Lezione 15

Fisica I – Ingegneria Automazione e Informatica

Università di Napoli "Federico II"

prof. Nicola R. Napolitano

Riepilogo della lezione precedente

1) Corpo rigido
2) Variabili rotazionali
3) Momento d'Inerzia

In questa lezione

1) Momento della Forza
2) Equilibrio corpi rigidi
3) Momento angolare e sua conservazione

Moti del corpo rigido

1) Traslazione

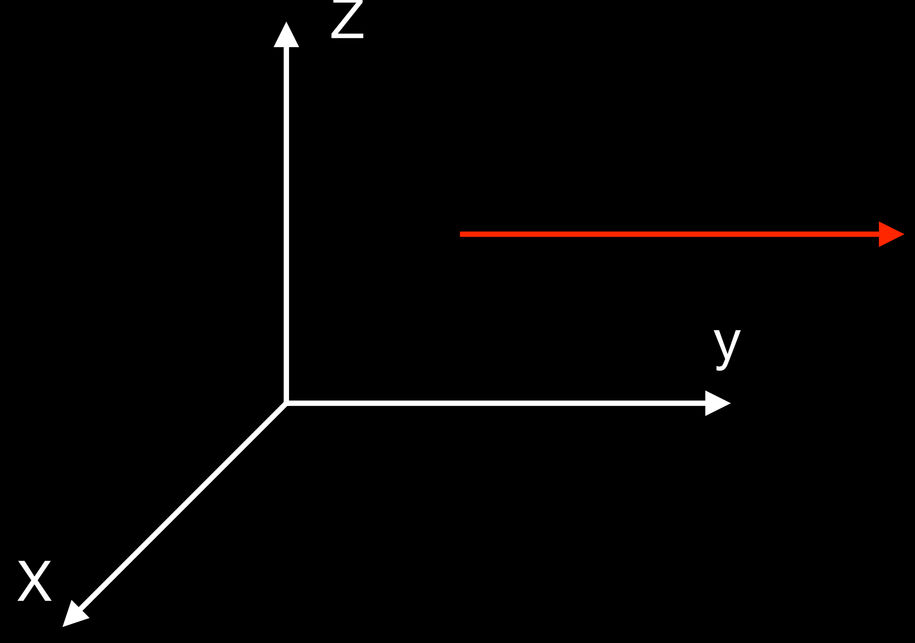
- le orientazioni degli assi della terna solidale rimangano costanti (gli assi si muovono mantenendosi paralleli a se stessi)
- Tutti i punti del corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo che è lo stesso di quello subito dal CM
- Tutti i punti sono fermi rispetto al centro di massa
- È sufficiente determinare il moto del CM

$$\boxed{\sum \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM}} \qquad \boxed{\vec{P}_{tot} = M\vec{v}_{CM}} \qquad \boxed{E_K = \frac{1}{2} M v^2{}_{CM}}$$

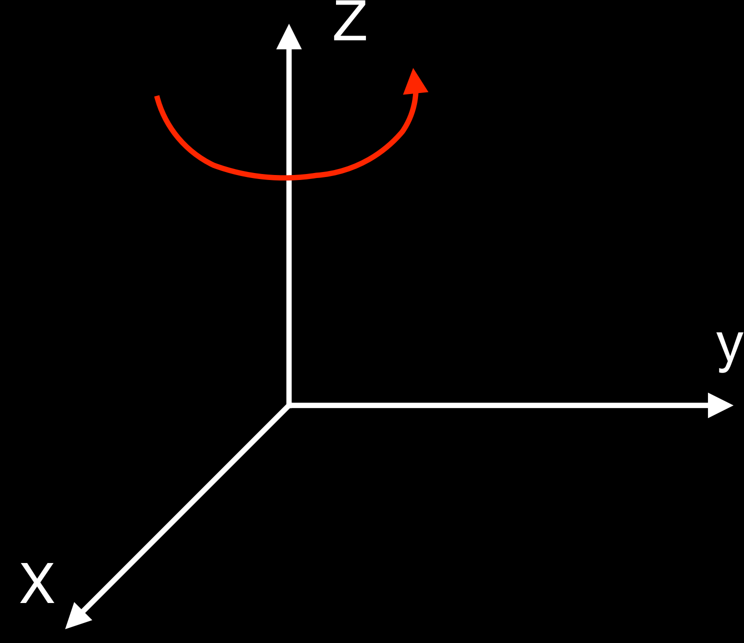
2) Rotazione

3) Rototraslazione

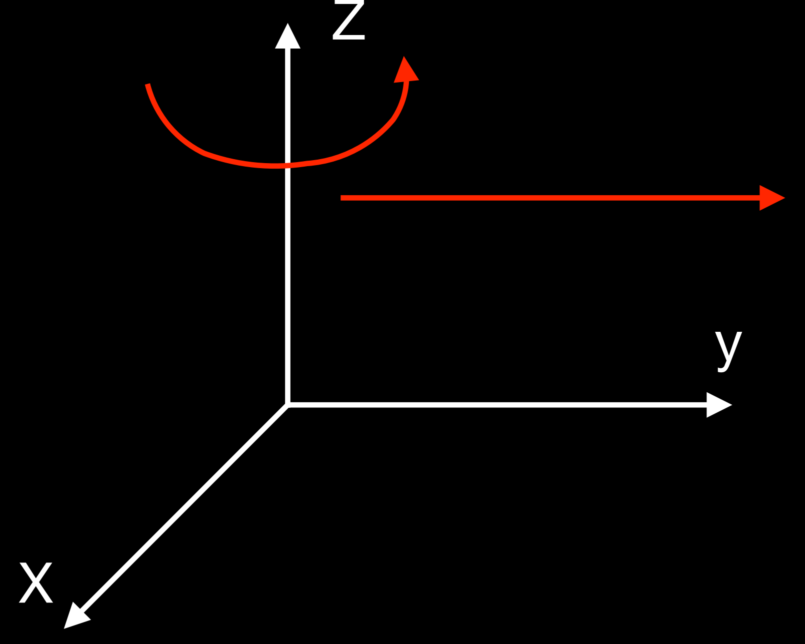
Moti del corpo rigido



Traslazione

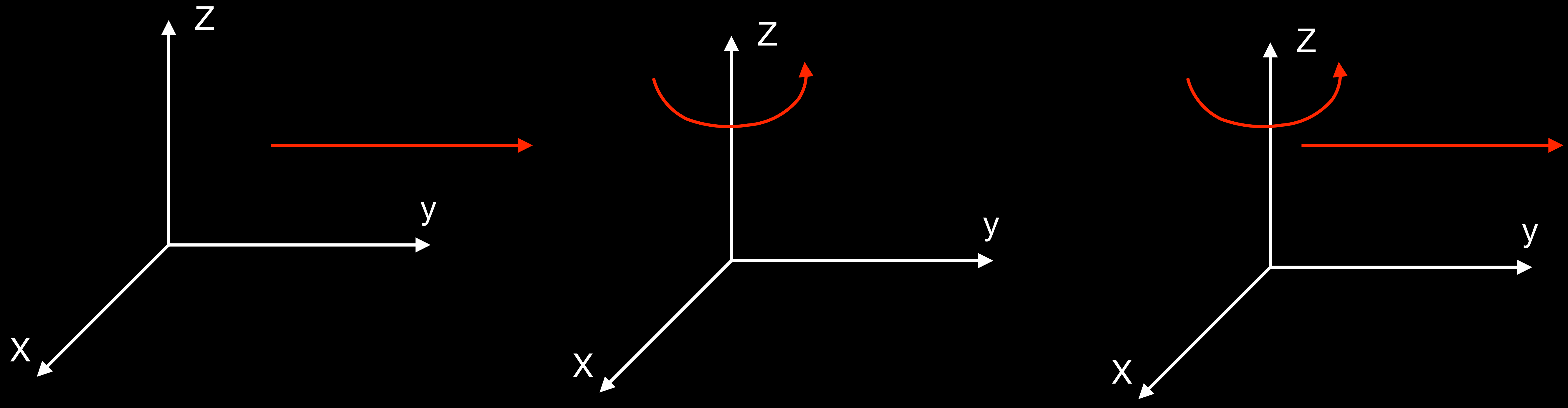


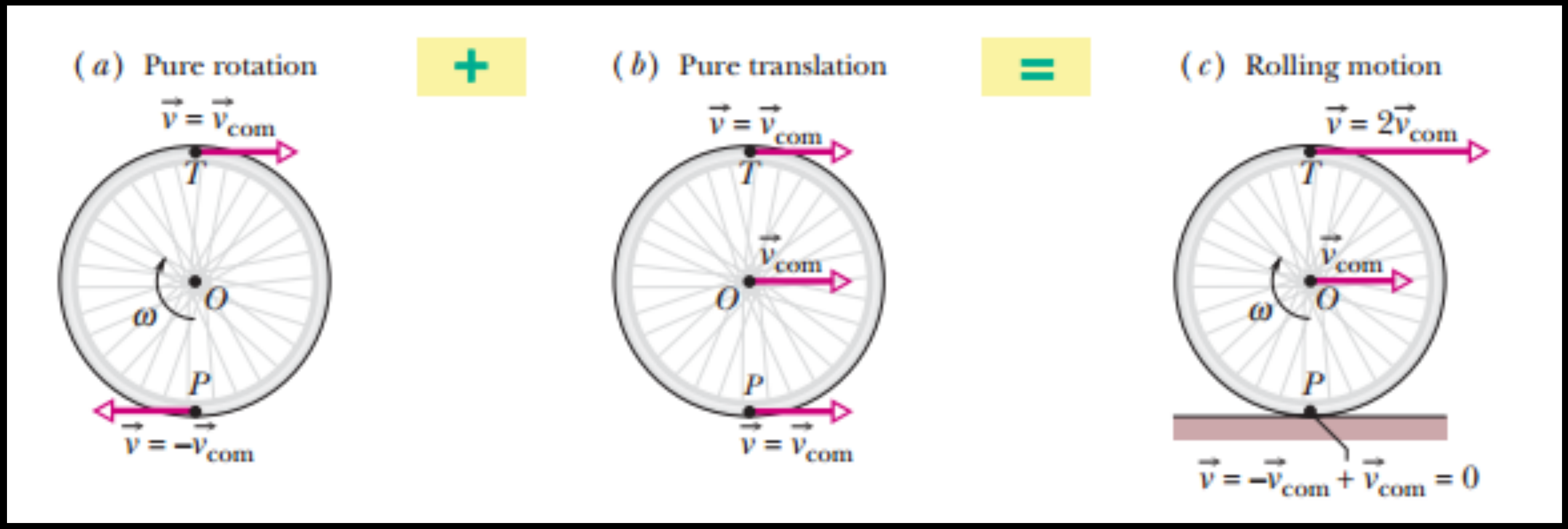
Rotazione



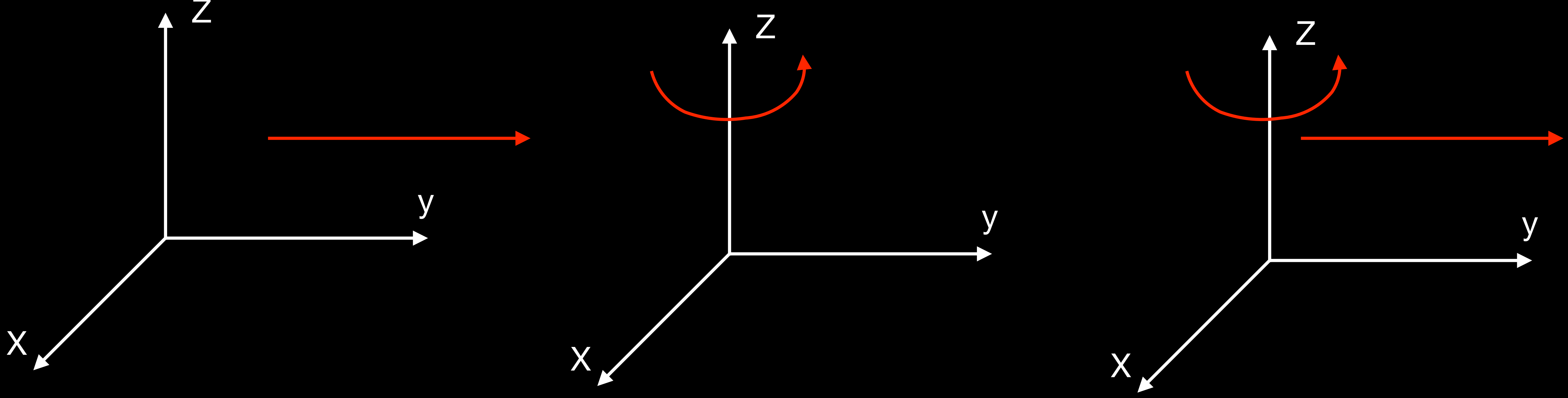
Roto-traslazione

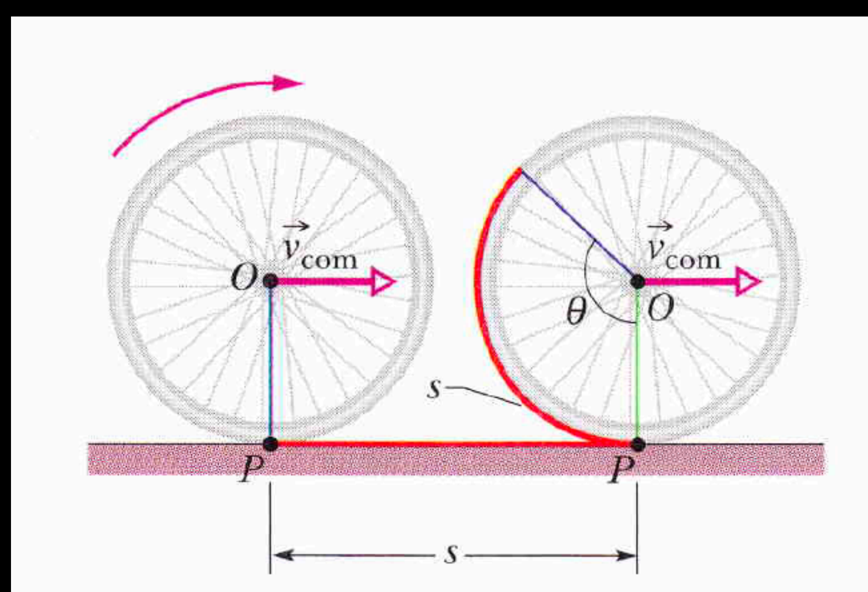
Moti del corpo rigido

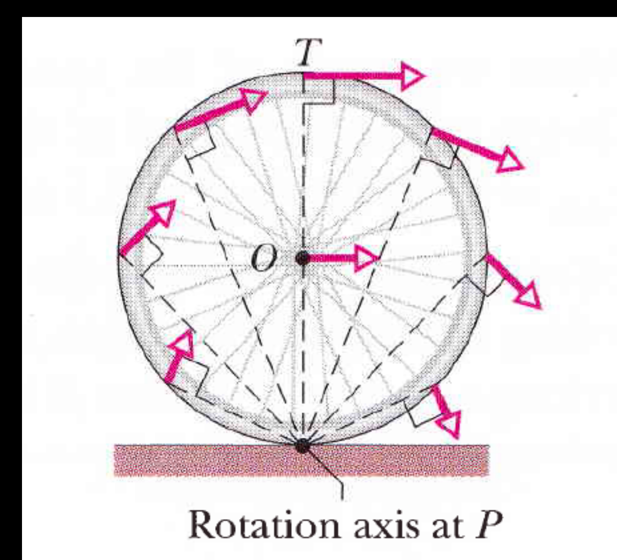




Moti del corpo rigido

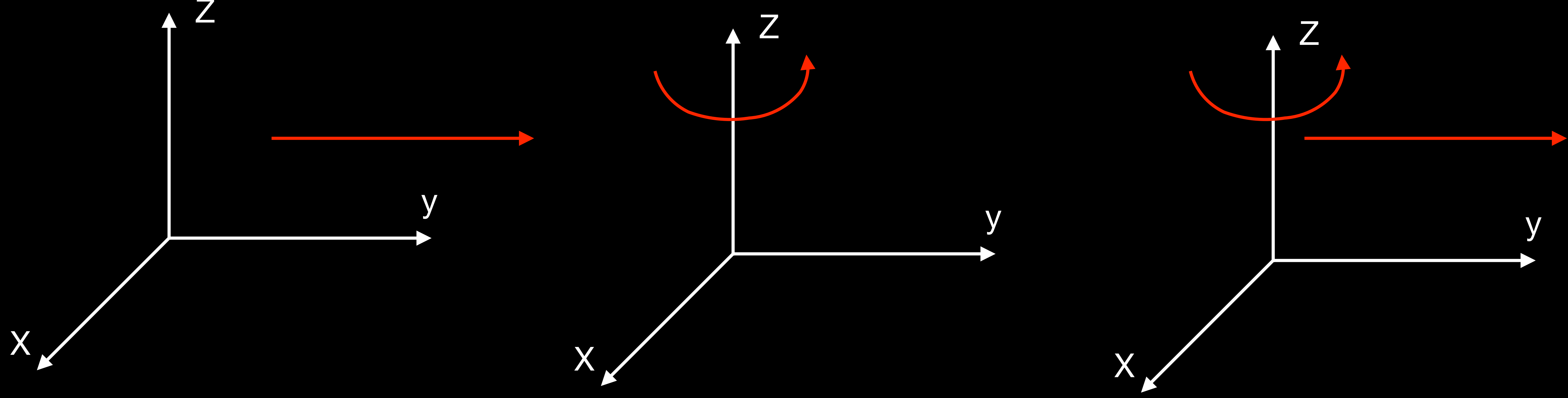


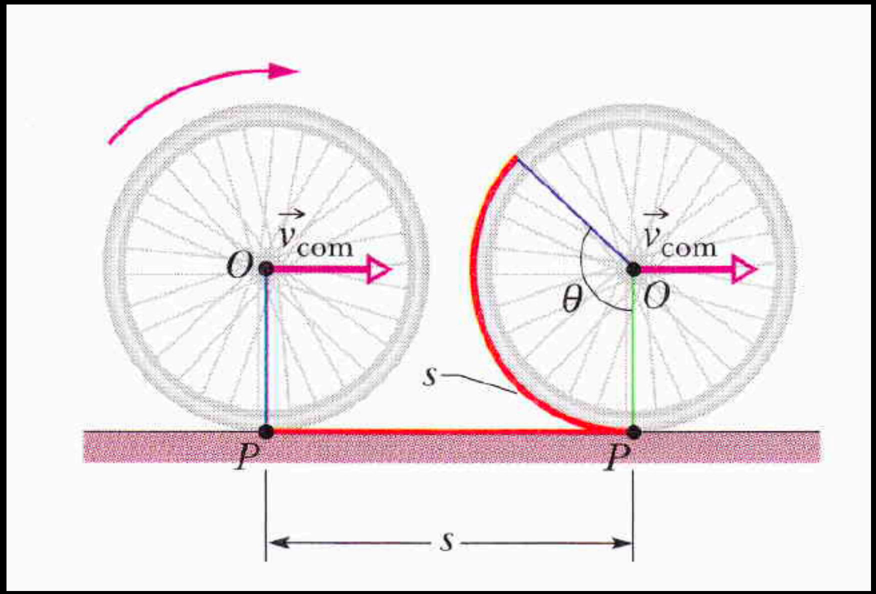


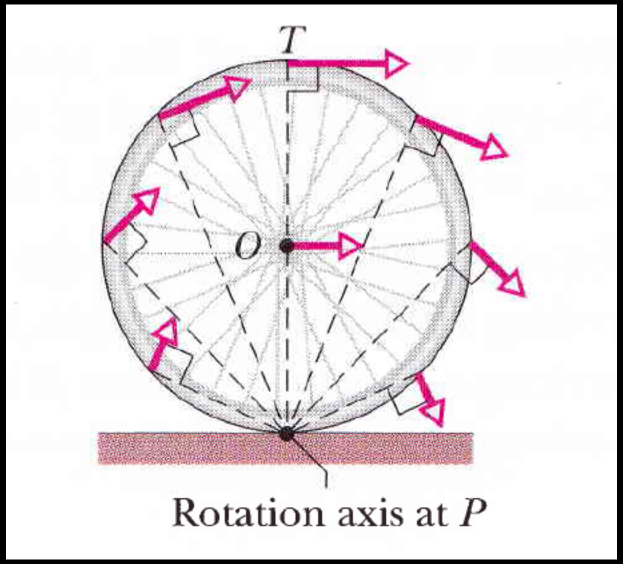


si parte considerando prima che la ruota nel rotolamento ha sempre un punto fisso che poggia a terra e rispetto al quale la velocità del centro di massa è quella di un punto che si muove su una traiettoria circolare $\mathrm{v} = \omega r$

Moti del corpo rigido

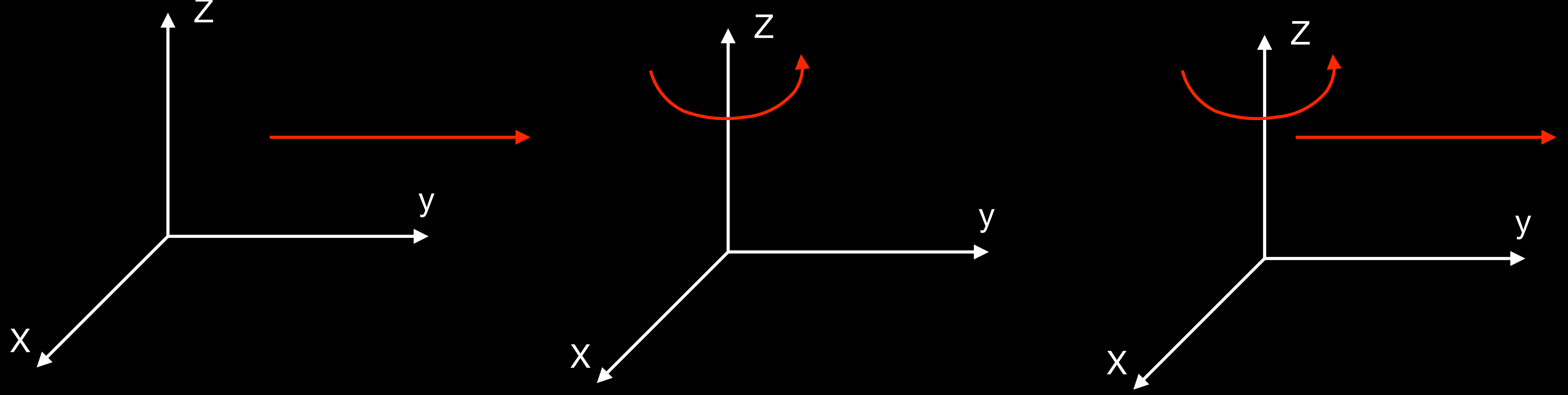


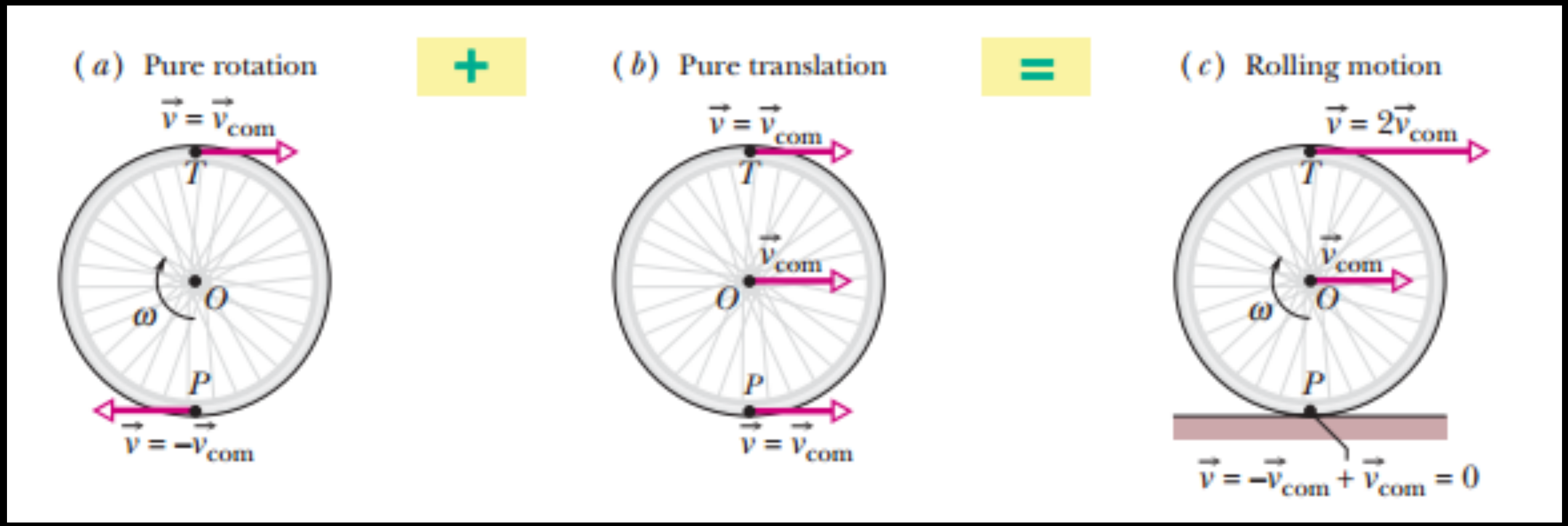




come vedremo questo comporta che il centro di massa avrà una velocità traslazione uguale a v $= \omega r$

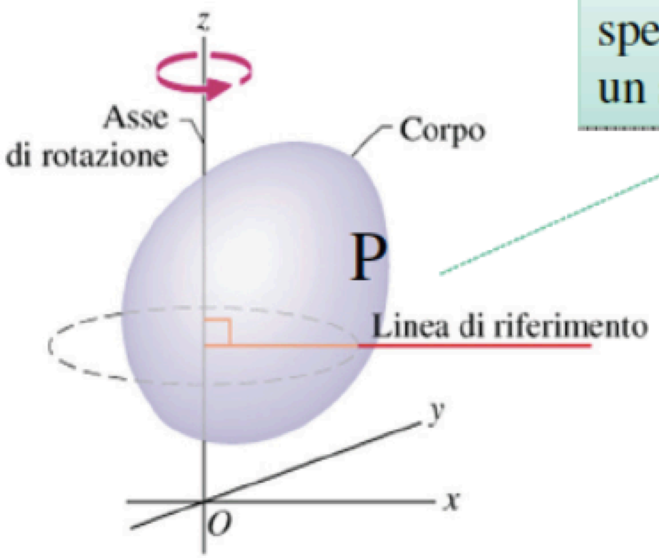
Moti del corpo rigido





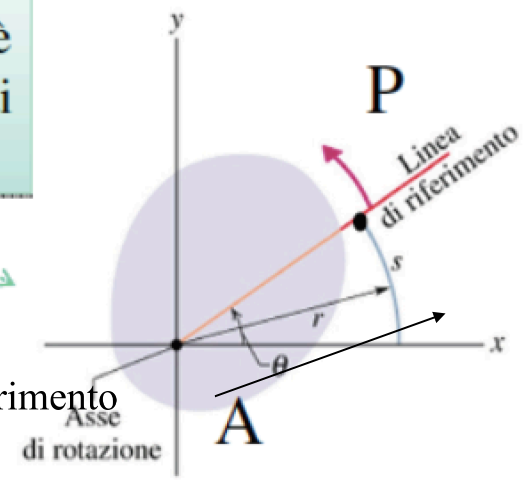
Dimostrazione geometrica

Variabili rotazionali



La posizione del corpo è specificata dalla posizione di un suo elemento P.

2D



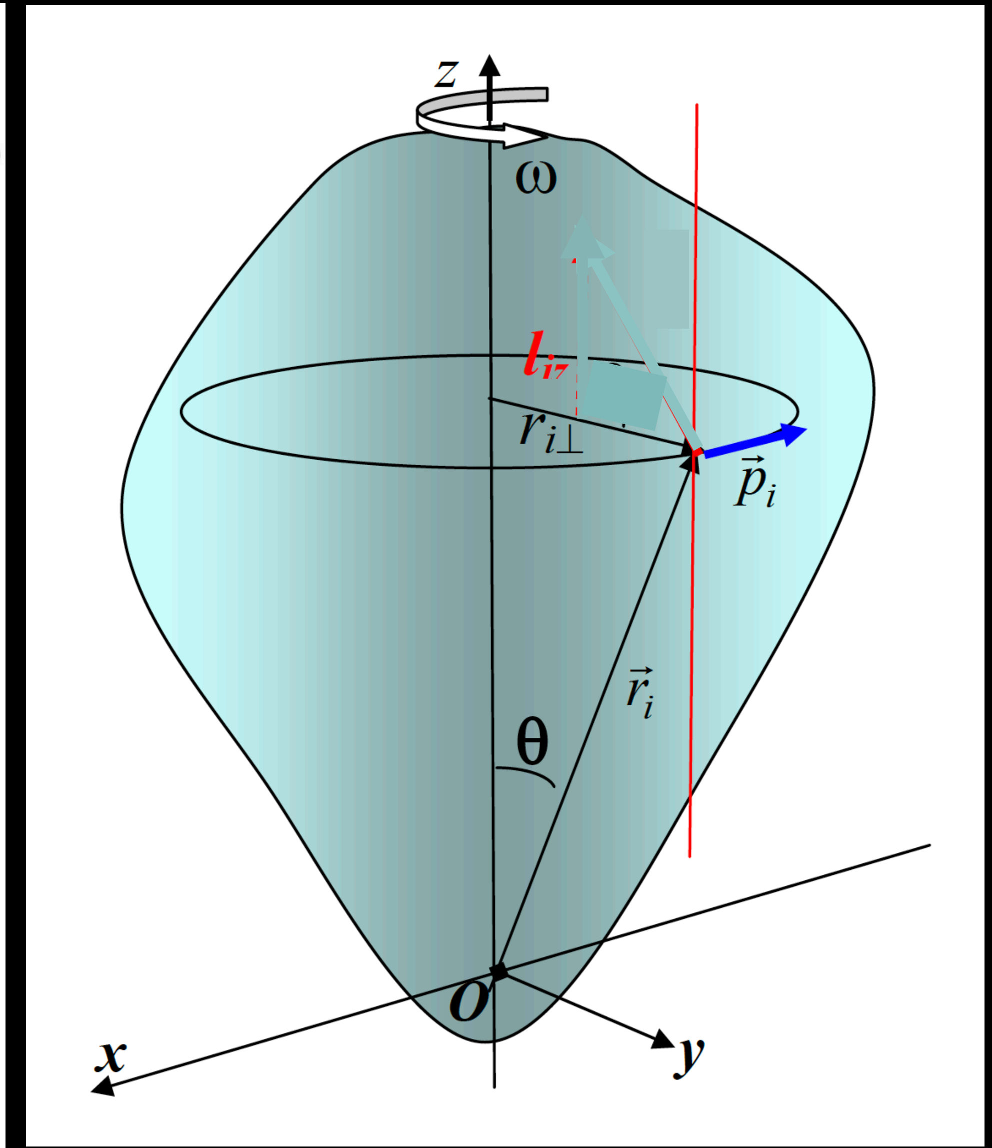
Definisce un piano di riferimento

Moto 2D di un elemento lungo una circonferenza di raggio r (PA). Verso positivo è scelto quello antiorario rispetto al'asse z.

$$\vartheta = \frac{s}{r} \quad \text{radianti}$$

$2\pi\ rad = 360°$
$1\ rad = 57.3°$

θ individua la posizione angolare della linea di riferimento

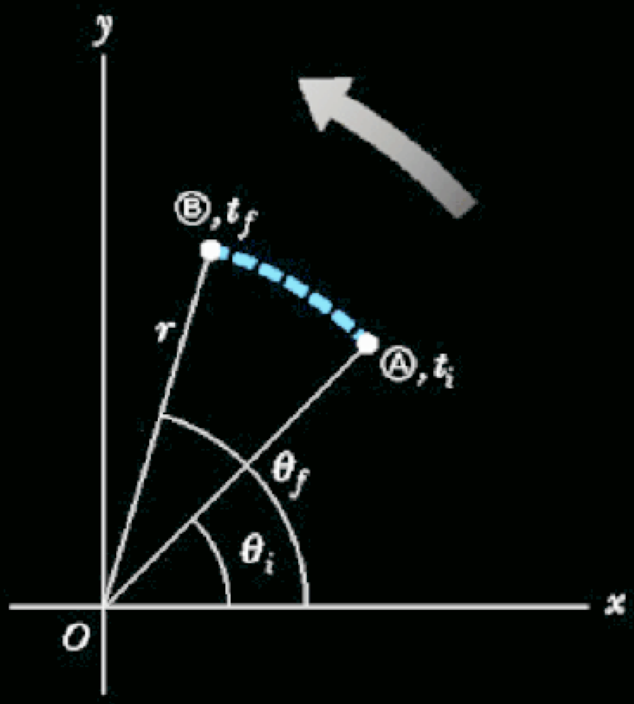


Variabili rotazionali

- Lo spostamento angolare è definito come l'angolo di rotazione dell'oggetto in un intervallo di tempo finito:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

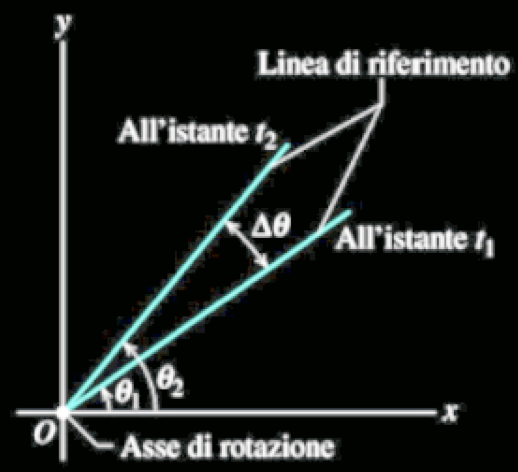
- E' l'angolo spazzato dalla linea di riferimento di lunghezza r



- La velocità angolare *media* $\overline{\omega}$ di un corpo rigido in rotazione è il rapporto fra spostamento angolare e intervallo di tempo:

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Variabili rotazionali



Spostamento angolare: $\Delta\vartheta$

la velocità angolare media: $\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$ *[rad/s]*

la velocità istantanea: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \dfrac{d\vartheta}{dt}$

In un moto puramente rotatorio di un corpo rigido: tutti i suoi elementi hanno la stessa ω.

Se P ha una ω non costante:

accelerazione angolare media: $\overline{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

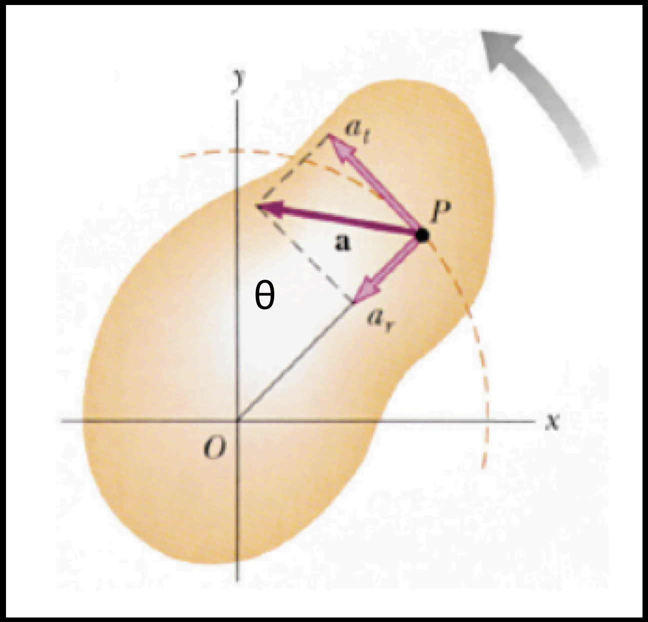
accelerazione istantanea: $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt}$

[rad/s²]

In un moto puramente rotatorio di un corpo rigido: tutti i suoi elementi hanno la stessa α.

Velocità e accelerazione

Un moto rotatorio può essere sempre decomposto in una componente tangenziale ed in un radiale o centripeta



$$\vartheta = \frac{s}{r} \quad \text{radianti}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\ \mathrm{r} \Leftrightarrow \mathrm{v_T} = \omega\ \mathrm{r}$$

Velocità e accelerazione

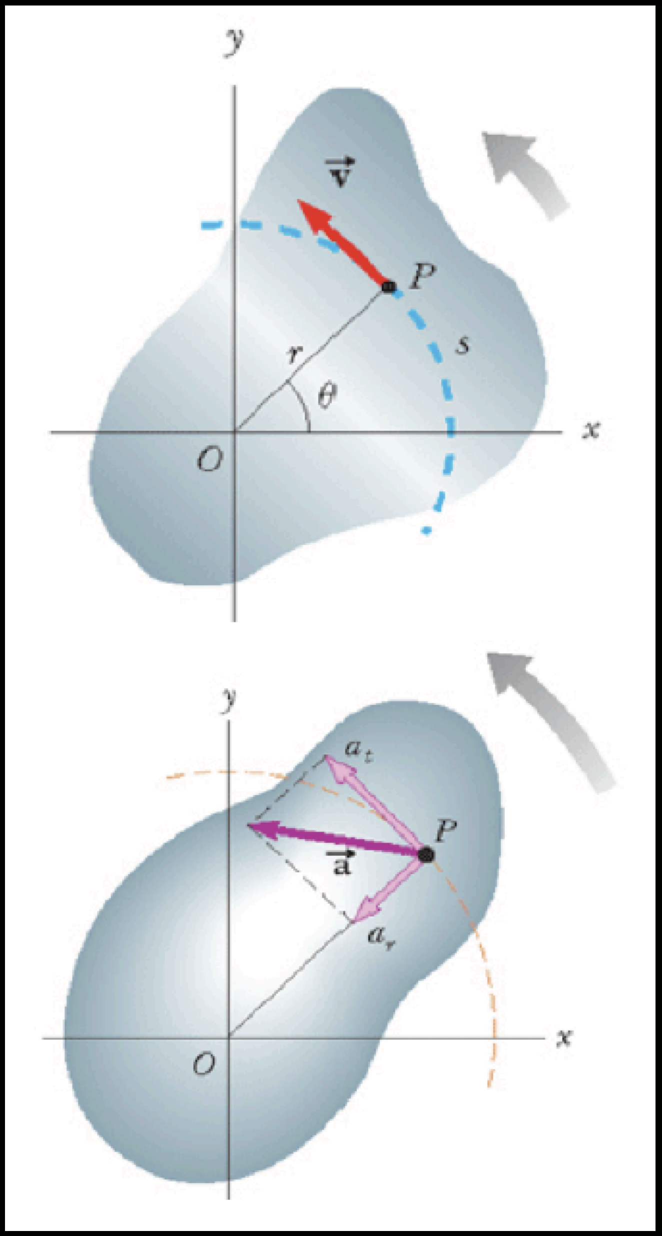
La velocità in un corpo che ruota attorno ad un asse è sempre *tangente* al percorso: $\boxed{v = v_T}$ (velocità tangenziale).
L'accelerazione ha una componente *tangenziale*:

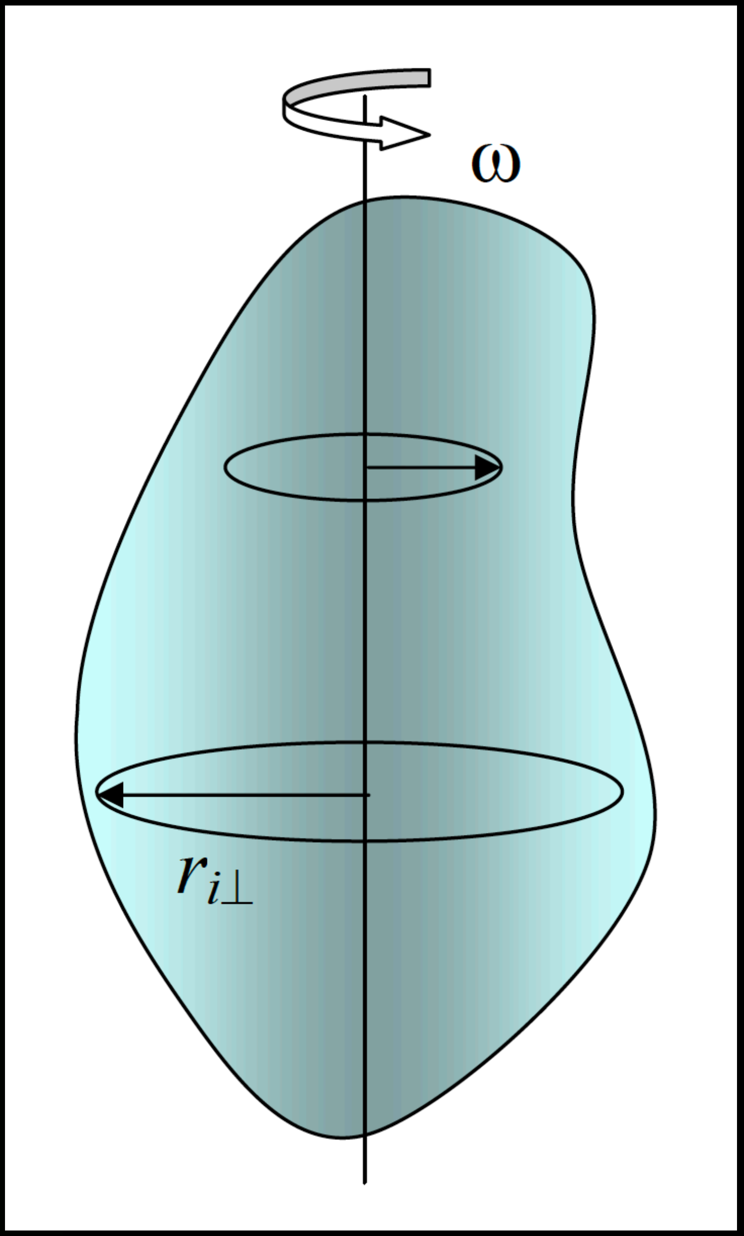
$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\alpha$$

e una radiale, o *centripeta*: dimensioni?

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

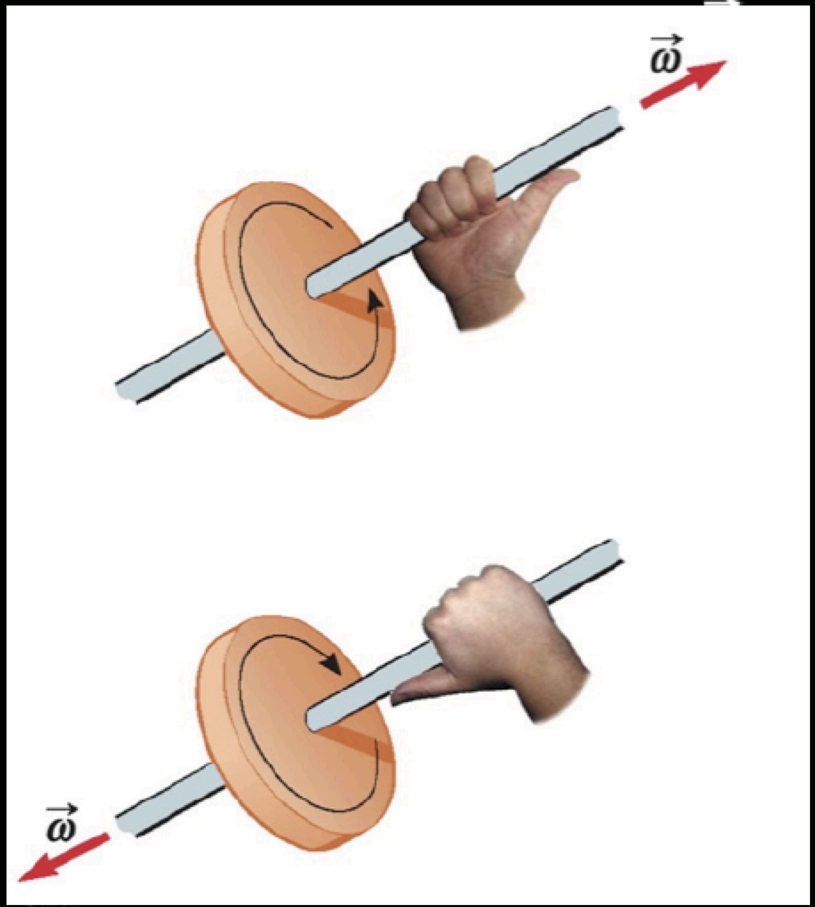
con $|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$





Direzione e verso

- Velocità e accelerazione angolare possono essere definiti come *vettori* $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$, rispettivamente di modulo ω e α, diretti lungo l'asse di rotazione
- Il verso di $\vec{\omega}$ è dato dalla regola della mano destra
- $\vec{\alpha}$ è diretto come $\vec{\omega}$ se la velocità angolare aumenta, in senso opposto se la velocità angolare diminuisce



Con questa definizione, la velocità di un punto del corpo rigido può essere scritta in generale come $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, ovvero $v = \omega r_{\perp}$, dove $r_{\perp}$ è la distanza dall'asse. Questa è l'espressione da usare in tre dimensioni.

Cinematica Rotazionale

Per *accelerazione angolare costante* (in modulo, direzione e verso!) si può descrivere il moto del corpo rigido usando delle equazioni cinematiche: l'analogo rotazionale delle equazioni cinematiche del moto lineare. Matematicamente:

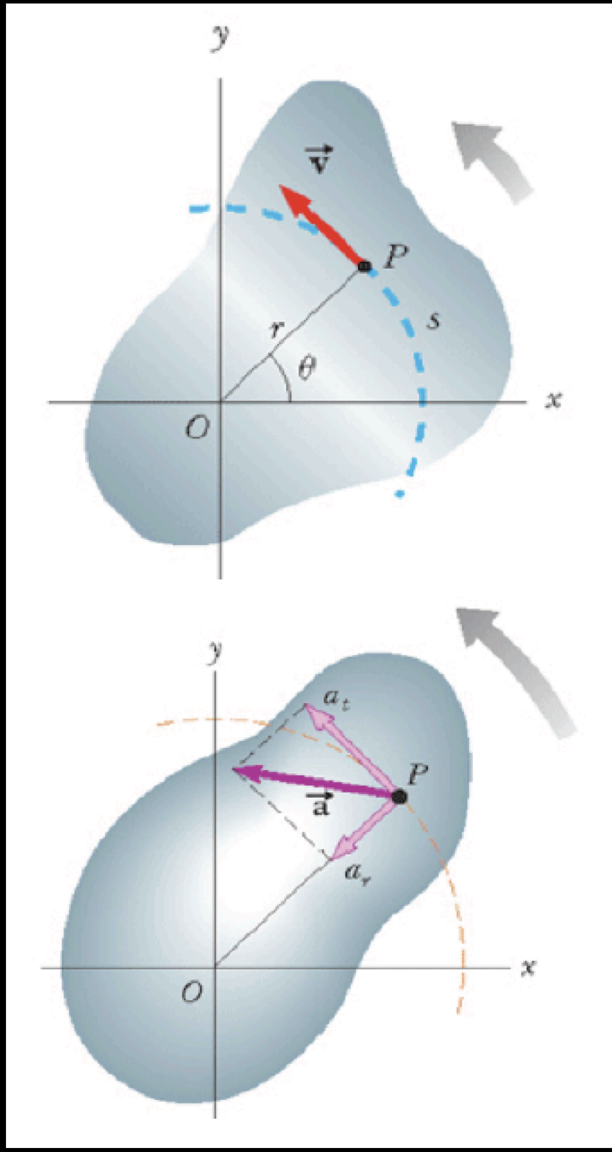
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

La relazione fra quantità lineari ed angolari è semplicemente

$$s(t) = \theta r_\perp \quad , \quad v(t) = \omega r_\perp \quad , \quad a_t = \alpha r_\perp$$

dove a_t è l'accelerazione tangenziale e $r_\perp$ la distanza dall'asse di rotazione (attenzione: non dall'origine!)

Notare che tutti i punti del corpo ruotante hanno lo stesso moto angolare, ma hanno moto lineare differente.



Energia Cinetica Rotazionale

Un corpo ruotante con velocità angolare ω possiede un'energia cinetica *rotazionale*. Ogni particella del corpo ha energia cinetica $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, dove $v_i = \omega r_{\perp i}$. L'energia cinetica rotazionale è la somma di tali energie:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_{\perp i}^2\right)\omega^2 \equiv \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove I è noto come *momento d'inerzia*.

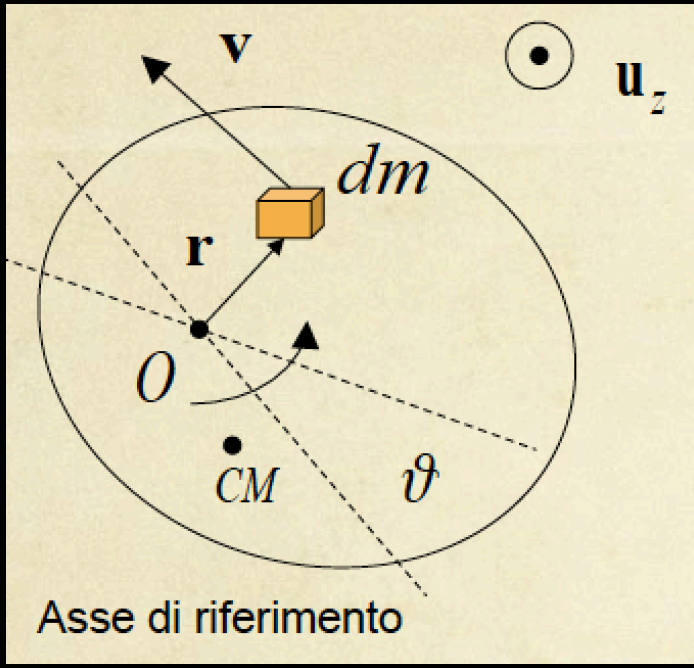
Notare l'analogia fra energie cinetiche associate al moto lineare: $K = \frac{1}{2}mv^2$, e associate al moto rotazionale, $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$.

L'energia cinetica rotazionale non è un nuovo tipo di energia! E' energia cinetica e si misura nelle stesse unità, joule (J)

Momento d'Inerzia

Definizione del momento d'inerzia: $I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$ (Unità SI: kg·m²).

- Il momento d'inerzia *dipende dall'asse di rotazione*! (ma può essere calcolato rispetto a qualunque origine, purché sull'asse di rotazione).



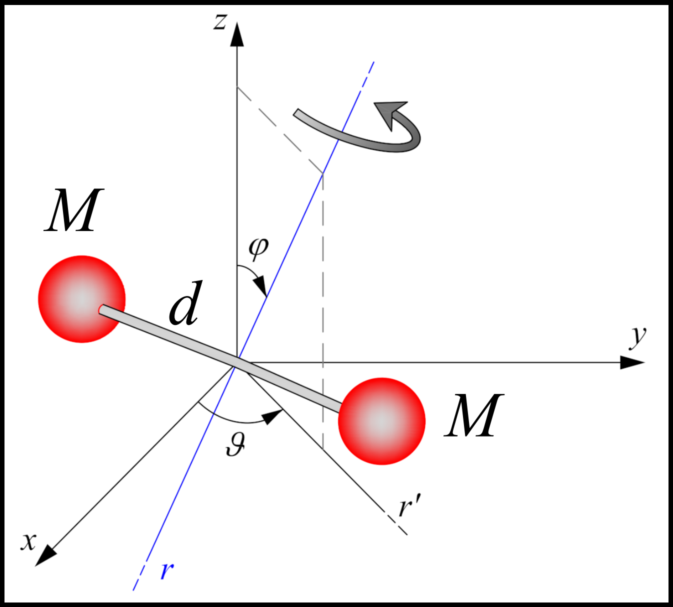
- Si può calcolare il momento d'inerzia di un corpo dividendolo in piccoli elementi di volume, ognuno di massa Δm_i. Nel limite continuo:

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 = \int r_\perp^2 dm.$$

- Come per il centro di massa, tale integrale è in generale complicato, salvo per corpi di densità ρ costante (in tal caso $dm = \rho dV$ e ci si riduce a un integrale di volume), oggetti di forma semplice, asse di rotazione simmetrico.

- Modello di una molecola biatomica omonucleare: due atomi di massa M a distanza d, rispetto ad un asse passante per il centro:

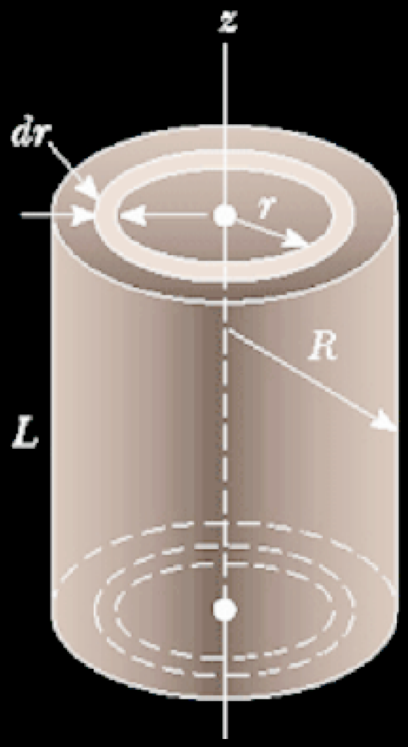
$$I = M\left(\frac{d}{2}\right)^2 + M\left(\frac{-d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}Md^2$$



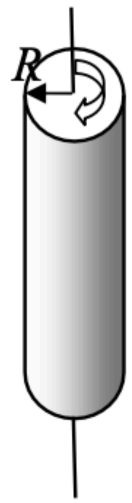
Si può sempre scegliere un sistema gli assi cartesiano in modo da allineare la congiungente delle masse lungo l'asse x del nuovo sistema di riferimento.
Che succede se l'asse è allineato lungo le due masse?

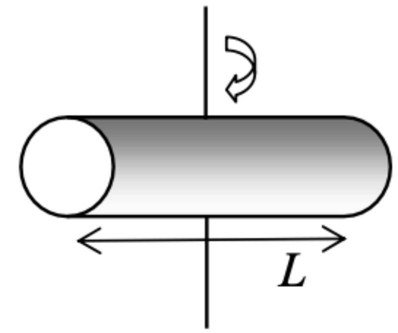
- Momento d'inerzia di un cilindro omogeneo attorno al suo asse: poniamo $\rho = M/(\pi R^2 L)$, $dm = \rho(2\pi r L)dr$.

$$I = \int_0^R r^2 \rho(2\pi r L)dr = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$



Esempio: cilindro retto di massa M, lungo L con base circolare di raggio $R<L$.

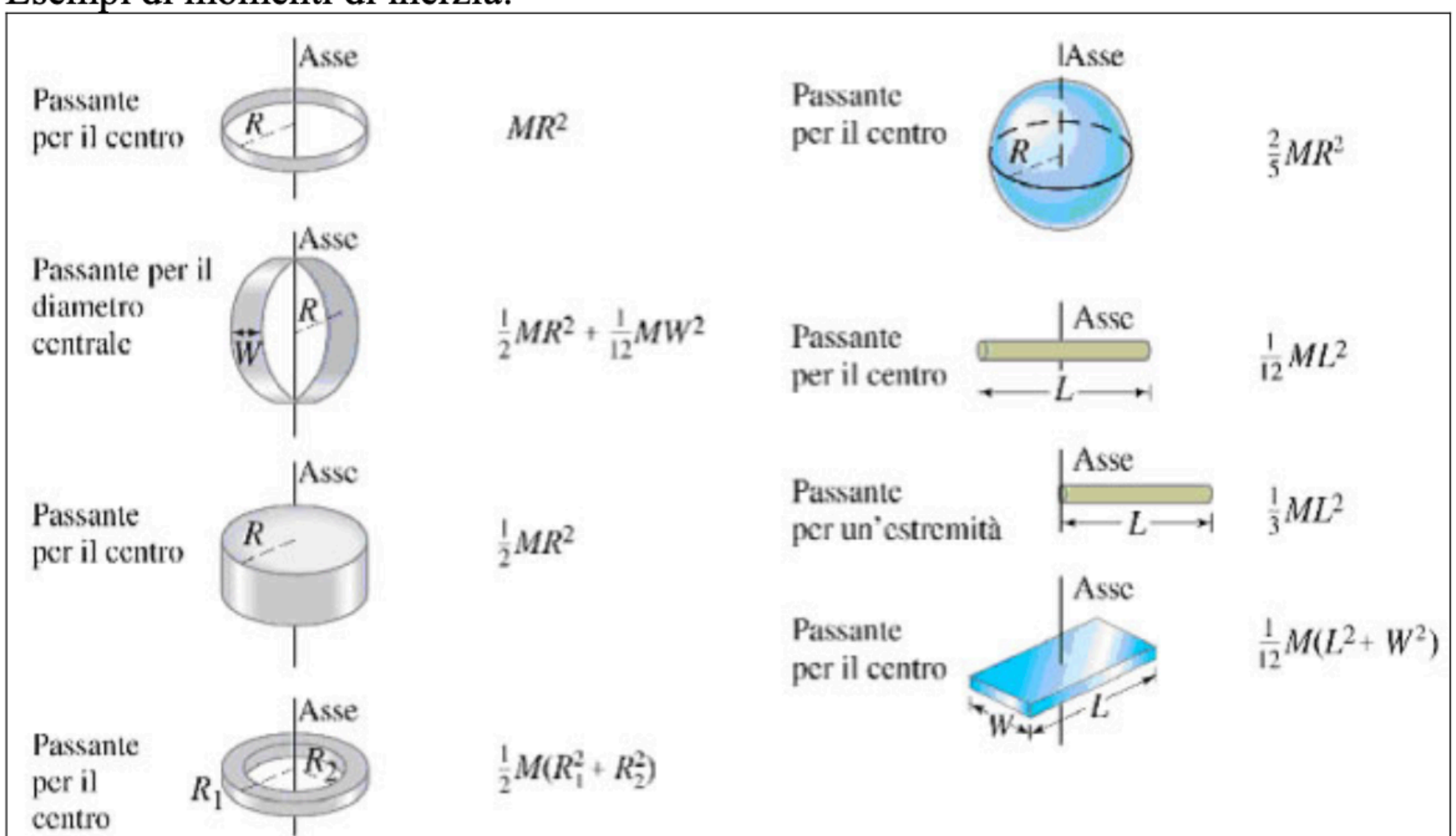




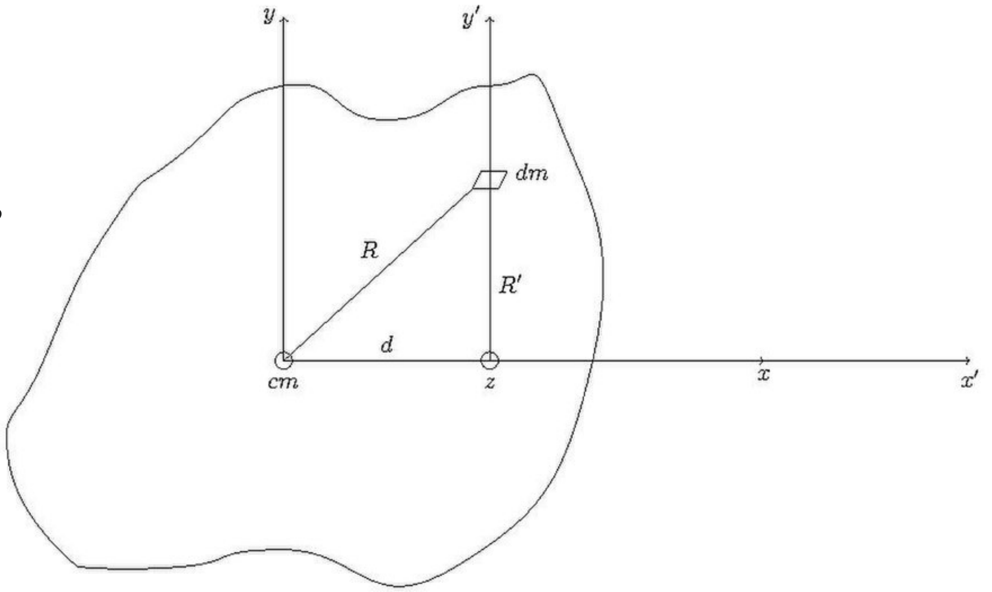
Caso a) $I_a = \frac{1}{2}MR^2$ *Caso b*: $I_b = \frac{1}{12}ML^2$

Poiché la distanza delle m_i dall'asse di rotazione è in media minore nel caso *a)* rispetto al caso *b)*, risulta $I_a < I_b$.

Esempi di momenti di inerzia:



Teorema di Huyghens-Steiner



Si consideri un sistema di riferimento cartesiano xy con l'origine nel centro di massa e un altro sistema di riferimento traslato lungo l'asse x di una certa quantità, in modo che le coordinate siano $y = y'$ e $x = x' - d$, dove d è la distanza tra l'asse passante per il centro di massa e quello parallelo di rotazione (rispetto al quale calcoliamo il momento).

$$I_z = I_{cm} + Md^2$$

Si consideri un elemento infinitesimo dm, il cui momento di inerzia rispetto al centro di massa è dato da $\mathrm{d}I = R^2 \mathrm{d}m$.

Integrando lungo tutto il corpo e considerando questo sistema di riferimento ($R^2 = x^2 + y^2$) si ha che

$$I_{cm} = \int_{\text{corpo}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}m.$$

Ora calcoleremo direttamente il momento di inerzia rispetto al nostro nuovo asse z. Poiché $R'^2 = x'^2 + y'^2$, applicando le trasformazioni nel sistema di riferimento precedente e integrando lungo tutto il corpo si ha

$$I_z = \int_{\text{corpo}} (x'^2 + y'^2)\mathrm{d}m = \int_{\text{corpo}} [(x+d)^2 + y^2]\mathrm{d}m.$$

Sviluppando il quadrato si ottiene $I_z = \int \left(x^2 + d^2 + 2xd + y^2\right) \mathrm{d}m$ e, raccogliendo, si ha

$$I_z = \int_{\text{corpo}} [x^2 + y^2]\mathrm{d}m + d^2 \int_{\text{corpo}} \mathrm{d}m + 2d \int_{\text{corpo}} x \,\mathrm{d}m.$$

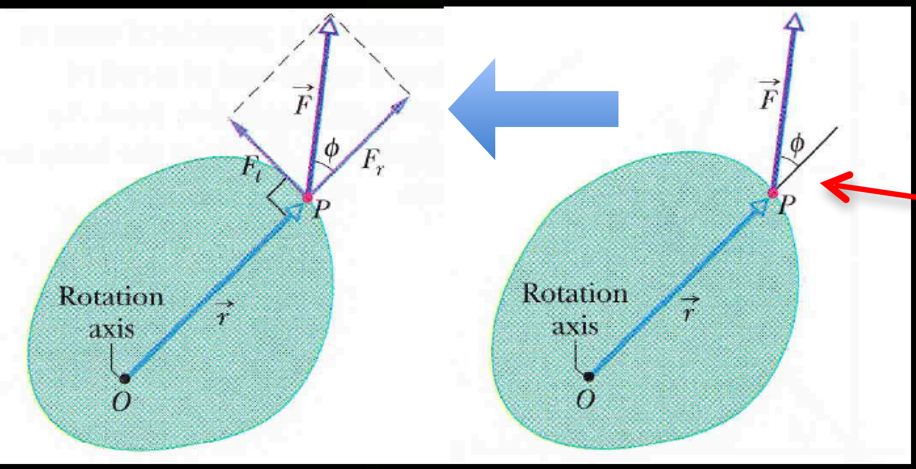
coordinata x del centro di massa nel sistema del centro di massa = 0

Il primo termine è proprio il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa I_{cm}. Il secondo termine è pari alla quantità Md^2, mentre il terzo termine è nullo. Si ottiene quindi il risultato finale: $I_z = I_{cm} + Md^2$

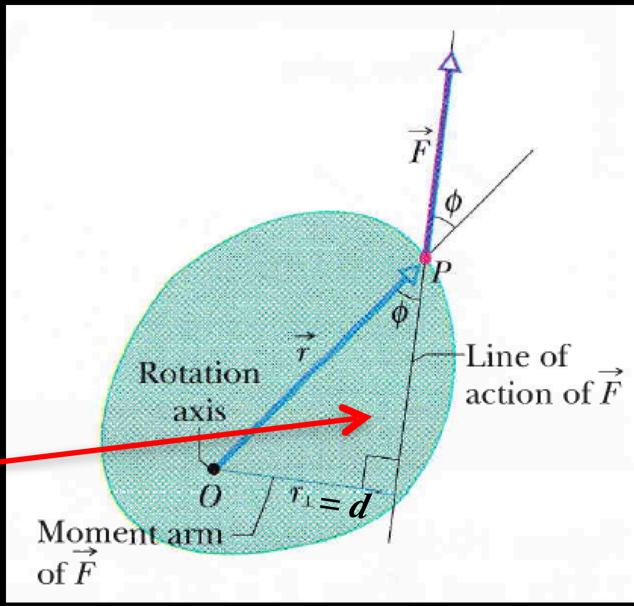
Momento della forza

Se è la forza che cambia il moto, cos'è che cambia la rotazione?

- *Momento, $\vec{\tau}$, di una forza, $\vec{F}$*: è un vettore definito come $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$.
- Il momento di una forza *dipende dall'origine* e *dal punto ove la forza è applicata*! (tipicamente, l'origine è scelta su di una asse di rotazione)

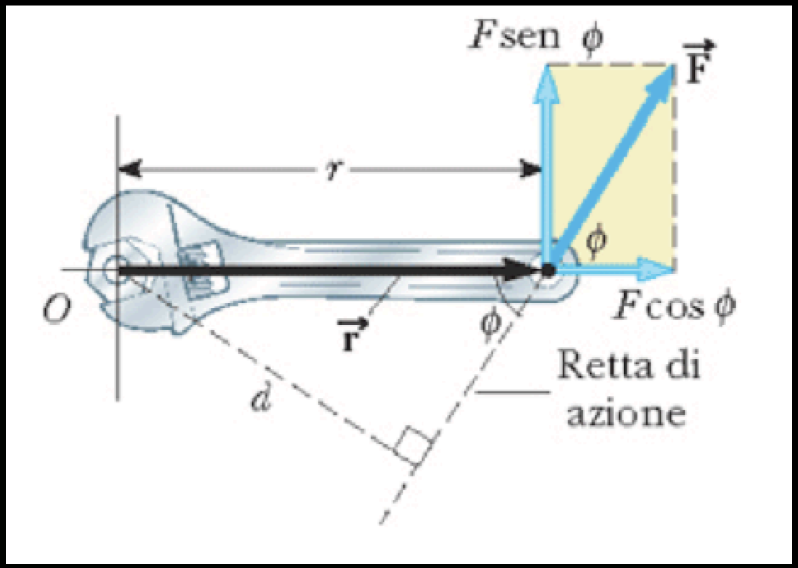


- ϕ è l'angolo fra la forza $\vec{F}$ e il vettore $\vec{r}$ fra l'origine e il punto di applicazione della forza
- $\tau = rF\sin\phi = dF$ dove $d = r\sin\phi$ è il *braccio del momento* o della leva



Momento della forza

- Il momento della forza ci dà la "tendenza" di una forza a far ruotare un corpo (attorno ad un certo asse).



- Solo la componente della forza ortogonale a $\vec{r}$ *produce momento*, ovvero tende a far ruotare un corpo

- La componente lungo $\vec{r}$ della forza *non produce momento*, ovvero non tende a far ruotare un corpo

- Il momento è *positivo* se la rotazione indotta è *antioraria*

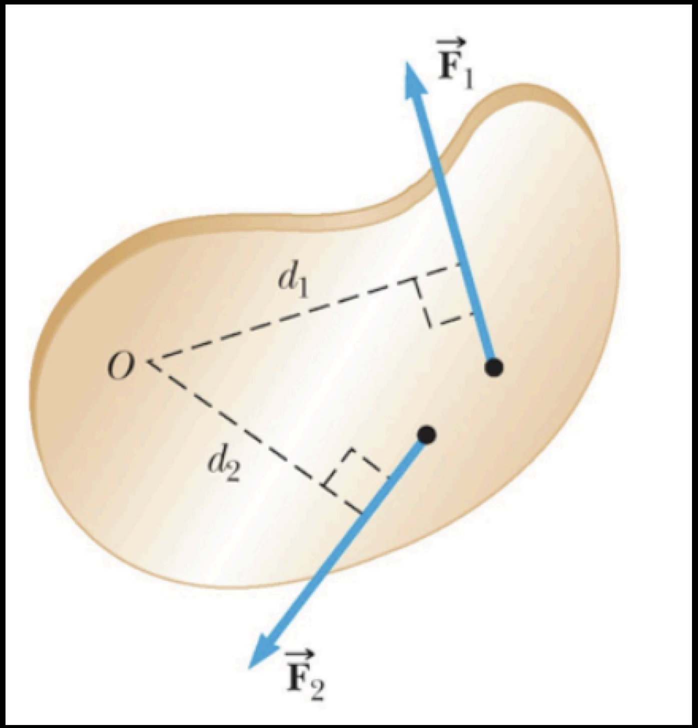
Unità SI del momento: N·m. Attenzione: benché il momento sia una forza moltiplicata per una distanza, è molto diverso da lavoro ed energia! Il momento non si indica *mai* in Joule.

Equilibrio di un corpo rigido

Il momento totale (o risultante) è la *somma vettoriale* dei momenti.

- Nell'esempio accanto, la forza $\vec{F}_1$ tenderà a causare una rotazione antioraria del corpo; la forza $\vec{F}_2$ tenderà a causare una rotazione oraria del corpo.

- $\tau = |\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2| = (d_1 F_1 - d_2 F_2)$; il [redacted]



Come si compongono i momenti ? In altre parole dov'e' diretto il vettore **τ?**

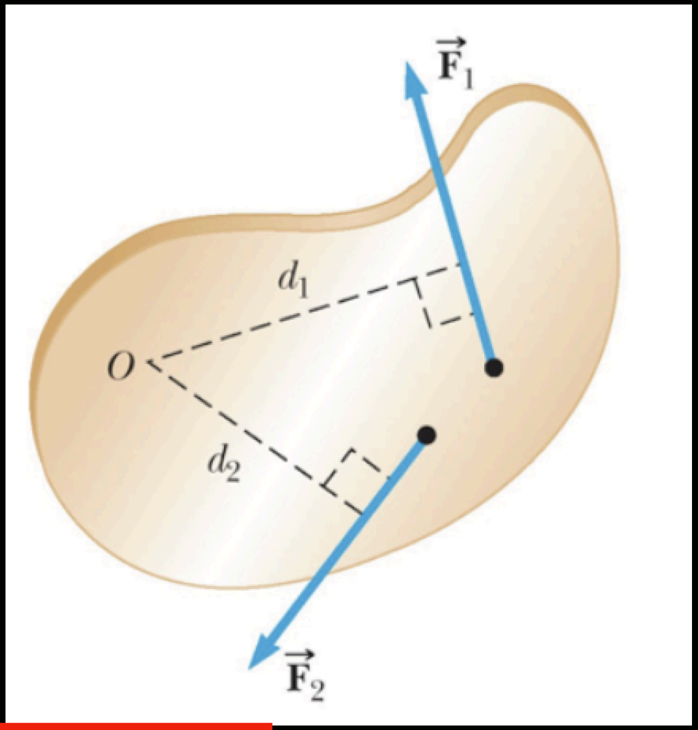
Condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Equilibrio di un corpo rigido

Il momento totale (o risultante) è la *somma vettoriale* dei momenti.

- Nell'esempio accanto, la forza $\vec{F}_1$ tenderà a causare una rotazione antioraria del corpo; la forza $\vec{F}_2$ tenderà a causare una rotazione oraria del corpo.
- $\tau = |\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2| = (d_1 F_1 - d_2 F_2)$; il vettore $\vec{\tau}$ è ortogonale al piano.



Come si compongono i momenti ? In altre parole dov'e' diretto il vettore **τ?**

Condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Momento Angolare

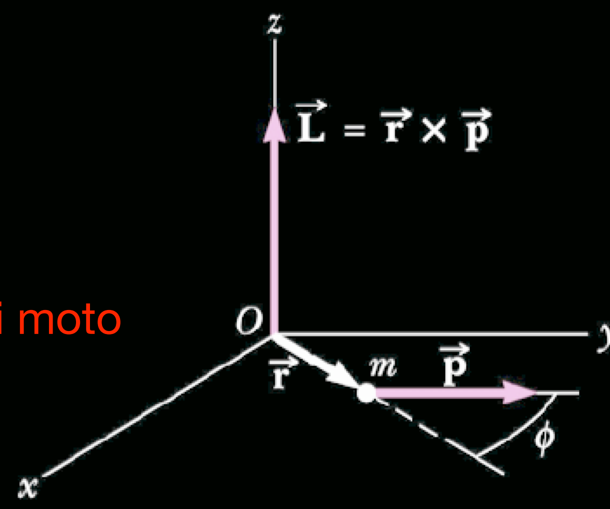
Se il momento è l'analogo rotazionale della forza, qual è l'analogo rotazionale della quantità di moto?

Momento angolare: è un vettore, di solito indicato con $\vec{L}$, definito come

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Il momento angolare e' l'analogo rotazionale della quantita' di moto

dove $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto di una particella.



- E' noto anche come *momento della quantità di moto*
- Il suo valore dipende dalla scelta dell'origine
- E' nullo se $\vec{r} \parallel \vec{p}$, ha modulo $L = rp \sin\phi$, dove ϕ è l'angolo fra $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

Equazioni del Momento Angolare

Dalla II legge di Newton, scelta un'origine, troviamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Quindi, $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$, analogo rotazionale della II Legge di Newton.

- Non è una nuova legge fondamentale della dinamica! E' la II legge di Newton, specializzata al caso del moto rotatorio
- $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$ sono calcolati rispetto agli stessi assi e alla stessa origine fissa; tuttavia la legge vale qualunque siano gli assi e l'origine scelta
- Valido per sistemi di riferimento inerziali.

Momento Angolare di un sistema di particelle

Il momento angolare di un sistema di particelle è la somma vettoriale dei momenti angolari di ogni particella:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

Differenziando rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{tot}$$

dove $\vec{\tau}_{tot}$ è il momento totale delle forze. Analogamente al caso della quantità di moto, solo il momento delle forze *esterne* è responsabile per la variazione del momento angolare!

Per un corpo rigido, il momento angolare totale diventa un integrale.

Momento Angolare di un corpo rigido

Consideriamo un caso semplice: disco ruotante con velocità angolare ω

$$L = \sum L_i = \sum_i m_i v_i r_{\perp i} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \omega \equiv I\omega$$

dove I è il momento d'inerzia del disco (attorno all'asse di rotazione). Si può dimostrare che tale relazione ha validità generale e può essere scritta sotto forma vettoriale: $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$. Questa è l'analogo rotazionale della relazione fra velocità e quantità di moto.

La relazione fra momento e accelerazione angolare:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

valida per asse di rotazione fisso, è l'analogo rotazionale di $\vec{F} = m\vec{a}$.

Conservazione del MA

Il momento angolare di un corpo, o di un sistema di particelle, è *conservato* se la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla:

$$\vec{L} = \text{costante} \Longrightarrow \vec{L}_f = \vec{L}_i$$

durante un processo in cui non agiscano momenti esterni.

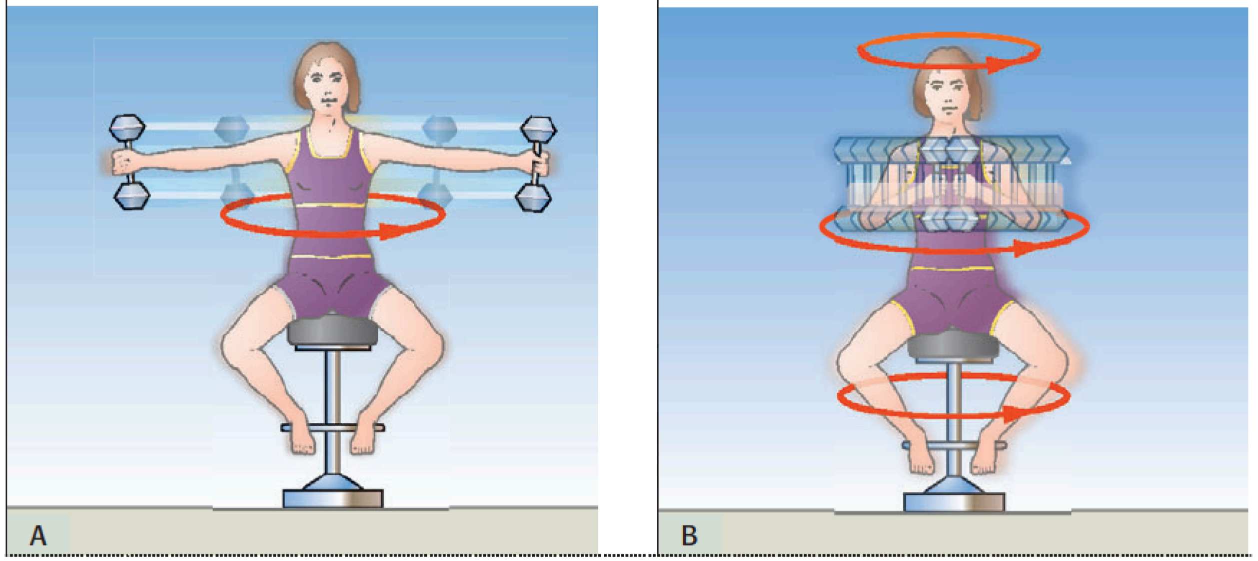
Ciò rimane vero anche se la massa si ridistribuisce e il momento d'inerzia cambia durante il processo. Se l'asse di rotazione rimane fisso, vale la relazione:

$$L = I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

dove $I_{i,f}$ sono i momenti d'inerzia iniziale e finale, $\omega_{i,f}$ le velocità angolari iniziale e finale. Se $I_f > I_I$, allora $\omega_f < \omega_i$ e viceversa.

▶ Una ragazza che regge due manubri da palestra con le braccia aperte siede su uno sgabello, girevole attorno a un asse, e ruota con una certa velocità angolare.

▶ Se stringe le braccia, il suo momento angolare *rmv* si conserva (se gli attriti sono trascurabili). Visto che *r* diminuisce, la velocità *v* delle varie parti aumenta.



$$L = \sum L_i = \sum_i m_i v_i r_{\perp i} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \omega \equiv I\omega$$

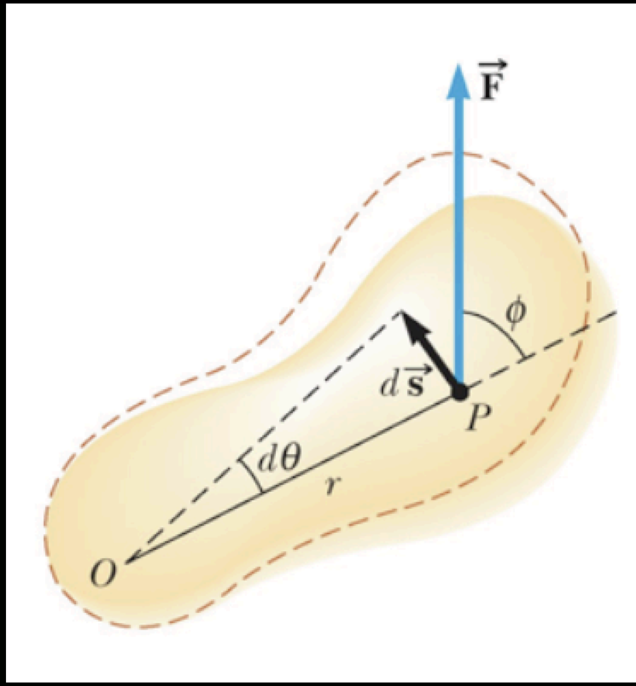
In questo esempio, il momento angolare si conserva perché il momento totale delle forze esterne rispetto a qualsiasi punto è nullo. In assenza di attriti, una volta messo in rotazione lo sgabello, le uniche forze esterne che agiscono sulla ragazza sono la sua forza-peso e la reazione vincolare dello sgabello, che si annullano.

Lavoro del moto rotazionale

Qual è il lavoro (W) fatto da una forza su di un corpo che sta ruotando?

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin\phi)(r d\theta) = \tau d\theta$$

sinϕ = cos (90-ϕ)



La componente radiale della forza, $F\cos\phi$, non fa lavoro perché ortogonale allo spostamento

Teorema dell'energia cinetica, versione "rotazionale":

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \overset{\tau = I\alpha}{=} \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \Delta K_R \quad , \quad K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$$

In presenza di traslazioni e rotazioni: $\boxed{W = \Delta K + \Delta K_R}$.

Potenza del moto rotazionale

Il lavoro fatto per unità di tempo è detto *potenza*:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega.$$

Questo è l'analogo di $P = Fv$ per il moto rotatorio.

Riassunto del moto rotazionale

	Moto di traslazione	Moto rotatorio (attorno ad un asse fisso)
Massa	m	I
velocità	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
accelerazione	$\vec{a}$	$\overrightarrow{\varpi}$
Quantità di moto	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Energia cinetica	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
Equilibrio	$\sum \vec{F} = 0$	$\sum \vec{\tau} = 0$
II Legge di Newton	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
alternativamente	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Legge di conservazione	$\vec{p}$ =costante	$\vec{L}$ =costante
Potenza	$P = Fv$	$\mathcal{P} = \tau\omega$

Riassunto leggi di conservazione

Per un sistema isolato (non sottoposto a forze esterne) valgono:

1. Conservazione dell'energia cinetica, $K_f = K_i$
2. Conservazione della quantità di moto, $\vec{p}_f = \vec{p}_i$
3. Conservazione del momento angolare, $\vec{L}_f = \vec{L}_i$

Per sistemi sotto forze conservative: conservazione dell'energia meccanica, $E_f = K_f + U_f = K_i + U_i = E_i$.