Cognome Nome Matricola

Analisi Matematica I
Corsi di Laurea in Ingegneria Informatica e Ingegneria dell'Automazione
Prima prova in itinere – 10 novembre 2023
Versione A

Scrivere uno svolgimento completo per ogni esercizio

1. Determinare l'insieme di definizione D della funzione

$$f(x) = \frac{\log(3 - x + \sqrt{x+3})}{2 - \sqrt{2^x - 4}}$$

$$D: \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 3 - x + \sqrt{x+3} > 0 \\ 2^x - 4 \geq 0 \\ 2 - \sqrt{2^x-4} \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{x+3} > x-3 \\ 2^x \geq 4 = 2^2 \\ \sqrt{2^x-4} \neq 2 = \sqrt{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3 \\ -3 \leq x < 6 \\ x \geq 2 \\ 2^x \neq 4+4 = 8 = 2^3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \leq x < 6 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} > x-3 \iff \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x+3 > (x-3)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 6 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 < x < 6 \end{cases} \vee \quad -3 \leq x < 3$$

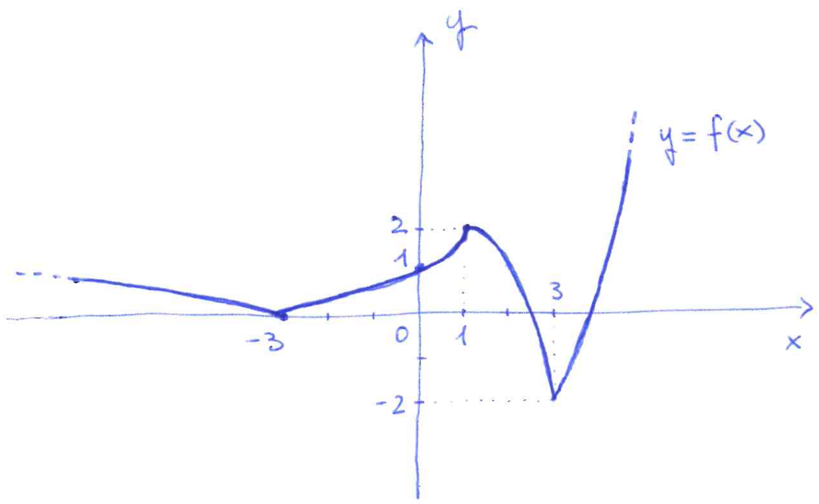
$$\iff 3 \leq x < 6 \quad \vee \quad -3 \leq x < 3$$

$$\iff -3 \leq x < 6$$

L'insieme di definizione è $D = [2,3) \cup (3,6)$.

2. Tracciare il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} |2 - \sqrt{1-x}| & \text{se } x < 1 \\ x|3-x| - x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



3. a) Calcolare

$$A = \lim_{n\to+\infty} (n - \sqrt{n^2 - 4n})$$

b) Calcolare quindi il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n - 3^n \cdot \log(\frac{n+1}{n+2})}{n^2 + A^n - \cos(n/2)}$$

a) $A = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n-\sqrt{n^2-4n})(n+\sqrt{n^2-4n})}{n+\sqrt{n^2-4n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-(n^2-4n)}{n+\sqrt{n^2-4n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}\underbrace{(1+\sqrt{1-\frac{4}{n}})}_{2}} = \frac{4}{2} = 2$

b) Osservo che $\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \sim -\frac{1}{n+2} \sim -\frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$.

Poiché $A=2$, il limite da calcolare è

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n - 3^n \cdot \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{n^2 + 2^n - \cos\left(\frac{n}{2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3^n \cdot \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left[1 - \frac{n}{3^n \cdot \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}\right]}{2^n \cdot \left[1 + \frac{n^2}{2^n} - \frac{\cos(n/2)}{2^n}\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3^n \cdot \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n \cdot \frac{1}{n}}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n} = +\infty$$ per gerarchia degli infiniti,

dove nel secondo passaggio si è usato il fatto che entrambi i termini in parentesi quadre tendono a 1 per $n \to +\infty$, poiché:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n \cdot \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)} = -\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ per gerarchia degli infiniti
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ per gerarchia degli infiniti
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n/2)}{2^n} = 0$ poiché limite del prodotto di successione limitata $\left\{\cos\left(\frac{n}{2}\right)\right\}$ e successione infinitesima $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

4. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+n}-n^2}{\log(2n^3-1)-\log(2n^3+n^2)}$$

Determino comportamento asintotico di numeratore e denominatore:

- $$\sqrt{n^4+n}-n^2 = \frac{(\sqrt{n^4+n}-n^2)(\sqrt{n^4+n}+n^2)}{\sqrt{n^4+n}+n^2} = \frac{\cancel{n^4}+n-\cancel{n^4}}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+1\right)} = \frac{1}{n\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+1\right)}_{\downarrow\ 2 \text{ per } n\to+\infty}} \sim \frac{1}{2n}$$

- $$\log(2n^3-1)-\log(2n^3+n^2) = \log\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+n^2}\right) = \log\left(1+\frac{2n^3-1}{2n^3+n^2}-1\right) = \log\left(1-\frac{n^2+1}{2n^3+n^2}\right) \sim$$
$$\sim -\frac{n^2+1}{2n^3+n^2} = -\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2n^3\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \sim -\frac{n^2}{2n^3} = -\frac{1}{2n}$$

Per principio di sostituzione degli asintotici in quozienti e prodotti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+n}-n^2}{\log(2n^3-1)-\log(2n^3+n^2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n}}{-\frac{1}{2n}} = -1.$$

5. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \sin\left(\frac{n}{4^{\sqrt{n}}}\right)$$

Per $n\to+\infty$ si ha $\frac{n}{4^{\sqrt{n}}} = \frac{(\sqrt{n})^2}{4^{\sqrt{n}}} \longrightarrow 0$ per gerarchia degli infiniti, dunque $\sin\left(\frac{n}{4^{\sqrt{n}}}\right) \sim \frac{n}{4^{\sqrt{n}}}$ per $n\to+\infty$. Allora il termine generale della serie soddisfa $\lim_{n\to+\infty} 2^n\cdot\sin\left(\frac{n}{4^{\sqrt{n}}}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2^n\cdot\frac{n}{4^{\sqrt{n}}} = +\infty$.

(dove la validità di $\lim_{n\to+\infty} 2^n\cdot\frac{n}{4^{\sqrt{n}}} = +\infty$ si deduce, per esempio, dal test della radice per successioni osservando che $\sqrt[n]{2^n\cdot\frac{n}{4^{\sqrt{n}}}} = 2\cdot\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{4^{\sqrt{n}}}} = 2\cdot\frac{\sqrt[n]{n}}{4^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \longrightarrow 2>1$,

oppure scrivendo $2^n\cdot\frac{n}{4^{\sqrt{n}}} = \frac{2^n\cdot n}{2^{2\sqrt{n}}} = 2^{n-2\sqrt{n}}\cdot n$ e notando che

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n-2\sqrt{n}} = 2^{+\infty} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 2^{n-2\sqrt{n}}\cdot n = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.)

In particolare, il termine generale della serie non tende a 0, dunque la serie non può essere convergente. Essendo una serie a termini positivi, concludo che è necessariamente $\boxed{\text{divergente a } +\infty.}$

6. Svolgere **uno a scelta** tra i seguenti due esercizi:

a) Determinare per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+1}{n \cdot x^n}$$

b) Determinare per quali valori del parametro $b \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{1+n^b}$$

a) Pongo $a_n = \dfrac{3^n+1}{n \cdot x^n}$. Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^n+1}{n \cdot |x|^n}} = \frac{\sqrt[n]{3^n} \cdot \sqrt[n]{1+\frac{1}{3^n}}}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|x|^n}} = \frac{3}{|x|} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{3^n}}}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow \frac{3}{|x|} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{|x|} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

- Se $\frac{3}{|x|} < 1$, cioè $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge per il test della radice, cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, e quindi convergente.
- Se $\frac{3}{|x|} > 1$, cioè $x \in (-3,3) \setminus \{0\}$, allora $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$ per il test della radice per successioni, quindi in particolare $|a_n|$ non tende a 0 per $n \to +\infty$. Di conseguenza, a_n non tende a 0 per $n \to +\infty$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge poiché non è verificata la condizione necessaria di convergenza.
- Se $\frac{3}{|x|} = 1$, cioè $x = 3$ o $x = -3$, il test della radice non dà conclusioni.
  - -) Se $x = 3$ allora $a_n = \dfrac{3^n+1}{n \cdot 3^n} = \dfrac{1+\frac{1}{3^n}}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ per $n \to +\infty$. Poiché $a_n \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, si conclude che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge per confronto asintotico.
  - -) Se $x = -3$ allora $a_n = \dfrac{3^n+1}{n \cdot (-3)^n} = (-1)^n \cdot \dfrac{3^n+1}{n \cdot 3^n} = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{3^n}\right)$. La serie è a segni alterni. La successione $\left\{\frac{1}{n} \cdot \left(1+\frac{1}{3^n}\right)\right\}$ è monotona decrescente (poiché $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3^n}$ per ogni $n \geq 1$), e tende a 0 per $n \to +\infty$, quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge per il teorema di Leibniz.

In conclusione, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\boxed{x \in (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)}$

b) Pongo $b_n = \frac{\tan(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{1+n^b}$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è a termini positivi.

Determino il carattere asintotico del termine generale.

- $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ per $n \to +\infty$,

  per cui in particolare $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \to 0$ e vale

  $\tan(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \sim \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ per $n \to +\infty$

- $1+n^b$ è asintotico a n^b se $b>0$, tende a 1 se $b<0$, è costantemente uguale a 2 se $b=0$:

$$1+n^b \begin{cases} \sim n^b & \text{se } b>0 \\ = 2 & \text{se } b=0 \\ \to 1 & \text{se } b<0 \end{cases}$$

Dunque vale

$$b_n = \frac{\tan(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{1+n^b} \sim \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{n}\cdot n^b} = \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}+b}} & \text{se } b>0 \\ \frac{1}{4\sqrt{n}} & \text{se } b=0 \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & \text{se } b<0 \end{cases}$$

per $n \to +\infty$. La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ converge se $a>1$ e diverge se $a \leq 1$, dunque:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}}$ diverge, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\cdot n^{\frac{1}{2}+b}}$ converge se e solo se $\frac{1}{2}+b>1$, cioè $b>\frac{1}{2}$.

In conclusione, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge (per confronto asintotico) per $\boxed{b>\frac{1}{2}}$

(e diverge a $+\infty$ per tutti gli altri valori di b).