



FISICA GENERALE I

Dott.ssa Annalisa Allocca

**Università degli Studi di Napoli,
Compl. Univ. Monte S.Angelo – Dipartimento di Fisica
Via Cinthia, I-80126, Napoli**

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
sez. Napoli
Studio: 1G16, Edificio 6
+39-081-676345
annalisa.allocca@unina.it**



Organizzazione

- **Sito web:** www.docenti.unina.it/annalisa.allocca
 - La registrazione al sito si può effettuare inserendo numero di matricola e pin oppure tramite SPID per chi non fosse ancora in possesso di matricola
 - Il materiale didattico si trova sulla pagina web
- **Libri di testo adottati:**
 - Mazzoldi, Nigro, Voci «Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica» Vol. 1 - Edises Napoli
 - Halliday, Resnick, Walker «Fondamenti di Fisica» - Ambrosiana Milano
 - Serway, Jewett «Principi di Fisica» - Edises Napoli



Argomenti di oggi:

- Elementi di cinematica
 - Accelerazione
 - Moto armonico
 - Moti su traiettoria curvilinea
 - Moto circolare



Accelerazione

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{\lim} \bar{a} = \frac{d \bar{v}}{dt}$$

Variazione della velocità nel tempo

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{\lim} \bar{a} = \frac{d \bar{v}}{dt} \rightarrow \frac{m/s}{s}$$

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d \bar{v}}{dt} \right) = \frac{d^2 \bar{v}}{dt^2}$$

$$\left[\frac{m}{s^2} \right]$$



Accelerazione

Variazione della velocità nel tempo

Accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

Analisi dimensionale:
[a] = [L][T^-2] = m/s^2

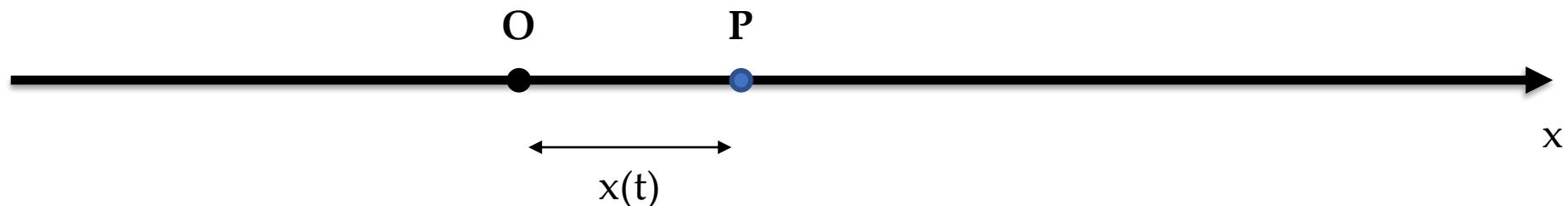
Accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



Moto rettilineo - accelerazione

Moto unidimensionale



$$\begin{aligned}\bar{r} &= r \hat{\mu}_x = x \hat{\mu}_x \\ \bar{v} &= v_x \hat{\mu}_x\end{aligned}$$

Nel moto rettilineo \vec{r}, \vec{v} ed \vec{a} hanno la stessa direzione e hanno una sola componente:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$



Moto uniformemente accelerato

Accelerazione costante durante il moto

- Legge oraria della velocità

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt'$$

$$a = \text{cost.} \Rightarrow v(t) = v(t_0) + a \int_{t_0}^t dt'$$

$$v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

Integrale di una costante

$$\int_{x_1}^{x_2} \text{cost.} dx = x \Big|_{x_1}^{x_2} = \text{cost.}(x_2 - x_1)$$



Moto uniformemente accelerato $v_0 = v(t)$

- Legge oraria della posizione

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \underline{v(t')} dt' =$$

$$x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt' + \int_{t_0}^t a(t-t') dt'$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2$$

$$t_0 = 0$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

$$\underline{\underline{v(t)}} = \underline{\underline{\frac{v_0}{t}}} + \underline{\underline{a(t-t_0)}}$$

$$\int_{t_0}^t t' dt' - \int_{t_0}^t t_0 dt' = \left\{ \begin{array}{l} \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} \\ - t_0(t-t_0) \end{array} \right\} = \frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2} - t_0 t + \cancel{\frac{t_0^2}{2}}$$



Caso particolare di moto uniformemente accelerato: moto verticale di un corpo

Un corpo lasciato libero di cadere in prossimità della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$

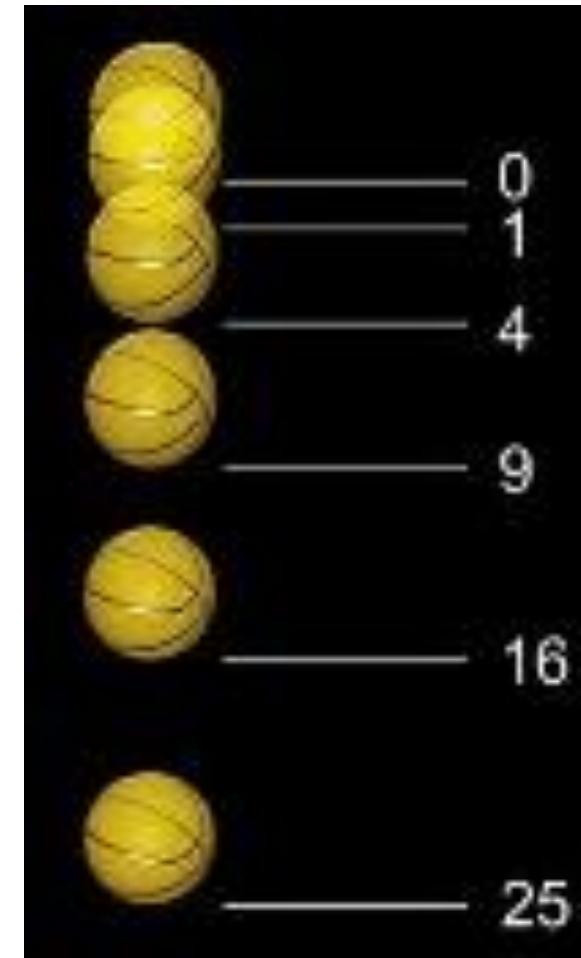
→ accelerazione di gravità

Vettore accelerazione

Modulo → g

Direzione → perpendicolare
alla superficie terrestre

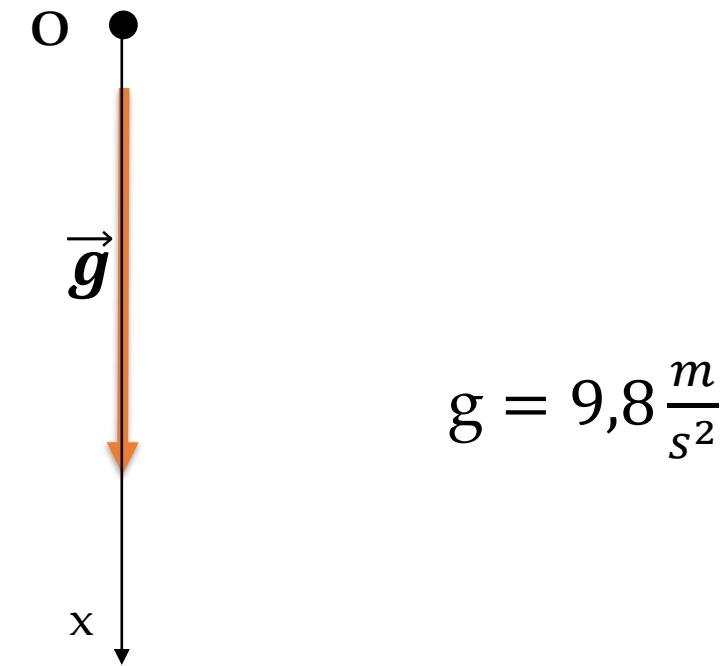
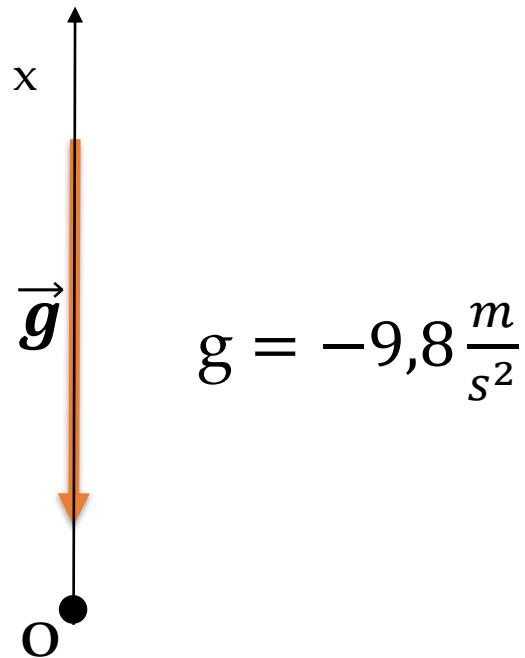
Verso → diretta verso il
centro della terra





Corpi in caduta libera

Attenzione a come è orientato il sistema di riferimento!





Leggi orarie del moto di caduta libera

- Velocità

$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow v_0 + gt$$



- Posizione

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$



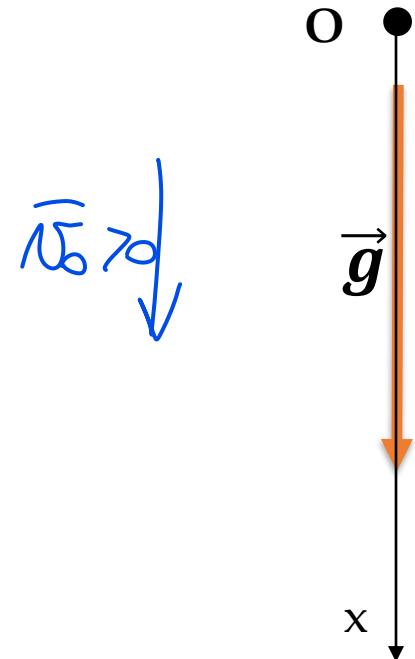
Caduta libera da un'altezza h

- $v_0 = 0$

$$\cancel{v(t) = v_0 + gt}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

- $v_0 > 0$





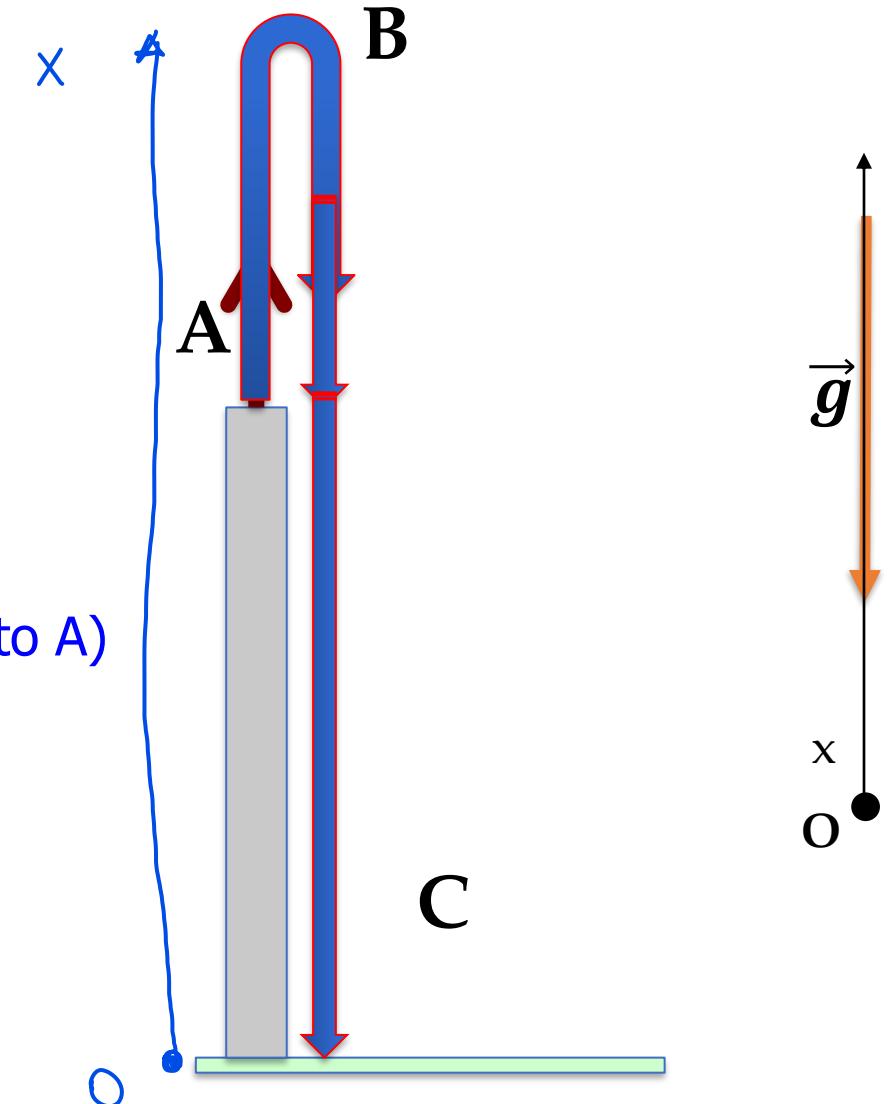
Caduta libera da un'altezza h

$V_0 = 20 \text{ m/s}$ velocità di lancio
(diretta verso l'alto)

$H = 50 \text{ m}$ Altezza edificio

Calcolare:

- Il tempo per raggiungere l' altezza max (punto B)
- L' altezza massima raggiunta sopra l' edificio
- Il tempo necessario per tornare al punto di lancio (punto A)
- La velocità della pietra in questo istante
- La velocità e posizione a $t=5\text{s}$
- La posizione a $t=6\text{s}$
- La velocità con cui la pietra tocca il suolo (punto C)
- L' istante in cui tocca il suolo

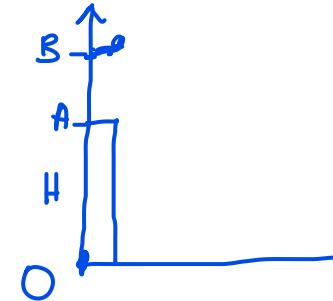




Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$$N(t_B) = N_0 - gt_B = 0 \Rightarrow t_B = \frac{N_0}{g} \leftarrow$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t_B - \frac{1}{2} g t_B^2 = H + v_0 t_B - \frac{1}{2} g t_B^2$$



$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = (H + x_B) - \frac{1}{2} g t^2 = H$$



Velocità e accelerazione in funzione della posizione



Equazioni cinematiche

- Moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0}t & \text{Posizione in funzione del tempo} \\ v(t) = v_{x0} = \text{costante} & \text{Velocità costante} \end{cases}$$

- Moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 & \text{Posizione in funzione del tempo} \\ v(t) = v_{x0} + a_x t & \text{Velocità in funzione del tempo} \\ a(t) = a_{x0} = \text{costante} & \text{Accelerazione costante} \end{cases}$$



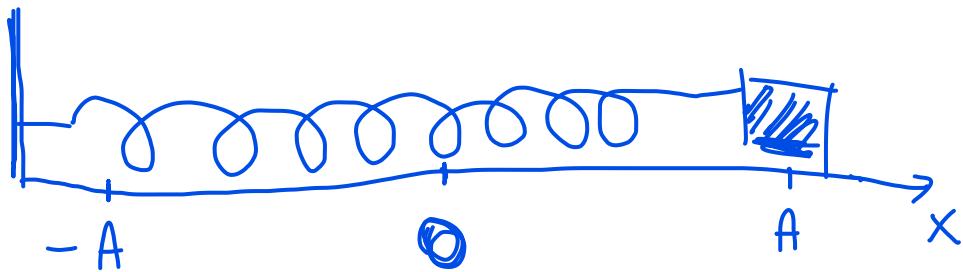
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \\ \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \end{array} \right.$$

Moto armonico

$$f(x(+))$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

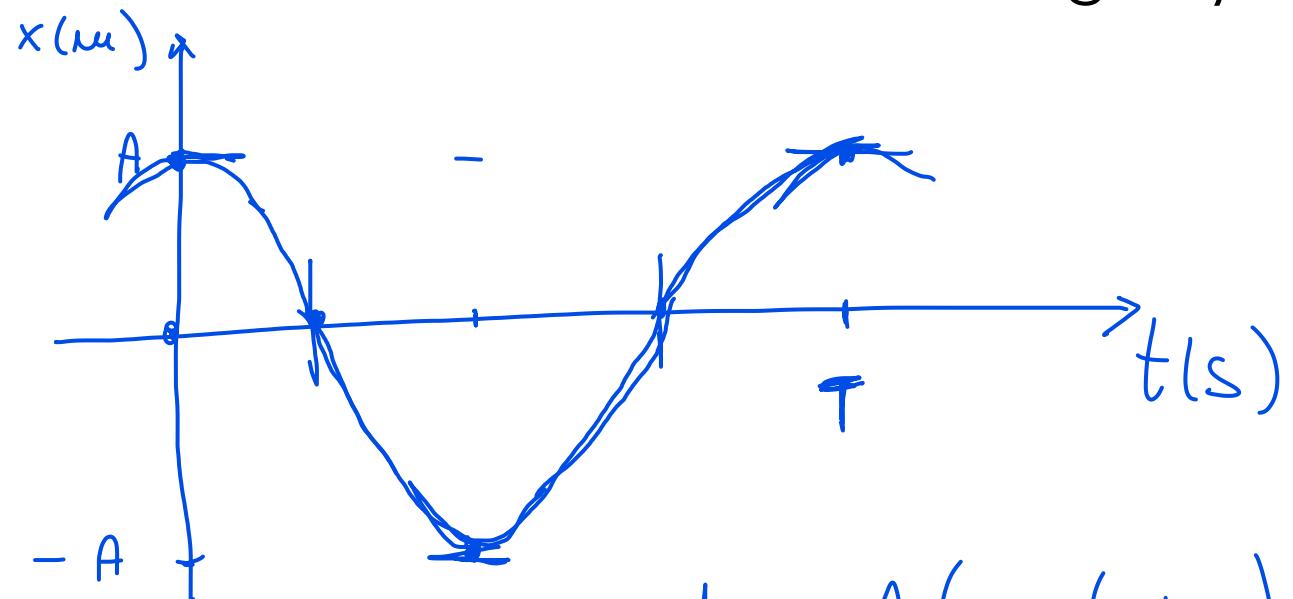
Moto oscillatorio (il corpo ripercorre avanti e indietro lo stesso tragitto)



$$T = \text{periodo}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \text{pulsazione} = \frac{2\pi}{T}$$



$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$



Moto armonico

Moto oscillatorio (il corpo ripercorre avanti e indietro lo stesso tragitto)



Moto armonico

Moto oscillatorio (il corpo ripercorre avanti e indietro lo stesso tragitto)

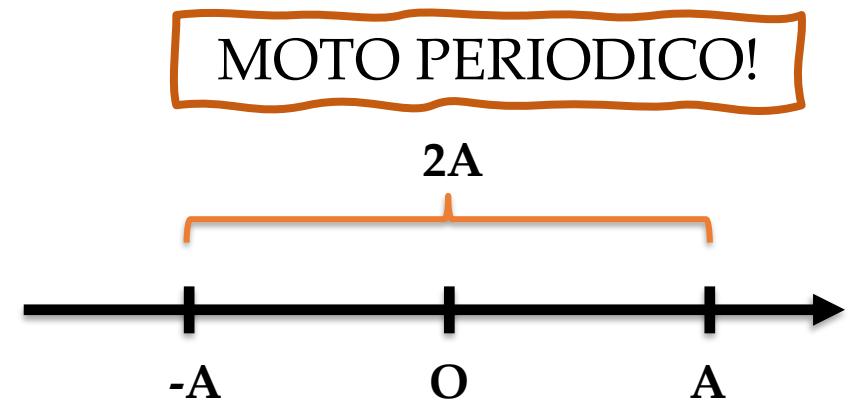
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Aampiezza del moto

Fase del moto

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

MOTO PERIODICO!



$\varphi \rightarrow$ fase iniziale

$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow$ pulsazione del moto

Periodo del moto

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow$ frequenza del moto



Moto armonico semplice

- Spostamento:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- Velocità:

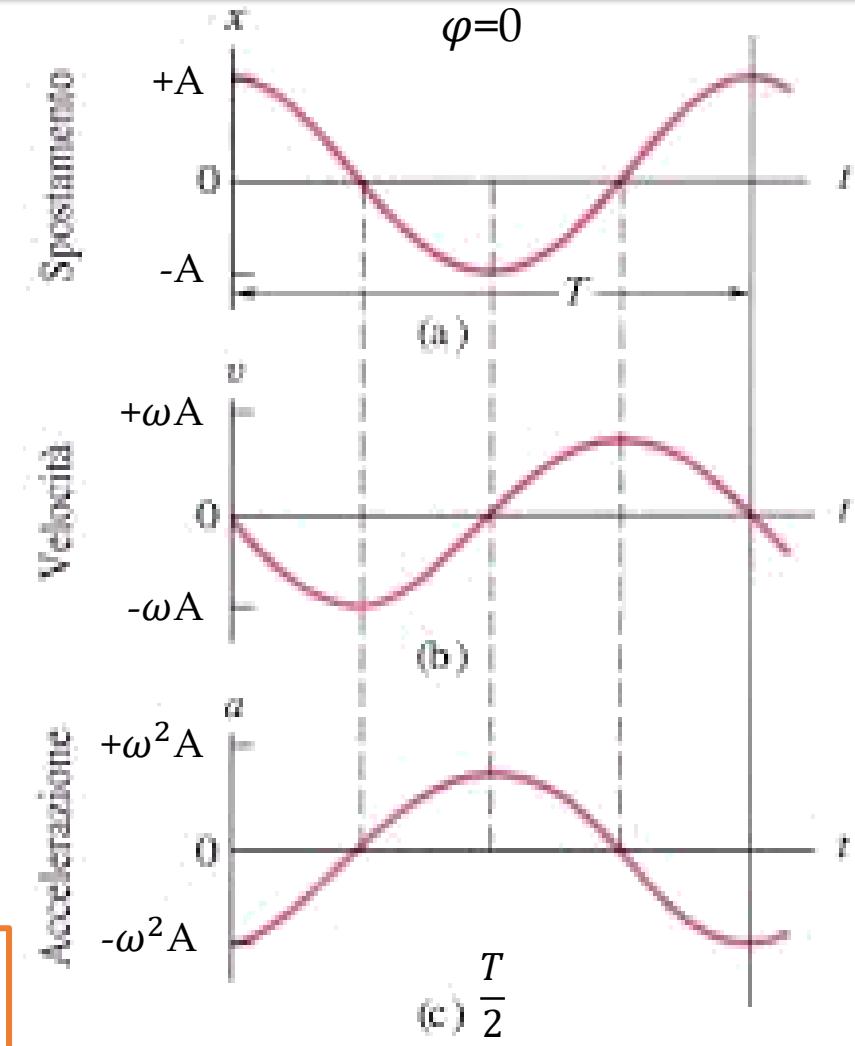
$$\frac{dx}{dt}$$

- Accelerazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

Equazione differenziale del moto armonico

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$





Moto armonico semplice

- Spostamento:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- Velocità:

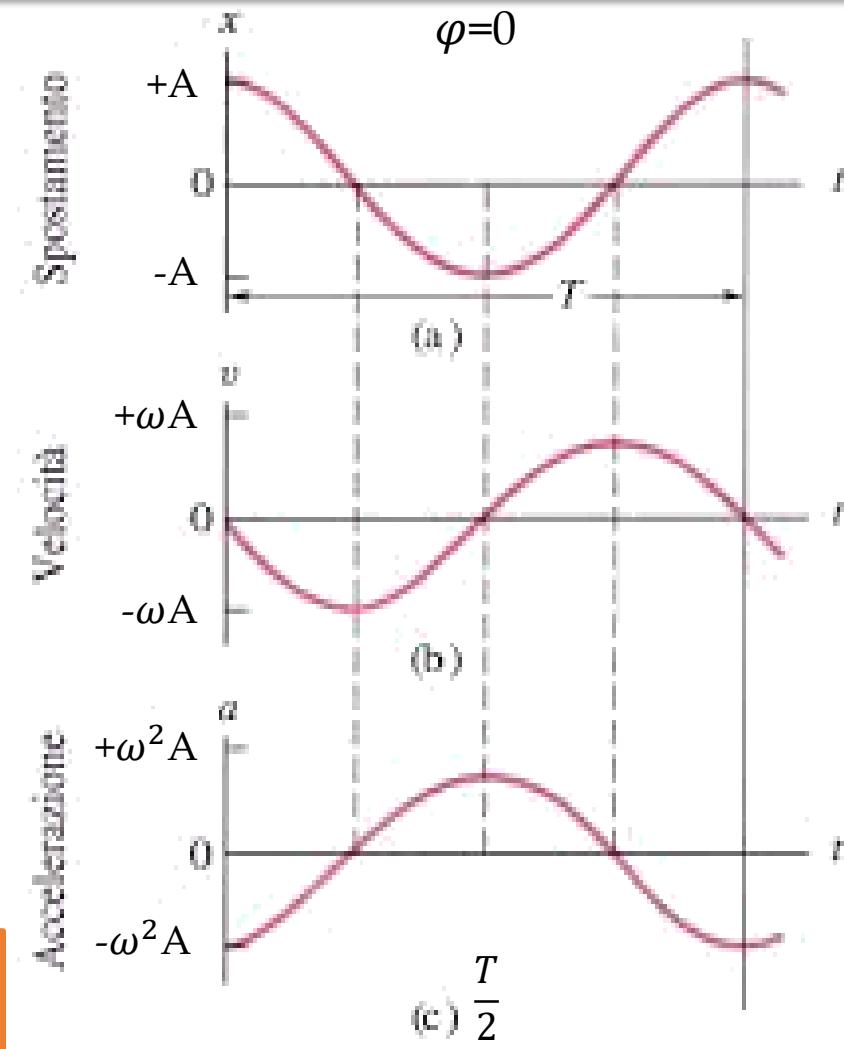
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

- Accelerazione:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Equazione differenziale del moto armonico

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0}$$





Moto armonico semplice

Le costanti A e φ determinano le condizioni iniziali:

Viceversa, note le condizioni iniziali possiamo ricavare A e φ



Moto armonico semplice

Le costanti A e φ determinano le condizioni iniziali:

$$x(t = 0) = x_0 = A \cos(\varphi) \quad v(t = 0) = v_0 = -A\omega \sin(\varphi)$$

Viceversa, note le condizioni iniziali possiamo ricavare A e φ

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$



Moto armonico semplice

Le costanti A e φ determinano le condizioni iniziali:

$$x(t = 0) = x_0 = A \cos(\varphi) \quad v(t = 0) = v_0 = -A\omega \sin(\varphi)$$

Viceversa, note le condizioni iniziali possiamo ricavare A e φ

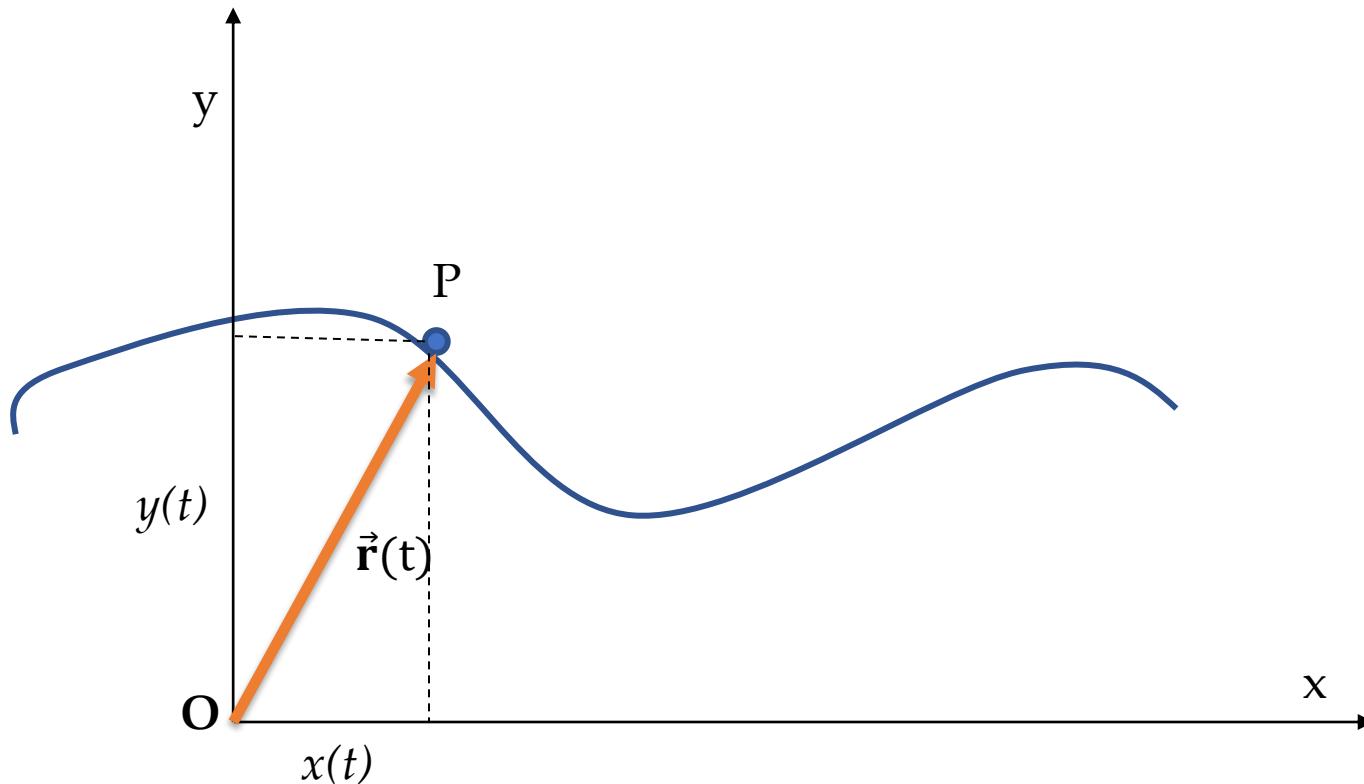
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

Accelerazione e velocità in funzione della posizione:

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = -\omega^2 \int_{x_0}^x x dx = \frac{1}{2} \omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$



Moto su traiettoria curvilinea



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\boldsymbol{u}}_x + y(t)\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

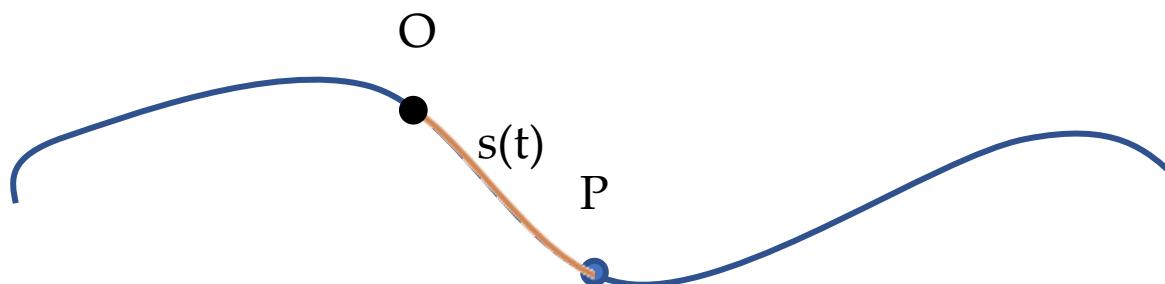
Per ciascuna coordinata va risolta
l'equazione del moto

Il moto è scomposto nei moti
rettilinei proiettati sui due (o tre) assi



Ascissa curvilinea

Nota la traiettoria, la posizione del punto nello spazio può essere individuata da una singola coordinata curvilinea s , detta **ascissa curvilinea**

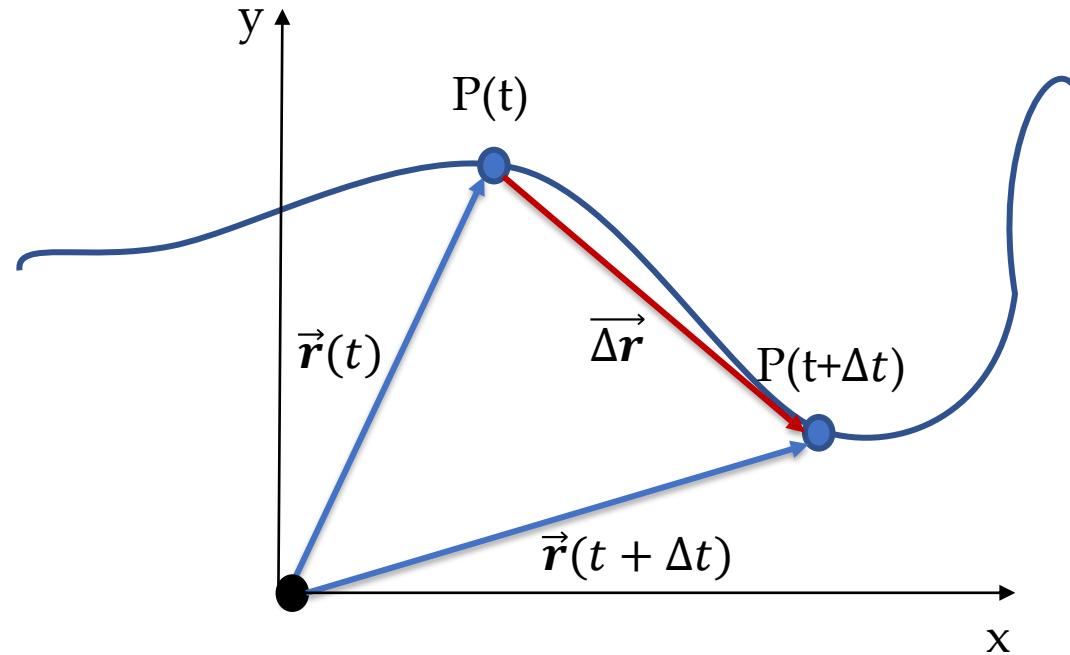


‘ s ’ esprime la lunghezza del tratto di traiettoria tra un’origine arbitraria **O** e la posizione del punto **P**.

Nota la forma della traiettoria e la $s(t)$, abbiamo una descrizione completa del moto: velocità e accelerazione si ricavano da $s(t)$ e dalla geometria della traiettoria

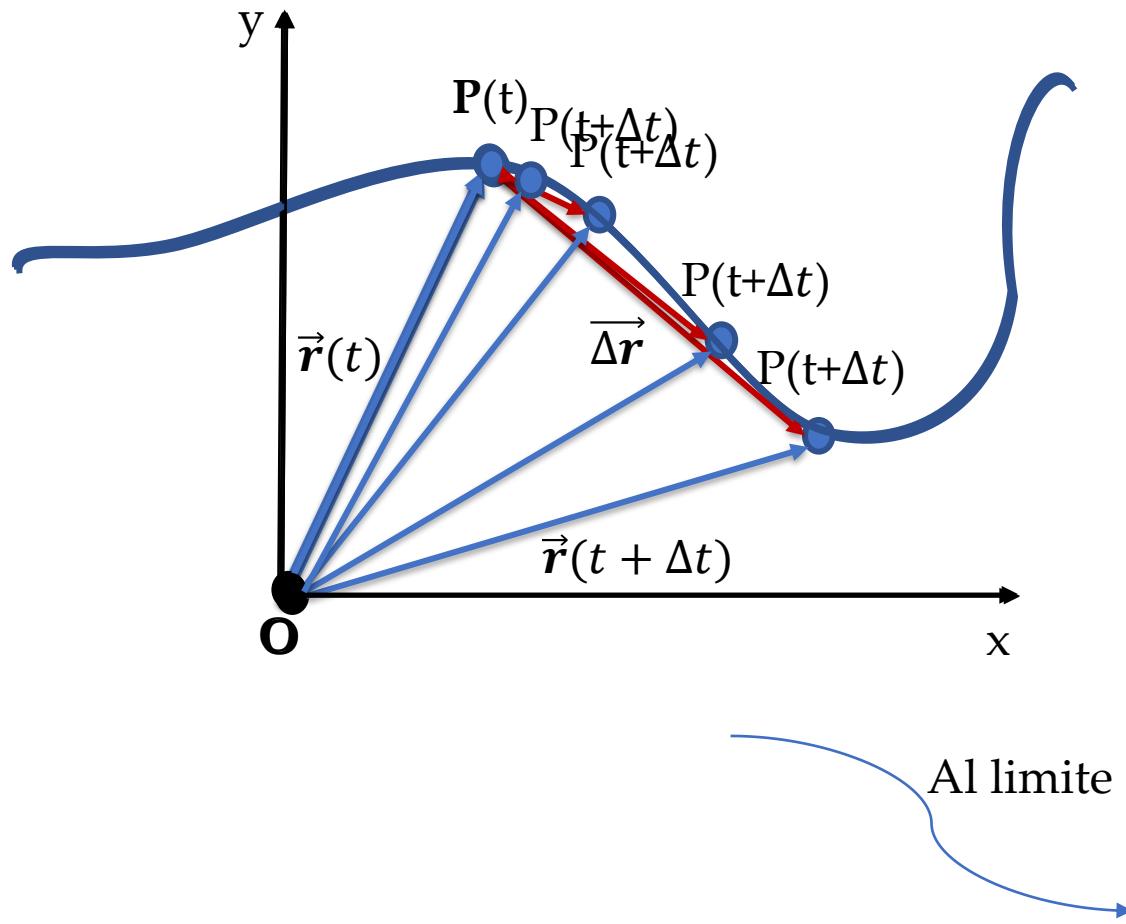


Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea

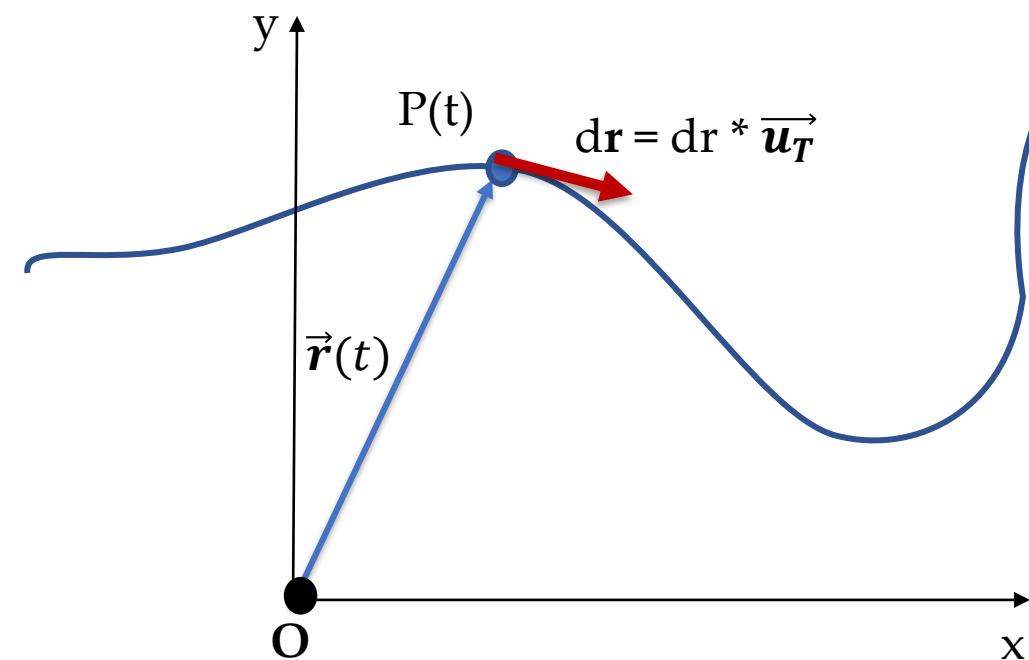




Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea

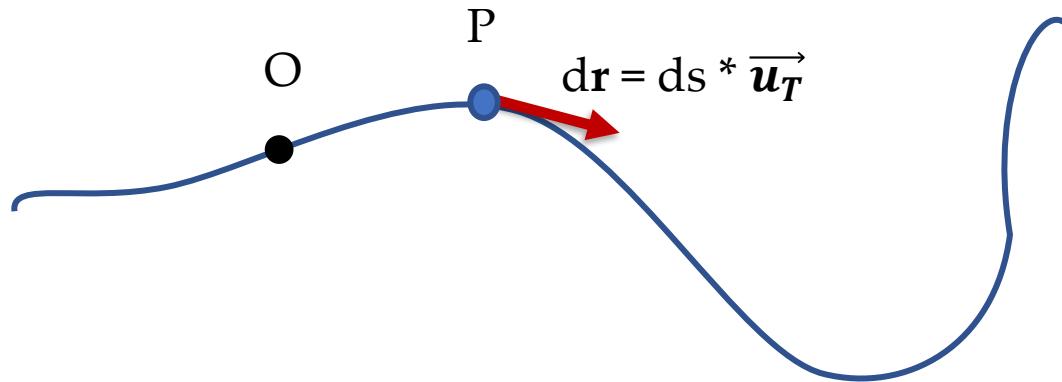


L'incremento $d\mathbf{r}$ del raggio vettore è tangente alla traiettoria nel punto P





Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea



Scomponiamo il moto in una successione di spostamenti infinitesimi dr , ciascuno tangente alla traiettoria

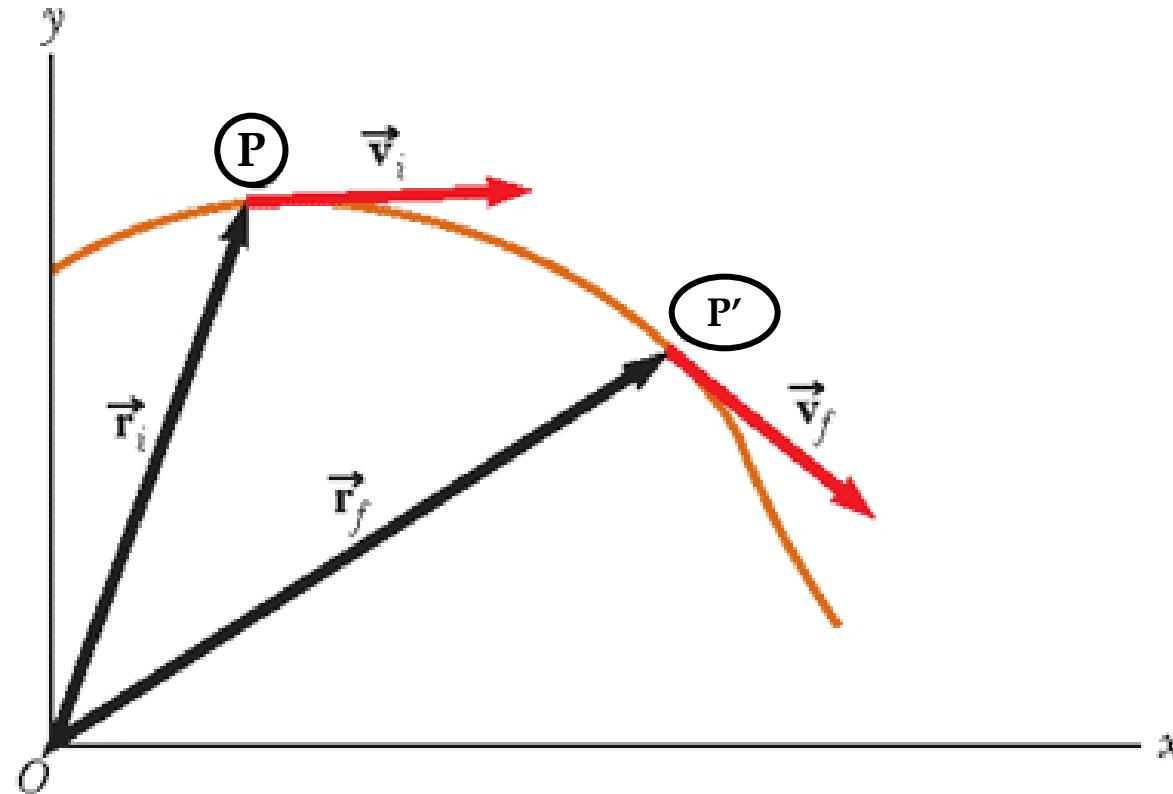
→ La direzione istantanea del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto occupato da P nell'istante considerato

Velocità

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_T = v \vec{u}_T$$



Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

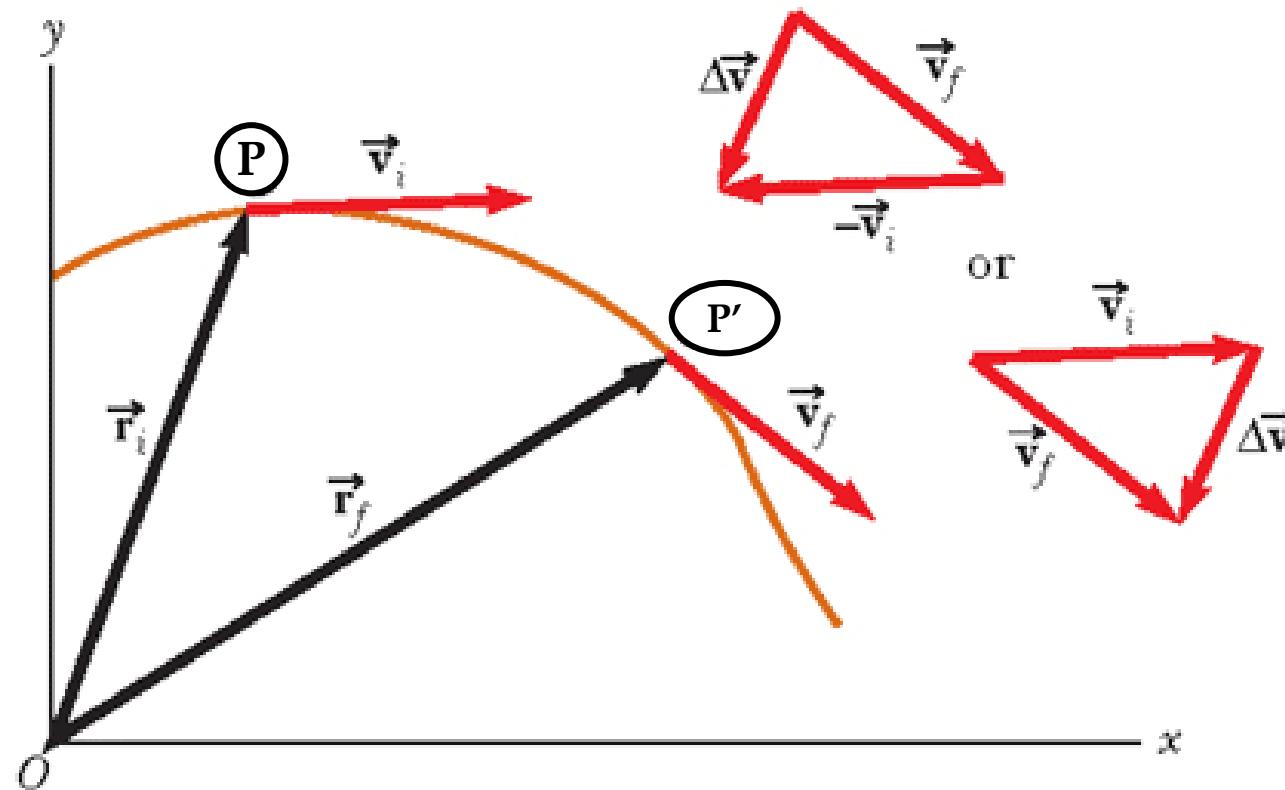
Che **direzione** ha il vettore accelerazione su una traiettoria curvilinea?

Anche se il modulo della velocità è costante, lungo una traiettoria curvilinea la sua **direzione cambia** continuamente

**Variazione di velocità →
accelerazione**



Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea



Anche se il modulo della velocità è costante, lungo una traiettoria curvilinea la sua **direzione cambia** continuamente

**Variazione di velocità →
accelerazione**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Che **direzione** ha il vettore accelerazione su una traiettoria curvilinea?

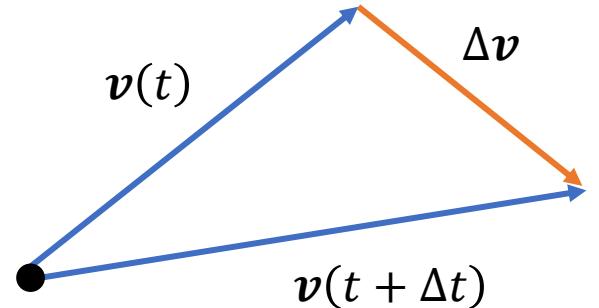


Derivata di un vettore

- Derivata di un vettore

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

In un sistema di assi cartesiani ortogonali:





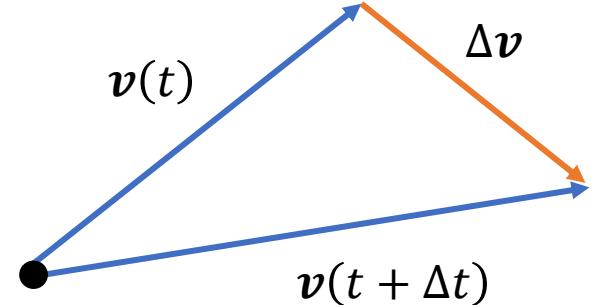
Derivata di un vettore

- Derivata di un vettore

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

In un sistema di assi cartesiani ortogonali: $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$

Versori fissi, non variabili nel tempo





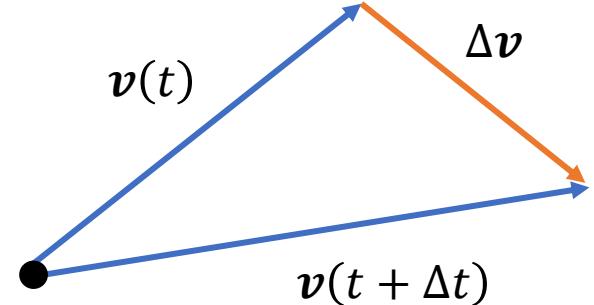
Derivata di un vettore

- Derivata di un vettore

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

In un sistema di assi cartesiani ortogonali
(dove i versori non cambiano nel tempo):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$$



- Se anche il versore cambia: derivata di un versore ($|\mathbf{u}| = 1$)



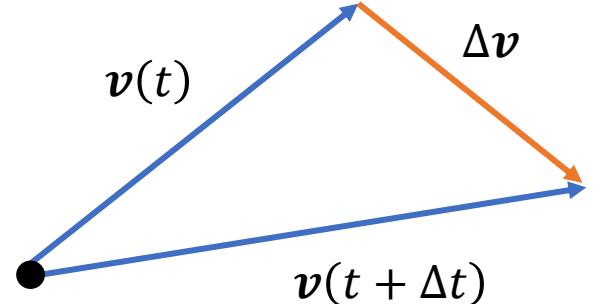
Derivata di un vettore

- Derivata di un vettore

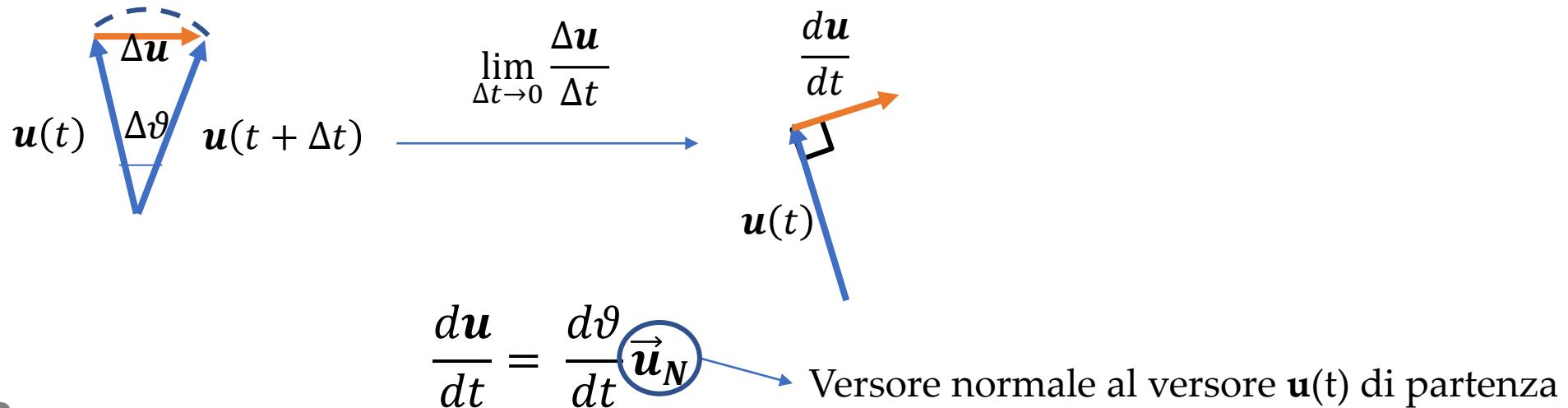
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

In un sistema di assi cartesiani ortogonali
(dove i versori non cambiano nel tempo):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$$



- Se anche il versore cambia: derivata di un versore ($|\mathbf{u}| = 1$)





Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea

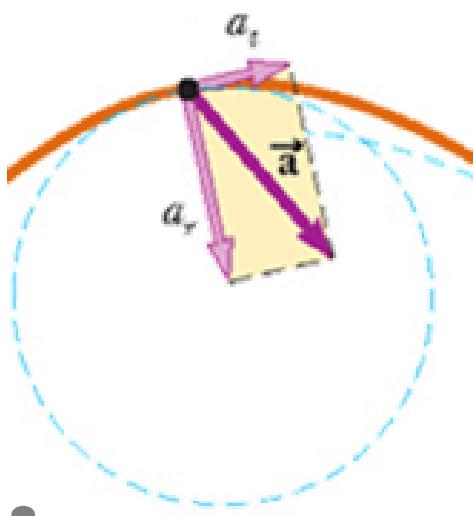
Accelerazione



Velocità e accelerazione su traiettoria curvilinea

Accelerazione: regole di derivazione dei vettori

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\nu \mathbf{u}_T) = \frac{d\nu}{dt} \mathbf{u}_T + \nu \frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \boxed{\frac{d\nu}{dt} \mathbf{u}_T} + \nu \boxed{\frac{d\vartheta}{dt} \mathbf{u}_N}$$



Componente parallela alla velocità
(tangente alla traiettoria)
Variazione in modulo della velocità

Componente ortogonale alla velocità
(diretta lungo il raggio del *cerchio osculatore* alla curva)
Variazione in direzione della velocità



Accelerazione tangenziale e centripeta

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} u_T + \frac{\mathbf{v}^2}{R} u_N$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$



Moto circolare uniforme

Moto di un punto materiale che avviene lungo una circonferenza con **velocità costante**

Si può descrivere usando l'**ascissa curvilinea** $s(t)$

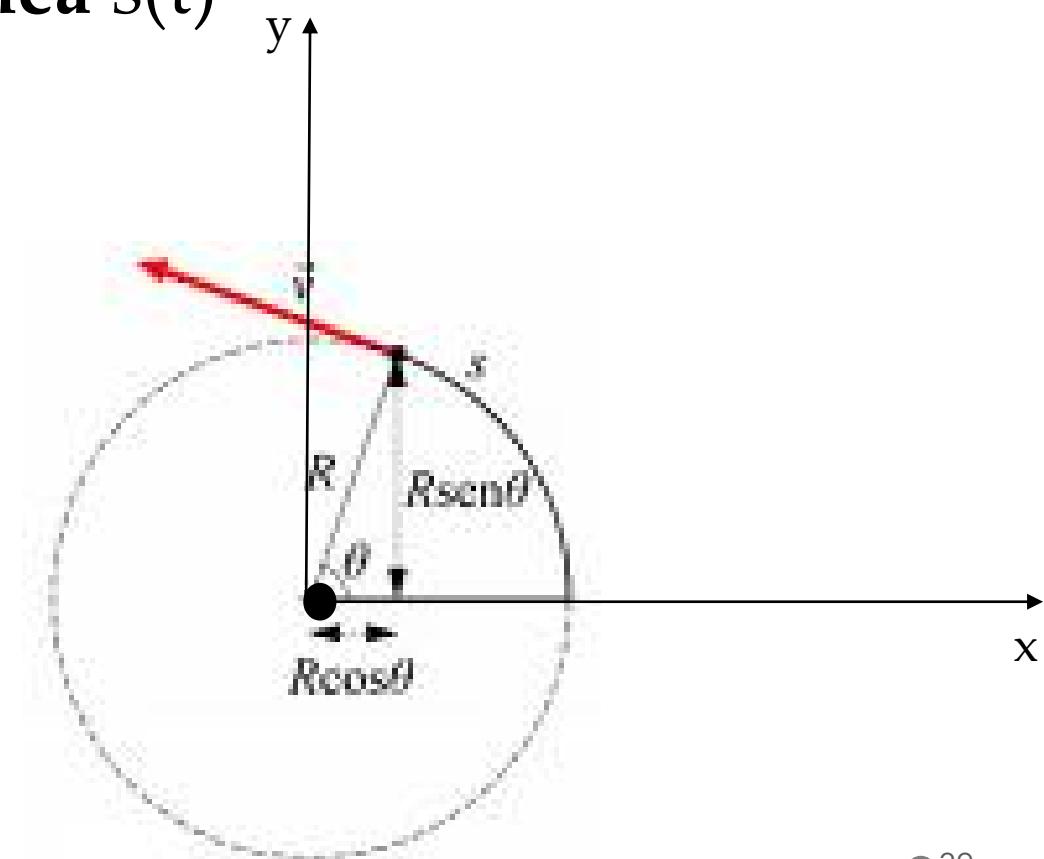
oppure l'**angolo** $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$

LEGGE ORARIA:

$$\begin{cases} x(t) = R \cdot \cos \theta(t) \\ y(t) = R \cdot \sin \theta(t) \end{cases}$$

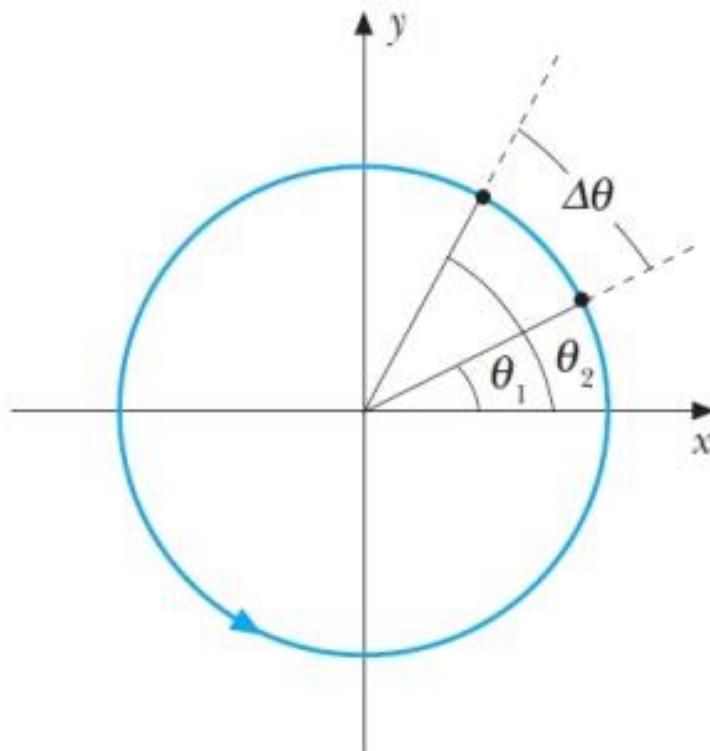
$$\cancel{\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{u}_T + \frac{v^2}{R} \boldsymbol{u}_N}$$

La velocità è costante in modulo





Velocità e accelerazione angolari

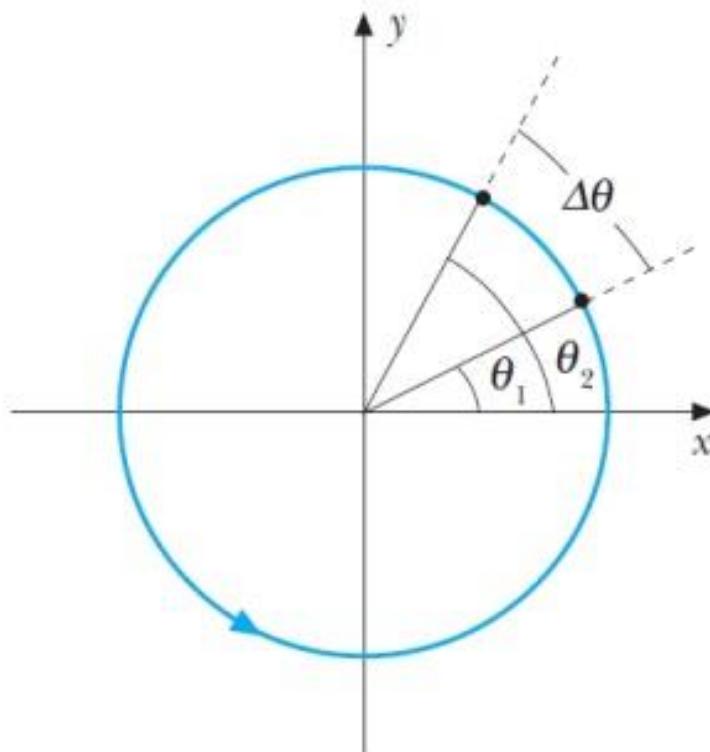


$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \frac{ds}{R} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$



Velocità e accelerazione angolari



$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \xrightarrow{\lim_{\Delta t \rightarrow 0}} \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \frac{ds}{R} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Moto accelerato con accelerazione costante in modulo (centripeta) perché la **direzione** della velocità cambia sempre, punto per punto

$$\alpha_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



Moto circolare uniforme

Si definiscono:

- 1. Periodo T:** tempo impiegato dal corpo a percorrere un'intera circonferenza (s).
- 2. Frequenza f:** è il numero di giri che il corpo percorre in un s.

Si misura in **hertz** (simbolo Hz): $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

La frequenza di un corpo è pari a 1 Hz quando il corpo percorre 1 giro al secondo.

T e f sono due grandezze dipendenti:

Se il corpo impiega $T = 3$ s a percorrere una circonferenza vuol dire che percorre $1/3$ di circonferenza al secondo, se impiega $T = 4$ s a percorrere una circonferenza vuol dire che percorre $1/4$ di circonferenza al secondo ecc.

$$f = 1 / T$$



Moto circolare uniforme

3. **Velocità tangenziale:** spazio percorso dal corpo in un certo tempo (*m/s*)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$$

Dato che $f = 1/T$, si può anche definire come

$$v = 2\pi \cdot R \cdot f$$

4. **Velocità angolare:** angolo percorso dal corpo in un certo tempo (*rad/s*)

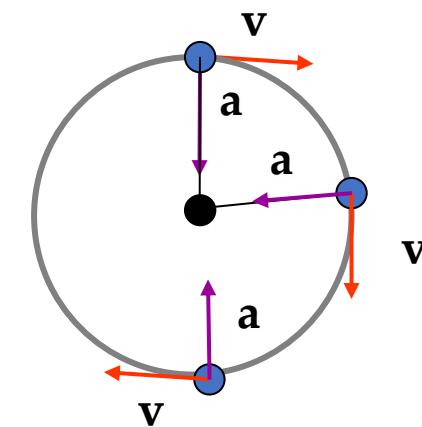
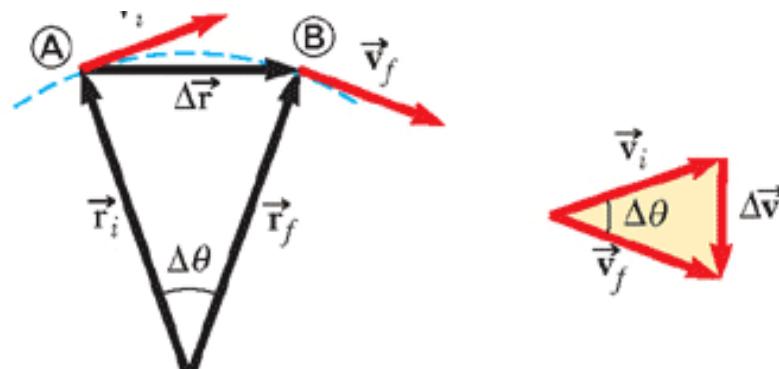
$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Pertanto la relazione matematica che intercorre tra velocità tangenziale e velocità angolare è $v = \omega R$.



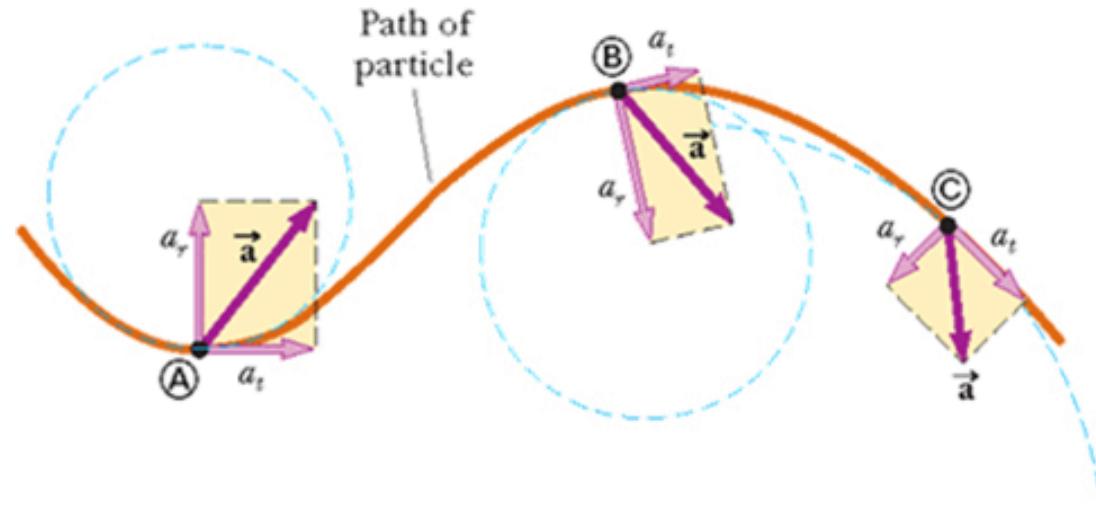
Moto circolare uniforme

- Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme se si muove su una circonferenza (o su un arco di circonferenza) con velocità di modulo costante.
- La velocità scalare (o modulo) non varia, varia la sua direzione!
- Al procedere del moto i vettori v e a restano costanti in modulo ma variano le loro direzioni!





Accelerazione tangenziale e radiale



$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\alpha_T = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

In questo caso varia anche il modulo della velocità e il vettore accelerazione presenta una componente radiale (dovuta alla variazione della direzione) e una tangenziale (dovuta alla variazione del modulo) rispetto alla traiettoria



Leggi orarie

- Moto circolare uniforme

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$$
$$s(t) = s_0 + vt$$

con accelerazione centripeta $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$



Leggi orarie

- Moto circolare non uniforme



Leggi orarie

- Moto circolare uniformemente accelerato

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t + \frac{1}{2} \alpha_T t^2$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha_T t$$

dove $\alpha_T = \frac{a_T}{R} \rightarrow$ accelerazione angolare

L'accelerazione totale è sempre data dalla somma $a = a_T + a_N$



Notazione vettoriale nel moto circolare

Velocità angolare come vettore

- Di modulo $|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$
- Ortogonale al piano del moto
- Verso tale che dall'estremo di $\vec{\omega}$ il moto appaia antiorario

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$



Notazione vettoriale nel moto circolare

Velocità angolare come vettore

- Di modulo $|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$
- Ortogonale al piano del moto
- Verso tale che dall'estremo di $\vec{\omega}$ il moto appaia antiorario

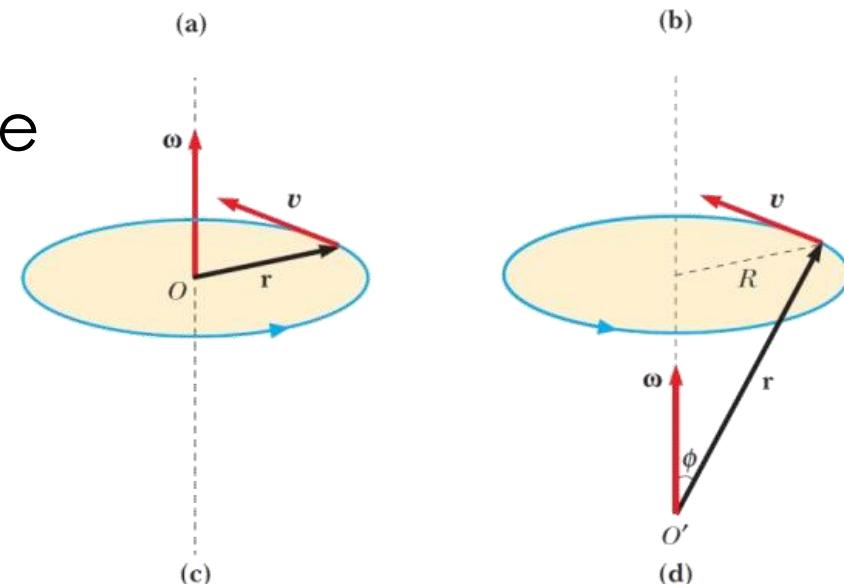
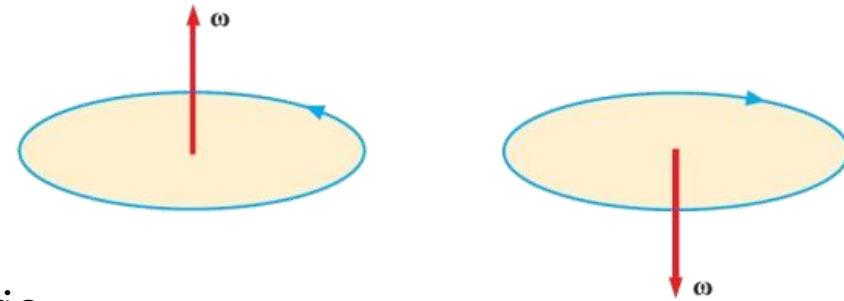
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Dato il vettore $\vec{\omega}$ si individua l'asse di rotazione

Accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_T} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_N}$$





Moto circolare e moto armonico

Proiettiamo il moto circolare uniforme sugli assi cartesiani:

$$x(t) = R \cdot \cos \theta (t) = R \cdot \cos(\theta_0 + \omega t)$$

$$y(t) = R \cdot \sin \theta (t) = R \cdot \sin(\theta_0 + \omega t)$$

Il moto circolare può essere scomposto in due moti armonici di eguale ampiezza, sfasati tra loro di $\frac{\pi}{2}$

<http://bachecaesperimenti.blogspot.com/2016/07/il-moto-armonico.html>