Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
e-mail: teresa.radice@unina.it

Testi consigliati

- Analisi Matematica Uno P. Marcellini, C. Sbordone
  Esercitazioni di Matematica P. Marcellini, C. Sbordone Volume 1 parte prima e parte seconda
- Lezioni di Analisi Matematica volume primo R. Fiorenza, D. Greco

Nozione di insieme

Definizione. (Cantor, 1845-1918) Un insieme è un aggregato caotico di oggetti determinati e distinti.
Gli insiemi li denotiamo con le lettere maiuscole e i loro oggetti, detti elementi, con le lettere minuscole.
Dire che un insieme S è un aggregato caotico di elementi significa che non ha importanza l'ordine con cui gli elementi compaiono in S.
Dire che gli elementi di S sono determinati vuole dire che è possibile stabilire se un elemento appartiene o meno ad S .
Dire che gli elementi sono distinti vuole dire che, se un elemento appartiene a S, vi compare una sola volta.
Sia S composto dai soli elementi a e b, con $a \neq b$, denotiamo l'insieme S nel seguente modo:

$$S = \{a, b\} \quad oppure \quad S = \{b, a\}$$

Se S è un insieme, per esprimere che a è un elemento di S si adopera la notazione:

$$a \in S,$$

e si legge a appartiene a S. Se a non è un elemento di S adoperiamo la notazione

$$a \notin S,$$

e si legge a non appartiene a S.
Si utilizzano anche i seguenti simboli:

$$\exists \qquad \text{esiste,} \quad \text{(quantificatore esistenziale)}$$

$$\forall \qquad \text{per ogni,} \quad \text{(quantificatore universale)}$$

$$\exists! \quad \text{esiste uno ed un solo}$$

$$: \text{tale che}$$

Siano A e B due insiemi.
A è contenuto (o incluso) in B quando ogni elemento di A appartiene anche a B, in tal caso diciamo che A è un sottoinsieme di B e scriviamo

$$A \subseteq B.$$

A è strettamente contenuto in B, quando

1. $A \subseteq B$
2. Esiste almeno un elemento di B che non appartiene all'insieme A.

In tal caso diciamo che A è un sottoinsieme proprio di B e scriviamo

$$A \subset B.$$

Proprietà definite in un insieme

Sia S un insieme, una proprietà α si dice definita nell'insieme S se qualunque sia l'elemento $x \in S$ è verificata una delle seguenti condizioni:

- x gode della proprietà α (cioè α è vera per x),
- x non gode della proprietà α (cioè α è falsa per x) .

Di conseguenza un altro modo per descrivere un insieme è l'esplicitare una proprietà che ne caratterizzi gli elementi,

$$S = \{x : P\}$$

sta a significare che $x \in S$ se, e solo se, x gode della proprietà P.

Esempio. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{automobili\}$

1. α: x è pari
2. β: x è maggiore di 8
3. γ: x è verde.

α e β sono definite in S e non in T. γ è definita in T e non in S. Definire una proprietà vuole dire individuare un sottoinsieme di un insieme.

$$A = \{x \in S : \alpha\} = \{x \in S : x \text{ è pari}\} = \{2, 4\}.$$

β pur essendo definita in S non è soddisfatta da alcun elemento di S. È necessario introdurre un insieme privo di elementi, tale insieme è l'insieme vuoto e si denota con $\emptyset$. Dunque:

$$B = \{x \in S : \beta\} = \{x \in S : x > 8\} = \emptyset.$$

Qualunque sia S, per convenzione, si assume che $\emptyset \subseteq S$.

Se con α e β si denotano due proposizioni (ad esempio ipotesi e tesi di un teorema), per esprimere che la α ha come conseguenza la β si usa la notazione :

$$\alpha \Rightarrow \beta, \tag{1}$$

che si legge α implica β. In altri termini, vuole dire che se è vera la proposizione α, è vera anche la β.
La notazione:

$$\alpha \nRightarrow \beta,$$

che si legge α non implica β, esprime che β non è conseguenza della α.
Qualora si abbia simultaneamente:

$$\alpha \Rightarrow \beta, \quad \beta \Rightarrow \alpha$$

si dice che le le due proposizioni sono equivalenti. Si utilizza la notazione

$$\alpha \iff \beta, \tag{2}$$

che si legge α è equivalente a β.

Quando vale la (1) si dice che la α è condizione sufficiente per il verificarsi della β, oppure che la β è una condizione necessaria per il verificarsi della α. Quando vale la (2) si dice che la α è condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi di β.

Esempio. Sia t una retta assegnata ed r ed s due rette variabili, se α e β sono le proposizioni:

1. α: ciascuna delle rette r, s è parallela a t,
2. β: r e s sono parallele,

vale che $\alpha \Rightarrow \beta$, ma $\beta \not\Rightarrow \alpha$, quindi α e β non sono equivalenti.

In altri termini, condizione sufficiente affinché due rette siano parallele è che ciascuna di esse sia parallela alla retta t, ma la condizione non è necessaria.

Oppure: condizione necessaria affinché due rette siano parallele alla retta t è che siano parallele, ma la condizione non è sufficiente.

Operazioni sugli insiemi

Si chiama intersezione di due insieme A e B l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B. Tale insieme si indica con $A \cap B$ che si legge A intersezione B. Se A e B non hanno elementi comuni si ha $A \cap B = \emptyset$ e i due insieme si dicono disgiunti.
Si chiama invece unione dei due insieme A e B, l'insieme formato dagli elementi di entrambi, ossia dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due. Tale insieme si indica con $A \cup B$ che si legge A unione B.
Si chiama poi differenza di due insiemi A e B, o complemento di B rispetto ad A, e si indica con $A - B$ l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B .
Esempio. Considerati gli insiemi $A = \{1, 5, 3, 6\}$ e $B = \{5, 1, 2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$, $B - A = \{2\}$, $A - B = \{3, 6\}$.

Funzioni

Siano X e Y due insieme non vuoti.
Una funzione di X in Y è una legge ad ogni elemento di X fa corrispondere uno ed uno solo elemento di Y. Per denotare che f è una funzione da X in Y si scrive

$$f: \ X \ \rightarrow \ Y,$$

oppure $y = f(x)$, intendendo che ad ogni elemento $x \in X$ corrisponde, tramite la funzione f l'elemento $y = f(x) \in Y$.
L'insieme X si chiama dominio o insieme di definizione della funzione f.
Il valore $f(x)$ della funzione f in x si chiama immagine di x mediante f.

Esempi

1. $X = \{\text{iscritti alla facoltà di ingegneria}\}$
   $Y = \{16, 17, 18, ..., 88, 89\}$.
   Ad ogni x vogliamo associare l'età di x.
2. $X = \{$ essere umani $\}$, $\quad Y = \{$ donne $\}$.
   Ad ogni x associamo la mamma di x.
3. $X = \{$mamme$\}$, $\quad Y = \{$ figli $\}$
   Ad ogni x associamo il figlio di x.

La 1) trattasi di una funzione da X in Y (almeno che non ci sia un iscritto di età inferiore a 16 o superiore a 89). La 2) trattasi di una funzione. La 3) non è una funzione.

Funzioni invertibili

Una funzione f da X verso Y si dice iniettiva se elementi distinti hanno immagini distinte, cioè, equivalentemente, se sussiste l'implicazione

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

La funzione f si dice poi suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $y = f(x)$, cioè quando ogni elemento dell'insieme Y è immagine di almeno un elemento dell'insieme X

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x).$$

Diremo che la funzione è invertibile o biettiva quando f è contemporaneamente iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni y $\in$ Y esiste uno ed un solo x $\in$ X tale che y = f (x); vale a dire quando ad ogni elemento dell'insieme X corrisponde uno ed un solo elemento dell'insieme Y e viceversa.

$$\forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x).$$

Allora ad ogni $y \in Y$ viene associato un unico $x \in X$ e quindi possiamo considerare

$$f^{-1} : Y \to X.$$

Tale funzione f^{-1} viene denominata funzione inversa.
Ovviamente anche f^{-1} è biettiva e

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in X f$$

$$(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in Y.$$

Sia $f: X \to Y$ una funzione da X verso Y. Il sottoinsieme di Y formato dalle immagini di tutti gli elementi di X si chiama codominio di f

La funzione $f\colon X \to Y$ è suriettiva se e solo se il suo codominio coincide con Y.
Se B è un sottoinsieme di Y, l'immagine inversa di B tramite f indicata con $f^{-1}(B)$ è il sottoinsieme di X definito da

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Siano f e g due funzioni, definite rispettivamente negli insiemi X e Y:

$$x \in X \to f(x), \qquad y \in Y \to g(y).$$

Se $x \in X$, ad esso corrisponde mediante f il valore $f(x)$, il quale può appartenere oppure no all'insieme Y di definizione di g.
Se il valore $f(x)$ appartiene a Y, ad esso corrisponde, mediante g, il valore $g(f(x))$. In tal caso, associando ad x il numero $g(f(x))$ si definisce una legge di corrispondenza, che ha significato per i punti dell'insieme

$$A = \{x \in X : f(x) \in Y\}.$$

Supposto A non vuoto, la funzione che ad ogni $x \in A$ associa il numero $g(f(x))$ si chiama funzione composta mediante f e g; e si denota con $g \circ f$. Il sottoinsieme A di X è non vuoto se e solo se l'insieme di definizione di g ed il codominio di f hanno punti comuni, cioè se e solo se $Y \cap f(X) \neq \emptyset$. In particolare, se risulta $f(X) \subseteq Y$, l'insieme A coincide con X.

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B non vuoti, vogliamo considerare l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (allineamento che si ottiene considerando gli elementi a e b in un certo ordine : a primo elemento e b secondo elemento) del tipo (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$. Tale insieme (leggasi A per B) si denota con $A \times B$ e si chiama prodotto cartesiano degli insiemi A e B. I due elementi $a \in A$ e $b \in B$ si chiamano rispettivamente prima coordinata e seconda coordinata dell'elemento $(a, b) \in A \times B$.
Si noti che se $A \neq B$, gli insieme $A \times B$ e $B \times A$ non coincidono. Il prodotto cartesiano di $A \times A$, cioè l'insieme delle coppie ordinate di elementi di uno stesso insieme A, si denota con A^2.

Esempio.

$$A = \{1, 3, -3\}\,, \quad B = \{1, 4\}$$

il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate:

$$(1,1),\ (1,4),\ (3,1),\ (3,4),\ (-3,1),\ (-3,4).$$

Se f è una funzione da X in Y si dice diagramma (o grafico) di f il seguente sottoinsieme di $X \times Y$

$$G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

dunque si presenta come l'insieme costituito dai punti (x, y) tali che la seconda coordinata è uguale al valore assunto da f in corrispondenza della prima coordinata.

Gli assiomi dei numeri reali

In matematica si fissano dei presupposti (detti postulati o assiomi) e da essi si traggono in modo logico alcuni risultati (teoremi).
Sinonimo di teorema è lemma, spesso utilizzato per un risultato intermedio, utile per dimostrate un altro teorema; altri sinonimi sono corollario e proposizione.
Il nostro punto di partenza è l'esistenza del sistema dei numeri reali.
Esiste cioè un insieme di numeri, che indichiamo con $\mathbb{R}$ su cui è possibile effettuare le quattro operazioni elementari oppure è possibile stabilire quale è il maggiore tra i due numeri.

Assiomi relativi alle operazioni

In $\mathbb{R}$ sono definite le due operazioni

$$+ : (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to a + b \in \mathbb{R} \quad \textit{addizione}$$

$$\cdot : (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to a \cdot b \in \mathbb{R} \quad \textit{moltiplicazione}$$

1) proprietà associativa

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2) proprietà commutativa

$$a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$$

3) la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4) Esistenza degli elementi neutri: esistono in $\mathbb{R}$ due numeri distinti 0 e 1 tali che

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

5) Esistenza degli opposti: per ogni numero reale a esiste un numero reale indicato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0$
6) Esistenza degli inversi: per ogni numero reale $a \neq 0$ esiste un numero reale a^{-1}, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$.

Assiomi relativi all'ordinamento

È definita una relazione di minore o uguale tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:
7) Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali a, b si ha $a \leqslant b$ oppure $b \leqslant a$.
8) Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, allora $a = b$.
9) Se $a \leqslant b$ allora $a + c \leqslant b + c$.
10) Se $0 \leqslant a$ e $0 \leqslant b$ allora valgono anche $0 \leqslant a + b$, $0 \leqslant a \cdot b$.

11) Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che

$$a \leqslant b, \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B. \tag{3}$$

Allora esiste almeno un numero $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leqslant c \leqslant b$, qualunque siano a in A e b in B.
Due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che verificano la (3) si chiamano separati.
Esempi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant -1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$A' = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Due insieme che hanno un unico elemento di separazione si dicono contigui.

Alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali

1) Regola di semplificazione rispetto alla somma: se $a+b=a+c$ allora $b=c$

$$\begin{aligned} b &= b+0=0+b=(-a+a)+b=-a+(a+b) \\ &= -a+(a+c)=(-a+a)+c=0+c=c \end{aligned}$$

2) Regola di semplificazione rispetto al prodotto: se $a \cdot b = a \cdot c$ e se $a \neq 0$ allora $b = c$

$$\begin{aligned} b &= b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot a^{-1}) = (a \cdot b) \cdot a^{-1} \\ &= (a \cdot c) \cdot a^{-1} = c \cdot a \cdot a^{-1} = c \cdot 1 = c \end{aligned}$$

3) Il prodotto $a \cdot b$ è nullo se e solo se almeno uno dei fattori è nullo.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0)$$

$$\Leftarrow$$

Proviamo che $a \cdot 0 = 0$ per ogni numero reale a.
Consideriamo

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a = a + 0$$

quindi per la regola di semplificazione $a \cdot 0 = 0$.

$$\Rightarrow$$

Supponiamo che $a \cdot b = 0$ se $a = 0$ abbiamo dimostrato che $0 \cdot b = 0$.
Se $a \neq 0$, vogliamo dimostrare che $b = 0$. Dato che $a \neq 0$ esiste l'inverso a^{-1} e si ha

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Osservazione: la precedente proposizione fa capire perché non esiste l'inverso di 0. Difatti se p.a. (per assurdo) esistesse $0 \cdot 0^{-1} = 1$ ma $0 \cdot 0^{-1} = 0$.

4) L'opposto di un numero reale è unico.
Per ogni numero reale a esiste l'opposto $-a : a + (-a) = 0$. Se supponiamo che anche $a + b = 0$ allora per la legge di semplificazione dell'addizione $-a = b$, quindi l'opposto è unico.
5) L'inverso di un numero reale $a \neq 0$ è unico.
Per ogni numero reale $a \neq 0$ esiste $a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$. Se supponiamo che anche $a \cdot b = 1$ allora per la legge di semplificazione del prodotto $a^{-1} = b$, quindi l'inverso è unico.

6) Per ogni numero reale a vale che $-(-a) = a$. Difatti $-(-a)$ è l'opposto di $-a$ ma l'opposto di $-a$ è a.
7) $(-a) \cdot b = -a \cdot b$. Per la proprietà distributiva si ha che

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = [(-a) + a] \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

da cui $a \cdot b$ è l'opposto di $(-a) \cdot b$ cioè $-a \cdot b = (-a) \cdot b$.
8) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= -[a \cdot (-b)] = -[(-b) \cdot a] = -[-(b \cdot a)] \\ &= -[-(a \cdot b)] \end{aligned}$$

quindi $-[-(a \cdot b)] = a \cdot b$.

9) $a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \geqslant 0$. Se $a \leqslant b \Rightarrow a - a \leqslant b - a \Rightarrow 0 \leqslant b - a$.
Viceversa se
$b - a \geqslant 0 \Rightarrow a = a + 0 \leqslant (b - a) + a = b + (-a + a) = b + 0 = b$.
10) Proprietà transitiva

$$a \leqslant b \quad \text{e} \quad b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$$

Se $a \leqslant b$ allora $b - a \geqslant 0$, allo stesso modo se $b \leqslant c$ allora $c - b \geqslant 0$ ma allora $0 \leqslant (b - a) + (c - b) = c - a \Rightarrow c \geqslant a$.
11) $a \geqslant 0 \Leftrightarrow -a \leqslant 0$.
$\Rightarrow$ Se $a \geqslant 0$ allora $(-a) + a \geqslant -a + 0 \Rightarrow 0 \geqslant -a$.
$\Leftarrow$ Se $-a \leqslant 0$ allora $a + (-a) \leqslant a + 0 \Rightarrow 0 \leqslant a$.

12) $a \leqslant b$ e $c \geqslant 0$ allora $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.
$a \leqslant b \Rightarrow b - a \geqslant 0$ e $(b-a) \cdot c \geqslant 0$ ma allora per la proprietà distributiva

$$b \cdot c - a \cdot c \geqslant 0 \Rightarrow b \cdot c \geqslant a \cdot c.$$

13) $a \leqslant b$ e $c \leqslant 0$ allora $a \cdot c \geqslant b \cdot c$. Dato che $c \leqslant 0$, $-c \geqslant 0$.

$$-c(b-a) \geqslant 0 \Rightarrow -b \cdot c + a \cdot c \geqslant 0 \Rightarrow a \cdot c \geqslant b \cdot c$$

L’assioma di completezza può sembrare ovvio, ma non tutti gli insiemi hanno il più piccolo e il più grande elemento.

Esempio

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

A è dotato del più grande elemento, ma non del più piccolo.

Tra gli assiomi dei numeri reali vi è l'esistenza degli elementi neutri 0 e 1.

$$1 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + 1 = 2 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + 1 + 1 = 3 \in \mathbb{R}$$

Dunque l'insieme

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, che chiameremo insieme dei numeri naturali.

Nell'insieme dei numeri naturali le operazioni di addizione e moltiplicazione hanno sempre significato.

In $\mathbb{N}$ non vi è l'elemento neutro della addizione.

Consideriamo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. In $\mathbb{N}_0$ non sono soddisfatti tutti gli assiomi, ad esempio l'esistenza dell'opposto. Introduciamo

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

insieme dei numeri interi relativi.

In $\mathbb{Z}$ non è soddisfatto l'assioma dell'esistenza dell'inverso.

Introduciamo

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

$\mathbb{Q}$ è chiamato insieme dei numeri razionali.
Una rappresentazione nella quale numeratore e denominatore sono primi tra loro si dice ridotta ai minimi termini.
Si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{Q}$ soddisfa le proprietà algebriche relative alle operazioni e all'ordine. $\mathbb{Q}$ non gode dell'assioma di completezza, cioè esistono $A \subset \mathbb{Q}$ e $B \subset \mathbb{Q}$ tali da non avere elemento di separazione in $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$$

$$\mathbb{N}_d = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}$$

$$\mathbb{N}_p \cap \mathbb{N}_d = \emptyset, \quad \mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_d = \mathbb{N}$$

Proprietà di Archimede. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.

Proposizione. Non esiste alcun razionale c tale che $c^2 = 2$.

dim. p.a. (per assurdo) esista $c \in \mathbb{Q}$: $c^2 = 2$, dunque $c = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ frazione che possiamo considerare ridotta ai minimi termini.

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = c^2 = 2, \qquad m^2 = 2n^2$$

dato che m^2 è pari implica che m è pari (se m fosse dispari esisterebbe k: $m = 2k - 1$, $m^2 = 4k^2 + 1 - 4k = 2(2k^2 - 2k) + 1$ e dunque m^2 dispari) quindi $m = 2k$, ciò implica $2n^2 = m^2 = 4k^2$, ma allora $n^2 = 2k^2$ essendo n^2 pari anche n sarebbe pari. Di conseguenza sia n che m sono pari, di qui l'assurdo dato che m e n devono essere primi tra loro.

Consideriamo

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a \leqslant 0\} \cup \{a \in \mathbb{Q} : a > 0, \;\; a^2 < 2\}$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} : b > 0, b^2 > 2\}$$

vogliamo dimostrare che $a \leqslant b$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$.
Se p.a. esistessero $\overline{a} \in A$ e $\overline{b} \in B : \overline{a} > \overline{b}$ tale elemento $\overline{a}$ sarebbe positivo (in quanto $b > 0$) e

$$\overline{a}^2 > \overline{a} \cdot \overline{b} > \overline{b}^2 > 2$$

ma allora $\overline{a} \notin A$.
Di qui l'assurdo dato che $\overline{a}$ è un elemento di A.
Dunque A e B sono separati $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$.
Supponiamo p.a. che esista $c \in \mathbb{Q}$: $a \leqslant c \leqslant b$, $\forall a \in A \; \forall b \in B$.

Evidentemente $c \in A$ oppure $c \in B$. Supponiamo $c \in A$, ricordiamo che c il più grande elemento di A non potendo essere $c \leqslant 0$, segue che $c^2 < 2$.
Sia n un numero naturale, maggiore di $\frac{2c+1}{2-c^2}$, certamente esistente per la proprietà di Archimede. Allora sfruttando che $n \leqslant n^2 \Rightarrow \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n^2}$ posso maggiorare nel seguente modo:

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2c}{n} \leqslant c^2 + \frac{2c+1}{n} < c^2 - c^2 + 2 < 2.$$

Dunque $c + \frac{1}{n}$ appartiene a A e questo è assurdo essendo $c + \frac{1}{n} > c$, mentre c è il più grande elemento di A. Analogamente si perviene ad un assurdo supponendo $c \in B$.
Osservazione I due insiemi A e B, costituiti da numeri razionali, possono essere riguardati come insieme di numeri reali e quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leqslant c \leqslant b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Tale numero c tale che $c^2 = 2$ è irrazionale e si denota con $c = \sqrt{2}$.

Proprietà di densità

L'insieme dei razionali è denso in sé, cioè se x e y sono due numeri razionali distinti, esistono infiniti numeri razionali tra essi compresi. Analogamente per $\mathbb{R}$:

1) se x, $y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, esistono infiniti numeri reali tra essi compresi (densità di $\mathbb{R}$ in sé).

2) se x, y sono due numeri reali e distinti esistono infiniti numeri razionali tra essi compresi.

La (2) evidenzia un'importante relazione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$).

3) Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x \neq y$ esistono infiniti numeri irrazionali tra essi compresi. Dunque anche $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Il massimo di A, se esiste, è il numero M dell'insieme A che è maggiore o uguale ad ogni elemento di A

$$M \ \text{ massimo di } \ A \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} M \geqslant a, & \forall a \in A \\ M \in A \end{cases}$$

Si scrive $M = \max A$.

$$m \ \text{ minimo di } \ A \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} m \leqslant a, & \forall a \in A \\ m \in A \end{cases}$$

Si scrive $m = \min A$.
Esempio. $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ non esistono né il massimo, né il minimo (perchè 0 non appartiene ad A).

Proposizione Se esistono il massimo e il minimo di un insieme A essi sono unici.
Siano M_1 e M_2 due massimi di un insieme A vogliamo fare vedere che $M_1 = M_2$.
$M_1 = \max A$, $M_2 = \max A$

$$M_1 \geqslant a, \qquad M_2 \geqslant a, \quad \forall a \in A$$

ma

$$M_1 \in A \Rightarrow M_2 \geqslant M_1$$

$$M_2 \in A \Rightarrow M_1 \geqslant M_2$$

di conseguenza

$$M_1 = M_2.$$

Un numero reale L si dice un maggiorante per un insieme A se $L \geqslant a$, $\forall a \in A$.
Un numero reale l si dice un minorante di A se $l \leqslant a$, $\forall a \in A$.
Esempio $A = \{x \in A : x > 0\}$ non ammette alcun maggiorante, mentre lo 0 e tutti i numeri negativi sono dei minoranti di A.
Diciamo che A è limitato superiormente se ammette un maggiorante. A limitato inferiormente se ammette un minorante.
A è limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente

$$A \text{ limitato} \iff \exists l, L \in \mathbb{R} : \ l \leqslant a \leqslant L, \ \forall a \in A$$

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
e-mail: teresa.radice@unina.it

Teorema di esistenza dell'estremo superiore (inferiore).
Supponiamo che A sia un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente (limitato inferiormente). Allora esiste il minimo dei maggioranti di A (il massimo dei minoranti).
Dimostrazione nel caso che sia limitato superiormente. Sia $B = \{maggioranti\ di\ A\}$, $B \neq \emptyset$ perchè A limitato sup. Per l'assioma di completezza, applicato agli insieme A e B esiste un numero reale M:

$$a \leqslant M \leqslant b, \qquad \forall a \in A, \ \forall b \in B,$$

ma $M \geqslant a$, $\forall a \in A$ quindi M è un maggiorante, quindi appartiene all'insieme B dei maggioranti. Inoltre M è minore o uguale a tutti gli elementi di B. Quindi M è il minimo di B.

Definizione. Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente. Diciamo che $\overline{M} \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A se $\overline{M}$ è il minimo dei maggioranti di A.

$$\overline{M} \textit{ estremo superiore di } A \iff \begin{cases} \overline{M} \geqslant a, \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \overline{a} \in A : \ \overline{M} - \varepsilon < \overline{a}. \end{cases}$$

Si scrive $\overline{M} = \sup A$.
Analogamente, si verifica che se A è un insieme non vuoto ed è limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di A ha un massimo.
Si dice che $\overline{m}$ è l'estremo inferiore di A se $\overline{m}$ è il massimo dei minoranti di A. Ciò equivale a:

$$\overline{m} \textit{ estremo inferiore di } A \iff \begin{cases} \overline{m} \leqslant a, \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \overline{a} \in A : \overline{m} + \varepsilon > \overline{a}. \end{cases}$$

Si scrive $\overline{m} = \inf A$.

Quindi, se un insieme è limitato superiormente esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente esiste l'estremo inferiore ed è reale. Se A è limitato allora esistono $\sup A$ e $\inf A$ e sono numeri reali.
Introduciamo i simboli $+\infty$ e $-\infty$ per descrivere gli insiemi non limitati

$$\sup A = +\infty \iff \forall L, \exists a \in A : a > L,$$

$$\inf A = -\infty \iff \forall l, \exists a \in A : a < l.$$

Facendo uso dei simboli $-\infty$ e ∞ si può affermare che ogni insieme non vuoto ammette sia estremo superiore che inferiore.

Esempi

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$$\sup A = +\infty, \quad \inf A = 0$$

Osservazione: il massimo e il minimo dell'insieme A non esistono.

2. $B = \left\{\frac{n-1}{n}, \ \ n \in \mathbb{N}\right\}$

$$\sup B = 1, \ \ \inf B = \min B = 0$$

oss. $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, $0 > -\frac{1}{n} \geqslant -1$, $1 > 1 - \frac{1}{n} \geqslant 0$

3. $C = \left\{\frac{n+1}{n}, \ \ n \in \mathbb{N}\right\}$

$$\inf C = 1, \ \ \sup C = \max C = 2$$

Siano $a, b \in \mathbb{R} : a \leqslant b$. Introduciamo le seguenti notazioni per indicare un intervallo di estremi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

intervallo aperto di estremi a e b .

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

intervallo chiuso di estremi a e b.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$$

intervallo superiormente semiaperto di estremi a e b.

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

intervallo inferiormente semiaperto di estremi a e b.

Intervalli illimitati

Qualunque sia $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$. Si chiama insieme ampliato dei numeri reali e si denota con $\hat{\mathbb{R}}$ l'insieme $\mathbb{R}$ con l'aggiunta di $+\infty$ e $-\infty$.

$$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Dato $a \in \mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali x che verificano:

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$$

intervallo chiuso illimitato inferiormente, di estremo superiore a.

$$]-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

intervallo aperto illimitato inferiormente, di estremo superiore a.

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$$

intervallo chiuso illimitato superiormente, di estremo inferiore a.

$$(a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

intervallo aperto illimitato superiormente, di estremo inferiore a.

Esempi

1. $A = [2, 3[$,
$$\inf A = \min A = 2, \quad \sup A = 3$$
2. $B = [-1, 2[\cup \{3\}$
$$\inf B = \min B = -1, \quad \sup B = \max B = 3$$
3. $C = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$,
$$\sup C = \max C = 1, \quad \inf C = 0$$
4. $D = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
$$\inf D = \min D = 0, \quad \sup D = 1$$

Siano A e B due insieme non vuoti di $\mathbb{R}$, A e B si dicono separati se

$$a \leqslant b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Tale relazione è equivalente a

$$\sup A \leqslant \inf B$$

Definizione. Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, A e B si dicono contigui se

$$\sup A = \inf B = c$$

Tale numero c si dice elemento di separazione di A e B.
Proposizione. Siano A e B due sottoinsieme non vuoti di $\mathbb{R}$. A e B sono contigui se e solo se A e B sono separati e soddisfano la condizione che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in A \text{ e } \exists y_\varepsilon \in B : y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$$

Consideriamo una retta r e fissiamo su di essa un punto O (origine) un punto U (punto unità), distinto da O. Restano fissati su r due versi di percorrenza, fra loro opposti: chiameremo positivo il verso secondo il quale O precede U, negativo l'altro. La retta r risulta così orientata, e delle due semirette di origine O, private dell'origine, quella cui appartiene U si chiama semiretta positiva, l'altra semiretta negativa. Una retta orientata si chiama anche asse, ed allora la semiretta positiva e la semiretta negativa si dicono semiasse positivo e semiasse negativo. Indichiamo tali assi con $\overrightarrow{r^+}$ e $\overrightarrow{r^-}$. Prendiamo come unità di misura il segmento OU per ogni punto P di r denotiamo con $\overline{OP}$ la misura rispetto ad OU del segmento di estremi O e P.

Poniamo:

$$x_P = \begin{cases} \overline{OP} \quad se \;\; P \in \overrightarrow{r^+} \\ 0 \quad , \quad se \;\; P = O \\ -\overline{OP} \quad se \;\; P \in \overrightarrow{r^-} \end{cases}$$

In tale modo ad ogni punto $P \in r$ viene associato il numero reale x_P che si chiama ascissa di P. Ad U viene associato 1.
Reciprocamente si dimostra che ogni numero reale x è l'ascissa di un ben determinato punto P della retta r: tale punto è l' immagine del numero reale x sulla retta r. I punti di $\overrightarrow{r^+}$ sono le immagini dei numeri positivi, i punti di $\overrightarrow{r^-}$ sono le immagini dei numeri reali negativi, l'origine immagine dello zero.
La corrispondenza fra i numeri reali e le loro immagini sulla retta fornisce la rappresentazione geometrica dei numeri reali. Si usa quindi identificare i punti della retta con le rispettive ascisse.

Siano X e Y due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$.
X e Y si dicono equipotenti se esiste una corrispondenza biunivoca tra X e Y.
Un insieme X di $\mathbb{R}$ si dice finito se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che X è equipotente all'insieme $\{1, .., n\}$. Il numero n si dice cardinalità di X. Si scrive $|X| = n$ per denotare che X è equipotente a $\{1, .., n\}$ e quindi X ha n elementi. Un insieme $X \neq \emptyset$, che non sia finito si dice infinito. Evidentemente un insieme finito non può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria, quindi ogni insieme equipotente ad una sua parte propria è infinito. Un sottoinsieme Y di $\mathbb{R}$ che non sia finito si dice numerabile se è equipotente a $\mathbb{N}$. In questo caso $|Y| = |\mathbb{N}|$.

Caratterizzazione degli insiemi infiniti. Un insieme X è infinito se e solo se è equipotente ad una sua parte propria.
L'insieme dei numeri naturali pari

$$f : n \in \mathbb{N} \to 2n \in \mathbb{N}_p$$

è biunivoca. Di conseguenza $|\mathbb{N}_p| = |\mathbb{N}_d| = |\mathbb{N}|$

$$f : n \in \mathbb{N} \to 2n - 1 \in \mathbb{N}_d$$

biunivoca. L'insieme $\mathbb{N}$ è infinito.

Principio di induzione

Supponiamo di avere una proposizione, che indichiamo con P_n, dipendente da un indice $n \in \mathbb{N}$; P_n è vera per ogni n se

1. P_1 è vera;
2. per ogni $k \in \mathbb{N}$, P_k implica P_{k+1}.

Esempio. Formula per calcolare la somma dei primi n numeri naturali

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

1) per $n = 1$ vera, difatti $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$
2) vera per $n \Rightarrow$ vera per $n+1$. Vogliamo dimostrarla per $n+1$ (successivo di n)

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Diseguaglianza di Bernoulli. Per ogni numero reale $x \geqslant -1$ e per ogni numero naturale n risulta

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

per $n = 1$ si ha $1 + x = 1 + x$. Voglio fare vedere che, dal supporre la proposizione vera per n, la si dimostra anche per $n + 1$.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x\end{aligned}$$

nell'ultima disuguaglianza abbiamo utilizzato che dal momento che: $nx^2 \geqslant 0$ abbiamo $1 + x + nx + nx^2 \geqslant 1 + (1 + n)x$.

Somma di una progressione geometrica di ragione $x \neq 1$:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad \forall x \neq 1.$$

Per $n = 1$, abbiamo

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = 1 + x,$$

quindi è vera. Supponiamola vera per n dimostriamola per $n + 1$

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^{n+1} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned}$$

Come i numeri reali si rappresentano su una retta, così gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}^2$, cioè le coppie ordinate di numeri reali, si possono rappresentare su un piano.
Fissati in un piano un punto O, che si chiama origine, e una coppia Ox, Oy di assi ortogonali passanti per O, si assegni su ciascuno di tali assi un'unità di misura. Per ogni P del piano, indichiamo con P' e P'' le proiezioni ortogonali di P rispettivamente sull'asse Ox e sull'asse Oy; il punto P' è allora l'immagine di un numero reale a rispetto al riferimento assunto sull'asse Ox e il punto P'' è l'immagine di un numero reale b rispetto al riferimento assunto sull'asse Oy.

In tale modo ad ogni punto P del piano resta associata una coppia ordinata (a, b) di numeri reali, ossia un elemento di $\mathbb{R}^2$. I due numeri a e b si chiamano le coordinate cartesiane ortogonali del punto P, e si dicono rispettivamente ascissa e ordinata di P, rispetto al sistema di coordinate cartesiane ortogonali (O, x, y), o al riferimento cartesiano (O, x, y). L'asse Ox si chiama asse delle ascisse e l'asse Oy asse delle ordinate.
Viceversa, assegnata una coppia (a, b) di numeri reali, esiste uno ed un solo punto P del piano avente per ascissa a e per ordinata b, il punto P è l'immagine, sul piano dell'elemento (a, b) di $\mathbb{R}^2$.

Siano f una funzione reale definita in X.
Poichè il codominio di f è un insieme numerico, ad esso possono riferirsi tutte le nozioni concernenti gli insieme numerici. Invece di dire il codominio di f è limitato superiormente, il codominio di f è dotato di massimo ed invece di parlare di maggioranti del codominio di f, di estremo superiore del codominio di f si preferisce dire, con il linguaggio più conciso, la funzione f è limitata superiormente, la funzione f è dotata di massimo e parlare di maggioranti della funzione f, di estremo superiore della funzione f. Riportiamo per completezza le definizioni:

Si dice che una funzione è limitata superiormente (limitata inferiormente) se il suo codominio $f(X)$ è limitato superiormente (limitato inferiormente). Se k è un maggiorante (minorante) di $f(X)$, si dice che k è un maggiorante (minorante) della funzione f, e questo significa che:

$$f(x) \leqslant k \quad (f(x) \geqslant k) \qquad \forall x \in X.$$

L'estremo superiore (inferiore) del codominio $f(X)$ si chiama l'estremo superiore (inferiore) della funzione f, e si indica con:

$$\sup f, \quad \sup_{x \in X} f(x) \qquad (\inf f, \quad \inf_{x \in X} f(x))$$

Si ha quindi che se $\sup f = M$:

1. $f(x) \leqslant M \quad \forall x \in X$;
2. $\forall \varepsilon > 0$ esiste almeno un punto $\overline{x} \in X$ tale che $f(\overline{x}) > M - \varepsilon$.

Allo stesso modo per $\inf f = m$

1. $f(x) \geqslant m \quad \forall x \in X$;
2. $\forall \varepsilon > 0$ esiste almeno un punto $\underline{x} \in X$ tale che $f(\underline{x}) < m + \varepsilon$

Quando l'estremo superiore (inferiore) della funzione f è un valore da essa assunto, cioè quando esiste almeno un punto x'' (x') di X tale che:

$$f(x'') = \sup f \qquad (f(x') = \inf f)$$

si dice che la funzione f è dotata di massimo (o di minimo), e l'estremo superiore (inferiore) si chiama il massimo e il minimo della funzione f, e si indica con :

$$\max f, \qquad \max_{x \in X} f(x) \quad (\min f, \quad \min_{x \in X} f(x))$$

ogni punto nel quale la funzione assume il suo massimo (minimo) valore si chiama un punto di massimo (di minimo) della funzione f.

Se la funzione f non è limitata superiormente (inferiormente), essa è sprovvista di numeri maggioranti (minoranti) e pertanto qualunque sia il numero reale k esiste almeno un punto $x_k \in X$ tale che:

$$f(x_k) > k \qquad (f(x_k) < k)$$

si conviene allora di attribuire alla funzione l'estremo superiore $+\infty$ (estremo inferiore $-\infty$) e si scrive:

$$\sup f = +\infty \quad (\inf f = -\infty).$$

Se la funzione è limitata sia superiormente che inferiormente si dice che f è limitata.

Definizione. La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice crescente se $\forall x_1, x_2 \in X$, vale l'implicazione:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in X$ si ha:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ dice decrescente se $\forall x_1, x_2 \in X$ si ha:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

La funzione $f :: X \to \mathbb{R}$ si dice strettamente decrescente se $\forall x_1, x_2 \in X$ si ha:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice monotona quando è crescente oppure decrescente. In particolare, si dice strettamente monotona quando è strettamente crescente o strettamente decrescente.
Se f è crescente (decrescente) allora $-f$ è decrescente (crescente).
Difatti per definizione di crescenza di una funzione

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) \geqslant -f(x_2)$$

$-f$ è decrescente (crescente).
Sia $f : X \to \mathbb{Y}$ una funzione invertibile. Se f è strettamente crescente (strettamente decrescente) allora anche la funzione inversa f^{-1} è strettamente crescente (strettamente decrescente).
Vogliamo dimostrarlo nel caso della funzione f strettamente crescente che se $y_1 < y_2$ si ha $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Se p.a. $\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R} : \ y_1 < y_2$ e $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$ (l'uguaglianza è da escludere per la invertibilità della funzione) si avrebbe $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ ma allora per la stretta crescenza della funzione f si ha : $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$ e di conseguenza $y_1 > y_2$ in contraddizione con l'avere preso che $y_1 < y_2$.

Si chiama funzione lineare una funzione del tipo:

$$y = mx + q$$

dove m e q sono fissati. $m,\ q \in \mathbb{R}$. Consideriamo

$$f : x \in \mathbb{R} \to mx + q \in \mathbb{R}$$

Tale funzione è suriettiva quando $m \neq 0$. Difatti $\forall y \in \mathbb{R} : mx + q = y$ implica che

$$x = \frac{y - q}{m}.$$

- Se $m = 0$, la funzione è costante $y = q$.
- Sia $m > 0$. Se $x_1 < x_2$ allora $mx_1 < mx_2$ di conseguenza $mx_1 + q < mx_2 + q$ e questo significa che $f(x_1) < f(x_2)$. La funzione è strettamente crescente.
- Sia $m < 0$. Se $x_1 < x_2$ allora $mx_1 > mx_2$ e $f(x_1) = mx_1 + q > mx_2 + q = f(x_2)$. La funzione è strettamente decrescente.

m prende il nome di coefficiente angolare e q il termine noto.

Un'equazione è un'espressione del tipo

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

con $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$.
Una soluzione dell'equazione (1) è un numero reale $x : \ f(x) = 0$.
Risolvere un'equazione vuole dire trovare tutte le soluzioni. L'asse delle x ha equazione $y = 0$, dunque risolvere la (1) equivale a determinare le ascisse dei punti del grafico
$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ che hanno ordinata nulla, individuare cioè del tipo $(x, 0)$. L'equazione $mx + q$ con $m \neq 0$ ha soluzione
$x = -\frac{q}{m}$.

Analogamente studiare la disequazione:

$$f(x) > 0, \quad (f(x) < 0)$$

vuole dire determinare l'insieme
$\{x \in A : f(x) > 0\}$, $(\{ x \in A : f(x) < 0\})$. Risolvere
$f(x) = mx + q > 0$, $(f(x) = mx + q < 0)$

- $m > 0$ la soluzione è $x > -\frac{q}{m}$, $(x < -\frac{q}{m})$
- $m < 0$ la soluzione è $x < -\frac{q}{m}$ $(x > -\frac{q}{m})$.

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
e-mail: teresa.radice@unina.it

La funzione valore assoluto di $x \in \mathbb{R}$ è definita da:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -x & \text{se } \ x < 0. \end{cases}$$

Possiamo osservare che $|x| \geqslant 0$. Di conseguenza, consideriamo la funzione:

$$x \in \mathbb{R} \to |x| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Osserviamo che tale funzione definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ è suriettiva, ma non è iniettiva. Difatti a $-a$ e ad a corrisponde lo stesso valore a.

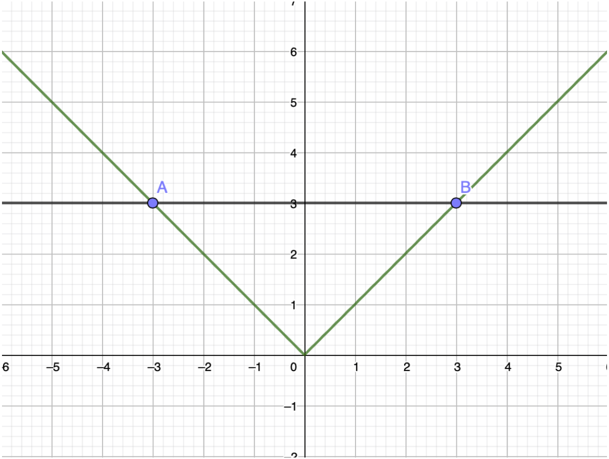


Figura: $f(x) = |x|$

Proprietà della funzione valore assoluto

1. $|x| \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|-x| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \; \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$
5. $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\; x_2 \neq 0.$

Proposizione 1. Per ogni numero reale $r \geqslant 0$ valgono le equivalenze:

$$|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r$$

$$|x| < r \iff -r < x < r$$

$$|x| \leqslant r \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant r \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} x < 0 \\ -x \leqslant r \end{cases} \iff$$

$$\iff \{x : 0 \leqslant x \leqslant r\} \cup \{x : -r \leqslant x < 0\} = \{x : -r \leqslant x \leqslant r\}$$

Si ha

1. $|x| > 0, \; \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$
2. $|x| < 0, \; \nexists x \in \mathbb{R}$.

Disuguaglianza triangolare Per ogni coppia di numeri reali x_1, x_2 vale la disuguaglianza

$$|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$$

dim. $\forall x \in \mathbb{R}$ vale che $|x| \leqslant |x|$. Posto $|x| = r$ si ha per la precedente proposizione:

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$

quindi

$$-|x_1| \leqslant x_1 \leqslant |x_1|$$

e

$$-|x_2| \leqslant x_2 \leqslant |x_2|.$$

Sommando membro a membro:

$$-(|x_1| + |x_2|) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant |x_1| + |x_2|$$

ma allora

$$|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$$

Esercizio. $|x+3|-2>0 \iff |x+3|>2 \iff$

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ x+3>2 \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} x+3<0 \\ -(x+3)>2 \end{cases}$$

Dal primo sistema $x>-1$, dal secondo $x<-5$.
La soluzione è data da $\{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty,-5) \cup (-1,+\infty)\}$.
Analogamente a quanto fatto per la Proposizione 1, si dimostra che sia $r \geqslant 0$, $|x|>r \iff x<-r \cup x>r$. Di conseguenza potevamo risolvere il precedente esercizio trovando direttamente le soluzioni delle seguenti disequazioni:

$$x+3<-2$$

e

$$x+3>2.$$

Otteniamo $x<-5$ e $x>-1$.

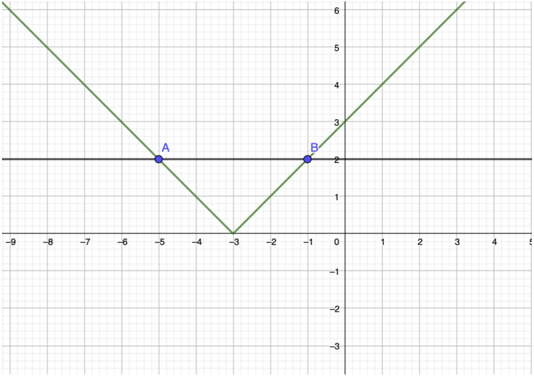


Figura: $f(x) = |x + 3|$

Definizione. Una funzione f definita nell'insieme X si dice pari (dispari) se

1. l'opposto di ogni elemento di X appartiene a X.
2. $\forall x \in X$ si ha:

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

Il diagramma di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (asse di simmetria) mentre il diagramma di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine (centro di simmetria)

La funzione si dice periodica di periodo τ, dove τ è un numero reale positivo, se sono verificate le condizioni:

1. se x è un punto di X, all'insieme X appartengono anche tutti i punti del tipo $x + k\tau$, con $k \in \mathbb{Z}$
2. per ogni $x \in X$ si ha:

$$f(x) = f(x + k\tau)$$

Il codominio della funzione f, periodica di periodo τ, coincide con il codominio della sua restrizione all'insieme $X \cap [0, \tau)$, ed il grafico di f si compone di infinite parti, ciascuna delle quali si ottiene dal grafico della predetta restrizione con una traslazione parallela all'asse delle x e di ampiezza multipla di τ.

Funzione potenza n-esima con $n \in \mathbb{N}$.

La funzione potenza di esponente 0:

$$f(x) = x^0$$

è definita per $x \neq 0$ dall'uguaglianza $x^0 = 1$, e si prolunga nel punto $x = 0$ con il porre $f(0) = 1$. Dunque la potenza di esponente 0 si identifica con la funzione costante in $\mathbb{R}$ uguale a 1.
La potenza di esponente $n \in \mathbb{N}$ è la funzione

$$f(x) = x^n$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $n = 1$ la potenza si riduce alla funzione identica . Supponiamo $n > 1$. Accade che:

1. $(-x)^n = x^n \qquad$ per n pari
2. $(-x)^n = -x^n \qquad$ per n dispari,

se n è pari la funzione è pari, se n è dispari la funzione è dispari.

Consideriamo $[0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ e consideriamo la funzione potenza n-esima definita in $[0, +\infty)$ avremo una funzione g:

$$g : x \in [0, +\infty) \to x^n \in [0, +\infty)$$

1. la funzione è strettamente crescente

$$0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dim. con il principio di induzione. Vera per $n = 1$. Vera per n allora vera per $n + 1$ difatti

$$x_1^{n+1} = x_1 \cdot x_1^n < x_2^n \cdot x_1 < x_2 \cdot x_2^n = x_2^{n+1}$$

2. $\forall y \in [0, +\infty),\ \exists!\, x \in [0, +\infty) : x^n = y.$

Sia $n \in \mathbb{N}_d$ e consideriamo $f : x \in \mathbb{R} \to x^n \in \mathbb{R}$

1. f strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$
2. $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists! x \in \mathbb{R} : x^n = y$.

Abbiamo già dimostrato alcune proprietà nell'intervallo di def. $[0, +\infty)$.
Siano $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0$, ma allora $(-x_1)^n > (-x_2)^n$.
Essendo n dispari $-(x_1)^n > -(x_2)^n \Rightarrow x_1^n < x_2^n$ e quindi la funzione è strettamente crescente.
Sia $y < 0$ si ha $-y > 0\ \exists! x \in [0, +\infty) : -y = x^n$, ma allora $y = -x^n = (-x)^n$.

La funzione $f(x) = x^n$ con $\mathbb{N}_d$ è biunivoca da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, possiamo considerare la f^{-1}:

$$f^{-1} : y \in \mathbb{R} \to x \in \mathbb{R} : x^n = y.$$

Tale funzione inversa, chiamasi radice n-esima ed è per definizione

$$x = \sqrt[n]{y}.$$

Di conseguenza:

$$\sqrt[n]{\cdot} : y \in \mathbb{R} \to \sqrt[n]{y} = x$$

In particolare,

$$f(f^{-1}(y)) = (\sqrt[n]{y})^n = y$$
$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[n]{x^n} = x.$$

La funzione radice n-esima, per $\mathbb{N}_d$ è una funzione strettamente crescente, in quanto inversa di una f strettamente crescente.

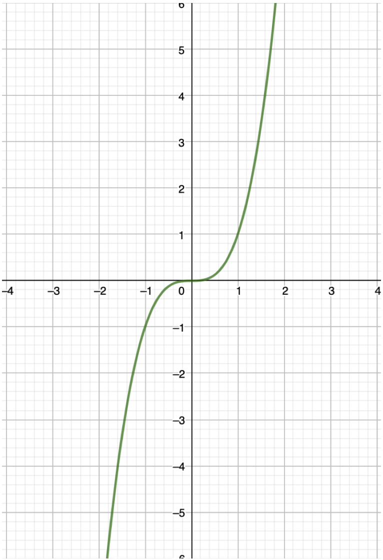


Figura: $f(x) = x^3$

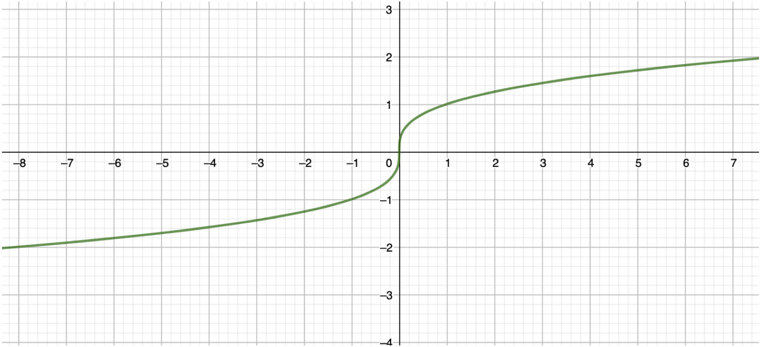


Figura: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Se $n \in \mathbb{N}_p$
$f : x \in \mathbb{R} \to x^n \in [0, +\infty)$

1. f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.
2. $\forall y \in [0, +\infty)$, $\exists! x \in [0, +\infty) : x^n = y$.

Dimostriamo la (1) per l'intervallo $(-\infty, 0)$ sia $x_1 < x_2 < 0$ $\Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow (-x_1)^n > (-x_2)^n \Rightarrow x_1^n > x_2^n$. Di conseguenza la funzione è decrescente in $(-\infty, 0)$.
Osservazione: la funzione non è biunivoca in tutto $\mathbb{R}$ in quanto non è iniettiva. Possiamo restringere l'intervallo affinché si possa considerare una funzione inversa.

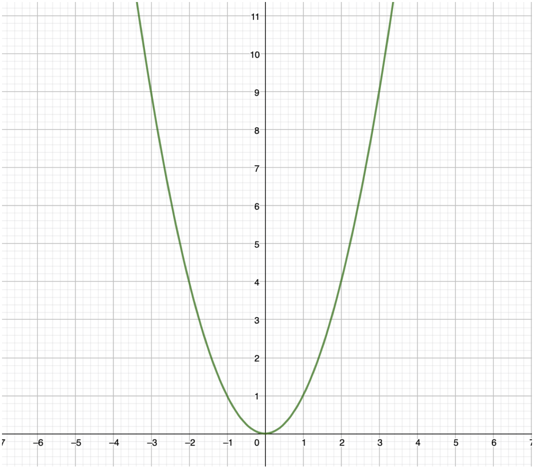


Figura: $f(x) = x^2$

Consideriamo la funzione nell'intervallo $[0, +\infty)$. f ristretta a tale intervallo, cioè

$$f : x \in [0, +\infty) \to x^n \in [0, +\infty).$$

è biunivoca. Possiamo considerare la funzione inversa f^{-1}:

$$f^{-1} : y \in [0, +\infty) \to x \in [0, +\infty) : x^n = y,$$

chiamata radice n-esima, definita da :

$$x = \sqrt[n]{y}.$$

Abbiamo quindi osservato che la funzione x^n non è biunivoca in $\mathbb{R}$, ma lo è in $]-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty)$; le rispettive inverse sono:

$$x = -\sqrt[n]{y} \qquad x = \sqrt[n]{y}$$

entrambe definite nell'intervallo $[0, +\infty)$.

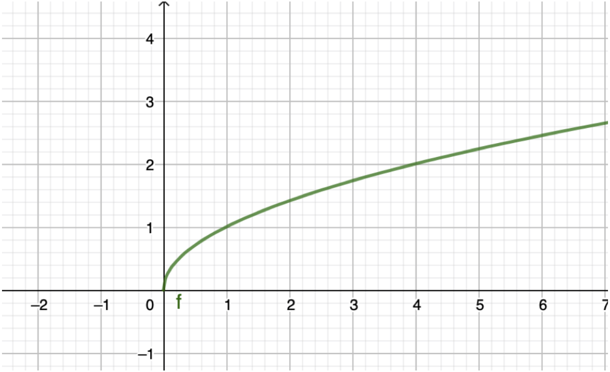


Figura: $f(x) = \sqrt{x}$

Sia $n \in \mathbb{N}_d$. Vogliamo risolvere l'equazione: $x^n = a$, con $a \in \mathbb{R}$.

$$a \to x : x^n = a.$$

Otteniamo come soluzione $x = \sqrt[n]{a}$.
Dalla stretta crescenza della funzione x^n (e di conseguenza stretta crescenza per la funzione inversa) quando $n \in \mathbb{N}_d$:

$$x^n < a \iff \sqrt[n]{x^n} < \sqrt[n]{a} \iff x < \sqrt[n]{a}$$

$$x^n > a \iff \sqrt[n]{x^n} > \sqrt[n]{a} \iff x > \sqrt[n]{a}$$

Considerando, invece, la seguente equazione $\sqrt[n]{x} = a$ con $a \in \mathbb{R}$.
Otteniamo come soluzione $x = a^n$,
Data la stretta crescenza della funzione $\sqrt[n]{x}$ quando $n \in \mathbb{N}_d$

$$\sqrt[n]{x} < a \iff (\sqrt[n]{x})^n < a^n \iff x < a^n$$

$$\sqrt[n]{x} > a \iff (\sqrt[n]{x})^n > a^n \iff x > a^n$$

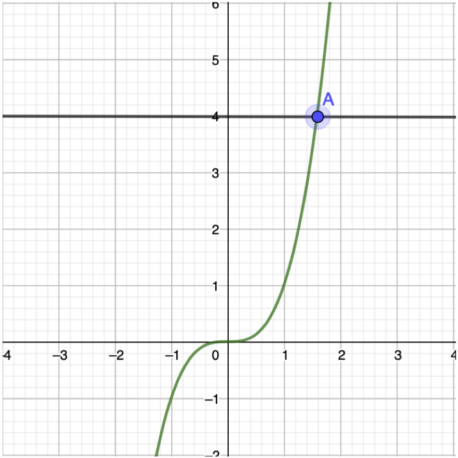


Figura: $f(x) = x^3$

Nel caso generale di $x^n = a$ il punto A intersezione della retta $y = a$ con $y = x^n$ ha coordinate: $(\sqrt[n]{a}, a)$.

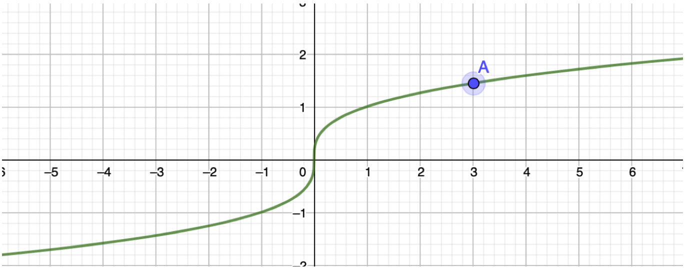


Figura: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Nel caso generale di $\sqrt[n]{x} = a$ il punto A intersezione della retta $y = a$ con $y = \sqrt[n]{x}$ ha coordinate: (a^n, a).

Sia $n \in \mathbb{N}_p$ e studiamo $x^n = a$ con $a \geqslant 0$. Le soluzioni sono date da $x = \sqrt[n]{a}$ e $x = -\sqrt[n]{a}$.

$$x^n < a \iff -\sqrt[n]{a} < x < \sqrt[n]{a} \iff |x| < \sqrt[n]{a}$$

$$\begin{aligned} x^n > a \quad &\iff \quad x < -\sqrt[n]{a} \quad \text{oppure} \quad x > \sqrt[n]{a} \\ &\iff \quad x \in (-\infty, -\sqrt[n]{a}) \cup (\sqrt[n]{a}, +\infty) \end{aligned}$$

Se $a < 0$, $x^n = a$ non ha soluzione. $x^n < a$, $\nexists x \in \mathbb{R}$. $x^n > a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

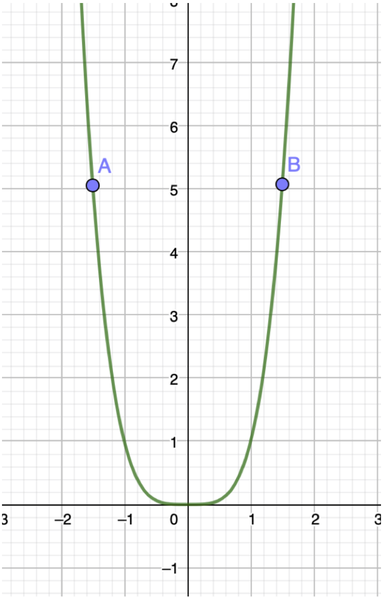


Figura: $f(x) = x^4$

Consideriamo la funzione radice n-esima nel caso di $n \in \mathbb{N}_p$. Sia $a \geqslant 0$

$$\sqrt[n]{x} = a \iff x = a^n$$

$$\sqrt[n]{x} < a \iff x \in [0, +\infty), x < a^n \iff x \in [0, a^n)$$

$$\sqrt[n]{x} > a \iff x > a^n$$

Sia $a < 0$, $\sqrt[n]{x} = a$ non ha soluzione. $\sqrt[n]{x} < a$, $\nexists x \in \mathbb{R}$. $\sqrt[n]{x} > a$, $\forall x \in [0, +\infty)$.

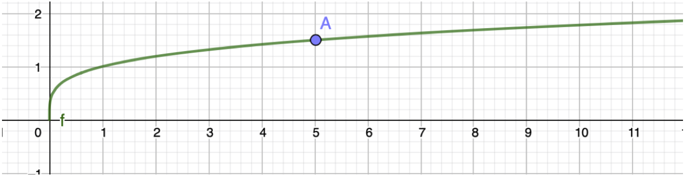


Figura: $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Nel caso generale di $\sqrt[n]{x} = a$ il punto A di intersezione tra la retta $y = a$ e $y = \sqrt[n]{x}$ ha coordinate: (a^n, a)

Esercizi. Risolvere
$$\sqrt[2]{1-x} < 2.$$

1. $X = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \geqslant 0\}$ (insieme di definizione dalla radice quadrata)
2. Elevando al quadrato
$$1 - x < 4, \;\; x > -3$$

La soluzione è $x \in (-3, 1]$.

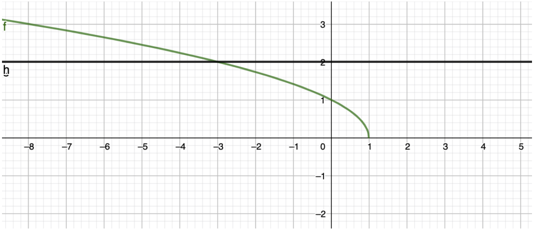


Figura: $f(x) = \sqrt[2]{1-x}$

La funzione potenza di esponente intero negativo

Trattasi della funzione:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

definita per $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
La funzione è pari per n pari, dispari per n dispari, è positiva se n è pari, mentre se n è dispari è positiva in $]0, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, 0[$. Se n è dispari la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, ma non in tutto il suo insieme di definizione. In $(0, +\infty)$ assume qualunque valore reale positivo e in $(-\infty, 0)$ qualsiasi valore reale negativo; pertanto il suo codominio è $\mathbb{R} - \{0\}$. Se n è pari la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$, strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. In ciascuno di tali intervalli assume qualunque valore reale positivo e pertanto il suo codominio è $(0, +\infty)$. Per $n = 1$ il diagramma prende il nome di iperbole equilatera.

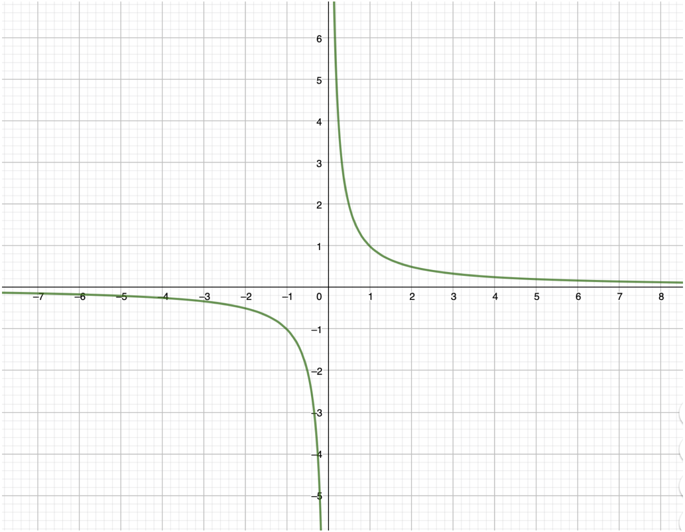


Figura: $f(x) = x^{-1}$

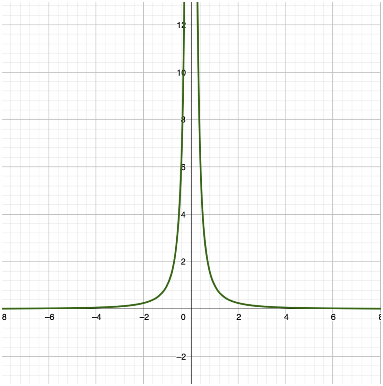


Figura: $f(x) = x^{-2}$

Funzione potenza di esponente $\alpha \in \mathbb{R}$

Detto $\alpha \in \mathbb{R}$, si chiama funzione potenza di esponente α la funzione:

$$f(x) = x^{\alpha}.$$

La funzione è definita in $[0, +\infty)$ se α è positivo, in $]0, +\infty)$ se α è negativo. Se $\alpha = \frac{m}{n}$ (razionale) si ha:

$$x^{\alpha} = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \;\; \forall x > 0 \, (\forall x \geqslant 0 \;\; \text{se } \alpha > 0).$$

Si ha $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ $\forall x > 0$. 0 è il minimo della funzione. Dato che per ogni $y > 0$ l'equazione nella incognita x:

$$x^{\alpha} = y$$

ammette una unica soluzione

$$x = y^{\frac{1}{\alpha}}$$

il codominio della funzione è l'intervallo $[0, +\infty)$ e l'inversa di f, che si ottiene risolvendo la equazione $x^{\alpha} = y$, è definita per $y \in [0, +\infty)$.

Dunque l'inversa della funzione potenza di esponente α è la funzione potenza di esponente $\frac{1}{\alpha}$. La funzione $\sqrt[3]{x}$, definita in $\mathbb{R}$, è il prolungamento in una funzione dispari della potenza $x^{\frac{1}{3}}$. Per $x < 0$ non si deve considerare una potenza, in quanto non ha le proprietà delle potenze; basta osservare che con le regole delle potenze si avrebbe:

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{12}} = ((x^2)^{\frac{1}{12}})^2 \geqslant 0,$$

il che è assurdo per $x < 0$.

$0 < \alpha < 1$

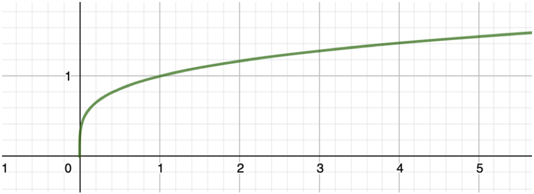


Figura: $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$

$\alpha > 1$

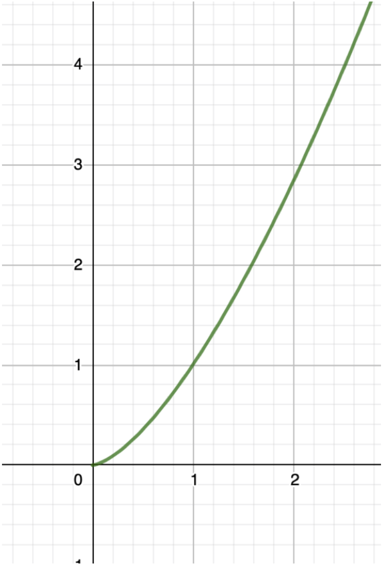


Figura: $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$\alpha < 0$

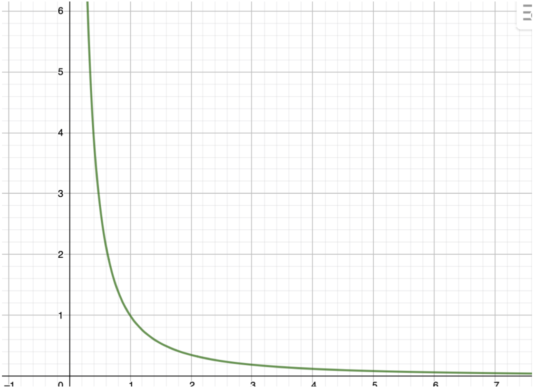


Figura: $f(x) = x^{-3/2}$

Dati $n+1$ numeri reali a_0, a_1, ... a_n con $a_n \neq 0$, la funzione definita in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

si chiama funzione polinomio di grado n, di coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
Se $n = 0$ si ha $f(x) = a_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e f si riduce alla funzione costante a_0.
Per $n = 1$ otteniamo una funzione lineare. Nel caso di coefficienti tutti nulli, si parla di polinomio nullo.
Si chiama funzione razionale ogni funzione del tipo $f = \frac{p_1}{p_2}$, dove p_1 e p_2 sono polinomi, il secondo dei quali non identicamente nullo. Se il denominatore è di grado 0, la funzione f è a sua volta un polinomio e il suo insieme di definizione è $\mathbb{R}$, in caso contrario occorre escludere gli zeri del denominatore.

Vogliamo studiare la funzione polinomio di secondo grado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Risulta che:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si ha:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Formula per il $\Delta/4$ (qualora il coefficiente b sia un multiplo di 2):
$x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$

1 caso: $\Delta > 0$. Se il Δ è positivo, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette due radici distinte x_1, x_2

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2 - \Delta\right] \\ &= \frac{1}{4a}[(2ax+b) + \sqrt{\Delta}][(2ax+b) - \sqrt{\Delta}] \\ &= a(x - \tfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x - \tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Quindi $ax^2 + bx + c > 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Se $a > 0$ deve risultare $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ e questo è possibile se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ hanno lo stesso segno.

Con analogo ragionamento si ottiene:

1. $ax^2 + bx + c > 0,\ a > 0;\ \Delta > 0 \iff x < x_1$ e $x > x_2$,
2. $ax^2 + bx + c > 0,\ a < 0;\ \Delta > 0 \iff x_1 < x < x_2$,
3. $ax^2 + bx + c < 0,\ a > 0;\ \Delta > 0 \iff x_1 < x < x_2$,
4. $ax^2 + bx + c < 0,\ a < 0;\ \Delta > 0 \iff x < x_1$ e $x > x_2$.

2 caso: $\Delta = 0$. Se il discriminante è nullo, la equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette una sola radice reale $x_1 = \frac{-b}{2a}$.
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

1. $ax^2 + bx + c > 0, a > 0, \Delta = 0 \iff \forall x \neq x_1$
2. $ax^2 + bx + c > 0, a < 0, \Delta = 0 \iff$ nessuna soluzione
3. $ax^2 + bx + c \geqslant 0, a > 0, \Delta = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}$
4. $ax^2 + bx + c \geqslant 0, a < 0, \Delta = 0 \iff x = x_1$
5. $ax^2 + bx + c < 0, a > 0, \Delta = 0 \iff$ nessuna soluzione
6. $ax^2 + bx + c < 0, a < 0, \Delta = 0 \iff \forall x \neq x_1$
7. $ax^2 + bx + c \leqslant 0, a > 0, \Delta = 0 \iff x = x_1$
8. $ax^2 + bx + c \leqslant 0, a < 0, \Delta = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}$

3 caso: $\Delta < 0$ Se il discriminante Δ è negativo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ammette soluzioni reali. Non è possibile fare la scomposizione del polinomio $ax^2 + bx + c$ come nel caso del $\Delta > 0$, però si ha:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 - \Delta]$$

Dato che $\Delta < 0$ nella parentesi quadra abbiamo una quantità sicuramente positiva. Perciò il segno di $ax^2 + bx + c$ è identico a quello del coefficiente a si ha:

1. $ax^2 + bx + c > 0, a > 0, \Delta < 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}$
2. $ax^2 + bx + c > 0, a < 0, \Delta < 0 \iff$ nessuna soluzione
3. $ax^2 + bx + c < 0, a > 0, \Delta < 0 \iff$ nessuna soluzione
4. $ax^2 + bx + c < 0, a < 0, \Delta < 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}$.

Risultati analoghi valgono per le disequazioni $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

$\Delta > 0$

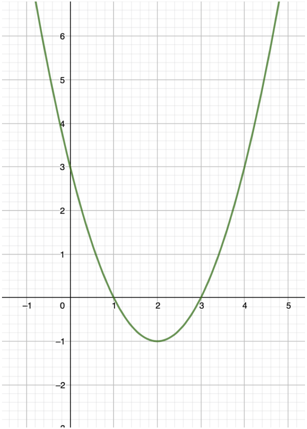


Figura: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$\Delta = 0$

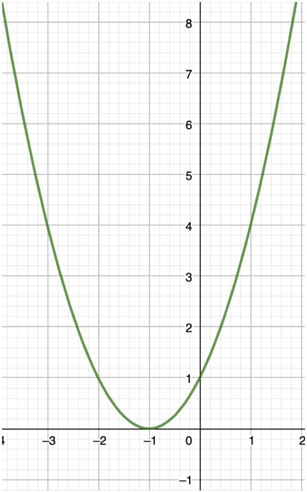


Figura: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$\Delta < 0$

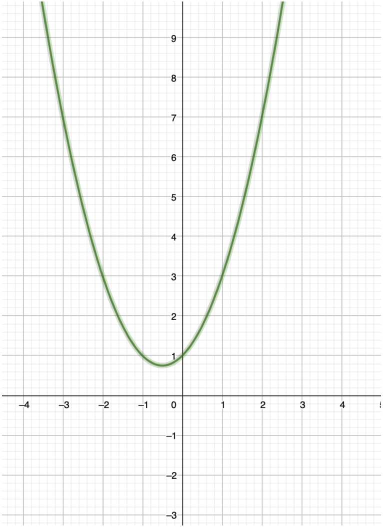


Figura: $f(x) = x^2 + x + 1$

Esempio.

1. $x^2 - 3x + 2 < 0$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{9-8}}{2}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{9-8}}{2}$; $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Le soluzioni sono date da: $1 < x < 2$.
2. $x^2 + 5x > 0$, $x < -5 \cup x > 0$.
3. $16x^2 + 8x + 1 < 0$, $\Delta = 0$, $x = \frac{-4}{16}$ nessuna soluzione.
4. $-x^2 + 7x - 10 \geqslant 0$, $x^2 - 7x + 10 \leqslant 0$. $x_1 = \frac{7-\sqrt{49-40}}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$, $x_2 = \frac{7+\sqrt{49-40}}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$. La soluzione è data da $x \in [2, 5]$.

Fissato un numero naturale n, espressioni del tipo

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x), \quad \sqrt[n]{p(x)} < q(x)$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi si dicono disequazioni irrazionali.
Sia $n \in \mathbb{N}_d$, $y = x^n$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. In formule:

$$x_1 < x_2 \iff x_1^n < x_2^n$$

La funzione x^n è invertibile su tutto l'asse reale ed in particolare anche la sua funzione inversa $\sqrt[n]{x}$ è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, cioè:

$$x_1 < x_2 \iff \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}.$$

In base a tali proprietà, le disequazioni irrazionali con $n \in \mathbb{N}_d$ si risolvono elevando alla potenza n-esima entrambi i membri. Quindi

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \iff p(x) > [q(x)]^n;$$

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \iff p(x) < [q(x)]^n.$$

Esempio.

$$\sqrt[3]{x(x^2-1)} > x-1$$

$$x(x^2-1) > (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$x^3 - x > x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 > 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3}$$

Le soluzioni sono date da $x < \frac{1}{3}$ e $x > 1$.

Sia $n \in \mathbb{N}_p$. Se n è un numero naturale pari $y = x^n$ è crescente per $x \geqslant 0$.

$$0 \leqslant x_1 < x_2 \iff x_1^n < x_2^n$$

e

$$0 \leqslant x_1 < x_2 \iff \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}.$$

1. $\sqrt[n]{p(x)} < q(x)$.
   Eleviamo alla potenza n-esima e richiediamo che $p(x) \geqslant 0$ e $q(x) > 0$. In simboli:

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \iff \begin{cases} p(x) < [q(x)]^n \\ p(x) \geqslant 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}$$

2.

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \iff \begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q(x) \geqslant 0 \\ p(x) > [q(x)]^n. \end{cases}$$

Esercizi. Risolvere la seguente disequazione irrazionale:
$\sqrt[2]{4x^2 - 1} < x - 3$

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x - 3 > 0 \\ 4x^2 - 1 < (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

$$3x^2 + 6x - 10 < 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{3}$$

$$-1 - \frac{\sqrt{39}}{3} < x < -1 + \frac{\sqrt{39}}{3}$$

Dalla seconda $x > 3$. Dato che $3 > -1 + \frac{\sqrt{39}}{3}$ non vi sono soluzioni.

Risolvere la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{2-x^2} > 2x-1$

$$\begin{cases} 2x-1<0 \\ 2-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ 2-x^2 > (2x-1)^2 \end{cases}$$

Soluzioni del primo sistema $-\sqrt{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$, soluzioni del secondo $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$. Soluzione finale $x \in [-\sqrt{2}, 1)$.

Dato un numero reale $a > 0$, la funzione:

$$f(x) = a^x, \quad \text{definita in } \mathbb{R},$$

si chiama funzione esponenziale di base a. Per $a = 1$ si ha $a^x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e la funzione è costante, pertanto supponiamo $a \neq 1$. Per le proprietà delle potenze, qualunque sia $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

Dati due numeri reali y e z, con $y > z$, dato che la funzione potenza x^{y-z} è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ ed assume valore 1 per $x = 1$.
Nel caso $a > 1$ si ha $a^{y-z} > 1$, ne segue $a^y > a^z$. Invece se $a < 1$ si ha $a^{y-z} < 1$ e quindi $a^y < a^z$.
Pertanto la funzione esponenziale di base a è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $a < 1$; di conseguenza la funzione è invertibile.

La funzione assume solo valori positivi e il codominio della funzione esponenziale di base $a \neq 1$ è l'intervallo $]0, +\infty[$, ossia per ogni $y > 0$ l'equazione:

$$a^x = y,$$

nell'incognita x, ammette soluzione. Osservazione: in analisi riveste particolare importanza la funzione esponenziale la cui base è il numero di Nepero dato da

$$e = 2,718281828459045...$$

La funzione esponenziale di base e si chiama semplicemente funzione esponenziale e si denota con e^x. Dato che $e > 1$, il diagramma della funzione esponenziale rientra nel caso $a > 1$.

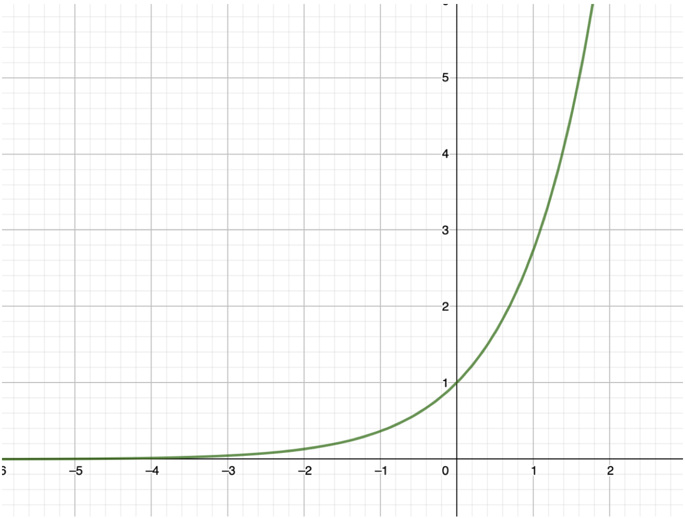


Figura: $f(x) = e^x$

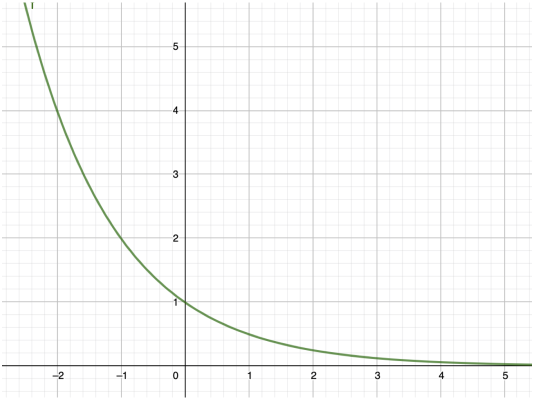


Figura: $f(x) = (1/2)^x$

Se a è un numero positivo diverso da 1, per ogni $y > 0$, l'equazione $a^x = y$, nell'incognita x, ammette una ed una sola soluzione.
Per ogni $y > 0$ l'unica soluzione della $a^x = y$ si chiama logaritmo di y in base a e si denota con:

$$\log_a y.$$

Se la base è maggiore di 1, il logaritmo di un numero maggiore di 1 è positivo, il logaritmo di un numero minore di 1 è negativo.
Se la base è minore di 1, il logaritmo di un numero maggiore di 1 è negativo, il logaritmo di un numero minore di 1 è positivo.
Qualunque sia la base a risulta: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$. Dato il numero a, positivo e diverso da 1, la funzione:

$$f(x) = \log_a x \quad \text{definita in} \quad (0, +\infty)$$

si chiama funzione logaritmo di base a.

Per la definizione di logaritmo di un numero x, se $x \in (0, +\infty)$ e $y \in \mathbb{R}$, sussiste l'equivalenza:

$$\log_a x = y \iff x = a^y$$

e quindi la funzione esponenziale di base a e la funzione logaritmo di base a sono l'una l'inversa dell'altra.
Questo significa che se di un numero $x \in (0, \infty)$ si calcola il logaritmo di base a, e successivamente del numero ottenuto si calcola l'esponenziale di base a, si ritrova x; viceversa se di un $x \in \mathbb{R}$ si calcola l'esponenziale di base a e successivamente del numero ottenuto si calcola il logaritmo di base a, si ritrova x. In simboli:

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La funzione logaritmo di base a, che è definita in $(0, +\infty)$, essendo inversa della funzione esponenziale di base a, ha per codominio $\mathbb{R}$ ed è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $a < 1$.

Alcune proprietà:

1. $\log_a(x_1 x_2) = log_a x_1 + \log_a x_2 \;\; \forall x_1, x_2 > 0$
2. $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \;\; \forall x_1, x_2 > 0$
3. $\log_a x^b = b \log_a x \;\; \forall x > 0$
4. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \;\; \forall x > 0.$

Se x_1 e x_2 sono due numeri positivi, si ha :

$$x_1 = a^{log_a x_1} \quad x_2 = a^{log_a x_2},$$

da cui, moltiplicando e dividendo:

$$x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2}$$

Ne segue:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Elevando a $b \in \mathbb{R}$, si trae:

$$x^b = a^{b \log_a x}$$

$$\log_a x^b = b \log_a x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

In particolare, se $b = -1$, si ha

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x.$$

Si ha che:

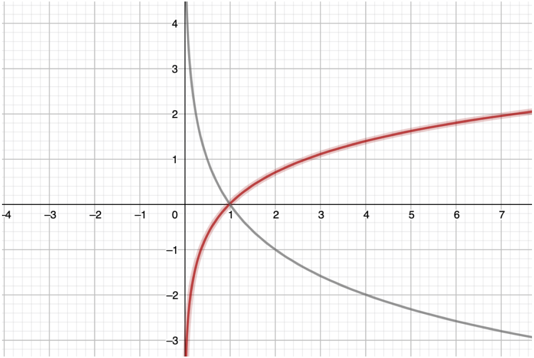
$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$$

che possiamo scrivere anche come:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Esercizi.

1. $2^x < -3$, nessuna soluzione.
2. $2^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
3. $2^x \geqslant 3 \iff \log_2 2^x \geqslant \log_2 3 \iff x \geqslant \log_2 3 \iff x \in [\log_2 3, +\infty)$.
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant 3 \iff \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 3 \iff x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 3 \iff x \in (-\infty, \log_{\frac{1}{2}} 3]$
5. $2^x \leqslant 3 \iff \log_2 2^x \leqslant \log_2 3 \iff x \leqslant \log_2 3 \iff x \in (-\infty, \log_2 3]$.
6. $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 5 \iff x > 0, \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} x} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^5 \iff x \in \left(0, \frac{1}{3^5}\right]$.



In rosso $f(x) = \ln x$ e in grigio $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Per studiare le funzioni trigonometriche è opportuno adottare una diversa unità di misura per gli angoli.
Definiamo la misura di un angolo piano espressa in radianti. Essa è data dalla lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio 1 e centro nel vertice dell'angolo intercettato dalle due semirette individuanti l'angolo. Si conviene indicare con π la lunghezza di una semicirconferenza di raggio 1. Questo significa che, espresso in radianti, un angolo piatto misura π, un angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$, mentre un angolo giro misura 2π. Analogamente a quanto di fa per l'ascissa su di una retta, si definisce un'origine ed un verso di rotazione positivo (si suole scegliere il verso antiorario a partire dall'asse delle x) e si considerano in modo naturale anche gli angoli maggiori di 2π radianti, o minori di zero. Così l'angolo x geometricamente corrisponde all'angolo $x + 2\pi$ ed anche all'angolo $x + 4\pi$, oppure all'angolo $x - 2\pi$ o in generale $x + 2k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Le funzioni $\mathrm{sen} x$ e $\cos x$ si definiscono rispettivamente come l'ordinata e l'ascissa del punto che si trova sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e che sottende un angolo orientato di lunghezza x, a partire dall'asse delle ascisse.
Le funzioni $\mathrm{sen} x$ e $\cos x$ sono definite $\forall x \in \mathbb{R}$, mentre l'immagine delle due funzioni è compresa tra -1 ed 1, cioè:

$$-1 \leqslant \mathrm{sen} x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo di cateti $|\mathrm{sen} x|$ e $|\cos x|$ e ipotenusa uguale a 1, si trova la relazione fondamentale:

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sono importanti anche le formule di addizione:

$$\mathrm{sen}(x_1 \pm x_2) = \mathrm{sen} x_1 \cos x_2 \pm \mathrm{sen} x_2 \cos x_1.$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \mathrm{sen} x_1 \mathrm{sen} x_2.$$

Per $x_1 = x_2 = x$, otteniamo:

$$\mathrm{sen} 2x = 2 \mathrm{sen} x \cos x.$$

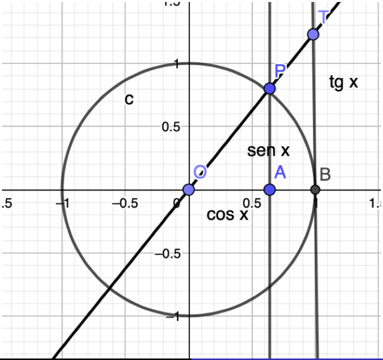
$$\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x.$$

A partire dalle funzioni $\mathrm{sen} x$ e $\cos x$ si definisce la funzione tangente

$$\mathrm{tg} x = \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x}$$

La funzione $\mathrm{tg} x$ è definita se $\cos x \neq 0$, cioè se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Usando le proprietà dei triangoli simili la tangente si può rappresentare come in figura. Risulta che se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ allora vale che:

$$0 < \mathrm{sen} x < x < \mathrm{tg} x.$$



Funzione seno

$$f : x \in \mathbb{R} \to \operatorname{sen} x \in [-1, 1].$$

Trattasi di una funzione periodica di periodo 2π ed è una funzione dispari. Tale funzione non è invertibile in tutto $\mathbb{R}$, tuttavia se consideriamo l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la funzione risulta strettamente crescente in tale intervallo. Ma allora restringendo la funzione a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cioè:

$$\operatorname{sen} x : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \operatorname{sen} x \in [-1, 1]$$

è invertibile. Detta f^{-1} la sua inversa:

$$f^{-1} : y \in [-1, 1] \to x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

definiamo allora $\forall y \in [-1, 1]$ la funzione $\operatorname{arcsen} y = x$ con $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

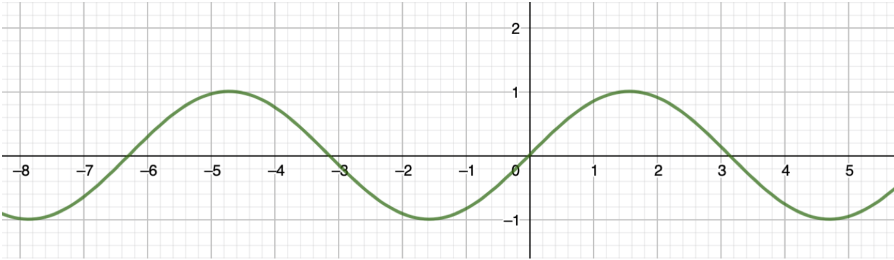


Figura: $f(x) = \mathrm{sen} x$

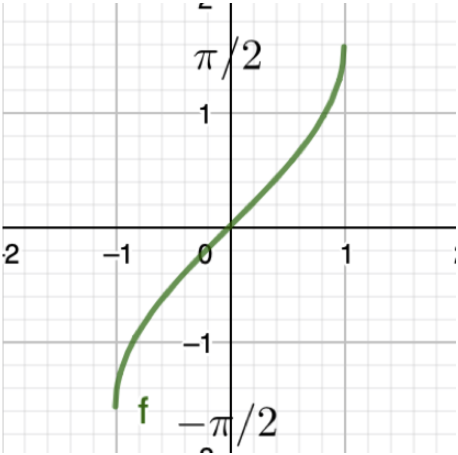


Figura: $f(x) = \mathrm{arcsen} x$

Vogliamo risolvere:

$$\mathrm{sen} x = a$$

1. $a \in [-1, 1] \iff x_0 = \mathrm{arcsen} a, \quad \text{con } x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a cui aggiungere la soluzione $\pi - x_0$, ad entrambe aggiungere la periodicità. Tutte le soluzioni sono date da: $x_0 + 2k\pi$ e $\pi - x_0 + 2k\pi$.
2. se $a < -1$ o se $a > 1$ non ci sono soluzioni.

Esempio.

1. Risolvere $\mathrm{sen} x = \frac{1}{2}$. La soluzione è data da $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a cui aggiungere $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Tutte le soluzioni sono date da:$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
2. Risolvere $\mathrm{sen} x = 2$ nessuna soluzione.

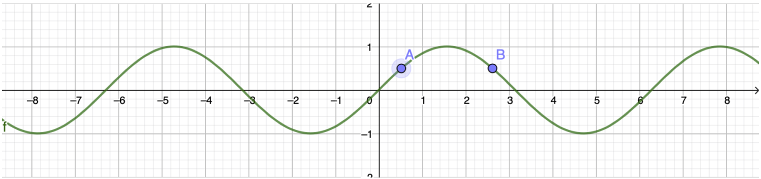


Figura: $f(x) = \operatorname{sen} x$

Disequazioni trigonometriche

1. $\operatorname{sen} x > a, a \geqslant 1 \iff$ nessuna soluzione.
2. $\operatorname{sen} x > a, a < -1 \iff \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\operatorname{sen} x > a, -1 \leqslant a < 1 \iff x_0 + 2k\pi < x < \pi - x_0 + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$, con $x_0 = \mathrm{arcsen\ a}$.

Analogamente

1. $\operatorname{sen} x < a, a > 1 \iff \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{sen} x < a, a \leqslant -1 \iff$ nessuna soluzione.
3. $\operatorname{sen} x < a, -1 < a \leqslant 1 \iff -\pi - x_0 + 2k\pi < x < x_0 + 2k\pi$.

Esempi.

1. $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le soluzioni sono date da: $-\frac{\pi}{3} - \pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ quindi $-\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
2. $\operatorname{sen} x > -1$. Devo escludere il valore -1. Quindi $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$.

1. $\arcsin x = a$, $a < -\frac{\pi}{2}$ oppure $a > -\frac{\pi}{2}$ $\iff$ nessuna soluzione
2. $\arcsin x = a$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\iff$ $x = \operatorname{sen} a$
3. $\arcsin x < a$, $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$ $\iff$ nessuna soluzione
4. $\arcsin x > a$, $a \geqslant \frac{\pi}{2}$ $\iff$ nessuna soluzione
5. $\arcsin x > a$, $a < -\frac{\pi}{2}$ $\iff$ $\forall x \in [-1, 1]$
6. $\arcsin x < a$, $a > \frac{\pi}{2}$ $\iff$ $\forall x \in [-1, 1]$
7. $\arcsin x > a$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant a < \frac{\pi}{2}$ $\iff$ $\operatorname{sen} a < x \leqslant 1$
8. $\arcsin x < a$, $-\frac{\pi}{2} < a \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\iff$ $-1 \leqslant x < \operatorname{sen} a$

La funzione coseno

$$f : x \in \mathbb{R} \to \cos x \in [-1, 1].$$

Trattasi di una funzione periodica di periodo 2π ed è una funzione pari. Tale funzione non è invertibile in tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia se consideriamo la funzione in $[0, \pi]$ in tale intervallo la funzione è strettamente decrescente. Ma allora restringendo la funzione all'intervallo $[0, \pi]$, cioè:

$$\cos x : x \in [0, \pi] \to \cos x \in [-1, 1]$$

è invertibile. Detta f^{-1} la sua inversa

$$f^{-1} : y \in [-1, 1] \to x \in [0, \pi]$$

definiamo allora per ogni $y \in [-1, 1]$ la funzione $\arccos y = x$ con $x \in [0, \pi]$

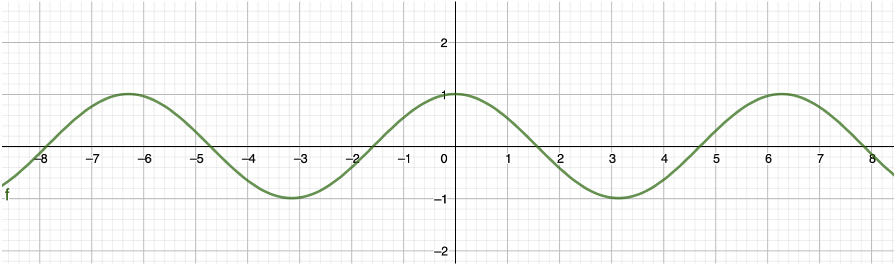


Figura: $f(x) = \cos x$

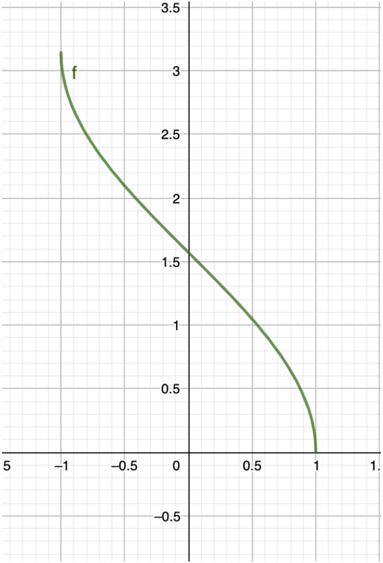


Figura: $f(x) = \arccos x$

Vogliamo risolvere:

$$\cos x = a, \qquad a \in [-1, 1]$$

$$\iff \quad x = \arccos a + 2k\pi \ \ \cup \ \ x = -\arccos a + 2k\pi$$

x_0 è la soluzione di $\cos x_0 = a$ con $0 < x_0 \leqslant \pi$. Se invece $a < -1$ oppure $a > 1$ non vi sono soluzioni.
La funzione è pari cioè $\cos x = \cos(-x)$.

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$. La soluzione è data da $= \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Si ottiene il seguente schema di risoluzione:

1. $\cos x > a$, $a \geqslant 1 \iff$ nessuna soluzione
2. $\cos x > a$, $a < -1 \iff \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\cos x > a$, $-1 \leqslant a < 1$
   $\iff x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} (-\mathrm{arccos} a + 2k\pi, \mathrm{arccos\ a} + 2k\pi)$.
   Analogamente:
4. $\cos x < a, a > 1 \iff \forall x \in \mathbb{R}$
5. $\cos x < a, a \leqslant -1 \iff$ nessuna soluzione
6. $\cos x < a, -1 < a \leqslant 1 \iff$ sia $x_0 : x_0 = \mathrm{arccos} a$,
   $x_1 = 2\pi - x_0$. Le soluzioni sono:
   $x_0 + 2k\pi < x < 2\pi - x_0 + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

1. $\arccos x = a, a < 0$, oppure $a > \pi \iff$ nessuna soluzione
2. $\arccos x = a,\ 0 \leqslant a \leqslant \pi \iff x = \cos a$
3. $\arccos x < a,\ a \leqslant 0 \iff$ nessuna soluzione
4. $\operatorname{arcos} x > a,\ a \geqslant \pi \iff$ nessuna soluzione
5. $\arccos x < a, a > \pi \iff \forall x \in [-1, 1]$
6. $\arccos x > a,\ a < 0 \iff \forall x \in [-1, 1]$
7. $\arccos x < a,\ 0 < a \leqslant \pi \iff \cos a < x \leqslant 1$
8. $\arccos x > a,\ 0 \leqslant a < \pi, \iff -1 \leqslant x < \cos a$

Esempi.

1. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ La soluzione è data da : $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos x > 1$ nessuna soluzione

Funzione tangente

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x}, \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

La funzione $\mathrm{tg}x$ è periodica di periodo π. Se consideriamo la funzione tangente ristretta all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la funzione risulta invertibile.

$$\mathrm{tg}x : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathrm{tg}x \in (-\infty, \infty)$$

Tale funzione è strettamente crescente. Inoltre
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \mathrm{tg}x = y$

$$\mathrm{arctg}y \in \mathbb{R} \to x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \mathrm{tg}x = y$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}y) = y, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x) = x, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

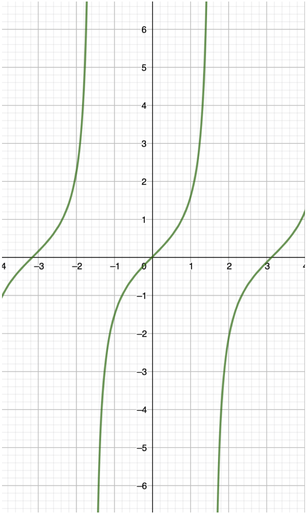


Figura: $f(x) = \mathrm{tg} x$

1. $\mathrm{tg}x = a \iff x = \mathrm{arctg}a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
2. $\mathrm{tg}x < a \iff -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \mathrm{arctg}a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
3. $\mathrm{tg}x > a \iff \mathrm{arctg}a + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Esempio. $\sqrt{3} + \mathrm{tg}x > 0 \iff -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

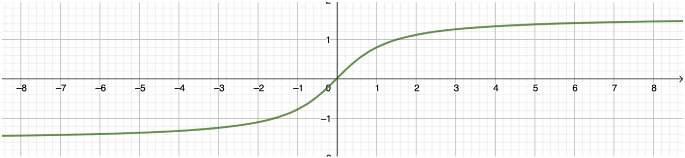


Figura: $f(x) = \mathrm{arctg} x$

$$\inf \mathrm{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \sup \mathrm{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Dalla stretta crescenza della funzione arcotangente:

Caso $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$:

1. $\mathrm{arctg} x = a \iff x = \mathrm{tg} a$,
2. $\mathrm{arctg} x < a \iff x < \mathrm{tg} a$,
3. $\mathrm{arctg} x > a \iff x > \mathrm{tg} a$

Caso $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$:

1. $\mathrm{arctg} x = a \iff$ nessuna soluzione
2. $\mathrm{arctg} x < a \iff$ nessuna soluzione
3. $\mathrm{arctg} x > a \iff \forall x \in \mathbb{R}$

Caso $a \geqslant \frac{\pi}{2}$:

1. $\mathrm{arctg} x = a \iff$ nessuna soluzione
2. $\mathrm{arctg} x > a \iff$ nessuna soluzione
3. $\mathrm{arctg} x < a \iff \forall x \in \mathbb{R}$

Angoli noti:

$$\begin{aligned}
\theta &= 0, \ \mathrm{sen}\theta = 0, \ \cos\theta = 1, \ \mathrm{tg}\theta = 0 \\
\theta &= \tfrac{\pi}{6}, \ \mathrm{sen}\theta = \tfrac{1}{2}, \ \cos\theta = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \ \mathrm{tg}\theta = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \\
\theta &= \tfrac{\pi}{4}, \ \mathrm{sen}\theta = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\theta = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \ \mathrm{tg}\theta = 1 \\
\theta &= \tfrac{\pi}{3}, \ \mathrm{sen}\theta = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos\theta = \tfrac{1}{2}, \ \mathrm{tg}\theta = \sqrt{3} \\
\theta &= \tfrac{\pi}{2}, \ \mathrm{sen}\theta = 1, \ \cos\theta = 0, \ \mathrm{tg}\theta \text{ non definita} \\
\theta &= \pi, \ \mathrm{sen}\theta = 0, \ \cos\theta = -1, \ \mathrm{tg}\theta = 0 \\
\theta &= \tfrac{3}{2}\pi, \ \mathrm{sen}\theta = -1, \ \cos\theta = 0, \ \mathrm{tg}\theta \text{ non definita} \\
\theta &= 2\pi, \ \mathrm{sen}\theta = 0, \ \cos\theta = 1, \ \mathrm{tg}\theta = 0
\end{aligned}$$

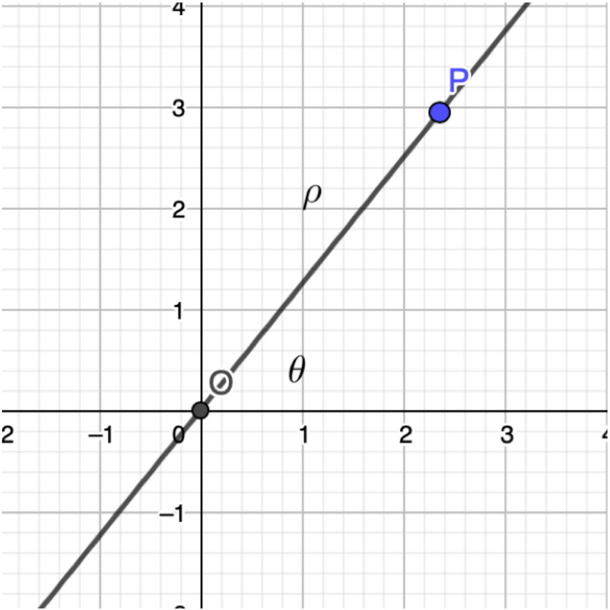
Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
e-mail: teresa.radice@unina.it

Coordinate polari nel piano

Per rappresentare i punti di un piano mediante coppie ordinate di numeri reali si fa riferimento oltre che alle coordinate cartesiane anche alle coordinate polari.
Nel piano (O, x, y) assumiamo come verso positivo delle rotazioni quello secondo il quale deve ruotare attorno all'origine il semiasse positivo delle x per sovrapporsi al semiasse positivo delle y con una rotazione di un angolo retto.
Il piano (O, x, y) si dice orientato. Dato un punto del piano distinto dall'origine O, diciamo ρ la lunghezza del vettore $\overline{OP}$ e θ la misura relativa di uno degli angoli di cui deve ruotare il semiasse positivo delle x per sovrapporsi a $\overline{OP}$.
Dato che tale rotazione non è unica, ma determinata a meno di multipli di 2π (un angolo giro) si possono attribuire infiniti valori a due a due differenti per un multiplo intero di 2π.


P
ρ
θ
O
4
3
2
1
0
–1
2
–1
1
2
3

Se θ_0 è un valore particolare

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

ρ, θ si dicono coordinate polari del punto P, nel sistema di coordinate polari con polo O e semi asse polare il semiasse positivo delle x.
ρ si chiama raggio vettore o modulo .
θ si chiama anomalia o argomento.
Tra le infinite determinazioni dell'anomalia θ di P ve ne è una sola θ^*:

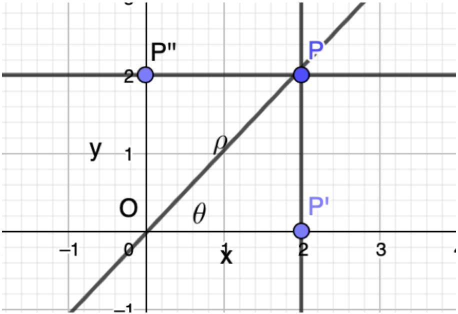
$$-\pi < \theta^* \leqslant \pi$$

Dato un punto $P \neq 0$ e dette x e y le sue coordinate cartesiane e ρ e θ le sue coordinate polari.
Per passare delle coordinate polari a quelle cartesiane

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

Per passare alle coordinate cartesiane a quelle polari (determinate da ρ e θ) :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \mathrm{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$



Sia a un numero reale negativo e sia n un numero pari.
L'equazione:

$$x^n = a \tag{1}$$

non ammette soluzioni. Si pone allora la questione di ricercare se non sia possibile risolvere la (**??**) con a reale qualunque in un campo numerico piu ampio del campo reale. La questione si risolve positivamente con l'introduzione del campo complesso che è una struttura ottenuta mediante $\mathbb{R}^2$ con opportune operazioni.

Definiamo la somma e il prodotto di due elementi di $\mathbb{R}^2$ (somma e prodotto)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Le operazioni di addizione e moltiplicazione sono commutative e associative e la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione.
Le coppie ordinate (x, y) di numeri reali, come elementi del campo complesso, prendono il nome di numeri complessi.
$(0, 0)$ è lo zero complesso.
$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$, $\forall (x, y)$ e quindi vi è il simmetrico.
L'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione è $(1, 0)$ difatti:

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$$

Vogliamo imporre

$$(x, y) \cdot (x', y') = (1, 0)$$

Abbiamo:

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ x'y + xy' = 0 \end{cases}$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$. Risolvendo il sistema si ottiene:

$$(x', y') = (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Si pone: $(x, y)^0 = (1, 0)$.

Consideriamo l'insieme $\mathcal{R} = \{(x, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ qualunque siano $(x_1, 0), (x_2, 0) \in \mathcal{R}$

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

allora $\mathcal{R}$ è stabile sia rispetto alla somma che al prodotto e le operazioni in questo caso sono le stesse che consideriamo per la somma e il prodotto di numeri reali x_1, x_2. Per convenzione possiamo considerare numeri reali come particolari numeri complessi

$$(x, 0) = x$$

Consideriamo ora

$$\mathcal{I} = \{(0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \in \mathbb{R}\}$$

$\forall (0, y_1), (0, y_2) \in \mathcal{I}$

$$(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2)$$

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (-y_1 y_2, 0)$$

allora $\mathcal{I}$ è stabile rispetto alla somma, ma non al prodotto.
I numeri complessi non reali si dicono immaginari e gli elementi di $\mathcal{I}$ si dicono immaginari puri

$$i = (0, 1)$$

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$(0, y) = (0, 1)(y, 0) = i(y, 0)$$

Di conseguenza:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

$$(x, y) = x + iy \quad \textit{forma algebrica}$$

x è la parte reale e iy la parte immaginaria, y coefficiente dell'immaginario.
Si chiama coniugato del numero complesso $z = x + iy$ il numero complesso $\overline{z} = x - iy$.
Un numero complesso coincide con il suo coniugato se e solo se è reale.
Si dice modulo del numero complesso z il numero reale $\sqrt{x^2 + y^2}$ e si denota con $|z|$. Ovviamente $|z| = |-z|$.
Un numero complesso, il suo opposto, il suo coniugato e l'opposto del coniugato hanno lo stesso modulo, cioè $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$. L'unico numero con modulo uguale a zero è zero

La rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}^2$ fornisce una rappresentazione dei numeri complessi. Ad ogni numero complesso $z = x + iy$ viene associato univocamente il punto P di coordinate x, y cioè avente per ascissa la parte reale di z e per ordinata il coefficiente della parte immaginaria.

Il piano quando i suoi punti sono pensati come immagini di numeri complessi prende il nome di piano complesso o di Gauss.

I numeri reali $(x, 0)$ hanno per immagine i punti dell'asse x detto asse reale, mentre gli immaginari puri $(0, y)$ hanno per immagine i punti dell'asse y detto asse immaginario.

$z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$ hanno per immagine i punti $P = (x, y)$ e $P = (x, -y)$ simmetrico rispetto all'asse x.

Mentre $z = x + iy$ e $-z = -x - iy$ hanno come immagini $P = (x, y)$ e $P' = (-x, -y)$, simmetrico rispetto all'origine.

Se P è l'immagine sul piano complesso di $z = x + iy$, la distanza ρ di P da O è uguale al modulo di z quindi:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

Di conseguenza $z = x + iy = \rho(cos\theta + i\mathrm{sen}\theta) = [\rho, \theta]$.
Utilizzeremo la notazione $[\rho, \theta]$ per indicare un numero complesso che ha modulo ρ e argomento θ.
Dato un numero complesso in forma algebrica, per le formule di passaggio tra coordinate cartesiane a polari si può calcolare il modulo: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e poi determinare θ in modo che $\mathrm{sen}\theta = \frac{y}{\rho}$ e $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$. Tali condizioni permettono di individuare l'angolo a meno di multipli di 2π. L'argomento principale è dato da : $\theta^* \in (-\pi, \pi]$.

Esercizio Scrivere in forma trigonometrica il seguente numero complesso: $z = 1 + i$.
$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\mathrm{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Individuiamo gli angoli $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$: In forma trigonometrica :

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})$$

Chiaramente possiamo anche dovere trasformare dei numeri complessi dalla forma trigonometrica a quella algebrica, ad esempio consideriamo il numero complesso z che ha per modulo $\rho = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ y = \rho\mathrm{sen}\theta = 1 \cdot \mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow z = 0 + 1 \cdot i$ forma algebrica

Calcoliamo $z \cdot z'$ con $z = \rho(cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$ e $z' = \rho'(\cos\theta' + i\mathrm{sen}\theta')$.

$$\begin{aligned} zz' &= \rho(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)\rho'(\cos\theta' + i\mathrm{sen}\theta') = \\ &= \rho\rho' \left[\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\mathrm{sen}\theta' + i\mathrm{sen}\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta'\right] \\ &= \rho\rho' \left[(\cos\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta') + i(\cos\theta\mathrm{sen}\theta' + \mathrm{sen}\theta\cos\theta')\right] \\ &= \rho\rho' \left[\cos(\theta + \theta') + i\mathrm{sen}(\theta + \theta')\right] \end{aligned}$$

Il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. Tale relazione si estende al prodotto di n fattori:

$$[\rho_1, \theta_1] \cdot [\rho_2, \theta_2] \cdot \ldots \cdot [\rho_n, \theta_n] = [\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ \rho_n, \theta_1 + \theta_2 + \ +\theta_n]$$

Se $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_n$ e $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_n$, abbiamo il calcolo della potenza n-esima, con n intero positivo, di un numero complesso, cioè:

$$[\rho, \theta]^n = [\rho^n, n\theta]$$

Tale formula prende il nome di formula di de Moivre.
Per $n = 0$, $[\rho, \theta]^0 = 1 = [1, 0]$.
Supposto $\rho \neq 0$,

$$\begin{aligned}
[\rho, \theta]^{-n} &= \frac{1}{[\rho, \theta]^n} = \frac{1}{\rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)} = \\
&= \frac{1}{\rho^n}(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta) = \\
&= \rho^{-n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)] = \\
&= [\rho^{-n}, -n\theta]
\end{aligned}$$

Per $n = 1$, otteniamo $[\rho, \theta]^{-1} = [\rho^{-1}, -\theta]$.

Date le precedenti relazioni si ha che:

$$\begin{aligned}
\frac{[\rho_1,\theta_1]}{[\rho_2,\theta_2]} &= [\rho_1,\theta_1]\cdot[\rho_2,\theta_2]^{-1} = \\
&= [\rho_1,\theta_1]\cdot[\rho_2^{-1},-\theta_2] = \\
&= [\rho_1\rho_2^{-1},\theta_1-\theta_2] = \\
&= [\tfrac{\rho_1}{\rho_2},\theta_1-\theta_2]
\end{aligned}$$

Il quoziente di due numeri complessi ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomenti la differenza degli argomenti.
Se $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ osservando che $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\theta$ si dimostra che θ è tale che:

$$\begin{cases} \mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) & se\, x > 0 \\ \mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) + \pi & se\, x < 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$, $z = iy$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad se\, y > 0$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad se\, y < 0$$

Determinare la forma algebrica di $(1 + i)^8$. Posto $z = 1 + i$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta : \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$z = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$ e quindi $z^8 = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]^8 = [(\sqrt{2})^8, 8\frac{\pi}{4}] = [2^4, 2\pi] = 2^4(\cos 2\pi + i\mathrm{sen}2\pi) = 2^4 = 16$.

Diremo radice n- esima del numero complesso z ogni numero complesso ω che sia soluzione di:

$$\omega^n = z.$$

Per determinare le soluzioni della precedente equazione rappresentiamo in forma trigonometrica sia il numero complesso z che l'incognita ω.
Poniamo: $z = [\rho, \theta]$ e $\omega = [\rho', \theta']$.
Allora per le formule di de Moivre:

$$[\rho, \theta] = [\rho', \theta']^n = [(\rho')^n, n\theta']$$

cioè $\rho = (\rho')^n$, $\theta = n\theta' + 2k\pi$, di conseguenza $\rho' = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$ e $\theta' = \frac{\theta+2k\pi}{n}$. Si ottiene dunque:

$$[\rho', \theta'] = \sqrt[n]{[\rho, \theta]} = [\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta + 2k\pi}{n}]$$

al variare di k.

Se k_1 e k_2 sono due valori di k avremo le due radici: $\left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta+2k_1\pi}{n}\right]$ e $\left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta+2k_2\pi}{n}\right]$.
Tali radici coincidono se e solo se:

$$\frac{\theta + 2k_1\pi}{n} = \frac{\theta + 2k_2\pi}{n} + 2h\pi$$

con $h \in \mathbb{Z} \iff k_1 - k_2 = hn$.
Se a k attribuiamo n valori consecutivi, si ottengono n radici a due a due distinte. Attribuendo a k un qualunque altro valore si riottiene una delle precedenti radici, quindi facciamo variare $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Dato che le n radici hanno tutte lo stesso modulo, le loro immagini giacciono sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e la dividono in n parti uguali.
Ogni numero complesso $z = [\rho, \theta]$ ammette n-radici n-esime, che si ottengono attribuendo all'intero k n valori consecutivi.

Determinare le radici cubiche di $z = 1$. Dalla formula

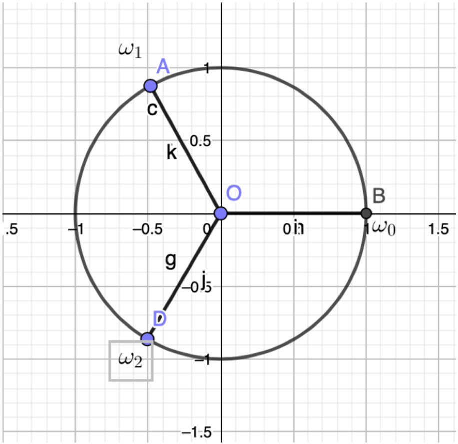
$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Per ottenere delle radici distinte prenderne tre valori di k consecutivi:

$$w_0 = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}0 = 1$$

$$w_1 = \cos \frac{2}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \cos \frac{4}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Se $n \geqslant 3$, i punti immagine delle radici sono i vertici di un poligono di n lati inscritto nel cerchio avente frontiera il cerchio.

Esempi.

1. Calcolare le radici seste di i. In forma trigonometrica : $i = [1, \frac{\pi}{2}]$, di conseguenza
$$\sqrt[6]{z} = \left[\sqrt[6]{1}, \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right]$$
con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Calcolare le radici quarte di $1 + i$
$$\rho = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$
$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\mathrm{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè $\theta = \frac{\pi}{4}$
$$\sqrt[4]{1 + i} = \left[\sqrt[8]{2}, \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right]_{k=0,1,2,3}$$
3. Calcolare le soluzioni di $w^3 + 2 = 0$, $w^3 = -2$, $w = \sqrt[3]{-2}$. Posto $z = -2$, $|z| = 2$ e $\theta = \pi$. Le soluzioni sono date da:
$$w_k = \left[\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right]_{k=0,1,2}$$

$$w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}(-1) = -\sqrt[3]{2}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Osservazione $w_2 = \overline{w_0}$, cioè w è il coniugato di w_0.

Forma esponenziale

Utilizziamo l'uguaglianza di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\mathrm{sen}\theta.$$

Dunque $e^{i\theta}$ ha modulo uguale a 1 e argomento $\theta + 2k\pi$.
Considerati

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\mathrm{sen}\theta_1) = \rho_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\mathrm{sen}\theta_2) = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = [\rho_1\rho_2, \theta_1 + \theta_2]$$

dunque il numero $z_1 \cdot z_2$ ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.
Analogamente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

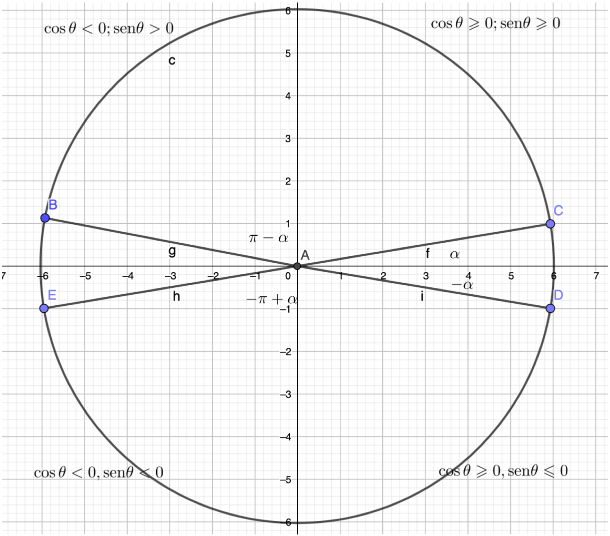
Osserviamo che $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\mathrm{sen}(-\theta) = cos\theta - i\mathrm{sen}\theta.$

Se $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\mathrm{sen}\theta$, allora $\overline{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\mathrm{sen}\theta$ si ha:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Calcolare $(1+2i)(4+2i)$, $(1-2i)(\overline{3-i})$.
Trasformare in forma trigonometrica: $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, $-5\sqrt{3}+5i$ (in questo caso l'angolo è dato da $\pi-\frac{\pi}{6}$), $3\sqrt{3}+3i$ (angolo uguale a $\frac{\pi}{6}$).
$(1+i)^{32}$, $\sqrt[4]{16}$.



$\cos\theta < 0; \mathrm{sen}\theta > 0$
$\cos\theta \geqslant 0; \mathrm{sen}\theta \geqslant 0$
c
B
C
$\pi - \alpha$
g
A
f
α
$-\alpha$
E
D
h
$-\pi + \alpha$
i
$\cos\theta < 0, \mathrm{sen}\theta < 0$
$\cos\theta \geqslant 0, \mathrm{sen}\theta \leqslant 0$

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
e-mail: teresa.radice@unina.it

Una successione è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n.
Ricordando la definizione di funzione possiamo dire che una successione è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Indichiamo una successione con il simbolo (a_n) o più semplicemente a_n, o per esteso:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Parleremo di successione anche se non sono definiti i primi indici n, cioè per un numero finito di indici n, ad esempio $n \leqslant 3$. Si dice che una successione è limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata, se tale è il suo codominio. L'estremo superiore (inferiore) del codominio si chiama estremo superiore (inferiore) della successione.

Esempi

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \tag{1}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n} \quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ... \frac{n-1}{n}, ... \tag{2}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{(-1)^n}{n}, ... \tag{3}$$

$$a_n = (-1)^n \qquad -1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ... \tag{4}$$

$$a_n = n^2, \quad 1, 4, 9, ..., n^2, ... \tag{5}$$

In generale, delle successioni ci interessa il comportamento per n grande. Se avesse un senso, diremmo l'ultimo termine della successione, però non ha senso perchè non esiste ultimo termine della successione. Di conseguenza, definiamo il limite della successione a_n. Il limite della successione a_n che indichiamo con $a \in \mathbb{R}$ è quel numero vicino ai termini della successione per n grande.

Questo si esprime così: a, limite della successione a_n, è un numero reale tale che comunque si scelga un intervallo di numeri intorno ad a, diciamo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, allora esiste un indice ν tale che, per $n > \nu$, a_n sta in questo intervallo, cioè $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Definizione Un numero reale a è il limite della successione a_n (si dice che a_n tende ad a oppure a_n converge ad a), e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad (a_n \to a)$$

se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero ν tale che
$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ per ogni $n > \nu$.
La relazione $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ si può scrivere $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ e ciò equivale a:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Possiamo ripetere la definizione precedente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\nu : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > \nu.$$

La relazione precedente è equivalente a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \exists c > 0 : \forall\varepsilon > 0, \exists\nu : |a_n - a| < c\varepsilon, \ \forall n > \nu.$$

Usando la definizione verifichiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Risulta $|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$. Dato che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ equivale a $n > \frac{1}{\varepsilon}$, basta scegliere $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$. Abbiamo, quindi verificato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$ per cui $|a_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$.
Verifichiamo ora che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

Risulta $|a_n - a| = |\frac{n-1}{n} - 1| = |-\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$. Stessi conti dell'esercizio precedente.

Proviamo a vedere cosa succederebbe se ipotizzassi che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1$.
Avremmo $|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 1| = 1 - \frac{1}{n} < \varepsilon$ quindi $\frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$. Questa relazione non crea problemi se ε è grande, ad esempio se $\varepsilon = 1$ è verificata $\forall n \in \mathbb{N}$. Ma se ε è piccolo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$ allora $\frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ è verificata solo se $n < 2$, Cioè solo a_1 verifica la relazione data, e non a_n con $n > \nu$. Dunque che $a = 1$ non è il limite della successione $a_n = \frac{1}{n}$.

Unicità del limite Una successione convergente non può avere due limiti distinti.
dim. supponiamo per assurdo che esistano due limiti distinti, cioè supponiamo che $a_n \to a$, $a_n \to b$, con $a \neq b$. Poniamo $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$. Si ha:

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_1$$

$$\exists \nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_2.$$

Ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ le relazioni precedenti valgono entrambe e si ha per la disuguaguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(a-a_n)+(a_n-b)| \leqslant \\ &\leqslant |a-a_n| + |a_n-b| = \\ &= |a_n-a| + |a_n-b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b| \end{aligned}$$

si è giunti ad un assurdo.

Per le successioni (3) e (4) si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Invece il limite

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$$

non esiste. Supponendo che esista $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Se $a \geqslant 0$, consideriamo $|a_n - a|$ con n dispari. Allora $a_n = -1$ e quindi $|a_n - a| = |-1-a| = 1 + a \geqslant 1$. Perciò, se $\varepsilon < 1$, non risulta mai $|a_n - a| < \varepsilon$ per n dispari. Allo stesso modo per $a \leqslant 0$ prendendo i termini con indice n pari.

Definizione Una successione a_n ha limite uguale a $+\infty$ (si dice che a_n tende o diverge a $+\infty$) e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (\text{oppure } a_n \to +\infty)$$

se, qualunque sia $M > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > M$, per ogni $n > \nu$. Analogamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \nu : a_n < -M, \ \forall n > \nu$$

Una successione si dice convergente se ammette limite finito, mentre si dice divergente se ammette limite uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$.

Le successioni convergenti o divergenti si dicono regolari, mentre le successioni che non ammettono limite si dicono non regolari.

Infine, una successione che converge a zero si dice infinitesima, mentre una successione che diverge si dice infinita.

Una successione si dice limitata se esiste un numero reale M tale che

$$|a_n| \leqslant M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

o equivalentemente

$$-M \leqslant a_n \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esistono successioni limitate non regolari ad esempio $a_n = (-1)^n$ (limitata perchè $|a_n| \leqslant 1$), ma che non ammette limite.
Teorema. Ogni successione convergente è limitata.
dim. Supponiamo che a_n converga ad a e scegliamo $\varepsilon = 1$. In base alla definizione di limite esiste un indice ν per cui $|a_n - a| < 1$ per ogni $n > \nu$. Quindi, utilizzando la disuguaglianza triangolare

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a|, \quad \forall n > \nu$$

Osservazione: la precedente relazione è verificata per gli indici maggiori di ν ma noi vogliamo che sia verificata $\forall n \in \mathbb{N}$, di conseguenza mancano i primi ν indici ma:

$$|a_1| \leqslant |a_1|, |a_2| \leqslant |a_2|, ..., |a_\nu| \leqslant |a_\nu|.$$

Ma allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$|a_n| \leqslant M = \max\{|a_1|, |a_2|, ...|a_\nu|, 1 + |a|\}$$

e quindi la successione è, in base alla definizione, limitata.

Operazioni con i limiti Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \ \ (b_n, b \neq 0).$$

Dimostriamo la prima relazione con il $+$. Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \ \forall n > \nu_1$$

$$\exists \nu_2 : |b_n - b| < \varepsilon, \ \forall n > \nu_2$$

Ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, per ogni $n > \nu$ si ha

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant \\ &\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Dimostriamo la formula per il prodotto. Abbiamo dimostrato che se una successione è convergente è anche limitata, cioè esiste un numero reale $M > 0$ tale che:

$$|a_n| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dalle ipotesi, per ogni $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ si ottiene

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = \\ &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leqslant \\ &\leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < \\ &< M\varepsilon + |b|\varepsilon = (M + |b|)\varepsilon. \end{aligned}$$

La prova che il limite di un quoziente è uguale al quoziente dei limiti è simile alla prova della relazione per il limite di un prodotto.

Esempi $\frac{1}{n^2} \to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5n-4}{3n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{n}-\frac{4}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Valgono le seguenti operazioni con i limiti infiniti

$$a_n \to a, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n + b_n \to \pm\infty$$

$$a_n \to \pm\infty, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n + b_n \to \pm\infty$$

$$a_n \to a \neq 0, b_n \to \pm\infty \Rightarrow |a_n b_n| \to +\infty$$

$$a_n \to \pm\infty, b_n \to \pm\infty \Rightarrow |a_n b_n| \to +\infty$$

$$a_n \to a, b_n \to \pm\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

$$a_n \to a, b_n \to \pm\infty \Rightarrow \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \to +\infty$$

$$a_n \to a \neq 0, b_n \to 0 \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$$

Risultano escluse le seguente forme indeterminate

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

Dire che un limite è una forma indeterminata non significa che il limite non esiste, ma significa che occorre preliminarmente eseguire trasformazioni, o semplificazioni, per togliere, se possibile, l'indeterminazione.

Esempi:

1. $(n+1)^2 - (n-1)^2$ (forma del tipo $\infty - \infty$) si ottiene $4n$ e quindi tende a $+\infty$
2. $\frac{1}{n^2}(n+1)$ (forma del tipo $0 \cdot \infty$) si ottiene $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ e quindi tende a 0
3. $\frac{n-1}{n}$ (forma del tipo $\frac{\infty}{\infty}$) si ottiene $1 - \frac{1}{n}$ e quindi tende a 1
4. $\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}$ (forma del tipo $\frac{0}{0}$) si ottiene $\frac{1}{n}$ e quindi tende a 0.

Teoremi di confronto

Teorema della permanenza del segno Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = a > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > 0$ per ogni $n > \nu$.
Dim. dato che $a > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Esiste quindi un numero ν per cui $|a_n - a| < \frac{a}{2}$ per ogni $n > \nu$. Ciò equivale a $-\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2}$. In particolare, abbiamo

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0, \quad \forall n > \nu.$$

Corollario Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ e se $a_n \geqslant 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora anche $a \geqslant 0$.
Dim. Se per assurdo $a < 0$ il teorema della permanenza del segno, applicato alla successione $-a_n$ comporterebbe che $a_n < 0$ per n grande.

Corollario Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ e se $a_n \geqslant b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a \geqslant b$.

Basta applicare il corollario precedente alla successione $a_n - b_n$.

Teorema dei carabinieri Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che :

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, \quad \forall n \in \ \mathbb{N}.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$, allora anche la successione c_n è convergente e $\lim_{n\to+\infty} c_n = a$.

Dim. Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\exists\nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_1; \ \exists\nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_2.$$

Ricordiamo che il disuguaglianze con il valore assoluto si possono scrivere:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon; \ \ a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

Quindi, se $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ risulta

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon$$

Perciò $|c_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$, come volevasi dimostrare.

Valgono analoghi teoremi di confronto anche per i limiti infiniti:

$$a_n \leqslant b_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$$

$$a_n \leqslant b_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \ b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$$

Dimostrazione della prima. Per ipotesi $a_n \to +\infty$ che, per definizione di limite significa:

$$\forall M > 0, \exists \nu : a_n > M, \quad \forall n > \nu.$$

Dato che $b_n \geqslant a_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene la tesi

$$b_n \geqslant a_n > M, \quad \forall n > \nu$$

Proposizione a_n converge a zero se e solo se $|a_n|$ converge a 0.
Dim. Posto $b_n = |a_n|$, b_n converge a 0 se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |b_n| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu.$$

Dato che $|b_n| = ||a_n|| = |a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ la relazione precedente equivale a dire che la successione a_n converge a 0.
Ricordiamo che una successione a_n è limitata se esiste un numero $M > 0$ tale che

$$|a_n| \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Una successione che converge a zero si dice infinitesima.

Teorema del limite di una successione limitata per una infinitesima

Se a_n è una successione limitata e b_n è una successione infinitesima, allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero. Per la definizione di limite si ha:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |b_n| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu.$$

Dalla ipotesi di limitatezza di a_n si ottiene:

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leqslant M \cdot |b_n| < M\varepsilon, \quad \forall n > \nu,$$

ma questo equivale al fatto che la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.

Esempio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(n+5)}{3n^2+1} = 0$$

Difatti trattasi di una successione limitata $(-1)^n$ per una infinitesima $b_n = \frac{n+5}{3n^2+1}$

Esaminiamo il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leqslant -1. \end{cases}$$

Se $a > 1$ è possibile utilizzare la disuguaglianza di Bernoulli

$$a^n \geqslant 1 + n(a-1).$$

Dato che $a > 1$, il secondo membro tende a $+\infty$ se $n \to +\infty$, per il teorema di confronto anche $a^n \to +\infty$. I casi $a = 1$ e $a = 0$ sono ovvi. Se a è diverso da zero e compreso tra $-1, 1$ $(0 < |a| < 1)$, risulta $1/|a| > 1$ e quindi dal caso già trattato otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty} |a^n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1/|a|)^n} = 0$$

Abbiamo già trattato il caso $a = -1$. Se $a < -1$ la successione con esponenti pari diverge positivamente, mentre quella di esponenti dispari diverge negativamente. Perciò non esiste il limite di a^n per $n \to +\infty$.
Se a è un numero reale positivo, risulta:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

Facile da ricordare in quanto $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to a^0 = 1$.
Se $b \in \mathbb{R}$, risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1$$

Consideriamo ora tre limiti relativi alle funzioni trigonometriche.

1. $a_n \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen} a_n \to 0,$
2. $a_n \to 0 \Rightarrow \cos a_n \to 1$
3. $a_n \to 0, a_n \neq 0 \ \forall n \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \to 1$

Dim della prima. Dato che a_n converge a 0, per la definizione di limite esiste un indice ν per cui $|a_n| < \frac{\pi}{2}$ per ogni $n > \nu$. Per tali valori di n, otteniamo che

$$0 \leqslant |\operatorname{sen} a_n| = \operatorname{sen}|a_n| \leqslant |a_n|$$

ma dato che a_n è infinitesima, lo è anche $|a_n|$ di conseguenza per il teorema dei carabinieri si ha che $|\operatorname{sen} a_n| \to 0$ e questo implica che $\operatorname{sen} a_n \to 0$.

Dim. della seconda. Utilizziamo la relazione $\cos x = \pm\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 x}$. Allo scopo di stabilire il segno nella relazione precedente, indichiamo con ν l'indice tale che risulti $-\frac{\pi}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ per ogni $n > \nu$ (ν esiste per la definizione di limite, dato che $a_n \to 0$). Per tali valori di n risulta $\cos a_n \geqslant 0$ e quindi

$$\cos a_n = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 a_n}, \qquad \forall n > \nu$$

Avendo dimostrato che $\mathrm{sen} a_n \to 0$ ne segue che $b_n = 1 - \mathrm{sen}^2 a_n \to 1$. La tesi è infine conseguenza del fatto che $\sqrt{b_n} \to \sqrt{1} = 1$.

Dim. della terza. Notiamo che dato che $a_n \to 0$, trattasi di una forma indeterminata $0/0$. Cominciamo con il dimostrare che

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x < \frac{\mathrm{sen} x}{x} < 1$$

Infatti, se x è positivo, si ha :

$$\mathrm{sen} x < x < \mathrm{tg} x = \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x}$$

da cui dividendo per $\mathrm{sen} x$ che è positivo e prendendo gli inversi, si ha

$$\cos x < \frac{\mathrm{sen} x}{x} < 1.$$

Se invece x è negativo, considerando $-x$ che è positivo si ottiene

$$\cos x = \cos(-x) < \frac{\mathrm{sen}(-x)}{-x} = \frac{\mathrm{sen} x}{x} < 1$$

dunque la relazione da dimostrare vale anche qualora si abbia x negativo.

Dato che $a_n \to 0$ per la definizione di limite esiste un indice ν tale che $|a_n| < \frac{\pi}{2}$ per ogni $n > \nu$. Ma allora,

$$cos a_n < \frac{\mathrm{sen} a_n}{a_n} < 1, \quad \forall n > \nu.$$

Per $n \to +\infty$, $\cos a_n \to 1$. La tesi discende dal teorema dei carabinieri.

Successioni monotone

Abbiamo già dato la definizione di funzione crescente o decrescente (anche strettamente crescente e decrescente)

1. a_n strettamente crescente $\quad a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. a_n crescente $\quad a_n \leqslant a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. a_n strettamente decrescente $\quad a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
4. a_n decrescente $\quad a_n \geqslant a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Una successione a_n è monotona se è verificata una delle quattro condizioni precedenti. Una successione è strettamente monotona se verifica la 1) o la 3).
Se $a_n = a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con a numero reale fissato, si dice che a_n è una successione costante. Le successioni costanti sono allo stesso tempo crescenti e decrescenti.

Teorema sulle successioni monotone Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata è convergente, cioè ammette limite finito.
Dim. Consideriamo il caso di una successione a_n crescente e limitata. Posto $l = \sup_n a_n$, fissato $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$l - \varepsilon < a_\nu.$$

Per $n > \nu$ risulta $a_\nu \leqslant a_n$ e dunque

$$l - \varepsilon < a_\nu \leqslant a_n \leqslant l < l + \varepsilon,$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

Consideriamo ora il caso di una successione a_n crescente e non limitata superiormente. Fissato $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_\nu > M$. Dato che a_n è crescente, per ogni $n > \nu$ risulta

$$a_n \geqslant a_\nu > M$$

da cui $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. Ricordando che una successione si dice regolare se ammette limite (finito o infinito). Il precedente teorema afferma che Ogni successione monotona è regolare

Si può anche dire che ogni successione monotona crescente tende al $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Nel caso che la successione sia limitata tale $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = l$, con $l \in \mathbb{R}$, qualora la successione non sia limitata allora il $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$

Introduciamo il numero di Nepero come il limite di una particolare successione monotona e limitata.
Poniamo

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \quad \text{con } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Infatti si dimostra che la successione è monotona crescente ed è limitata.
La successione utilizzata per definire il numero e, combina due tendenze opposte: la tendenza della base ad un limite uguale a 1 e la tendenza dell'esponente ad un limite infinito. La forma 1^∞ è una nuova forma indeterminata come pure le forme ∞^0, 0^0.
Quindi forme indeterminate:

$$1^{(+\infty)}, \;\; 1^{(-\infty)}, \;\; (+\infty)^0, \;\; 0^0$$

Infiniti di ordine crescente

Criterio del rapporto (per le successioni) Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora la successione a_n tende a zero.
Dim. Per il teorema della permanenza del segno (applicato alla successione $1 - b_n$) esiste un indice ν per cui $b_n < 1$ per ogni $n > \nu$. Quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, cioè $a_{n+1} < a_n$, per ogni $n > \nu$. Il teorema delle successioni monotone assicura l'esistenza del limite a (da notare che la successione a_n è limitata inferiormente dato che per ipotesi a_n è a termini positivi, dunque $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$), che è un numero reale non negativo, dato che la successione è decrescente. Supponendo per assurdo che $a \neq 0$ e passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ si ottiene $b = \frac{a}{a} = 1$, in contrasto con l'ipotesi $b < 1$. Pertanto $a = 0$.

Applichiamo il criterio del rapporto al confronto delle successioni:

$$\log n; \quad n^b; \quad a^n; \quad n!; \quad n^n.$$

Abbiamo scelto $b > 0$, $a > 1$. Il simbolo $n!$ (n fattoriale) significa il prodotto dei primi n numeri naturali:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Per $n \to +\infty$ le successioni tendono tutte a $+\infty$. Possiamo però dire che sono infiniti di ordine crescente, nel senso che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Tralasciamo il primo limite. Vogliamo dimostrare il secondo. Poniamo $a_n = \frac{n^b}{a^n}$, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^b \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$. Dal criterio del rapporto $\frac{n^b}{a^n} \to 0$.
Per il terzo limite poniamo $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0$. Ancora dal criterio segue che $a^n/n! \to 0$.
Infine per il quarto. Poniamo $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1$ e di nuovo per il criterio del rapporto la successione $a_n = \frac{n!}{n^n}$ converge a zero per $n \to +\infty$.

Sia a_n una successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione a_{n_k} definita da

$$k \in \mathbb{N} \to a_{n_k}$$

prende il nome di successione estratta da a_n, di indici n_k.
Ad esempio, se $n_k = 2k$, la successione estratta da a_n di indici $2k$, cioè di indici pari

$$a_2, a_4, ..., a_{2k}, ...$$

Se invece $n_k = 2k - 1$, si ottiene l'estratta da a_n di indici dispari

$$a_1, a_3, ..., a_{2k-1}, ...$$

Lemma Per ogni successione n_k strettamente crescente di numeri naturali, si ha

$$n_k \geqslant k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

dim. per $k = 1$ si ha ovviamente $n_1 \geqslant 1$. Inoltre valida la relazione $n_k \geqslant k$ proviamo che è vera anche per il successivo cioè $n_{k+1} \geqslant k + 1$. Per hp $n_{k+1} > n_k \geqslant k$, ovvero $n_{k+1} > k$ ossia $n_{k+1} \geqslant k + 1$.

Proposizione Se a_n converge verso a, allora ogni estratta a_{n_k} converge verso a.

dim. fissato $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > k_0$. Se $k > k_0$ essendo $n_k \geqslant k$ per il lemma precedente, si ha anche $n_k > k_0$ e perciò $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Il viceversa non è vero quindi dall'essere convergente la successione estratta non è detto che sia convergente la successione di partenza (ad esempio $(-1)^n$).

Tuttavia sussiste il seguente teorema:

Teorema di Bolzano-Weierstrass Sia a_n una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.

Successioni di Cauchy

Sia a_n una successione di numeri reali. Si dice che a_n è una una successione di Cauchy se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che per $h, k > \nu$ risulti

$$|a_k - a_h| < \varepsilon.$$

Proposizione Ogni successione convergente è di Cauchy.
Dim. Se a_n converge verso a allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste ν tale che

$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \quad \forall n > \nu$$

Dalla disuguaglianza triangolare, segue allora, per $h, k > \nu$:

$$|a_k - a_h| \leqslant |a_k - a| + |a - a_h| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Per dimostrare viceversa che ogni successione di Cauchy è convergente premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 1 Una successione di Cauchy è limitata.
Dim. sia $\varepsilon = 1$, per ipotesi $\exists \nu \in \mathbb{N}$, tale che

$$|a_k - a_h| < 1, \quad \forall h, k > \nu.$$

Fissiamo un indice $h_0 > \nu$. Allora si ha che

$$a_{h_0} - 1 < a_k < a_{h_0} + 1 \quad \forall k > \nu.$$

Posto

$$A = \min\{a_1, a_2, ..., a_\nu, a_{h_0} - 1\},$$

e

$$B = \max\{a_1, a_2, ..., a_\nu, a_{h_0} + 1\}.$$

Evidentemente risulta

$$A \leqslant a_k \leqslant B, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e perciò la successione è limitata.

Lemma 2 Se una successione di Cauchy a_n contiene una estratta a_{n_k} convergente a l, allora anche a_n converge a l.
Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_k - a_h| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall h, k > \nu$$

Sia inoltre $k_0 > \nu$ tale che

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geqslant k_0.$$

Poichè si ha: $n_{k_0} \geqslant k_0 > \nu$, per ogni $n > \nu$ risulta

$$|a_n - l| \leqslant |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Criterio di convergenza di Cauchy Una successione a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.
Dim. Con la prima proposizione abbiamo provato che le successioni convergenti sono di Cauchy. Viceversa, se a_n è di Cauchy, per il lemma 1 è anche limitata. In base al teorema di Bolzano- Weierstrass a_n ammette una successione estratta a_{n_k} convergente. Per il lemma 2, a_n è convergente.

Sia a_n una successione di numeri reali. Il numero reale a si dice valore di aderenza di a_n se , per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}$ è infinito. Se la funzione a_n è convergente verso a, allora a è anche un valore di aderenza. Il viceversa non sussiste, come si vede considerando la successione $a_n = (-1)^n$, la quale ammette -1 e 1 come valori di aderenza anche se non è convergente. Osserviamo che la successione $(-1)^n$ ha un'estratta convergente verso -1 ed una estratta convergente verso 1.

Teorema 1 Un numero reale a è valore di aderenza di una successione a_n se e solo se esiste una estratta convergente verso a.

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”,
Università degli Studi di Napoli “Federico II”
e-mail: teresa.radice@unina.it

Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, ogni intervallo aperto cui x_0 appartiene si chiama intorno di x_0. Naturalmente un punto x_0 ha infiniti intorni. Nella pratica è però spesso conveniente riferirsi agli intorni di x_0 che hanno x_0 come punto medio, cioè agli intorni del tipo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, con δ numero reale positivo (raggio o semiampiezza dell'intorno); un intorno di questo tipo è costituito dai punti x tali che $|x - x_0| < \delta$.
Un intervallo semiaperto a destra avente x_0 per estremo inferiore, pur non essendo un intorno di x_0 si suole chiamare un intorno destro di x_0; un intervallo semiaperto a sinistra avente x_0 per estremo superiore, si suole chiamare un intorno sinistro di x_0. Evidentemente l'unione di un intorno destro e di un intorno sinistro è un intorno di x_0, e viceversa.

Per uniformità di linguaggio, diremo intorno di $+\infty$ ogni intervallo aperto non limitato superiormente, e diremo intorno di $-\infty$ ogni intervallo aperto non limitato inferiormente. Se $x_0 = +\infty$ definiamo intorno di $+\infty$ ogni intervallo del tipo $(M, +\infty)$, $M > 0$. Se $x_0 = -\infty$ definiamo intorno di $-\infty$ ogni intervallo del tipo $(-\infty, M)$, $M < 0$. Abbiamo cosi definito degli intorni per un qualsiasi x_0 in $\mathbb{R}$ ampliato.
Se x e y sono due punti distinti, esistono almeno un intorno di x e un intorno di y, disgiunti.

Sulla nozione di intorno si fonda il concetto di punto di accumulazione per un insieme.
Dato un insieme numerico X, si dice che un punto x_0 di $\mathbb{R}$, appartenente o no ad X, è di accumulazione per X, se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di X distinto da x_0. E' facile riconoscere che, se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di X distinto da x_0, necessariamente ne cadono infiniti.
La definizione di punto di accumulazione traduce in forma precisa il fatto intuitivo che esistono punti di X distinti da x_0 ma prossimi a x_0 quanto si voglia.
Se x_0 appartiene a X e non è di accumulazione per X, ciò vuole dire che esiste almeno un intorno di x_0 nel quale non cadono altri punti di X, si dice allora che x_0 è un punto isolato di X. L'insieme dei punti che sono di accumulazione al finito per un assegnato insieme X, si chiama insieme derivato di X, o semplicemente derivato e si denota con $D(X)$.

Si chiama chiusura (o aderenza) di X l'insieme $\overline{X}$ definito da:

$$\overline{X} = X \cup D(X)$$

Un insieme X si dice chiuso quando contiene il suo derivato, cioè $D(X) \subseteq X$, cioè se $X = \overline{X}$. Se x_0 appartiene a $X \cup D(X)$ si esprime dicendo che x_0 è un punto aderente ad X. L'insieme $X \cup D(X)$ cioè l'insieme dei punti aderenti ad X si chiama aderenza di X.
Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto se da ogni successione a_n di punti si puo estrarre una sottosuccessione convergente verso un punto a di X.
Teorema di Heine-Borel Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Esempi

1. $A = [a, b]$, ogni $x_0 \in [a, b]$ è di accumulazione per A.
2. $A = (a, b)$, ogni $x_0 \in (a, b)$ e lo sono anche a, b.
3. $A = \{a\}$ non ha punti di accumulazione.
4. $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ trattasi di un insieme limitato e quindi privo di punto di accumulazioni all' ∞ si verifica facilmente che l'unico punto di accumulazione è l'estremo inferiore 0 che non appartiene ad A.

Sia f una funzione reale di una variabile reale, definita in un insieme X, e sia x_0 un punto di X.
Se x_0 è di accumulazione per X, esistono punti di X prossimi a x_0 quanto si voglia. E' allora naturale confrontare il valore che la funzione assume nel punto x_0 con quelli che essa assume nei punto prossimi a x_0 e domandarsi da un punto di vista intuitivo se accade che a piccole variazioni di x a partire da x_0, corrispondano piccole variazioni di $f(x)$ rispetto a $f(x_0)$, in altri termini se accade che il valore $f(x)$ sia prossimo a $f(x_0)$ quanto si voglia, purchè si scelga x abbastanza vicino a x_0.

La questione da esaminare è se la funzione gode della seguente proprietà: *Ad ogni intorno J di $f(x_0)$ è possibile associare un intorno I di x_0, in modo che i valori assunti da f nei punti di I appartengono a J, cioè in modo che:*

$$x \in I \Rightarrow f(x) \in J.$$

Si dice che la funzione è convergente in x_0, se esiste un numero reale l avente la seguente proprietà: *Ad ogni intorno J di l è possibile associare un intorno I di x_0, in modo che i valori assunti da f nei punti di I (più precisamente di $X \cap I$ diversi da x_0), appartengano a J, cioè in modo che:*

$$x \in I - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in J$$

Definizione Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e soltanto se , qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ in modo che $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$, per ogni $x \in A - \{x_0\}$, tale che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

La definizione è in simboli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

Si può dare anche un'altra definizione:

Definizione Si dice che $f(x)$ ha un limite uguale a l (tende o converge a l) per x che tende a x_0, se, qualunque sia la successione $x_n \to x_0$, con $x_n \neq x_0$ per ogni n, risulta $f(x_n) \to l$.

Secondo questa definizione

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1$$

Così pure:

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{sen} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Legame tra limiti di funzioni e di successioni

Teorema ponte Le seguenti relazioni sono tra loro equivalenti $(x_0, l \in \mathbb{R})$:

$$\forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \to l \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{2}$$

Proviamo prima che la (2) implica la (4): per ogni $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ il numero reale per cui vale l'ipotesi (2); consideriamo una successione x_n, di punti di A, convergente a x_0, con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per la definizione di limite di successione, esiste un indice ν per cui $|x_n - x_0| < \delta$ per ogni $n > \nu$ inoltre essendo $x_n \neq x_0$, in definitiva si ha

$$x_n \in A, 0 \neq |x_n - x_0| < \delta \quad \forall n > \nu.$$

Per l'ipotesi (2) segue che

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon \quad \forall n > \nu,$$

che in base alla definizione di limite di successione, significa che $f(x_n) \to l$ per $n \to +\infty$.

Proviamo ora per assurdo che la (4) implica la (2): contraddire la (2) vuole dire:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta, |f(x) - l| \geqslant \varepsilon_0$$

Poniamo $\delta = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$ e indichiamo con $x = x_n$ il valore di x che compare nella relazione precedente in dipendenza da $\delta = \frac{1}{n}$:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A : 0 \neq |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon_0.$$

Si ha:

$$x_n \neq x_0, \quad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

perciò $x_n \in A - \{x_0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to x_0$; però $f(x_n)$ non converge ad l perchè la disuguaglianza $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ contrasta con la definizione di limite di successione.

Analoghe definizioni per i limiti infiniti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_n) \to +\infty$$

$$\iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > M,$$

$$\forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \iff \forall x_n \to +\infty, x_n \in A \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \to l$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists k : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in A : x > k$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to -\infty, x_n \in A \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$$

$$\iff \forall M > 0, \exists k : f(x) > M, \forall x \in A : x < k$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall x \in A - \{x_0\} : |x - x_0| < \delta$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0 : f(x) > M$$

$$\forall x \in A - \{x_0\} : |x - x_0| < \delta$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0 : f(x) < -M$$

$$\forall x \in A - \{x_0\} : |x - x_0| < \delta$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists k > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall x \in A : x > k$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists k > 0 : f(x) > M,$$

$$\forall x \in A : x > k$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists k > 0 : f(x) < -M,$$

$$\forall x \in A : x > k$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists k > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall x \in A : x < -k$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists k > 0 : f(x) > M,$$

$$\forall x \in A : x < -k$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists k > 0 : f(x) < -M,$$

$$\forall x \in A : x < -k$$

Si possono definire anche il limite destro ($x \to x_0^+$) e il limite sinistro ($x \to x_0^-$) ad esempio:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall x \in A : 0 < x - x_0 < \delta$$

Si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

In particolare se la base è e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

Verifichiamo che invece i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x, \quad \lim_{x\to+\infty} \cos x$$

non esistono. Limitiamoci al primo. Se esiste il limite $= l$ dovremmo avere che $\operatorname{sen} x_n$ tende allo stesso valore l qualunque sia la successione $x_n \to +\infty$. Mostriamo che esistono due successioni x_n e x_n' divergenti a $+\infty$ con la proprietà che $\operatorname{sen} x_n$ e $\operatorname{sen} x_n'$ tendono a limiti diversi. Infatti ponendo $x_n = 2\pi n$, $x_n' = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$, risulta $\operatorname{sen} x_n = 0 \to 0$ mentre $\operatorname{sen} x_n' = 1 \to 1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Operazioni con i limiti di funzioni Il limite della somma, differenza, prodotto , quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purchè non sia una delle forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Abbiamo calcolato

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sen} x = 0 = \mathrm{sen} 0; \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0;$$

il valore limite, per $x \to 0$, è uguale al valore che si ottiene calcolando la funzione per $x = 0$. Si dice che le funzioni $\mathrm{sen} x$ e $\cos x$ sono continue per $x = 0$ in accordo con la definizione:
Definizione Una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0);$$

una funzione è continua in un intervallo $[a, b]$ se è continua in ogni punto $x_0 \in [a, b]$ (se $x_0 = a$ si considera il limite destro $x \to a^+$, mentre se $x_0 = b$ si considera il limite sinistro $x \to b^-$).

Dato che il limite di somma, differenza, prodotto è uguale alla somma, differenza, prodotto dei limiti, risulta che la somma, la differenza , il prodotto di funzioni continue è una funzione continua. Anche il quoziente di funzioni continue è una funzione continua, ma come al solito occorre fare attenzione ai punti dove il denominatore si annulla. Si verifica che la funzione composta mediante funzioni continue è continua. Molte funzioni elementari sono continue. La continuità della funzione $f(x) = \mathrm{sen} x$ si esprime con il fatto che

$$\lim_{x \to x_0} \mathrm{sen} x = \mathrm{sen} x_0$$

o equivalentemente

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{sen}(x_0 + h) = \mathrm{sen} x_0$$

Dim.

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{sen}(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} [\mathrm{sen} x_0 \cos h + \cos x_0 \mathrm{sen} h] =$$

$$= \mathrm{sen} x_0 \lim_{h \to 0} \cos h + \cos x_0 \lim_{h \to 0} \mathrm{sen} h = \mathrm{sen} x_0$$

Discontinuità

La funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

La funzione è continua per $x \neq 0$, ma non è continua se $x = 0$.

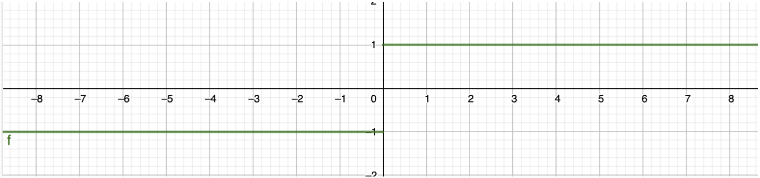


Figura: $f(x) = \mathrm{segno}(x)$

Il grafico di questa funzione presenta per $x = 0$ un salto.

La funzione $f(x)$ non è continua in $x_0 = 0$ perchè non è definita in tale punto, perchè non esiste il valore $f(x_0) = f(0)$.
Estendiamo $f(x)$ anche a $x_0 = 0$ con un valore $l \in \mathbb{R}$.
Consideriamo una nuova funzione $\tilde{f}(x)$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ l \quad \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione $\tilde{f}(x)$ è definita nel punto $x_0 = 0$, ma non è continua in tale punto perchè non esiste il limite per $x \to x_0$ di $\tilde{f}(x)$.
Tutto ciò accade qualunque sia il valore l scelto per la definizione di $\tilde{f}(x)$, che risulta una estensione non continua (o prolungamento non continuo) della funzione. La discontinuità di $f(x)$ in $x_0 = 0$ si dice non eliminabile.

Al contrario se consideriamo

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen} x}{x}$$

non è continua in $x_0 = 0$ (perchè non è definita).

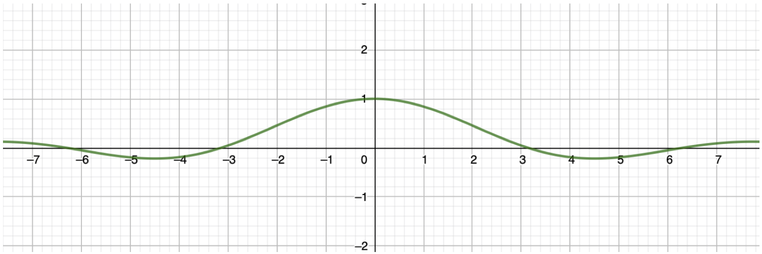


Figura: $\tilde{f}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$

Il grafico di $f(x)$ è privo del punto di ascissa 0 posso prolungare la funzione f considerando la $\tilde{f}(x)$. Difatti è possibile prolungare la $f(x)$ per continuità come segue:

mediante la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Il grafico di $f(x)$ si ottiene completando il disegno con un punto di coordinate $(0, 1)$.

Sia $f(x)$ una funzione definita in A e x_0 un punto di A. Le discontinuità di $f(x)$ si classificano in:

- la funzione presenta in x_0 un discontinuità eliminabile se esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

  In tal caso, ponendo $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$, la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A - \{x_0\} \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

  risulta continua nel punto x_0.

- la funzione $f(x)$ presenta in x_0 una discontinuità di prima specie se esistono finiti i limiti destro e limite sinistro di $f(x)$ in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- La funzione $f(x)$ presenta in x_0 una discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

è infinito oppure non esiste.

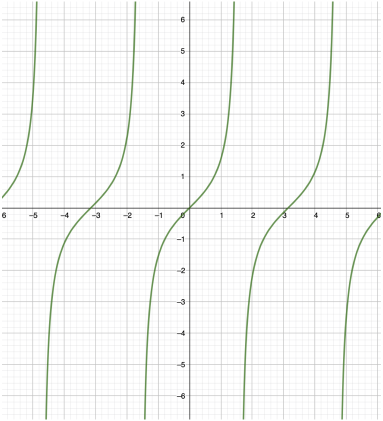


Figura: $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

Sia A un intervallo (o unione finita di intervalli), $x_0 \in A$ e $f(x)$ una funzione definita in $A - \{x_0\}$; se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

allora la funzione $\tilde{f}(x)$, definita in A da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A - \{x_0\} \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è detta prolungamento per continuità di $f(x)$ in x_0.
Se poi $f(x)$ è continua in $A - \{x_0\}$ allora $\tilde{f}(x)$, continua su tutto l'insieme A, è detta prolungamento per continuità di $f(x)$ su A.

Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Teorema della permanenza del segno Sia $f(x)$ una funzione definita un intorno di x_0 e sia continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
La dimostrazione è analoga a quella per le successioni. Dato che $f(x_0) > 0$ possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ quindi esiste un numero δ per cui $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$ per ogni x nell'intervallo $|x - x_0| < \delta$. Ciò equivale a $-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$. In particolare

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

Teorema dell'esistenza degli zeri Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, (oppure $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$) allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Esempio

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

in -2, 1. La funzione $f(x)$ è continua in $[-2, 1]$ e $f(-2) = -8 + 2 - 1 = -7$, $f(1) = 1$. Per il Teorema degli zeri esiste $x_0 \in (-2, 1) : f(x_0) = 0$.

Dimostrazione usando metodo di bisezione

$f(x)$ è continua in $[a, b]$ e

$$f(a) < 0, \qquad f(b) > 0.$$

Consideriamo il numero c, punto di mezzo dell'intervallo $[a, b]$, cioè $c = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato una radice. Altrimenti consideriamo due casi $f(c) > 0$, $f(c) < 0$. Se $f(c) > 0$ la funzione f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo $[a, c]$, mentre se $f(c) < 0$, $[c, b]$ è l'intervallo dove f cambia segno. Indichiamo con $[a_1, b_1]$ l'intervallo da considerare, cioè:

$$\begin{cases} \text{se } f(c) > 0 \Rightarrow a_1 = a, b_1 = c \\ \text{se } f(c) < 0 \Rightarrow a_1 = c, b_1 = b \end{cases}$$

Abbiamo così trovato un intervallo $[a_1, b_1]$ di ampiezza metà del precedente $[a, b]$ per cui risulta $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Definiamo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e ripetiamo il ragionamento.
Otteniamo tre successioni a_n, b_n, c_n che per $n \geqslant 1$ sono definite analogamente da

$$\begin{cases} \text{se } f(c_n) > 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n \\ \text{se } f(c_n) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

dove $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$. Se per qualche n risulta $f(c_n) = 0$ ci si ferma perchè si è trovata una radice, altrimenti per costruzione, risulta

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

E' semplice scrivere la relazione che lega a_n con b_n. Infatti ad ogni iterazione, la lunghezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$ si dimezza. Quindi $b_1 - a_1 = (b-a)/2, b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b-a)/2^2$, dopo n passi

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per costruzione la successione a_n è crescente ed è limitata perché contenuta in $[a, b]$. Per il teorema sulle successioni monotone a_n ammette limite finito e sia x_0 tale limite. La successione b_n è decrescente e per il teorema delle successioni monotone converge. Ma per di più, la successione b_n data da

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$$

converge allo stesso x_0 per $n \to +\infty$. Dalla continuità della funzione e dato che $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ si ottiene

$$f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leqslant 0; \quad f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n) \geqslant 0.$$

Perciò $f(x_0) = 0$ ed il teorema è dimostrato.

(Primo) teorema dell'esistenza dei valori intermedi Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Consideriamo il caso che $f(a) \leqslant f(b)$. La tesi consiste nel provare che, qualunque sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.
Se $y_0 = f(a)$ allora $x_0 = a$, analogamente se $y_0 = f(b)$,allora $x_0 = b$. Per trattare il caso $y_0 \in (f(a), f(b))$ consideriamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - y_0, \quad \forall x \in [a, b]$$

Essendo $f(a) < y_0 < f(b)$, risulta

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0, \quad g(b) = f(b) - y_0 > 0$$

Per il teorema di esistenza degli zeri esiste un numero $x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$.

Teorema di Weierstrass Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume minimo e massimo in $[a, b]$, cioè x_1, x_2 in $[a, b]$ tali che

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

dim. posto $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, verifichiamo che esiste una successione x_n di punti di $[a, b]$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M.$$

Infatti, se $M = +\infty$ per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > n$ e perciò $f(x_n) \to M = +\infty$.
Se invece $M < +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$$

e perciò $f(x_n) \to M$.

Per il teorema di Bolzano Weierstrass esiste un'estratta x_{n_k} da x_n ed un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$x_{n_k} \to x_0.$$

Poichè $f(x)$ è continua, ne segue

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

e allora, dato che abbiamo dimostrato che la successione $f(x_n)$ è regolare, si ha che le sue estratte convergeranno allo stesso limite. Di conseguenza:

$$M = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

Abbiamo così dimostrato che:

$$f(x_0) = M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

ciò implica allo stesso tempo che $M < +\infty$ e che l'estremo superiore è un valore assunto dalla funzione in corrispondenza di x_0 e quindi un massimo.
Analogamente si ragiona per determinare un punto di minimo, partendo dall'estremo inferiore di $f(x)$.

(Secondo) teorema dell'esistenza dei valori intermedi Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.
dim. i valori di massimo M e di minimo m sono assunti in base al teorema di Weierstrass, rimane da provare che qualunque sia $y_0 \in (m, M)$ esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.
Indichiamo con x_1, x_2 i punti di minimo e di massimo di $f(x)$, cioè tali che $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ e consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - y_0, \quad \forall x \in [a, b]$$

Essendo $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$, risulta

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0, \quad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$$

per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste un numero x_0 appartenente all'intervallo aperto di estremi x_1, x_2, tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$

Criterio di invertibilità Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo.
Dim. nel caso che f è strettamente crescente in $[a, b]$: risulta

$$f(a) < f(x) < f(b), \quad \forall x \in (a, b)$$

quindi $f(a)$ è il minimo della f in $[a, b]$, mentre $f(b)$ il massimo. Inoltre si verifica come nel teorema precedente che f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Cioè per ogni $y \in [f(a), f(b)]$, esiste almeno un $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = y$. Tale x è unico. Infatti se esistessero due valori x_1, x_2 distinti tra loro, diciamo $x_1 < x_2$ per cui $y = f(x_1) = f(x_2)$, allora dovrebbe risultare anche $f(x_1) < f(x_2)$ dato che f è strettamente crescente. Quindi $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ è invertibile, cioè esiste $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$.

Teorema sul limite delle funzioni monotone Sia $f(x)$ monotona in $[a,b]$; allora esistono finiti i limiti

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \forall x_0 \in (a,b)$$

Consideriamo il caso di una funzione $f(x)$ crescente in $[a,b]$, vogliamo dimostrare che esiste finito $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ osserviamo che $f(x)$ è limitata in $[a,b]$ in quanto:

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

cioè $f(a)$ è il minimo di $f(x)$ mentre $f(b)$ il massimo. Fissiamo $x_0 \in (a,b]$, poniamo

$$l = \sup\{f(x) : x \in [a, x_0)\}$$

Dato che $f(x)$ è limitata l'estremo superiore è finito.
Per le proprietà dell'estremo superiore, $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $x_1 \in [a, x_0)$ tale che

$$l - \varepsilon < f(x_1).$$

Per $x > x_1$ risulta $f(x) \geqslant f(x_1)$ e quindi

$$l - \varepsilon < f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant l < l + \varepsilon,$$

ma questo vuole dire che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Si procede in modo analogo per il limite per $x \to x_0^+$ con $x_0 \in [a, b)$. Dunque

$$f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leqslant \lim_{x \to b^-} f(x) \leqslant f(b), \ \ \forall x_0 \in (a, b).$$

Criterio di continuità per le funzioni monotone Sia $f(x)$ una funzione monotona nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ è continua in $[a, b]$ se e solo se l'immagine di $f(x)$ è tutto l'intervallo di estremi $f(a), f(b)$.
dim. se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ allora, indipendentemente dalla monotonia, assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Viceversa, se $f(x)$ è crescente in $[a, b]$ ma non è continua in $x_0 \in (a, b)$, per il teorema precedente ammette in x_0 una discontinuità di prima specie e si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 < l_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

ed $f(x)$ non assume alcun valore nell'intervallo (l_1, l_2). Si procede in modo analogo se $x = a$ oppure $x = b$. Ad esempio se $x = a$ e se $f(x)$ è crescente e non è continua per $x = a$ allora f(x) non assume alcun valore in $(f(a), l)$, essendo $f(a) < l = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Teorema di continuità delle funzioni inverse Sia $f(x)$ una funzione strettamente monotona in $[a, b]$. Se $f(x)$ è continua, anche la funzione inversa f^{-1} è continua.
La stretta monotonia di $f(x)$ su $[a, b]$ implica la sua invertibilità. Supponiamo che $f(x)$ sia strettamente crescente in $[a, b]$, allora :

$$f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)], \quad f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b].$$

In particolare f^{-1} assume tutti i valori dell'intervallo $[a, b]$, per il criterio precedente di continuità delle funzioni monotone f^{-1} è continua.

Ricordiamo che: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^y \quad \forall y \in \mathbb{R}$
  Banale per $y = 0$; supposto $y \neq 0$ basta porre $x/y = t$ e si ottiene che
  $$\left(1+\frac{y}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\right]^y = \left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^y$$
  e che per $x \to +\infty$, t diverge positivamente o negativamente secondo che sia $y > 0$ oppure $y < 0$.
- $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \tag{3}$$
  basta osservare che posto $t = \frac{1}{x}$, t tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ a $-\infty$ per $x \to 0^-$ e quindi
  $$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

- $\lim_{x\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x}} = e^y \;\; \forall y \in \mathbb{R}$ si deduce dalla prima ponendo $xy = t$.
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\log a}$.
  Tale funzione è definita in $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ e nel punto 0 si presenta una forma indeterminata $0/0$. Dall'identità
  $$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a((1+x))^{\frac{1}{x}}$$
  e per la relazione (3) e per la continuità della funzione logaritmo si ha
  $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\log_e a}$$

Vogliamo infine dimostrare che

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log a$. Tale funzione definita in $\mathbb{R} - \{0\}$ si presenta nella forma $0/0$ per $x \to 0$. Ponendo $a^x - 1 = t$ cioè $x = \log_a(1+t)$ si trova che

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \log_e a.$$

Osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \tag{4}$$

si puo dimostrare che

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^p} = +\infty \ \ \forall \alpha, p \in \mathbb{R}^+$ difatti basta porre $x = \frac{p}{\alpha} t$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^p} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^p \frac{e^{pt}}{t^p} = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^p \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{e^t}{t}\right)^p = +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^p} = 0, \ \ \forall p \in \mathbb{R}^+$ basta porre $x^p = t$ e successivamente $\log t = y$ tenendo presente la (4) si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^p} = \frac{1}{p} \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = \frac{1}{p} \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

- $\lim_{x\to 0} x^p \log x = 0, \ \ \forall p \in \mathbb{R}^+$. Si deduce dal precedente limite con $x = \frac{1}{t}$.

Un infinitesimo in un punto x_0 è una funzione f, definita in un insieme per il quale x_0 sia punto di accumulazione, tale che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Confronto tra infinitesimi Fondamentale è la questione di introdurre un criterio per confrontare tra loro due infinitesimi in un punto x_0.
Siano f e g due infinitesimi in x_0 e supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ non si annullino quando x è in un opportuno intorno di x_0 con $x \neq x_0$.
Si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

in tal caso si dice anche che $f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \ \ \text{per}\, x \to x_0$$

Si verifica che

1. $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$. Difatti siano $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2 = o(g(x))$ due funzioni infinitesime di ordine superiore a $g(x)$ (per $x \to x_0$) cioè
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0.$$
Allora
$$[f_1(x) + f_2(x)]/g(x) \to 0$$
per $x \to x_0$.
2. $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x))$. Difatti
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) f_2(x)}{g^2(x)} = 0$$

Si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$
essendo l un numero diverso da 0. Se $l = 1$ si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi equivalenti.

Si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Si danno analoghe definizioni per $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$ oppure $x \to \pm\infty$.
Verificare che per $x \to 0$, $f(x) = 1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x) = \mathrm{sen} x$. Difatti

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \cos x}{\mathrm{sen} x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\mathrm{sen} x (1 + \cos x)} \to 0$$

Dal limite notevole $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sen} x}{x} = 1$ si ottiene che $\mathrm{sen} x = x + o(x)$, difatti $\frac{\mathrm{sen} x - x}{x} \to 0$, ma allora $\mathrm{sen} x - x = o(x)$.

Si dice che $f(x)$ è una funzione infinitesima di ordine α in x_0 se $|f(x)|$ e $|x - x_0|^\alpha$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_0$.
Utile si rivela il principio di sostituzione degli infinitesimi. Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ infinitesime per $x \to x_0$. Se $g_1(x)$ è infinitesima di ordine superiore rispetto a $f_1(x)$ e se $g_2(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $f_2(x)$, allora i limiti seguenti sono uguali, purchè uno dei due esista:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Con il simbolo o-piccolo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{f_2(x) + o(f_2(x))} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

dim.

$$\frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1 + \frac{g_1(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{f_2(x)}}$$

Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\log(1 - x^3)}$$

Si ha che $e^t = 1 + t + o(t) \Rightarrow e^{\operatorname{sen}^3 x} = 1 + \operatorname{sen}^3 x + o(\operatorname{sen}^3 x)$; $\log(1 + t) = t + o(t) \Rightarrow \log(1 - x^3) = -x^3 + o(-x^3)$. Dal principio di sostituzione degli infinitesimi si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\log(1 - x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{-x^3} = -1$$

Un infinito in un punto x_0 è una funzione f, definita in un insieme per il quale x_0 sia punto di accumulazione. tale che:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

Confronto tra infiniti Fondamentale è la questione di introdurre un criterio per confrontare tra loro due infiniti in un punto x_0.
Siano f e g due infiniti in x_0.
Si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine superiore a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinti dello stesso ordine se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

essendo l un numero diverso da 0. Se $l = 1$ si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti equivalenti.

Si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si danno analoghe definizioni per $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$ oppure $x \to \pm\infty$.
Utile si rivela il principio di sostituzione degli infiniti. Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ infinite per $x \to x_0$. Se $f_1(x)$ è infinita di ordine superiore rispetto a $g_1(x)$ e se $f_2(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g_2(x)$, allora i limiti seguenti sono uguali:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

dim.

$$\frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1 + \frac{g_1(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{f_2(x)}}$$

Utilizzando il principio di sostituzione degli infiniti, calcolare:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^6 + x^4(2 + \mathrm{sen} x) + \log x}{1 + 3x^3 + 6x^6}$$

(ricordiamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0, (b > 0)$). $f_1(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g_1(x) = x^4(2 + \mathrm{sen} x) + \log x$ e $f_2(x) = 6x^6$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g_2(x) = 1 + 3x^3$. In base al principio di sostituzione degli infiniti il limite vale $\frac{1}{6}$.

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
e-mail: teresa.radice@unina.it

Derivate

Sia $f(x)$ definita nell'intervallo aperto (a, b) e sia x un punto di (a, b); si dice che la funzione f è derivabile nel punto x se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tale limite è la derivata di f e si indica con una delle seguenti notazioni, fra loro equivalente:

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx}, \quad Df(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad Dy.$$

Si dice che f è derivabile nell'intervallo aperto (a, b) se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$.
In alcuni casi è utile considerare invece del limite completo per $h \to 0$, soltanto il limite destro $h \to 0^+$ oppure il limite per $h \to 0^-$. Nel primo caso si parla di derivata destra, nel secondo di derivata sinistra.

Se $f(x)$ è definita in $[a, b]$, si dice che f è derivabile nell'intervallo chiuso $[a, b]$ se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$ e inoltre ammette derivata destra nel punto $x = a$ e derivata sinistra nel punto $x = b$.

Esempi $f(x) = q$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{q - q}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

e quindi anche il limite del rapporto incrementale vale 0.

$f(x) = mx + q$, con m e q costanti. Si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[m(x+h) + q] - [mx + q]}{h} = m.$$

$f(x) = x^2$, $Df = 2x$ difatti

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x.$$

Verifichiamo che la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile per $x = 0$. Infatti se $h \neq 0$ si ha

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Il limite per $h \to 0$ non esiste perchè risulta:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Confrontiamo la nozione di derivabilità e continuità. L'esempio precedente mostra che una funzione continua può non essere derivabile. Invece, ogni funzione derivabile in x è continua in x.

Il seguente Teorema stabilisce la relazione che intercorre tra la continuità e derivabilità di una funzione.

Teorema Sia f una funzione derivabile in x allora la funzione f è anche continua in x. Vogliamo fare vedere che

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

dim.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(x+h) &= f(x) + \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} \cdot h = \\
&= f(x) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = \\
&= f(x) + f'(x)\cdot 0 = f(x)
\end{aligned}$$

N.B. è stato possibile scrivere che il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti proprio perchè trattasi di una forma non indeterminata in quanto la derivata $f'(x) \in \mathbb{R}$.

Se una funzione è derivabile in tutti i punti di (a, b), allora la sua derivata $f'(x)$ è una funzione definita su (a, b). Se questa è a sua volta derivabile, diremo che la sua derivata $(f')'$ è la derivata seconda. Useremo più in generale la simbologia $f^{(n)}(x)$ per indicare la derivata n-esima.

Operazioni con le derivate Se f e g sono due funzioni derivabili in un punto x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente (purchè il denominatore sia diverso da zero), e si ha:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0$$

Dimostriamo la prima relazione con il segno $+$

$$\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}=$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

passando al limite per $h\to 0$ otteniamo la tesi.
Derivazione del prodotto

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)$$

Dato che la funzione g per ipotesi è derivabile, allora è anche continua. Al limite per $h\to 0$ risulta $g(x+h)\to g(x)$. Si ottiene cosi la tesi passando al limite per $h\to 0$.

Per dimostrare la formula del quoziente supponiamo $g(x) \neq 0$. Per il teorema della permanenza del segno esiste $\delta > 0$ per cui se $|h| < \delta$ allora $g(x+h) \neq 0$. Otteniamo

$$\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\frac{1}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} =$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} =$$

$$= \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

al limite per $h \to 0$ per la continuità delle funzioni si ottiene la tesi. Notiamo che applicando la regola di derivazione del prodotto $(cf)' = cf'$ dove c è una costante.

Teorema di derivazione delle funzioni composte Se g è una funzione derivabile in x e se f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x, e si ha

$$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dimostriamolo nel caso $g(x+h) \neq g(x)$ per ogni $h \neq 0$.

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Nel primo dei due quozienti a secondo membro compare il rapporto incrementale della funzione f nel punto $g(x)$, con incremento $k = g(x+h) - g(x)$. Tale incremento k tende a zero per $h \to 0$, dato che g è continua in x. Quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x))$$

che corrisponde alla tesi del nostro teorema.
Teorema di derivazione delle funzioni inverse Sia $f(x)$ una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente) in un intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in un punto $x \in (a, b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora anche f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ e la derivata vale

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Ad esempio $y = f(x) = x^2$ è strett. crescente per $x > 0$. La funzione inversa f^{-1} è $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. In base al teorema si ha che anche $x = \sqrt{y}$ è derivabile per $y > 0$ e la derivata vale:

$$D\sqrt{y} = \frac{1}{D(x^2)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Cominciamo con la potenza ad esponente $n \in \mathbb{N}$:

- $Dx^n = nx^{n-1}$. Per dimostrare tale formula si usa il principio di induzione: $Dx = 1$. Supponiamo che la proposizione sia vera per n e calcoliamo con la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} Dx^{n+1} &= D(x^n \cdot x) = Dx^n \cdot x + x^n Dx = \\ &= nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n \end{aligned}$$

- $D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e, \forall x > 0$. Difatti

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] =$$

$$= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

In particolare $D\log x = \frac{1}{x}, \ \forall x > 0.$

La funzione $y = \log x$ è invertibile e la sua inversa è $x = e^y$. Dal teorema di derivazione delle funzioni inverse otteniamo:

$$De^y = \frac{1}{D \log x} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y$$

- $De^x = e^x$. Ricordiamo che $e^{\log x} = x$. Calcoliamo con $a > 0$ e $a \neq 1$ la derivata di a^x:
- $Da^x = De^{\log a^x} = De^{x \log a} = e^{x \log a} D(x \log a) = a^x \log a$.
- potenza di esponente reale:
  $Dx^b = De^{\log x^b} = De^{b \log x} = e^{b \log x} D(b \log x) = x^b \cdot \frac{b}{x} = bx^{b-1}$.
- $D\sqrt{x} = Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $D\left(\frac{1}{x}\right) = Dx^{-1} = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Per le funzioni trigonometriche:

$$D\mathrm{sen}x = \cos x, \quad D\cos x = -\mathrm{sen}x$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x+h)-\mathrm{sen}x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}x\cos h+\mathrm{sen}h\cos x-\mathrm{sen}x}{h} = \\
&= \mathrm{sen}x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}h}{h} \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\mathrm{sen}h\,\mathrm{sen}x-\cos x}{h} = \\
&= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\mathrm{sen}x\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}h}{h} \\
&= -\mathrm{sen}x.
\end{aligned}$$

$$D\mathrm{tg}x = D\left(\frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}\right) = \frac{D(\mathrm{sen}x)\cos x - \mathrm{sen}x D(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Significato geometrico della derivata. Retta tangente Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0 e si consideri nel piano x, y il grafico della funzione. Ci proponiamo di determinare l'equazione della retta r passante per il punto P_0 di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e tangente al grafico della funzione f.
Bisogna determinare l'equazione della retta r' secante il grafico della funzione f nei punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. L'equazione di una retta non verticale è $y = mx + q$. Imponiamo il passaggio per P_0 e P.

$$\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + q \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q \end{cases}$$

Abbiamo un sistema in due equazioni nelle due incognite m e q. Si ottiene $m = [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h$ e poi si ricava q. L'equazione della retta secante risulta essere:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

L'equazione della retta tangente, quando esiste, è il limite per $h \to 0$ dell'equazione della retta secante. Si può passare al limite se e solo se f è derivabile in x_0. Quindi, se f è derivabile in x_0 si ottiene l'equazione della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ al grafico della funzione f:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Quanto stabilito fornisce il significato geometrico della derivata. Dato che nell'equazione della retta tangente il coefficiente della x è uguale a $m = f'(x_0)$, si dice che la derivata di una funzione f in un punto x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. La derivata è quindi una misura della pendenza del grafico della funzione.

Le funzioni trigonometriche $\mathrm{sen}x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$, non sono monotone in tutto $\mathbb{R}$ e non esistono le loro funzioni inverse in tutto $\mathbb{R}$.
Abbiamo visto che però possiamo restringere ad un intervallo limitato in modo che risultino monotone nell'insieme considerato.
La funzione $\mathrm{sen}x$ è invertibile in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e la sua inversa è $\mathrm{arcsen}x$ definita nell'intervallo $[-1, 1]$. Dal teorema di derivazione delle funzioni inverse si ha che $\mathrm{arcsen}x$ è derivabile nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ e la derivata vale :

$$D\mathrm{arcsen}x = \frac{1}{D\mathrm{sen}y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\mathrm{arcsen}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

sono state utilizzate le relazioni

$$\cos y = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 y}, \ \ \mathrm{sen}(\mathrm{arcsen}x) = x$$

la prima delle quali è verificata perchè $\cos y > 0$ per ogni $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. La funzione $\mathrm{arcsen}x$ non è derivabile per $x = \pm 1$ dato che $\cos y = D\mathrm{sen}y$ si annulla per i corrispondenti valori $y = \mathrm{arcsen}(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}$. Graficamente $\mathrm{arcsen}x$ ha retta tangente verticale se $x = \pm 1$.
La funzione $\cos x$ è invertibile in $[0, \pi]$ e la sua inversa è $\mathrm{arccos}x$ definita nell'intervallo $[-1, 1]$. Dal teorema di derivazione delle funzioni inverse si ha che $\mathrm{arcsen}x$ è derivabile in $(-1, 1)$ e la derivata vale :

$$D\mathrm{arccos}x = \frac{1}{D\cos y} = \frac{1}{-\mathrm{sen}y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\mathrm{arccos}x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La funzione $f(x) = \mathrm{tg} x$ è continua e strettamente crescente nell'intervallo aperto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e quindi invertibile in tale intervallo. La funzione inversa è la la funzione $\mathrm{arctg} x$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. E' derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ e:

$$D\mathrm{arctg} x = \frac{1}{D\mathrm{tg} y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} =$$

$$= \frac{1}{(\mathrm{sen}^2 y + \cos^2 y)/\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Diremo che un punto $x_0 \in [a, b]$ è di massimo relativo per f, nell'intervallo $[a, b]$, se il valore $f(x_0)$ è il più grande dei valori $f(x)$ con $x \in [a, b]$ vicino a x_0, più precisamente, se esiste $\delta > 0$ tale che:

$$f(x_0) \geqslant f(x), \quad \forall x \in [a, b] : \quad |x - x_0| < \delta.$$

Quindi stiamo richiedendo che la relazione precedente valga per x vicino a x_0, di qui la denominazione relativo.
Il più grande dei valori $f(x)$ per $x \in [a, b]$ si chiama massimo assoluto di f nell'intervallo $[a, b]$.
Analogamente, x_0 è un punto di minimo relativo per la funzione f, nell'intervallo $[a, b]$ se esiste $\delta > 0$ per cui

$$f(x_0) \leqslant f(x), \quad \forall x \in [a, b] : \quad |x - x_0| < \delta.$$

N.B un estremo (massimo o minimo) assoluto è anche un estremo relativo, ma non il viceversa.

Teorema di Fermat Sia f una funzione definita in $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno a $[a, b]$. Se f è derivabile in x_0 risulta $f'(x_0) = 0$.

Dim. Consideriamo il caso in cui x_0 sia un punto di massimo (relativo), significa che esiste $\delta > 0$ per cui:

$$f(x_0) \geqslant f(x_0 + h), \quad \forall h : |h| < \delta.$$

Studiamo separatamente i casi $h > 0$ e $h < 0$ si ottiene:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leqslant 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geqslant 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

e, al limite per $h \to 0^{\pm}$ di conseguenza

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \leqslant 0,$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \geqslant 0,$$

ma allora dato che per ipotesi la funzione è derivabile in x_0 necessariamente derivata destra e sinistra devono coincidere e quindi $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Rolle Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Se $f(a) = f(b)$, esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $f'(x_0) = 0$.

Dim. Indichiamo con x_1 e x_2 due punti, rispettivamente di minimo e di massimo assoluto per f nell'intervallo $[a, b]$, cioè:

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \quad \forall x \in [a, b]$$

Tali punti esistono per il teorema di Weierstrass.

Se almeno uno dei due punti x_1, x_2 è interno all'intervallo $[a, b]$ in corrispondenza la derivata si annulla per il teorema di Fermat.

Rimane il caso in cui i punti x_1 e x_2 non sono interni quindi necessariamente $x_1 = a$ e $x_2 = b$ (oppure $x_1 = b$ e $x_2 = a$). Ma allora

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

(oppure $f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$) per ogni $x \in [a, b]$. Dato che per ipotesi $f(a) = f(b)$, risulta $f(x) = f(a)$ per ogni $x \in [a, b]$ quindi la funzione è costante nell'intervallo $[a, b]$ e quindi la derivata è ovunque zero.

Teorema di Lagrange Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dim. Ci riconduciamo al teorema di Rolle con l'aiuto della funzione $g(x)$:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) - \frac{f(b) + f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

La $g(x)$ è ottenuta sottraendo da $f(x)$ l'espressione della retta congiungente gli estremi del grafico. Se $x = a$, $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ e $g(b) = f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)] = 0$. Inoltre $g(x)$ è continua in $[a, b]$ in quanto somma di funzioni continue ed è derivabile in (a, b) in quanto somma di funzioni derivabili e la derivata vale:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall x \in (a, b)$$

Per il Teorema di Rolle esiste $x_0 \in (a, b)$ per cui $g'(x_0) = 0$.
Quindi si ha: $g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{[f(b)-f(a)]}{b-a} = 0$ e quindi
$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Criterio di monotonia Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora

$$f'(x) \geqslant 0, \forall x \in (a, b) \iff f \text{ è crescente in} [a, b]$$

$$f'(x) \leqslant 0, \forall x \in (a, b) \iff f \text{ è decrescente in} [a, b].$$

dimostriamo la prima delle due (crescenza della funzione). L'altra si dimostra in modo analogo.
$\Rightarrow$ supponendo $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (a, b)$ occorre dimostrare la crescenza della funzione cioè se $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, allora $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Siamo nelle ipotesi di potere applicare il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$: esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ per cui

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1),$$

dato che $f'(x_0) \geqslant 0$ (è la nostra ipotesi) e dato che $x_2 > x_1$, risulta $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ ma allora abbiamo dimostrato che la funzione è crescente.

Viceversa, se la funzione è crescente in $[a, b]$, per ogni $x \in (a, b)$ e $h > 0$ tale che $x + h \in (a, b)$ risulta $f(x + h) \geqslant f(x)$ e quindi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

e inoltre se $h < 0$ si avrà che $x + h < x$ e quindi $f(x + h) \leqslant f(x)$ ma allora il numeratore è una quantità non positiva, ma al denominatore h è negativo e quindi il rapporto è comunque non negativo. Quindi in entrambi i casi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

Passando al limite per $h \to 0$ otteniamo che $f'(x) \geqslant 0$.

Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo Una funzione è costante in un intervallo $[a, b]$ se e solo se è derivabile in $[a, b]$ e la derivata è ovunque nulla.

La derivata di una funzione costante in $[a, b]$ è zero per ogni $x \in [a, b]$.

Viceversa, se $f(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, per i criteri di monotonia la $f(x)$ è contemporaneamente crescente e decrescente in $[a, b]$. Perciò allo stesso tempo $f(x) \geqslant f(a)$ e $f(x) \leqslant f(a)$, $\forall x \in [a, b]$ perciò $f(x)$ è identicamente uguale a $f(a)$ e quindi costante.

Criterio di stretta monotonia Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora

- $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in (a, b)$
- f' non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in (a, b)

$\iff$ f è strettamente crescente in $[a, b]$.

Oppure

- $f'(x) \leqslant 0, \forall x \in (a, b)$
- f' non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in (a, b)

$\iff$ f è strettamente decrescente in $[a, b]$.

Proviamo la $\Rightarrow$ Essendo $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (a, b)$, per il criterio di monotonia $f(x)$ è crescente in $[a, b]$. Se non fosse strettamente crescente, esisterebbero x_1, $x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$, ma allora, dato che $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ se $x_1 < x < x_2$, $f(x)$ sarebbe costante nell'intervallo $[x_1, x_2]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$ contrariamente alla ipotesi, quindi necessariamente la funzione deve essere strettamente crescente.
Proviamo la $\Leftarrow$ dato che f è strettamente crescente in $[a, b]$ per il criterio di monotonia $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (a, b)$; inoltre $f'(x)$ non può annullarsi identicamente in nessun intervallo $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$ perchè altrimenti in tale intervallo $f(x)$ sarebbe costante, contrariamente all'ipotesi di stretta monotonia.
N.B. La funzione $f(x) = x^3$ è una funzione strettamente crescente la cui derivata $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$. Questo non è in contraddizione con il teorema in quanto si annulla la derivata in un solo punto, non in un intervallo.

Si dice che una funzione f è convessa in un intervallo $[a, b]$, se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione in $[a, b]$ è al di sopra della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Analogamente si dice che una funzione è concava in $[a, b]$ se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione è, nell'intervallo $[a, b]$ al di sotto della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Matematicamente:

$$f \,\text{convessa in}[a, b] \iff \begin{cases} f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ \forall x, x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

$$f \,\text{concava in}[a, b] \iff \begin{cases} f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ \forall x, x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

Criterio di convessità Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione derivabile in $[a, b]$ e che ammetta derivata seconda in (a, b): le seguenti condizioni sono tra di loro equivalenti

1. $f(x)$ è convessa in $[a, b]$,
2. $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$,
3. $f''(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

2) $\iff$ 3) il criterio di monotonia applicato alla derivata prima $f'(x)$ stabilisce che $f''(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (a, b)$ se e solo se $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$, pertanto le due condizioni 2) e 3) sono equivalenti.
Dim. che 1) $\Rightarrow$ 2) allo scopo di provare che $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$ consideriamo $x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_1 < x_2$, ponendo consecutivamente x_0 uguale a x_1, oppure a x_2 nella definizione di convessità si avrà:

$$f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

Nelle precedenti relazioni x è un generico punto di $[a, b]$ dunque possiamo scegliere $x = x_2$ nella prima e $x = x_1$ nella seconda. Sommando membro a membro e semplificando si ottiene

$$0 \geqslant f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

cioè

$$[f'(x_2) - f'(x_1)](x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

Essendo $x_2 > x_1$ si ottiene che $f'(x_2) \geqslant f'(x_1)$.
Dim. che 2) $\Rightarrow$ 1) fissati x, $x_0 \in [a, b]$ con $x \neq x_0$ per il teorema di Lagrange esiste x_1 nell'intervallo di estremi x_0, x per cui

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0).$$

Distinguiamo i casi $x > x_0$ e $x < x_0$. Se $x > x_0$, essendo $x_1 \in (x_0, x)$ per la monotonia di $f'(x)$ dato che $x_1 > x_0$ si ha per ipotesi che $f'(x_1) \geqslant f'(x_0)$ dunque

$$f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0).$$

Se $x < x_0$ si procede in modo analogo visto che $x_1 \in (x, x_0)$ si ha che x_1 è minore di x_0 e quindi $f'(x_1) \leqslant f'(x_0)$ ma dato che $x - x_0 < 0$ moltiplicando si ottiene che

$$f'(x_1)(x - x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0)$$

e quindi $f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0)$. Abbiamo così ritrovato la definizione di convessità.

Il criterio vale anche per le funzioni concave. In particolare dunque si dimostrano nelle stesse ipotesi del teorema precedente che sono equivalenti le proposizioni:

1. f è concava in $[a, b]$
2. $f'(x)$ è decrescente in $[a, b]$
3. $f''(x) \leqslant 0$ per ogni $x \in (a, b)$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una forma indeterminata per $x \to x_0$. Spesso ci possiamo servire del Teorema di L'Hopital.

Teorema di L'Hopital Siano f, g funzioni derivabili in un intorno di x_0 (con la eventuale eccezione di x_0) tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Se in un intorno di x_0 risulta $g(x), g'(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$, allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

purchè esista il secondo limite.

Il teorema vale anche per forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ cioè se le funzioni sono infinite per $x \to x_0$. Valgono anche nel caso di $x \to x_0^{\pm}$ e $x \to \pm\infty$.

Facciamo la dimostrazione solo nel caso in cui f e g siano derivabili in x_0 con derivata continua e $g'(x_0) \neq 0$. Si dice anche che f di classe C^1 e si scrive $f \in C^1$.
In tale caso per la derivabilità delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ in x_0 si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(x_0)$ e quindi $f(x_0) = 0$ analogamente $g(x_0) = 0$. Si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f'(x)}{\lim_{x \to x_0} g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esercizi. Forme indeterminate $0/0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\mathrm{sen} 2x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\mathrm{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1/x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha$$

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

E' possibile applicare il Teorema più volte.
Ad esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$$

è una forma indeterminata ∞/∞. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x^5)}{\log(2+x^3)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^5} 5x^4}{\frac{1}{2+x^3} 3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{1+x^5} \cdot \frac{x^3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

Vogliamo calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\mathrm{sen}x}{\cos x}$$

Utilizzando di l'Hopital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\mathrm{sen}x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-cosx}{-\mathrm{sen}x} = 0$$

oppure

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\mathrm{sen}x)(1+\mathrm{sen}x)}{\cos x(1+\mathrm{sen}x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\mathrm{sen}x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\mathrm{sen}x)}$$

$$= 0$$

$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$ forma indeterminata $0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

$\lim_{x\to0^+} x\log x$ forma indeterminata $0\cdot-\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} x\log x = \lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot(-x^2) = 0$$

$\lim_{x\to0}[\log \mathrm{sen}^2 x - \log(1-\cos x)]$ forma indeterminata $-\infty+\infty$

$$\lim_{x\to0}[\log \mathrm{sen}^2 x - \log(1-\cos x)] = \lim_{x\to0}\log\frac{\mathrm{sen}^2 x}{1-\cos x} = \log 2$$

Difatti

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{2\mathrm{sen}x\cos x}{\mathrm{sen}x} = 2$$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{sen}x)^{\mathrm{tg}x}$ forma indeterminata 1^∞. Possiamo scrivere $(\mathrm{sen}x)^{\mathrm{tg}x} = e^{\mathrm{tg}x\log(\mathrm{sen}x)} = e^{\mathrm{sen}x\frac{\log(\mathrm{sen}x)}{\cos x}}$ dato che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log \mathrm{sen}x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\mathrm{sen}x}\cos x}{-\mathrm{sen}x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\mathrm{sen}^2 x} = 0$$

di conseguenza:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{sen}x)^{\mathrm{tg}x} = e^0 = 1$$

Gli asintoti orizzontali si trovano calcolando i limiti per $x \to \pm\infty$ se tali limiti sono finiti. Cioè:

$$y = l \text{ asintoto orizzontale } \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

analogamente per $x \to -\infty$.
Gli asintoti verticali calcolando il limite per $x \to x_0$ eventualmente $x \to x_0^+, x \to x_0^-$, quando il limite è infinito:

$$x = x_0 \text{ asintoto verticale } \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Gli asintoti obliqui. Un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ rappresenta una retta di equazione $y = mx + q$ con la proprietà che

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Questo significa che per $x \to +\infty$ il grafico della funzione è vicino al grafico della retta $y = mx + q$.

Vogliamo ricavare i valori di m e q. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (mx+q)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

Dunque

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

N.B. Se è presente un asintoto orizzontale è inutile procedere alla ricerca dell'asintoto obliquo. Difatti supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ ma allora $m = 0$ e $q = l$ di conseguenza in pratica abbiamo ritrovato esattamente l'asintoto orizzontale. Analoghe definizioni se facciamo il limite per $x \to -\infty$.

Studio del grafico di una funzione

- Si determina il dominio (o insieme di definizione) della funzione
- Si esamina se la funzione gode di qualche simmetria: pari, dispari, periodica
- Si determinano gli asintoti orizzontali, verticali e obliqui
- Intervalli di monotonia della funzione con punti di minimo e di massimo
- Intervalli dove la funzione è concava o convessa con punti di flesso

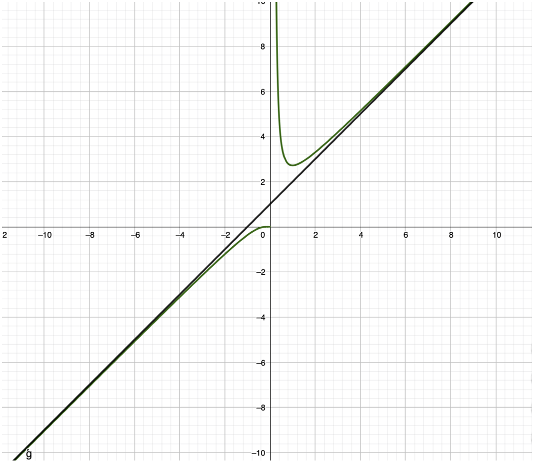


Figura: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Supponiamo (con un abuso di notazione) che $f'(x_0) = +\infty$ (oppure $f'(x_0) = -\infty$). Il diagramma è dotato di retta tangente nel punto P_0, ma questa retta è verticale di equazione $x = x_0$. Se x_0 è interno ad X, la retta tangente attraversa la curva nel punto P_0 e perciò si dice che il diagramma presenta in P_0 un punto di flesso a tangente verticale la relativa retta tangente viene detta tangente di flesso.

Supponiamo che la funzione f sia continua, ma che il rapporto incrementale non sia regolare.
Il caso più semplice è quello in cui il rapporto incrementale sia regolare a destra e a sinistra ma che $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$. In tale caso la secante s_x tende a due posizioni limite diverse secondo che x tenda ad x_0 da destra, diciamole t^- e t^+: il diagramma è unione di due archi raccordati nel punto P_0 e le rette orientate t^- e t^+ sono le tangenti in P_0 al diagramma della restrizione di f all'insieme dei punti di X aventi ascissa $x \leqslant x_0$ e $x \geqslant x_0$. La semiretta di origine P_0 costituita dai punti di t^- che precedono P_0 prende il nome di semitangente sinistra al diagramma di f nel punto P_0.

Analogamente la semiretta di origine P_0 costituita dai punti di t^+ che seguono P_0 prende il nome di semitangente destra al diagramma di f nel punto P_0.
Se almeno una delle due derivate sinistra o destra non è infinita, le due semitangenti formano un angolo non nullo e diverso da π di conseguenza il punto P_0 viene detto punto angoloso del diagramma.

Se le derivate sono entrambe infinite (di segno opposto) le rette t^- e t^+ coincidono ma hanno versi opposti di conseguenza le due semitangenti coincidono e si dice che il diagramma presenta in P_0 una cuspide. In tale caso è naturale chiamare ancora tangente la retta verticale $x = x_0$ (tangente cuspidale).

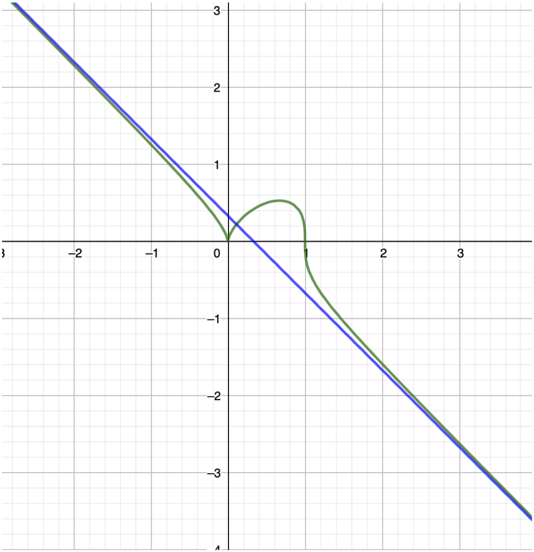


Figura: $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$

Consideriamo le cosiddette funzioni che si chiamano seno iperbolico, coseno iperbolico, tangente iperbolica definite da

$$\mathrm{sen}hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{tg}hx = \frac{\mathrm{sen}hx}{\cos hx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

tali funzioni sono definite $\forall x \in \mathbb{R}$. Si vede facilmente che $\mathrm{sen}h(-x) = -\mathrm{sen}hx$, $\cos h(-x) = \cos hx$, $\mathrm{tg}h(-x) = -\mathrm{tg}hx$ dunque il seno iperbolico e la tangente iperbolica sono funzioni dispari, il coseno iperbolico è una funzione pari

Il coseno iperbolico è positivo, mentre le funzioni $\operatorname{sen} hx$ e $\operatorname{tg} hx$ si annullano entrambe nel punto 0 e sono positive in $]0, +\infty[$, negative in $]-\infty, 0[$. Dato che e^x è strettamente crescente, la funzione e^{-x} è strettamente decrescente e quindi $-e^{-x}$ è strettamente crescente: di conseguenza $\operatorname{sen} hx$ è strettamente crescente.

La funzione $\cos hx$ è invece strettamente crescente in $[0, +\infty[$ e strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$. Data la sua parità basta verificare la crescenza in $[0, +\infty[$ (esercizio).

Anche la funzione $\operatorname{tg} hx$ è strettamente crescente. Le funzioni $\operatorname{sen} hx$ e $\operatorname{tg} hx$ sono invertibili, mentre $\cos hx$ non è invertibile, ma localmente invertibile in ogni intervallo $[0, +\infty[$ e $]-\infty, 0]$.

Vogliamo determinare i codomini delle funzioni.

$$\operatorname{sen}hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

nell'incognita x, che equivale a

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Considerando questa come una equazione di secondo grado nell'incognita e^x, si trova

$$e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}$$

dove però va scelto il segno $+$, dovendo essere $e^x > 0$. Si vede che l'unica soluzione è $x = \log(y + \sqrt{1 + y^2})$. Pertanto il codominio di $\operatorname{sen}hx$ è $\mathbb{R}$, sicchè la funzione non è limitata inferiormente e superiormente.

Per determinare il codominio della funzione $\mathrm{tg}hx$ osserviamo preliminarmente che dalla definizione $|\mathrm{tg}hx| < 1$, pertanto il codominio è incluso nell'intervallo $]-1, 1[$. Per determinarlo consideriamo l'equazione nell'incognita x:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

che equivale a

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

e quindi

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

Per determinare il codominio di $\cos hx$ essendo il $\min \cos hx = 1$ il codominio è incluso in $[1, +\infty[$. Per determinarlo consideriamo

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

con $y \geqslant 1$. Procedendo come nel caso del $\mathrm{sen}hx$ si trova:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

essendo $\sqrt{y^2 - 1} < y$ il secondo membro è positivo tanto che si sceglie il segno positivo che negativo. Pertanto otteniamo due soluzioni

$$x_1 = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad x_2 = \log(y - \sqrt{y^2 - 1})$$

la prima delle quali è non negativa. Osserviamo che

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}$$

e pertanto $x_2 = -x_1$. Le due soluzioni sono quindi opposte. Quindi

$$x = \pm \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Il codominio dalla funzione $\cos hx$ è intervallo $[1, +\infty)$ e quindi la funzione non è limitata superiormente.

Le funzioni inverse del seno iperbolico e della tangente iperbolica si chiamano rispettivamente settore seno iperbolico e settore tangente iperbolico. La prima definita in $\mathbb{R}$, la seconda in $]-1,1[$ e si ha

$$\mathrm{settsen}hx = \log(x+\sqrt{1+x^2}), \quad \mathrm{setttg}hx = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

Abbiamo anche visto che il coseno iperbolico è localmente invertibile negli intervalli $[0,+\infty)$ e $(-\infty,0]$. L'inversa locale del coseno iperbolico in $[0,+\infty)$ prende il nome di settore coseno iperbolico. La soluzione positiva si ottiene per x_1

$$\mathrm{settcos}hx = \log(x+\sqrt{x^2-1})$$

.

Derivate:

$$D\mathrm{sen}hx = \cos hx$$

$$D\cos hx = \mathrm{sen}hx$$

$$D\mathrm{tg}hx = \frac{1}{(\cos hx)^2}$$

$$Dsett\mathrm{sen}hy = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$Dsett\cos hy = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \quad \forall y > 1$$

$$Dsett\mathrm{tg}hy = \frac{1}{1-y^2}, \quad \forall y \in (-1, 1)$$

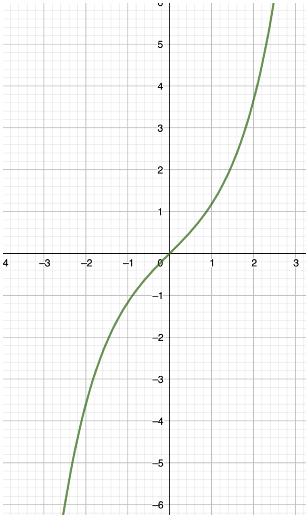


Figura: $f(x) = \mathrm{senh} x$

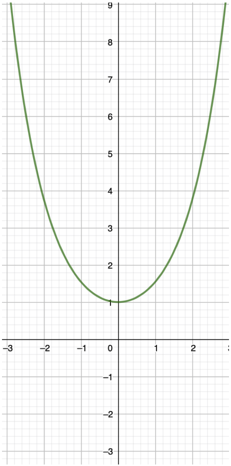


Figura: $f(x) = \cos hx$

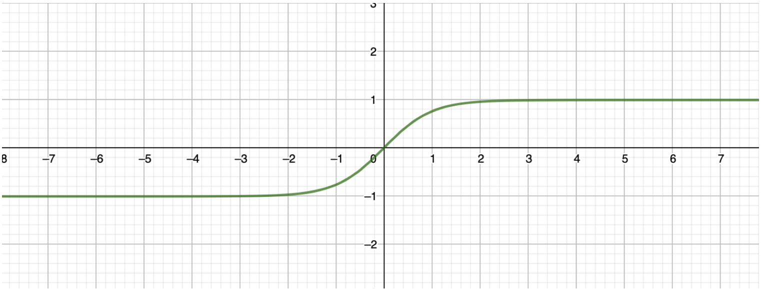


Figura: $f(x) = \mathrm{tg}hx$

Sia $\log_{f(x)} g(x)$ dove f e g definite in X e Y. Deve risulta $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ e $f(x) \neq 1$. Pertanto l'insieme è dato dai punti di $X \cap Y$ che soddisfino le precedenti relazioni. Difatti

$$\log_{f(x)} g(x) = \frac{\log g(x)}{\log f(x)}$$

Sia $f(x)^{g(x)}$ è definita per i punti x di $X \cap Y$ per i quali $f(x) > 0$.
Essendo $y = e^{\log_e y}$ $\forall y > 0$ si ha:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log_e f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log_e f(x)}. \tag{1}$$

In realtà la espressione $f(x)^{g(x)}$ può avere significato anche in punti in cui $f(x) \leqslant 0$ ad esempio negli eventuali punto in cui $g(x)$ assume valori interi positivi. Però perde significato il secondo membro. E' questo il motivo per cui, stante l'utilità della (1), si trattano i predetti punti come dei punti non appartenenti al dominio.

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”,
Università degli Studi di Napoli “Federico II”
e-mail: teresa.radice@unina.it

Formula di Taylor per il polinomi

Sia:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{1}$$

un polinomio reale di grado n. La funzione p è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$ e le sue derivate di ordine maggiore di n sono identicamente nulle, mentre, se $n \geqslant 1$, per ogni $k \leqslant n$ l'espressione della derivata k^{ma} è:

$$p^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)k \ldots 2a_{k+1}x + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}. \tag{2}$$

Difatti

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}$$
$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Ponendo nelle (1) e (2) $x = 0$, si ottiene: $a_0 = p(0)$, $\;a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$ e queste formule forniscono il significato dei coefficienti del polinomio (1).

La (1), dunque tenuto conto delle espressioni dei coefficienti del polinomio, assume la forma:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

che si chiama formula di Mac Laurin per i polinomi. La formula precedente rappresenta il polinomio p ponendo in risalto i valori assunti dal polinomio stesso e dalle sue derivate nel punto 0. E' naturale domandarsi se è possibile rappresentare il polinomio mediante una formula che evidenzi i valori assunti dal polinomio stesso e dalle sue derivate in un punto qualsiasi x_0.

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, la funzione definita ponendo:

$$q(t) = p(x_0 + t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

è un polinomio di grado della variabile t. Applicando a tale polinomio la formula di Mac Laurin si ha:

$$q(t) = q(0) + \frac{q'(0)}{1!}t + \frac{q''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{q^{(n)}(0)}{n!}t^n$$

per la regola di derivazione delle funzioni composta, si ha:

$$q^{(k)}(t) = p^{(k)}(x_0 + t)$$

da cui

$$q^{(k)}(0) = p^{(k)}(x_0)$$

e quindi abbiamo:

$$p(x_0 + t) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}t + \frac{p''(x_0)}{2!}t^2 + ... + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}t^n$$

ponendo in tale uguaglianza $t = x - x_0$, si ottiene infine:

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Tale formula si chiama formula di Taylor per i polinomi, di punto iniziale x_0.Un polinomio reale di grado $n \geqslant 0$ è univocamente determinato quando siano noti i valori che esso e le sue prime n derivate assumono in un punto.
Se f è derivabile n volte nel punto x_0 esiste uno ed un solo polinomio reale p_n, di grado non superiore a n, che verifica le uguaglianze:

$$p_n(x_0) = f(x_0),\ \ p_n'(x_0) = f'(x_0),\ \ \dots,\ \ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Il polinomio p_n, che ha l'espressione:

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si chiama il polinomio di Taylor di ordine n della funzione f, relativo al punto iniziale x_0.
Definiamo R_n la differenza tra f e p_n.

Formula di Taylor con il Resto di Peano Se f è derivabile n volte in x_0, il resto $R_n(x)$ è un infinitesimo in x_0 di ordine superiore a $(x - x_0)^n$, ossia

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Supponiamo che la funzione di classe $C^n(x_0)$.
Dim. Tenendo presente la definizione di $R_n(x)$ facciamo vedere che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + ... + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n/n!]}{(x - x_0)^n}$$

Siamo nelle ipotesi di potere applicare di L'Hopital. La prima volta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - [f'(x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}]}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Applicando $n-1$ volte il Teorema di L'Hopital si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)]}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}[f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)] = 0$$

In base alla definizione di o-piccolo possiamo dire che

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{per} \quad x \to x_0$$

Possiamo riscrivere la formula di Taylor con il resto di Peano nella forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n))$$

Se $x_0 = 0$ si ottiene la formula di Mac Laurin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Scriviamo tale formula per alcune delle funzioni elementari:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\mathrm{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Criterio per i punti di massimo e di minimo Se esistono le derivate sottoindicate della funzione $f(x)$ nel punto x_0 vale lo schema:

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) > 0 \text{minimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) < 0 \text{massimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) = 0 \begin{cases} f^{(3)}(x_0) \neq 0 \text{nè minimo nè massimo} \\ f^{(3)}(x_0) = 0 \begin{cases} f^{(4)}(x_0) > 0 \text{minimo relativo} \\ f^{(4)}(x_0) < 0 \text{massimo relativo} \\ f^{(4)}(x_0) = 0 \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Una situazione generica dello schema proposta è quella in cui $f(x)$ è derivabile n volte in x_0 per qualche $n \geqslant 2$ e risulta:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}c(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Consideriamo il caso in cui $f^{(n)}(x_0) > 0$. Per l'annullarsi delle derivate la formula di Taylor diventa:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

e si ha che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \right] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0$$

Per il teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0, \quad \forall x : 0 \neq |x - x_0| < \delta.$$

Se n è pari il denominatore $(x - x_0)^n$ è positivo per $x \neq x_0$ perciò risulta $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ e quindi x_0 è un punto di minimo relativo per $f(x)$.
Se invece n è dispari dato che il denominatore della frazione cambia segno per x maggiore o minore di x_0 risulta $f(x) > f(x_0)$ oppure $f(x) < f(x_0)$ per $x > x_0$ oppure $x < x_0$. Perciò la funzione non ha nè massimo nè di minimo in x_0.

Resto di Lagrange

Formula di Taylor con resto di Lagrange Se f è derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$ con derivata $f^{(n+1)}$ continua, per ogni $x \in [a,b]$, esiste un numero x_1 compreso tra x_0 e x, tale che

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dim. Fissati $x, x_0 \in [a,b]$ con $x \neq x_0$ definiamo $g(t)$:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$g(t)$ risulta derivabile nell'intervallo chiuso di estremi x_0 e x inoltre agli estremi dell'intervallo assume i valori $g(x) = f(x)$ e

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) = f(x)$$

Essendo anche $g(x) = f(x)$ si ha che $g(x) = g(x_0)$, il Teorema di Rolle assicura l'esistenza di un punto x_1 nell'intervallo aperto di estremi x_0 e x tale che $g'(x_1) = 0$. Esplicitando la derivata di $g(t)$ si ha:

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

$$-(n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$$

sostituendo a t il valore $t = x_1$ si ha $g'(x_1) = 0$ e quindi la tesi.

Stima del resto Sia $f(x)$ una funzione derivabile $n+1$ volte in un intervallo $[a, b]$ contenente x_0 con derivata $f^{(n+1)}$ continua in $[a, b]$. Posto

$$M_{n+1} = \max\{|f^{(n+1)}(x)| : x \in [a, b]\}$$

il resto $R_n(x)$ della formula di Taylor verifica la disuguaglianza

$$|R_n(x)| \leqslant M_{n+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \;\; \forall x \in [a, b]$$

Ritornando al resto di Peano, gli o-piccolo godono delle seguenti proprietà:

- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
- $a \cdot o(x^n) = o(a \cdot x^n) = o(x^n), \; \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$
- $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$
- $o(o(x^n)) = o(x^n)$
- $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

Verificare che

$$\operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

Utilizziamo la formula del $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen}^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + [o(x^4)]^2 - \frac{x^4}{3} +$$

$$+2x \cdot o(x^4) - \frac{x^3}{3} o(x^4)$$

Per $x \to 0$ sono infinitesimi di ordine superiore a x^5, cioè $o(x^5)$ i seguenti addendi:

$$\frac{x^6}{36}, \;\; [o(x^4)]^2, \;\; 2x \cdot o(x^4), \;\; -\frac{x^3}{3} \cdot o(x^4)$$

perciò $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$

Verifichiamo che per $x \to 0$ vale il seguente sviluppo:

$$\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

Difatti

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\log(\cos x) = \log(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))$$

di conseguenza poniamo $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, otteniamo

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \dots)^2 + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) x^4 + o(x^4)$$

Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{x\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - x^2}{x^2 + o(x^3)}\right) = -\frac{1}{3}$$

ho utilizzato la formula di $\operatorname{sen}^2 x$.

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”,
Università degli Studi di Napoli “Federico II”
e-mail: teresa.radice@unina.it

Sia $f(x)$ una funzione limitata nell'intervallo chiuso $[a, b]$ di $\mathbb{R}$.
Una partizione P di $[a, b]$ è un insieme ordinato costituito da $n + 1$ punti distinti $x_0, x_1, ..., x_n$ con $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_n = b$$

Quindi per definizione $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Gli $n + 1$ punti individuano n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$ con $k = 1, 2, ..., n$.
Per ogni partizione P di $[a, b]$, poniamo:

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definiamo poi le somme integrali inferiori

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

e le somme integrali superiori

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Se la funzione è positiva in $[a, b]$ le somme integrali hanno il significato di somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti. Dato che $m_k \leqslant M_k$ per ogni k, dalla definizione risulta che

$$s(P) \leqslant S(P) \quad \forall P$$

Più in generale vale il seguente Lemma denotati con $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ e $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$:

Lemma Sia $m \leqslant f(x) \leqslant M$ per $x \in [a, b]$ allora per ogni coppia di partizioni P, Q di $[a, b]$ si ha

$$m(b-a) \leqslant s(P) \leqslant S(Q) \leqslant M(b-a)$$

dim. poniamo $R = P \cup Q$, cioè indichiamo con R la partizione che si ottiene prendendo contemporaneamente i punti di P e Q. Cominciamo con il confrontare fra loro le somme integrali inferiori $s(P)$ e $s(R)$. Supponiamo che R, per semplicità, contenga solo un punto $\overline{x}$ in più di P e siano x_{k-1} e x_k due punti consecutivi della partizione P tali che $\overline{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Siano

$$\overline{m_1} = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \overline{x}]\}$$

$$\overline{m_2} = \inf\{f(x) : x \in [\overline{x}, x_k]\}$$

Le somme integrali $s(R)$ e $s(P)$ differiscono per pochi termini e precisamente:

$$s(R) - s(P) =$$

$$= [\overline{m_1}(\overline{x} - x_{k-1}) + \overline{m_2}(x_k - \overline{x})] - m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Essendo $\overline{m_1} \geqslant m_k$, $\overline{m_2} \geqslant m_k$ in quanto l'insieme dei valori $f(x)$ per $x \in [x_{k-1}, x_k]$ contiene sia l'insieme delle $f(x)$ per $x \in [x_{k-1}, \overline{x}]$ sia l'insieme delle $f(x)$ per $x \in [\overline{x}, x_k]$ otteniamo

$$s(R) - s(P) \geqslant m_k(\overline{x} - x_{k-1} + x_k - \overline{x} - x_k + x_{k-1}) = 0$$

Si procede allo stesso modo nel caso più generale che la partizione R contenga più di un punto rispetto a P. Analogamente si dimostra che $S(R) \leqslant S(Q)$. Si ottiene

$$s(P) \leqslant s(R) \leqslant S(R) \leqslant S(Q).$$

Per dimostrare che

$$m(b-a) \leqslant s(R) \leqslant S(R) \leqslant M(b-a)$$

Basta nella prima disuguaglianza prendere la partizione banale $P = [a, b]$.

Indichiamo con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori $s(P)$ al variare delle partizioni P dell'intervallo $[a, b]$ e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\}, \quad B = \{S(P)\}$$

Dal lemma precedente segue che i due insiemi A e B sono separati, cioè $a \leqslant b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$. Dall' assioma di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore o uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B. In generale non vi sarà un unico elemento di separazione tra A e B.

Definizione di integrale definito Se vi è un unico elemento di separazione c tra A e B allora si dice che $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$ secondo Riemann e l'elemento c si indica con

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si chiama integrale definito di f in $[a, b]$.

Posto

$$s(f) = \sup\{s(P) : P \text{ partizione di } [a,b]\}$$

$$S(f) = \inf\{S(P) : P \text{ partizione di } [a,b]\}$$

si ha che se

$$s(f) = S(f)$$

allora la funzione è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.
Dalle proprietà dell'estremo inferiore e superiore si ottiene che:
Criterio di Riemann Una funzione limitata in $[a,b]$ è ivi integrabile secondo Riemann se e solo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di $[a,b]$ tale che

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

dim. $\Rightarrow$ se f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ allora $s(f) = S(f)$.

In base alla definizione di estremo inferiore e superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono partizioni P e Q dell'intervallo $[a, b]$ tali che:

$$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P)$$

$$S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(Q).$$

Posto $R = P \cup Q$ si deduce che

$$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P) \leqslant s(R) \leqslant S(R) \leqslant S(Q) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui essendo $s(f) = S(f)$,

$$S(R) - s(R) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(s(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Viceversa se vale che $S(P) - s(P) < \varepsilon$, essendo $s(P) \leqslant s(f)$ e $S(f) \leqslant S(P)$, otteniamo:

$$0 \leqslant S(f) - s(f) \leqslant S(P) - s(P) < \varepsilon$$

Dato che il numero $S(f) - s(f)$ non dipende da ε la precedente relazione può valere per ogni $\varepsilon > 0$ solo nel caso in cui $S(f) - s(f) = 0$, cioè quando la funzione è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

Geometricamente, se la funzione è non negativa la somma $s(P)$ rappresenta l'area di un plurirettangolo (cioè unione di rettangoli) contenuto nell'insieme

$$S = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

mentre la somma $S(P)$ rappresenta l'area di un plurirettangolo contenente S.

Proprietà degli integrali definiti

Additività dell'integrale rispetto all'intervallo Se a, b, c sono tre punti di un intervallo dove la funzione $f(x)$ è integrabile, allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Linearità dell'integrale Se f, g sono funzioni integrabili in $[a, b]$ e se c'è un numero reale, anche $f + g$ e $c \cdot f$ sono integrabili in $[a, b]$ e risulta

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

Vogliamo introdurre in concetto di uniforme continuità.
Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I di $\mathbb{R}$. Allora per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che, se $x \in I$ e $|x - x_0| < \delta$ risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Tale numero δ dipende in generale sia da ε che da x_0.
Ad esempio, sia $f(x) = x^2$ per $x \in I = \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, supponiamo che esista $\delta > 0$, dipendente solo da ε e non da x_0 tale che

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

Posto $x = x_0 + h$, pur di prendere $|h| < \delta$, si ha

$$|(x_0 + h)^2 - x_0^2| = |2x_0 h + h^2| < \varepsilon, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

ma questo è assurdo in quanto, per ogni $h \neq 0$, risulta

$$\lim_{x_0 \to +\infty} |2x_0 h + h^2| = +\infty$$

Definizione di funzione uniformemente continua Si dice che $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua nell'intervallo I di $\mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tale che, per ogni x, $x' \in I$,

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Riprendendo l'esempio precedente, la funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$, invece essendo continua in $\mathbb{R}$ lo è anche in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, in quanto sussiste in seguente:

Teorema di Cantor Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f è uniformemente continua in $[a, b]$.

Vediamo una particolare classe di funzioni uniformemente continue. Sia $f(x)$ una funzione lipschitziana nell'intervallo I di $\mathbb{R}$, cioè tale che esista una costante $L > 0$ per cui

$$|f(x) - f(x')| \leqslant L|x - x'| \quad \forall x, x' \in I$$

Una tale funzione è anche uniformemente continua in I, in quanto, fissato $\varepsilon > 0$ e posto $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$, risulta $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ per ogni coppia x, x' di punti di I tali che $|x - x'| < \delta_\varepsilon$. Ora ci chiediamo se ogni funzione uniformente continua è anche lipschitziana.
Facciamo vedere che questa implicazione non sussiste.
Si dimostra la seguente:

Proposizione Sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo I. Allora $f(x)$ è lipschitziana in I con costante L se e solo se $|f'(x)| \leqslant L$ per ogni $x \in I$.
Dim. Se $|f'(x)| \leqslant L$, $\forall x \in I$ applicando Lagrange all'intervallo di estremi x, x', esiste $x_0 \in I$:

$$|f(x) - f(x')| = |f'(x_0)(x - x')| \leqslant L|x - x'|.$$

e dunque la funzione è lipschitziana. Viceversa se f è lipschitziana in I, per $x \in I$ e $x' = x + h \in I$ (con $h \neq 0$) si ha

$$|f(x) - f(x + h)| = |f(x + h) - f(x)| \leqslant L|h|$$

dividendo ambo i membri per $|h|$ e passando al limite per $h \to 0$ si ottiene $|f'(x)| \leqslant L$.

Di conseguenza abbiamo che $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \in [0, +\infty)$ è una funzione uniformemente continua dato che

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leqslant \sqrt{|x - x'|}$$

posto $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$ si ha che $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| < \varepsilon$ per $|x - x'| < \delta_\varepsilon$ e non verificando in 0 il lemma non è lipschtziana.

Integrabilità delle funzioni continue Sia $f(x)$una funzione continua in $[a,b]$. Allora $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.
dim. per il teorema di Cantor $f(x)$ è uniformemente continua e perciò, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

per ogni coppia di punti $x, x' \in [a,b]$ tali che $|x - x'| < \delta$. Se P è una partizione di $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ con $x_0 = a$, $x_n = b$, tale che $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ per ogni $k = 1, ..., n$, allora, posto

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

risulta che

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall k = 1, ..., n$$

Tale relazione è verificata perchè per il teorema di Weierstrass il sup e inf sono massimi e minimi e quindi posso applicare il Teorema di Cantor essendo valori assunti della funzione.
Dunque:

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

(Primo) teorema della media Sia f una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann in $[a,b]$. Allora

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.
dim. l'integrale è l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e superiori. Perciò qualunque sia la partizione P dell'intervallo $[a,b]$, si ha

$$s(P) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant S(P)$$

Scegliendo la partizione banale di $[a,b]$ costituita dai soli punti a e b, risulta

$$s(P) = m(b-a), \;\; S(P) = M(b-a)$$

(Secondo) teorema della media Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b - a).$$

dim. per il teorema di Weierstrass esistono il valore minimo m ed il valore massimo M di $f(x)$ in $[a, b]$. Dividendo per $b - a > 0$ si ha

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leqslant M$$

perciò il valore medio y di $f(x)$ in $[a, b]$, definito da

$$y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

è un valore compreso fra il minimo m ed il massimo M di $f(x)$ in $[a, b]$ in base al secondo teorema dell'esistenza dei valori intermedi esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y$ che equivale alla tesi.

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”,
Università degli Studi di Napoli “Federico II”
e-mail: teresa.radice@unina.it

Vogliamo mettere in evidenza una importante relazione tra integrali e derivate. Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Per ogni $x \in [a, b]$ consideriamo l'integrale definito

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Per ogni x è determinato l'integrale definito nell'intervallo $[a, x]$ della funzione f, pertanto il risultato dell'integrazione risulta una funzione di x. La funzione $F(x)$ si chiama funzione integrale.

Teorema fondamentale del calcolo integrale Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. La funzione integrale $F(x)$ è derivabile e la derivata vale:

$$F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [a, b]$$

Occorre calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione $F(x)$ quando l'incremento tende a zero.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Trasformiamo l'ultimo integrale per mezzo del secondo teorema della media applicato all'intervallo di estremi x e $x+h$.

Esiste un punto compreso tra x e $x + h$, che dipende da h che indichiamo con $x(h)$ tale che

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x(h))$$

Dato che $x(h)$ è compreso tra x e $x + h$, per $h \to 0$ risulta:

$$\lim_{h \to 0} x(h) = x.$$

Dato che la funzione per ipotesi è continua, si ha che:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x(h)) = f(x)$$

Primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale

Definizione. Una funzione $F(x)$, derivabile nell'intervallo $[a, b]$ è una primitiva di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.
Ad esempio, una primitiva della funzione $f(x) = x$ è $F(x) = x^2/2$. Una primitiva della funzione $\cos x$ è la funzione $\mathrm{sen} x$. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, anche $G(x) = F(x) + c$, qualunque sia la costante c è una primitiva di $f(x)$.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive della stessa funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$, esiste una costante c tale che

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

Dim. Posto $H(x) = G(x) - F(x)$ risulta
$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ e quindi $H(x)$ è una costante.

Formula fondamentale del calcolo integrale Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$. Sia $G(x)$una primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Per dimostrare la formula fondamentale, consideriamo la funzione integrale con t la variabile di integrazione.
La funzione integrale F e la funzione G sono entrambe primitive della funzione f. Esiste una costante c tale che

$$G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)dt + c$$

Per $x = a$ abbiamo

$$G(a) = c + \int_a^a f(t)dt = c$$

e sostituendo il valore trovato al posto di c si ha

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$$

La tesi segue ponendo $x = b$.

Integrale indefinito Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. L'insieme di tutte le primitive di f di $[a, b]$ si chiama integrale indefinito di f e si indica con il simbolo

$$\int f(x)dx.$$

Possiamo affermare che

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

dove F è una primitiva di f e c è una costante arbitraria.
Differenza tra integrale definito e indefinito che indichiamo con i simboli $\int_a^b f(x)dx$, $\int f(x)dx$. Il primo è un numero, il secondo è un insieme di funzioni.

Ricordando che la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate si ha :

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

Integrali indefiniti immediati

$$\int x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \mathrm{sen} x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \mathrm{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arcsen} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + c$$

Altri integrali praticamente immediati sono:

$$\int [f(x)]^b \cdot f'(x) dx = \int \frac{D([f(x)]^{b+1})}{b+1} = \frac{(f(x))^{b+1}}{b+1} + c$$

$$\int \frac{1}{f(x)} f'(x) dx = \log |f(x)| + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \mathrm{sen} f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \cos f(x) f'(x) dx = \mathrm{sen} f(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)dx = \mathrm{tg} f(x) + c$$

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int 3\cos x dx = \frac{1}{3}\int D(\mathrm{sen}3x)dx = \frac{1}{3}\mathrm{sen}3x + c$$

$$\int \mathrm{sen}^3 x \cos x dx = \int \mathrm{sen}^3 x D\mathrm{sen} x dx$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{sen}^4 x + c$$

$$\int \mathrm{tg}\ x dx = \int \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{-D(\cos x)}{\cos x} dx$$

$$= -\log|\cos x| + c$$

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c$$

$$\int \frac{1}{e^x}dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + c$$

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \log|\log x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx = 2\mathrm{tg}\sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}(x^2) + c$$

$$\int \frac{3x}{1+x^4}dx = \frac{3}{2}\mathrm{arctg}x^2 + c$$

Integrazione per decomposizione in somma

$$\int \frac{x}{x+1}dx = \int dx - \int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= x - \log|x+1| + c$$

$$\int \frac{3x+2}{4x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4(3x+2)}{4x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8}{4x+5}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{12x+15-7}{4x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+15}{4x+5}dx - \frac{7}{16}\int \frac{4}{4x+5}dx$$
$$= \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}\log|4x+5| + c$$

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \mathrm{tg}x - x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx$$

$$= -\log|\cos x| + \log|\operatorname{sen} x| + c$$

Integrazione delle funzioni razionali Consideriamo il rapporto tra due polinomi $f(x)$, $g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Se $m \geqslant n$ si esegue la divisione tra i polinomi $f(x)$ e $g(x)$. Indichiamo con $r(x)$, $q(x)$ resto e quoziente della divisione si può scomporre

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

dividendo per $g(x)$ si ha che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

e quindi

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx$$

Avere fatto la divisione tra i due polinomi ci riconduce a calcolare l'integrale della funzione razionale $r(x)/g(x)$ che ha la proprietà che il grado del polinomio al numeratore è inferiore al grado del polinomio al denominatore. Vediamo il caso di un polinomio di secondo grado al denominatore $g(x) = ax^2 + bx + c$ e al numeratore $r(x) = dx + e$. Si distinguono tre casi $g(x) = 0$ abbia 2 radici reali distinte, 2 radici coincidenti, due radici complesse coniugate. Si considera $a = 1$ e si studiano i vari casi :

$$\Delta > 0,$$

Si trovano le radici del denominatore che sono reali e distinte x_1 e x_2. Sussiste la decomposizione

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

andando ad integrare

$$\int \frac{r(x)}{g(x)} dx = A \log |x - x_1| + B \log |x - x_2|$$

$$\Delta = 0$$

due soluzioni coincidenti x_1

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + c$$

andando ad integrare si ottiene

$$\int \frac{r(x)}{g(x)} dx = A \log |x - x_1| + B \int (x - x_1)^{-2} dx$$

$$\int \frac{r(x)}{g(x)} dx = A \log |x - x_1| - B \frac{1}{(x - x_1)} + c$$

$$\Delta < 0$$

Ricordando che $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)^2+1}dx = \mathrm{arctg} f(x) + c$ si ha che:

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Formula di Hermite

Integrazione per parti

Formula di integrazione per parti Se in un intervallo f e g sono funzioni derivabili con derivata continua, risulta

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$f(x)$ fattore finito, mentre $g'(x)$ è detto fattore differenziale. Dato che $f'(x)$, $g'(x)$ sono continue l'integrale è ben definito.

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Calcoliamo gli integrali indefiniti utilizzando la proprietà di linearità

$$\int [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int f'(x) \cdot g(x)dx + \int f(x) \cdot g'(x)dx.$$

Si ha la tesi osservando che $f \cdot g$ è una primitiva della sua derivata $[f \cdot g]'$

$$\int x\cos x dx = \int x D\mathrm{sen} x dx = x\mathrm{sen} x - \int D x \mathrm{sen} x dx$$

$$= x\mathrm{sen} x + \cos x + c$$

$$\int \log x dx = \int D x \log x dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x\log x - x + c$$

$$\int e^x \mathrm{sen} x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

$$= -e^x \cos x + e^x \mathrm{sen} x - \int e^x \mathrm{sen} x dx$$

nella relazione precedente si hanno al primo al secondo membro due quantità uguali ma opposte di conseguenza

$$2\int e^x \mathrm{sen} x dx = e^x(\mathrm{sen} x - \cos x) + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx = \int \cos x D \mathrm{sen} x dx = \mathrm{sen} x \cos x + \int \mathrm{sen}^2 x d$$

$$= \mathrm{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \mathrm{sen} x \cos x + x - \int \cos^2 x dx$$

allora

$$2 \int \cos^2 x dx = (\mathrm{sen} x \cos x + x) + c$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (\mathrm{sen} x \cos x + x) + c$$

allo stesso modo si calcola $\int \mathrm{sen}^2 x dx$.
Se abbiamo un integrale definito si ha:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Integrazione per sostituzione

Integrazione per sostituzione Sia f una funzione continua e g una funzione derivabile con derivata continua. Risulta

$$\left[\int f(x)dx\right]_{x=g(t)} = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Il simbolo a primo membro significa, indicando con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, che

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \ \left[\int f(x)dx\right]_{x=g(t)} = F(g(t)) + c$$

Dunque occorre dimostrare che

$$F(g(t)) + c = \int f(g(t))g'(t)dt$$

e questo è conseguenza del teorema di derivazione delle funzioni composte. Infatti

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

abbiamo verificato che $F(g(t))$ è una primitiva di $f(g(t))g'(t)$ cioè la nostra tesi.
Se $x = g(t)$ la quantità $g'(t)dt$ che è una funzione delle due variabili t, dt si chiama differenziale della funzione $g(t)$ e si indica con dx. Perciò il differenziale della funzione derivabile $x = g(t)$ è definito da:

$$dx = g'(t)dt$$

tale definizione è motivata dalla formula di integrazione per sostituzione infatti x si trasforma in $g(t)$ mentre il differenziale $dx = g'(t)dt$.

Calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx$ è naturale porre $x = t^2$. Otteniamo per $t \geqslant 0$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx = \int \frac{2t}{t-3}dt$$

$$= 2\left[\int \frac{t-3}{t-3}dt + \int \frac{3}{t-3}dt\right] = 2t + 6\log|t-3| + c$$

occorre sostituire

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx = 2\sqrt{x} + 6\log|\sqrt{x}-3| + c$$

Con la sostituzione $x = \mathrm{sen} t$ si risolve il seguente integrale:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 t} \cos t dt$$

$$= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(t + \mathrm{sen} t \cos t) + c$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{arcsen} x + x \cos(\mathrm{arcsen} x)) + c$$

Integrazione di alcune funzioni irrazionali Vogliamo considerare degli integrali del tipo

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}dx, \quad \int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx, \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

Le funzioni integrande sono del tipo $f(x, \sqrt{ax+b})$, $f(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})$, $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ con $f = f(x,y)$ funzione razionale delle variabili x, y. Nel primo caso $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, nel secondo caso $f(x,y) = xy$ e nel terzo caso $\frac{1}{x+y}$. Eseguiamo la sostituzione $t = \sqrt{x+4}$ da cui $x = t^2 - 4$, $dx = 2tdt$. Pertanto si ha

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}dx = \int \frac{1}{(t^2-4)t}2tdt = \frac{1}{2}\int \frac{4}{t^2-4}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \frac{1}{2}\log|t-2| - \frac{1}{2}\log|t+2| + c$$

$$= \frac{1}{2}\log|\sqrt{x+4}-2| - \frac{1}{2}\log(\sqrt{x+4}+2) + c$$

Per risolvere la seconda conviene eseguire la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

cioè $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ per cui $dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}$. Pertanto si ha:

$$\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}t\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = 4\int \frac{t^4-t^2}{(1+t^2)^3}dt$$

$$t^4 - t^2 = (t^4 + 2t^2 + 1) - 3t^2 - 1 = (t^2+1)^2 - 3(t^2+1) + 2$$

si ha

$$\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 4\int \frac{1}{1+t^2}dt - 12\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt + 8\int \frac{1}{(1+t^2)^3}dt$$

per risolvere i due ultimi integrali occorre applicare le formule di riduzione.

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

per ogni $n > 1$, si ha

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left[(2n-3) I_{n-1} + \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right]$$

$$I_{n-1} = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} (Dx) dx = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \int x D \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^n} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - 2(n-1) \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Ritornando all'integrale precedente si ha:

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^3}dt = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$$

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt$$

per cui l'integrale diviene:

$$\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1}{1+t^2}dt - \frac{3t}{t^2+1} + \frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \mathrm{arctg}\, t - \frac{3t}{t^2+1} + \frac{2t}{(t^2+1)^2} + c$$

Risostituire $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Abbiamo già visto la formula di Hermite possiamo anche utilizzare un'altra scomposizione in fratti semplici però potrebbe essere più complicato il calcolo dell'integrale. Ad esempio:

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$$

Determiniamo le costanti A_1, A_2, h_1, k_1, h_2, k_2 tali che:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{h_1x+k_1}{x^2+1} + \frac{h_2x+k_2}{(x^2+1)^2}$$

Risolvendo il sistema per le costanti si ottiene $A_1 = h_1 = h_2 = 0$ e $A_2 = 1$, $k_1 = k_2 = -1$. Pertanto

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Occorre calcolare

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)}Dxdx = \frac{x}{(1+x^2)} - \int xD(1+x^2)^{-1}dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)} + 2\int \frac{dx}{(1+x^2)} - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

dunque

$$2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2)} + \frac{x}{(1+x^2)} = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1+x^2)}$$

Andando a sostituire e calcolando gli integrali si ottiene:

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{x} - \mathrm{arctg}x - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + c$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{3}{2}\mathrm{arctg}x + c$$

Quella che abbiamo applicato è una formula di riduzione cioè I_n è calcolato dalla I_{n-1}.

Per risolvere il terzo $x + \sqrt{x^2+1} = t$

Seguenti casi:

$\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ si pone $\sqrt[n]{ax+b} = t$, $ax + b = t^n$, $x = \frac{t^n - b}{a}$, $dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$.

$\int f(\sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots \sqrt[n_k]{ax+b})dx$. Si pone $\sqrt[n]{ax+b} = t$ con n uguale al m.c.m di n_1, n_2, $..n_k$.

$\int f(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$. Si pone $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$.

$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \sqrt{a}(t-x)$.

$\int f(x, \sqrt{-ax^2+bx+c})$, $a > 0$, $b^2 + 4ac > 0$ si pone $\sqrt{a\frac{\rho_2 - x}{x - \rho_1}} = t$ dove $\rho_1 < \rho_2$ sono le radici dell'equazione $-ax^2 + bx + c = 0$.

$\int f(\mathrm{sen} x, \cos x)dx$. Si pone $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ cioè $x = 2\mathrm{arctg} t$,
$dx = 2dt/(1 + t^2)$ e ricordiamo che $\mathrm{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\int \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x - \mathrm{sen} x} dx$$

Sostituendo: $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ e le formule di $\mathrm{sen} x$ e $\cos x$. Si ottiene

$$\int \frac{2t}{1 - t^2 - 2t} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$\int f(\mathrm{sen}^2 x, \cos^2 x, \mathrm{tg} x)$. Si pone $\mathrm{tg} x = t$ cioè $\mathrm{arctg} t = x$
$dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$ si ricorda che $\mathrm{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.
$\int f(a^x)dx$. Si pone $a^x = t$ cioè $x = \log_a t$, $dx = \frac{dt}{t \log_e a}$
$\int f(\mathrm{tg} x)dx$. Si pone $\mathrm{tg} x = t$, cioè $x = \mathrm{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

Esempio.

$$\int \frac{1}{e^{2x} + e^x + 1} dx$$

Si pone $e^x = t$, quindi $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t} dt$. Sostituendo l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{(t^2 + t + 1)} \frac{1}{t} dt$$

Corso di Analisi Matematica I

Teresa Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”,
Università degli Studi di Napoli “Federico II”
e-mail: teresa.radice@unina.it

Sia a_n una successione di numeri reali

$$n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}.$$

Ci proproniamo di definire la somma dei termini della successione, cioè

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots. \tag{1}$$

Introduciamo la somma s_n dei primi n termini della successione (detta anche somma parziale o ridotta n-esima):

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Tale successione prende il nome di serie di termine generale a_n. E' naturale definire l'espressione (1) come limite, per $n \to +\infty$ della successione s_n delle somme parziali. Cioè poniamo per definizione

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

- se per $n \to +\infty$, $s_n \to l$, $l \in \mathbb{R}$ si dice che la serie è convergente ed ha per somma esattamente l.
- se per $n \to +\infty$, $s_n \to \pm\infty$ si dice che la serie è divergente.
- se per $n \to +\infty$, il limite della s_n non esiste allora si dice che la serie è indeterminata.

Una serie convergente o divergente si dice anche regolare.
Il carattere di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente, oppure indeterminata.
Serie di Mengoli

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

la somma dei primi n termini termini

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

La s_n converge a 1 e quindi la serie converge ed ha per somma 1.

$a_n = (-1)^n$, si ha che $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1$, $s_4 = 0$. La successione s_n non ha limite quindi la serie è indeterminata.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora la successione a_n è infinitesima.

dim. Indichiamo con s_n la successione delle somme parziali e con $s \in \mathbb{R}$ la somma della serie. Essendo

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_n = s - s = 0$$

Tale condizione è necessaria, ma non sufficiente per la convergenza di una serie.

Serie armonica E' una serie di termine generale $a_n = \frac{1}{n}$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Tale serie diverge. Difatti osserviamo che $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \geqslant k \Rightarrow \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$. Calcolando l'integrale definito nell'intervallo $[k, k+1]$ otteniamo

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dx = \frac{1}{k}$$

Sommando per k che varia da 1 a n, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

al secondo membro la ridotta n-esima della serie armonica. Si ottiene

$$s_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{(n+1)} = \log(n+1).$$

La successione $\log(n+1)$ tende a $+\infty$ e quindi anche s_n.

Criterio di Cauchy per le serie Condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sia convergente è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\nu > 0$ tale che

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| = |a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$.
Dal criterio di Cauchy, s_n converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per $m > \nu$, $n > \nu$

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

Essendo $m > n$, $m = n + p$ con $p \in \mathbb{N}$ si ha

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

da cui la tesi.

Serie a termini non negativi Una serie si dice a termini non negativi se $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si dice a termini positivi se $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La successione s_n è crescente.
Difatti dato che $a_{n+1} \geqslant 0$

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

ma allora la s_n è regolare e quindi la serie non può essere indeterminata.

La serie geometrica Per ogni numero reale x consideriamo la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

Il numero x si dice ragione della serie geometrica.
Se x è positivo, la serie è a termini positivi; perciò se $x > 0$ la serie è regolare. Se $x \geqslant 1$, la successione $a_n = x^n$ non tende a zero e quindi la serie è divergente non essendo soddisfatta la condizione che $a_n \to 0$.
Fissato $x < 1$ calcoliamo la somma parziale s_n

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Per $n \to +\infty$ x^n tende a zero se $x \in (-1, 1)$ mentre non ha limite per $x \leqslant -1$.

Riassumendo Serie geometrica:

- se $|x| < 1$ la serie converge ed ha per somma $s = \frac{1}{1-x}$,
- se $x \geqslant 1$ la serie diverge,
- se $x \leqslant -1$ la serie è indeterminata.

Consideriamo, per ogni valore del parametro positivo p, la seguente serie armonica generalizzata :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

Ovviamente per $p = 1$ ritroviamo la serie armonica. Se $k \leqslant x \leqslant k+1$, risulta

$$\frac{1}{(1+k)^p} \leqslant \frac{1}{x^p} \leqslant \frac{1}{k^p}.$$

Integriamo nell'intervallo $[k, k+1]$ e sommiamo rispetto a k:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}.$$

Si vede facilmente che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^p} = s_{n+1} - 1$.

Di conseguenza possiamo scrivere che:

$$s_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \leqslant s_n$$

Caso $p < 1$ otteniamo:

$$s_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

dato che $1 - p > 0$ l'ultimo membro diverge positivamente e quindi anche la s_n. Perciò la serie è divergente se $p < 1$.
Caso $p > 1$ otteniamo:

$$s_{n+1} \leqslant 1 + \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

in questo caso $p > 1$ dunque $1 - p < 0$ per $n \to +\infty$ la successione $(n+1)^{1-p}$ tende a zero. Quindi la successione s_{n+1} che è regolare perchè è termini positivi risulta essere convergente.

Criteri di convergenza

Criterio del confronto Siano a_n, b_n due successioni tali che $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ per ogni n. Si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty.$$

Indichiamo con s_n e t_n le ridotte delle due serie $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Per le ipotesi $a_n \leqslant b_n \; \forall n$, ma allora $s_n \leqslant t_n$. Inoltre le due successioni s_n e t_n sono regolari perchè la serie sono a termini non negativi. Se t_n ha limite finito anche il limite s_n è finito e quindi dalla convergenza della serie di termine generale b_n si avrà anche la convergenza della serie di termine generale a_n . Se invece il limite di s_n è $+\infty$ anche t_n diverge. In pratica, se la serie di termine generale a_n diverge, diverge anche quella di termine generale b_n.

Criterio degli infinitesimi Sia a_n una successione a termini non negativi. Supponiamo che fissato un numero reale p, esista il limite:

$$l = \lim_{n \to +\infty} n^p a_n.$$

Si ha:

$$l \neq +\infty, p > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \tag{2}$$

$$l \neq 0, p \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \tag{3}$$

Nella (2) con il limite l finito per la definizione di limite di successione con $\varepsilon = 1$, esiste un indice ν tale che:

$$n^p a_n < l + 1 \qquad \forall n > \nu$$

Per tali n risulta $0 \leqslant a_n < \frac{(l+1)}{n^p}$. Applichiamo il criterio del confronto considerando la successione $b_n = \frac{(l+1)}{n^p}$. Dato che $p > 1$, la serie generalizzata relativa a b_n è convergente e quindi lo sarà anche quella di termine generale a_n.

Nella (3) con $l \neq 0$, esiste un indice ν tale che (per semplicità consideriamo $l \in \mathbb{R}$) e sia $\varepsilon = \frac{l}{2}$,

$$n^p a_n > \frac{l}{2} \ \ \forall n > \nu$$

ma allora $a_n > \frac{l}{2n^p}$.
Questa volta detto $b_n = \frac{l}{2n^p}$ possiamo applicare il criterio del confronto. Dato che $p \leqslant 1$ la serie di termine generale b_n risulta essere divergente cosi come la serie di termine generale a_n.
Esempio:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k+1}{k^3+k^2+1}$$

è convergente. Difatti basta applicare criterio degli infinitesimi con $p = 2$.

Criterio del rapporto Sia a_n una successione a termini positivi. Supponiamo che esista il limite

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Allora si ha:

$$l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty.$$

Supponiamo $l < 1$ e scegliamo un numero x tale che $l < x < 1$. In base alla definizione di limite di successione con $\varepsilon = x - l$, esiste un indice ν per cui

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < x, \quad \forall n \geqslant \nu.$$

Per semplicità supponiamo che l'indice ν sia uguale a 1. Abbiamo che $a_2 < a_1 x$, $a_3 < a_2 x < a_1 x^2$... in generale:

$$a_n < a_1 x^{n-1}$$

La serie associata alla successione $b_n = a_1 x^n$ è una serie geometrica di ragione x. Dato che $0 < x < 1$, la serie associata a b_n è convergente. Per il criterio del confronto converge anche la serie di termine generale a_n.

Se $l > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n > \nu.$$

Quindi la successione a_n è strettamente crescente per $n > \nu$ e perciò non può convergere a zero, ma allora non è verificata la condizione necessaria dato che il termine generale non è infinitesimo e quindi essendo una serie a termini positivi necessariamente deve divergere.

Criterio della radice Sia a_n una successione a termini non negativi. Supponiamo che esista il limite:

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Allora si ha che:

$$l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$$

(stesse conclusioni del criterio del rapporto).
Sia $l < 1$, sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < 1$. Per la definizione di limite, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$ per $n \geqslant \nu$, ovvero tale che $a_n < (l + \varepsilon)^n$ per $n \geqslant \nu$. Poichè la serie geometrica di ragione $l + \varepsilon < 1$ converge, anche la serie di termine generale a_n converge per il criterio del confronto.

Se $l > 1$, sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} > 1$ cioè $a_n > 1$ per ogni $n > \nu$. Poichè a_n non può essere infinitesima per la condizione necessaria la serie non è convergente e quindi è divergente in quanto trattasi di una serie a termini non negativi.

Serie alternate

Consideriamo serie alternate, che sono serie del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

con $a_n > 0$. Scriviamo ad esempio la funzione armonica alternata:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Tale serie è convergente (a differenza della serie armonica). Difatti è possibile applicare il seguente criterio, noto come il criterio di Leibniz: Sia $a_n \geqslant 0$ una successione decrescente ed infinitesima. Allora la serie alternata è convergente.

Convergenza assoluta

Una serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

si dice assolutamente convergente se risulta convergente la serie dei valori assoluti:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

Una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente. Il viceversa è vero invece, cioè

Teorema Una serie assolutamente convergente è convergente.

dim. Per hp la serie con i moduli converge. In base al criterio di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$. Per la disuguaglianza triangolare si ha:

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|.$$

Ma allora

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$. Di conseguenza per il criterio di Cauchy è convergente anche la serie di termine generale a_n.

Serie di Taylor

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intorno di un punto x_0. Supponiamo che in x_0 $f(x)$ ammetta infinite derivate $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... , $f^{(n)}(x_0)$, ... Traendo spunto dalla formula di Taylor è naturale considerare la serie:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ...+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

La precedente espressione è detta serie di Taylor della funzione di centro x_0. La funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor se per ogni x in un intorno di x_0, la serie è convergente e la somma vale $f(x)$; cioè esiste $\delta > 0$ tale che:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

$\forall x : |x - x_0| < \delta,$

Teorema Sia $f(x)$ una funzione che ammette infinite derivate nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, con $\delta > 0$. Supponiamo che

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M,$$

$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \forall n \in \mathbb{N}$.
Allora $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0.
Per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sia $s_n(x)$ la ridotta n esima della serie e con $R_n(x)$ il resto della formula di Taylor. Dunque

$$f(x) = s_n(x) + R_n(x)$$

In base alla formula del resto di Lagrange si ha, dato che $|x - x_0| \leqslant \delta$:

$$|R_n(x)| = |\frac{f^{n+1}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}| \leqslant M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

L'ultimo membro tende a zero e quindi $|R_n(x)| \to 0$ e analogamente $R_n(x) \to 0$. Di conseguenza

$$s_n(x) = f(x) - R_n(x) \to f(x).$$

Il teorema precedente si applica alle funzioni $\mathrm{sen} x$ e $\cos x$ in tutto $\mathbb{R}$ e alla funzione esponenziale $f(x) = e^x$ con $x \in [-\delta, \delta]$.

$$\mathrm{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$