Esercizi successioni e serie di funzioni

① $f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x\right)^n \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

convergenza puntuale:

$$f_n(x) = \left(\operatorname{sen}^2 x \left(1 + \frac{1}{n \operatorname{sen}^2 x}\right)\right)^n =$$

$$= (\operatorname{sen}^2 x)^n \left(1 + \frac{1}{n \operatorname{sen}^2 x}\right)^n$$

se $x = 0 \quad \lim_n f_n(x) = 0$

se $x \neq 0 \quad \lim_{n \to +\infty} (\operatorname{sen}^2 x)^n \left(1 + \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{n}}\right)^n = ?$

osserviamo che $\lim_n (\operatorname{sen}^2 x)^n = \begin{cases} +\infty & \operatorname{sen}^2 x > 1 \\ 0 & -1 < \operatorname{sen}^2 x < 1 \\ \nexists & \operatorname{sen}^2 x \leq -1 \\ 1 & \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases}$

ma $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_n |\operatorname{sen}^2 x|^n = 0 \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Invece $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n\,\text{sen}^2 x}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n\,\text{sen}^2 x}\right)^{\text{sen}^2 x\, n \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 x}}$$

limite notevole

$$= e^{\frac{1}{\text{sen}^2 x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (\text{sen}^2 x)^n \left(1+\frac{1}{\text{sen}^2 x \cdot n}\right)^n = 0$$

Convergenza uniforme: $\sup_{x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} |f_n(x)-f(x)| =$

$$\sup_{x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} \left| \left(\text{sen}^2 x + \frac{1}{n}\right)^n \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$0 < \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \overset{?}{<} 1 \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \iff n > 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

ho convergenza uniforme

(2) $f_n(x) = \log\left(e^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\frac{4-x^2}{n}}\right)$

$x \in [-2,2]$

Convergenza puntuale:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(e^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\frac{4-x^2}{n}}\right) =$$

0

$$= \log e^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$$

Convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in[-2,2]} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \sup_{x\in[-2,2]} \left| \log\left(e^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\frac{4-x^2}{n}}\right) - \operatorname{sen} x \right|$$

$$\left| \log\left(e^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\frac{4-x^2}{n}}\right) - \log e^{\operatorname{sen} x} \right| =$$

$$= \left| \log\left(\frac{e^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\frac{4-x^2}{n}}}{e^{\operatorname{sen} x}}\right) \right| =$$

$$= \left| \log\left(1 + \frac{e^{-\operatorname{sen} x}\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{n}}\right) \right| \le \frac{e^{-\operatorname{sen}^2 x}\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{n}}$$

$\longrightarrow 0$

quindi $f_n(x) \to \operatorname{sen} x$ uniformemente in $[-2, 2]$

③ $$\sum_{n=1}^{+\infty} (5n+1)^{-\log x} \qquad x \in [4, +\infty)$$

conv puntuale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(5n+1)^{\log x}}$$

converge puntualmente se $\log x > 1 \Rightarrow x > e$

ma $x \in [4, +\infty)$ quindi ok.

conv totale in $[4, +\infty)$:

$$M_n = \sup_{x \in [4, +\infty)} \left| \frac{1}{(5n+1)^{\log x}} \right| = \left. \frac{1}{(5n+1)^{\log x}} \right|_{x=4}$$

$\log x$ crescente, a^x crescente $\Rightarrow \frac{1}{a^{\log x}}$ decrescente $\Rightarrow x = 4$ max

$$= \frac{1}{(5n+1)^{\log 4}}$$ serie numerica convergente

$\Rightarrow$ ho convergenza totale e dunque uniforme

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente successione

$$f_n(x) = \sqrt{(n+1)x} - \sqrt{nx} \qquad x \in [0,2]$$

Calcolo il limite puntuale

$$\lim_n \sqrt{(n+1)x} - \sqrt{nx} = \lim_n \sqrt{(n+1)x} - \sqrt{nx} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)x} + \sqrt{nx}}{\sqrt{(n+1)x} + \sqrt{nx}}$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)x - nx}{\sqrt{(n+1)x} + \sqrt{nx}} = \lim_n \frac{x}{\sqrt{(n+1)x} + \sqrt{nx}} = 0$$

$\forall\ x \in [0,2]$

Verifico la convergenza uniforme

$$\sup_{x \in [0,2]} |f_n(x) - 0|$$

$$f_n \geq 0 \Rightarrow |f_n| = f_n$$

f_n è continua su $[0,2] \Rightarrow$ il sup è un max

$$\max_{x \in [0,2]} \sqrt{(n+1)x} - \sqrt{nx}$$

Se calcolo la derivata:

$$f_n'(x) = \frac{n+1}{2\sqrt{(n+1)x}} - \frac{n}{2\sqrt{nx}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(n+1)}\sqrt{x} - \sqrt{n}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\iff \sqrt{n+1}\sqrt{x} - \sqrt{n}\sqrt{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow (n+1)x \geq nx$$

(posso elevare al quadrato perchè sono entrambi positivi)

$$\iff x \geq 0 \qquad \Rightarrow f_n' \geq 0 \quad \forall x \in [0,2]$$

la funzione f_n è sempre crescente, il massimo è raggiunto in $x=2$

$$\max_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| = \max_{x\in[0,2]} f_n(x) = f_n(2)$$

$$= \sqrt{2(n+1)} - \sqrt{2n} = \frac{2}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{2n}} \to 0$$

$$\Rightarrow f_n(x) \to 0 \text{ uniformemente}$$

Se non avessi voluto fare la derivata avrei potuto maggiorare così:

$$\max_{x\in[0,2]} f_n(x) = \max_{x\in[0,2]} \frac{x}{\sqrt{(n+1)x}+\sqrt{nx}}$$

$$= \max_{x\in[0,2]} \frac{\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \le \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \to 0$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza puntuale e uniforme

$$f_n(x) = x^n \log(x^n) \qquad x\in(0,1]$$

$$f_n(1) = 0 \qquad \Rightarrow \lim_n f_n(1) = 0$$

$x\in(0,1)$

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n x^n \log(x^n) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} y\log(y) = 0$$

La successione converge puntualmente a 0

Studio la convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| x^n \log(x^n) - 0 \right|$$

$$\log(x^n) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x)| = -x^n \log(x^n)$$

$$\sup_{x\in[0,1]} -x^n \log(x^n)$$

$$f_n'(x) = -n x^{n-1} \log(x^n) - \cancel{x^n} \cdot \frac{1}{\cancel{x^n}} x^{n-1} n$$

$$= \underbrace{-n x^{n-1}}_{\leq 0} \left[\underbrace{\log(x^n) + 1}_{} \right]$$

$$f_n'(x) \geq 0 \iff 1 + \log(x^n) \leq 0$$

$$\log(x^n) \leq -1 \qquad x^n \leq \frac{1}{e}$$

$$x \leq \sqrt[n]{\frac{1}{e}}$$

$x = \sqrt[n]{\frac{1}{e}}$ è il punto di massimo

$$\sup | f_n(x) - 0 | = -f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e} \not\to 0$$

$\Rightarrow$ f_n non converge a 0 uniformemente

Esercizio 3:

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$$

$$\lim_{n} \frac{x}{n} e^{-nx} = 0 \iff x \geq 0$$

La serie può convergere solo per $x \geq 0$

$$\lim_{n} \sqrt[n]{\frac{x}{n} e^{-nx}} = e^{-x} < 1 \text{ se } x > 0$$

$\Rightarrow$ La serie converge puntualmente in $(0;+\infty)$

in $x=0$ $f_n(x) \equiv 0$ $\Rightarrow$ anche in 0 ho convergenza puntuale

$\Rightarrow$ La serie converge puntualmente in $[0;+\infty)$

Studiamo la convergenza totale

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{x}{n} e^{-nx} \Rightarrow$$

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} e^{-nx} - \frac{x}{\cancel{n}} \cancel{n} e^{-nx} =$$

$$= e^{-nx}\left(\frac{1}{n} - x\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad M_n = \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{x}{n} e^{-nx} = \frac{1}{n^2} e^{-1}$$

$\Rightarrow$ La serie converge totalmente $\Rightarrow$ uniformemente in $[0,+\infty)$

Esercizio 4

Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+n^2)}{1+n^2x^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+n^2)}{1+n^2x^2} = 0 \text{ se } x \neq 0$$

$$\lim_{n} f_n(0) = \frac{\pi}{2}$$

In 0 la serie diverge

$$|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

In ogni insieme del tipo $[a; +\infty[$
$]-\infty, -a[$

$$1+n^2x^2 \geq 1+n^2a^2$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+n^2a^2}$$ che è il

termine generale di una serie che converge

$\Rightarrow$ $f_n(x)$ converge totalmente in
$]-\infty, a] \cup [a; +\infty[\quad \forall a > 0$

Negli intervalli che contengono 0
$[a, b]$, $a < 0$ $b > 0$

$$\sup_{[a,b]} f_n(x) > f_n(0) = \frac{\operatorname{arctg}(n^2)}{1}$$

$\Rightarrow$ La serie non converge
né totalmente, e abbiamo visto
al limite nemmeno puntualmente
$\Rightarrow$ nemmeno uniform.

Esercizio

Studiare convergenza puntuale ed uniforme della successione

$$f_n(x) = \ln(x) - (\ln(x))^{2n+1}$$

in $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right]$.

Svolgimento Ricerco la convergenza puntuale

Fisso $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right]$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \leq x \leq \sqrt{e}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\ln(x)| < \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad \lim_n (\ln x)^{2n+1} = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \lim_n \ln x - (\ln x)^{2n+1} = \ln(x) = f(x)$$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right]$$

f_n converge puntualmente a $\ln(x)$ in $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right]$

Controllo se converge uniformemente. Ricordo che

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente} \iff \lim_n \sup_{[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}]} |f_n - f| = 0$$

Procedo con il calcolare

$$\sup_{[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}]} |f_n - f| = \sup_{[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}]} \left| \cancel{\ln x} - (\ln x)^{2n+1} - \cancel{\ln x} \right| =$$

$$= \sup_{[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}]} \left| -(\ln(x))^{2n+1} \right|$$

$$= \sup_{[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}]} |\ln(x)|^{2n+1}$$

ricordo che $|\ln(x)| \le \frac{1}{2}$

$$\le \sup_{[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}]} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \le \sup_{[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}]} |f_n - f| \le \underset{\substack{\downarrow\, n \to +\infty \\ 0}}{\frac{1}{2^{2n+1}}}$$

Per il Teorema dei carabinieri

$$\lim_n \sup_{[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}]} |f_n - f| = 0$$

$$\Rightarrow f_n \to \ln(x) \quad \text{uniformemente in } \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right].$$

Esercizio

Studiare convergenza puntuale ed uniforme della successione

$$f_n(x) = 1 - e^{-\frac{nx^2}{nx+1}}$$

in $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

Svolgimento Ricerco la convergenza puntuale

Fisso $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$

$$\lim_n \left(1 - e^{-\frac{nx^2}{nx+1}}\right) = \lim_n 1 - e^{-x\left(\frac{nx}{nx\left(1+\frac{1}{nx}\right)}\right)} = 1 - e^{-x}.$$

f_n converge puntualmente a $1-e^{-x}$ in $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

Controllo se converge uniformemente. Ricordo che

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente} \iff \lim_n \sup_{\left[\frac{1}{2}, 3\right]} |f_n - f| = 0$$

Procedo con il calcolare

$$\sup_{\left[\frac{1}{2}, 3\right]} |f_n - f| = \sup_{\left[\frac{1}{2}, 3\right]} \left| \cancel{1} - e^{-\frac{nx^2}{nx+1}} - \left(\cancel{1} - e^{-x}\right) \right|$$

$$= \sup_{\left[\frac{1}{2}, 3\right]} \left| e^{-x} - e^{-\frac{nx^2}{nx+1}} \right|$$

$$= \sup_{\left[\frac{1}{2}, 3\right]} \left| e^{-x}\left(1 - e^{\left(-\frac{nx^2}{nx+1} + x\right)}\right) \right|$$

$$= \sup_{\left[\frac{1}{2}, 3\right]} \left| e^{-x}\left(1 - e^{\left(\frac{-\cancel{nx^2}+\cancel{nx^2}+x}{nx+1}\right)}\right) \right|$$

$$= \sup_{[\frac{1}{2},3]} \left|e^{-x}\right|\left|1-e^{\frac{x}{nx+1}}\right|$$

$$\leq e^{-\frac{1}{2}} \sup_{[\frac{1}{2},3]} \left|1-e^{\frac{x}{nx+1}}\right|$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \sup_{[\frac{1}{2},3]} \Big(\underbrace{e^{\frac{x}{nx+1}}-1}_{:=g(x)}\Big)$$

$$g(x) = e^{\frac{x}{nx+1}} - 1 \quad \text{in} \quad [\tfrac{1}{2},3]$$

$$g'(x) = \frac{\cancel{nx}+1-\cancel{nx}}{(nx+1)^2}\, e^{\frac{x}{nx+1}} = \frac{1}{(nx+1)^2}\, e^{\frac{x}{nx+1}} > 0 \quad \forall x \in [\tfrac{1}{2},3]$$

$$\Rightarrow \sup_{[\frac{1}{2},3]} g(x) = g(3) = e^{\frac{3}{3n+1}} - 1 .$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq \sup_{[\frac{1}{2},3]} |f_n - f| \leq \underset{\substack{\downarrow\, n\to+\infty \\ 0}}{e^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{3}{3n+1}}-1\right)}$$

Per il Teorema dei carabinieri

$$\lim_{n} \sup_{[\frac{1}{2},3]} |f_n - f| = 0$$

$$\Rightarrow f_n \to 1-e^{-x} \quad \text{uniformemente in } [\tfrac{1}{2},3].$$

$\boxed{1}$ **

Sia $f_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Determinare in quale insieme c'è convergenza puntuale e in quali insiemi c'è convergenza totale per la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Svolgimento:

- Puntuale

Voglio applicare il criterio della radice

$$\lim_n \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x| = e \cdot |x|$$

Se $|x| < \frac{1}{e}$, la serie converge

Se $|x| > \frac{1}{e}$, la serie diverge

Se $|x| = \frac{1}{e}$ bisogna verificare

$$\boxed{x = \frac{1}{e}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Controllo se è verificata la condizione necessaria per la convergenza

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = e^{n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - n}$$

$$= e^{n\left[n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right]}$$

$$= e^{n\left[n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right]}$$

$$= e^{n\left[-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} + o(1)}$$

Quindi

$$\lim_{n} f_n\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$

$\Rightarrow$ la serie non converge

$$\boxed{x = -\frac{1}{e}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (-1)^n \frac{1}{e^n}$$

Abbiamo verificato nel caso $x = \frac{1}{e}$ che

$$\lim_{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

quindi anche in questo caso non vale la condizione necessaria per la convergenza $\left(f_n\left(-\frac{1}{e}\right) \not\to 0\right)$

In conclusione, $\sum f_n$ converge per $x \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

- Convergenza totale

Dobbiamo valutare

$$\sup_{\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)} |f_n(x)| = \sup_{\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} |x|^n$$

Siccome in questo caso $|f_n(x)|$ è pari,

$$\sup_{\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)} |f_n| = \sup_{\left[0, \frac{1}{e}\right)} |f_n|$$

$$= \sup_{\left[0, \frac{1}{e}\right)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

x^n è una funzione crescente in x

$$\Rightarrow \quad \sup_{[0,\frac{1}{e})} |f_n(x)| = \lim_{x \to \frac{1}{e}^-} f_n(x) = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}}_{:= M_n}$$

Dallo studio della convergenza puntuale abbiamo che M_n è il termine generale di una serie non convergente.

Quindi non c'è convergenza totale in $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

Possiamo però osservare quanto segue:

$\forall\, a < \frac{1}{e}$

$$\max_{[-a,a]} |f_n| = f_n(a) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} a^n$$

e nello studio della convergenza puntuale, col criterio della radice abbiamo provato che

$$\sum_n f_n(a)$$

converge $\forall a < \frac{1}{e}$.

Quindi abbiamo convergenza totale in

$$[-a, a] \quad \forall a < \frac{1}{e}$$

$\boxed{2}$

***

Sia $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n^{1+x}}\right)$. Stabilire per quali $x \in [1, +\infty)$ la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge.

(1) f è continua nel suo dominio?

(2) Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Svolgimento

- Puntuale

Verifichiamo se vale la condizione necessaria

$$\lim_{n} f_n(x) = \lim_{n} \arctan\left(\frac{x}{n^{1+x}}\right) = 0$$

$$\forall x \geq 1$$

Se $x=0$, $f_n(0) = \arctan(0) = 0 \quad \forall n$

Quindi vale la condizione necessaria

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{y \to 0} \frac{\arctan(y)}{y} = 1,$$

dal confronto asintotico, la serie converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{1+x}} = x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}}$$

Per ogni $x \geq 1$, questa serie converge perché è una serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.

In definitiva, la serie converge su tutto $[1, +\infty)$

- Totale

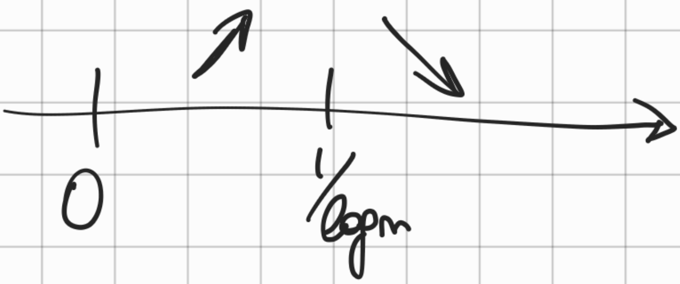
Per trovare $\sup_{[1,+\infty)} |f_n|$,

osserviamo che $f_n \geq 0$ e quindi $|f_n| = f_n$, e calcoliamone la derivata

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^{2+2x}}} \cdot \frac{n^{1+x} - n^{1+x}(\log n)\,x}{(n^{1+x})^2}$$

$$f_n' \geq 0 \iff n^{1+x} \geq n^{1+x}(\log n)\,x$$

$$\iff x \leq \frac{1}{\log(n)} \qquad (n>1)$$



Siccome $\frac{1}{\log n} \to 0$, per n grande $\frac{1}{\log n} < 1$

quindi

Se n grande $n \geq n_0$ (basta $n_0 = 3 > e$),

$$M_n = \sup_{[1,+\infty)} |f_n| = \sup_{[1,+\infty)} f_n = f_n(1) = \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(Siccome la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup|f_n|$ converge se e solo se converge $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sup|f_n|$, ignoriamo i primi $n_0 - 1$ termini)

Dal confronto asintotico

$$\lim_n \frac{M_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

la serie $\sum M_n$ converge e si ha quindi convergenza totale per f_n su $[1, +\infty)$.

Risposta (1):

f è continua perché $\sum f_n$ converge uniformemente su $[1, +\infty)$, grazie al Criterio di Weierstrass.

Risposta (2):

La convergenza uniforme permette di scambiare limite e somma:

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^{x+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

poiché se $n > 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{n^{x+1}} = 0 \quad \left(\text{polinomio su esponenziale}\right)$$

se $n = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{3}$ *

$$f_n(x) = \frac{x^n + x^{2n}}{1+x^n}$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale in $(0,+\infty)$ e stabilire in quali sottoinsiemi c'è convergenza uniforme.

Svolgimento

- Puntuale

$$x>1 \Rightarrow \lim_n \frac{x^n+x^{2n}}{1+x^n} = \lim \frac{x^{2n}}{x^n} = +\infty$$

$$x=1 \Rightarrow \lim_n \frac{2}{2} = 1$$

$$x<1 \Rightarrow \lim_n \frac{x^n+x^{2n}}{1+x^n} = 0$$

C'è convergenza puntuale in $(0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=1 \\ 0 & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

• Uniforme

f discontinua $\Rightarrow$ f_n non può convergere uniformemente in $(0,1]$

f è discontinua solo in $x=1$, studiamo la convergenza uniforme in $(0,a]$ con $a<1$!

$$\sup_{(0,a]} |f_n - f| = \sup_{(0,a]} \frac{x^n + x^{2n}}{1+x^n}$$

$\left(\begin{array}{l} f=0 \\ f_n \geq 0 \end{array} \text{ tolgo i moduli} \right)$

Osserviamo che

$$x^n + x^{2n} = x^n(1+x^n)$$

quindi

$$f_n(x) = \frac{x^n \cancel{(1+x^n)}}{\cancel{1+x^n}} = x^n$$

$$\sup_{(0,a]} x^n = a^n$$

e $\lim_{n} a^n = 0 \quad \forall a<1$

Quindi c'è convergenza uniforme su $(0,a] \quad \forall a<1$