Mostriamo infine che

$$(11.15) \qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Dimostrazione: da verifica diretta la formula (11.15) è soddisfatta per n=1. Supponendo poi che la (11.15) sia verificata per un indice n generico, otteniamo

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}=$$

$$(11.16) \qquad =\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}=\frac{n\,(n+2)+1}{(n+1)\,(n+2)}=$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)\,(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}\,,$$

che corrisponde appunto alla (11.15) con $n+1$ al posto di n.

COMPLEMENTI AI NUMERI REALI

Raccogliamo in questo capitolo alcuni complementi ai numeri reali. Introduciamo l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme di numeri reali, il calcolo combinatorio ed i numeri complessi.

Il concetto di estremo superiore, introdotto nel seguente paragrafo 12, è fondamentale per la trattazione della maggior parte dei teoremi di esistenza dell'Analisi Matematica, come ad esempio per la dimostrazione del teorema sulle successioni monotòne del paragrafo 24, o per altri teoremi di esistenza (Bolzano-Weierstrass, Weierstrass, ecc.).

12. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore

Sia A un insieme di numeri reali. Il *massimo* di A, se esiste, è un numero M dell'insieme A che è maggiore od uguale ad ogni altro elemento dell'insieme. In simboli:

$$(12.1) \qquad \begin{matrix}\text{M massimo di A}\\ (\text{M} = \max \text{A})\end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} M \geq a, \ \forall\, a \in A;\\ M \in A.\end{cases}$$

Analogamente, il *minimo* di un insieme di numeri reali A, se esiste, è un numero m dell'insieme A che è minore od uguale ad ogni altro elemento di A. In simboli:

$$(12.2) \qquad \begin{matrix}\text{m minimo di A}\\ (\text{m} = \min \text{A})\end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \leq a, \ \forall\, a \in A;\\ m \in A.\end{cases}$$

Non tutti gli insiemi di numeri reali hanno il massimo ed il minimo. Ad esempio, se A è costituito da tutti i numeri reali positivi, A non ha né massimo, né minimo (non esiste il più piccolo numero reale positivo; ad esempio, lo zero non è il minimo, perché non appartiene ad A).

Si verifica facilmente che quando esistono, *il massimo o il minimo sono unici*. Infatti, se M_1 e M_2 sono due massimi di un insieme A, allora per definizione

$$M_1 \geq a, \qquad M_2 \geq a, \qquad \forall\, a \in A;$$

ma dato che M_1 ed M_2 sono elementi di A, posto a rispettivamente uguale a M_2 ed a M_1 nelle relazioni precedenti, si ottiene $M_1 \geq M_2$ e $M_2 \geq M_1$, cioè $M_1 = M_2$.

Un numero reale L si dice un *maggiorante* per un insieme A se $L \geq a$ per ogni $a \in A$. Analogamente un numero reale ℓ è un *minorante* di A, se $\ell \leq a$ per ogni $a \in A$.

È bene notare esplicitamente che un insieme A non sempre ammette maggioranti o minoranti. Se A è di nuovo l'insieme dei numeri reali positivi, A non ammette alcun maggiorante, mentre lo zero (ed anche qualsiasi numero reale negativo) è un minorante di A.

Diciamo che A è *limitato superiormente* se ammette un maggiorante. A è *limitato inferiormente* se ammette un minorante. Infine si dice *limitato* un insieme che è limitato sia superiormente che inferiormente. In simboli (∃ si legge esistono):

$$\text{(12.3)} \qquad A \textit{ limitato} \iff \exists\, \ell, L \in \mathbf{R}: \quad \ell \leq a \leq L, \ \forall\, a \in A.$$

Tenendo presente la definizione (8.5) della funzione valore assoluto, si riconosce facilmente che:

> PROPOSIZIONE. — *Un insieme A è limitato se e soltanto se esiste un numero positivo M tale che*
>
> $$\text{(12.4)} \qquad |a| \leq M, \qquad \forall\, a \in A.$$

Dimostrazione: se per ipotesi vale la (13.4), allora, dalla proprietà (8.11) relativa al valore assoluto si ottiene

$$\text{(12.5)} \qquad -M \leq a \leq M, \qquad \forall\, a \in A,$$

e quindi vale la (13.3) con $\ell = -M$ e $L = M$. Viceversa, se vale la (12.3), allora vale anche la (12.4) (o equivalentemente la (12.5)) con $M = \max\{|\ell|, |L|\}$, perché:

$$\text{(12.6)} \qquad -M \leq -|\ell| \leq \ell \leq a \leq L \leq |L| \leq M, \qquad \forall\, a \in A.$$

Il risultato che segue, alla base della definizione di estremo superiore, è conseguenza dell'*assioma di completezza* (2.11) per i numeri reali.

> TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE. — *Supponiamo che A sia un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.*

Infatti, indichiamo con B l'insieme costituito dai maggioranti di A. B è non vuoto, perché A è limitato superiormente. Applichiamo l'assioma di completezza (2.11) ai due insiemi A, B. Esiste un numero reale M tale che

$$\text{(12.7)} \qquad a \leq M \leq b, \qquad \forall\, a \in A, \qquad \forall\, b \in B.$$

Dato che M è maggiore od uguale a tutti gli elementi di A, M è un maggiorante di A; cioè $M \in B$. Inoltre M è minore od uguale a tutti gli elementi di B. Quindi, in base alla definizione (12.2), M è il minimo di B.

In base al teorema precedente, poniamo la seguente

> DEFINIZIONE DI ESTREMO SUPERIORE. — *Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente. Diciamo che* $M \in \mathbf{R}$ *è l'estremo superiore di A se M è il minimo dei maggioranti di A.*

Ciò equivale a dire che M è un maggiorante, e che ogni numero più piccolo di M, diciamo $M - \varepsilon$ con ε positivo, non è un maggiorante; cioè $M - \varepsilon$ è minore di qualche elemento dell'insieme A. In simboli (∃ si legge esiste):

$$\text{(12.8)} \qquad \begin{matrix} M \textit{ estremo superiore di } A \\ (M = \sup A) \end{matrix} \iff \begin{cases} M \geq a, \ \forall\, a \in A; \\ \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, a \in A: M - \varepsilon < a. \end{cases}$$

Analogamente, si verifica che se A è un insieme non vuoto di numeri reali limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di A ha massimo. In tali condizioni, si dice che un numero m è l'*estremo inferiore* di A se m è il *massimo dei minoranti* di A. Ciò equivale a:

$$\text{(12.9)} \qquad \begin{matrix} m \textit{ estremo inferiore di } A \\ (m = \inf A) \end{matrix} \iff \begin{cases} m \leq a, \ \forall\, a \in A; \\ \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, a \in A: m + \varepsilon > a. \end{cases}$$

Quindi, *se un insieme è limitato superiormente esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale.*

È utile introdurre i simboli $+\infty$, $-\infty$ per descrivere gli insiemi *non* limitati. Precisamente, sia A un insieme non vuoto. L'estremo superiore di A è $+\infty$ se A non è limitato superiormente; l'estremo inferiore di A è $-\infty$ se A non è limitato inferiormente. In simboli:

(12.10) $$\sup A = +\infty \iff \forall L,\ \exists a \in A:\ a > L.$$

(12.11) $$\inf A = -\infty \iff \forall \ell,\ \exists a \in A:\ a < \ell.$$

Nelle relazioni sopra scritte ci si può limitare a considerare $L > 0$ e $\ell < 0$.

Facendo uso dei simboli $+\infty$ e $-\infty$ si può quindi affermare che *ogni insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che estremo inferiore*. Se l'insieme è limitato superiormente allora l'estremo superiore è finito; se l'insieme è limitato inferiormente allora l'estremo inferiore è finito.

Diamo ora alcuni esempi; se $A = \{x \in \mathbf{R}:\ x > 0\}$, allora

(12.12) $$\sup A = +\infty, \qquad \inf A = 0$$

ed il massimo e minimo di A non esistono. Se $B = \{(n-1)/n:\ n \in \mathbf{N}\}$ (l'insieme B è schematizzato in figura 2.1), risulta

(12.13) $$\sup B = 1, \qquad \inf B = \min B = 0.$$

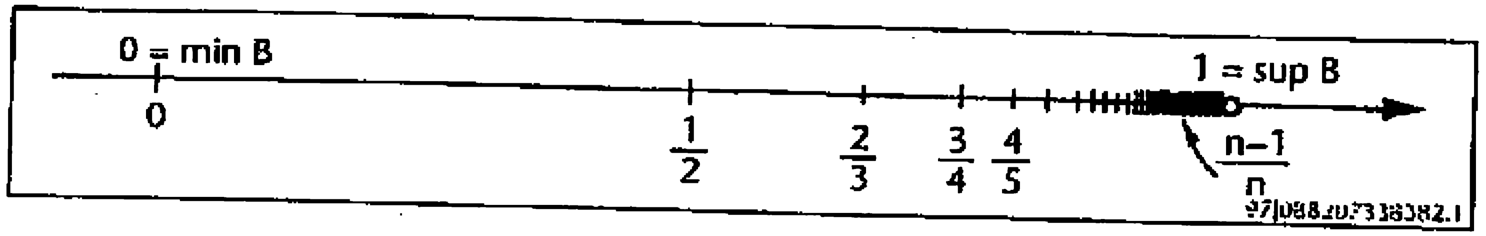

Figura 2.1

Se infine $C = \{(n+1)/n:\ n \in \mathbf{N}\}$ (si veda la figura 2.2), si trova

(12.14) $$\sup C = \max C = 2, \qquad \inf C = 1.$$

Siano A e B due sottoinsiemi di **R** e f una funzione da A verso B. Per ogni sottoinsieme X di A, l'estremo inferiore (risp. l'estremo superiore) dell'insieme f(X) si chiama *estremo inferiore* (risp. *superiore*) *di f su X*. Si pone inoltre

(12.15) $$\inf_{x\in X} f(x) = \inf f(X)\ , \qquad \sup_{x\in X} f(x) = \sup f(X)\ .$$

Se poi f(X) è limitato inferiormente (risp. superiormente) si dice che la funzione f è *limitata inferiormente* (risp. *superiormente*) su X.

Se infine f(X) è un insieme limitato, si dice che f è *limitata* su X.

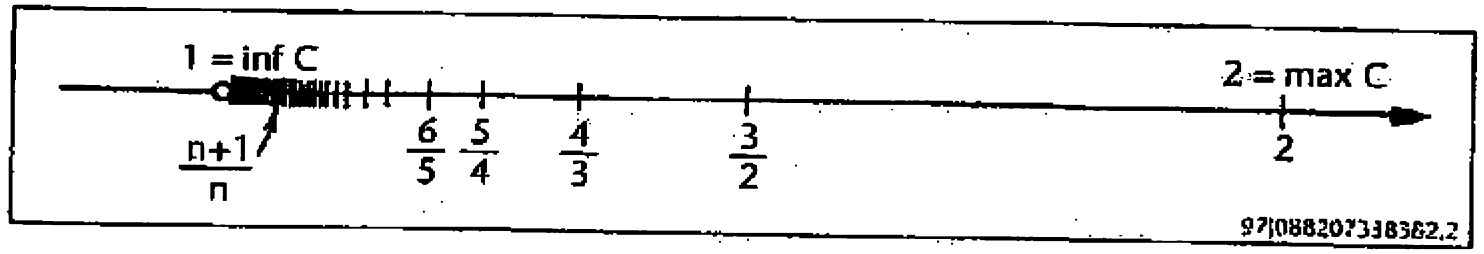

Figura 2.2

Alla luce delle nozioni introdotte nel presente paragrafo riportiamo di seguito alcune proprietà dell'insieme dei numeri naturali e dell'insieme dei numeri razionali.

Nell'insieme **R** dei numeri reali, a partire dall'elemento 1, si possono determinare gli elementi $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ e così via. Tali elementi costituiscono *l'insieme dei numeri naturali* di **R**, cioè l'insieme $\mathbf{N} = \{1,2,3,...\}$ i cui elementi sono ordinati secondo le relazioni $1 < 2 < 3 < ...$

L'insieme **N** gode di due proprietà caratteristiche:

1) *Ogni parte non vuota di* **N** *è dotata di minimo*;

2) *ogni parte non vuota di* **N**, *superiormente limitata, è dotata di massimo*.

Tenendo conto di tali proprietà si può dimostrare la seguente

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE – *Per ogni* $x \in \mathbf{R}$, *esiste* $n \in \mathbf{N}$ *tale che* $n > x$.

Dimostrazione: se la proprietà di Archimede fosse falsa, l'insieme dei numeri reali sarebbe limitato superiormente e quindi, per l'assioma di completezza, dotato di estremo superiore $M \in \mathbf{R}$. In particolare, per ogni numero naturale n di **R** sarebbe $n \le M$. Poiché anche $n + 1$ è un numero naturale, risulterebbe $n + 1 \le M$, cioè $n \le M - 1$, per ogni $n \in \mathbf{N}$, il che è assurdo perché $M - 1$ sarebbe un maggiorante di **N**, contrariamente al fatto che M è il più piccolo dei maggioranti.

In altre parole, la proprietà di Archimede afferma che l'insieme **N** dei numeri naturali non è limitato superiormente.

Dalla proprietà di Archimede si ricava che l'insieme **Q** dei numeri razionali di **R**, cioè l'insieme dei numeri del tipo m/n con $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{N}$ è *denso* in $\mathbf{R}$, vale a dire, per definizione, che per ogni coppia a, b di numeri reali con $a < b$, esiste un numero razionale compreso fra a e b.

DENSITÀ DEI NUMERI RAZIONALI. – *L'insieme* $\mathbf{Q}$ *dei numeri razionali è denso in* $\mathbf{R}$.

Dimostrazione: si deve provare che, per ogni coppia a, b di numeri reali con $a < b$, esiste un numero razionale x tale che $a < x < b$. Supposto $a > 0$, sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $n > 1/(b-a)$; per cui risulterà $nb - na > 1$. Detto m il più piccolo numero naturale tale che $na < m$; si avrà $m - 1 \leq na < m$ e anche $na < m = (m-1) + 1 \leq na + 1 < na + (nb - na) = nb$. Dalle disuguaglianze $na < m < nb$ segue l'assetto. Il caso $a < 0 < b$ essendo ovvio, resta da esaminare quello in cui $a < 0$ e $b \leq 0$, che si riconduce al primo, ragionando sulla coppia $-b, -a$.

Concludiamo il paragrafo soffermandoci sulla funzione esponenziale.

Nel paragrafo 9 abbiamo definito il significato di a^b con a numero reale positivo e b numero razionale. Inoltre, dalle (9.9), (9.10) segue che la funzione esponenziale su $\mathbf{Q}$

$$f : x \in \mathbf{Q} \to a^x \in \mathbf{R}^+ \tag{12.16}$$

è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

Allo scopo di definire la *funzione esponenziale* su $\mathbf{R}$, proviamo il seguente:

LEMMA DI DENSITÀ. – *Il codominio* $f(\mathbf{Q})$ *della funzione f è denso in* $\mathbf{R}^+$.

Dimostrazione: verifichiamo che, per ogni coppia α, β di numeri reali positivi, con $\alpha < \beta$, esiste $y \in \mathbf{Q}$ tale che $\alpha < a^y < \beta$.

Limitiamoci al caso $a > 1$, $1 \leq \alpha < \beta$; in quanto gli altri si trattano analogamente. Sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $(\beta/\alpha)^n > a$ e sia m il massimo intero tale che $a^m \leq \alpha^n$. Si ha:

$$\alpha^n < a^{m+1} < \beta^n , \tag{12.17}$$

in quanto risulta $\beta^n > a \cdot \alpha^n \geq a \cdot a^m$. Dalla (12.17) segue l'asserto con $y = \dfrac{m+1}{n}$.

Dal lemma precedente si ricavano facilmente le formule

$$a^x = \sup_{y<x} a^y \qquad (a > 1) \tag{12.18}$$

$$a^x = \sup_{y>x} a^y \qquad (0 < a < 1) \tag{12.19}$$

Tali formule suggeriscono di definire la *funzione esponenziale ad esponente x reale qualsiasi* nel modo seguente:

$$a^x = \sup \{a^y : y \in \mathbf{Q},\ y < x\} , \qquad \text{se } a > 1 \tag{12.20}$$

$$a^x = \sup \{a^y : y \in \mathbf{Q},\ y > x\} , \qquad \text{se } < a < 1 . \tag{12.21}$$

Si può dimostrare il seguente

TEOREMA. – *Per* $a > 1$ (*risp.* $0 < a < 1$) *la funzione esponenziale è strettamente crescente* (*risp. strettamente decrescente*) *da* $\mathbf{R}$ *su* $\mathbf{R}^+$.

13. Calcolo combinatorio

Sia A un insieme costituito da n elementi:

$$A = \{a_1 , a_2 ,\ldots, a_n\} . \tag{13.1}$$

Sia k un numero naturale minore od uguale ad n. Una *disposizione* di k elementi tra gli n dati è un sottoinsieme ordinato di A che ha k elementi; consideriamo distinte due disposizioni se differiscono o per gli elementi, oppure solo per l'ordine di tali elementi.

NUMERO DI DISPOSIZIONI. — *Il numero delle disposizioni di* k *elementi tra gli* n *dati è*

$$n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1); \tag{13.2}$$

cioè è il prodotto di k *numeri interi decrescenti a partire da* n.

Così ad esempio il numero delle disposizioni di 2 elementi su 3 dati è $3 \cdot 2 = 6$. Infatti, se consideriamo l'insieme $\{a_1 , a_2 , a_3\}$, tutte le disposizioni possibili con 2 elementi sono:

$$\begin{array}{l} \{a_1 , a_2\}; \{a_2 , a_1\}; \{a_1 , a_3\}; \\ \{a_3 , a_1\}; \{a_2 , a_3\}; \{a_3 , a_2\}. \end{array} \tag{13.3}$$

Per dimostrare la proposizione precedente, esaminiamo un possibile modo di formare una disposizione di k elementi dall'insieme (13.1). Pos-

Risulta $|a_n - a| = |1/n| = 1/n$. Dato che $1/n < \varepsilon$ equivale a $n > 1/\varepsilon$, basta scegliere $\nu = 1/\varepsilon$. Cioè abbiamo verificato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu = 1/\varepsilon$ per cui $|a_n - a| = 1/n < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$.

Verifichiamo ora che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1. \tag{17.12}$$

Risulta

$$|a_n - a| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \quad ; \tag{17.13}$$

in questo esempio si vede l'importanza di considerare il valore assoluto di $a_n - a$; si trova $|a_n - a| = 1/n$ e poi si procede come nel caso precedente.

Naturalmente non abbiamo scelto a caso i valori, $a = 0$ e $a = 1$ nei due esempi precedenti. Proviamo a vedere che succede se invece tentassimo di dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1 \ ! \tag{17.14}$$

Avremmo $\quad |a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 1\right| = 1 - \frac{1}{n} < \varepsilon$, cioè $\frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$.

Questa relazione non crea problemi se ε è grande, ad esempio se $\varepsilon = 1$ è verificata da ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma se ε è più piccolo, ad esempio se $\varepsilon = 1/2$, allora $1/n > 1/2$ è verificata solo se $n < 2$. Cioè solo a_1 verifica la relazione data, e non a_n con $n > \nu$. Ciò prova che $a = 1$ *non* è il limite della successione $1/n$.

Con un argomento simile verifichiamo la

UNICITÀ DEL LIMITE. — *Una successione convergente non può avere due limiti distinti.*

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che esistano due limiti distinti, cioè supponiamo che $a_n \to a$, $a_n \to b$, con $a \neq b$. Poniamo $\varepsilon = |a - b|/2$ (> 0). Si ha

$$\exists\, \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > \nu_1 \ ; \qquad \exists\, \nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon,\ \forall n > \nu_2 . \tag{17.15}$$

Ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, le relazioni sopra scritte valgono contemporaneamente e si ha (utilizzando la disuguaglianza triangolare $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ del paragrafo 8)

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq \\ &\leq |a - a_n| + |a_n - b| = \\ &= |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|. \end{aligned} \tag{17.16}$$

Abbiamo così trovato che $|a - b| < |a - b|$, che è assurdo.

Esaminiamo ora le successioni (17.4), (17.5). Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \ ; \tag{17.17}$$

infatti $|a_n - a| = |(-1)^n/n| = 1/n$; poi si procede come fatto per il limite (17.11).

Invece il limite

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \quad \textit{non esiste.} \tag{17.18}$$

Infatti, supponiamo per assurdo che esista $a = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$. Se $a \geq 0$, consideriamo $|a_n - a|$ con n dispari. Allora $a_n = -1$ e quindi $|a_n - a| = |-1 - a| = 1 + a \geq 1$. Perciò, se $\varepsilon < 1$, non risulta mai $|a_n - a| < \varepsilon$ per n dispari. Si procede in modo analogo per il caso $a \leq 0$ prendendo i termini con indice n pari.

Infine la successione (17.6) tende a $+\infty$ secondo la definizione seguente.

DEFINIZIONE. — *Una successione a_n ha limite uguale a $+\infty$ (si dice anche che a_n tende o diverge a $+\infty$) e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad (\textit{oppure} \quad a_n \to +\infty) \ . \tag{17.19}$$

se, qualunque sia $M > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > M$, per ogni $n > \nu$.

Si dà una definizione analoga nel caso di limite uguale a $-\infty$. Ad esempio, la successione $a_n = -n^2$ tende a $-\infty$. In simboli scriveremo le due definizioni nel modo seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall\, M > 0,\ \exists \nu:\ a_n > M, \quad \forall\, n > \nu; \tag{17.20}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall\, M > 0,\ \exists \nu:\ a_n < -M, \quad \forall\, n > \nu. \tag{17.21}$$

21. Teoremi di confronto

Studiamo in questo paragrafo alcune relazioni tra limiti e ordinamento.

> TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. — *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a_n > 0$ *per ogni* $n > \nu$.

Prima di proporre la dimostrazione del teorema della permanenza del segno sottolineiamo che, se una successione a_n converge ad un numero reale positivo a, *non* si può affermare in generale che *tutti* i termini della successione a_n sono positivi.

Ad esempio, in analogia con la (17.3), la successione $a_n = (n-7)/n$ converge al numero 1 per $n \to +\infty$, però i primi termini della successione ($a_1, a_2, \ldots$, fino ad a_6) sono negativi; il numero ν, nella tesi del teorema della permanenza del segno, in questo caso è uguale a 7.

Dimostrazione: dato che $a > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = a/2$. Esiste quindi un numero ν per cui $|a_n - a| < a/2$ per ogni $n > \nu$. Ciò equivale $a - a/2 < a_n - a < a/2$. In particolare abbiamo

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0, \qquad \forall n > \nu. \tag{21.1}$$

> COROLLARIO. — *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, *e se* $a_n \geq 0$ *per ogni* n, *allora anche* $a \geq 0$.

Dimostrazione: se per assurdo fosse $a < 0$, il teorema della permanenza del segno, applicato alla successione $-a_n$, comporterebbe che $a_n < 0$ per n grande.

> COROLLARIO. — *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, *e se* $a_n \geq b_n$ *per ogni* n, *allora* $a \geq b$.

Per ottenere la dimostrazione di quest'ultimo corollario, basta applicare il corollario precedente alla successione $a_n - b_n$.

Possiamo schematizzare i risultati ottenuti nel modo seguente (si noti la differenza tra i segni $>$ e $\geq$):

$$a_n \to a, \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \nu : a_n > 0, \quad \forall n > \nu; \tag{21.2}$$

$$a_n \to a, \quad a_n \geq 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a \geq 0; \tag{21.3}$$

$$a_n \to a, \quad b_n \to b, \quad a_n \geq b_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a \geq b. \tag{21.4}$$

> TEOREMA DEI CARABINIERI. — *Siano* a_n, b_n, c_n *tre successioni tali che*
>
> $$a_n \leq c_n \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{21.5}$$
>
> *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$, *allora anche la successione* c_n *è convergente e* $\lim_{n\to+\infty} c_n = a$.

Dimostrazione: per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\exists\, \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_1; \quad \exists\, \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_2. \tag{21.6}$$

Ricordiamo che le disuguaglianze con il valore assoluto si possono anche scrivere.

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon; \qquad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon. \tag{21.7}$$

Quindi, se $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, risulta

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon, \tag{21.8}$$

Perciò $|c_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$, come volevasi dimostrare.

Valgono analoghi teoremi di confronto anche per i limiti infiniti:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad b_n \to +\infty \tag{21.9}$$

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \to -\infty \quad \Rightarrow \quad a_n \to -\infty. \tag{21.10}$$

Dimostriamo la (21.9) (la prova della (21.10) è analoga): per ipotesi $a_n \to +\infty$ che, per la definizione di limite (17.20), significa:

$$\forall M > 0, \exists\, \nu : \quad a_n > M, \qquad \forall n > \nu. \tag{21.11}$$

Dato che $b_n \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene la tesi

$$b_n \geq a_n > M, \qquad \forall n > \nu. \tag{21.12}$$

22. Altre proprietà dei limiti di successioni

Riportiamo in questo paragrafo due ulteriori proprietà dei limiti di successioni; in particolare la seconda, enunciata sotto forma di teorema, è importante per le applicazioni.

PROPOSIZIONE. — a_n *converge a zero se e soltanto se* $|a_n|$ *converge a zero.*

Dimostrazione: posto $b_n = |a_n|$, in base alla definizione (17.9) b_n converge a zero se e solo se

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu : \quad |b_n| < \varepsilon; \qquad \forall n > \nu; \tag{22.1}$$

Dato che

$$|b_n| = ||a_n|| = |a_n| \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{22.2}$$

la (22.1) è equivalente alla convergenza a zero della successione a_n

Si noti che, nella proposizione precedente, è importante considerare non solo successioni convergenti, ma più in particolare successioni *convergenti a zero*. Ad esempio, se $a_n = (-1)^n$, allora a_n non è convergente, mentre $b_n = |a_n|$ è la successione costante $b_n = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, che ovviamente converge ad 1.

Ricordiamo che una successione a_n è *limitata* se esiste un numero $M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M, \qquad \forall\ n \in \mathbf{N}. \tag{22.3}$$

Ricordiamo inoltre che una successione che converge a zero si dice *infinitesima*.

TEOREMA DEL LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA. — *Se* a_n *è una successione limitata e* b_n *è una successione che converge a zero; allora la successione prodotto* $a_n \cdot b_n$ *converge a zero.*

Dimostrazione (*primo metodo*) per l'ipotesi (22.3) si ha

$$|a_n\ b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{22.4}$$

che, per la proprietà (8.11) del valore assoluto, equivale a

$$-M \cdot |b_n| \leq a_n \quad b_n \leq M \cdot |b_n|, \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{22.5}$$

Dato che per ipotesi $b_n \to 0$, per la proposizione precedente anche la successione $|b_n|$ converge a zero. Per il teorema dei carabinieri, dalla (22.5) si deduce infine che $a_n \cdot b_n \to 0$.

Dimostrazione (*secondo metodo*): per la definizione di limite si ha:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu : |b_n| < \varepsilon, \qquad \forall n > \nu. \tag{22.6}$$

Dall'ipotesi di limitatezza (22.3) si ottiene poi

$$|a_n\ b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| < M\varepsilon, \qquad \forall n > \nu, \tag{22.7}$$

che equivale (si veda la (17.10)) al fatto che la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.

A titolo di esempio verifichiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n\ (n+5)}{3n^2+1} = 0; \tag{22.8}$$

infatti si tratta del limite del prodotto della successione limitata $a_n = (-1)^n$ per la successione infinitesima

$$b_n = \frac{n+5}{3n^2+1} = \frac{1/n + 5/n^2}{3 + 1/n^2}. \tag{22.9}$$

Come ulteriore esempio verifichiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{sen}\ n}{n} = 0 \tag{22.10}$$

(il lettore non confonda questo limite con quello proposto in (23.17), uguale a 1; nel limite in (23.17) la successione a_n converge a zero, mentre la successione in considerazione in (22.10) è sen a_n/a_n, con $a_n = n \to +\infty$).

Il limite in (22.10) è zero perché limite del prodotto della successione limitata $a_n = \mathrm{sen}\ n$ ($|a_n| = |\mathrm{sen}\ n| \leq 1$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$) per la successione infinitesima $b_n = 1/n$.

23. Alcuni limiti notevoli

In questo paragrafo esaminiamo alcuni esempi di limiti particolarmente importanti. Cominciamo con ($a \in \mathbf{R}$ fissato):

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & se \quad a > 1 \\ 1 & se \quad a = 1 \\ 0 & se \quad -1 < a < 1 \\ non\ esiste & se \quad a \leq -1 \end{cases} \tag{23.1}$$

Se $a > 1$ è possibile utilizzare la disuguaglianza di Bernoulli (11.5):

Il risultato seguente è di fondamentale importanza.

TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTÒNE. — *Ogni successione monotòna ammette limite. In particolare, ogni successione monotòna e limitata è convergente, cioè ammette limite finito.*

La successione (17.4) $a_n = (-1)^n/n$ non è monotòna; infatti i termini di posto pari sono positivi, mentre quelli di posto dispari sono negativi: i termini della successione oscillano intorno allo zero. La successione $a_n = (-1)^n/n$ è quindi un *esempio di successione convergente, pur non essendo monotòna* (osserviamo che ciò non contraddice il teorema; infatti nel teorema non si afferma che ogni successione convergente è monotòna!).

La successione non regolare (17.5) $a_n = (-1)^n$ non è monotòna; ciò è in accordo con il teorema sulle successioni monotòne, perché se la successione (17.5) fosse monotòna dovrebbe avere limite.

Dimostrazione del teorema sulle successioni monotòne: consideriamo il caso di una successione a_n crescente e limitata. Posto $\ell = \sup_n a_n$, fissato $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore (paragrafo 12) esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < a_\nu . \tag{24.8}$$

Per $n > \nu$ risulta $a_\nu \le a_n$ e dunque

$$\ell - \varepsilon < a_\nu \le a_n \le \ell < \ell + \varepsilon, \tag{24.9}$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

Consideriamo ora il caso di una successione a_n crescente e non limitata (superiormente). Fissato $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_\nu > M$. Dato che a_n è crescente, per ogni $n > \nu$ risulta

$$a_n \ge a_\nu > M \tag{24.10}$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

In modo analogo si trattano i casi relativi a successioni decrescenti.

Ricordando che una successione si dice *regolare* se essa ammette limite (finito o infinito), il precedente teorema afferma che *ogni successione monotòna è regolare*.

25. Il numero e

Il teorema sulle successioni monotòne è utile per definire il *numero di Nepero* e come limite di una particolare successione monotòna e limitata.

Infatti, introduciamo tale numero mediante il limite:

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{con} \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{25.1}$$

La (25.1) è la definizione del *numero di Nepero* e. Tale definizione è giustificata dal fatto che, come provato alla fine del paragrafo, *la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ è (strettamente) crescente e limitata*; quindi esiste, ed è un numero reale, il limite per $n \to +\infty$ di a_n.

Nel paragrafo 81 indicheremo il metodo per calcolare espressioni decimali approssimate del numero e, del tipo

$$e = 2.71828182845904523536\ldots ; \tag{25.2}$$

qui riportiamo alcuni valori numerici approssimati di a_n che, essendo a_n una successione strettamente crescente, sono approssimazioni per difetto del numero e:

n	1	10	50	100	500	1000	10^5
$(1 + 1/n)^n$	2	2.5937	2.6915	2.7048	2.7155	2.7169	2.7182

Nelle applicazioni sono utili anche i limiti seguenti, generalizzazioni della definizione (25.1):

$$a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e; \tag{25.3}$$

$$a_n \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e. \tag{25.4}$$

Dimostrazione della (25.3): indichiamo con $[a_n]$, come nella (23.11), la parte intera di a_n, cioè il più grande intero minore od uguale ad a_n. Risulta $[a_n] \le a_n < [a_n] + 1$, e quindi

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}, \tag{25.5}$$

perché la base e l'esponente del primo membro sono minori rispettivamente della base e dell'esponente del secondo membro, e lo stesso accade tra secondo e terzo membro. Il risultato segue dal teorema dei carabinieri, perché si verifica facilmente che le successioni a primo e terzo membro tendono ad e, per $n \to +\infty$. Infatti ad esempio per il terzo membro:

Dal criterio del rapporto otteniamo che $n^b/a^n \to 0$. Per il terzo limite poniamo

$$(26.5) \qquad a_n = \frac{a^n}{n!}; \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0.$$

Ancora dal criterio del rapporto segue che $a^n/n! \to 0$. Infine, per il quarto limite in (26.3) poniamo

$$(26.6) \qquad a_n = \frac{n!}{n^n}; \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

e di nuovo, per il criterio del rapporto, la successione $a_n = n!/n^n$ converge a zero per $n \to +\infty$.

27. Successioni estratte. Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione a_{n_k} definita da

$$(27.1) \qquad k \in \mathbb{N} \to a_{n_k}$$

prende il nome di *successione estratta* da a_n, di indici n_k.

Ad esempio, se $n_k = 2k$, la successione estratta da a_n di indici $2k$, cioè di indici pari, è

$$(27.2) \qquad a_2, a_4, \dots, a_{2k}, \dots$$

Se invece $n_k = 2k - 1$, si ottiene l'estratta da a_n di indici dispari:

$$(27.3) \qquad a_1, a_3, \dots, a_{2k-1}, \dots$$

LEMMA. — *Per ogni successione n_k strettamente crescente di numeri naturali, si ha*

$$(27.4) \qquad n_k \geq k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione: per $k = 1$ si ha ovviamente $n_1 \geq 1$. Inoltre, supponendo valida la (27.4), proviamo che risulta $n_{k+1} \geq k + 1$, da cui, per il principio di induzione, la (27.4) risulterà vera per ogni k. Per ipotesi è $n_{k+1} > n_k \geq k$, ovvero $n_{k+1} > k$ e perciò $n_{k+1} \geq k + 1$.

Dalla (27.4) si ricava facilmente la seguente

PROPOSIZIONE. — *Se a_n converge verso a, allora ogni estratta a_{n_k} converge verso a.*

Dimostrazione: fissato $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > k_0$. Se $k > k_0$, essendo $n_k \geq k$ per il lemma precedente, si ha anche $n_k > k_0$ e perciò $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Nel paragrafo 18 abbiamo dimostrato che ogni successione a_n convergente è limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il viceversa non sussiste, perché, ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ è limitata, ma non convergente.

Tuttavia sussiste il seguente notevole

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS. — *Sia a_n una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.*

Dimostrazione: per ipotesi la successione a_n è limitata; pertanto esistono due costanti A, $B \in \mathbb{R}$ tali che

$$(27.5) \qquad A \leq a_n \leq B, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suddividiamo l'intervallo [A, B] mediante il punto di mezzo $C = (A + B)/2$ e consideriamo i due intervalli [A, C], [C, B]. Uno almeno dei due intervalli [A, C], [C, B] contiene termini della successione a_n per infiniti indici; cioè, più precisamente, dato che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito, risulta anche infinito almeno uno tra i due sottoinsiemi di $\mathbb{N}$

$$(27.6) \qquad \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \in [A, C]\}, \qquad \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \in [C, B]\}.$$

Sia ad esempio [A, C] (oppure [C, B]) il sottointervallo che contiene termini della successione a_n per infiniti indici e indichiamolo genericamente con il simbolo $[A_1, B_1]$, essendo

$$(27.7) \qquad A \leq A_1, \qquad B_1 \leq B, \qquad B_1 - A_1 = \frac{B - A}{2}.$$

Suddividiamo l'intervallo $[A_1, B_1]$ mediante il punto di mezzo $C_1 = (A_1 + B_1)/2$. Per lo stesso motivo indicato in precedenza almeno uno tra i due intervalli $[A_1, C_1]$, $[C_1, B_1]$ contiene termini della successione a_n per infiniti indici e indichiamo tale intervallo con il simbolo $[A_2, B_2]$; risulta

$$(27.8) \qquad A_1 \leq A_2, \qquad B_2 \leq B_1, \qquad B_2 - A_2 = \frac{B_1 - A_1}{2} = \frac{B - A}{2^2}.$$

Iterando il procedimento si generano due successioni A_k, B_k ($k \in \mathbb{N}$) tali che

(27.9) $$A \le A_k \le A_{k+1} < B_{k+1} \le B_k \le B, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

(27.10) $$B_k - A_k = \frac{B - A}{2^k}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

e inoltre l'intervallo $[A_k, B_k]$ contiene termini della successione a_n per infiniti indici.

In particolare, l'intervallo $[A_1, B_1]$ contiene termini della successione a_n; quindi esiste il primo intero n_1 tale che $a_{n_1} \in [A_1, B_1]$. Per lo stesso motivo esiste un primo intero n_2, fra tutti i numeri naturali più grandi di n_1, per cui $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$. Iterando i casi $k = 1, 2$ già trattati, con $k = 3, 4, 5, \ldots$, determiniamo una successione strettamente crescente di interi

(27.11) $$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

per cui $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dato che $B_k - A_k = (B - A)/2^k$, abbiamo quindi

(27.12) $$A_k \le a_{n_k} \le B_k = A_k + \frac{B - A}{2^k}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Per la (27.9) la successione A_k (ed anche la B_k) è monotòna e limitata; per il teorema sulle successioni monotòne A_k ammette limite finito per $k \to +\infty$. Indichiamo con $\ell \in \mathbb{R}$ il valore di tale limite.

Dato che $(B - A)/2^k \to 0$ per $k \to +\infty$, sia il primo che l'ultimo membro della (27.12) convengono ad ℓ per $k \to +\infty$. Dal teorema dei carabinieri si ottiene allora la conclusione

(27.13) $$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = \ell .$$

28. Successioni di Cauchy

Sia a_n una successione di numeri reali. Si dice che a_n è una *successione di Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che per $h, k > \nu$ risulti

(28.1) $$|a_k - a_h| < \varepsilon.$$

Dimostriamo in primo luogo la seguente

PROPOSIZIONE. — *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione: se a_n converge verso a allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste ν tale che

(28.2) $$|a_n - a| < \varepsilon/2, \qquad \forall n > \nu.$$

Dalla disuguaglianza triangolare segue allora, per $h, k > \nu$:

(28.3) $$|a_k - a_h| \le |a_k - a| + |a - a_h| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Per dimostrare che, viceversa, ogni successione di Cauchy è convergente, premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. — *Una successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione: sia $\varepsilon = 1$; per ipotesi esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

(28.4) $$|a_k - a_h| < 1, \qquad \forall\, h, k > \nu.$$

Fissiamo un indice $h_0 > \nu$. Allora, dalla (28.4), per le proprietà del valore assoluto, segue

(28.5) $$a_{h_0} - 1 < a_k < a_{h_0} + 1, \qquad \forall\, k > \nu.$$

Posto

$$A = \min\{a_1, \ldots, a_\nu, a_{h_0} - 1\}, \qquad B = \max\{a_1, \ldots, a_\nu, a_{h_0} + 1\},$$

evidentemente risulta

(28.6) $$A \le a_k \le B, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

e perciò la successione è limitata.

LEMMA 2. — *Se una successione di Cauchy a_n contiene un'estratta a_{n_k} convergente verso ℓ, allora anche a_n converge verso ℓ.*

Dimostrazione: fissato $\varepsilon > 0$ sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

(28.7) $$|a_k - a_h| < \varepsilon/2, \qquad \forall\, h, k > \nu.$$

Sia inoltre $k_0 > \nu$ tale che

(28.8) $$|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2, \qquad \forall\, k \ge k_0 .$$

Poiché si ha: $n_{k_0} \ge k_0 > \nu$ (si veda la (27.4)), per ogni $n > \nu$ risulta

(28.9) $$|a_n - \ell| \le |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Combinando i risultati precedenti si dimostra il seguente

CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY. — *Una successione* a_n *è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dimostrazione: con la proposizione all'inizio del paragrafo abbiamo già provato che le successioni convergenti sono di Cauchy. Viceversa, se a_n è di Cauchy, per il lemma 1 è anche limitata. In base al teorema di Bolzano-Weierstrass (paragrafo 27) a_n ammette una successione estratta a_{n_k} convergente. Per il lemma 2, a_n è convergente.

LIMITI DI FUNZIONI. FUNZIONI CONTINUE

29. Premessa

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}, \tag{29.1}$$

che è definita per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. Allo scopo di disegnarne il grafico, osserviamo preliminarmente che $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; dividendo tutti i membri per x otteniamo

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}, \qquad \forall\, x > 0. \tag{29.2}$$

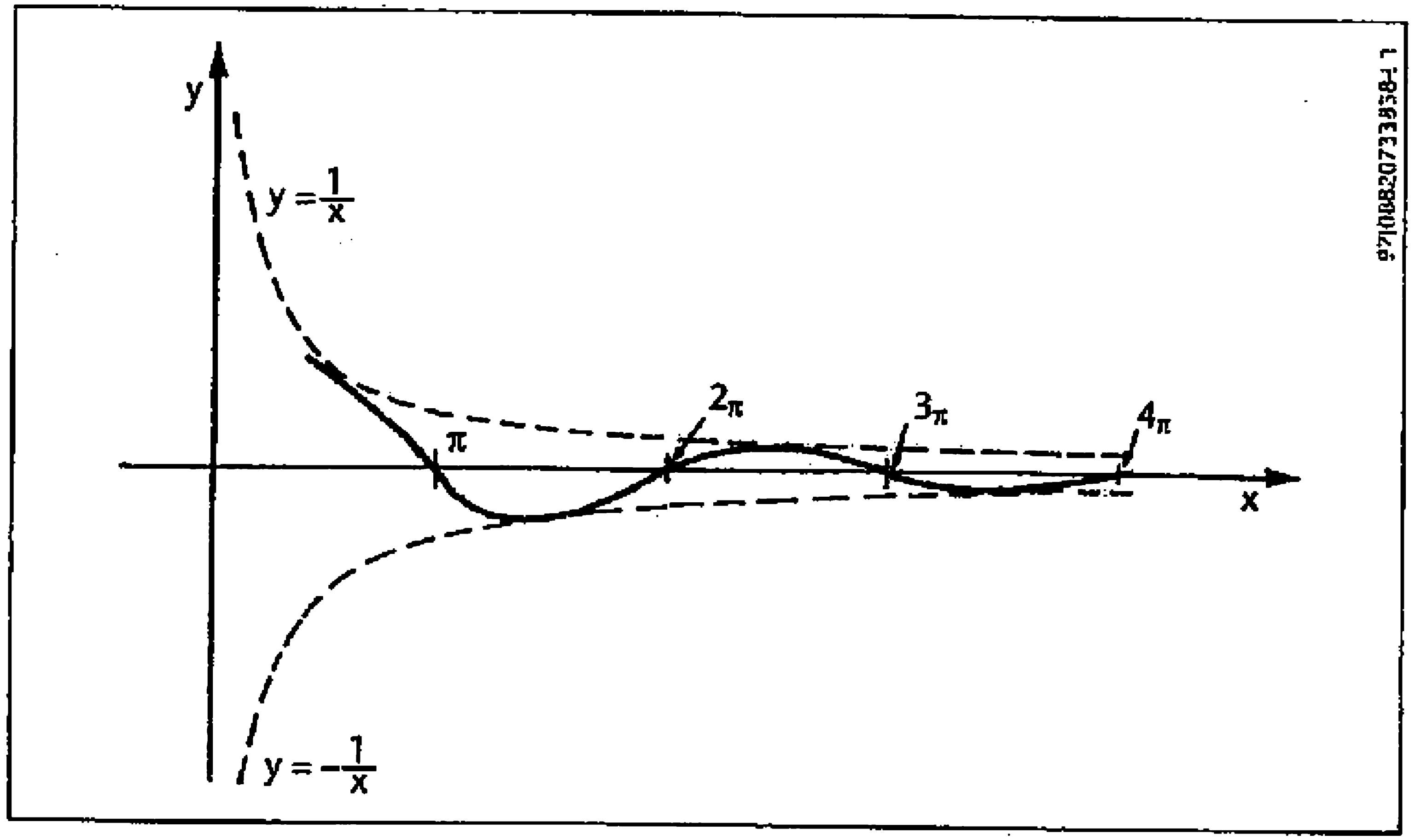

Figura 4.1

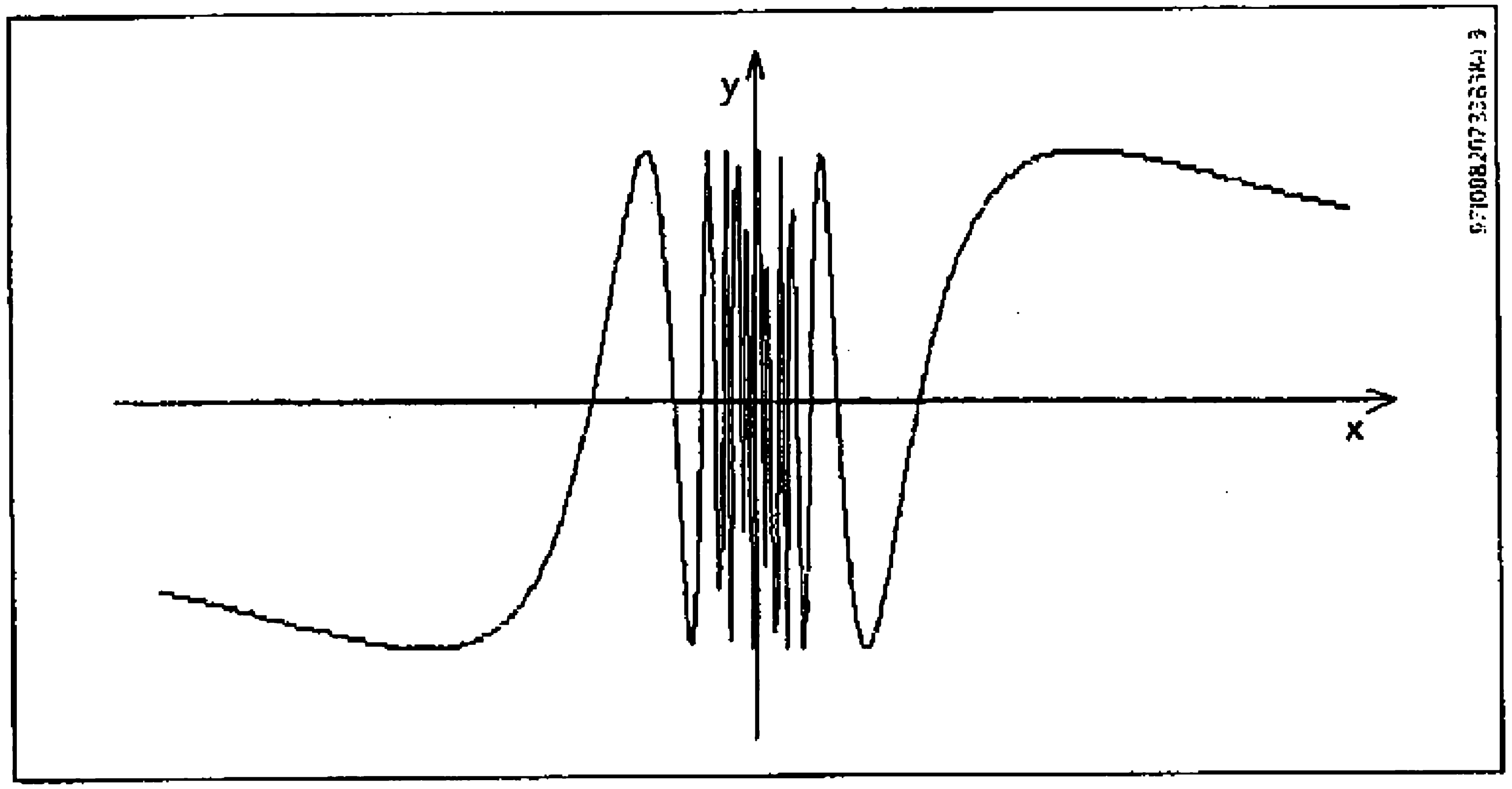

Figura 4.3 – y = sen (1/x)

Nel paragrafo che segue formalizziamo la definizione di limite di funzione secondo le idee sopra esposte.

30. Definizioni

Si definisce il limite di una funzione f(x), per x che tende ad $x_0 \in \mathbf{R}$, nel caso in cui x_0 risulti un *punto di accumulazione* per il dominio di f(x).

In generale un numero reale x_0 si dice *punto di accumulazione* per un insieme $A \subset \mathbf{R}$ se in ogni *intorno* di x_0, cioè in ogni insieme $\{x \in \mathbf{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$, con $\delta > 0$, cade almeno un punto di A distinto da x_0.

Nel prosieguo del capitolo vengono prese in considerazione soltanto funzioni il cui dominio A è costituito da un intervallo (o dall'unione finita di intervalli) e x_0, punto prescelto per il calcolo del limite, appartiene ad A od è un punto di frontiera per il dominio A (ad esempio x_0 è un estremo dell'intervallo A nel caso in cui A è, appunto, un intervallo di numeri reali); in entrambi i casi x_0 risulta punto di accumulazione per l'insieme A.

Se a, b sono due numeri reali (con a < b), per indicare un *intervallo* di estremi a, b si usano le notazioni:

(30.1) $$[a,\ b] = \{x \in \mathbf{R}:\ a \le x \le b\};$$

(30.2) $$(a,\ b) = \{x \in \mathbf{R}:\ a < x < b\};$$

(30.3) $$[a,\ b) = \{x \in \mathbf{R}:\ a \le x < b\};$$

(30.4) $$(a,\ b] = \{x \in \mathbf{R}:\ a < x \le b\}.$$

L'intervallo [a, b] si dice *chiuso*, mentre (a, b) è detto *aperto*. Inoltre [a, b) è detto *chiuso a sinistra* e *aperto a destra* (analogamente per (a, b]); gli intervalli sopra scritti si dicono *limitati*. Si considerano anche gli *intervalli illimitati:*

(30.5) $$[a,\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R}:\ x \ge a\};$$

(30.6) $$(a,\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R}:\ x > a\};$$

(30.7) $$(-\infty,\ b] = \{x \in \mathbf{R}:\ x \le b\};$$

(30.8) $$(-\infty,\ b) = \{x \in \mathbf{R}:\ x < b\};$$

(30.9) $$(-\infty,\ +\infty) = \mathbf{R}.$$

Come già detto, i numeri a, b sono detti *estremi* dell'intervallo (anche nel caso in cui tali numeri non fanno parte dell'intervallo).

Un *intorno* di un punto x_0 è un intervallo aperto contenente x_0, ad esempio un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (più generalmente, viene considerato intorno di un punto x_0 ogni insieme contenente un intervallo aperto contenente x_0).

Nelle definizioni che seguono consideriamo funzioni f(x) il cui dominio A è un intervallo, o è unione finita di intervalli, e x_0 appartiene, od è estremo, ad uno di tali intervalli.

Ad esempio, se f(x) è definita nell'insieme $A = \mathbf{R} - \{0\}$, allora risulta $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; in tal caso x_0, punto prescelto per il calcolo del limite, può appartenere ad uno dei due intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ oppure può essere uguale all'estremo 0. In definitiva, in questo esempio, x_0 può essere un qualunque numero reale.

DEFINIZIONE. — *Si dice che* f(x) *ha limite uguale ad* ℓ *(tende o converge ad* ℓ*) per* x *che tende ad* x_0 *se, qualunque sia la successione* $x_n \to x_0$*, con* $x_n \in A$ *e* $x_n \neq x_0$ *per ogni* n*, risulta* $f(x_n) \to \ell$.

Secondo questa definizione la relazione (23.17), come già detto nel paragrafo precedente, diventa:

(30.10) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Così pure le relazioni (23.13), (23.14) diventano

(30.11) $$\lim_{x \to 0} \text{sen } x = 0; \qquad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Possiamo formulare la definizione di limite direttamente per mezzo di disuguaglianze, come già fatto per le successioni, usando i simboli ε, ν. I simboli usati classicamente per i limiti di funzioni sono ε, δ (delta) nel modo seguente:

> TEOREMA. — *Si ha* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *se e soltanto se, qualunque sia* $\varepsilon > 0$, *esiste un numero* $\delta > 0$ *tale che* $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, *per ogni* $x \in A - \{x_0\}$, *con* $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Il teorema, che può essere enunciato in simboli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: \ |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall x \in A: 0 \neq |x - x_0| < \delta, \tag{30.12}$$

è dimostrato nel seguente paragrafo 31.

Valgono analoghe definizioni per i limiti infiniti. Così ad esempio:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall\, x_n \to x_0, \ x_n \in A - \{x_0\} \ \forall\, n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(x_n) \to +\infty; \tag{30.13}$$
$$\iff \forall M > 0, \exists\delta > 0: f(x) > M, \quad \forall x \in A: \ 0 \neq |x - x_0| < \delta.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall\, x_n \to +\infty, x_n \in A, \forall\, n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(x_n) \to \ell; \tag{30.14}$$
$$\iff \forall\varepsilon > 0, \exists\, k: |f(x) - \ell| < \varepsilon, \ \forall\, x \in A: x > k.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, x_n \to +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(x_n) \to +\infty; \tag{30.15}$$
$$\iff \forall M > 0, \exists k: f(x) > M, \forall x \in A: x > k.$$

Il lettore, tenendo conto della definizione (17.21) relativa alle successioni che tendono a $-\infty$, formuli i casi corrispondenti con $-\infty$ al posto di $+\infty$.

È utile considerare anche i cosiddetti *limite destro* ($x \to x_0^+$) e *limite sinistro* ($x \to x_0^-$), quando ci si avvicina al punto x_0 per valori di $x \in A$ rispettivamente solo maggiori di x_0, o solo minori.

Consideriamo per brevità solo i casi di limite ℓ finito (il lettore formuli i casi con limite infinito):

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall\, x_n \to x_0, x_n \in A \text{ e } x_n > x_0 \ \forall\, n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(x_n) \to \ell; \tag{30.16}$$
$$\iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in A: x_0 < x < x_0 + \delta.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall\, x_n \to x_0, x_n \in A \text{ e } x_n < x_0, \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(x_n) \to \ell; \tag{30.17}$$
$$\iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall x \in A: x_0 - \delta < x < x_0 .$$

Ad esempio, è facile verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1; \tag{30.18}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \quad \textit{non esiste.} \tag{30.19}$$

31. Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Le seguenti relazioni (31.1), (31.2), di cui proviamo l'equivalenza, sono state adottate nel paragrafo 30 come definizione di limite (finito) di una funzione. Come nel paragrafo 30, $f(x)$ è definita in un insieme A costituito da un intervallo o da una unione finita di intervalli e x_0 è un estremo di uno degli intervalli; la situazione più generale presa in considerazione nel paragrafo precedente, in cui x_0 è punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, non presenta differenze.

> TEOREMA. — *Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti* (x_0, $\ell \in \mathbf{R}$):
>
> $$\forall\, x_n \to x_0, \quad x_n \in A - \{x_0\} \ \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to \ell; \tag{31.1}$$
>
> $$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: \ x \in A, \ \ 0 \neq |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{31.2}$$

Proviamo preliminarmente che (31.2) implica (31.1): per ogni $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ il numero reale per cui vale l'ipotesi (31.2); consideriamo poi una generica successione x_n, di punti di A, convergente ad x_0, con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Per la definizione di limite di successione, esiste un indice ν per cui $|x_n - x_0| < \delta$ per ogni $n > \nu$; inoltre, essendo $x_n \neq x_0$, in definitiva si ha

(31.3) $$x_n \in A, \quad 0 \neq |x_n - x_0| < \delta, \qquad \forall n > \nu.$$

Per l'ipotesi (31.2) segue allora

(31.4) $$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \qquad \forall n > \nu,$$

che, in base alla definizione di limite di successione, significa che $f(x_n) \to \ell$ per $n \to +\infty$.

Proviamo ora, per assurdo, che (31.1) implica (31.2): contraddire la (31.2) equivale ad affermare che:

(31.5) $$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0 .$$

Poniamo $\delta = 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$ e indichiamo con $x = x_n$ il valore di x che compare in (31.5) in dipendenza da $\delta = 1/n$:

(31.6) $$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists\, x_n \in A : 0 \neq |x_n - x_0| < \frac{1}{n},\ |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0 .$$

Risulta in particolare

(31.7) $$x_n \neq x_0, \qquad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

perciò $x_n \in A - \{x_0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to x_0$ (per il teorema dei carabinieri); però $f(x_n)$ non converge ad ℓ perché la disuguaglianza $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, contrasta con la definizione di limite di successione.

Il lettore, per esercizio, riformuli le relazioni (31.1), (31.2) con x_0 e/o ℓ infiniti (come nel paragrafo 30) e ne provi l'equivalenza.

32. Esempi e proprietà dei limiti di funzioni

Esempi di limiti molto importanti, e che quindi occorre sapere bene, sono i limiti della funzione esponenziale che derivano dal limite di successione (23.1):

(32.1) $$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & se \quad a > 1 \\ 0 & se \quad 0 < a < 1. \end{cases}$$

In particolare per la base e, dato che $e^{-x} = 1/e^x$, si ha:

(32.2) $$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Il lettore controlli graficamente i limiti per $x \to \pm\infty$ della funzione esponenziale dai grafici riportati nel paragrafo 9; controlli graficamente anche i seguenti importanti limiti della funzione $\log x$ (in base e):

(32.3) $$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty.$$

Verifichiamo che invece i limiti

(32.4) $$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x, \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos x, \qquad \textit{non esistono.}$$

Limitiamoci al primo dei due. Se esistesse il limite $= \ell$, dovremmo avere che $\operatorname{sen} x_n$ tende sempre allo stesso valore ℓ qualunque sia la successione $x_n \to +\infty$.

Mostriamo che esistono due successioni, x_n x'_n, divergenti a $+\infty$, con la proprietà che $\operatorname{sen} x_n$ e $\operatorname{sen} x'_n$ tendono a limiti diversi. Infatti, ponendo $x_n = 2\pi n$, $x'_n = 2\pi n + \pi/2$, risulta $\operatorname{sen} x_n = 0 \to 0$, mentre $\operatorname{sen} x'_n = 1 \to 1$.

Analogamente

(32.5) $$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \textit{non esiste.}$$

La successione $x_n = 1/(n\pi)$ converge a zero per $n \to +\infty$; in corrispondenza la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ assume i valori

(32.6) $$f(x_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{x_n} = \operatorname{sen}(n\pi) = 0.$$

Perciò $f(x_n)$ è la successione costante, uguale a zero, e converge a zero.

Analogamente, posto $x'_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$, risulta

(32.7) $$f(x'_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{x'_n} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1;$$

quindi $x'_n \to 0$, ma $f(x'_n) \to 1$ (in contrasto con il fatto che $f(x_n) \to 0$). Ne segue che $f(x)$ non ammette limite per $x \to 0$ (si veda il grafico di $f(x)$ in figura 4.3).

Altri limiti notevoli, conseguenza della definizione di limite di funzione e dei limiti di successione (25.3), (25.4), sono

(32.8) $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

allora la funzione $\bar{f}(x)$, definita in A da

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \in A - \{x_0\} \\ \ell & se \quad x = x_0 \end{cases} \tag{34.10}$$

è detta *prolungamento per continuità di* f(x) *in* x_0; $\bar{f}(x)$ risulta continua in x_0. Se poi f(x) è continua in $A - \{x_0\}$, allora $\bar{f}(x)$, continua su tutto l'insieme A, è detta *prolungamento per continuità di* f(x) *su* A.

35. Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Il teorema seguente è analogo al teorema della permanenza del segno (paragrafo 21) per le successioni.

> TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. — *Sia* f(x) *una funzione definita in un intorno di* x_0 *e sia continua in* x_0. *Se* $f(x_0) > 0$, *esiste un numero* $\delta > 0$ *con la proprietà che* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

La dimostrazione si fa come nel paragrafo 21: dato che $f(x_0) > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = f(x_0)/2$; esiste quindi un numero $\delta > 0$ per cui $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2$ per ogni x nell'intervallo $|x - x_0| < \delta$. Ciò equivale a $-f(x_0)/2 < f(x) - f(x_0) < f(x_0)/2$; in particolare

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0. \tag{35.1}$$

Molto importanti sono i tre teoremi che seguono: il teorema dell'esistenza degli zeri, il teorema dell'esistenza dei valori intermedi ed il teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del mimino.

> TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI. — *Sia* f(x) *una funzione continua in un intervallo* [a, b]. *Se* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, *allora esiste* $x_0 \in (a, b)$ *tale che* $f(x_0) = 0$.

Naturalmente la tesi vale anche se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$; cioè il teorema dell'esistenza degli zeri vale supponendo che i valori f(a), f(b) siano di segno discorde. La dimostrazione del teorema è riportata nel paragrafo 36 che segue.

Per mostrare la portata del teorema, consideriamo come esempio le seguenti due equazioni nella incognita x

$$x^3 + x - 1 = 0, \tag{35.2}$$

$$e^x + x = 0, \tag{35.3}$$

che non rientrano tra le equazioni algebriche di primo e secondo grado di cui è facile ricordare la formula risolutiva. La prima delle due equazioni è una *equazione algebrica di terzo grado*, mentre la seconda è un'*equazione trascendente*. Procediamo per tentativi, assegnando ad x alcuni valori:

x	− 2	− 1	0	1	2
$f(x) = x^3 + x - 1$	− 11	− 3	− 1	1	9
$f(x) = e^x + x$	$e^{-2} - 2$	$e^{-1} - 1$	1	e + 1	$e^2 + 2$

Nel caso $f(x) = x^3 + x - 1$, abbiamo $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. In base al teorema dell'esistenza degli zeri, esiste un numero x_0 nell'intervallo (0, 1) tale che $f(x_0) = 0$; cioè x_0 è una soluzione dell'equazione (35.2). Nel paragrafo 36 vedremo come calcolare numericamente tale radice, e troveremo che $x_0 = 0.682327...$

Nel secondo caso $f(x) = e^x + x$, risulta $f(-1) = 1/e - 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$. Quindi esiste nell'intervallo (− 1, 0) una radice x_0 dell'equazione (7.3). Nel paragrafo 36 troveremo che $x_0 = -0.567143...$

Notiamo che esiste una formula risolutiva per le equazioni di terzo grado, che dà come soluzione reale dell'equazione (35.2) il numero

$$x_0 = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{31}{108}\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{31}{108}\right)^{1/2}\right]^{1/3} = 0.682327... \tag{35.4}$$

Viceversa, non è nota alcuna formula risolutiva per l'equazione (35.3).

Applichiamo ancora una volta il teorema dell'esistenza degli zeri per dimostrare una proprietà utilizzata nel paragrafo 9: *per ogni* $y_0 \geq 0$ *esiste un numero reale* $x_0 \geq 0$ *soluzione dell'equazione*

$$x^n = y_0 . \tag{35.5}$$

Ricordiamo che, essendo la funzione $f(x) = x^n$ strettamente crescente per $x > 0$, un tal numero x_0 è unico, e lo abbiamo chiamato radice n-esima di y_0. Dimostriamo che l'equazione (35.5) ha soluzione: se $y_0 = 0$ naturalmente è $x_0 = 0$. Se $y_0 > 0$ poniamo $f(x) = x^n - y_0$; risulta $f(0) = -y_0 < 0$; rimane da trovare un punto dove la funzione f è positiva. Se $y_0 < 1$, allora $f(1) = 1 - y_0 > 0$ e quindi esiste una radice x_0 nell'intervallo (0, 1). Se invece $y_0 > 1$, allora $f(y_0) = y_0^n - y_0 = y_0(y_0^{n-1} - 1) > 0$; quindi in questo caso esiste una radice nell'intervallo $(0, y_0)$. Infine se $y_0 = 1$ basta prendere $x_0 = 1$.

(PRIMO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI. — *Una funzione continua in un intervallo* $[a, b]$ *assume tutti i valori compresi tra* $f(a)$ *e* $f(b)$.

Dimostrazione: per semplificare le notazioni consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$. La tesi consiste nel provare che, qualunque sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Se $y_0 = f(a)$ si può porre $x_0 = a$; analogamente se $y_0 = f(b)$, allora basta prendere $x_0 = b$. Per trattare il caso $y_0 \in (f(a), f(b))$ consideriamo la funzione

(35.6) $$g(x) = f(x) - y_0, \qquad \forall\, x \in [a, b];$$

essendo $f(a) < y_0 < f(b)$, risulta

(35.7) $$g(a) = f(a) - y_0 < 0, \qquad g(b) = f(b) - y_0 > 0.$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste un numero $x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. — *Sia* $f(x)$ *una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$. *Allora* $f(x)$ *assume massimo e minimo in* $[a, b]$, *cioè esistono in* $[a, b]$ x_1, x_2 *tali che*

(35.8) $$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

I numeri x_1, x_2 sono detti rispettivamente *punti di minimo e di massimo* per $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$; i corrispondenti valori $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ sono detti *minimo e massimo* di $f(x)$ in $[a, b]$ (si veda la figura 4.6).

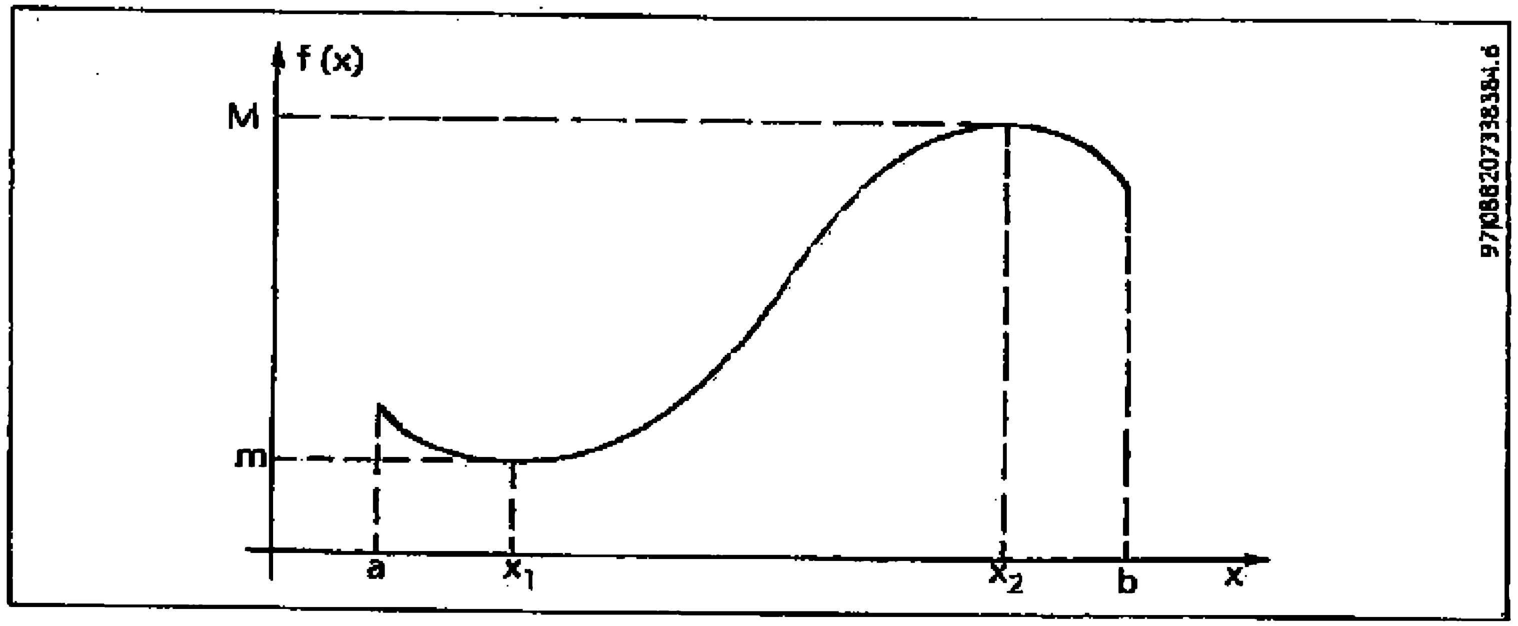

Figura 4.6

Il teorema di Weierstrass è dimostrato nel paragrafo 37; in questa sede ci limitiamo a mettere in luce con degli esempi l'importanza delle ipotesi (funzione *continua* definita in un intervallo *chiuso* e *limitato*) che garantiscono l'esistenza del massimo e del minimo.

Consideriamo per $x > 0$ la funzione

(35.9) $$f(x) = \frac{1}{x};$$

$f(x)$ *non assume massimo* nell'intervallo aperto a sinistra $(0, 1]$; infatti non è limitata superiormente in tale intervallo: $\forall\, M > 0$ risulta $f(x) > M$ se $x \in (0, 1/M)$ (si veda la figura 4.7). La funzione *non assume minimo* nell'intervallo illimitato $[1, +\infty)$; la funzione è limitata in tale intervallo perché risulta (si veda anche la figura 4.8):

(35.10) $$0 < \frac{1}{x} \leq 1, \qquad \forall\, x \geq 1;$$

però 0 non è il minimo di $f(x)$ in $[1, +\infty)$ perché non esiste alcun valore $x_1 \geq 1$ per cui $f(x_1) = 1/x_1 = 0$ (una frazione è nulla se e soltanto se il numeratore è nullo!) e inoltre nessun numero reale positivo m è minimo per $f(x)$ in $[1, +\infty)$ perché risulta $f(x) < m$ per ogni $x > 1/m$.

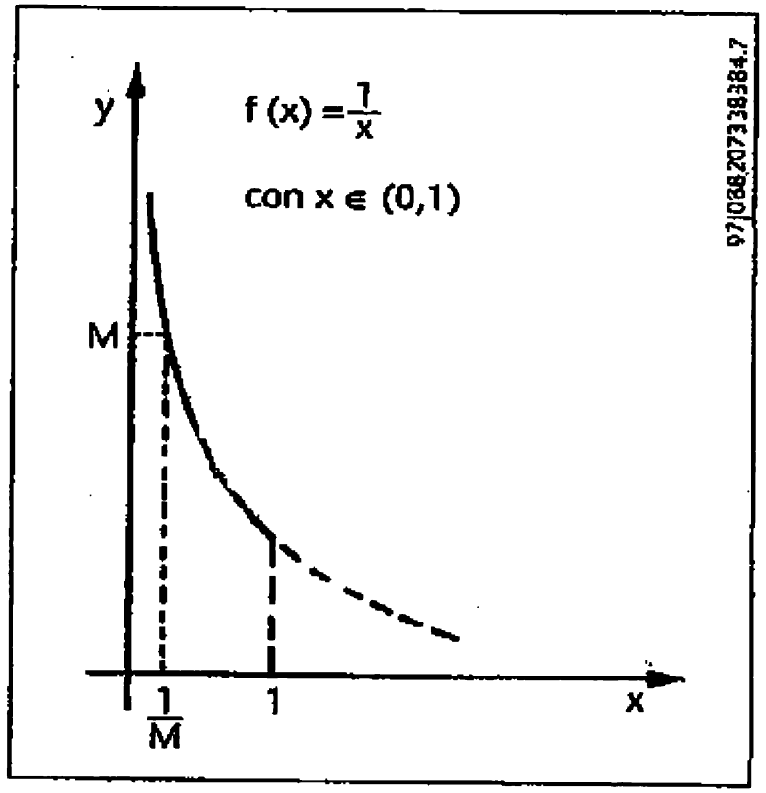

Figura 4.7

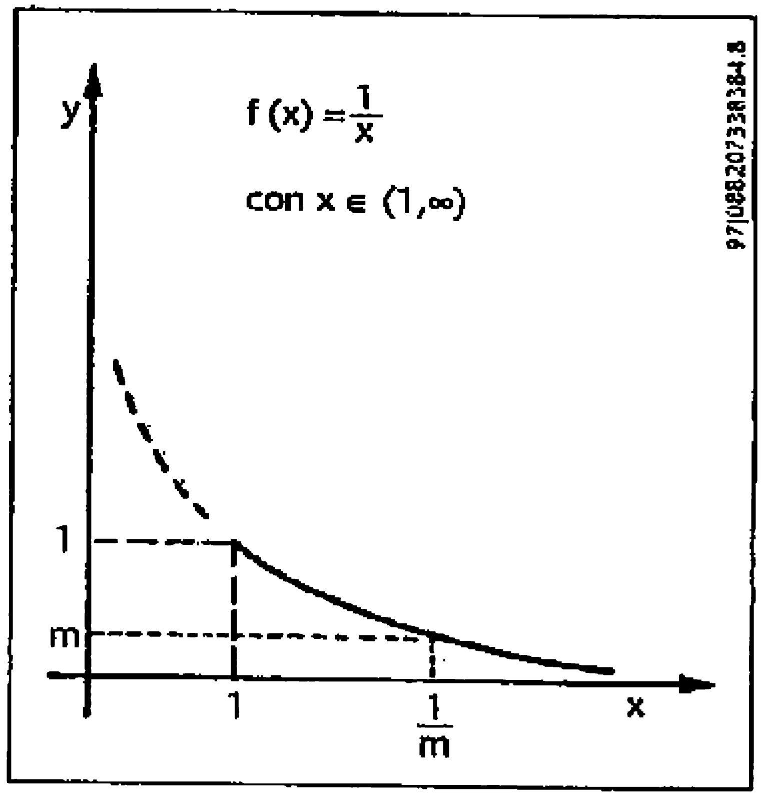

Figura 4.8

La funzione $f(x) = x^2$ assume massimo e minimo in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, in particolare nell'intervallo $[-1, 1]$. Invece la funzione $g(x)$, rappresentata in figura 4.9 e definita da

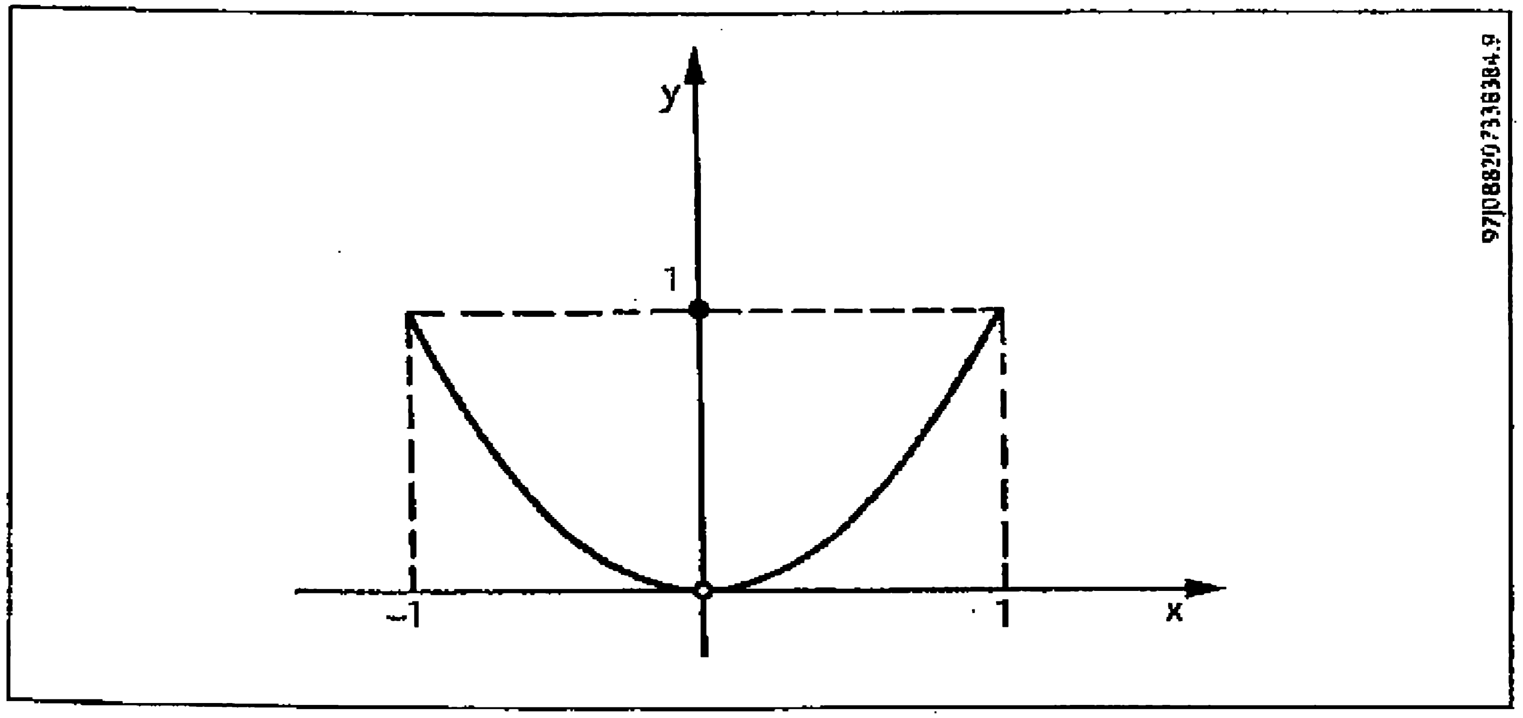

Figura 4.9

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \in [-1, 1] - \{0\} \\ 1 & se \quad x = 0 \end{cases}, \tag{35.11}$$

non assume minimo nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$ perché assume valori positivi arbitrariamente vicini allo zero ($g(x) \to 0$ per $x \to 0$) ma non è uguale a zero per alcun valore di $x \in [-1, 1]$. In questo caso la mancanza del minimo è causata dalla discontinuità di $g(x)$ nel punto $x_0 = 0$.

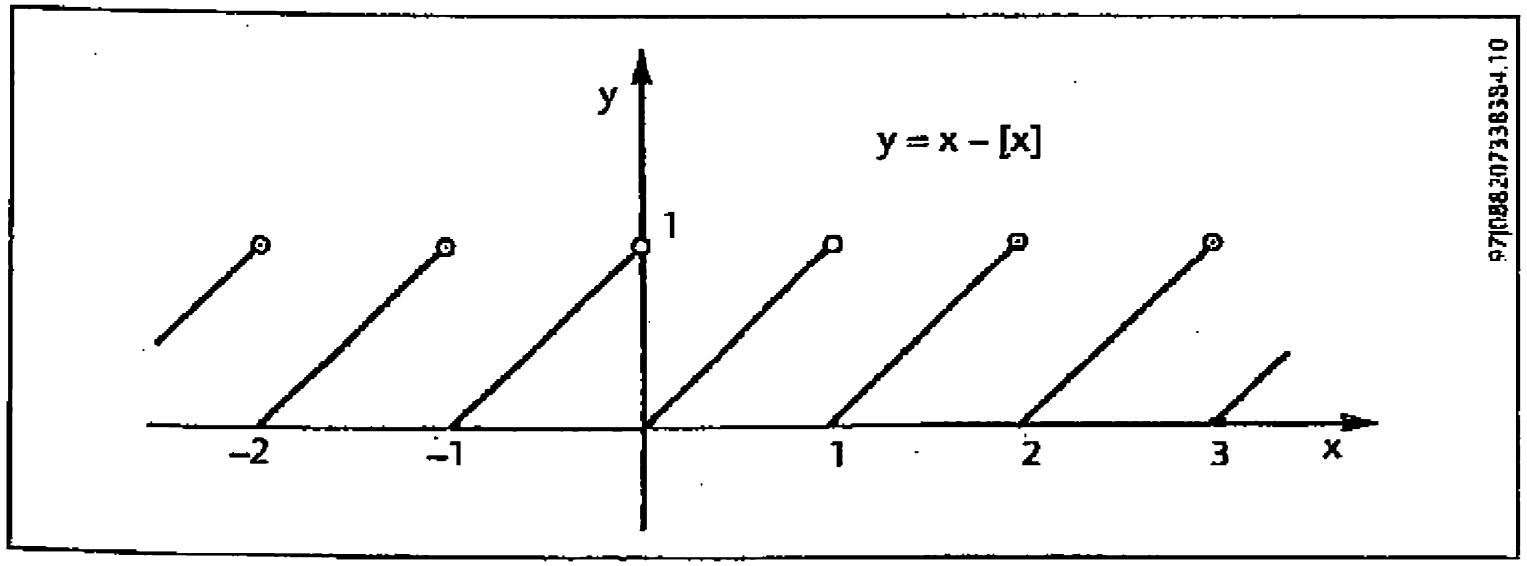

Figura 4.10

Per la sua discontinuità in corrispondenza ai numeri $x \in \mathbb{Z}$, la funzione *parte frazionaria*, rappresentata in figura 4.10 e definita da

$$f(x) = x - [x], \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{35.12}$$

($[x]$ è la *parte intera* di x, rappresentata in figura 4.5), *non ha massimo* in un qualunque intervallo che contenga almeno un numero intero.

Siamo ora in grado di provare una nuova formulazione del teorema di esistenza dei valori intermedi.

(SECONDO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI — *Una funzione continua in un intervallo* $[a, b]$ *assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.*

Dimostrazione: i valori di massimo M e di minimo m sono assunti in base al teorema di Weierstrass; rimane da provare che, qualunque sia $y_0 \in (m, M)$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Indichiamo con x_1, x_2 i punti di minimo e di massimo di $f(x)$, cioè tali che $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ e consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - y_0, \qquad \forall\, x \in [a, b]. \tag{35.13}$$

Essendo $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$, risulta

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0, \qquad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0; \tag{35.14}$$

per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste un numero x_0, appartenente all'intervallo aperto di estremi x_1, x_2, tale che $g(x_0) = 0$, cioè tale che $f(x_0) = y_0$.

Chiudiamo il paragrafo precisando un criterio, introdotto nel paragrafo 7, per riconoscere se una data funzione è invertibile. La continuità della funzione inversa è invece studiata nel paragrafo 38.

CRITERIO DI INVERTIBILITÀ. — *Una funzione continua e strettamente monotòna in un intervallo* $[a, b]$ *è invertibile in tale intervallo.*

Proponiamo la dimostrazione nel caso in cui la funzione f sia strettamente crescente in $[a, b]$: risulta

$$f(a) < f(x) < f(b), \qquad \forall\, x \in (a, b); \tag{35.15}$$

quindi $f(a)$ è il minimo della f in $[a, b]$, mentre $f(b)$ è il massimo. Inoltre si verifica come nel teorema precedente che f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$. Cioè, per ogni $y \in [f(a), f(b)]$, esiste almeno un $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = y$. Tale x è unico; infatti, se esistessero due valori x_1, x_2 distinti tra loro, diciamo $x_1 < x_2$, per cui $y = f(x_1) = f(x_2)$, allora dovrebbe risultare anche $f(x_1) < f(x_2)$, dato che f è strettamente crescente. Quindi $f\colon [a, b] \to [f(a), f(b)]$ è invertibile.

36. Metodo di bisezione per il calcolo delle radici di una equazione

In questo paragrafo dimostriamo il teorema dell'esistenza degli zeri, enunciato all'inizio del paragrafo precedente. Utilizziamo nella dimostrazione il *metodo di bisezione*; si tratta di un procedimento costruttivo che, oltre a dimostrare l'esistenza di una soluzione di una equazione data, fornisce anche un metodo per calcolarla.

Prendiamo in considerazione *equazioni* del tipo

$$f(x) = 0, \tag{36.1}$$

con $f(x)$ funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Risolvere l'equazione significa determinare tutti i numeri reali $x_0 \in [a, b]$ per cui $f(x_0) = 0$; tali numeri si dicono *soluzioni* dell'equazione (36.1), od anche *zeri* della funzione $f(x)$.

Se la funzione $f(x)$ è un polinomio, si dice che (36.1) è un'*equazione algebrica*. Se $f(x)$ è una funzione trascendente (ad esempio composta tramite le funzioni e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$) allora la (36.1) prende il nome di *equazione trascendente*.

Una soluzione di un'equazione algebrica si dice anche *radice* dell'equazione. Per estensione, si usa il termine di radici anche per le soluzioni di equazioni trascendenti.

Ricordiamo le ipotesi del teorema dell'esistenza degli zeri: $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ e

$$f(a) < 0, \qquad f(b) > 0. \tag{36.2}$$

Consideriamo il numero c, punto di mezzo dell'intervallo $[a, b]$, cioè $c = (a + b)/2$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato una radice. Altrimenti consideriamo i due casi $f(c) > 0$, $f(c) < 0$. Se $f(c) > 0$, la funzione f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo $[a, c]$, mentre se $f(c) < 0$, $[c, b]$ è l'intervallo dove f cambia segno. Indichiamo con $[a_1\ b_1]$ l'intervallo da considerare, cioè definiamo:

$$\begin{cases} se \quad f(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a,\ b_1 = c \\ se \quad f(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = c,\ b_1 = b \end{cases} \tag{36.3}$$

Abbiamo così trovato un intervallo $[a_1, b_1]$, di ampiezza metà del precedente $[a, b]$, per cui risulta $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Definiamo $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ e ripetiamo il ragionamento.

Otteniamo tre successioni a_n, b_n, c_n che per $n \geq 1$ sono definite, analogamente alla (36.3), da

$$\begin{cases} se \quad f(c_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = a_n\ ,\ b_{n+1} = c_n \\ se \quad f(c_n) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = c_n\ ,\ b_{n+1} = b_n \end{cases} ,\ c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}. \tag{36.4}$$

Se per qualche n risulta $f(c_n) = 0$, ci si ferma perché si è trovata una radice; altrimenti, per costruzione, risulta

$$f(a_n) < 0, \qquad f(b_n) > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{36.5}$$

È semplice scrivere la relazione che lega a_n con b_n (oppure con c_n); infatti, ad ogni iterazione, la lunghezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$ si dimezza. Quindi $b_1 - a_1 = (b - a)/2$, $b_2 - a_2 = (b - a)/2^2$, e dopo n passi

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{36.6}$$

Per costruzione, la successione a_n è crescente ($a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$) ed è limitata, perché contenuta nell'intervallo $[a, b]$. Per il teorema sulle successioni monotòne a_n ammette limite finito, e sia x_0 tale limite; anche la successione b_n, espressa mediante la (36.6) da

$$b_n = a_n + \frac{b - a}{2^n}. \tag{36.7}$$

converge ad x_0 per $n \to +\infty$.

Quindi, ricordando la (36.5), dalla continuità di f si ottiene

$$f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leq 0; \qquad f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n) \geq 0. \tag{36.8}$$

Perciò $f(x_0) = 0$ ed il teorema dell'esistenza degli zeri è provato.

Dalla dimostrazione proposta risulta chiaro come calcolare numericamente la soluzione x_0. Infatti le tre successioni a_n, b_n, c_n convergono ad x_0. I termini di una qualunque delle tre successioni sono valori approssimati di x_0; in particolare, i valori di a_n sono approssimazioni per difetto, quelli di b_n sono approssimazioni per eccesso, cioè

$$a_n \leq x_0 \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{36.9}$$

Dalle (36.6), (36.9) si deduce che l'errore di approssimazione che si commette sostituendo x_0 con a_n (oppure con b_n) è inferiore a $(b - a)/2^n$. Dato che c_n è il punto di mezzo dell'intervallo $[a_n, b_n]$, l'errore che si commette nell'appossimare x_0 con c_n è minore di $(b - a)/2^{n+1}$.

Riprendiamo in considerazione le equazioni (35.2), (35.3). Ci proponiamo il calcolo delle rispettive radici con un errore inferiore a 10^{-3}. In entrambi i casi abbiamo un intervallo di ampiezza $b - a = 1$; infatti nel primo caso $[a, b] = [0, 1]$, nel secondo $[a, b] = [-1, 0]$.

L'errore di approssimazione che si commette sostituendo la soluzione x_0 con c_n è minore di $1/2^{n+1}$; in particolare, per n = 9, risulta

(36.10) $$| c_9 - x_0 | \le 1/2^{10} = 1/1024 < 10^{-3} .$$

Si ottiene la tabella di valori:

	c	c_1	...	c_6	c_7	c_8	c_9
$x^3 + x - 1 = 0$	0.5	0.75	...	0.6796	0.6835	0.6816	0.6826
$e^x + x = 0$	− 0.5	− 0.75	...	− 0.5703	− 0.5664	− 0.5683	− 0.5673

Quindi la radice dell'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ è $x_0 = 0.682$ (± 0.001); la radice dell'equazione $e^x + x = 0$ è $x_0 = -0.567(\pm 0.001)$. Il numero ± 0.001 è una stima dell'errore; cioè ad esempio nel primo caso risulta $0.681 < x_0 < 0.683$.

Chiudiamo il paragrafo con un'osservazione sull'assioma di completezza (2.11). Abbiamo utilizzato tale assioma nella dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri, in particolare nell'affermazione che la successione a_n, essendo monotòna e limitata, risulta convergente.

Ciò è essenziale; infatti, nell'ambito dei numeri razionali **Q**, dove non è verificato l'assioma di completezza, non vale nemmeno il teorema dell'esistenza degli zeri. Ad esempio, l'equazione $f(x) = x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni nell'intervallo di *razionali* $\{x \in \mathbf{Q}: 0 \le x \le 2\}$, nonostante che $f(0) < 0$, $f(2) > 0$. Infatti si è già verificato nel paragrafo 5 che $\sqrt{2}$ non è razionale. L'assioma di completezza è essenziale anche in altri teoremi di esistenza; ad esempio nel teorema di Weierstrass, o, come già detto, nel teorema sull'esistenza del limite per le successioni monotòne.

37. Dimostrazione del teorema di Weierstrass

Dimostriamo il seguente teorema, enunciato nel paragrafo 35:

TEOREMA DI WEIERSTRASS. — *Sia* f(x) *una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato* [a, b]. *Allora* f(x) *assume minimo e massimo in* [a, b], *cioè esistono* x_1, x_2 *in* [a, b] *tali che*

(37.1) $$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \qquad \forall\, x \in [a, b] .$$

Dimostrazione: posto $M = \sup \{f(x): x \in [a, b]\}$, verifichiamo che esiste una successione x_n di punti di [a, b] tale che

(37.2) $$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M.$$

Infatti, se $M = +\infty$, per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > n$ e perciò $f(x_n) \to M = +\infty$.

Se invece risulta $M < +\infty$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste x_n in [a, b] tale che

(37.3) $$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

e perciò $f(x_n) \to M$.

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass (paragrafo 27) esiste un'estratta x_{n_k} da x_n ed un punto $x_0 \in [a, b]$, tale che

(37.4) $$x_{n_k} \to x_0 .$$

Poiché f(x) è continua, ne segue

(37.5) $$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

e allora, per la (37.2),

(37.6) $$M = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) .$$

Abbiamo così dimostrato che

(37.7) $$f(x_0) = M = \sup \{f(x): x \in [a, b]\};$$

ciò implica allo stesso tempo che $M < +\infty$ e che l'estremo superiore è, in effetti, un massimo.

Analogamente si ragiona per determinare un punto di minimo, partendo dall'estremo inferiore di f(x) in [a, b].

38. Continuità delle funzioni monotòne e delle funzioni inverse

Con lo stesso metodo utilizzato per la dimostrazione del teorema sulle successioni monotòne si prova il seguente:

TEOREMA SUL LIMITE DELLE FUNZIONI MONOTÒNE. — *Sia* f(x) *monotòna in* [a, b]; *allora esistono finiti i limiti*

(38.1) $$\lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x);$$

(38.2) $$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x); \qquad \forall\, x_0 \in (a, b).$$

Dimostrazione: consideriamo il caso di una funzione f(x) crescente in [a, b]; osserviamo subito che f(x) è limitata in [a, b]:

$$f(a) \le f(x) \le f(b), \qquad \forall x \in [a, b]; \tag{38.3}$$

cioè f(a) è il minimo di f(x) nell'intervallo [a, b], mentre f(b) è il massimo.

Fissato $x_0 \in (a, b]$, poniamo

$$\ell = \sup\{f(x) : x \in [a, x_0)\}. \tag{38.4}$$

Per la (38.3) l'estremo superiore ℓ è finito.

Per le proprietà dell'estremo superiore (paragrafo 12), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_1 \in [a, x_0)$ tale che

$$\ell - \varepsilon < f(x_1). \tag{38.5}$$

Per $x > x_1$ risulta $f(x) \ge f(x_1)$ e dunque

$$\ell - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le \ell < \ell + \varepsilon\,, \tag{38.6}$$

da cui

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell. \tag{38.7}$$

Si procede in modo analogo per il limite per $x \to x_0^+$, con $x_0 \in [a, b)$.

Osserviamo che, se f(x) è crescente in [a, b], i limiti (38.1), (38.2) si possono ordinare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} f(a) &\le \lim_{x \to a^+} f(x) \le \lim_{x \to x_0^-} f(x) \le \\ &\le \lim_{x \to x_0^+} f(x) \le \lim_{x \to b^-} f(x) \le f(b), \qquad \forall\, x_0 \in (a, b). \end{aligned} \tag{38.8}$$

> CRITERIO DI CONTINUITÀ PER LE FUNZIONI MONOTÒNE. — *Sia* f(x) *una funzione monotòna nell'intervallo chiuso e limitato* [a, b]. *Allora* f(x) *è continua in* [a, b] *se e solo se l'immagine di* f(x) *è tutto l'intervallo di estremi* f(a), f(b).

Dimostrazione: se f(x) è continua in [a, b] allora, indipendentemente dalla monotonia, assume tutti i valori compresi tra f(a) e f(b) (si veda il teorema dell'esistenza dei valori intermedi del paragrafo 35).

Viceversa, se f(x) è crescente in [a, b] ma non è continua in $x_0 \in (a, b)$, per il teorema precedente ammette in x_0 una discontinuità di prima specie e si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 < \ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \tag{38.9}$$

ed f(x) non assume alcun valore nell'intervallo (ℓ_1, ℓ_2). Si procede in modo analogo se x = a, oppure se x = b: ad esempio, se x = a e se f(x) è crescente e non è continua per x = a, allora f(x) non assume alcun valore nell'intervallo $(f(a), \ell)$, essendo:

$$f(a) < \ell = \lim_{x \to a^+} f(x). \tag{38.10}$$

> TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI INVERSE. — *Sia* f(x) *una funzione strettamente monotòna in* [a, b]. *Se* f(x) *è continua, anche la funzione inversa* f^{-1} *è continua.*

Dimostrazione: osserviamo che la stretta monotònia di f(x) su [a, b] implica la sua invertibilità (si veda il criterio di invertibilità, alla fine del paragrafo 35).

Supponiamo, per fissare le notazioni, che f(x) sia strettamente crescente in [a, b]; allora:

$$f : [a, b] \to [f(a), f(b)]; \qquad f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]. \tag{38.11}$$

In particolare f^{-1} assume tutti i valori dell'intervallo [a, b]; per il criterio precedente (di continuità delle funzioni monotòne), f^{-1} è continua.

CAPITOLO 5

DERIVATE

39. Tasso di accrescimento. Significato meccanico della derivata

Consideriamo un semplice processo di crescita di un corpo, supponendo che il peso p del corpo vari al crescere del tempo; cioè supponiamo che il peso sia una funzione del tempo $p = p(t)$.

Prendiamo in considerazione variazioni di peso a partire da un certo istante t. Al tempo t il peso è p(t), mentre all'istante t + h, dopo che è trascorso un tempo uguale ad h, il peso è p(t + h). Quindi, nell'intervallo di tempo h, il cambio di peso è p(t + h) – p(t). Il rapporto

$$\frac{p(t+h)-p(t)}{h}. \tag{39.1}$$

dà una indicazione di quanto sia cambiato il peso per unità di tempo. Più precisamente il rapporto (39.1) esprime la variazione *media* per unità di tempo del peso nell'intervallo [t, t + h]. Si chiama anche *tasso medio di accrescimento*, o tasso medio di variazione, o *velocità media di accrescimento*.

Invece della variazione *media* nell'intervallo [t, t + h], spesso è più utile la variazione *istantanea* al tempo t. Intuitivamente si considera l'espressione (39.1) per alcuni valori di h sempre più vicini a zero. Con il linguaggio più preciso introdotto nei capitoli precedenti, si calcola il limite, per $h \to 0$, del rapporto (39.1):

$$\textit{Tasso di accrescimento} = \lim_{h\to 0} \frac{p(t+h)-p(t)}{h}. \tag{39.2}$$

Si noti come sia indispensabile usare il limite per $h \to 0$, dato che, se nella (39.1) si pone direttamente h = 0, si ottiene una espressione senza significato. Invece, col linguaggio dei limiti, il limite in (39.2) è una forma indeterminata 0/0 (se p(t) è una funzione continua).

Per mostrare come il tasso di accrescimento possa essere effettivamente calcolato, consideriamo a titolo di esercizio il caso in cui il peso dipenda dal tempo in modo quadratico

$$p(t) = t^2\,; \tag{39.3}$$

per ogni $h \neq 0$, risulta

$$\frac{p(t+h)-p(t)}{h} = \frac{(t+h)^2-t^2}{h} = \frac{t^2+2ht+h^2-t^2}{h} = 2t + h. \tag{39.4}$$

L'ultimo membro della (39.4) tende a 2t per $h \to 0$. Quindi il tasso di accrescimento vale 2t. Ciò significa che, al crescere del tempo t (> 0), non soltanto il peso cresce come t^2, ma anche il *cambiamento* di peso per unità di tempo aumenta (nel caso in considerazione, in modo proporzionale al tempo).

Proponiamo un esempio numerico: secondo la legge $p(t) = t^2$, al tempo t = 10 il peso risulta essere uguale a p(10) = 100. Il tasso di accrescimento, uguale a 2t, al tempo t = 10 vale 20. Ciò significa che, dopo una unità di tempo, il peso del corpo aumenta di circa 20 unità; quindi p(11) vale all'incirca 120. Si noti che effettivamente il valore trovato 120 non differisce di molto da $p(11) = 11^2 = 121$; approfondiremo questo aspetto nei paragrafi 44 e 81, nello studio della formula di Taylor.

Abbiamo già detto che "velocità di accrescimento" è sinonimo di "tasso di accrescimento"; ciò deriva dal fatto che una velocità si definisce in modo analogo a quanto fatto sopra. Consideriamo ad esempio un'automobile che percorre una strada, ed indichiamo con s(t) lo spazio percorso in funzione del tempo t. La *velocità media* dell'automobile nell'intervallo di tempo [t, t + h] è uguale al rapporto tra lo spazio percorso s(t + h) – s(t) ed il tempo h impiegato a fare il percorso. La *velocità istantanea* (quella indicata dal tachimetro sul cruscotto dell'auto, se s(t) è espresso in chilometri e t in ore), è il limite, per $h \to 0$, della velocità media; quindi

$$\textit{Velocità istantanea} = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}. \tag{39.5}$$

È chiaro che nei due esempi precedenti lo schema matematico è identico. In entrambi gli esempi occorre calcolare *il limite di un rapporto incrementale*, così chiamato perché a denominatore c'è l'incremento h della variabile indipendente, mentre a numeratore c'è l'incremento della variabile dipendente.

Occorre calcolare il limite del rapporto incrementale anche in molte altre situazioni, analoghe a quelle dei due esempi esposti. Ad esempio, se si considera la densità di un fluido o di una popolazione, o l'accelerazione di un corpo che si muove di moto rettilineo. Un altro esempio, di tipo geometrico, è studiato nel paragrafo 44.

Introdurremo nel prossimo paragrafo la *derivata* come limite del rapporto incrementale, quando l'incremento tende a zero.

40. Definizione di derivata

Sia f(x) definita nell'intervallo aperto (a, b) e sia x un punto di (a, b); si dice che la funzione f è *derivabile* nel punto x se *esiste finito il limite del rapporto incrementale*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{40.1}$$

Tale limite è la *derivata* di f, e si indica con una delle seguenti notazioni, fra loro equivalenti:

CAPITOLO 6

APPLICAZIONI DELLE DERIVATE. STUDIO DI FUNZIONI

46. Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat

In questo capitolo affrontiamo tra l'altro lo studio del grafico di una funzione. Cominciamo col definire i punti di massimo ed i punti di minimo relativo.

Sia f(x) una funzione definita in un intervallo [a, b]. Diremo che un punto $x_0 \in [a, b]$ è di *massimo (relativo)* per f, nell'intervallo [a, b], se il valore $f(x_0)$ è più grande dei valori f(x), con $x \in [a, b]$ vicino ad x_0; più precisamente, se esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$(46.1) \qquad f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in [a, b]: \quad |x - x_0| < \delta.$$

Si noti che non si richiede che la (46.1) valga per ogni $x \in [a, b]$, ma solo per x vicino ad x_0. Nella figura 6.1, x_2 e x_4 sono punti di massimo; anche il punto x = a è un punto di massimo relativo.

Il più grande dei valori f(x) per $x \in [a, b]$, si chiama *massimo assoluto* di f nell'intervallo [a, b]. In figura 6.1 il massimo assoluto è assunto per $x = x_2$ e vale $f(x_2)$.

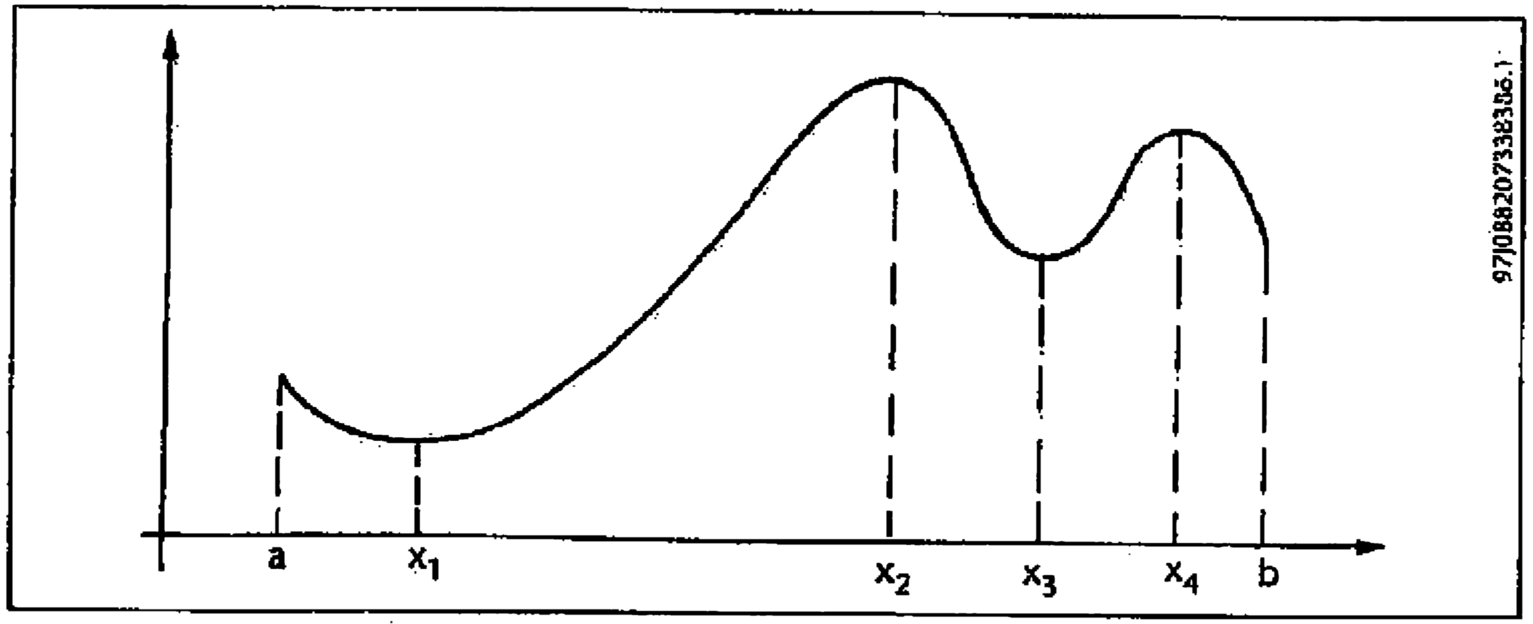

Figura 6.1

Analogamente, x_0 è un punto di *minimo (relativo)* per la funzione f, nell'intervallo [a, b], se esiste $\delta > 0$ per cui

$$(46.2) \qquad f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in [a, b]: \quad |x - x_0| < \delta.$$

Nella figura 6.1, x_1, x_3, b sono punti di minimo.

Dalla figura 6.1 notiamo anche il fatto seguente: se si disegna la retta tangente al grafico della funzione in ciascuno dei punti x_1, x_2, x_3, x_4, punti di massimo o di minimo *interni* all'intervallo [a, b] (un punto $x_0 \in [a, b]$ è interno all'intervallo se $x_0 \in (a, b)$, cioè se $x_0 \in [a, b]$ e $x_0 \neq a$, $x_0 \neq b$), tale retta risulta orizzontale. Questa proprietà vale in tutti i punti di massimo e di minimo interni all'intervallo di definizione. Non vale però (necessariamente) nei punti agli estremi dell'intervallo, dove il grafico della funzione può avere la retta tangente non orizzontale.

Una retta è orizzontale se e solo se ha equazione y = costante. Si ricordi l'equazione (44.3) della retta tangente al grafico di una funzione f(x) per $x = x_0$; tale retta tangente è orizzontale se e solo se $f'(x_0) = 0$. Dimostriamo nel teorema seguente la proprietà in generale.

> TEOREMA DI FERMAT. — *Sia* f *una funzione definita in* [a, b] *e sia* x_0 *un punto di massimo o di minimo relativo interno ad* [a, b]. *Se* f *è derivabile in* x_0, *risulta* $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: consideriamo il caso in cui x_0 sia un punto di massimo (relativo); significa che esiste $\delta > 0$ per cui

$$(46.3) \qquad f(x_0) \geq f(x_0 + h), \qquad \forall\, h: |h| < \delta.$$

Studiamo separatamente i casi h > 0 e h < 0; dalla (46.3) si ottiene:

$$(46.4) \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se} \quad 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se} \quad -\delta < h < 0 \end{cases}$$

e, al limite per $h \to 0^{\pm}$

$$(46.5) \qquad \begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0^+} [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h \leq 0\,; \\ f'(x_0) &= \lim_{h \to 0^-} [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h \geq 0\,. \end{aligned}$$

Ne segue che $f'(x_0) = 0$.

Nella dimostrazione precedente l'ipotesi che x_0 sia un punto *interno* all'intervallo [a, b] è essenziale. Ciò ha consentito di poter considerare incrementi h sia positivi che negativi.

Se invece x_0 è un punto non interno dell'intervallo [a, b], se ad esempio $x_0 = a$, allora $x_0 + h = a + h$, con $0 < h < \delta$, rimane in [a, b], mentre $x_0 + h = a + h$ non è un punto di [a, b] se $h < 0$. Pertanto in (46.5) è possibile considerare solamente il limite per $h \to 0^+$ (e non il limite per $h \to 0^-$) giungendo alla conclusione che

$$f'(x_0) = f'(a) \le 0 \tag{46.6}$$

nell'ipotesi che $x_0 = a$ sia un punto di massimo relativo per f(x) in [a, b].

Analogamente, se $x_0 = b$ risulta $x_0 + h = b + h \in [a, b)$ soltanto se h è negativo ($-\delta < h < 0$) ed in tal caso, procedendo come nella (46.5), calcolando il limite per $h \to 0^-$ si ottiene

$$f'(x_0) = f'(b) \ge 0\,, \tag{46.7}$$

sempre nell'ipotesi che $x_0 = b$ sia un punto di massimo relativo per f(x) in [a, b).

In ogni caso risulta

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \le 0\,, \qquad \forall\, x \in [a, b]; \tag{46.8}$$

infatti, se $x_0 = a$, allora $x - x_0 = x - a > 0$ per ogni $x \in (a, b]$ e quindi la (46.8) si riduce a $f'(x_0) \le 0$ come in (46.6). Mentre se $x_0 = b$ allora $x - x_0 = x - b < 0$ per ogni $x \in [a, b)$ e quindi la (46.8) diventa $f'(x_0) \ge 0$ come in (46.7). Infine, se x_0 è interno ad [a, b], la differenza $x - x_0$ cambia segno in dipendenza da x e la (46.8) è quindi equivalente alla condizione $f'(x_0) = 0$, come nell'enunciato del teorema di Fermat.

Come già detto la (46.8) vale nell'ipotesi che x_0 sia un punto di massimo relativo per f(x) nell'intervallo [a, b], indipendentemente dall'assumere che x_0 sia *interno* ad [a, b]. Naturalmente, se x_0 è un punto di minimo relativo per f(x) in [a, b], allora nella (46.8) cambia il segno di minore o uguale con quello di maggiore o uguale. Vale quindi la seguente

PROPOSIZIONE. — *Sia* f(x) *una funzione definita in* [a, b] *e derivabile in un punto* $x_0 \in [a. b]$. *Se* x_0 *è un punto di massimo relativo per* f(x) *in* [a, b] *allora*

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \le 0\,, \qquad \forall\, x \in [a, b]; \tag{46.9}$$

se x_0 *è un punto di minimo relativo per* f(x) *in* [a, b] *risulta*

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \ge 0\,, \qquad \forall\, x \in [a, b]. \tag{46.10}$$

47. I teoremi di Rolle e di Lagrange

TEOREMA DI ROLLE. — *Sia* f(x) *una funzione continua in* [a, b] *e derivabile in* (a, b). *Se* f(a) = f(b), *esiste un punto* $x_0 \in (a, b)$ *per cui* $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: indichiamo con x_1 e x_2 due punti, rispettivamente di minimo e di massimo assoluto per f nell'intervallo [a, b]; cioè

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \qquad \forall\, x \in [a. b]. \tag{47.1}$$

Tali punti di massimo e di minimo assoluto per f esistono, in base al teorema di Weierstrass (paragrafi 35 e 37).

Se almeno uno dei due punti x_1, x_2 è *interno* all'intervallo [a, b], in corrispondenza la derivata si annulla (per il teorema di Fermat).

Rimane da esaminare il caso in cui entrambi i punti x_1, x_2 non sono interni; diciamo $x_1 = a$, $x_2 = b$. La (47.1) diventa $f(a) \le f(x) \le f(b)$, per ogni x nell'intervallo [a, b]. Dato che per ipotesi f(a) = f(b), risulta f(x) = f(a) per ogni $x \in [a, b]$; quindi f è costante e la sua derivata è ovunque zero. Il teorema è dimostrato anche in questo caso.

Geometricamente il teorema di Rolle afferma che, per una funzione f(x) continua in [a, b], derivabile in (a, b), con f(a) = f(b), esiste in (a, b) un punto x_0 in cui la retta tangente è orizzontale (figura 6.2).

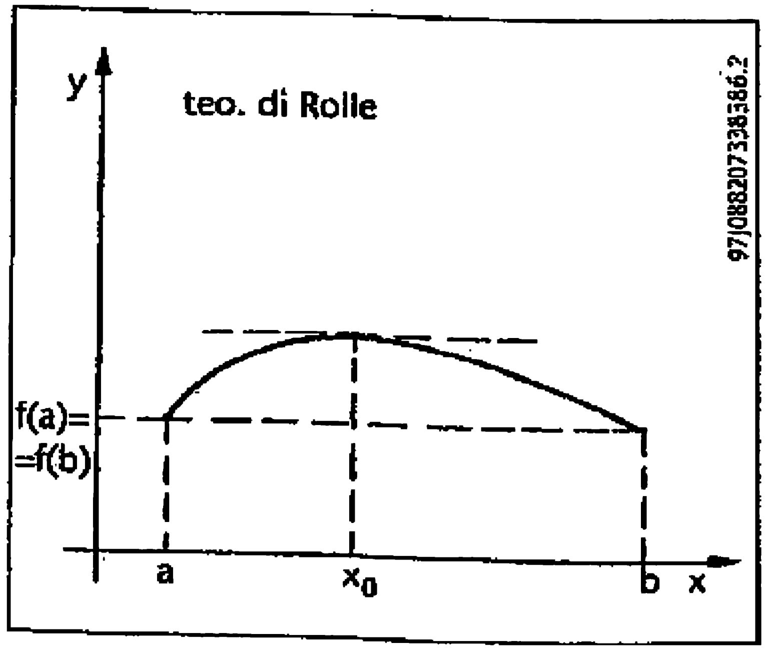

Figura 6.2

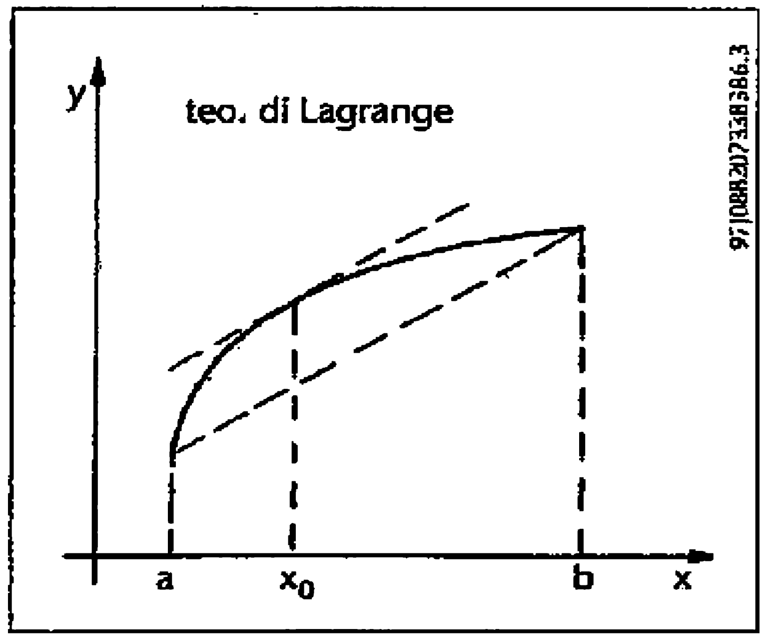

Figura 6.3

Nel teorema seguente (di Lagrange) si considera una situazione più generale, in cui non necessariamente f(a) = f(b). Il teorema di Lagrange geometricamente afferma che, per una funzione f(x) continua in [a, b] e derivabile in (a, b), esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ in cui la retta tangente è parallela alla corda congiungente gli estremi del grafico (figura 6.3). Si tenga presente che il coefficiente angolare della retta tangente in x_0 è $f'(x_0)$, mentre il coefficiente angolare della corda è $[f(b) - f(a)]/(b - a)$.

TEOREMA DI LAGRANGE. — *Sia* $f(x)$ *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b). *Esiste un punto* $x_0 \in (a, b)$ *per cui*

(47.2) $$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione: ci si riconduce al teorema precedente per mezzo della funzione

(47.3) $$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)\right].$$

Si noti che $g(x)$ è ottenuta sottraendo da $f(x)$ l'espressione della retta congiungente gli estremi del grafico. Ponendo successivamente $x = a$, $x = b$, si verifica che $g(a) = g(b) = 0$. Inoltre g è derivabile in (a, b) e risulta

(47.4) $$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \forall x \in (a, b).$$

Per il teorema di Rolle, esiste quindi $x_0 \in (a, b)$ per cui $g'(x_0) = 0$. Ponendo nella relazione precedente $g'(x_0) = 0$, si ottiene la tesi (47.2).

Le ipotesi sulla funzione $f(x)$ (continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b)), comuni ai teoremi di Rolle e di Lagrange, certamente sussistono se supponiamo direttamente che $f(x)$ sia derivabile in tutto l'intervallo $[a, b]$, estremi inclusi; infatti in tal caso $f(x)$ sarebbe automaticamente continua in $[a, b]$ e ovviamente, derivabile in (a, b).

La continuità di $f(x)$ agli estremi dell'intervallo è comunque un'ipotesi indispensabile; ad esempio, la funzione (il cui grafico è rappresentato in figura 4.10)

(47.5) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

è derivabile in $(a, b) = (0, 1)$, è continua (a destra) per $x = 0$ (ma non è continua per $x = 1$), soddisfa l'ipotesi del teorema di Rolle $f(0) = f(1)$, ma non soddisfa la tesi del teorema di Rolle, perché la derivata è costantemente uguale ad 1 in $(0, 1)$.

48. Funzioni crescenti e decrescenti

Una conseguenza del teorema di Lagrange è il seguente criterio di monotonia, fondamentale per studiare il grafico di una funzione. Ricordiamo che la definizione di funzione monotòna (ad esempio crescente) è stata data nel paragrafo 7.

CRITERIO DI MONOTONIA. — *Sia* f *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b). *Allora*

(48.1) $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b) \iff$ f *è crescente in* $[a, b]$;

(48.2) $f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a, b) \iff$ f *è decrescente in* $[a, b]$.

Dimostrazione: proviamo la (48.1); la (48.2) si ottiene in modo analogo.

Nell'implicazione $\Rightarrow$, supponendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, occorre dimostrare che, se $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$. Scriviamo la tesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$: esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ per cui

(48.3) $$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)\,(x_2 - x_1);$$

dato che $f'(x_0) \geq 0$ e dato che $x_2 > x_1$, risulta anche $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Viceversa, se la funzione f è crescente in $[a, b]$, per ogni $x \in (a, b)$ e $h > 0$ tale che $x + h \in (a, b)$ risulta $f(x + h) \geq f(x)$ e quindi

(48.4) $$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

(il lettore noti che la (48.4) vale anche per $h < 0$); al limite per $h \to 0^+$ si trova la tesi $f'(x) \geq 0$.

Consideriamo alcuni esempi di applicazione del criterio precedente. La funzione e^x è (strettamente) crescente su tutto $\mathbb{R}$, perché la derivata $D\,e^x = e^x$ è positiva. La funzione log x è crescente per $x > 0$, perché la sua derivata $D \log x = 1/x$ è positiva. Così pure la funzione arctg x è crescente su tutto $\mathbb{R}$, perché $D(\operatorname{arctg} x) = 1/(1 + x^2) > 0$.

La funzione x^2 ha derivata uguale a $2x$, che è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$; quindi la funzione x^2 è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$; $x = 0$ è perciò un punto di minimo.

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$ ha come derivata $f' = 3(x^2 - 1)$, che si annulla per $x = \pm 1$, è positiva all'esterno dell'intervallo $[-1, 1]$, ed è negativa all'interno. Quindi la funzione f è crescente per $x > 1$ e $x < -1$, ed è decrescente per $-1 < x < 1$. Il punto $x = -1$ è di massimo relativo, mentre il punto $x = 1$ è di minimo. Queste sole considerazioni, unitamente ad alcuni valori della funzione (per $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{3}$) facilmente calcolabili, permettono di disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x$ come in figura 6.4.

In generale, si tenga conto che il segno della derivata prima costituisce una delle principali informazioni per disegnare il grafico di una funzione.

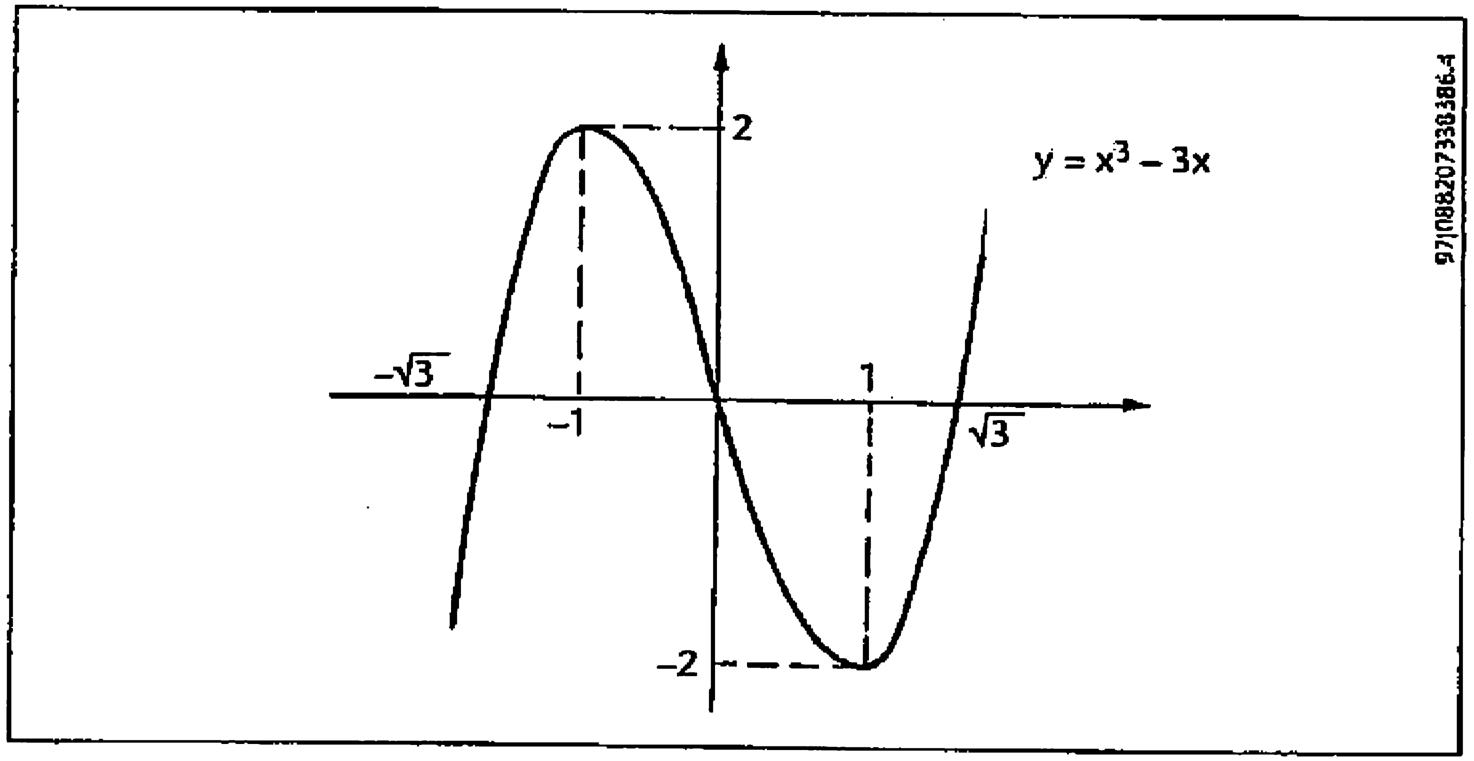

Figura 6.4

Conseguenza del criterio di monotonia è la

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO. — *Una funzione è costante in un intervallo* $[a, b]$ *se e solo se è derivabile in* $[a, b]$ *e la derivata è ovunque nulla.*

Dimostrazione: come in (40.3) si prova che la derivata di una funzione costante in $[a, b]$ è nulla per ogni $x \in [a, b]$.

Viceversa, se $f(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, per i criteri di monotonia (48.1), (48.2), $f(x)$ è contemporaneamente crescente e decrescente in $[a, b]$; perciò, per ogni $x \in (a, b]$ (essendo $x > a$) risulta allo stesso tempo $f(x) \geq f(a)$ e $f(x) \leq f(a)$; cioè $f(x)$ è identicamente uguale ad $f(a)$.

Combinando il criterio di monotonia e il teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo si giunge facilmente al seguente:

CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA. — *Sia* f *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b). *Allora*

$$\text{(48.5)}\qquad \left.\begin{array}{l} f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b); \\ f' \textit{ non si annulla identicamente in} \\ \textit{alcun intervallo contenuto in } (a,b) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \textit{f è strettamente crescente in } [a, b];$$

$$\text{(48.6)}\qquad \left.\begin{array}{l} f'(x) \leq 0,\ \forall x \in (a, b); \\ f' \textit{ non si annulla identicamente in} \\ \textit{alcun intervallo contenuto in } (a,b) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \textit{f è strettamente decrescente in } [a, b].$$

Dimostrazione: proviamo l'implicazione $\Rightarrow$ in (48.5); essendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, per il criterio di monotonia (48.1) $f(x)$ è crescente in $[a, b]$. Se non fosse strettamente crescente, esisterebbero $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$; ma allora, dato che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ se $x_1 < x < x_2$, $f(x)$ sarebbe costante nell'intervallo $[x_1, x_2]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$, contrariamente all'ipotesi.

Proviamo ora l'implicazione $\Leftarrow$ in (48.5); dato che f è (strettamente) crescente in $[a, b]$, per il criterio di monotonia (48.1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$; inoltre $f'(x)$ non può annullarsi identicamente in un intervallo $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$ perché altrimenti in tale intervallo $f(x)$ sarebbe costante, contrariamente all'ipotesi di stretta monotonia.

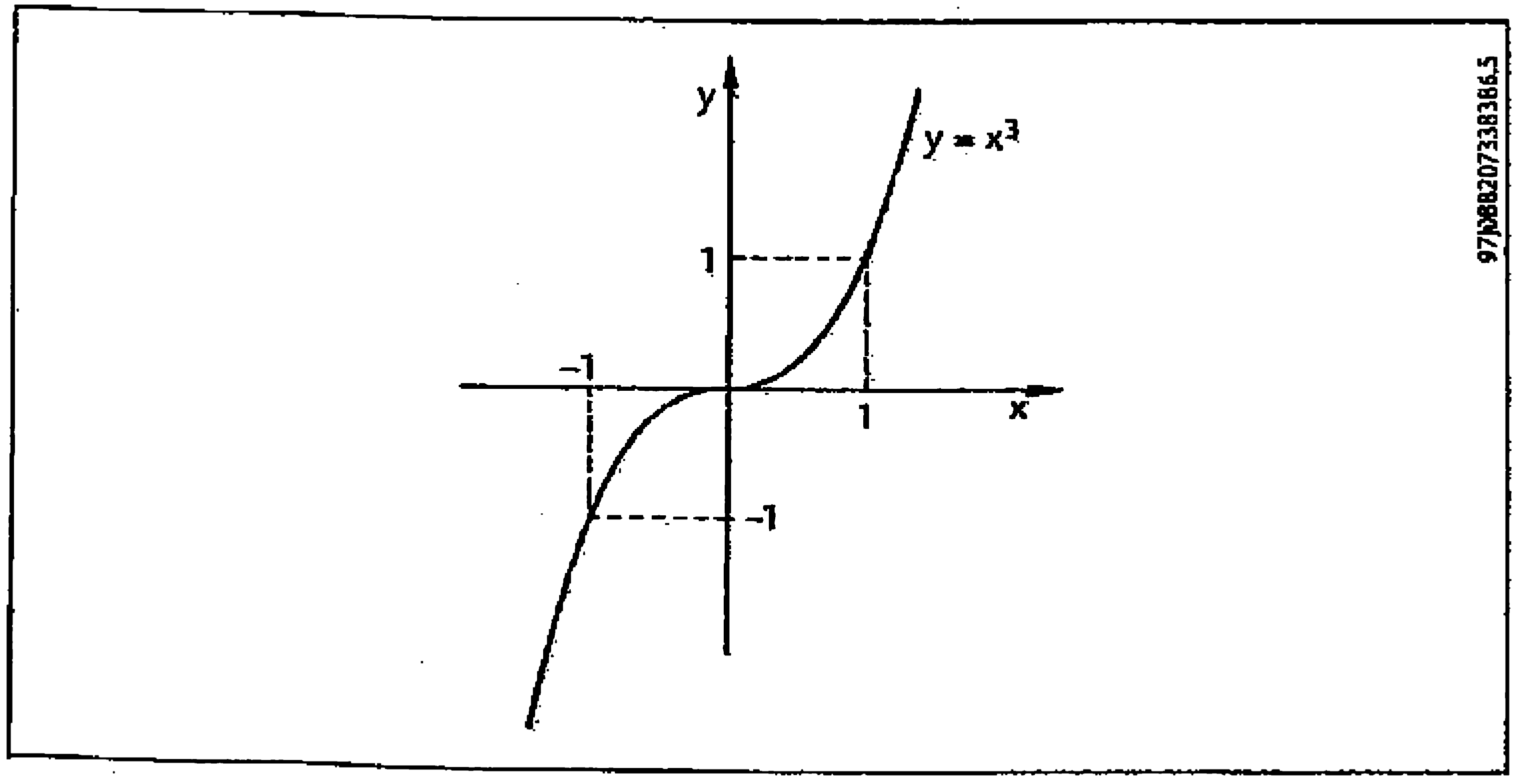

Figura 6.5

Osserviamo che una funzione strettamente crescente e derivabile in un intervallo può avere derivata nulla in *qualche* punto (il criterio (48.5) esclude che la derivata si annulli *identicamente* in un intervallo). Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, rappresentata in figura 6.5, è strettamente crescente su **R**, perché:

$$\text{(48.7)}\qquad f(x_1) < f(x_2) \quad\Longleftrightarrow\quad x_1^3 < x_2^3 \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 < x_2\,;$$

la derivata $f'(x) = 3x^2$ è positiva su $\mathbf{R} - \{0\}$, ma si annulla per $x = 0$.

49. Funzioni convesse e concave

Introduciamo una nuova definizione utile per studiare il grafico di una funzione.

Si dice che una funzione è *convessa* in un intervallo $[a, b]$, se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione in $[a, b]$ è *al di sopra* della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Analogabiamo quindi ritrovato il risultato di Archimede: l'area del settore di parabola S, come in figura 8.1, è data da

$$\text{(61.11)} \qquad \textit{area } S = \frac{b^3}{3}.$$

Si noti ciò che apparentemente può sembrare una coincidenza: derivando il risultato trovato rispetto a b otteniamo:

$$\text{(61.12)} \qquad \frac{d}{db}(\textit{area } S) = b^2.$$

Cioè, la derivata dell'area, pensata come funzione del parametro b, è uguale al valore della funzione $f(x) = x^2$, che ci è servita per definire la regione S, calcolata per $x = b$. Chiariremo nel paragrafo 67 l'importanza di questa apparente curiosità.

Nei paragrafi seguenti introduciamo l'integrale definito sulla base delle idee sopra esposte.

62. Definizioni e notazioni

Sia f(x) una funzione *limitata* nell'intervallo chiuso [a, b] di **R**; quindi esistono due costanti m, M tali che $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a, b]$.

Una *partizione* P di [a, b] è un insieme ordinato costituito di n + 1 punti distinti $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$\text{(62.1)} \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Quindi, per definizione, risulta $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Gli n + 1 punti individuano n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$, con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Per ogni partizione P di [a, b], poniamo

$$\text{(62.2)} \qquad m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$\text{(62.3)} \qquad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definiamo poi le *somme (integrali) inferiori*

$$\text{(62.4)} \qquad s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

e le *somme (integrali) superiori*

$$\text{(62.5)} \qquad S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Talvolta, per ricordare anche la dipendenza dalla funzione f, si utilizzano i simboli equivalenti $s(P) = s(P, f)$, $S(P) = S(P, f)$.

Se la funzione f(x) è positiva in [a, b], le somme integrali hanno il chiaro significato geometrico di somma delle aree dei rettangoli rispettivamente inscritti e circoscritti, come in figura 8.4. Si noti però che s(P), S(P) sono definite, indipendentemente dal significato geometrico di area, anche se f(x) non è positiva nell'intervallo [a, b].

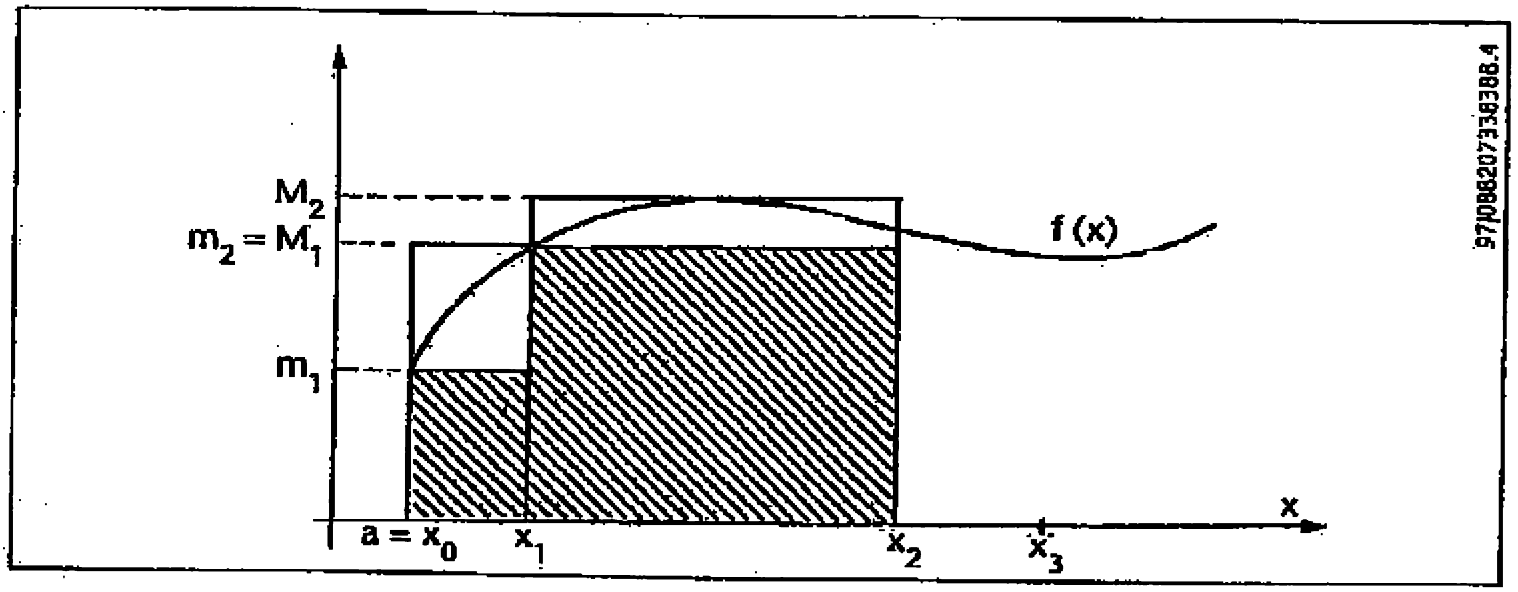

Figura 8.4

Dato che $m_k \le M_k$ per ogni k, dalla definizione risulta che

$$\text{(62.6)} \qquad s(P) \le S(P), \qquad \forall\, P.$$

Più in generale, vale il seguente lemma, nel quale indichiamo con

$$\text{(62.7)} \qquad R = P \cup Q$$

la partizione di [a, b] che si ottiene prendendo contemporaneamente i punti di P e i punti di Q.

> LEMMA. — *Per ogni coppia di partizioni P, Q di [a, b], se $R = P \cup Q$ si ha*
>
> $$\text{(62.8)} \qquad s(P) \le s(R) \le S(R) \le S(Q).$$

Dimostrazione: cominciamo col confrontare fra loro le somme integrali inferiori s(P) e s(R). Supponiamo, per semplicità che R contenga un solo punto $\overline{x}$ in più di P e siano x_{k-1}, x_k due punti consecutivi della partizione P tali che $\overline{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Poniamo

(62.9) $$\overline{m}_1 = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \overline{x}]\};$$

(62.10) $$\overline{m}_2 = \inf\{f(x) : x \in [\overline{x}, x_k]\}.$$

Le somme inferiori s(R) e s(P) differiscono per pochi termini: precisamente:

(62.11) $$s(R) - s(P) = \\ = [\,\overline{m}_1 (\overline{x} - x_{k-1}) + \overline{m}_2 (x_k - \overline{x})] - m_k (x_k - x_{k-1}).$$

Essendo $\overline{m}_1 \geq m_k$, $\overline{m}_2 \geq m_k$, in quanto l'insieme dei valori f(x) per $x \in [x_{k-1}, x_k]$ contiene sia l'insieme delle f(x) per $x \in [x_{k-1}, \overline{x}]$, sia l'insieme delle f(x) per $x \in [\overline{x}, x_k]$, otteniamo:

(62.12) $$s(R) - s(P) \geq m_k (\overline{x} - x_{k-1} + x_k - \overline{x} - x_k + x_{k-1}) = 0.$$

Si procede in modo analogo se la partizione R contiene più di un punto rispetto alla partizione P. Quindi

(62.13) $$s(P) \leq s(R).$$

Analogamente si dimostra che

(62.14) $$S(R) \leq S(Q).$$

Da tali relazioni e dalla (62.6) si ricava

(62.15) $$s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q).$$

Indichiamo ora con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori s(P) al variare delle partizioni P dell'intervallo [a, b] e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

(62.16) $$A = \{s(P)\}; \quad B = \{S(P)\}.$$

Dal lemma precedente segue che i due insiemi A e B sono *separati*, cioè $a \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Dall'assioma (2.11) di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore o uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

In generale *non vi sarà un unico elemento di separazione* tra A e B; si dà in proposito la seguente importante

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DEFINITO. — *Se vi è un unico elemento di separazione* c *tra* A *e* B, *allora si dice che* f(x) *è integrabile in* [a, b] *(secondo Riemann) e l'elemento* c *si indica con il simbolo*

(62.17) $$\int_a^b f(x)\, dx$$

e si chiama integrale definito di f *in* [a, b].

In altre parole, posto

(62.18) $$s(f) = \sup\{s(P) : P \textit{ partizione di } [a, b]\},$$

(62.19) $$S(f) = \inf\{S(P) : P \textit{ partizione di } [a, b]\},$$

se risulta s(f) = S(f), allora f(x) è *integrabile (secondo Riemann)* in [a, b] e

(62.20) $$c = s(f) = S(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Come già detto, si dice che l'integrale in (62.17) è un *integrale definito*, per distinguerlo dagli *integrali indefiniti* che verranno presi in considerazione nel capitolo successivo, in cui *non* sono fissati gli estremi di integrazione a, b.

Dalla definizione di integrale segue banalmente che, se f(x) è una funzione costante con f(x) = m per ogni $x \in [a, b]$, allora

(62.21) $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b m\, dx = m(b - a).$$

Dalle proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore si ricava poi il seguente:

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI INTEGRABILI. — *Una funzione* f *limitata in* [a, b] *è ivi integrabile (secondo Riemann) se e solo se, per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste una partizione* P *di* [a, b] *tale che*

(62.22) $$S(P) - s(P) < \varepsilon.$$

Dimostrazione: se f è integrabile (secondo Riemann) in [a, b] allora s(f) = S(f), dove s(f) e S(f) sono rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore definiti in (62.18), (62.19). In base alle definizioni di estremo superiore ed inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono partizioni P, Q dell'intervallo [a, b] tali che

$$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P), \tag{62.23}$$

$$S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(Q). \tag{62.24}$$

Posto $R = P \cup Q$, dalla (62.8) si deduce che

$$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P) \le s(R) \le S(R) \le S(Q) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{62.25}$$

da cui, essendo s(f) = S(f),

$$S(R) - s(R) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(s(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \tag{62.26}$$

Viceversa, se vale la (62.22) essendo $s(P) \le s(f)$, $S(f) \le S(P)$, otteniamo

$$0 \le S(f) - s(f) \le S(P) - s(P) < \varepsilon. \tag{62.27}$$

Dato che il numero S(f) – s(f) non dipende da ε, la (62.27) può valere per ogni $\varepsilon > 0$ solo nel caso in cui S(f) – s(f) = 0, cioè quando f è integrabile (secondo Riemann) in [a, b].

L'integrale definito di una funzione ha un notevole significato geometrico. Ad esempio, se f(x) è una funzione non negativa, integrabile nell'intervallo chiuso [a, b], qualunque sia la partizione $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ di [a, b], la somma s(P) rappresenta l'area di un *plurirettangolo* (cioè di una unione di rettangoli) *contenuto* nell'insieme

$$S = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbf{R}: 0 \le y \le f(x)\}, \tag{62.28}$$

mentre la somma S(P) rappresenta l'area di un plurirettangolo *contenente* S (si veda anche la precedente figura 8.4). L'insieme S prende il nome di *rettangoloide* di base [a, b] relativo alla funzione f(x).

Il teorema precedente afferma allora che, nelle nostre ipotesi, si possono trovare un plurirettangolo contenente S ed uno contenuto in S le cui aree differiscono per meno di ε. Dunque è ragionevole attribuire a S un'*area* uguale all'elemento di separazione tra le aree dei plurirettangoli «inscritti» e quelle dei plurirettangoli «circoscritti». In altre parole, possiamo affermare che, *se f(x) è non negativa e integrabile, l'area del rettangoloide di base [a, b] è uguale all'integrale* (62.17).

Concludiamo il paragrafo con alcune notazioni e definizioni, utili per il seguito. Nell'espressione (62.17) i numeri a, b si dicono *estremi di integrazione*, la funzione f si dice *funzione integranda*, la variabile x si dice *variabile di integrazione*.

Si noti che il risultato dell'integrazione non dipende da x, cioè non è una funzione (non costante) di x, ma è semplicemente un numero reale.

È utile considerare l'integrale definito (62.17) anche se il primo estremo di integrazione non è minore del secondo. Poniamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (a > b); \tag{62.29}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{62.30}$$

63. Proprietà degli integrali definiti

Esaminiamo alcune semplici proprietà dell'integrale definito di una funzione integrabile secondo Riemann in un intervallo chiuso e limitato. Cominciamo con una proprietà che ha un chiaro significato geometrico

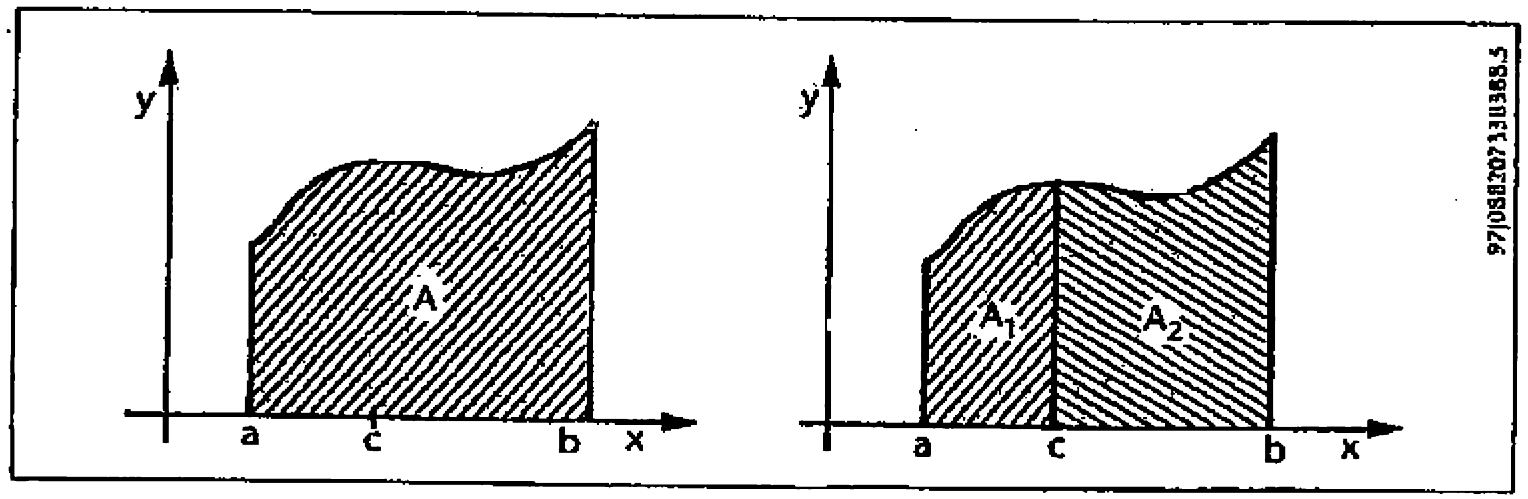

Figura 8.5

quando si interpretano gli integrali definiti di funzioni positive come aree di certe regioni piane. In tale contesto la *proprietà di additività* corrisponde al fatto che l'area della unione di due regioni piane prive di punti in comune è uguale alla somma delle due aree.

CAPITOLO 9

INTEGRALI INDEFINITI

67. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Ci proponiamo di mettere in evidenza una importante relazione tra integrali e derivate, che ha notevoli applicazioni in tutto il calcolo integrale.

Sia f una funzione continua nell'intervallo [a, b], Per ogni $x \in [a, b]$ consideriamo l'integrale definito

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \tag{67.1}$$

Notiamo che abbiamo rappresentato l'integrale definito usando la variabile di integrazione t, invece che la x, con un puro scambio di simboli. Invece abbiamo denotato con x il secondo estremo di integrazione. Per ogni x è determinato l'integrale definito nell'intervallo [a, x] della funzione f; pertanto il risultato dell'integrazione risulta una funzione di x. Ciò spiega il simbolo di funzione F(x) a primo membro della (67.1); tale funzione si chiama *funzione integrale*.

Ad esempio, con il calcolo del settore di parabola (si veda la (61.11)) si è ottenuto

$$F(x) = \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3}, \qquad \forall x \geq 0. \tag{67.2}$$

In questo esempio la funzione integrale vale $F(x) = x^3/3$; la sua derivata, uguale a $F'(x) = x^2$, è anche uguale alla funzione integranda $f(t) = t^2$, calcolata per $t = x$.

Tale proprietà vale in generale; infatti, risulta in generale che $F'(x) = f(x)$, secondo il teorema che segue.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE. — *Sia f una funzione continua nell'intervallo* [a, b]. *La funzione integrale* F(x), *definita in* (67.1), *è derivabile e la derivata vale*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{67.3}$$

Dimostrazione: occorre calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione F(x) quando l'incremento tende a zero. Cominciamo con il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] = \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] = \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt. \end{aligned} \tag{67.4}$$

Abbiamo utilizzato la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo. Trasformiamo l'ultimo integrale per mezzo del teorema della media applicato all'intervallo di estremi x e x + h: esiste un punto compreso tra x ed x + h, che dipende quindi da h, che indichiamo con x(h), tale che

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(x(h)). \tag{67.5}$$

Dato che x(h) è compreso tra x ed x + h, per $h \to 0$ risulta:

$$\lim_{h\to 0} x(h) = x. \tag{67.6}$$

La tesi segue dalla continuità della funzione integranda f; infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x). \tag{67.7}$$

68. Primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale

DEFINIZIONE. — *Una funzione* F(x) *è una primitiva di* f(x) *se* F(x) *è derivabile in* [a, b] *e se* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in [a, b]$.

Ad esempio una primitiva della funzione $f(x) = x$ è $F(x) = x^2/2$. Una primitiva della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ è $F(x) = -\cos x$.

Tenendo presente la definizione di primitiva, possiamo enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale dicendo che: *se* f *è una funzione continua in* [a, b], *allora la funzione integrale* F, *definita in* (67.1), *è una primitiva di* f.

È chiaro che, se F(x) è una primitiva di una funzione f(x), anche G(x) = F(x) + c, qualunque sia la costante c, è una primitiva di f(x). Come provato nel lemma seguente, vale anche il viceversa, cioè tutte le primitive di f si ottengono nel modo anzidetto. Ciò caratterizza l'insieme delle primitive di una data funzione.

CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO. — *Se* F(x) *e* G(x) *sono due primitive di una stessa funzione* f(x) *in un intervallo* [a, b], *esiste una costante* c *tale che*

$$G(x) = F(x) + c, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{68.1}$$

Dimostrazione: poniamo H(x) = G(x) − F(x); risulta

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0. \tag{68.2}$$

Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione H(x) nell'intervallo [a, x], con x fissato in (a, b]: esiste $x_0 \in (a, x)$ tale che

$$H(x) - H(a) = H'(x_0)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0; \tag{68.3}$$

perciò H(x) = H(a), per ogni $x \in (a, b]$.

Ponendo c = H(a), H(x) risulta costante, uguale a c, per ogni $x \in [a, b]$ (si noti che avremmo potuto equivalentemente dedurre dalla (68.2) che H(x) è una funzione costante in [a, b], utilizzando la caratterizzazione delle funzioni costanti del paragrafo 48).

Quindi, G(x) = F(x) + H(x) = F(x) + c, per ogni $x \in [a, b]$.

La formula che segue riconduce il calcolo degli integrali definiti alla ricerca delle primitive delle funzioni continue.

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE. — *Sia* f *una funzione continua in* [a, b]. *Sia* G *una primitiva di* f. *Allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a). \tag{68.4}$$

Il simbolo $[G(x)]_a^b$ significa appunto la differenza dei valori della funzione G(x) per x = b e x = a.

Per dimostrare la formula fondamentale, consideriamo la funzione integrale (67.1), indicando con t la variabile di integrazione.

La funzione integrale F e la funzione G sono entrambe primitive della funzione f. In base alla caratterizzazione precedente, esiste una costante c tale che

$$G(x) = F(x) + c = c + \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{68.5}$$

Per x = a abbiamo

$$G(a) = c + \int_a^a f(t)\,dt = c \tag{68.6}$$

e, sostituendo il valore trovato al posto di c nella (68.5),

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,dt. \tag{68.7}$$

La tesi segue ponendo x = b in (68.7).

Utilizzando la formula fondamentale del calcolo integrale si ritrova immediatamente il risultato (61.11): con i simboli degli integrali definiti, l'area del settore di parabola considerato nel paragrafo 61 è dato da

$$\int_0^b x^2\,dx. \tag{68.8}$$

Una primitiva della funzione x^2 è la funzione $G(x) = x^3/3$. Quindi

$$\int_0^b x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^3}{3}. \tag{68.9}$$

Come ulteriore esempio consideriamo l'integrale definito della funzione f(x) = sen x nell'intervallo [0, π]: dato che una primitiva della funzione sen x è G(x) = − cos x, si ottiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2. \tag{68.10}$$

69. L'integrale indefinito

Nel paragrafo precedente abbiamo ricondotto il calcolo di un integrale definito alla ricerca delle primitive della funzione integranda. È perciò naturale porre la seguente:

DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO. — *Sia f una funzione continua in un intervallo* [a, b]. *L'insieme di tutte le primitive di f in* [a, b] *si chiama integrale indefinito di f e si indica con il simbolo*

$$\int f(x)\, dx. \tag{69.1}$$

In base alla caratterizzazione data nel paragrafo precedente, possiamo affermare che

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c, \tag{69.2}$$

dove F è una primitiva di f e c è una costante arbitraria.

Sottolineamo che c'è una sostanziale differenza tra l'integrale definito e quello indefinito, che indichiamo rispettivamente con i simboli

$$\int_a^b f(x)\, dx, \qquad \int f(x)\, dx; \tag{69.3}$$

il primo dei due integrali è un numero reale, il secondo integrale è un insieme di funzioni. Il legame tra i due integrali è dato dalla formula fondamentale (68.4).

Ricordando che la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate, si ottiene la proprietà corrispondente per gli integrali indefiniti:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx. \tag{69.4}$$

Analogamente, ricordando la formula (41.7), che esprime la derivata del prodotto di una costante per una funzione, risulta

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx \qquad (c = \textit{costante}). \tag{69.5}$$

Si noti l'analogia delle due proprietà sopra elencate per l'integrale indefinito con le proprietà di linearità (63.3), (63.4) per l'integrale definito.

Riportiamo di seguito una serie di integrali indefiniti immediati. Tali integrali, di facile verifica, sono ottenuti a partire dalle tabelle per le derivate esposte nei paragrafi 43, 45.

$$\int x^b\, dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c, \qquad b \neq -1\,; \tag{69.6}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x + c, \qquad x > 0\,; \tag{69.7}$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c; \tag{69.8}$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c\,; \tag{69.9}$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c\,; \tag{69.10}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + c\,; \tag{69.11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + c\,; \tag{69.12}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + c. \tag{69.13}$$

A proposito dell'integrale (69.7), notiamo che risulta

$$D \log |x| = \frac{1}{x}, \qquad \forall x \neq 0; \tag{69.14}$$

infatti, se $x > 0$ la relazione precedente è ben nota. Invece, se $x < 0$, per la regola di derivazione delle funzioni composte, risulta

$$D \log |x| = D \log(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \qquad (x < 0). \tag{69.15}$$

La (69.14), in termini di integrali indefiniti, è equivalente a

$$\int \frac{1}{x} = \log |x| + c, \tag{69.16}$$

intendendo che l'integrale in (69.16) è considerato in un intervallo non contenente il punto $x = 0$.

In molte situazioni ci si riconduce ad integrali immediati del tipo sopra indicato, utilizzando la formula di derivazione delle funzioni composte. Così ad esempio la formula (69.6) si generalizza nel modo seguente: si parte dalla formula di derivazione, valida per una funzione $f(x)$ positiva e derivabile

$$D \frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} = [f(x)]^b \cdot f'(x) \qquad (b \neq -1). \tag{69.17}$$

In corrispondenza si ottiene la formula di integrazione indefinita

$$\int [f(x)]^b f'(x)\, dx = \frac{1}{b+1} [f(x)]^{b+1} + c \qquad (b \neq -1). \tag{69.18}$$

Come esempio consideriamo:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\log |\cos x| + c\,; \tag{69.19}$$

abbiamo calcolato una primitiva dopo aver riconosciuto che a numeratore della funzione integranda c'è, a meno del segno, la derivata del denominatore.

70. Integrazione per decomposizione in somma

In molti casi il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione si può ricondurre al calcolo di integrali già noti, o di tipo più semplice. Un metodo particolarmente frequente consiste nel decomporre la funzione integranda nella somma di due o più funzioni, applicando poi la proprietà di linearità (69.4). Illustriamo ciò con alcuni esempi.

Calcoliamo il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x}{x+1}\, dx\,; \tag{70.1}$$

sommando e sottraendo 1 al numeratore della funzione integranda otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1}\, dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \\ &= \int 1\, dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \log |x+1| + c. \end{aligned} \tag{70.2}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx\,; \tag{70.3}$$

ricordando la definizione della funzione tangente, abbiamo

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,; \tag{70.4}$$

per decomposizione in somma otteniamo

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x\, dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c\,. \end{aligned} \tag{70.5}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}\,; \tag{70.6}$$

anche in questo caso scriviamo il numeratore della funzione integranda in modo che sia possibile scindere la frazione nella somma di due frazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,; \end{aligned} \tag{70.7}$$

integrando entrambi i membri otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \\ &= -\log |\cos x| + \log |\operatorname{sen} x| + c\,. \end{aligned} \tag{70.8}$$