Università di Napoli Federico II – Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Calcolatori Elettronici I

Minimizzazione di funzioni booleane

Ottimizzazione di funzioni booleane

- Per ottimizzazione di una funzione si intende la sua trasformazione, attraverso passi successivi, con lo scopo di ottenere un’espressione equivalente ma migliore rispetto ad una data metrica di valutazione (area occupata, tempo necessario a produrre un dato risultato, potenza o energia assorbita ecc.)
- Possibili metriche di area:
  - Numero di porte logiche generiche
  - Numero di porte logiche a due ingressi
  - Numero di implicanti o di implicati
  - Numero di letterali

Costo di una funzione (1/3)

- Il costo in termini di *letterali* C_L è pari al numero delle variabili indipendenti della funzione, ciascuna moltiplicata per il numero di volte che essa compare nella forma
- Il costo in termini di *funzioni* o *porte* C_P è pari al numero delle funzioni elementari f_i che la compongono, che per reti unilaterali è uguale al numero complessivo di porte adoperate
- Il costo in termini di *ingressi* C_I è pari al numero delle funzioni f_i che la compongono, ciascuna moltiplicata per le variabili (dipendenti o indipendenti) di cui è funzione. Per reti unilaterali tale costo equivale al numero complessivo di porte adoperate, ciascuna pesata per il numero di ingressi (fan-in)
  - $f=b(\overline{a}+c+d)$ $C_L = 4$ $C_P = 2$ $C_I = 5$
  - $f=bc(a\overline{d}+\overline{b}+c)+\overline{c}(d+\overline{a})(b+c)$ $C_L = 11$ $C_P = 7$ $C_I = 17$

Costo di una funzione (2/3)

a) F3=AB+C(D+E)

b) F3=AB+CD+CE

costo ingressi=8 per (a) e 9 per (b)

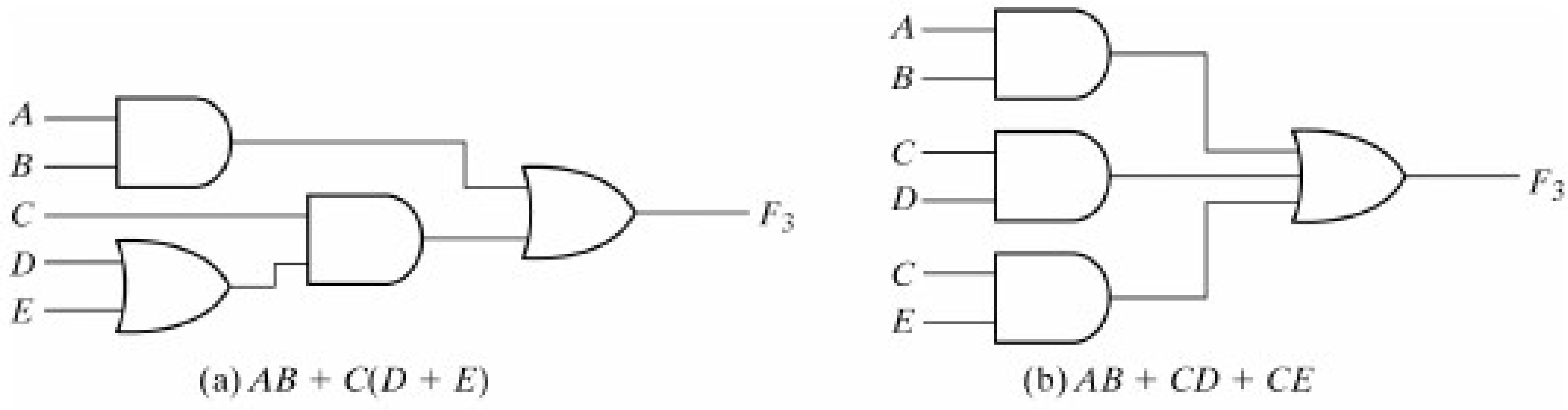


Fig. 2-4 Three- and Two-Level implementation

Costo di una funzione (3/3)

a) $G=ABCD+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

b) $G=(\overline{A}+B)(\overline{B}+C)(\overline{C}+D)(\overline{D}+A)$

- Costo letterali a) e b) è pari a 8 ma la forma b) occupa una maggiore area
  - Costo ingressi è pari a 8+2=10 per a)
  - Costo ingressi è pari a 8+4=12 per b)

Ottimizzazione di funzioni combinatorie (1/3)

- I metodi di ottimizzazione delle funzioni combinatorie sono basati sull'applicazione delle proprietà dell'Algebra di Boole:

- $P1+P2 = xP + \overline{x}P = (x+\overline{x})P = P$
  - in tal caso si dice che P1 e P2 generano consenso

- Idempotenza: $P+P=P$

- Esse consentono di semplificare l'espressione di una funzione a partire dalla sua rappresentazione in forma canonica, che ne assicura la copertura in termini di somma di mintermini (o prodotto di maxtermini)

Ottimizzazione di funzioni combinatorie (2/3)

- L'applicazione di tali proprietà è alla base del processo di espansione, volto a trasformare l'espressione algebrica di una funzione in modo da costruire termini prodotto (o somma) costituiti dal minor numero possibile di letterali.
- Si introduce così il concetto di implicante, ossia un prodotto (o una somma) di letterali risultante dal processo di espansione, che assorbe più mintermini (maxtermini) semplificando la copertura di una funzione

Ottimizzazione di funzioni combinatorie (3/3)

- Applicando ripetutamente il processo di espansione ad una funzione è possibile determinare un insieme di implicanti primi, ossia non ulteriormente semplificabili, candidati a far parte della copertura ottima della funzione.
- Fra gli implicanti primi è possibile estrarre un set di implicanti primi essenziali, necessari alla copertura poiché sono gli unici a coprire qualche “uno” della funzione; la copertura ottima conterrà dunque tali implicanti essenziali più un sottoinsieme degli implicanti primi rimanenti, scelti secondo un criterio di costo

Tre tipologie di ottimizzazione dei circuiti combinatori

- Circuiti a 2 livelli e 1 uscita: metodo esatto per identificare i primi implicanti essenziali e un metodo esatto o approssimato (branch & bound) per identificare una copertura ottima
  - **In questo corso tratteremo solo questo problema**
- Circuiti a 2 livelli e più uscite: esistono metodi approssimati per trovare la copertura ottima basati sull’identificazione di implicanti primi essenziali di ogni singola uscita.
- Circuiti a più livelli e più uscite: numerosi metodi approssimati per esplorare diverse alternative di area e ritardo (i più efficaci: sintesi ottima a 2 livelli di porzioni del circuito a 1 uscita)

Costo Forma Minima: esempio

$$f = bc\,(a\overline{d} + \overline{b} + c) + \overline{c}\,(d + \overline{a})\,(b + c)$$

$$\Updownarrow$$

CL=11; CP=7; CI=17

$$f = b\,(\overline{a} + c + d)$$

CL=4; CP=2; CI=5

Alcuni presupposti teorici (1/3)

- Una funzione $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ può essere espressa come una somma contenente soltanto i suoi implicanti primi (forma PI)
- Dim
  - Se la funzione in forma elementare $y = \sum A_i$ contiene un termine A_k non PI si ha allora $A_k \Rightarrow P_j \Rightarrow y$ con P_j primo implicante;
  - P_j può essere aggiunto alla y e si ottiene $y = \sum A_i + P_j$;
  - essendo $A_k + P_j = P_j$, A_k può essere eliminato dalla forma di y, dove viene sostituito da P_j
  - Il ragionamento va ripetuto per tutte le clausole non PI

Alcuni presupposti teorici (2/3)

- Una forma elementare che minimizzi i valori dei costi C_L e C_I è una forma PI
- Fra le forme minime a 2 livelli che minimizzano C_P ne esiste almeno una PI
- Sotto il vincolo di rete a 2 livelli, la forma minima va allora cercata tra le forme PI
  - Dim: Fra tutte le forme elementari non PI, si scelga quella minima; se questa viene trasformata in una forma PI nella quale P_j sostituisce A_k, poiché P_j è una clausola di ordine inferiore ad A_k, diminuisce C_L (diminuendo i letterali) e diminuisce C_I (diminuendo il numero di variabili indipendenti della funzione componente) mentre C_P non aumenta (diminuisce se era già nella sommatoria, resta inalterato altrimenti).

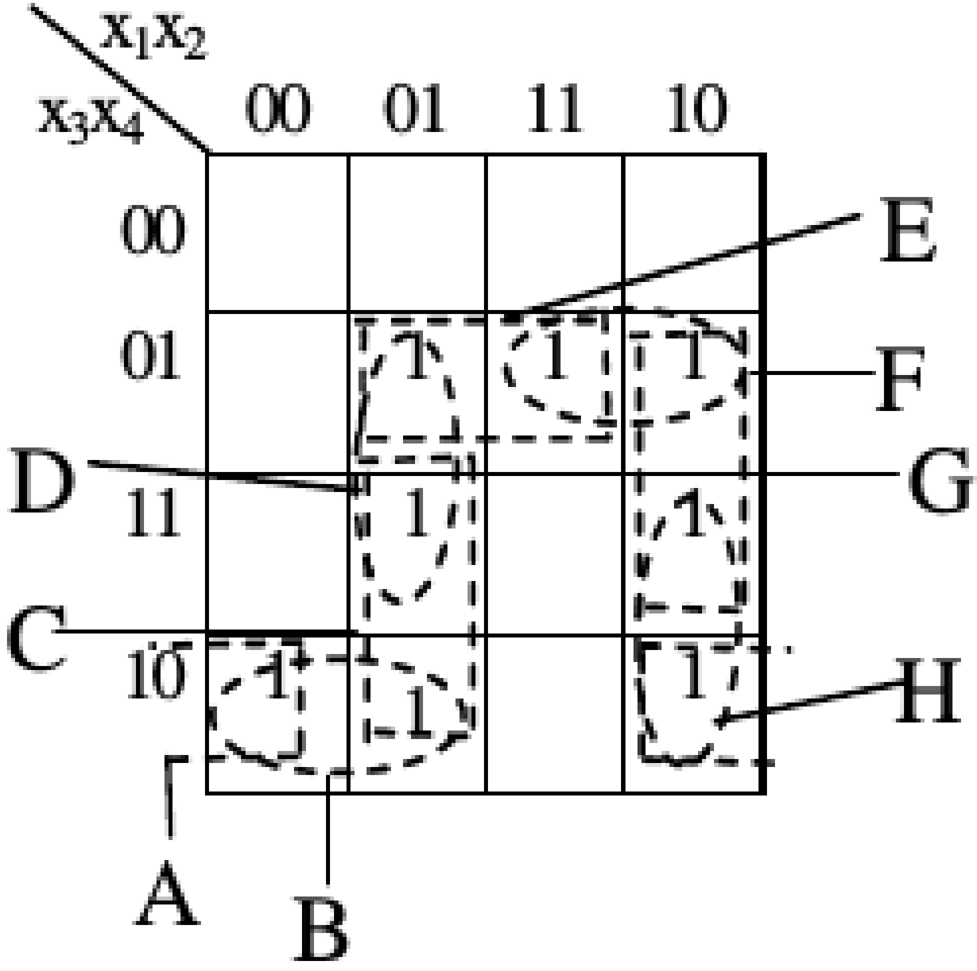
Alcuni presupposti teorici (3/3)

- Un implicante primo E_i di una funzione f è detto essenziale se è l'unico ad essere implicato da un mintermine di f
- In altri termini, E_i è l'unico a "coprire" un determinato mintermine della funzione
- Il nucleo N della funzione è la somma dei suoi implicanti primi essenziali

$$N = \sum_{i=1}^{k} E_i$$

- Ogni forma minima di f è del tipo f = N+R con N ed R eventualmente nulli

Funzioni cicliche (N=0)



N = 0

Metodi di ottimizzazione

- I Metodi di Ottimizzazione possono essere classificati in due macrocategorie:
  - Metodi Esatti
    - Karnaugh
    - Quine-McCluskey
  - Euristiche

Procedura per la minimizzazione

1) Espansione: ricerca di tutti gli implicanti primi della funzione da minimizzare, costituiti dai sottocubi di area massima sulle mappe
2) Selezione degli implicanti primi essenziali, per individuare il nucleo N
3) Copertura: determinazione del sottoinsieme minimo di implicanti primi della funzione in grado di coprire tutti i mintermini non coperti dagli implicanti primi essenziali

<table>
<tr><td>Espansione</td><td rowspan="2">Karnaugh (fino a 5 variabili)</td><td>Quine - McCluskey</td></tr>
<tr><td>Selezione implicanti primi essenziali</td><td></td></tr>
<tr><td>Copertura</td><td colspan="2">Matrice di Copertura</td></tr>
</table>

Il metodo delle Mappe di Karnaugh - fase di espansione

I mintermini semplificabili sono rappresentati da celle adiacenti sulle mappe: l’operazione di espansione viene effettuata a partire da ogni mintermine in tutte le direzioni per raggrupparne un numero equivalente a una potenza di 2.

Ciascun mintermine può appartenere a più raggruppamenti

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

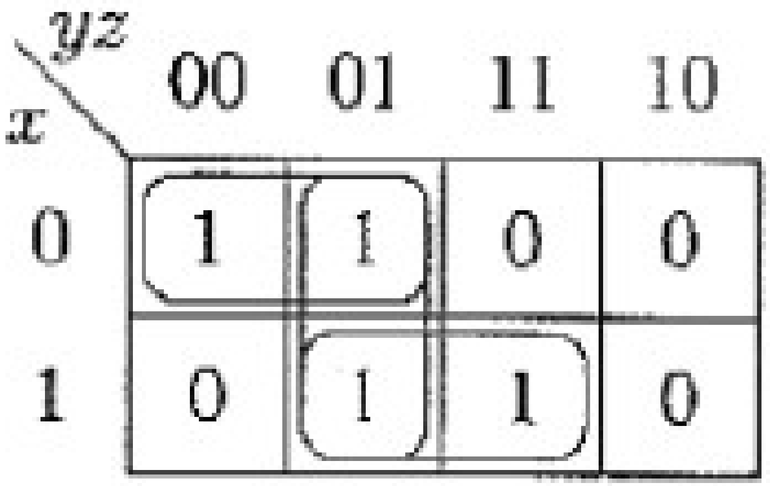
(a)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

(b)

Mappa di Karnaugh della funzione $f(x, y, z) = xyz + xyz' + x'yz'$

Il metodo delle Mappe di Karnaugh-Esempio 1



Considerando tutti gli implicanti primi individuati si ottiene l'espressione: $f(xyz)= \overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}z + xz$ che non risulta minima

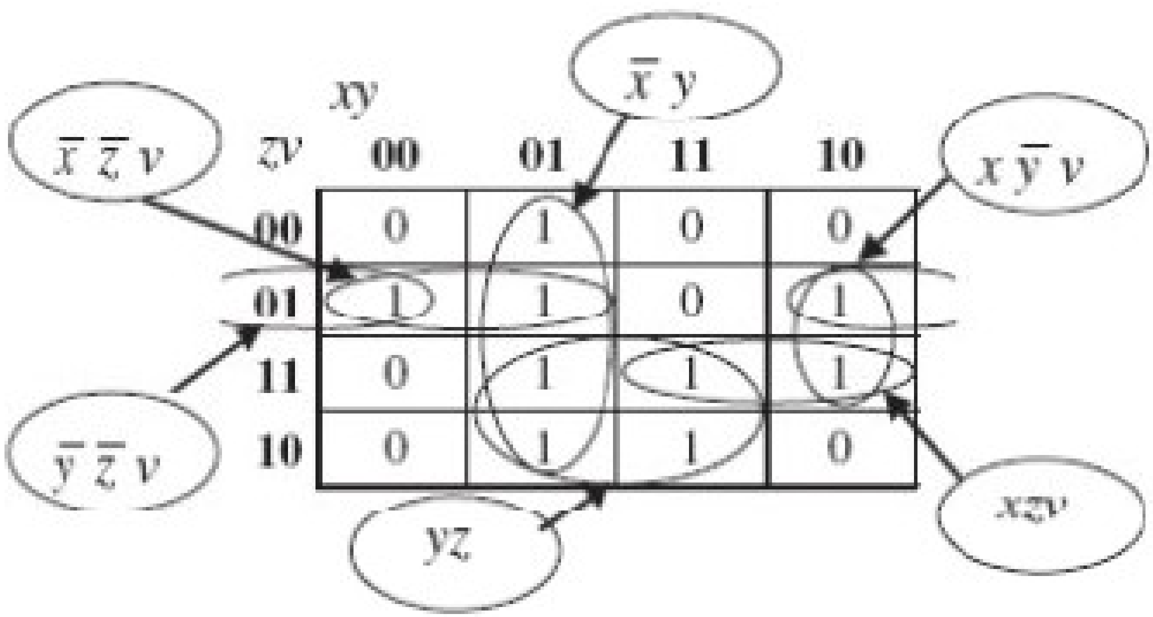
Esaminando la mappa si nota che gli implicanti $\overline{x}\,\overline{y}$ e xz sono sufficienti a coprire tutti gli 1 della funzione, e quindi fanno parte della copertura minima mentre l'implicante $\overline{y}z$ può essere trascurato. In definitiva quindi:

$f(xyz)= \overline{x}\,\overline{y} + xz$

Il metodo delle Mappe di Karnaugh- Esempio 2

- Mappa di Karnaugh per la funzione

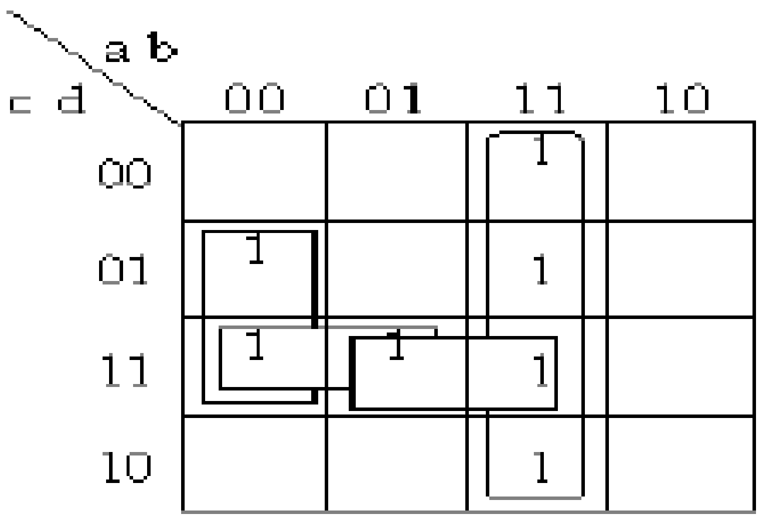
  f(x,y,z,v)=Σ{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 15)
- I Primi Implicanti PI sono i sottocubi di area massima
- Esaminando la mappa si nota che gli implicanti primi $\bar{x}y$ e yz sono essenziali e bisognerà aggiungere altri implicanti per garantire la copertura di tutti gli 1 della funzione (per esempio $\bar{x}\bar{z}v$ e xzv)



Ricerca PI sulle mappe di Karnaugh

- Gli implicanti primi sono individuati graficamente come sottocubi di area massima

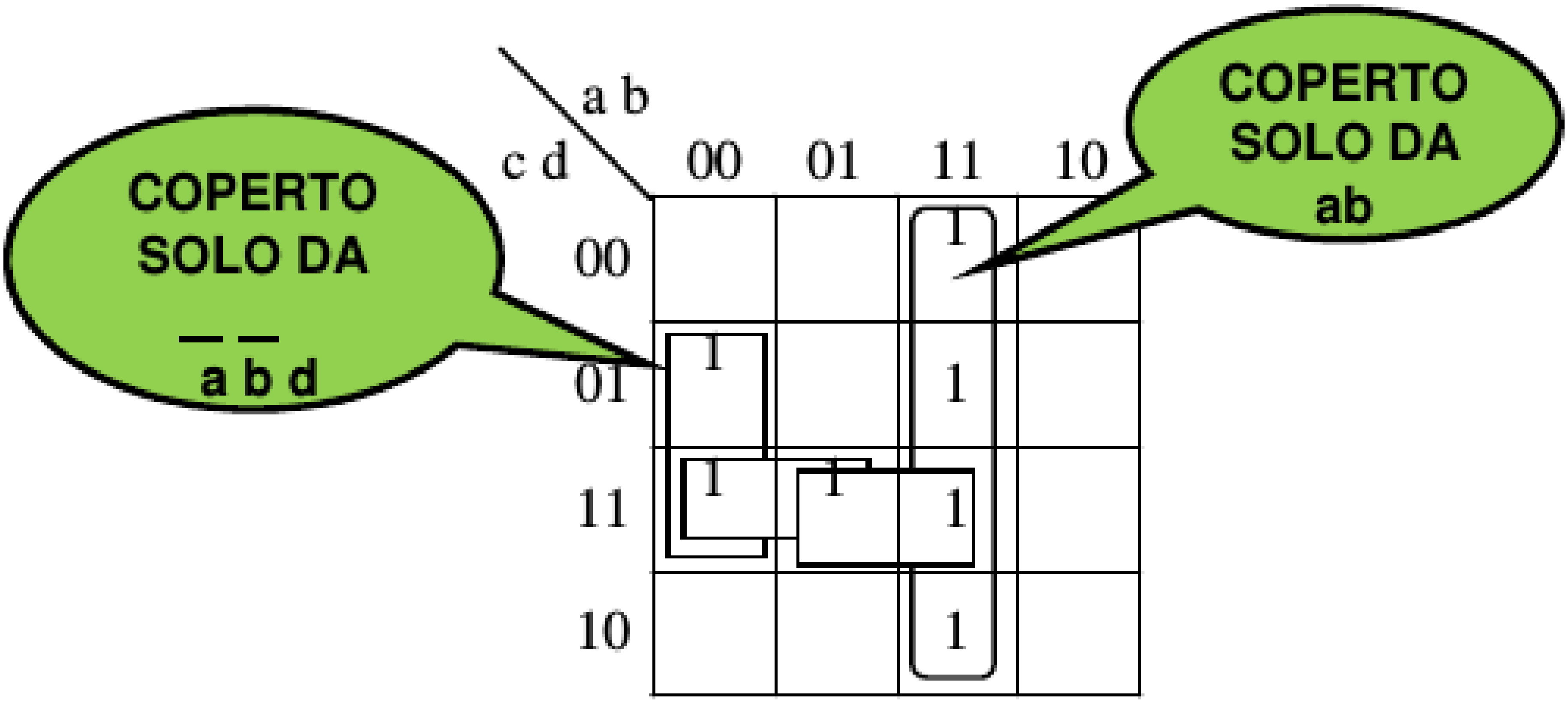
$$f = abcd + \bar{a}\,bcd + \bar{a}\bar{b}\,cd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\,d + ab\,\bar{c}\,d + abc\,\bar{d} + ab\,\bar{c}\bar{d}$$



Implicanti primi: $bcd,\ \bar{a}\,cd,\ \bar{a}\bar{b}\,d,\ ab$

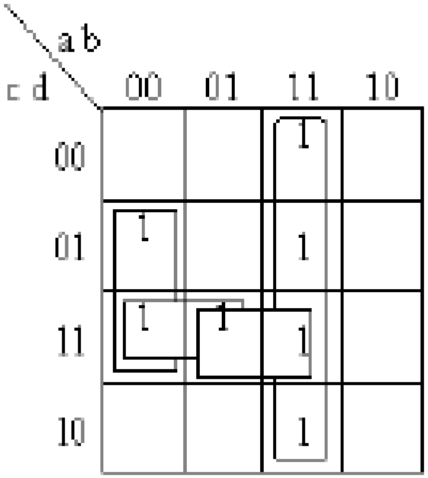
Individuazione del nucleo sulle mappe di Karnaugh

- Sono essenziali gli implicanti primi che da soli ricoprono un "1"



Matrice di copertura e copertura minima

- Individuati gli implicanti primi, occorre scegliere tra di essi un insieme minimo che consenta di "coprire" tutta la funzione



Mintermini

	abcd	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
A	00-1	1	1					
B	0-11		1		1			
C	-111				1			1
D	11--			1		1	1	1

Implicanti primi

Copertura minima

- Un modo generale per definire il problema della copertura è il seguente:
  - data una matrice di N righe e M colonne, i cui elementi siano $a_{ij} = 1$ oppure $a_{ij} = 0$, si dice che una riga i *copre* una colonna j se $a_{ij} = 1$
  - *Il problema è quello di selezionare il numero minimo di righe che coprono tutte le colonne*
- Il problema della copertura è di interesse generale in molti settori differenti
  - ad esempio, in problemi di testing

Individuazione del nucleo sulla matrice di copertura

- Sulla matrice di copertura corrispondono alle righe che coprono le colonne con un unico ‘1’
- Nell’esempio N = A + D

		abcd	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
ESSENZIALE	A	00-1	1	1					
	B	0-11		1		1			
	C	-111				1			1
ESSENZIALE	D	11--			1		1	1	1

Metodi di copertura minima

- Trovare la copertura minima vuol dire trovare la forma minima di R, cioè quegli implicanti che, pur non essendo essenziali, devono essere eventualmente aggiunti al nucleo per trovare una forma che "copra" tutti i mintermini
- Per funzioni di poche variabili, la scelta dei PI di R da aggiungere a quelli essenziali di N può essere fatta direttamente sulla mappe di Karnaugh, valutando visivamente le varie (poche) alternative possibili
- Un metodo tabellare: righe/colonne dominanti

Righe/colonne dominanti

- Chiamiamo “linea” indifferentemente una riga o una colonna
- Una linea L domina la linea K se la “include”, ovvero se contiene tutti i suoi 1

La colonna di destra domina quella di sinistra

	C	D			
A	1	1	0	1	0
B	0	1	0	1	0

La riga in alto domina l’altra

- Se si eliminano le **righe dominate** e le **colonne dominanti** da una matrice di copertura, se ne trae una equivalente
  - che rappresenta, cioè, il medesimo problema di copertura

Matrice di copertura: criteri di dominanza

- La riga i domina la riga j se l’implicante Pi copre tutti i mintermini che copre l’implicante Pj più almeno uno
  - i mintermini coperti dall’implicante dominato sono un sottoinsieme dei mintermini coperti dall’implicante dominante: scegliendo di eliminare l’implicante dominato e mantenere il dominante avremmo la certezza di coprire un insieme maggiore di mintermini, con un costo totale di copertura di sicuro non maggiore di quello che si avrebbe facendo la scelta opposta
- La colonna i domina la colonna j se il mintermine mj è coperto da un sottoinsieme degli implicanti che coprono mi
  - qualsiasi implicante copra mj copre anche mi: scegliendo di eliminare il mintermine mi e mantenere mj avremmo la certezza che gli implicanti selezionati per coprire quest’ultimo coprono anche il primo, con un costo totale di copertura non maggiore di quello che si avrebbe facendo la scelta opposta

Righe/colonne dominanti

- Il metodo tabellare per righe/colonne dominanti procede allora come segue:

1. Si ricercano gli implicanti primi (PI) e si individuano quelli essenziali;
2. Si includono nella forma minima i PI essenziali, eliminandoli dalla matrice, unitamente con i mintermini ricoperti;
3. Si eliminano le righe dominate e le colonne dominanti;
4. Si individuano i PI essenziali “secondari” della matrice così ridotta;
5. Si ripetono i passi 2, 3, 4 finché è possibile

Individuazione del nucleo sulla matrice di copertura

- Sulla matrice di copertura corrispondono alle righe che coprono le colonne con un unico ‘1’
- Nell’esempio N = A + D

		abcd	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
ESSENZIALE	A	00-1	1	1					
	B	0-11		1		1			
	C	-111				1			1
ESSENZIALE	D	11--			1		1	1	1

A seguito dell’eliminazione, si osserva che il mintermine 0111 è coperto da B o da C (e scegliamo di coprirlo con B):

F = A + D + B

Metodo di Quine-McCluskey

- Metodo per individuare gli implicanti primi (anche per funzioni di più di 5 variabili)
- Si ordinano i mintermini in corrispondenza dei quali la funzione vale 1 in senso crescente in base al numero di “1” contenuti, dividendoli in classi
- Ogni elemento di ciascuna classe viene confrontato con tutti gli elementi della classe immediatamente successiva allo scopo di individuare consensi
- Ogni volta che due implicanti generano un consenso devono essere marcati poiché non rappresentano implicanti primi
- Il procedimento viene ripetuto finché non è più possibile determinare consensi; gli implicanti che risulteranno non marcati sono gli implicanti primi della funzione

Esempio di minimizzazione (1/6)

$$f(a, b, c, d, e) = \sum(0, 1, 2, 8, 9, 15, 17, 21, 24, 25, 27, 28, 31) =$$
$$= \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,e + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,d\,\bar{e} + \ldots$$

Espansione tramite mappe di Karnaugh

e = 0

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1			
11				
10			1	

e = 1

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11		1	1	
10				1

Esempio di minimizzazione (2/6)

f (a, b , c , d , e) = ∑(0, 1, 2, 8, 9, 15, 17, 21, 24, 25, 27, 28, 31)

Espansione tramite metodo di Quine-McCluskey

0	00000	✔
1	00001	✔
2	00010	✔
8	01000	✔
9	01001	✔
17	10001	✔
24	11000	✔
21	10101	✔
25	11001	✔
28	11100	✔
15	01111	✔
27	11011	✔
31	11111	✔

0, 1	0000-	✔
0, 2	000-0	I
0, 8	0-000	✔
1, 9	0-001	✔
1, 17	-0001	✔
8, 9	0100-	✔
8, 24	-1000	✔
9, 25	-1001	✔
17, 21	10-01	H
17, 25	1-001	✔
24, 25	1100-	✔
24, 28	11-00	G
25, 27	110-1	F
15, 31	-1111	E
27, 31	11-11	D

0, 8, 1, 9	0-00-	C
1, 9, 17, 25	--001	B
8, 9, 24, 25	-100-	A

Esempio di minimizzazione (3/6)

$f(a, b, c, d, e) = \sum(0, 1, 2, 8, 9, 15, 17, 21, 24, 25, 27, 28, 31) =$

$= \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,e + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,d\,\bar{e} + \ldots$

Implicanti primi	Mintermini coperti
A = -100-	8, 9, 24, 25
B = --001	1, 9, 17, 25
C = 0-00-	0, 1, 8, 9
D = 11-11	27, 31
E = -1111	15, 31
F = 110-1	25, 27
G = 10-01	17, 21
H = 11-00	24, 28
J = 000-0	0, 2

Esempio di minimizzazione (4/6)

	P_0	P_1	P_2	P_8	P_9	P_{15}	P_{17}	P_{21}	P_{24}	P_{25}	P_{27}	P_{28}	P_{31}
A				1	1				1	1			
B		1			1		1			1			
C	1	1		1	1								
D											1		1
E						1							1
F										1	1		
G							1	1					
H									1			1	
J	1		1										

Primi implicanti essenziali: N (nucleo) = J, E, G, H

Esempio di minimizzazione (5/6)

	P_0	P_1	P_2	P_8	P_9	P_{15}	P_{17}	P_{21}	P_{24}	P_{25}	P_{27}	P_{28}	P_{31}
A				1	1				1	1			
B		1			1		1			1			
C	1	1		1	1								
D											1		1
E						1							1
F										1	1		
G							1	1					
H									1			1	
J	1		1										

Gli implicanti primi essenziali J,E,G,H coprono i mintermini: 0, 2, 15, 17, 21, 24, 28, 31

Esempio di minimizzazione (6/6)

	P_1	P_8	P_9	P_{25}	P_{27}
A		1	1	1	
B	1		1	1	
C	1	1	1		
D					1
F				1	1

Riga D dominata dalla F
Colonna P_9 dominante

	P_1	P_8	P_{25}	P_{27}
A		1	1	
B	1		1	
C	1	1		
F			1	1

F implicante primo essenziale secondario

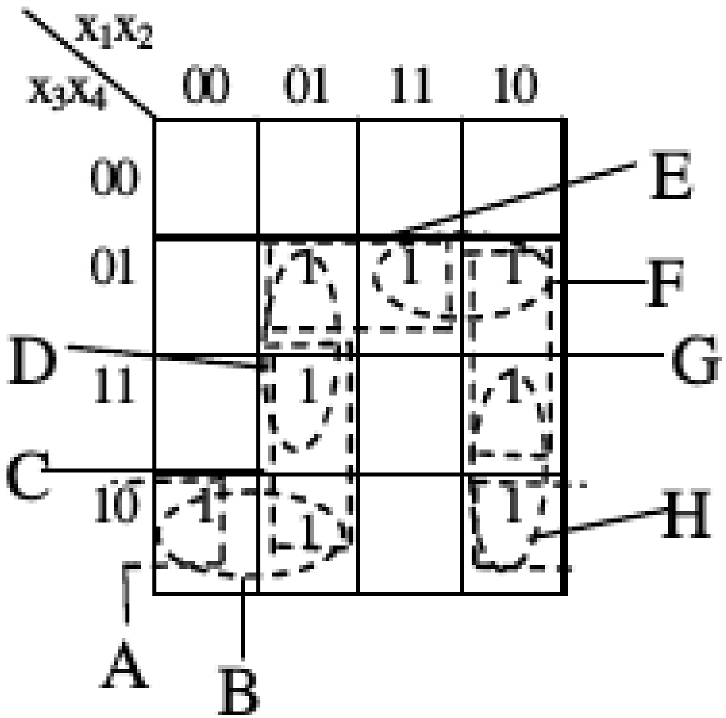
	P_1	P_8
A		1
B	1	
C	1	1

Righe A e B dominate dalla C

$$f(a, b, c, d, e) = \sum(0, 1, 2, 8, 9, 15, 17, 21, 24, 25, 27, 28, 31) = J + E + G + H + F + C$$
$$= \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{e} + b\,c\,d\,e + a\,\bar{b}\,\bar{d}\,e + a\,b\,\bar{d}\,\bar{e} + a\,b\,\bar{c}\,e + \bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d}$$

Un altro esempio: funzione ciclica

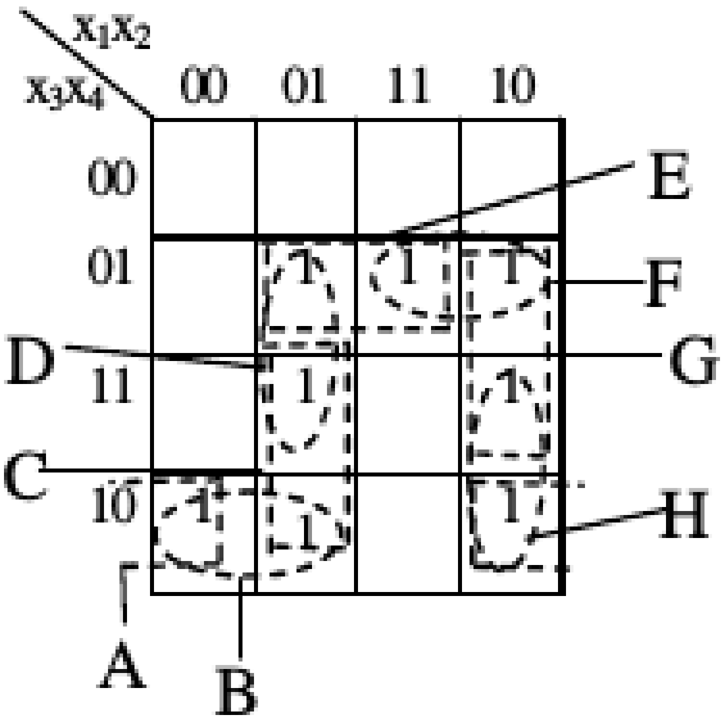
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A+C+E+G oppure B+D+F+H



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

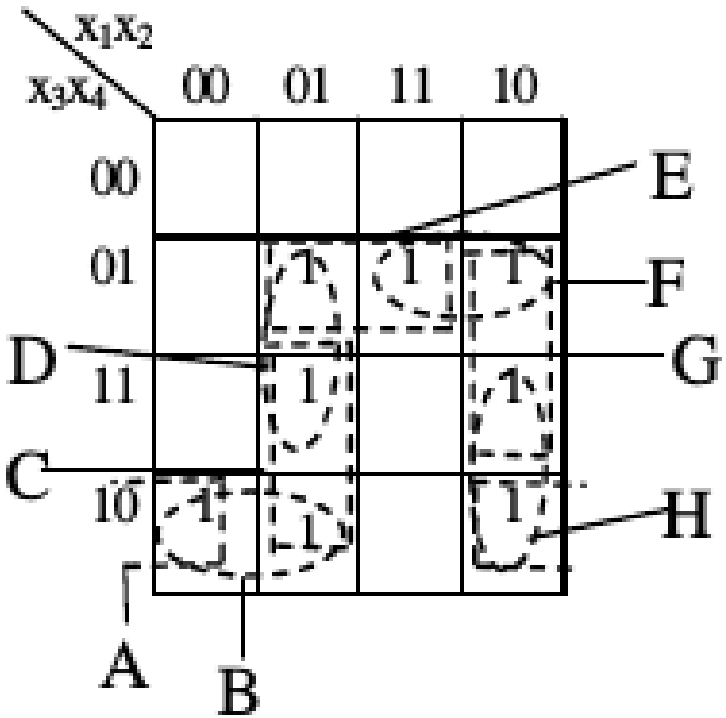
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

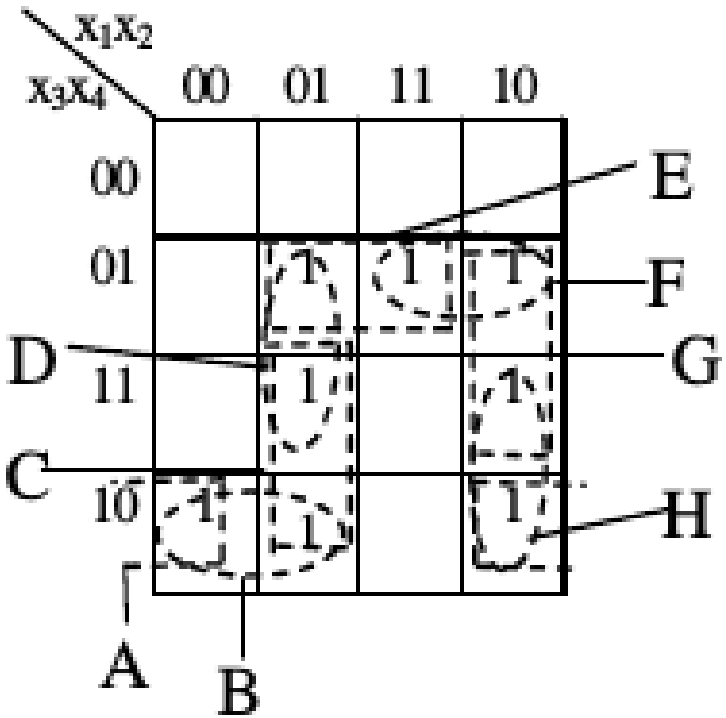
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

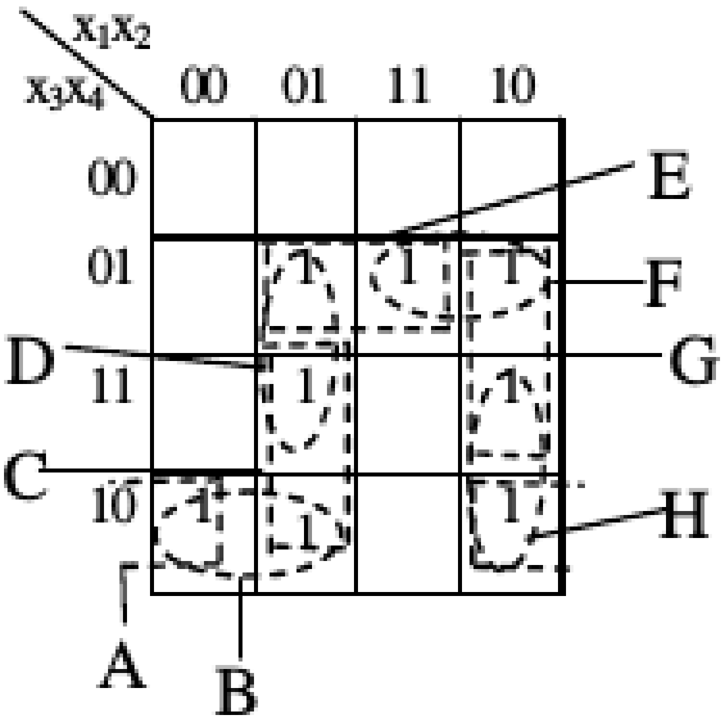
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

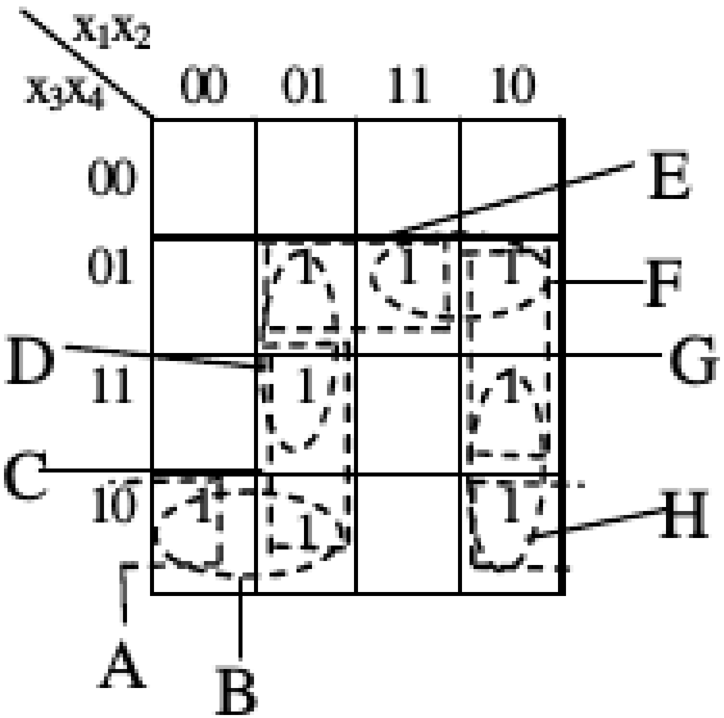
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A + C



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

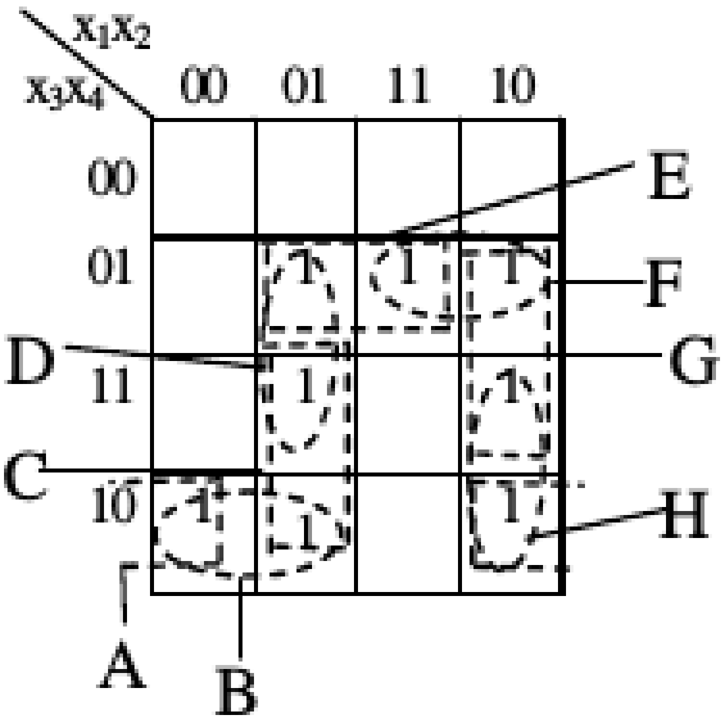
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A + C



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

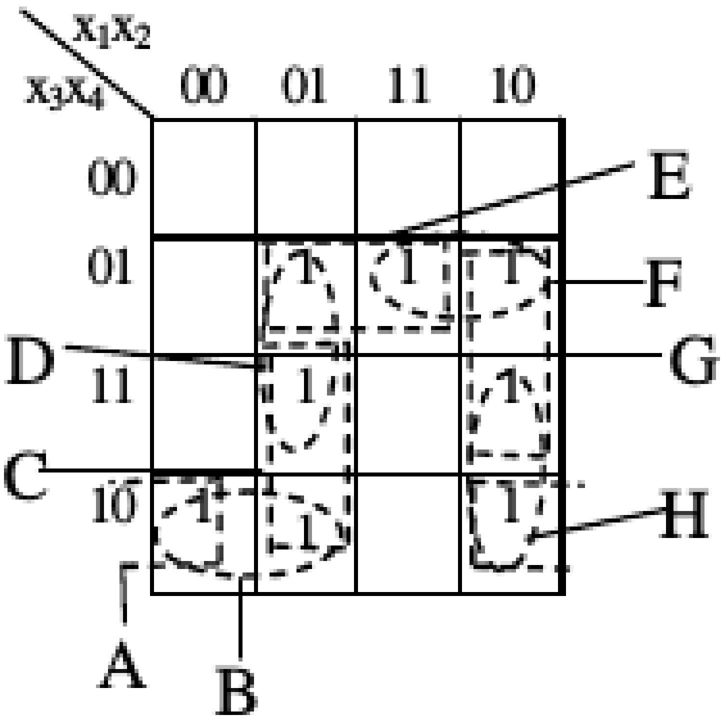
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A + C



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

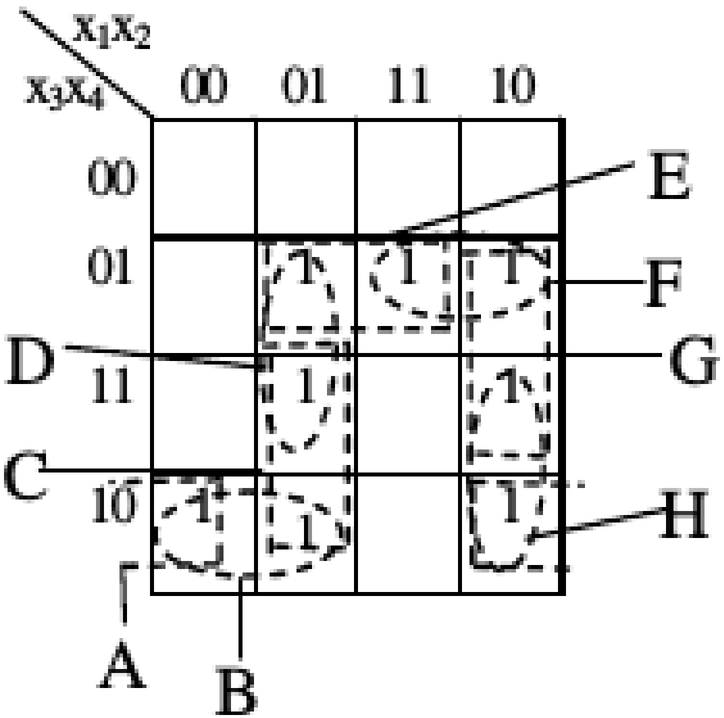
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A + C + E



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

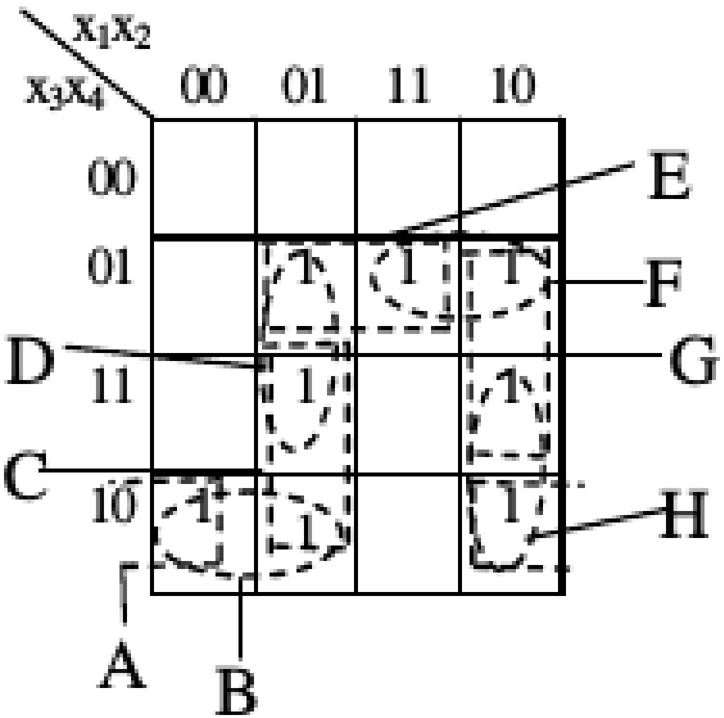
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A + C + E



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

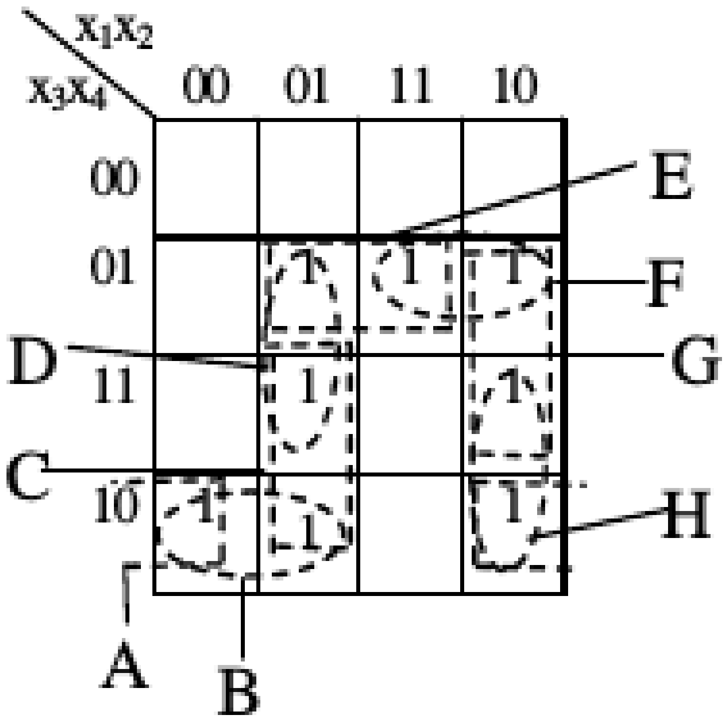
- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A + C + E



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

Un altro esempio: funzione ciclica, selezione di A

- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A + C + E + G



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1