UNICITÀ DEL LIMITE

Se la successione $a_n \to a$ allora tale successione è unica

Se a_n è regolare allora $\exists ! \, l \in a_n$

DIM P.A

Poste le successioni $a_n \to a$ e $b_n \to b$ con $a \neq b$ potremmo dire che:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_1$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_2 : |b_n - b| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_2$

Posto $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\} \;\; \forall n > \nu$:

$|a - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon$

Posto $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ avremo che $|a-b| < |a-b|$

PERMANENZA DEL SEGNO

Se la successione $a_n \to a > 0$ allora anche $a_n > 0$

DIM

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu$

$|a_n - a| < \varepsilon = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Posto $\varepsilon = \frac{a}{2}$ otteniamo:

$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2} a$ per cui $a_n > \frac{a}{2} > 0$

da qui 2 corollari

corollario 1| Se la successione $a_n \to a$ e $a_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ allora anche $a \geq 0$

corollario 2| Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ con $a_n \geq b_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ allora anche $a_n \geq b_n$

TEOREMA DEI CARABINIERI

Se $a_n \to a$ e $b_n \to a$ allora $\exists c_n : a_n \leq c_n \leq b_n$

DIM

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_1$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_2$

Posto $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ associato a quello che so dall'enunciato avrò: $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a - \varepsilon$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu : |c_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu$

TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTONE

1. Se a_n é monotone => a_n é regolare
2. Se a_n é monotona limitata => a_n é convergente

DIM

1. Sia a_n crescente per cui $\forall n > \nu \quad a_n \geq a_\nu$

   a_n non é limitata => $\forall M > 0 \ \exists \nu : a_\nu > M$ per cui

   $a_n \geq a_\nu > M \Rightarrow a_n > M \Rightarrow a_n \to +\infty$

2. Sia a_n crescente per cui $\forall n > \nu \quad a_n \geq a_\nu$

   a_n é limitata => $\exists l =$ supp di a_n per cui $l - \varepsilon < a_n$ quindi:

   $l - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq l < l + \varepsilon$ quindi:

   $|a_n - l| < \varepsilon$

TEOREMA DI COUCHY

Se la successione é di Couchy => $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_h - a_k| < \varepsilon \ \forall h, k > \nu$

PROPOSIZIONE

Se a_n é convergente => é di Couchy

DIM

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$, $\forall h, k > \nu$ avremo che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_k - a_h| < \varepsilon \quad \forall h, k > \nu$

$|a_k - a_h| \leq |a_k - a| + |a_h - a| < \varepsilon$

LEMMA 1

Se a_n é di Couchy a_n é limitata

DIM

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_k - a_h| < \varepsilon \quad \forall h, k > \nu$ per cui

$a_h - \varepsilon < a_k < a_h + \varepsilon$ posto $\varepsilon = 1$ posso dire che

$A = \min\{a_1, a_2, \dots, a_h - 1\}$ e $B = \max\{a_1, a_2, \dots, a_h + 1\}$ quindi

$$A < a_k < B$$

LEMMA 2

Se a_n é di Cauchy ed esiste $a_{n_K} \to l$ allora $a_n \to l$

DIM

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : |a_K - a_h| < \varepsilon \quad \forall h, K > \nu$

Sia $K_0 > \nu : |a_{n_K} - l| < \varepsilon \quad \forall K > K_0$

$n_K \geq K_0 > K \implies |a_n - l| \leq |a_n - a_{n_{K_0}}| + |a_{n_{K_0}} - l| < 2\varepsilon$

TEOREMA PONTE

① $\lim_{n \to +\infty} f(x) = l \implies \forall x_n \to x_0 \quad \forall x \in A - \{x_0\} \implies f(x_n) \longrightarrow l$

② $\lim_{n \to +\infty} f(x) = l \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A - \{x_0\} : |x_n - x_0| < \delta$

DIM

$2 \implies 1$ | Sia $x_n \to x_0 \implies |x_n - x_0| < \delta \quad \forall n > \nu$ Per sappiamo per ipotesi che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon \implies |f(x_n) - l| < \varepsilon$

$1 \implies 2$ P.A. | $\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 : |f(x) - l| \geq \varepsilon_0 \quad \exists x \in A - \{x_0\} : |x - x_0| < \delta$

Sia $\delta = \frac{1}{n}$ e sia $x_n = x(\delta)$ vale a dire che:

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$x_0 - \frac{1}{n} < x < x_0 + \frac{1}{n}$

$x_n - \frac{1}{n} < x < x_n + \frac{1}{n}$

$x_n \to x_0 \not\Rightarrow f(x) \to l$

ESISTENZA DEGLI ZERI

Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ed é continua : $f(a)<0$ e $f(b)>0$ allora
$\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0)=0$

DIM BISEZIONE

Sia $c = \frac{a+b}{2}$ se $f(c)=0$ mi fermo se $f(c) \neq 0$ continuo in questo nuovo intervallo definito

$$\begin{cases} f(c)>0 & a_1=a \quad b_1=c \\ f(c)<0 & a_1=c \quad b_1=b \end{cases}$$

RIPETO N-VOLTE OTTENGO a_n, b_n, c_n da cui:

$$\frac{b_n-a_n}{2} \Rightarrow \frac{b-a}{2^n} = b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$$

osservo che é limitata e monotona crescente quindi ammette limite in x_0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \le 0 \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0 \\ \quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \\ f(x_0) \text{ perché continua} \qquad f(x_0) \end{array}\right\} f(x_0)=0$$

1° TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$f(x)$ continua in $[a,b]$ allora $f(x)$ assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$, supposto $f(a) \le f(b)$ $\quad \forall y_0 \in [f(a), f(b)] \ \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0)=y_0$

DIM | funzione ausiliaria

$g(x) = f(x) - y_0$

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - y_0 < 0 \\ g(b) = f(b) - y_0 > 0 \end{array}\right\} \exists x_0 : g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$$

2° TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

f continua in $[a,b]$ assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$ per il teorema di Bolzano - Weistrass.

TEOREMA DI WEISTRASS

Una funzione continua emmette sempre massimo e minimo

DIM | analoga per l'inf

$M = \sup\{f(x) : x \in (a,b)\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$

$f(x_n) \to M$

x_n é limitata $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x_0 \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0)$

$M = \lim f(x_n) = \lim f(x_{n_k}) = f(x_0)$

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se x_0 é un max o un minimo relativo e f é derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = x_0$

DIM

$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta$

$f(x_0) \geq f(x+h) \quad \forall h : |h| < \delta$

$$\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x)}{h}}_{g(x)} = \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

$\lim_{h \to 0^-} g(h) \leq 0$ e $\lim_{h \to 0^+} g(x) \geq 0$ $\quad \| \quad f'(x_0) = x_0$

TEOREMA DI ROLLE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e continua, derivabile in (a,b) se $f(a) = f(b)$ allora $\exists x_0 : f(x_0) = 0$

1. Siano x_1 e x_2 punti interno rispettivament max e min in $[a,b]$ quindi:

   $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$

   Se $x_1, x_2 \in [a,b]$ allora $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

2. Siano $x_1 = a$ e $x_2 = b$ quindi

   $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$

   $f(a) = f(b)$ allora $f(a) = f(x)$ la funzione é costante in $[a,b]$ dove $f'(x) = 0$

TEOREMA DI LAGRANGE

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continua, derivabile in (a,b) allora $\exists x_0\in[a,b]: f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIM

Consideriamo la funzione ausiliaria

$g(x)=f(x)-[f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$

se $x=a \Rightarrow g(a)=0$

se $x=b \Rightarrow g(b)=0$

$g'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \overset{ROLLE}{=} 0$ quindi

$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

CRITERIO DI MONOTONIA

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabile in (a,b) allora

$f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b) \iff f$ é crescente

$\Rightarrow$ | DIM

Siano $x_1<x_2$ per il teorema di Lagrange so:

$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_0)(x_2-x_1)\geq 0$

$f(x_2)-f(x_1)\geq 0 \Longrightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$

$\Leftarrow$ | DIM

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ poiché é crescente $x+h>x$ quindi anche $f(x+h)>f(x)$

quindi il $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0 \quad f'(x)\geq 0$

1° TEOREMA DELLA MEDIA || LEMMA 1

f limitata e integrabile in $[a,b] \Rightarrow m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$

2° TEOREMA DELLA MEDIA

Se $f(x)$ continua in $[a,b]$ allora $\exists x_0\in[a,b]: \int_a^b f(x)\,dx=f(x_0)(b-a)$

$m\leq\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\leq M$ Sia $y=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \Rightarrow \exists x_0\in[a,b]: f(x_0)=y$ || per il secondo teorema dei valori intermedi

$f(x_0)(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$F'(x) = f(x)$

DIM

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_0^{x+h} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_0^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_0^x f(t)\,dt}\right]$$
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x(h))$$

dal secondo teorema della media

$\exists\, x(h):\quad x \le x(h) \le x+h$ poiché continua $\lim_{h\to 0} x(h) = x$ quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano a_n e b_n due successioni di cui $0 \le a_n \le b_n$ tale che per ognuna vale:

① $\sum_{k=1}^{n} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k < +\infty$ ② $\sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty$

Indichiamo con s_n e t_n le somme parziale rispettivamente di a_k e b_k per ipotesi $a_k \le b_k$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow s_n \le t_n$ poiché le somme parziali sono a termini non negativi avremo:

① Se t_n ha limite finito allora anche s_n avrà limite finito

② Se $s_n = +\infty$ allora anche t_n diverge

CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

Sia a_n una successione a termini non negativi. Supponiamo che fissato un numero reale p, esiste il suo limite

$$\ell = \lim_{n\to +\infty} n^p \cdot a_n$$

Si ha:

① $\ell \neq +\infty,\ p > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k < +\infty$ ② $\ell \neq 0,\ p < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$

DIM

① Per definizione di limite di successione $\forall \varepsilon = 1, \exists \nu > 0$;

$n^p a_n < 1$

Per tali n risulta $0 \leq a_n < \frac{(l+1)}{n^p}$ applicando il teorema del confronto consideremo $b_n = (l+1)/n^p$ dato che $p > 1$ la serie generalizzata converge quindi anche la serie di termine generale a_n

② $l \neq 0$, $\forall \varepsilon = l/2$, $\exists \nu > 0$:

$n^p a_n < 1/2 \quad \forall n > \nu$

ma allora assumo $a_n < \frac{1}{2n^p}$ considero il teorema del confronto con $b_n = \frac{1}{2n^p}$ siccome $p \leq 1$ la serie generalizzata diverge quindi anche la serie generale diverge

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia a_n una successione a termini positivi, supponiamo:

$\exists l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

allora si ha:

① se $l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k < +\infty$ ② se $l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$

DIM

① se $l < 1$ scegliamo un numero $x : l < x < 1$ per definizione di successione $\forall \varepsilon > 0 : \varepsilon = x - l$ $\exists \nu > 0$ per cui:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \cancel{l} < x - \cancel{l} \quad \forall n > \nu$

Posto $\nu = 1$ $a_n < a_1 x^{n-1}$ con il criterio del confronto utilizzo $b_n = a_1 x^{n-1}$ poiché $0 < x < 1$ b_n converge quindi anche a_n.

② se $l > 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

a_n è strettamente crescente per $n > \nu$ converge a 0 ma non essendo soddisfatta la condizione necessaria la serie diverge necessariamente

CRITERIO DELLA RADICE

Sia a_n una successione a termini non negativi per cui:

$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora:

① se $l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k < +\infty$ ② se $l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$

DIM

① se $l < 1$ $\forall \varepsilon > 0$ vale che $l + \varepsilon < 1$ $\exists \nu > 0$:
$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \Rightarrow a_n < (l+\varepsilon)^n$ per il teorema di confronto pongo $b_n = (l+\varepsilon)^n$ converge quindi anche a_n converge

② se $l \geq 1$ $\exists \nu : \sqrt[n]{a_n} > 1$ cioé $a_n > 1$ $\forall n > \nu$ poiché a_n é infinitesimo la serie diverge.

CONVERGENZA ASSOLUTA

Una serie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ si dice assolutamente convergente se risulta la convergenza dei suoi valori assoluti $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$

TEOREMA CONVERGENZA ASSOLUTA

Una serie assolutamente convergente é convergente

DIM

Per ipotesi la serie é convergente con i moduli in base al criterio di Cauchy
$\forall \varepsilon \geq 0$ $\exists \nu > 0$:

$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu$ e $\forall p \in \mathbb{N}$

Per la disuguaglianza triangolare avremo:

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$ e $\forall p \in \mathbb{N}$

di conseguenza per il criterio di Cauchy é convergente.

DEFINIZIONE DI SERIE

Considerando una successione a_n e posto $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ che é la somma parziale. Chiameremo serie di termine a_n $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} = \lim_{n \to +\infty} s_n$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{K=0}^{+\infty} x^K = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$$

x si dice ragione della serie geometrica

1. se $x \geq 1 \Rightarrow$ diverge
2. $-1 < x < 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1-x}$ converge
3. se $x \leq -1 \Rightarrow$ indeterminata

CRITERIO DI RIEMANN

Una funzione limitata in $[a,b]$ é ivi integrabile secondo Riemann se e solo se, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una partizione P in $[a,b]$:

$S(P) - s(P) < \varepsilon$

DIM

$\Rightarrow$ | Se f é integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ allora $s(f) = S(f)$. In base alla definizione di sup e inf, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P, Q$ di $[a,b]$:

$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P)$ e $S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(Q)$

Posto $R = P \cup Q$ si deduce che:

$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

da cui essendo $s(f) = S(f)$:

$S(R) - s(R) < [s(f) + \frac{\varepsilon}{2}] - [s(f) - \frac{\varepsilon}{2}] = \varepsilon$

$\Leftarrow$ | Viceversa se vale che $S(P) - s(P) < \varepsilon$, essendo $s(P) \leq s(f)$ e $S(f) \leq S(P)$ otteniamo:

$0 \leq S(f) - s(f) \leq S(P) - s(P) < \varepsilon$

Dato che il numero $S(f) - s(f)$ non dipende da ε, questa relazione vale se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ solo nel caso in cui $S(f) - s(f) = 0$ e quindi f é integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.

RESTO DI PEANO

Sia:

$P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$P^{(k)}(0) = k!\, a_k \Rightarrow a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

$P^{(k)}(x_0) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Se f é derivabile n-volte in x_0, il resto $R_n(x)$ é un' infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$

Supponiamo adesso:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n}$$

Derivo $n-1$ volte:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{n!}\left[f^{n}(x_0) - f^{n}(x_0)\right] = 0$$

In base alla definizione di o piccolo $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ dove $R_n(x) \to 0$

RESTO DI LAGRANGE

Se f é derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$ con derivata $f^{(n+1)}$,

$\forall x \in [a,b]$, $\exists x_1 : x < x_1 < x_0$:

$$R_n = \frac{f^{k+1}(x_1)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

DIM

$R_n(x) = f(x) + P_{n,x_0}(x)$ $\qquad g(x) = (k+1)!$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$R_n^{n}(x) = f^{n}(x) + P^{n}_{n,x_0}(x)$ $\qquad g^{n}(x) = k+1\,(x-x_0)$

Valutiamo adesso in x_0:

$R_n^{(n+1)}(x_0) = 0$ $\qquad g^{(n+1)}(x_0) = k+1$

Applico il Teorema di Cauchy posso dire che $\exists x_1 \in [x_0 - x]$:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - \overset{0}{R_n(x_0)}}{g(x) - \underset{0}{g(x_0)}}$$

$\vdots$

$$\frac{R_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{g^{(n+1)}(x_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1}) - \overset{0}{P^{(n+1)}(x_{n+1})}}{(n+1)!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$