Intervalli-Notazione

mercoledì 4 ottobre 2023 17:15

Siano dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, si fissano le seguenti notazioni:

1) $[a; b]$ ← CHIUSO $= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
2) $(a; b)$ ← APERTO $= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
4) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

limitati

5) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$
6) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0$
7) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b$
8) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b$

illimitati

- a e b sono l'estremo inferiore e superiore anche $+\infty$ e $-\infty$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

- $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ si dice che b è divisibile per a e $\exists K \in \mathbb{Z} : b = Ka$ → multiplo di A → divisore di B

D: Un numero $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ è primo se vale la seguente proprietà:

- Comunque dati a e $b \in \mathbb{N}$, se p divide $a b$, allora p divide almeno uno tra a e b.

es $p=2$ è primo perché se un prodotto è pari allora almeno uno tra i fattori a e b è pari

Ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ si può esprimere in infiniti modi:

- Come frazioni → $q = \frac{K}{n}$ con $K \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sono equivalenti $\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$)

Tra tutte le frazioni che rappresentano uno stesso numero razionale, ne esiste almeno una in cui denominatore e numeratore non hanno fattori primi in comune (si dice che è ridotta ai minimi termini)

Teorema: $\forall q \in \mathbb{Q} \quad q^2 \ne 2$

Dim: p.a supponiamo che esiste un $q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$. Si può esprimere q come frazione ridotta ai minimi termini: $q = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \ne 0$. Poiché per ipotesi $q^2 = 2$ si ha $\frac{a^2}{b^2} = q^2 = 2$ cioè $a^2 = a b^2$.
Da quanto scritto a^2 è divisibile per 2, ma $a^2 = a \cdot a$. Per def. di un numero primo a dovrebbe dividere almeno uno dei due fattori. Quindi a divide a, cioè esiste $c \in \mathbb{Z} : a = 2c \to a^2 = 4c^2$. Quindi $2b^2 = a^2 = 4c^2$ da cui $b^2 = 2c^2$. Per lo stesso motivo di sopra 2 divide anche b (contraddizione)
$\frac{a}{b}$ era ridotta ai minimi termini quindi non avevamo fattori in comune.

Nello stesso modo si dimostra che non esistono le radici quadrate di numeri primi. Gli unici numeri reali con una radice quadrata in $\mathbb{Q}$ sono i quadrati perfetti

Radice n-esima in $\mathbb{R}$

Teorema: Siano $y \in \mathbb{R}$, $y \ge 0$ e si $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un unico $z \in \mathbb{R}$ tale che $z \ge 0$ e $z^n = y$

D: il numero z si dice radice n-esima di y e si scrive $z = \sqrt[n]{y}$
Se n è PARI e $y > 0$ allora in $\mathbb{R}$ esistono 2 numeri z_1 e z_2 tali che $z_1^n = y = z_2^n$
Se $y < 0$, n PARI non esiste la sua radice
Se $y < 0$, n DISPARI allora esiste un unico numero tale che $z^n = y$ $\quad z = -\sqrt[n]{y}$

Teorema: Siano $y \in \mathbb{R}$, $y \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$. $\exists$ un unico $z \in \mathbb{R}, z > 0$ tale che $z^n = y$

Idea della dimostrazione: • definisco $A = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0 \text{ e } x \le y\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0 \text{ e } x^n \ge y\}$ $A \ne \emptyset$ $B \ne \emptyset$ $a \le b$

1. Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \le c \le b$ $\forall a, b \in A, B$
2. Dimostrare che $c^n = y$
3. Giustificare l'unicità di c (se esiste un altro $c \in \mathbb{R}$ con $c' \ge 0$, $c^n = y$, allora $c' = c$)

$\boxed{\text{Proposizione}}$: Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \ge 0$, $b \ge 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$ allora
1) se $a^n = b^n$ allora $a = b$
2) se $a^n \ge b^n$ allora $a > b$

Dim 1

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1})^*$

Suppongo che sia $a^n = b^n$ quindi $a^n - b^n = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto uno dei fattori deve essere $0 \to (a-b) = 0$ oppure $* = 0$. Se $a - b = 0$ allora $a = b$ ed è dimostrata la mia ipotesi
p.a suppongo che $a \ne b$ e dimostro che $* \ne 0$. Allora almeno uno tra a o $b > 0$. Supponiamo che $a > 0$, siccome $a > 0$, $b \ge 0 \to a^{n-1} > 0$, $a^{n-2} > 0$ e applichiamo lo stesso ragionamento al restante dei termini. Perciò $*$ per ipotesi $= 0$ ↓ MI SONO CONTRADDETTO

Dim 2: $\forall c, d \in \mathbb{R}$ con $c \ge 0$ e $d \ge 0$, se $c \ge d$ allora $c^n \ge d^n$. Per (1) se $c^n = d^n$ allora $c = d$
Quindi in particolare se $c > d$ allora $c^n > d^n$. Allora se $a^n \ge b^n$ non può essere $a < b$ altrimenti $a^n < b^n$

Dimostrazione: ($\exists$ l'unicità di $\sqrt[n]{y}$) sono dati $y \in \mathbb{R}$, $y \ge 0$ e $n \in \mathbb{N}$

1. Se $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tali che $z_1 \ge 0$ e $z_2 \ge 0$, $(z_1)^n = y$, $(z_2)^n = y \to z_1 = z_2$.
Quindi se esiste $z \in \mathbb{R}$, $z \ge 0$, $z^n = y$, allora z è unico.

2. Definisco $A = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0, x^n \le y\}$ e B $\{x \in \mathbb{R} : x \ge 0, x^n \ge y\}$ con $A \ne \emptyset$ $B \ne \emptyset$ perché scegliendo $z \in \mathbb{N}$ tale che $K > y$ allora $K^n \ge K > y$

3. $a \le b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$, infatti se $a \in A$, $b \in B$ allora $a^n \le y \le b^n$, $a \ge 0$ e $b \ge 0$. Per assioma di completezza $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $a < c < b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$

4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0, x^2 \le 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0, x^2 \ge 2\}$
$c \in \mathbb{R}$ è tale che $a < c < b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ e $c \ge 0$ perché $s \in A$ e quindi $c \ge s \ge 0$.
Voglio mostrare che non è vero $a \le c$. In particolare mostro che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $c + s \in A$ (contraddizione)
Se $n \in \mathbb{N}$ allora $(c+1)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow < 2$ quindi $\frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2}$ $c\,2 - c^2$?
Per la proprietà di Archimede, posso scegliere $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{2c+1}{2-c^2} \to \frac{1}{n} < \frac{2-c}{2c+1}$
Siccome $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \ge n$, $\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n} \to \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \le \frac{2c}{n} + \frac{1}{n}$ $c\,2 \,?\, -c^2$
scelgo $n > \frac{2c+1}{2-c^2}$ allora $\frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \le \frac{2c}{n} + \frac{1}{n} < 2 - c^2$ cioè $\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$
$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ quindi $c + \frac{1}{n} \in A > c$ (contraddizione)

Suppongo p.a $c^2 > 2$ e scelgo $n > \frac{2c}{c^2 - c}$ allora $\left(c - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ e quindi $c + \frac{1}{n} \in B$ ma $c - \frac{1}{n} < c$ (contraddizione)
Quindi l'unica possibilità è $c^2 = 2$. $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di completezza.

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0, x^2 \le 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0, x^2 > 2\}$

$A \ne \emptyset$, $B \ne \emptyset$, $a \le b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ Se esistesse $c \in \mathbb{Q}$ tale che $a < c < b$ allora $c^2 = 2$ Non esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che $c \ne 2$ (contraddizione)

Principio di induzione

Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$ $b \ge 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $a \ge b$ allora $a^n \ge b^n$

Se $n = 1 \to a^n = a^1 = a$ e $b^n = b^1 = b$

Se $n = 2 \to a \ge b \to a^2 \ge b^2 \to a^2 = a \cdot a \ge a \cdot b \ge b \cdot b = b^2$

Se $n = 3 \to a \ge b \to a^3 \ge b^3 \to a^3 = a^2 \cdot a \ge b^2 \cdot a \ge b^2 \cdot b$

Teorema: Sia $p(n)$ un'affermazione vera dipendente da $n \in \mathbb{N}$

- Se p_1 è vera
- $\forall n \in \mathbb{N}$, se $p(n)$ è vera lo è anche $p(n+1)$ allora $p(n)$ è vera per ogni n

Teorema (disuguaglianza di Bernoulli): siano $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$ allora $(1+x)^n \ge 1 + nx$

Dim: (per induzione su $\mathbb{N}$)
$\forall n \in \mathbb{N}$ sia p_n l'affermazione seguente: $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$ vale $(1+x)^n > 1 + nx$

- Verifico che p_1 è vera $\to (1+x)^1 \ge 1 + 1x$
- Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ se p_n è vera lo è anche p_{n+1}, cioè è vera $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \ge (1+nx)(1+x)$
l'affermazione è corretta