Limiti Notevoli

venerdì 20 ottobre 2023 12:47

Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione di numeri reali tali che $\varepsilon_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0}$

Allora valgono le seguenti relazioni:

- $\lim_{n\to+\infty} (1+\varepsilon_n)^{\varepsilon_n} = e$ $\qquad$ (più in generale $\lim_{n\to+\infty} (1+a\cdot\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$)

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ $\qquad$ $\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\log b} \quad \forall b>0, \ b \neq 1 \right)$

  $\rightarrow b^{\varepsilon_n} = e^{(\log b)\varepsilon_n}$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = 1$ $\qquad$ $\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \log b \quad \forall b>0 \right)$

  se $\delta_n = \log(1+\varepsilon_n)$ allora $e^{\delta_n}-1 = \varepsilon_n$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon_n)^a-1}{\varepsilon_n} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (in particolare per $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{k}$) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}$

  $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{1+\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{k}$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\varepsilon_n}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sin^2\left(\frac{\varepsilon_n}{2}\right)}{(\varepsilon_n)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\varepsilon_n}{2}\right)}{(\varepsilon_n)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right)}{2\left[\frac{\varepsilon_n}{2}\right]^2} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arcsin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sinh(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{tgh}(\varepsilon_n)}{1} = 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cosh(\varepsilon_n)-1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}$

RELAZIONI DI ASINTOTO E O-PICCOLO

Def. Sia a_n successione tale che $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Una successione b_n si dice asintotica ad a_n, e si scrive $b_n \sim a_n$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Def. Una successione c_n si dice o-piccolo di a_n e si scrive $c_n = o(a_n)$, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$

es

$(n+1)^2 \sim n^2$ per $n\to+\infty$ perché $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$

Proposizione. Sia $a_n \sim b_n$, $c_n \sim d_n$, allora $a_n\cdot c_n \sim b_n \cdot d_n$

$\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$

Conseguenza Se $\lim_{n\to+\infty} a_n\cdot b_n = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

e $c_n \sim b_n$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot c_n = l$