MINIMO E MASSIMO LOCALE

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in X$ di accumulazione per X si dice che x_0 è punto di *massimo locale* per f se esiste un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x \in I_0 \cap X \quad f(x) \leq f(x_0)$, mentre si dice che x_0 è punto di *minimo locale* per f se esiste un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x \in I_0 \cap X \quad f(x) \geq f(x_0)$.

$f(x_0)$ è il massimo [minimo] della restrizione di f ad $I_0 \cap X$ e pertanto dicesi massimo [minimo] locale per f.

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in X$ di accumulazione per X si dice che x_0 è punto di *massimo locale proprio* per f se esiste un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \leq f(x_0)$. Si dice che x_0 è punto di *minimo locale proprio* per f se esiste un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \geq f(x_0)$.

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dotata di derivata nel punto $x_0 \in X$ di accumulazione sia a sinistra che a destra per X, se x_0 è punto di min $[max]$ locale per f allora $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE

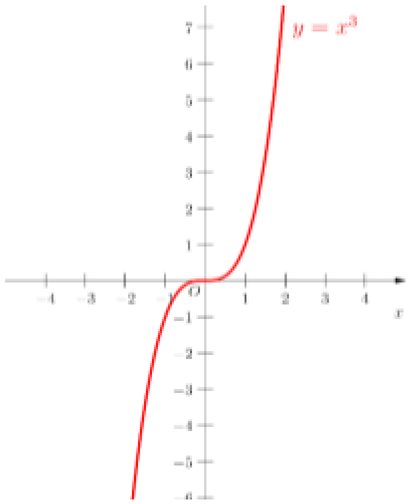
I. Supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale per f, per definizione $\exists\, I_0 : \forall\, x \in I_0 \cap X \;\; f(x) \geq f(x_0)$;
II. Consideriamo il rapporto incrementale $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
III. Si determini il segno del rapporto incrementale considerando prima $x < x_0$, ottenendo $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, poi $x > x_0$, ottenendo $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$;
IV. Per un noto teorema di regolarità per confronto deve essere $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ e $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$;
V. Essendo per ipotesi la funzione derivabile nel punto x_0, la derivata destra e sinistra devono coincidere, pertanto $f'(x_0) = 0$.

PUNTI STAZIONARI

Sia f reale e continua in $(a; b)$ e derivabile in $]a; b[$ le eventuali soluzioni dell'equazione $f'(x_0) = 0$ $\forall\, x \in\,]a; b[$ prendono il nome di punti stazionari o critici per f.

I punti critici che risultano essere di $minimo$ $[massimo]$ locale per f sono detti *estremanti*. I punti critici non estremanti sono detti *punti sella*.

ESEMPIO



$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$x = 0 \quad (\text{nè } minimo \text{ nè } massimo\ locale)$$

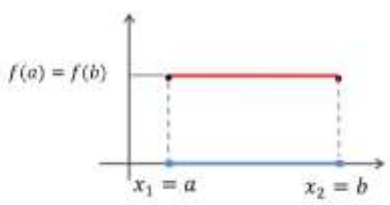
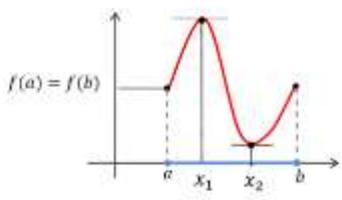
TEOREMA DI ROLLE

Una delle conseguenze del teorema di Fermat è il ***teorema di Rolle***, secondo il quale:

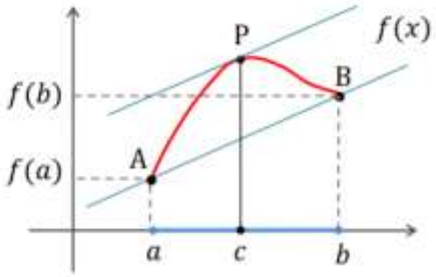
"Sia f una funzione reale e continua nell'intervallo $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, con $f(a) = f(b)$ allora esiste almeno un punto c in $[a; b]$ tale che $f'(c) = 0$."

DIMOSTRAZIONE

I. Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di un minimo e di un massimo assoluto nell'intervallo $[a; b]$
II. Si distinguono allora due casi: $min = max$ e $min \neq max$ e si ha quanto segue

	Se $x_1 = a$ ed $x_2 = b$ allora la funzione sarà costante e quindi la sua derivata prima è nulla in tutti i punti dell'intervallo $]a, b[$, da cui la tesi
	Per il teorema di Fermat, se una funzione ha un massimo (o un minimo) in un punto, allora la derivata prima della funzione in quel punto (x_1 e x_2) è nulla, cioè: $f'(x_1) = 0$ e $f'(x_2) = 0$ da cui la tesi

TEOREMA DI LAGRANGE



"Sia f una funzione reale e continua nell'intervallo $[a;b]$ e derivabile in $]a;b[$ allora esiste almeno un punto c in $[a;b]$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$."

DIMOSTRAZIONE

I. Si consideri la funzione ausiliaria $g\colon \forall\, x \in [a;b] \rightarrow f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

II. Calcoliamo $g(a)$ e $g(b)$, ottenendo: $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(a)$

III. Applicando il teorema di Rolle a $g(x)$ in base al quale esiste almeno un punto c in $[a;b]$ tale che $g'(c) = 0$

IV. Calcoliamo la derivata prima di $g(x)$, ottenendo $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

V. $g'(c) = 0 \;\leftrightarrow\; g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

TEOREMA FUNZIONI COSTANTI: $f'(x) = 0 \;\; \forall\, x \;\in\; [a;b] \;\;\; f(x) = k$

DIMOSTRAZIONE

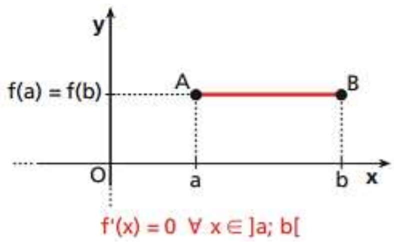
Applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[a;\,x]$, dove x è un punto qualsiasi di $[a;b]$ diverso da a; esiste un punto $c \in\,]a;x[$ per cui si ha:

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Essendo $f'(x) = 0$ per ogni punto di $]a;b[$, allora $f'(c) = 0$.
Deve essere allora:

$$f(x) - f(a) = 0 \rightarrow f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a;b].$$

Quindi f è costante in tutto $[a;b]$.



TEOREMA FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI: Sia f reale e continua in $[a;b]$ e derivabile in $]a;b[$ si ha quanto segue:

- Se $f'(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \;\in\,]a;b[$ allora f è crescente;
- Se $f'(x) \leq 0 \;\; \forall\, x \;\in\,]a;b[$ allora f è decrescente.

DIMOSTRAZIONE

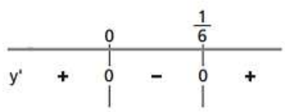
Siano x_1 e $x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$.
Per il teorema di Lagrange, applicato a $f(x)$ nell'intervallo $[x_1;x_2]$, si ha:

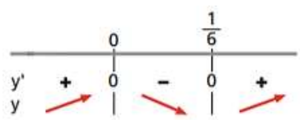
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c), \quad \text{con } c \in\,]x_1;x_2[.$$

Essendo $x_2 - x_1 > 0$ e per ipotesi $f'(c) > 0$, anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$, da cui:

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Poiché x_1 e x_2 sono punti qualsiasi di I, la funzione è crescente in I.





Una *<u>conseguenza</u>* del teorema delle funzioni strettamente crescenti [decrescenti] è il seguente:

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua nel punto $x_0 \in X$ di accumulazione per $X, I_0 \subseteq X : f$ sia derivabile in $I_0 - \{x_0\}$ se:

- $f'(x) > 0 \ \ \forall\, x \ \in I_0$ con $x < x_0 \ \ e \ \ f'(x) < 0 \ \ \forall\, x \ \in I_0$ con $x > x_0$ allora x_0 è punto di massimo locale proprio per f;
- $f'(x) < 0 \ \ \forall\, x \ \in I_0$ con $x < x_0 \ \ e \ \ f'(x) > 0 \ \ \forall\, x \ \in I_0$ con $x > x_0$ allora x_0 è punto di minimo locale proprio per f.

DIMOSTRAZIONE

(a1.) La continuità di f in x_0 e l'ipotesi che $f'(x) > 0 \ \ \forall\, x \ \in]x_0 - \gamma\, ;\ x_0\, [$ ci garantiscono che la funzione è strettamente crescente nel suddetto intervallo e ciò significa che $\forall\, x \ \in\ ]x_0 - \gamma\, ;\ x_0\, [\ \ f(x) < f(x_0\,)$.

(a2.) La continuità di f in x_0 e l'ipotesi che $f'(x) < 0 \ \ \forall\, x \ \in]x_0\, ;\ x_0 + \gamma[$ ci garantiscono che la funzione è strettamente decrescente nel suddetto intervallo e ciò significa che $\forall\, x \ \in\ ]x_0\, ;\ x_0 + \gamma[\ \ f(x_0\,) > f(x)$.

Da quest'ultimo teorema segue **l'inverso**:

"Sia f una funzione reale definita nell'intervallo $(a; b)$, derivabile in $]a, b[$ e dotata di derivata seconda nel punto $x_0 \in]a, b[$ se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di minimo locale proprio. Rispettivamente se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale proprio."

DIMOSTRAZIONE

I. L'ipotesi che $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) < 0$ ci dicono che $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$
II. In base al teorema della permanenza del segno, affinché il limite sia vero, nella condizione $(x - x_0 < 0)$ o che $(x - x_0 > 0)$, $f'(x) > 0$.
III. Stante al teorema precedente, x_0 è un punto di massimo locale proprio per f.

TEOREMI DI DE L'HOSPITAL

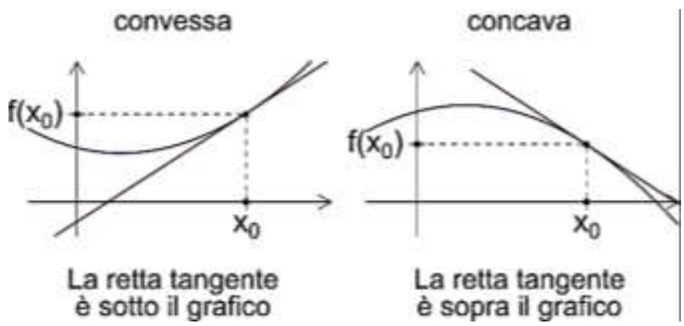
PRIMO TEOREMA DI DE L'HOSPITAL: Siano f, g funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0\ \forall\, x \in X, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X. Nell' ipotesi che $\exists\, I_0 - \{x_0\} \subseteq X: f, g$ siano derivabili in $I_0 - \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in I_0 - \{x_0\}$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$ e risulta $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

SECONDO TEOREMA DI DE L'HOSPITAL: Siano f, g funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0\ \forall\, x \in X, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X. Nell' ipotesi che $\exists\, I_0 - \{x_0\} \subseteq X: f, g$ siano derivabili in $I_0 - \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in I_0 - \{x_0\}$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$ e risulta $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

OSSERVAZIONI: I due teoremi non si possono invertire, ovvero la regolarità nel punto x_0 di $\frac{f}{g}$ non comporta la regolarità in x_0 di $\frac{f'}{g'}$.

FUNZIONI STRETTAMENTE CONCAVE E CONVESSE

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Γ il diagramma di f. Si dice che f è **strettamente convessa** in I se $\forall\, a, b \in I$ i punti di Γ aventi l'ascissa appartenente $]a; b[$ sono tutti strettamente al di sotto del segmento di estremi $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$. Rispettivamente si dice che f è **strettamente concava** in I se $\forall\, a, b \in I$ i punti di Γ aventi l'ascissa appartenente $]a; b[$ sono tutti strettamente al di sopra del segmento di estremi $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$.



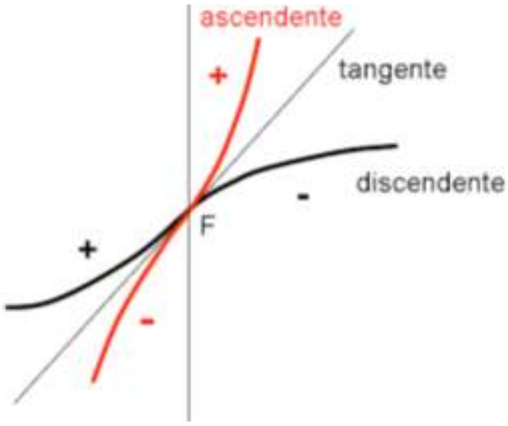
Siano f una funzione reale derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}, \Gamma$ il diagramma di f, le seguenti affermazioni:

- f' strettamente $crescente$ $[decrescente]$ in I;
- f strettamente $convessa$ $[concava]$ in I;
- $\forall\, P_0 \in \Gamma$ i punti di $\Gamma - \{P_0\}$ sono tutti strettamente $al\ di\ sopra$ $[al\ di\ sotto]$ della retta tangente a Γ nel punto P_0.

PUNTI DI FLESSO

Siano f una funzione reale definita in $I \subseteq \mathbb{R}$, Γ il diagramma di f, x_0 un punto interno ad $I, P_0(x_0; f(x_0))$. Supponiamo che esista un intorno di x_0 $]x_0 - \gamma\ ; x_0 + \gamma[$ incluso in I tale che f sia strettamente concava in $]x_0 - \gamma\ ; x_0[$ e strettamente convessa in $]\ x_0\ ; x_0 + \gamma[$ oppure tale che f sia strettamente convessa in $]x_0 - \gamma\ ; x_0[$ e strettamente concava in $]\ x_0\ ; x_0 + \gamma[$.

Nel primo caso si dice che P_0 è punto di flesso ascendente per Γ, mentre nel secondo caso si dice che P_0 è punto di flesso discendente per Γ.



FORMULA DI TAYLOR

Sia f una funzione reale definita nell'intervallo $(a; b)$ ivi derivabile $n-1$ volte e derivabile n volte in $x_0 \in (a; b)$ con $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, il seguente polinomio $\forall\ x \in (a; b)$ $\ P_n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, il cui grado è non superiore ad n ed è detto ***polinomio di Taylor*** [di Mac Lauren se $x_0 = 0$] di ordine n relativo ad f e di punto iniziale x_0.

Evidentemente P_n è derivabile n volte in x_0 e si ha $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'^{(x_0)} = f'^{(x_0)}$, $P_n''^{(x_0)} = f''^{(x_0)}, \dots,\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Premesso ciò, consideriamo la funzione $\omega_n(x) = f(x_0) - P_n(x)\ \ \forall\ x\ \in (a; b)$ detta "resto" e risulta $\omega_n{}'(x_0) = 0$. Circa la funzione ω_n sussiste il seguente teorema:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\omega_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \text{ ovvero } \omega_n(x) = \underset{x_0}{o}((x - x_0)^n)$$

I. Osserviamo che gli $n-1$ rapporti $\frac{\omega_n(x)}{(x-x_0)^n}$ si presentano della forma indeterminata $\frac{0}{0}$

II. Tenuto conto che $\omega_n^{(n)}(x_0) = 0$ si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{\omega_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \frac{\omega_n^{(n-1)}(x) - \omega_n^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\ \omega_n^{(n)}(x_0) = 0$

III. In base al primo teorema di De L'Hospital si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{\omega_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Tenendo presente il teorema, introduciamo la funzione: $\sigma(x) \to (a;b) \to \begin{cases} \frac{\omega_n(x)}{(x-x_0)^n} & se\ x \neq x_0 \\ 0 & se\ x = x_0 \end{cases}$

Per la quale si ha quanto segue:

$$f(x) = P_n(x) + \sigma(x)(x-x_0)^n \iff f(x) = f(x_0) + \frac{f^1(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f^2(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Quest'ultima è nota come "formula di Taylor" di ordine n e di punto iniziale x_0 con il resto nella forma di Peano.

N.B. La formula di Taylor serve ad approssimare una qualunque funzione ad un andamento e il suo resto risulta la stima dell'errore.

Un' importante conseguenza della formula, inoltre, è il seguente teorema:

"Sia f reale e derivabile $n-1$ volte in $(a;b)$ e n volte in $x_0 \in (a;b)$ con $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, nelle ipotesi che $f^1(x_0) = 0, f^2(x_0) = 0, \dots, f^{n-1}(x_0) = 0 \quad e \quad f^n(x_0) \neq 0$ si ha quanto segue:

- Se n è dispari x_0 è un punto sella per f;
- Se n è pari e $f^n(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo locale proprio per f;
- Se n è pari e $f^n(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale proprio per f."

DIMOSTRAZIONE (PRIMA AFFERMAZIONE)

I. Per ipotesi si ha: $\frac{\frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \sigma(x)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}$ da cui segue che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \sigma(x)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^n(x_0)}{n!} + \sigma(x) = \frac{f^n(x_0)}{n!}$;
II. Per il teorema della permanenza del segno $\exists\, I_0$ di $x_0 \subseteq (a,b)$: $\forall x \in I_0 - \{x_0\}$ il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$ ha lo stesso segno di $\frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$
III. Premesso ciò, se n è dispari e $f^n(x_0) > 0$ allora deve essere $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} > 0$
IV. Scelto arbitrariamente $x < x_0$ allora affinchè sia vera l'espressione di prima $f(x) - f(x_0) < 0$ mentre se viene scelto $x > x_0$ allora $f(x) - f(x_0) > 0$
V. Pertanto x_0 non è né un punto di minimo né un punto di massimo, quindi è un punto sella.

N.B. ANALOGAMENTE VIENE DIMOSTRATA LA SECONDA [TERZA] AFFERMAZIONE DEL TEOREMA.

TEOREMA DEL RESTO NELLA FORMA DI LAGRANGE

Sia f reale e derivabile n volte in $(a;b)$ e $x_0 \in (a;b)$ nelle ipotesi che la derivata $n-esima$ di f sia continua in x_0 ed f sia derivabile $n+1$ volte in tutti i punti $(a;b) - \{x_0\}$, allora $\forall\, x \in (a;b) - \{x_0\}$ esiste almeno un punto c_x interno ad $[x;x_0]$ tale che:

$$\omega_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

La rappresentazione di Lagrange del resto del polinomio di Taylor permette di stimare il resto ω_n nell'intorno x_0 e ottenere un grado di approssimazione della funzione tramite il polinomio di Taylor.

FUNZIONE PRIMITIVA

Sia f reale definita e continua in X si chiama primitiva di f ogni funzione reale F definita in X ivi derivabile e tale che $F'(x) = f(x) \ \forall\, x \in X$. Se F è primitiva di f allora sono primitive di f tutte e sole le funzioni del tipo $F + c$ con c costante reale.

DIMOSTRAZIONE

I. $\forall\, x \in X \; D[F(x) + c]$
II. $D[F(x)] + D[c]$
III. $F'(x) + 0 = f(x)$

Proviamo che se G è un'altra primitiva di f allora G è del tipo $F + c$.

DIMOSTRAZIONE

I. Essendo G è un'altra primitiva di f essa è tale che $\forall\, x \in X \quad G'(x) = f(x)$
II. $\forall\, x \in X \quad (G - F)' = G'(x) - F'(x) = 0$
III. Dalle conseguenze del teorema di Lagrange $G - F$ è costante, per cui $G = F + c$.

INTEGRALE INDEFINITO

Si chiama integrale indefinito di f e si scrive $\int f(x)\, dx$ l'insieme di tutte le primitive di f. Dunque se F è una primitiva di f si pone per definizione $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ dove la funzione f prende il nome di integrando o di funzione integranda, il simbolo che la precede prende il nome di segno di integrale, la lettera x è detta variabile di integrazione.

INTEGRAZIONE FUNZIONI ELEMENTARI	INTEGRAZIONE FUNZIONI COMPOSTE
$\int dx = x + c$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \log\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x)\, dx = \sin f(x) + c$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int f'(x) \cdot \sin f(x)\, dx = -\cos f(x) + c$
$\int \tan x\, dx = -\ln\lvert \cos x\rvert + c$	
$\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$	$\int f'(x) \cdot \cosh f(x)\, dx = \sinh f(x) + c$
$\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$	$\int f'(x) \cdot \sinh f(x)\, dx = \cosh f(x) + c$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotan}\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\text{cotan}\, f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} dx = \tanh f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{arcosin}\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, dx = \text{arcosin}\, f(x) + c$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + c$	$\int -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, dx = \arccos f(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\, dx = \arctan\big(f(x)\big) + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$	
$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} log \left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{1-f(x)^2}\, dx = log \left\lvert\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right\rvert + c$
$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = log \left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + c$	$\int \frac{1}{f(x)^2-1}\, dx = log \left\lvert f(x) + \sqrt{f(x)^2-1}\right\rvert + c$
$\int \frac{1}{x\, logx}\, dx = 2\sqrt{\log x} + c$	

CENNI SULLA TEORIA DELLA MISURA SECONDO PEANO - JORDAN IN $\mathbb{R}^2$

Assegnati $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ con $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$, consideriamo gli intervalli compatti $[a_1; b_1]$ e $[a_2; b_2]$. Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ $R = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] = \{P(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a_1; b_1], y \in [a_2; b_2]\}$ dicesi rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^2$ di dimensioni $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ ed il punto $P_0\left(\frac{b_1+a_1}{2}; \frac{b_2+a_2}{2}\right)$ dicesi il centro di R. Se almeno una delle dimensioni di R e nulla allora R si dice degenere. In caso contrario, R è rappresentato geometricamente da un rettangolo i cui lati sono paralleli agli assi coordinanti.

Siano $I \subseteq \mathbb{R}^2, P_0$ un punto di $\mathbb{R}^2$, si dice che P_0 è interno ad I se esiste un rettangolo chiuso non degenere di centro P_0 strettamente contenuto in I.

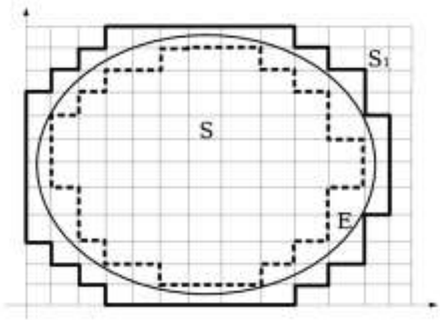
L'insieme dei punti interni ad I dicesi l'interno di I e si denota col simbolo $\mathring{I}$.

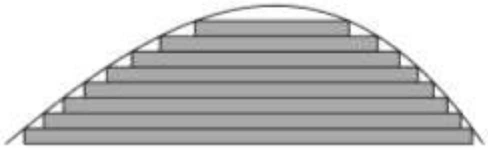
Si dice che P_0 è punto frontiere per I se ad ogni rettangolo chiuso non degenere di centro P_0 appartengono sia punti di I sia punti di $\frac{\mathbb{R}^2}{I}$ .L'insieme dei punti frontiera per I dicesi la frontiera di I e si denota con il simbolo FI.

Un sottoinsieme di I di $\mathbb{R}^2$ si dice limitato se esiste un rettangolo chiuso non degenere che lo contiene. Sia $\mathbb{R}$ un rettangolo chiuso del piano reale $\mathbb{R}^2$, si definisce misura o area di $\mathbb{R}$ il numero reale non negativo.

L'unione di un numero finito di rettangolo chiusi non degeneri a due a due privi di punti interni comuni prende il nome di **pluri-rettangolo** o **pluri-intervallo** di $\mathbb{R}$ e la sua misura è pari alla somma delle misure dei rettangoli che lo compongono.

L'unione di un numero finito di rettangolo chiusi degeneri prende il nome di **pluri-rettangolo** o **pluri-intervallo degenere** di $\mathbb{R}^2$ e la sua misura è nulla.





APPROSSIMAZIONE CON PLURINTERVALLI

Sia I una parte limitata di $\mathbb{R}^2$ denotati con:

- $A(I)$ l'insieme numerico costituito dalle misure dei pluri-rettangoli chiusi inclusi in I;
- $B(I)$ l'insieme numerico costituito dalle misure dei pluri-rettangoli chiusi contenenti in I.

Si dimostra che $supA(I) \leq infB(I)$. Si dice che I è misurabile secondo Peano – Jordan se il $supA(I) = infB(I)$ e, in tal caso, il numero reale non negativo $m(I) = supA(I) = infB(I)$ dicesi "misura" o "area" di I. Inoltre, si pone per definizione $m(\emptyset) = 0$.

OSSERVAZIONI

1. Se I è privo di punti interni allora gli unici pluri-rettangoli chiusi inclusi in I sono quelli degeneri per cui $A(I) = \{0\}$, e dunque se I è misurabile, esso ha misura nulla.
2. Se I_1 e I_2 sono parti limitate e misurabili di $\mathbb{R}^2$ con $I_1 \leq I_2$ allora $m(I_1) \leq m(I_2)$.

Poniamo $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad Q_n = [-n; n] \times [-n; n]$, una parte I non limitata di $\mathbb{R}^2$ si dice "Peano-Jordan-misurabile" se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ l'insieme $I \cap Q_n$, che può essere vuoto o limitato, è misurabile.

Ammesso che I sia misurabile, rilevato che $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad I \cap Q_n \subseteq I \cap Q_{n+1}$ si ha $m(I \cap Q_n) \leq m(I \cap Q_{n+1})$ e pertanto tenendo presente il teorema sui limiti delle successioni monotone risulta $\lim m(I \cap Q_n) = \lim m(I \cap Q_{n+1})$ che prende il nome di misura o area di I. Se vale $+\infty$ si dice che I ha misura infinita, mentre se $m(I) < +\infty$ si dice che ha misura finita.

OSSERVAZIONI

Siano I_1 e I_2 parti di $\mathbb{R}^2$, limitate o non misurabili, si dimostra quanto segue:

$$I_1 \leq I_2 \Rightarrow m(I_1) \leq m(I_2)$$

- Se $m(I_1 \cap I_2) < +\infty$ allora $m(I_1 \cup I_2) = m(I_1) + m(I_2) - m(I_1 \cap I_2)$;
- Se $I_1 \leq I_2$ e $m(I_1) \leq +\infty$ allora $m(I_2 - I_1) = m(I_2) + m(I_1)$.

INTEGRALE DEFINITO DI UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO COMPATTO

Sia $[a;b]$ un intervallo compatto con $a<b$, fissati in $(a;b)$ i punti $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$, posto $x_0=a$ e $x_n=b$, gli n intervalli $[x_0;x_1],[x_1;x_2],\dots,[x_{n-1};x_n]$ sono a due a due privi di punti interni comuni e la loro unione coincide con l'intervallo compatto di estremi a e b.

Si dice che i succitati intervalli costituiscono una decomposizione di $[a;b]$ in intervalli compatti che denotiamo con $D(x_0,x_1,\dots,x_n)$, della quale chiamiamo **ampiezza** il numero positivo $d=\max\{x_0-x_1,x_2-x_1,\dots,x_{n-1}-x_n\}$.

Sia ora f una funzione reale continua in $[a;b]$ e detta $D(x_0,x_1,\dots,x_n)$ una decomposizione di $[a;b]$ poniamo

$$m_0=minf_{[x_0,x_1]},m_1=minf_{[x_1,x_2]},\dots,m_n=minf_{[x_{n-1},x_n]}\ ;$$

$$M_0=maxf_{[x_0,x_1]},M_1=maxf_{[x_1,x_2]},\dots,M_n=maxf_{[x_{n-1},x_n]}$$

e consideriamo le somme $s_D(f)=\sum_{i=0}^{n}m_i(x_{i+1}-x_i)$ e $S_D(f)=\sum_{i=0}^{n}M_i(x_{i+1}-x_i)$ e denotiamo con $\sum'(f)$ e $\sum''(f)$ gli insiemi numerici ottenuti al variare delle decomposizioni. Si dimostra che $\sum'(f)$ e $\sum''(f)$ sono separati e contigui ossia $sup\sum'(f)=inf\sum''(f)$, e tale numero reale dicesi "l'integrale definito di f da a a b" e si denota con il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$.

Si pone per definizione $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^a f(x)\,dx=0$.

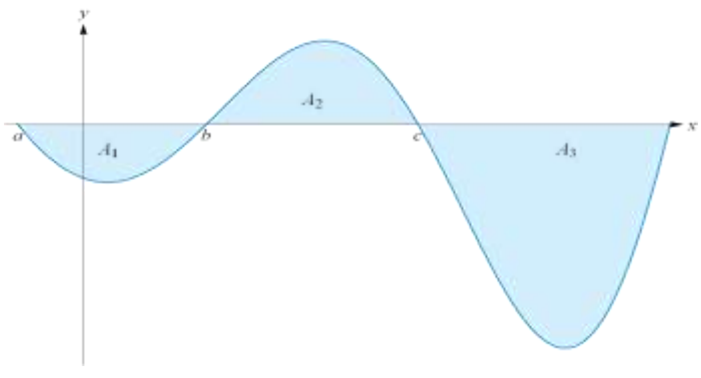
Se $f(x)=k\ \ \forall\, x\in[a;b]$ poiché qualunque sia la decomposizione $D(x_0,x_1,\dots,x_n)$ la somma $S_D(f)=k(b-a)$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx=k(b-a)$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO INTEGRALE DEFINITO

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a;b]$ed ivi non negativa allora il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai punti $R(f)=\{P(x;y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \forall\,x\in[a;b]\quad 0\le y\le f(x)\}$. Rispettivamente sia f una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a;b]$ed ivi non positiva allora il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai punti $R(f)=\{P(x;y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \forall\,x\in[a;b]\ \ f(x)\le y\le 0\}$.

Il sottoinsieme così definito prende il nome di **rettangoloide** relativo ad f e di base l'intervallo $[a;b]$.



Si dimostra che $R(f)$ è misurabile e risulta che la misura o area se $f\ge 0\quad A\big(R(f)\big)=\int_a^b f(x)\ dx$, mentre se $f\le 0\quad A\big(R(f)\big)=-\int_a^b f(x)\ dx$.

PROPRIETÀ INTEGRALE DEFINITO

1. Sia f una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a;b]$ ed ivi non negativa. Se $[c;d]$ è un intervallo contenuto in $[a;b]$ risulta:
$$\int_c^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$
2. Sia f una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a;b]$ ed ivi non negativa se $\int_a^b f(x)\,dx$ allora:
$$f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in [a;b]$$
3. **PROPRIETÀ ADDITIVA**: Sia f una funzione reale continua in un certo intervallo I qualunque siano i punti $a, b, c \in I$ risulta:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
4. **PROPRIETÀ DI LINEARITÀ**: Siano k costante reale f e g funzioni reali continue in $[a;b]$ si ha:
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
5. **PROPRIETÀ DI MONOTONIA:** Siano f e g funzioni reali continue in $[a;b]$ se $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in [a;b]$ allora:
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$
6. **PROPRIETÀ DEL MODULO:** Se f è una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a;b]$ allora:
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$
7. **PROPRIETÀ DELLA MEDIA:** Sia f una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a;b]$ posto $m = minf$ e $M = maxf$, si ha:
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$
inoltre esiste un punto $c \in [a;b]$ tale che:
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$
DIMOSTRAZIONE
    I. Essendo f continua il teorema di Weierstrass assicura che $\forall\, x \in [a;b] \quad m \leq f(x) \leq M;$
    II. Per la proprietà di monotonia si ha $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx;$
    III. Ciò equivale a $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a);$
    IV. Dividiamo tutto per $(b-a)$ ed otteniamo la prima tesi;
    V. Conseguentemente dalla IV. si evince che deve esistere un punto $c \in [a;b]$ che assume il valore intermedio $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia f una funzione reale continua in un certo intervallo I fissato $x_0 \in I$ introduciamo la funzione $F: x \in I \to \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ nota come funzione integrale relativa ad f e di punto iniziale x_0.

ENUNCIATO: La funzione F è una primitiva di f, ovvero $F'(x) = f(x)$ in ogni punto di I.

DIMOSTRAZIONE

I. Si tratta di dimostrare che $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$ quindi $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(\bar{x})$

II. Sostituiamo nel limite la scrittura integrale della funzione F, ottenendo: $\frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\, dt}{x - \bar{x}}$

III. Per la proprietà additiva si ha $\frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\, dt}{x - \bar{x}}$

IV. Per la proprietà della media esiste un punto c_x tale che $f(c_x) = \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}}$

V. Essendo f continua, risulta (fissato $\varepsilon > 0$) $\forall\, x \in I_\varepsilon \cap I - \{\bar{x}\}$ $|f(c_x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

VI. Ciò equivale a $\left|\frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f(\bar{x})\right| < \varepsilon$

VII. Per la definizione di limite si ha $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(\bar{x})$ e quindi la tesi è dimostrata.

N.B. Dal teorema si evince che ogni funzione continua in un intervallo è dotata di primitiva.

8. **FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:** Sia f una funzione reale continua in un intervallo compatto $[a; b]$ se φ è una primitiva di f allora:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

DIMOSTRAZIONE

I. Consideriamo la funzione integrale relativa ad f e di punto iniziale a, ovvero $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

II. Quest'ultima per il teorema fondamentale del calcolo integrale è una primitiva di f

III. Allora essendo sia F che φ primitive di f si ha che $\int_a^x f(t)\, dt = \varphi(x) + c$

IV. Ponendo $x = a$ nella relazione precedente si ha $\int_a^a f(t)\, dt = 0$ quindi $-\varphi(a) = c$

V. Sostituendo nella relazione III. $x = b$ si ottiene $\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a)$

OSSERVAZIONE

Sia f un'espressione elementare, mentre le sue derivate sono espressioni elementari, altrettanto non può dirsi per le sue primitive. Un'espressione si dice allora *elementarmente integrabile* se le sue primitive sono elementari.

N.B. La formula fondamentale del calcolo integrale è utilizzabile solo se f è elementarmente integrabile.

INTEGRAZIONE DEFINITA PER PARTI

Siano f e g funzioni reali dotate di derivata continua nell'intervallo compatto $[a; b]$ allora:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ \ dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\ \ dx$$

INTEGRAZIONE DEFINITA PER SOSTITUZIONE

PRIMA REGOLA: Sia $f(t)$ una funzione reale continua in I e g una funzione reale dotata di derivata continua nell'intervallo compatto $[a; b]$ e tale che $\forall\ x \in [a; b] \quad g(x) \in I$, si ha quanto segue:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ \ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

SECONDA REGOLA: Sia $f(x)$ una funzione reale continua nell'intervallo $[a; b]$, sia poi $g(t)$ finita e dotata di derivata continua nell'intervallo compatto $[c; d]$ ivi strettamente crescente[decrescente] ed avente per codominio l'intervallo compatto $[a; b]$. In queste ipotesi:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\ \ dt\ \ [\int_d^c f(g(t)) \cdot g'(t)\ \ dt]$$

DIMOSTRAZIONE

I. Proviamo l'asserto supponendo che g sia strettamente crescente nell'intervallo compatto $[c; d]$;
II. Sia $\varphi(x)$ una primitiva di f, poiché $\forall\ t \in [c; d]$ risulta $\varphi'(x)g'(t) = f\big(g(t)\big)g'(x)$;
III. Conseguentemente l'integrale $\int_c^d f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\ \ dt = \big[\varphi\big(g(t)\big)\,\big]_c^d = \varphi\big(g(d)\big) - \varphi\big(g(c)\big)$;
IV. Per cui otteniamo che $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(x)\, dx$

INTRAGRAZIONE IN UN INTERVALLO SIMMETRICO

Se f è una funzione reale continua in un intervallo simmetrico del tipo $[-k; k]$ e:

- Se f è pari allora $\int_{-k}^k f(x)\ \ dx = 2\int_0^k f(x)\ \ dx$;
- Se f è dispari allora $\int_{-k}^k f(x)\ \ dx = 0$.

INTEGRALI IMPROPRI

Sia (x) una funzione reale continua in un intervallo limitato o non, si dice che f è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(a; b)$ oppure che l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ è **convergente** se esiste finito il limite $\lim_{x \to t} \int_a^t f(x)\, dx$ se l'intervallo è aperto superiormente, rispettivamente $\lim_{x \to t} \int_t^b f(x)\, dx$ se l'intervallo è aperto inferiormente. Allora si pone per definizione:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to t} \int_a^t f(x)\, dx\ \left[\lim_{x \to t} \int_t^b f(x)\, dx\right]$$

Se il limite, invece vale $\pm\infty$ l'integrale si dirà **divergente**, mentre se non esiste il limite non esiste neanche l'integrale.

FUNZIONE SOMMABILE IN UN INTERVALLO

Si dice che una funzione reale f è sommabile in un intervallo $(a; b)$ se il suo modulo è integrabile in $(a; b)$. in tal caso, si dice che l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ è assolutamente convergente.

$$Sommabilità \Rightarrow Integrabilità$$

N.B. L'equivalenza precedente vale solo se la funzione è non negativa in $(a; b)$.

CRITERI DEL CONFRONTO

Siano f e g funzioni reali integrabili in $(a; b)$ con $0 \leq f(x) \leq g(x) \ \ \forall\, x(a; b)$ sussistono le suguenti implicazioni:

- g integrabile in $(a; b) \Rightarrow f$ integrabile in $(a; b)$;
- f non integrabile in $(a; b) \Rightarrow \ g$ non integrabile in $(a; b)$.

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO: Siano f e g funzioni reali definite in $(a; b), x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per $(a; b)$, con f e g integrabili in un intorno I_0 di x_0. Se $|f| \widetilde{x_0} \, |g|$ e se f e g non sono nulle in $I_0 - \{x_0\}$ allora f è sommabile in I_0 se e solo se g è sommabile in I_0.