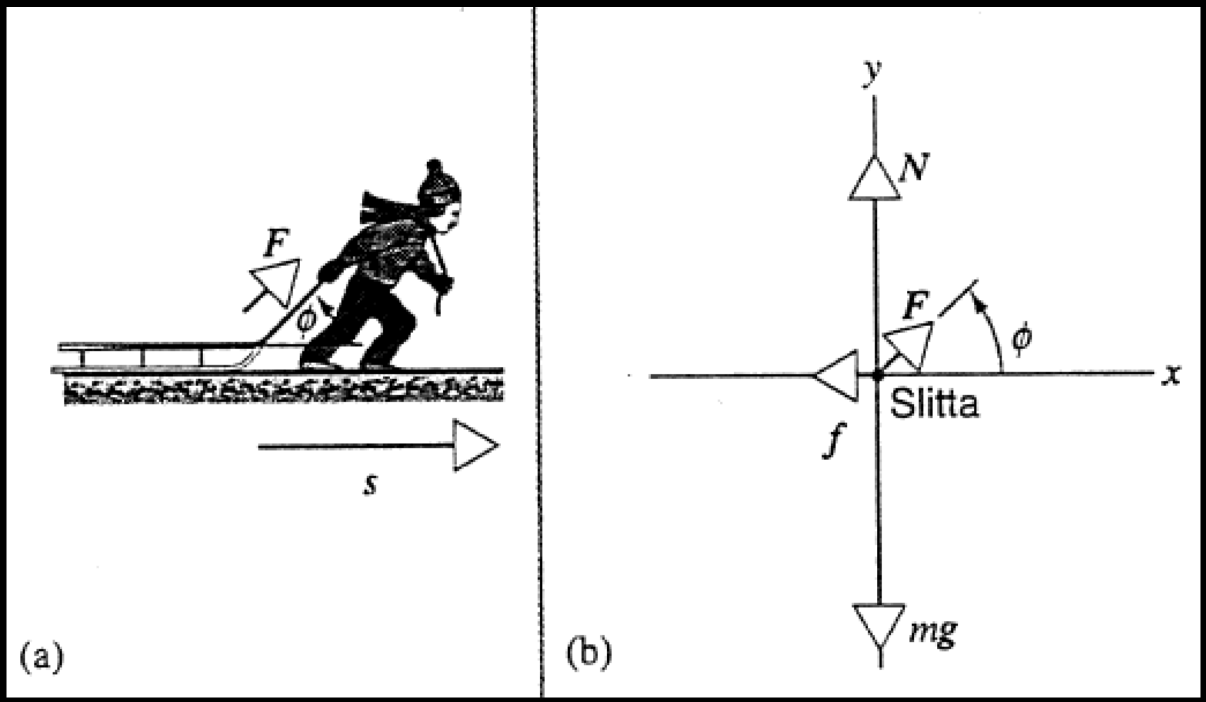
$$\sum F_y = F \sin\phi + N - mg$$

1) calcoliamo la forza necessaria a fare partire lo slittino. Questa è la forza massima che realizza la condizione di equilibrio prima che il corpo acceleri

$$F\cos\phi - f = 0 \quad \text{e} \quad F\sin\phi + N - mg = 0.$$

essendo $f = \mu_k N$ $\quad F = \dfrac{\mu_k mg}{\cos\phi + \mu_k \sin\phi}$ $\quad F = \dfrac{(0{,}20)(55\ \mathrm{N})}{\cos 45° + (0{,}20)(\sin 45°)} = 13\ \mathrm{N}$

Esempio



massa slittino = 5kg
spostamento = 12m
coeff. attrito = 0.2

calcolare il lavoro

$$\sum F_x = F \cos \phi - f$$

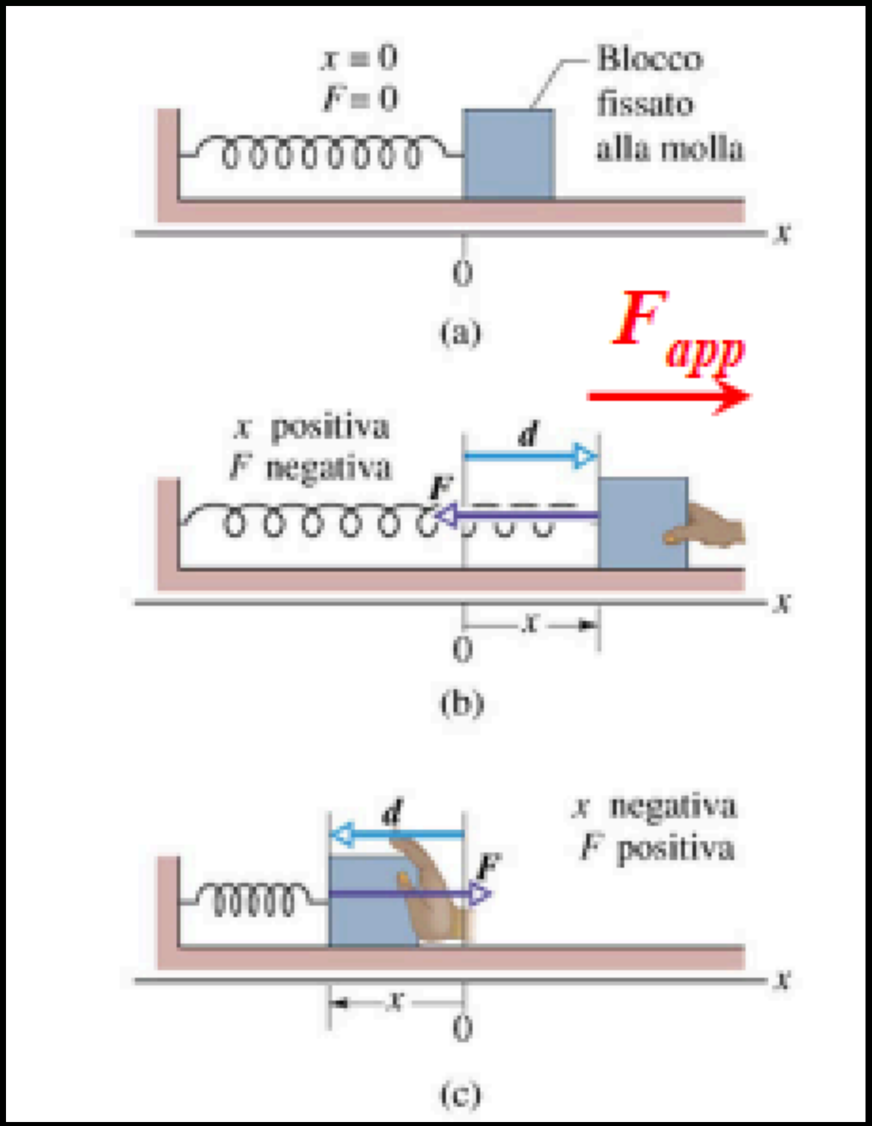
$$\sum F_y = F \sin \phi + N - mg$$

2) si calcola il lavoro della componente della forza lungo la direzione dello spostamento, ossia la direzione tangente al piano (ovvero la proiezione della forza lungo la direzione dello spostamento – prodotto scalare)

$$L = Fs \cos \phi = (13\text{ N})(12\text{ m})(\cos 45°) = 110\text{ J}$$

La componente normale della forza svolge lavoro? Che ruolo svolge?
Se la forza è orizzontale il lavoro è minore o maggiore?

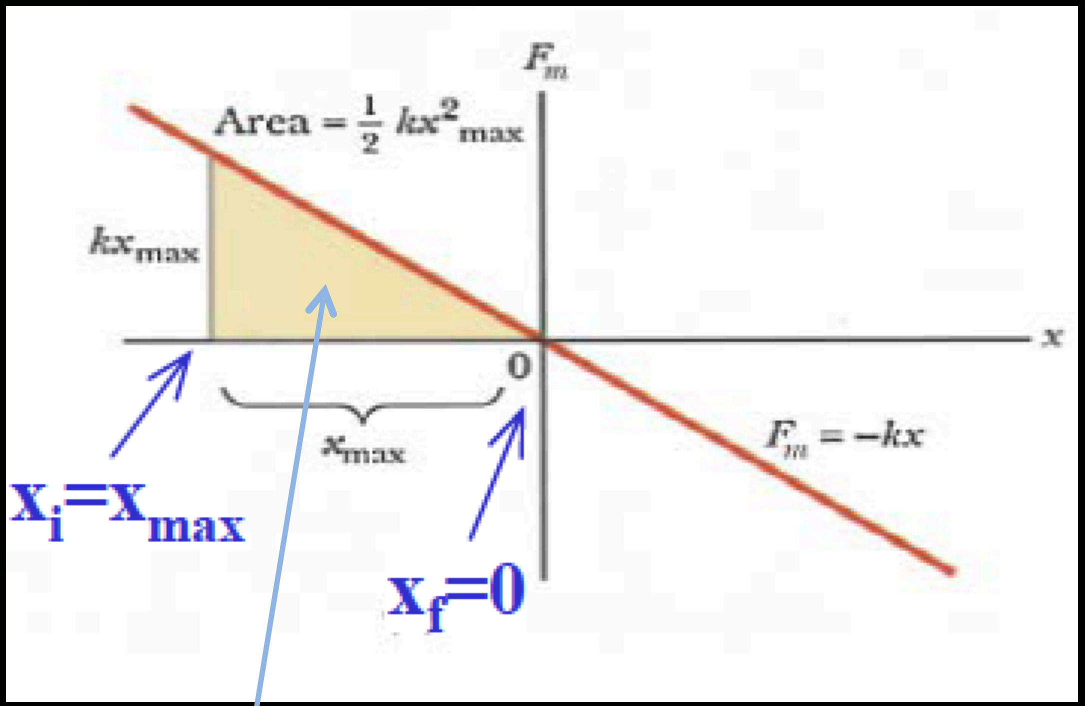
esempio: lavoro svolto da una molla [forza variabile]



forza di richiamo [legge di Hooke]

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

forza variabile con la posizione



Il lavoro corrisponde alla'area sottesa dalla funzione che definisce la forza variabile (in questo caso una retta con coeff. angolar negativo)

lavoro fatto dalla molla tra le posizioni x_i ed x_f:

$$L_m = \int_{x_i}^{x_f} (-k\,x)\,dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

[se $x_i = x_f \Rightarrow L_m = 0$]

lavoro fatto da forza applicata $\mathbf{F}_{\mathbf{app}}$ tra le posizioni 0 ed x_a:

$$\vec{F}_{app} = -\vec{F}_m = -(-kx) = kx$$

$$L_{app} = \int_0^{x_a} (k\,x)\,dx = \frac{1}{2}kx_a^2$$

lavoro **uguale e contrario** alla molla !!!

Attenzione:

$$L_{tot} = \Delta K$$

$$\vec{F}_{ris} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

forza risultante =
somma di tutte le forze agenti sull'oggetto

*Il teorema dell'energia cinetica è valido solo se **L** è il **lavoro totale** compiuto sull'oggetto:*

*si deve considerare il **lavoro compiuto** da **tutte le forze***

$$\vec{F}_1 \Rightarrow L_1,\ \vec{F}_2 \Rightarrow L_2, \ldots\ \vec{F}_n \Rightarrow L_n$$

$$\begin{aligned} L_{tot} &= L_1 + L_2 + \ldots L_n \\ &= (\vec{F}_1 \cdot \vec{s} + \vec{F}_2 \cdot \vec{s} + \ldots \vec{F}_n \cdot \vec{s}) \\ &= \vec{F}_{ris} \cdot \vec{s} \end{aligned}$$