Lezione 1 (Successioni di funzioni)

Successioni numeriche $\{a_n\}_n : n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}$

$n=1 \quad a_1, \quad n=2 \quad a_2 \quad \dots$

DEF (successioni di funzioni) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
Una successione di funzioni è un' applicazione

$$\{f_n\}_n : n \in \mathbb{N} \longrightarrow f_n(x)$$

dove $f_n(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}$

Esempio : $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$

$n=1 \quad f_1(x) = x$, $n=2 \quad f_2(x) = x^2$, $n=3 \quad f_3(x) = x^3, \dots$

Fissato $x \in X$, abbiamo una successione numerica. Ci possiamo chiedere cosa succede $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = ?$

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = ?$$

se $x = 2 \quad \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, se $x = \frac{1}{3} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

se $x = -1 \quad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \quad \nexists$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

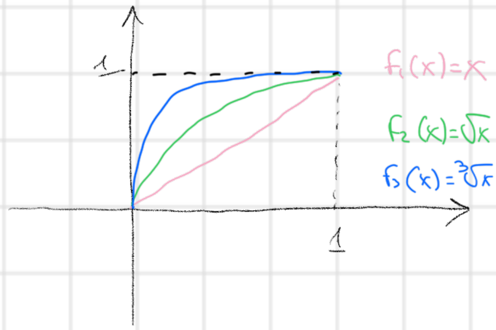
DEF (convergenza puntuale) La successione $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ in X se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu_{\varepsilon, x} \quad t.c \quad \forall n > \nu, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Esempio. $f_n(x) = \sqrt[n]{x}, \qquad x \in [0,1]$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$$

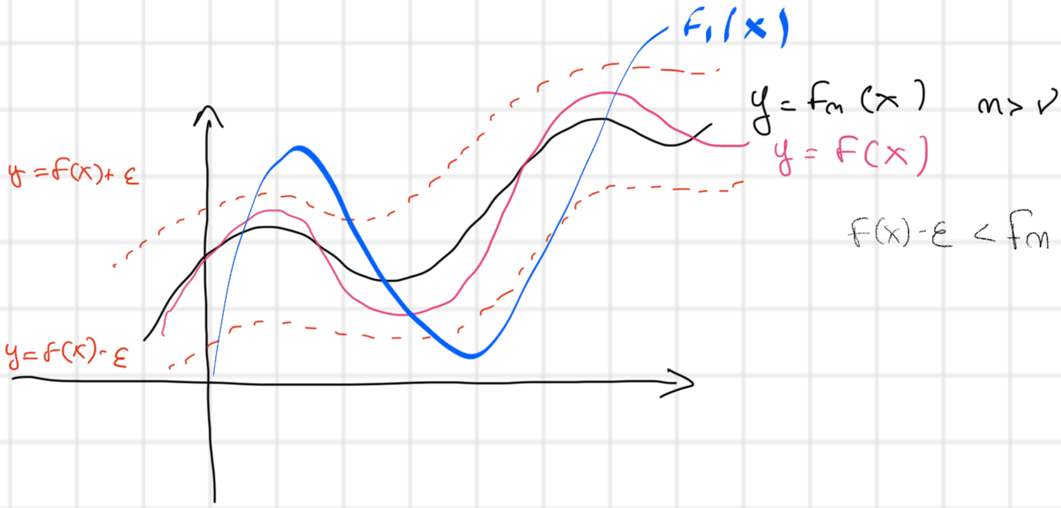


OSS $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ e' continua $\forall n \in \mathbb{N}$;

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$. Quindi la funzione limite non e' continua.

Quindi la convergenza puntuale non implica la continuità.

DEF (convergenza uniforme) f_n converge uniformemente a $f(x)$ in X $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu_\varepsilon$ t.c $\forall n > \nu$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$.



$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$

Criterio di Cauchy conv unif: $f_n(x) \to f$ uniformemente in X $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu_\varepsilon$ t.c $\underbrace{\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|}_{\text{successione numerica}} \leq \varepsilon$,

cioè

$$\lim_n \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Esempio: $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}, \qquad x \in [0,1]$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n} = 0 \qquad f(x) = [0,1], \ \forall x \in [0,1]$$

Usiamo il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \max_{[0,1]} \left|\frac{x^n}{n} - 0\right| = \max_{[0,1]} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow f_n \to 0 \text{ uniformemente in } [0,1]$$

OSS Se $f_n \to f$ uniformemente in $X \Rightarrow f$ converge puntualmente.

⚠ Il viceversa è in generale falso. Esistono infatti successioni di funzioni convergenti puntualmente, ma non uniformemente

Esempio $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

$x^n \to f(x)$ uniformemente in $[0,1]$? NO!

Infatti,

$$\sup_{[0,1]} |x^n - f(x)| = \sup_{[0,1)} |x^n - f(x)| =$$

$$= \sup_{[0,1)} x^n = 1^n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,1]} |x^n - f(x)| = \lim_{n} 1 = 1 \neq 0$$

non c'è convergenza uniforme.

TEOR (continuità del limite)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni. Se $f_n \to f$ uniformemente in X e f_n è continua $\Rightarrow$ f è continua in X.

Dim th: f continua in X, quindi voglio far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

hp 1 f_n conv uniformemente

Fisso $\varepsilon > 0$. Sia ν_ε : $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon \quad \forall x \in X$

hp 2 f_n è continua

Sia $x_0 \in X$. Fissato $\bar{n}$ $\exists \delta > 0$ t.c.

$$|f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in X : |x - x_0| < \delta$$

Dunque fissato $\varepsilon > 0$ e $\bar{n} > \nu_\varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| =$$

$$= |f(x) - f_{\bar{n}}(x) + f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0) + f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)|$$

$$\underset{\text{triangolare}}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_{\bar{n}}(x)|}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{conv uniforme}}} + \underbrace{|f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)|}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{continuità}}} + \underbrace{|f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{conv unif.}}}$$

$< 3\varepsilon \Rightarrow f$ è continua.

OSS Il teorema ci sta dicendo che

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

È vero che $\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \int_a^b \lim_n f_n\,dx$

Se $f_n \to f$ solo puntualmente, in generale non si può passare al limite sotto il segno di integrale.

Esempio $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ in $[0,1]$

$f_n \to 0$ in $[0,1]$ puntualmente

$$\int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,dx = n^2 \int_0^1 x e^{-nx}\,dx$$

$$- n\, x e^{-nx} \Big|_0^1 + \int_0^1 n e^{-nx}\,dx$$

$$= -nxe^{-nx}\Big|_0^1 - e^{-nx}\Big|_0^1 =$$

$$= -ne^{-n} - e^{-n} + 1 =$$

$$\lim_n \int_0^1 n^2 x e^{-nx} = 1 \neq \int_0^1 \lim_n n^2 x e^{-nx}\,dx$$

$$= \int_0^1 0\,dx = 0$$

TEOR (passaggio al limite sotto il segno di integrale)

Sia f_n una successione di funzioni continue in $[a,b]$, con $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$.

Allora $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\,dx$.

Dim v.f.v che

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n>\nu \quad \left| \int_a^b f_n(x) - \int_a^b f(x) \right| < \varepsilon$

quindi

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$

$$(b-a) \max_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon(b-a) \quad \forall n > \nu_\varepsilon$$

$\square$

Criterio di Cauchy uniforme

$f_n \to f$ uniformemente in $X \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu=\nu_\varepsilon$ t.c. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall m,n>\nu_\varepsilon, \forall x \in X$

ESERCIZI

1) $f_n(x) = x^n(1-\sqrt[n]{x})$, $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} x^n(1-\sqrt[n]{x}) = 0 = f(x)$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} x^n(1-\sqrt[n]{x})$$

$$f'_n(x) = n\,x^{n-1}(1-\sqrt[n]{x}) - x^n\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= n\,x^{n-1}(1-\sqrt[n]{x}) - \frac{1}{n}x^{n-1}x^{\frac{1}{n}}$$

$$= x^{n-1}\left(n - n\sqrt[n]{x} - \frac{x^{\frac{1}{n}}}{n}\right) \geq 0$$

$$\iff n \geq x^{\frac{1}{n}}\left(n+\frac{1}{n}\right)$$

$$= x^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n^2+1}{n}\right) \Rightarrow x^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$0 < x < \Big(\underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{\in(0,1)}\Big)^n$$ quindi

$\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n$ e' un punto di massimo per f_n

$$f_n\left(\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n\right) = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}\left(1-\frac{n^2}{n^2+1}\right) = M_n$$

$$\lim_n M_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right)^{-(n^2+1)\left(-\frac{n^2}{n^2+1}\right)} \left(1 - \frac{n^2}{n^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 0 = 0$$

Quindi c'è convergenza uniforme di f_n e $f(x)=0$ in $[0,1]$

② $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$, $x \in [0,1]$

$$\lim_n n^2 x e^{-nx} = 0 = f(x)$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |n^2 x e^{-nx} - 0| = \max_{x\in[0,1]} \{n^2 x e^{-nx}\}$$

$$f'_n = n^2 e^{-nx} - n^3 x e^{-nx} \geq 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^3}} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ max

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 \cdot \frac{1}{n} e^{-n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{n}{e}$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e} = +\infty$ non c'è convergenza uniforme

③ $f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1]$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x(1-x^2)^n = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |n^\alpha x(1-x^2)^n - 0| = \max_{x\in[0,1]} n^\alpha x(1-x^2)^n$$

$$f'_n = n^\alpha (1-x^2)^n - 2n^\alpha x(1-x^2)^{n-1}$$

$$= n^\alpha (1-x^2)^n - 2n^\alpha x^2(1-x^2)^{n-1} \geq 0$$

$$= n^\alpha (1-x^2)^{n-1}(1-x^2-2nx^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1+2n)x^2 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \max$$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = n^\alpha \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$$

$$= n^\alpha \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$$

$$\lim_n n^\alpha \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)\frac{n}{-(2n+1)}}}_{\to e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} 0 & \alpha < \frac{1}{2} \\ \sqrt{e}/2\sqrt{2} & \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi $f_n \to 0$ unif in $[0,1] \iff \alpha < \frac{1}{2}$.

4) $f_n(x) = x^n - x^{n+2} \qquad x \in [0,1]$

$$\lim_n f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |x^n - x^{n+2}| = \max_{x \in [0,1]} (x^n - x^{n+2})$$

$$f'_n = n x^{n-1} - (n+2) x^{n+1} \geq 0$$

$$x^n \left(n \frac{1}{x} - (n+2) x \right) \geq 0$$

$$n - (n+2) x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{n}{n+2}}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right) = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^{\left(-\frac{n+2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{n+2}\right)\frac{n}{2}} - \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)\left(-\frac{2}{n+2}\right)\frac{n+4}{2}}$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$$

$\Rightarrow f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$.

Domanda Sia $f_n \to f$ puntualmente,

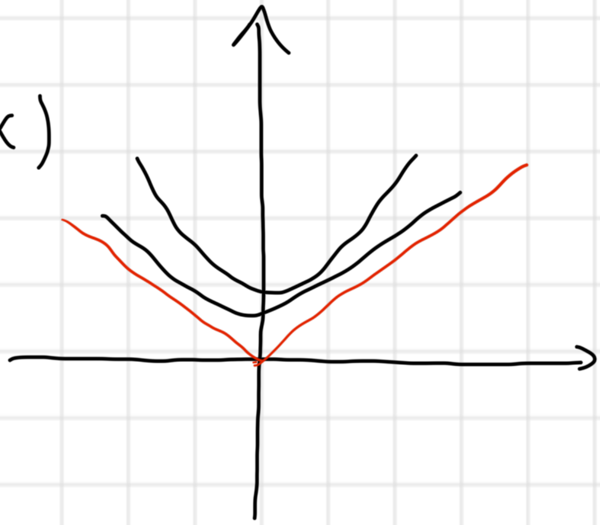
f_n derivabile $\Rightarrow$ f è derivabile? inoltre,

$f'_n \to f'$?

Quindi posso scrivere $\lim_n f'_n = \left(\lim_n f_n\right)'$

Esempio 1 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_n \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x| = f(x)$$



f_n è derivabile in $\mathbb{R}$

$f(x)$ no

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| =$$

$$= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \qquad (*)$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow (*) \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

quindi $f_n \to |x|$ uniformemente in $\mathbb{R}$

Quindi $f_n \to f$ uniformemente e f_n derivabile non implica che f è derivabile.

Esempio 2 $\quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n} \quad \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|f_n - f| = \left|\frac{\text{sen}(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

Quindi $f_n \to f$ uniformemente $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'_n = \frac{1}{n} \cdot n \cos(nx) = \cos(nx)$$

$$f' = 0 \qquad f'_n \not\to f'$$

$f'_n(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$f'(0) = 0$

TEOR (passaggio al limite sotto il segno di derivata)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $C^1([a,b])$ (derivabile con derivata continua).
Se:

1) $\exists\, x_0 \in [a,b] : f_n(x_0)$ converge

2) f'_n converge uniformemente in $[a,b]$ ad una funzione g.

Allora: f_n converge uniformemente ad una funzione f, con derivata continua in $[a,b]$ e

$$\lim_n f'_n(x) = f'(x) = \left(\lim_n f_n(x)\right)'$$

Dim Consideriamo f'_n, essendo C^1 $f_n(x)$ posso scrivere

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt$$

per il teor. fondamentale del calcolo integrale.

Passo al limite:

per hp $f_n(x_0)$ converge ad l

per hp posso applicare il teor di passaggio al limite sotto il segno di integrale $\Rightarrow$

$$\int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Quindi f_n converge puntualmente ad

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

La convergenza è anche uniforme, infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \Big| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt + $$
$$ - \ell - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \Big|$$

$$\leq |f_n(x_0) - \ell| + \left| \int_{x_0}^{x} (f'_n(t) - g(t))\,dt \right|$$

$$\leq |f_n(x_0) - \ell| + \int_a^b |f'_n(t) - g(t)|$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x_0) - \ell|}_{\to 0} + \underbrace{(b-a) \max_{[a,b]} |f'_n(t) - g(t)|}_{\to 0 \text{ perché } f'_n \to g \text{ unif}}$$

conv uniforme

$\Rightarrow f_n \to f$ uniformemente

f e' inoltre derivabile in quanto e' una primitiva di g

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$ derivabile con derivata continua

$f'(x) = g(x)$ (teor. fondamentale calcolo integrale)

$\Rightarrow \lim_n f'_n = g = f'$ unif.

f' continua per conv uniforme □

Esempio: $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$, $x \in [-1, 1]$

$\lim_{m} f_m(x) = 0 \qquad \forall x \in [-1,1]$

$$\max_{[-1,1]} |f_m(x) - 0| = \max_{[-1,1]} \frac{|x|}{1+m^2x^2}$$

$$g(x) = \frac{|x|}{1+m^2x^2} \Rightarrow g' = \frac{\frac{x}{|x|}(1+m^2x^2) - |x| \cdot 2x m^2}{(1+m^2x^2)^2}$$

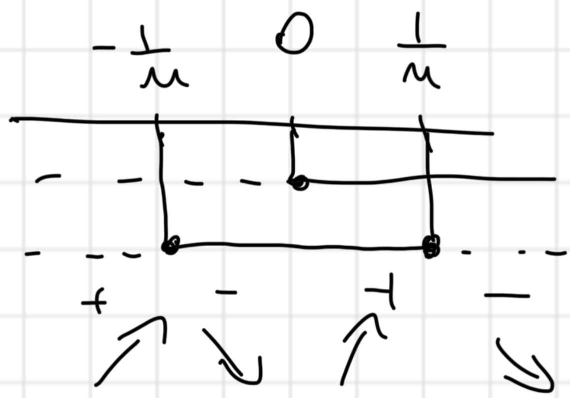
$$= \frac{x(1+m^2x^2) - 2x^3m^2}{|x|(1+m^2x^2)^2} \geq 0$$

$$x\left[1 + m^2x^2 - 2m^2x^2\right] \geq 0$$

$$x(1 - m^2x^2) \geq 0$$

$x \geq 0$

$-\frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{m}$



$$g\left(\pm\frac{1}{m}\right) = \frac{\frac{1}{m}}{1+1} = \frac{1}{2m} \longrightarrow 0$$

$f_m \rightarrow 0$ unif

$$f'_m(x) = \frac{1 - m^2x^2}{(1+m^2x^2)^2} \qquad \lim_{m} f'_m = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$f'_n \not\to f'$ uniformemente in $[-1,1]$

Quindi è necessario l'hp di convergenza uniforme delle derivate.

SERIE DI FUNZIONI

Consideriamo di avere le seguenti funzioni di variabili reali. Con precisione una successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \dots,\ f_n(x)\ \dots$$
$$e^{x} \qquad e^{2x} \qquad e^{3x} \qquad e^{nx}$$

Sia
$$s_1(x) = f_1(x)$$
$$s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$s_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$
$$\vdots$$
$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

La successione $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ è chiamata serie numerica associata alla nostra successione di funzioni

In termini più compatti $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)}$

Se questa serie converge, convergerà ad una certa funzione $F(x)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = F(x).$$

In che senso la convergenza?

Convergenza puntuale

Fissato un valore numerico di x, si viene a formare una serie numerica. Quindi scelgo x_0

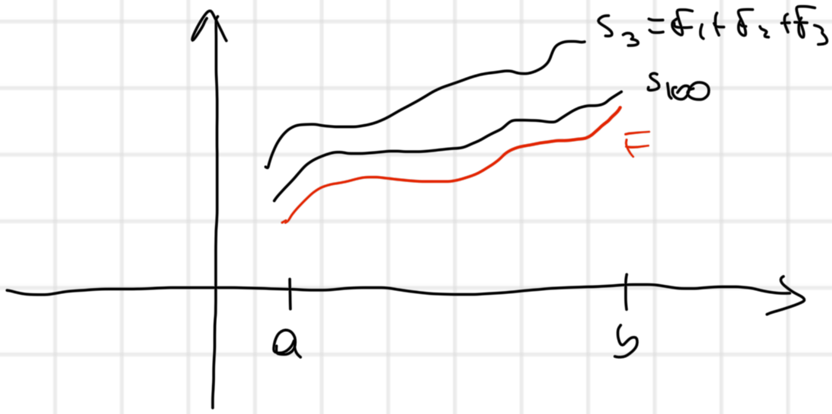
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \quad \text{è una serie numerica.}$$

Se converge, la mia serie di partenza converge in x_0

L'insieme dei valori di x che rendono la serie convergente e indichiamolo con X, viene detto insieme di convergenza.

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente ad $F(x)$

per $x \in X$.



$[a,b]$ insieme di convergenza

$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

$\Rightarrow$ se sommo un'infinità di termini, i grafici della funzione somma e quello di F vanno a coincidere

Es $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx}$

1) quale e' l'insieme di convergenza puntuale?

2) Chi e' la funzione somma? Sappiamo che individuarla non e' sempre così immediato.

1) Si può studiare in vari modi, per es. criterio del rapporto o posso vederla come una serie geometrica

$\sum_{n=0}^{+\infty} (e^x)^n$ converge per $-1 < e^x < 1$

sempre ($-1 < e^x$), $x < 0$ ($e^x < 1$)

$X = (-\infty, 0)$ insieme di convergenza

2) Per la serie geometrica sappiamo calcolare la funzione somma:

$$F(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx} = \frac{1}{1-e^x}$$

Convergenza uniforme

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente ad F in un certo insieme X.

Sia $x_0 \in X$

Esplicitiamo la somma

$$\underbrace{f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0)}_{S_n(x_0)} + \underbrace{f_{n+1}(x_0) + f_{n+2}(x_0) + \dots}_{\text{resto } n\text{-esimo in } x_0}$$

$S_n(x_0)$ ridotta n-esima o somma parziale

$= F(x_0)$
perché x_0 e' un punto di convergenza

Riscriviamolo come

$r_n(x_0) = |F(x_0) - S_n(x_0)|$, se una serie è convergente allora r_n e' infinitesima ossero $\lim_{n \to +\infty} r_n(x_0) = 0$. Cosa vuol dire in termini di definizione di limite?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \ |r_n(x_0)| < \varepsilon$

più ε è piccolo, più n deve essere grande, quindi aumenta ν. Dunque $\nu = \nu_\varepsilon$, se non dipende da x_0 la convergenza è uniforme.

Dunque

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente ad F in X se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu_\varepsilon : \forall n > \nu_\varepsilon \ |r_n(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in X$.

ES 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \qquad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

La serie è una serie geometrica, quindi in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ converge puntualmente.

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \qquad S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$|r_n(x)| = |F(x) - S_n(x)| =$$

$$= \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| = \frac{x^n}{1-x}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon : \forall n > \nu_\varepsilon \ |r_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$

$$|r_n(x)| = \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

per n grande sta andando a 0 quindi lo trovo l'indice per cui $|r_n(x)| < \varepsilon$ e la dipendenza è solo da ε, non da x.

Es 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} - x^n \qquad x \in [0,1]$

serie telescopica

$$S_n(x) = 1 - x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 1 - x^n = F(x) = \begin{cases} 0 & x=1 \\ 1 & x \neq 1 \end{cases}$$

ho convergenza puntuale.

Controlliamo se ho convergenza uniforme in $[0,1)$

$$|r_n(x)| = |F(x) - S_n(x)| = |1 - 1 + x^n|$$

$$= x^n \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$n < \frac{\varepsilon}{\log x} \qquad \text{ma } \log x < 0 \text{ in } [0,1]$$

quindi $n > \dfrac{\varepsilon}{\log x}$, dunque $\nu = \nu_{\varepsilon, x}$

Non ho convergenza uniforme.

Criterio di Cauchy uniforme

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $X \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_\varepsilon \mid |f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$

$\forall n > \nu_\varepsilon, \; \forall k \in \mathbb{N}, \; \forall x \in X$

Condizione necessaria convergenza uniforme

(in generale non sufficiente)

se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $X \Rightarrow$

$f_n \to 0$ uniformemente in X.

$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = S(x)$ si dice funzione somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

DEF (convergenza assoluta)

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in X se

$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente.

DEF (convergenza totale)

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in X sse

1) $\exists\, M_n \geq 0$ t.c. $|f_n(x)| \leq M_n$, $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$

OSS Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge totalmente in X, la serie converge assolutamente in X, e quindi puntualmente in X.

OSS $M_n = \sup_X |f_n(x)|$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in X sse $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_X |f_n(x)|$ converge

Criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in X$ converge totalmente in X, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in X

convergenza totale $\Rightarrow$ uniforme $\Rightarrow$ puntuale (1)

conv. assoluta $\not\Rightarrow$ conv. uniforme (2)

conv. uniforme $\not\Rightarrow$ conv. assoluta (3)

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad x \in (-1,1)$

e' la serie geometrica, quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{1 - x^{n+1}}{1-x}}_{S_n(x)} = \frac{1}{1-x}$$

$x \in (-1,1)$

$$\Pi_n(x) = \sup_{x \in (-1,1)} |x^n| = 1$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$ quindi non c'e' conv tot.

in $(-1,1)$

conv. uniforme:

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right|$$

$$= \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right|$$

$$\sup_{x \in (-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = 0$$ in quanto

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty$$

nessuna f_n e' superiormente limitata

quindi non ho convergenza uniforme.

$$M_n = \sup_{[-a,a]} |x^n| = a^n$$

$0 < a < 1$ ho convergenza totale in

quanto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ in $[-a, a]$

e quindi ho anche convergenza uniforme

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2 x} \qquad x \in [0, +\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2 x}$$

converge assolutamente sse
converge puntualmente perché
$f_n(x) \geq 0 \quad \forall n \ \forall x \in [0, +\infty)$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2 x} = 0 \qquad \forall x \in [0, +\infty)$$

$$\frac{\sqrt{nx}}{1+n^2 x} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+x\right)}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

Hanno lo stesso carattere => converge in $(0,+\infty)$

$\sum_n f_n(0) = 0$ quindi ho conv. puntuale in tutto $[0,+\infty)$

La serie non converge uniformemente in $[0,+\infty)$.

Verifico che non vale Cauchy uniforme:

scelgo un N e una x che non conviene, tanto deve valere "per ogni" quindi basta uno che non va bene

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x}\Bigg|_{x=\frac{1}{N}} = \sum_{n=N}^{2N} \frac{\sqrt{\frac{n}{N}}}{1+\frac{n^2}{N}} \quad (*)$$

$$n < 2N \Rightarrow n\cdot\frac{n}{N} \le n\cdot\frac{2N}{N} = 2n$$

$$n \ge N \Rightarrow \frac{n}{N} \ge 1$$

$$\Rightarrow (*) \ge \frac{1}{1+2n} \underset{n=2N}{\ge} \frac{1}{1+4N}\sum_{n=N}^{2N} 1 =$$

$$= \frac{1}{1+4N}(N+1) \longrightarrow \frac{1}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow$ non vale Cauchy uniforme quindi non ho conv. uniforme.

③ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

converge uniformemente (non ho dipendenza da x) per Leibniz, ma non converge assolutamente.

uniforme $\not\Rightarrow$ totale con lo stesso esempio.

TEOR di continuità della somma

Sia f_n una successione di funzioni continue, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente in X. Allora la somma $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ è continua in X.

OSS $f_1 + f_2$ è continua se f_1 e f_2 sono continue.

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ è continua se le f_n sono continue e ho conv. uniforme.

Passaggio al limite sotto il segno il segno di integrale

Se f_n continue in $[a,b]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ convergono uniformemente in $[a,b]$, allora

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx .$$

Passaggio al limite sotto il segno di derivata

$$\left.\begin{array}{l} f_n \in C^1([a,b]) \\ \bullet\ \exists\, x_0 \in [a,b] : \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \text{ conv.} \\ \bullet\ \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n \text{ conv unif in } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ conv uniformemente}$$

ESERCIZI

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^2 x}{n^2} \qquad x \in [1,e]$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^2 x}{n^2} = 0$ ok

$\displaystyle\frac{\log^2 x}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$

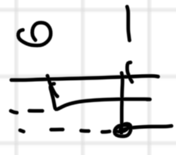
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log^2 x}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \log^2 x > 0$ in $[1,e]$

quindi converge.

Studiamo la ~~totale~~

$\displaystyle M_n = \sup_{[1,e]} \left|\frac{\log^2 x}{n^2}\right| = \sup_{[1,e]} \frac{\log^2 x}{n^2}$

$\displaystyle D\left[\frac{\log^2 x}{n^2}\right] = \frac{2}{n^2}\,\frac{\log x}{x} \geq 0 \iff \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x > 0 \end{array}$



cresce sempre in $[1, e]$ quindi

$M_n = \frac{1}{n^2}$ termine generale serie conv.

$\Rightarrow$ conv totalmente $\Rightarrow$ conv uniformemente.

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ $x \in \mathbb{R}$

$\lim_{n} \frac{x}{x^2+n^2} = 0$ ok

$x \geq 0$ posso fare confronto asintotico

$$\frac{\frac{x}{x^2+n^2}}{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{\frac{x}{n^2\left(\frac{x^2}{n^2}+1\right)}}{\frac{1}{n^2}} = x$$

converge puntualmente

$x < 0$ studio $-\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ ✓

conv totale:

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{x}{x^2+n^2} \right| = \sup_{[0,+\infty)} \frac{x}{x^2+n^2} = \circledast$$

$$D\left[\frac{x}{x^2+n^2}\right] = \frac{x^2+n^2-2x^2}{(x^2+n^2)^2} \geq 0$$

$$-x^2+n^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq n^2$$
$$\Rightarrow x \leq n$$

(*) $\dfrac{n}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{2n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n} = +\infty \Rightarrow$

non conv totalmente in $\mathbb{R}$.

Ho conv. uniforme:

- $f_n \in C^1(\mathbb{R})$
- $\exists\, x_0 : \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge

se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente $\Rightarrow$ per il teor

di passaggio al limite sotto il segno di derivata

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ conv uniformemente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2} \right| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{|n^2-x^2|}{(x^2+n^2)^2} = (*)$$

$$D\left[\frac{|n^2-x^2|}{(x^2+n^2)^2}\right] =$$

$$-2x(n^2-x^2)(x^2+n^2)^2 - (n^2-x^2)^2(x^2+n^2)4x \geq 0$$

$$(n^2-x^2)(x^2+n^2)2x\left(-(x^2+n^2)-2(n^2-x^2)\right)\ge 0$$

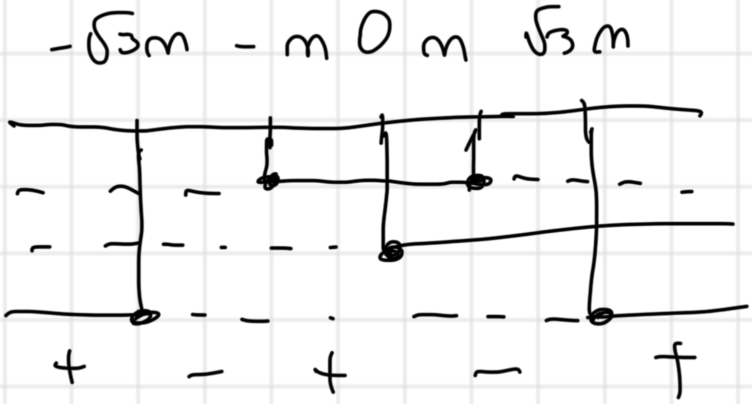
$$(n^2-x^2)\,x\,(-x^2-n^2-2n^2+2x^2)\ge 0$$

$$\Rightarrow (n^2-x^2)\,x\,(x^2-3n^2)\ge 0$$

$-n\le x\le n$

$x\ge 0$

$x\le -\sqrt{3}n \vee x\ge \sqrt{3}n$



$x=-\sqrt{3}n$ $\quad \frac{\cancel{2}n}{\cancel{16}n^4\,3}$

$x=0$ max

(*) $=\dfrac{1}{n^2}$

converge totalmente, quindi uniformemente

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformemente.

3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^2+1}x^n \qquad \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

$$\lim_n \underbrace{\frac{n^2}{4n^2+1}}_{\downarrow\ \frac{1}{4}}\ \underbrace{x^n}_{\downarrow\ 0}=0$$

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^2}{4n^2+1}}\,|x| = |x| < 1 \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ no convergenza puntuale.

$$\sup_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \frac{n^2}{4n^2+1} |x|^n = (*)$$

$$D\left[\frac{n^2}{4n^2+1} |x|^n\right] = \frac{n^2}{4n^2+1} \cdot n |x|^{n-1} \frac{|x|}{x} \geq 0$$

$$= \frac{n^3}{4n^2+1} \frac{|x|^n}{x} \geq 0$$

cresce per $x > 0$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}$

$$(*) = \frac{n^2}{4n^2+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\Rightarrow$ no conv. totale.

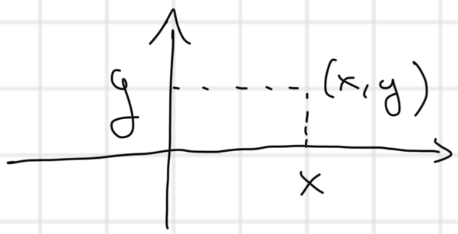
Richiami di topologia

$\mathbb{R}^N = \{(x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}\}$ $\quad N \geq 2$

spazio delle n-uple, con $x_i \in \mathbb{R}$.

Per $N = 2$, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}\}$

coordinate (o componenti)



punti del piano

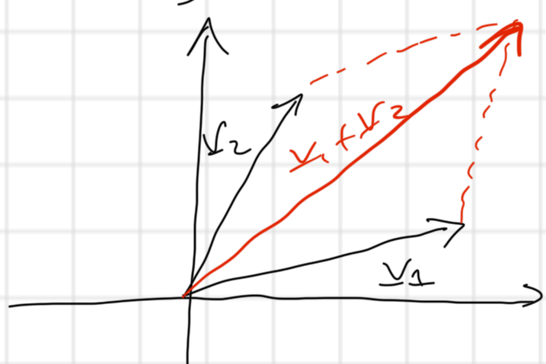
$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

Definiamo le operazioni:

Somma:

$\underline{v}_1 = (x_1, y_1)$ $\qquad \underline{v}_2 = (x_2, y_2)$

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (x_1 + x_2, \ y_1 + y_2)$

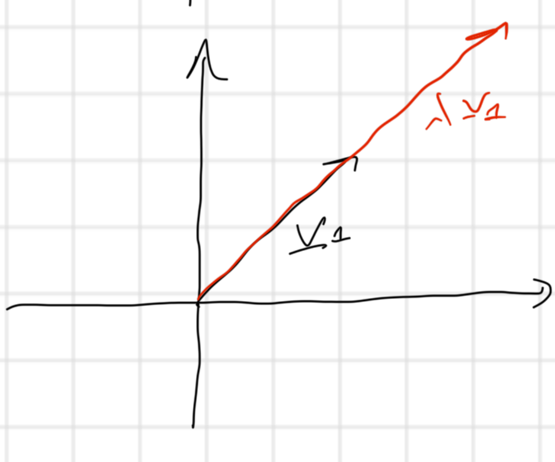


Prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \underline{v}_1 = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

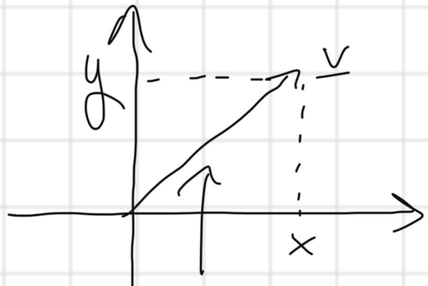
vettore nullo $\underline{0} = (0, 0)$

opposto di (x, y) è $(-x, -y)$



$\underline{V} = (x, y)$

$|\underline{V}| = \sqrt{x^2+y^2}$ modulo di $\underline{V}$ (o norma di $\underline{V}$)



$|\underline{V}| = \sqrt{x^2+y^2}$
ipotenusa
(teor. Pitagora)

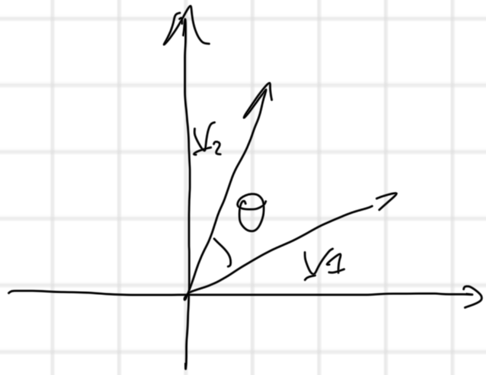
Prodotto scalare:

$\underline{V}_1 = (x_1, y_1) \qquad V_2 = (x_2, y_2)$

$\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

$\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 = |V_1|\,|V_2| \cos\theta$

interpretazione geometrica



Se $\underline{V}_1, \underline{V}_2 \neq \underline{0}$, allora se $\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 = 0 \Rightarrow$

$\underline{V}_1 \perp \underline{V}_2$ sono ortogonali.

Proprietà del prodotto scalare

1) $\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 = \underline{V}_2 \cdot \underline{V}_1$ (è commutativo)

2) $\underline{V}_1 \cdot (\alpha \underline{V}_2 + \beta V_3) = \alpha \underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 + \beta \underline{V}_1 \cdot \underline{V}_3$

(è lineare)

3) $\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_1 = |\underline{V}_1|^2 \geq 0$

4) $\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_1 = 0 \Leftrightarrow \underline{V}_1 = \underline{0}$

5) $|\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2| \leq |\underline{v}_1|\,|\underline{v}_2|$ Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Dim (5)

$t \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq (t\underline{v}_1 + \underline{v}_2)\cdot(t\underline{v}_1 + \underline{v}_2) =$

$= t^2|\underline{v}_1|^2 + 2t\,\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2 + |\underline{v}_2|^2$

$\forall t$ (diseq. di II grado sempre positiva)

$\Rightarrow 0 \geq \frac{\Delta}{4} = (\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2)^2 - |\underline{v}_1|^2|\underline{v}_2|^2$

$\Rightarrow (\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2)^2 \leq |\underline{v}_1|^2\,|\underline{v}_2|^2$

$\square$

Disuguaglianza triangolare

$|\underline{v}_1 + \underline{v}_2| \leq |\underline{v}_1| + |\underline{v}_2|$

Dim $|\underline{v}_1+\underline{v}_2|^2 = (\underline{v}_1+\underline{v}_2)\cdot(\underline{v}_1+\underline{v}_2) =$

$= |\underline{v}_1|^2 + 2\,\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2 + |\underline{v}_2|^2$

$\underset{C-S}{\leq} |\underline{v}_1|^2 + |\underline{v}_2|^2 + 2\,|\underline{v}_1|\,|\underline{v}_2|$

$= (|\underline{v}_1| + |\underline{v}_2|)^2$

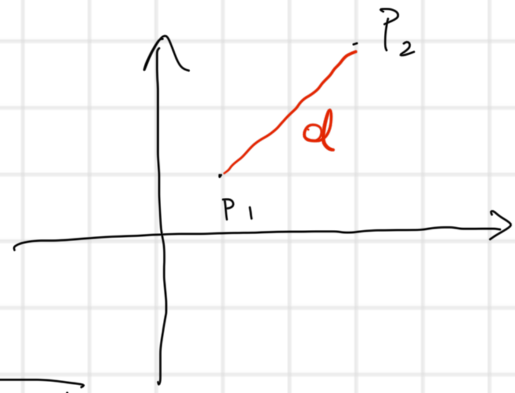
$\Rightarrow |\underline{v}_1 + \underline{v}_2| \leq |\underline{v}_1| + |\underline{v}_2|$

$\square$

Per esercizio: $|V_1 - V_2| \geq \big| |V_1| - |V_2| \big|$

Topologia di $\mathbb{R}^2$

$P_1 = (x_1, y_1) \quad P_2 = (x_2, y_2)$



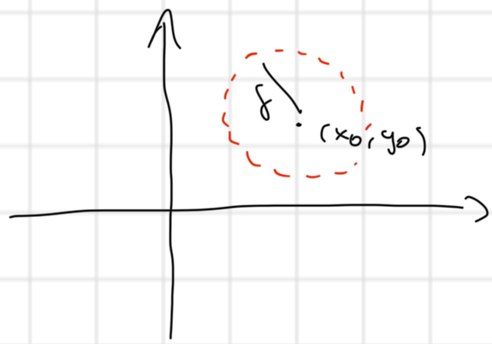
distanza

$$d(P_1, P_2) = |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)|$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

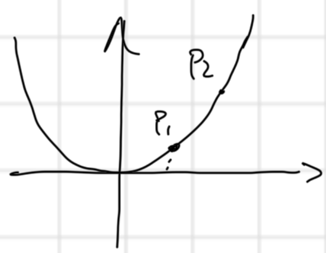
intorno circolare $\quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \ \delta > 0$

$$I_\delta(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\}$$

Equazione della circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio δ $\quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2$



- Successioni di punti del piano



$$n \in \mathbb{N} \longmapsto (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

Es $\quad P_n = (n, n^2)$ $\quad$ si trovano sulla parabola $y = x^2$

DEF P_n converge a $Q \in \mathbb{R}^2 \iff$

$d(P_n, Q) \to 0$ per $n \to +\infty$. Quindi

sse $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu, \ \underbrace{d(P_n, Q) < \varepsilon}_{P_n \in I_\varepsilon(Q)}$

Es: $P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right)$, $P_n \to (0,0)$

$$d(P_n, O) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - 0\right)^2}$$

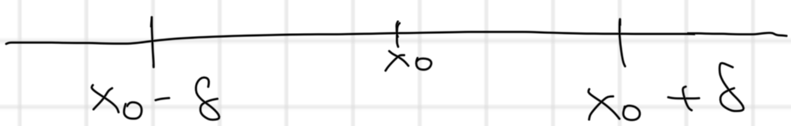
$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \longrightarrow 0$$

Infatti, $P_n = (x_n, y_n)$ $Q = (x_0, y_0)$

$P_n \to Q$ sse $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$

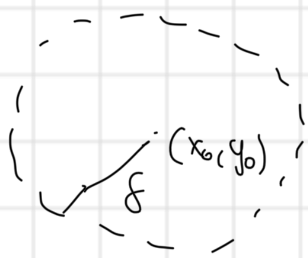
Intorni:

$\mathbb{R}$:



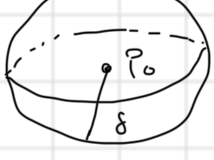
$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$\mathbb{R}^2$:



$I_\delta(x_0, y_0)$ intorno circolare

$\mathbb{R}^3$:



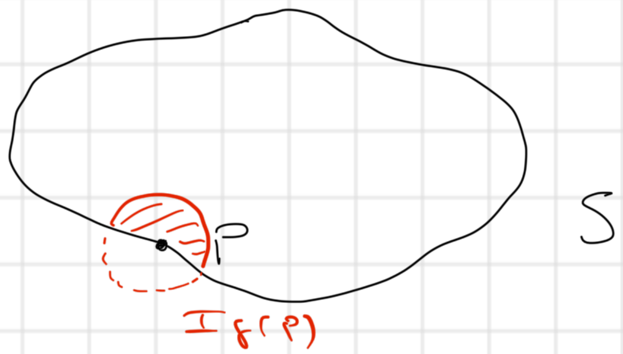
$P(x, y, z)$
$P_0(x_0, y_0, z_0)$

intorno sferico

$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta$

Dato $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $P \in \mathbb{R}^2$

P si dice punto di frontiera per $S \iff$ $\forall I_\delta(P)$, $\exists$ punti di $I_\delta(P)$ in S e punti in $\mathbb{R}^2 \setminus S$



Se P non e' di frontiera per S, $\exists I_\delta(P)$ che contiene punti di un solo tipo (in S o in $\mathbb{R}^2 \setminus S$)

P si dice interno a $S \iff \exists I_\delta(P) \subseteq S$

$(P \in S)$

P si dice esterno a $S \iff \exists I_\delta(P) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus S$

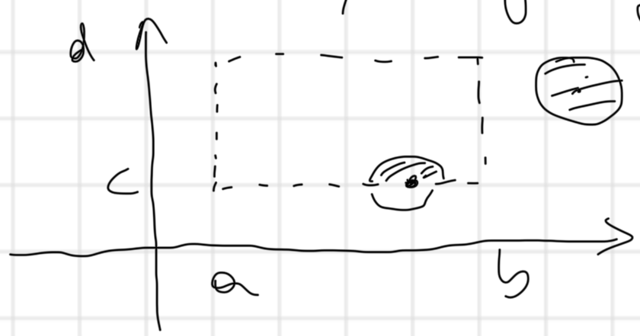
$(P \notin S)$

Indichiamo con $\partial S :=$ insieme dei punti di frontiera di S

Es: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d\}$

rettangolo aperto

Ogni punto di R e' interno ad R



∂R: I punti di frontiera di R sono i lati del rettangolo

$(a, y) \quad y \in [a, d] \qquad (x, c) \quad x \in [a, b]$

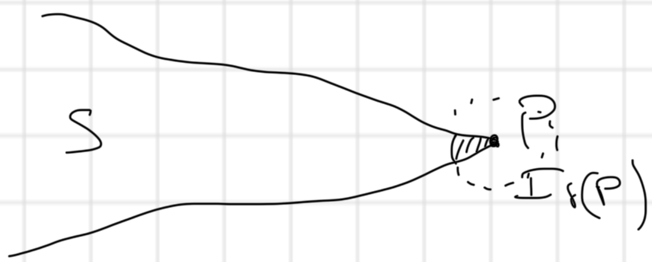
$(b, y) \quad y \in [c, d] \qquad (x, d) \quad x \in [a, b]$

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^2$

DEF $P \in \mathbb{R}^2$ si dice di accumulazione per $S \iff$

$\forall \delta > 0$, $I_\delta(P)$ contiene un punto di S diverso da P, cioè

$\forall \delta > 0, I_\delta(P) \; \exists Q \in S : Q \in I_\delta(P) \setminus \{P\}$



PROP P si dice di accumulazione per $S \iff$

$\exists P_n \in S$, $P_n \neq P$: $P_n \to P$

OSS P interno a $S \implies$ P di accumulazione per S

P esterno a $S \implies$ P non di accumulazione per S

Se P è di frontiera, questo può o non può essere di accumulazione per S.

Se un punto P di S non e' di accumulazione per S, allora si dice isolato.

DEF Un punto $P \in S$ si di isolato $\iff$ P non e' di accumulazione per S.

DEF S e' APERTO $\iff$ ogni punto di S e' interno a S,

cioe' $\forall P \in S \ \exists I_\delta(P) \subseteq S$

OSS S e' aperto $\iff$ I punti di frontiera di S non appartengono ad S.

DEF S e' chiuso $\iff$ S contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

PROP S e' chiuso $\iff$ $\mathbb{R}^2 \setminus S$ e' aperto

$\iff \partial S \subseteq S$

$\iff$ Ogni successione di elementi di S convergente, converge ad un elemento di S.

Es R rettangolo aperto $R = \mathring{R}$

$\overline{R} = R \cup \partial R$ = rettangolo chiuso =

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$

DEF La chiusura di S e' $\overline{S} = S \cup \partial S$

($\overline{S}$ e' chiuso)

La parte interna di S e' $\mathring{S} = S \setminus \partial S$

($\mathring{S}$ e' aperto)

OSS $\overline{S} = S \cup \{$ punti di accumulazione di $S \}$

DEF Un DOMINIO e' la chiusura di un aperto.
Dunque un dominio e' un chiuso, unione di un aperto con la sua frontiera.

DEF $S \subseteq \mathbb{R}^2$ e' limitato $\Leftrightarrow \exists\, I_\delta \supseteq S \Leftrightarrow$

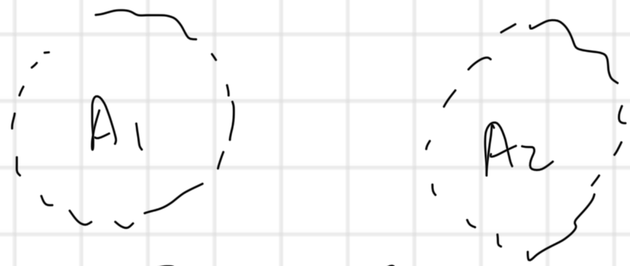
$\exists\, \delta : \; |(x, y)| \leq \delta, \; \forall (x, y) \in S$

DEF $S \subseteq \mathbb{R}^2$ e' compatto $\Leftrightarrow$ Ogni successione di punti di S ammette un'estratto convergente ad un punto di S.

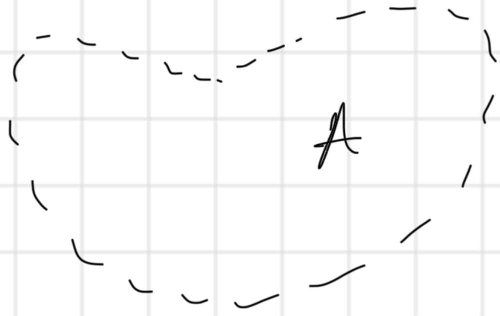
TEOR (Heine-Borel) S e' compatto $\Leftrightarrow$ S e' chiuso e limitato.

DEF Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. A si dice CONNESSO $\Leftrightarrow \nexists\, A_1, A_2$ aperti di $\mathbb{R}^2$ non vuoti t.c

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad , \quad A_1 \cup A_2 = A$



sconnesso
A è la loro unione



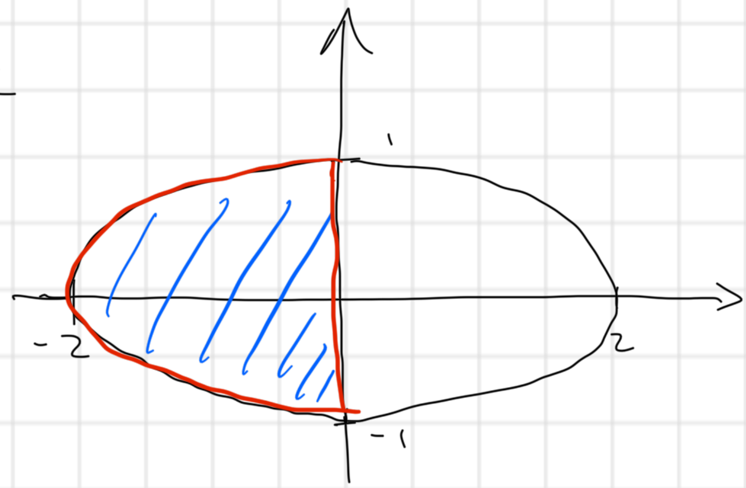
connesso

Un dominio si dice connesso $\iff$ è la chiusura di un aperto connesso

Es 1 $\quad S = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \ , \ x > 0 \right\}$

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ellisse

con $a = 2 \ , \ b = 1$



S non è né aperto né chiuso

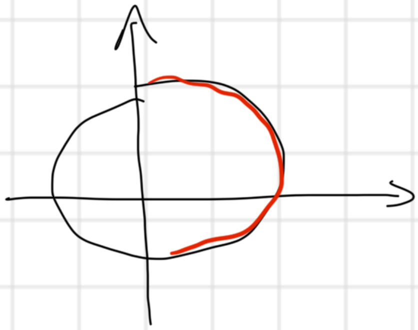
$\mathring{S} = \left\{ (x,y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 < 1 , \ x < 0 \right\}$

Es 2 $\quad S = \left\{ (x,y) : y > x^2 \right\}$

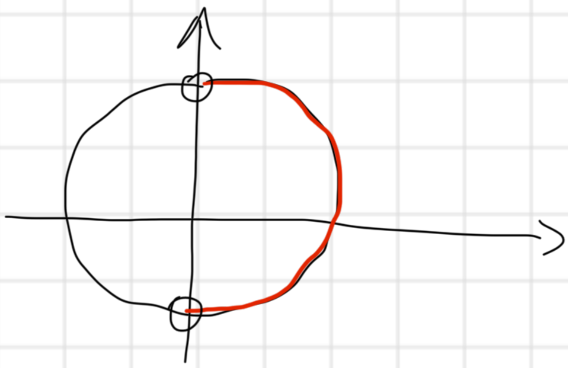
S è aperto, non è limitato
è connesso.

Es 3 $S = \{ (x,y) : x^2+y^2=1 \quad x \geq 0 \}$

S e' chiuso



Es 4 $S = \{ (x,y) : x^2+y^2=1 \quad x > 0$



$(0,1) \notin S$ e $(0,-1) \notin S$ sono di accumulazione per S

S non e' chiuso
S non e' aperto.

Continuità

In $\mathbb{R}$

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in $[a, b]$

f si dice continua in $x_0 \in [a, b]$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

In $\mathbb{R}^2$

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

f si dice continua in $(x_0, y_0) \in A$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_\delta(x_0, y_0) : \ \forall (x, y) \in I_\delta(x_0, y_0)$

$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. (qua non devo togliere il punto perché $|m(x_0, y_0)| < \varepsilon$ ossia)

Il $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_\delta(x_0, y_0) :$
$\forall (x, y) \in I_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$
$\Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$.

Es 1 $\quad f(x, y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

f e' definita in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ma $(0, 0)$ e' di accumulazione per A.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ , infatti}$$

$$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

OSS Se $f(x,y)$ ammette limite l $\Rightarrow$

(x, mx) , $f(x, mx) \to l$ $\forall m$.

Infatti $f(x,y) \to l$ significa

$\forall \varepsilon>0 \ \exists I_{\delta_1}(\underline{0}) : \forall (x,y) \in I_{\delta_1}(\underline{0})$, cioè

$|(x,y)-(0,0)| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$.

Prendo $(x,y) = (x, mx) \Rightarrow f(x,y) = f(x, mx)$
$= g(x)$

r.f.r che $\lim_{x\to 0} g(x) = l$, cioè

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_2 : |x| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$.

$|(x,y)| < \delta_1 \Rightarrow |(x, mx)| < \delta_1 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+m^2x^2} < \delta_1 \Rightarrow |x|\sqrt{1+m^2} < \delta_1$

$$\Rightarrow |x| < \frac{\delta_1}{\sqrt{1+m^2}} = \delta_2 .$$

Per studiare il limite posso usare il test sulle rette (o altre curve che rendono omogeneo il denominatore o il numeratore, dipende).

ES 2 $\quad F(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |F(x,y)| \leq 1$$

non posso concludere nulla.

test su $y = mx$

$$\lim_{x \to 0} F(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \nexists$$

Per le funzioni continue $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ valgono gli stessi teoremi di Analisi I.

TEOR (Weierstrass) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, con A compatto. Allora F assume massimo e minimo su A.

TEOR (Cantor) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, A compatto. Allora F e' uniformemente continua su A, cioe'

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x_1, x_2 \in A, \; |x_1 - x_2| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

TEOR (esistenza dei valori intermedi)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, A connesso.

Allora f assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.

DERIVATE PARZIALI

In $\mathbb{R}$,

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, si definisce $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

In $\mathbb{R}^2$,

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$,

A aperto,

la derivata parziale rispetto alla variabile x della funzione $f(x,y)$ si calcola considerando la y fissata e derivando rispetto alla x, secondo le regole per le funzioni di una variabile. Lo stesso vale per la derivata rispetto ad y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Gradiente di f in (x_0, y_0) = $\nabla f(x_0, y_0)$

Si definisce come il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

Es 1 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - e^{xy}$

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - ye^{xy}$$

$$f_y = 6xy - xe^{xy}$$

Es2 $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$

$$f_x = 2x \operatorname{sen} y \qquad f_y = x^2 \cos y$$

Es 3 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad (x_0, y_0) = (0, 0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \nexists$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \nexists$$

Una funzione f si dice derivabile in (x_0, y_0) se esiste $\nabla f(x_0, y_0)$.

Si dice derivabile in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se esiste $\nabla f(x, y)$ $\forall (x, y) \in A$.

⚠ derivabilità $\not\Rightarrow$ continuità

diversamente da quanto accade in $\mathbb{R}$.

Es $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

derivabilità:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$\exists\ \nabla f(0,0) = (0,0)$.

continuità:

$$0 \le \frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 1$$ non posso concludere niente.

$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$

$|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$

test sulle rette: $y = mx$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

$\Rightarrow$ dipende da m, quindi f non è continua.

Derivate direzionali

Un vettore di $\mathbb{R}^2$ di modulo uguale a 1 si chiama una <u>direzione</u> in $\mathbb{R}^2$.

Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{v} = (v_1, v_2)$ t.c $|\underline{v}| = 1$, questa è una direzione.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si definisce la <u>derivata direzionale</u> di f in (x_0, y_0) nella direzione v, come

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + v_1 h, y_0 + v_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

rapporto incrementale di f nella direzione $\underline{v}$.

In particolare, se $\underline{v} = \underline{e}_1 = (1, 0)$ (versore asse x), allora $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}$;

se $\underline{v} = \underline{e}_2 = (0, 1)$ (versore asse y), allora $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Esempio 2

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\underline{v}=(\alpha,\beta)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\lim_{h\to0}\frac{f(h\alpha,h\beta)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{h^2\alpha^2h\beta}{h^4\alpha^4+h^2\beta^2}\right)^2\frac{1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^3\alpha^2\beta}{\cancel{h^2}(h^2\alpha^4+\beta^2)}\right)^2=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}\frac{(\alpha^2\beta)^2}{(h^2\alpha^4+\beta^2)^2}=0$$

f e' derivabile in ogni direzione.

La funzione pero' non e' continua in (0,0).

test sulle parabole $y=mx^2$ (curve che rende omogeneo il grado del denominatore)

$y=mx^2$

$$\lim_{x\to0}f(x,mx^2)=\lim_{x\to0}\left(\frac{mx^3}{x^4+m^2x^4}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{m\cancel{x^3}}{\cancel{x^4}(1+m^2)}\right)^2=\lim_{x\to0}\left(\frac{m}{x(1+m^2)}\right)^2$$

$= +\infty \neq 0 \Rightarrow$ non è continua.

Differenziabilità

In $\mathbb{R}$, una funzione è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow \exists$ retta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)}$$

$= 0$ (taylor al I ordine)

in $\mathbb{R}^2$

idea geometrica:

$\{ z = f(x,y) \} \cap \{ y = y_0 \}$ con $z = f(x, y_0)$

derivabile

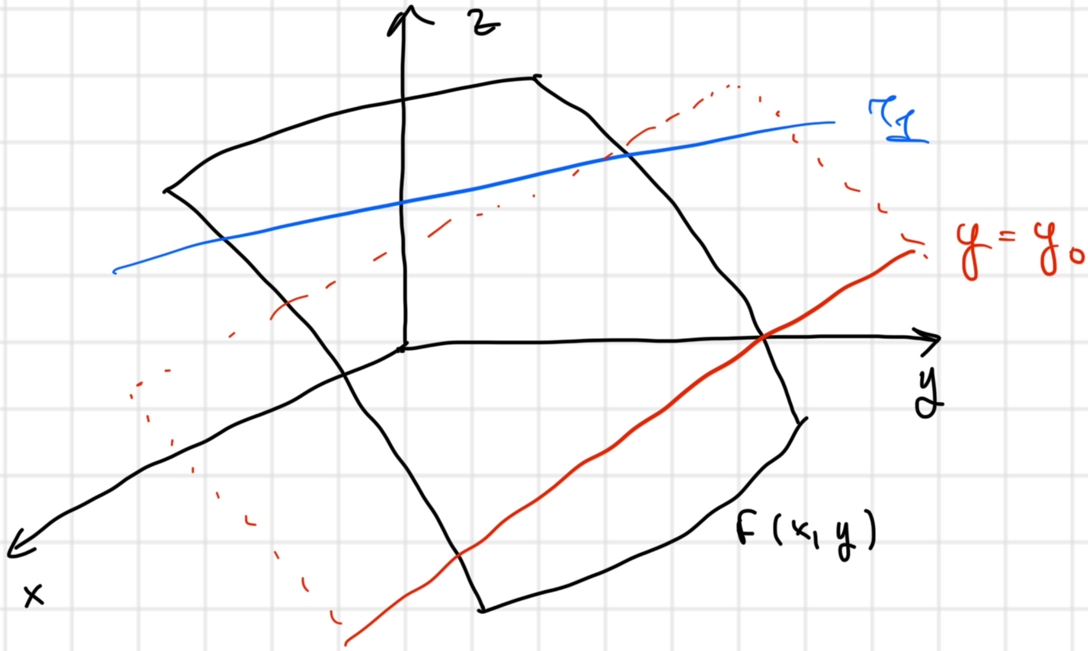
$$r_1 : \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) & x \in \mathbb{R} \\ y = y_0 \end{cases}$$

fisso y quindi sto nel piano (z, x), di nuovo con una variabile.

intersezione di due piani

se fisso $x = x_0$, $z = f(x_0, y)$

$$r_2 : \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$



Γ_1 e Γ_2 individuano un piano $\nabla f(x_0, y_0)(x-x_0, y-y_0)$

$$\pi : \quad z = f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)}$$

E' un piano tangente al $f(x, y)$ in $f(x_0, y_0)$?

Se f e' solo derivabile, non basta per dire che f ammette piano tangente.

DEF f si dice **differenziabile** in $(x_0, y_0) \in A$

sse:

1) $\exists \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

2) $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k) = f_x(x_0, y_0)\, h + f_y(x_0, y_0)\, k$$

Sia $P = (x_0, y_0)$ punto $\underline{v} = (h, k)$ vettore

OSS 1

la condizione 2) si può scrivere come

$$\lim_{\underline{v} \to (0,0)} \frac{f(P+\underline{v}) - f(P) - \nabla f(P) \cdot \underline{v}}{|\underline{v}|} = 0$$

OSS 2 la condizione 2) significa:

Sia $h = x - x_0$ $k = y - y_0$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) =$$

$$o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right) \quad \text{per} \quad (x,y) \to (x_0,y_0)$$

Quando $o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$ è piccolo, cioè in un intorno di (x_0, y_0), anche il I membro è piccolo, quindi

$$f(x,y) \sim \underbrace{f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)}_{= z : \pi}$$

piano tangente

Quindi il piano tangente esiste se f è differenziabile.

Si chiama <u>differenziale</u> di f in (x_0, y_0)

$$df(x_0,y_0) : (h,k) \longmapsto \langle \nabla f(x_0,y_0) ; (h,k) \rangle$$

Esercizio: $f(x,y) = (x+3)(y+1)$ e' differenziabile in $(0,0)$?

$$f_x(0,0) = 1 \qquad f_y(0,0) = 3$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h+3)(k+1) - 3 - (1,3)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h+3)(k+1) - 3 - h - 3k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk + \cancel{3k} + \cancel{h} + \cancel{3} - \cancel{3} - \cancel{h} - \cancel{3k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = (*)$$

$$0 \leq \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\sqrt{h^2+k^2}\,\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \longrightarrow 0$$

$(*) = 0$ quindi e' differenziabile in $(0,0)$.

Piano tangente in $(0,0)$

$$z = f(0,0) + \nabla f(0,0)(x,y)$$

$$= 3 + (1,3)(x,y) = 3 + x + 3y.$$

TEOR Se f e' differenziabile in (x_0, y_0), allora f e' continua in (x_0, y_0).

Dim f differenziabile $\Rightarrow$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Il numeratore e' un "o piccolo" del denominatore quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)h}_{\to 0} + \underbrace{f_y(x_0, y_0)k}_{\to 0} + \underbrace{o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}_{\to 0}$$

$$= f(x_0, y_0)$$

$\square$

TEOR (del differenziale) Sia $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, derivabile. Sia $(x_0, y_0) \in A$, se f_x, f_y sono continue in (x_0, y_0), allora f e' differenziabile in (x_0, y_0).

Dim sommo e sottraggo

$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$

$$\underbrace{[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)]}_{1} +$$

$$+ \underbrace{[f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]}_{2}$$

1 ho fissato la y, ed essendo f derivabile rispetto ad x, posso usare il teor. di Lagrange che ci dice che esiste un punto $\bar{x} \in [x_0, x_0+h]$ t.c

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k)(x_0+h-x_0) = 1$$

2 $\exists\ \bar{y} \in [y_0, y+k]$ t.c

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})\underbrace{k}_{\text{ampiezza dell'intervallo}}$$

$$\Rightarrow f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_x(\bar{x}, y_0+k)h + f_y(x_0, \bar{y})k$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

$$\leq \underbrace{|f_x(\bar{x}, y_0+k) - f_x(x_0, y_0)|}_{\to 0 \text{ continue}} \overbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}^{<1} +$$

$$+ \underbrace{|f_y(x_0, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)|}_{\to 0 \text{ continue}} \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{<1}$$

$\Rightarrow$ il primo membro tende a 0 $\Rightarrow f$ diff $\square$

Geometria nello spazio euclideo

Un piano $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ e' l'insieme dei punti dello spazio (x, y, z) che verificano

$$ax + by + cz + d = 0$$

I numeri a, b, c, d si chiamano numeri direttori del piano.

Tre punti $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ non allineati individuano un solo piano nello spazio.

Dati due piani π e π' nello spazio

$\pi: \ ax + by + cz + d$

$\pi': \ a'x + b'y + c'z + d'$

Questi possono incontrarsi come:

1) $\pi \parallel \pi'$ se i numeri direttori sono proporzionali $\Rightarrow \exists \rho : (a, b, c) = \rho\,(a', b', c')$.

2) $\pi \perp \pi' \iff aa' + bb' + cc' = 0$

cioe' $\langle (a, b, c), (a', b', c') \rangle = 0$

3) Due piani si dicono incidenti se si intersecano lungo una retta

Una retta r nello spazio può essere rappresentata dall'intersezione di due piani:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

con $(a, b, c) \neq \rho(a', b', c')$, altrimenti i due piani sono paralleli o coincidenti.

La retta può essere rappresentata anche come

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\, t \\ y = y_A + (y_B - y_A)\, t \\ z = z_A + (z_B - z_A)\, t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

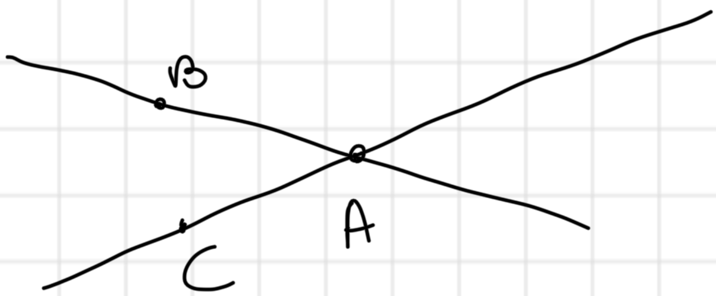
$x_B - x_A = l$

$y_B - y_A = m$

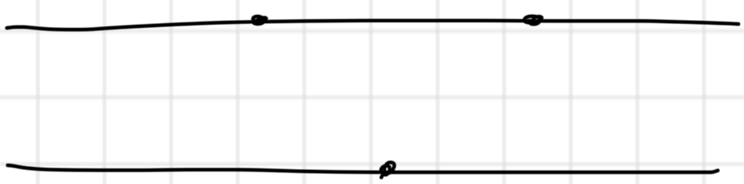
$z_B - z_A = n$

l, m, n si chiamano numeri direttori della retta, cioè mi danno la direzione della retta.

Da due rette distinte che si intersecano in un solo punto e' possibile individuare 3 punti non allineati (il punto di intersezione, un generico punto della prima retta e un generico punto della seconda). Quindi per 3 punti non allineati passa un piano:



Stessa cosa se le due rette sono parallele



Se le due rette sono coincidenti questa cosa non e' possibile.

se la retta appartiene al piano allora

$\langle (l, m, n), (a, b, c) \rangle = 0.$

Esercizi su continuità e differenziabilità

① $$f(x,y)=\begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

② $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

③ $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2\log x}{(x-1)^2+y^2} & (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & (x,y)=(1,0) \end{cases}$$

④ $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} \\ \end{cases}$$

1) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\pi}{2} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

continuità:

$$0 \leq \left| \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\longrightarrow \infty$$

test retta $y = mx$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x^2(1+m^2)}\right) = \nexists$$ perché in 0^+ fa $\frac{\pi}{2}$ e in 0^- fa $-\frac{\pi}{2}$

non è continua quindi non è diff.

② $F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

continuità:

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = (x^2+y^2) \to 0$$

$\Rightarrow$ F e' continua.

differenziabilità:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

$\exists\, \nabla f(0,0)=(0,0) \Rightarrow$ derivabile

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{?}{=}0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}=\ ?$$

$$0 \leq \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \leq (h^2+k^2)^{2-\frac{3}{2}}=\sqrt{h^2+k^2} \to 0$$

quindi è differenziabile.

③ $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2}$$

$$0 \leq \left| \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2} \right| \leq |\log x| \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

$$\frac{y^2}{(x-1)^2+y^2} \leq 1$$

quindi è continua

differenziabilità:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = 0$$

$$f_y(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,h)-f(1,0)}{h} = 0$$

$\exists\ \nabla f(1,0) = (0,0) \Rightarrow$ derivabile

diff:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h,k)-f(1,0)-f_x(1,0)h-f_y k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2 \log(1+h)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2 \log(1+h)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

test sulle rette

$K = mh$

$$\lim_{h \to 0} \frac{m^2 \cancel{h^2} \log(1+h)}{h^{\cancel{3}} (1+m^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m^2}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$$

quindi non e' differenziabile.

(4) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{xy^2}\right)}_{\to 1} (-xy^2)$$

$$0 \le \frac{|xy^2|}{\sqrt{x^4+y^4}} \le \frac{|x| \sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^4+y^4}} = |x| \to 0$$

e' continua.

$$f_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

$\Rightarrow$ e' derivabile.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1-e^{hk^2}}{h^4+k^4} =$$

$$y = mx$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-e^{m^2h^3}}{h^4(1+m^4)} = \lim_{h\to 0} -\frac{m^2\cancel{h^3}}{\cancel{h^4}(1+m^4)}$$

$$= \nexists$$

Derivate successive

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A aperto. Sia f derivabile

in A, allora esistono le derivate parziali f_x, f_y.

Se f_x e f_y sono a loro volta derivabili

$$f \rightsquigarrow f_x, f_y$$

$f_x(x,y) \nearrow (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$f_x(x,y) \searrow (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$f_y(x,y) \nearrow (f_y)_y = f_{yy}$

$f_y(x,y) \searrow (f_y)_x = f_{yx}$

La matrice delle derivate seconde si chiama

matrice Hessiana

$$D^2 f = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Se è definita la matrice hessiana allora f si dice derivabile due volte.

Gli elementi della diagonale si chiamano derivate pure; gli altri elementi sono le derivate miste.

DEF

Il determinante della matrice hessiana e':

$$\det(\nabla^2 f) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx}$$

e si chiama hessiano.

ES $f(x,y) = x^4 y$

$f_x = 4x^3 y$ $\quad f_{xy} = 4x^3$ $\quad f_{xx} = 12x^2 y$

$\#$

$f_y = x^4$ $\quad f_{yx} = 4x^3$ $\quad f_{yy} = 0$

Quindi nell'esempio precedente

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 12x^2 y & 4x^3 \\ 4x^3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(\nabla^2 f) = -16x^6$$

Questa matrice e' simmetrica $f_{xy} = f_{yx}$, ma in generale $f_{xy} \neq f_{yx}$.

TEOR (di Schwarz)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, $(x_0, y_0) \in A$ e sia

$f: A \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in A.

Se f_{xy} e f_{yx} sono continue in (x_0, y_0) allora

$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Conseguenze del teorema di Schwarz

$$\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z) \big)$$

$F_i : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la componente e' un numero

DEF Definiamo la divergenza del campo $\vec{F}$ come

$$\underbrace{\operatorname{div} \vec{F}}_{\text{e' uno scalare}} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

DEF $\operatorname{rot} \vec{F}$ il rotore di $\vec{F}$ come

$$\underbrace{\operatorname{rot} \vec{F}}_{\text{e' un vettore}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2)\underline{i} + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3)\underline{j} + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\underline{k}$$

$$= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1)$$

ES $\vec{F} = (x, yx, z^2)$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 1 + x + 2z$$

$\text{rot}\,\vec{F} = \left(0-0,\ 0-0,\ y-0\right) = (0,0,y)$

TEOR

① $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad f \in C^2(A)$

f ha derivate seconde continue in A.

$\text{rot}\,(\nabla f) = \underline{0}$

② $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{F} \in C^2(A;\mathbb{R}^3)$

$\text{div}\,(\text{rot}\,\vec{F}) = 0$

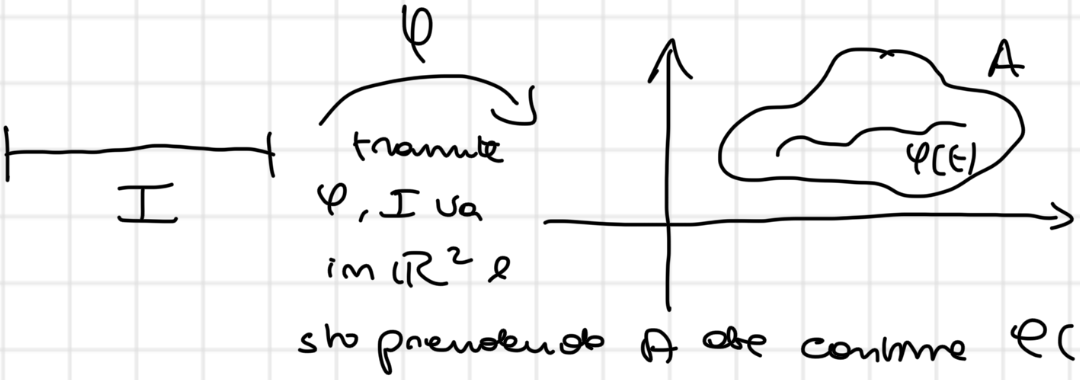
Dim per esercizio.

Funzioni composte

$\varphi : t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(t) = (x(t), y(t))$

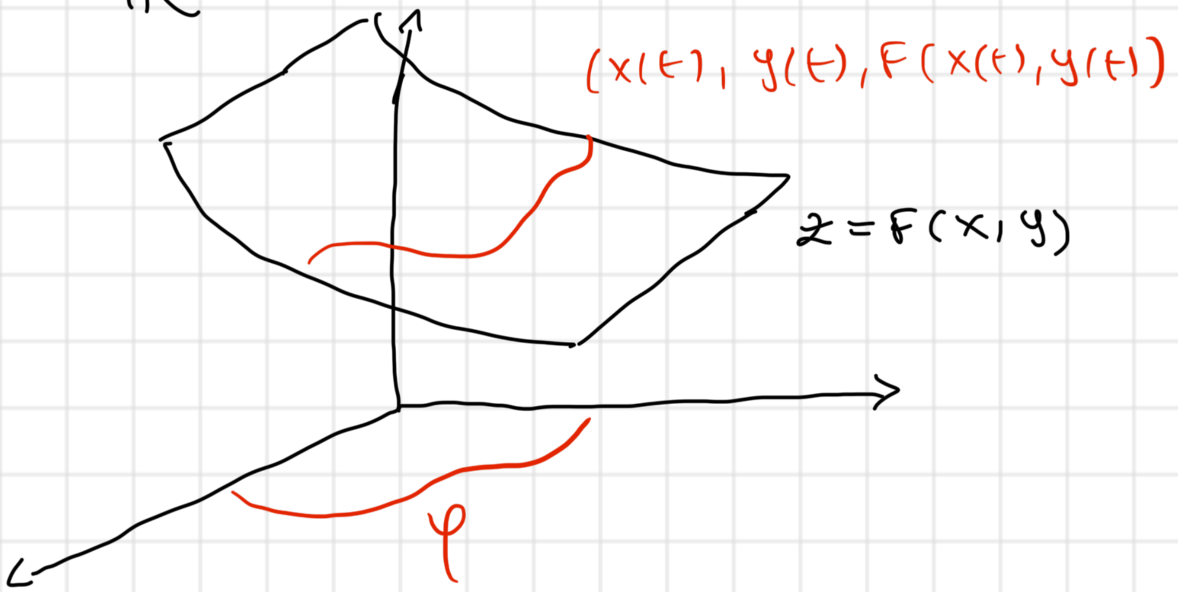
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ t.c. $\forall t \in I$, $(x(t), y(t)) \in A$



Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione reale in due variabili definita in A, allora la funzione composta

$F(t) = f(\varphi(t))$ è ben definito $\forall t \in I$
$= f(x(t), y(t))$

$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$



Voglio derivare $F(t)$ e vederla come derivata di una funzione composta.

Parto quindi da f, dunque ho la curva φ in $\mathbb{R}^2$ che viene mappata sul grafico di f tramite f come $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$.

TEOR (di derivazione delle funzioni composte)

Siano $x(t)$, $y(t)$ derivabili in $t \in I$ e

Sia f differenziabile in $(x(t), y(t)) \in A$

$\Rightarrow F(t)$ è derivabile in t e

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t))\, y'(t)$$
$$= \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Dim Chi è il limite del rapporto incrementale di F?

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}$$

$F(t) = f(x(t), y(t)) \Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h}$$

Per hp. so che f è differenziabile, quindi

$f(x,y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x-x_0) - f_y(y-y_0) =$

$= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$

Se $x(t) = x(t+h) \quad y(t) = y(t+h)$

$(x_0, y_0) = (x(t), y(t))$

$\Rightarrow f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t)) +$

$- f_x(x(t), y(t))(x(t+h) - x(t)) +$

$- f_y(x(t), y(t))(y(t+h) - y(t)) =$

$o\left(\sqrt{(x(t+h)-x(t))^2 + (y(t+h)-y(t))^2}\right)$

$$\Rightarrow F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \Big[f_x(x(t), y(t))(x(t+h) - x(t)) +$$
$$+ f_y(x(t), y(t))(y(t+h) - y(t)) +$$
$$+ o(|(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))|) \Big] \frac{1}{h}$$

$$= f_x(x(t), y(t))\, x'(t) + f_y(x(t), y(t))\, y'(t) +$$
$$+ \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{o(|(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))|}{h}}_{*}$$

$$* \quad \lim_{h \to 0} \frac{o|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))|}{h}$$

moltiplico e divido per $|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))|$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{o|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))|}{|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))|} \cdot \frac{|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))|}{h}$$

il primo pezzo va a 0

il secondo pezzo e':

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x(t+h)-x(t))^2}}{h} + \frac{\sqrt{(y(t+h)-y(t))^2}}{h}$$

$$= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

$$\Rightarrow F'(t) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t)$$

$$+ \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot 0 \Rightarrow$$

$$F'(t) = f_x(x(t),y(t))\,x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'$$

$\square$

Derivate direzionali di una funzione differenziabile

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, con f differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$. Allora f ammette derivate direzionali in (x_0, y_0) in ogni direzione $\underline{v} = (\alpha, \beta)$. Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{v}$$

$$= f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta.$$

Dim $\underline{v} = (\alpha, \beta)$

$$\varphi(t) = (x_0 + t\alpha,\ y_0 + t\beta)$$

Le componenti sono derivabili, quindi per il th. precedente

$F(t) = f(\varphi(t)) = f(x_0 + t\alpha,\ y_0 + t\beta)$ e' derivabile in 0 e so anche che

$$F'(0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \underbrace{(\alpha, \beta)}_{\varphi'(t) = (\alpha, \beta) = \underline{v}} \rangle$$

$$= f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta$$

ma $F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$

$$= \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{v}$$

$\square$

Interpretazione geometrica del gradiente

Se f e' differenziabile, il teor. precedente si avrà $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \nabla f \cdot \underline{v}$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right| \leq |\nabla f| \cdot |\underline{v}| = |\nabla f|$$

$|\underline{v}| = 1$ è l'unica direzione

Vale l'uguale se ∇f e $\frac{\partial f}{\partial v}$ sono paralleli.

Pertanto in generale

$$-|\nabla f| \leq \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \leq |\nabla f|$$

Se supponiamo che $|\nabla f| \neq 0$ posso scegliere

$\underline{v} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = |\nabla f|$ indica la direzione e il verso del gradiente $\Rightarrow$ è la direzione di massima pendenza.

Se come direzione scelgo

$\underline{v} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = -|\nabla f|$ ho la direzione del gradiente, ma verso opposto $\Rightarrow$

quindi in questo caso $-|\nabla f|$ indica la direzione e il verso in cui la derivata direzionale è minima.

DEF $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e' un aperto convesso

$\iff \forall P_1, P_2 \in A \quad tP_1 + (1-t)P_2 \in A$

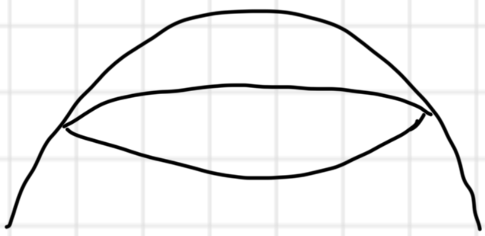
$\forall t \in [0,1]$

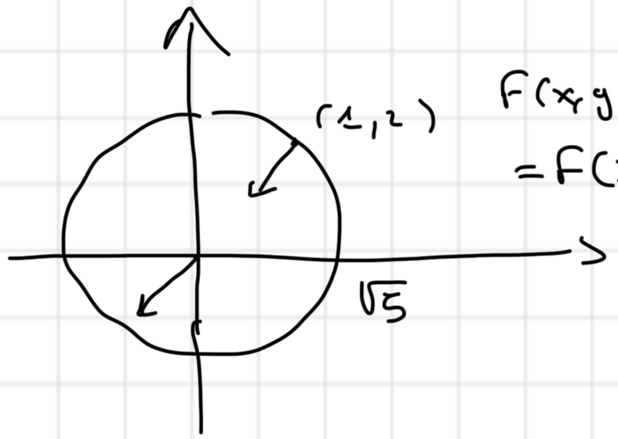
$tP_1 + (1-t)P_2$ e' il segmento che congiunge P_1 e P_2.

ES: $F(x,y) = 1 - (x^2+y^2)$

$\nabla F = (-2x, -2y)$

$$\underline{v} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{(-2x,-2y)}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = -\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$





$F(x,y) = c$
$= F(x_0, y_0)$

Ad es. $(x_0, y_0) = (1,2)$

$$\underline{v} = -\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$F(1,2) = -4$

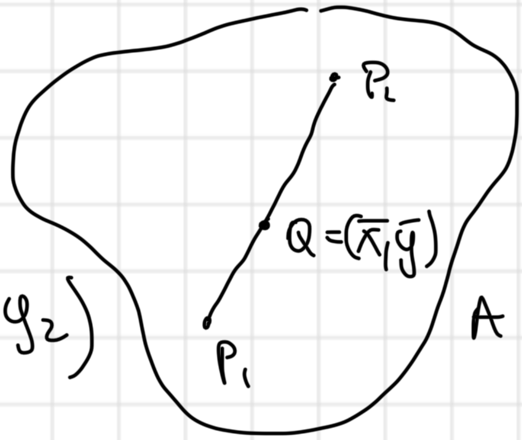
TEOR (di Lagrange) Sia f differenziabile in A aperto connesso. Siano $P_1, P_2 \in A$

$\Rightarrow \exists Q$ nel segmento che congiunge P_1 e P_2

$$F(P_2) - F(P_1) = \nabla f(Q)(P_2 - P_1)$$

Dim

$P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2)$



$\varphi(t) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$

$t \mapsto ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$
e' un segmento

$F(t) = f(\varphi(t))$ e' derivabile in $[0,1]$

perché f e' differenziabile (teor di prima)

quindi applico Lagrange in una variabile ad $F(t)$ e so che

$\exists \bar{t} \in (0,1)$ t.c. $F(1) - F(0) = F'(\bar{t})$

$\Rightarrow F(1) - F(0) = F'(\bar{t})$

$\Rightarrow f((1-1)x_1 + x_2, (1-1)y_1 + y_2) +$

$- f((1-0)x_1 + 0 \cdot x_2, (1-0)y_1 + 0 \cdot y_2)$

$= F'(\bar{t})$

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) = F'(\bar{t})$$

$$F'(\bar{t}) = f_x((1-\bar{t})x_1 + \bar{t}\, x_2, (1-\bar{t})y_1 + \bar{t}\, y_2))(x_2 - x_1)$$
$$+ f_y((1-\bar{t})x_1 + \bar{t}\, x_2, (1-\bar{t})y_1 + \bar{t}\, y_2))(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = \nabla f((1-\bar{t})x_1 + t\, x_2, (1-\bar{t})y_1 + t y_2) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow f(P_2) - f(P_1) = \nabla f(Q)(P_2 - P_1).$$

$\square$

TEOR Se f ammette $\nabla f = 0$ in tutti i punti di un aperto connesso $\Rightarrow$ f e' costante in A.

FORMULA DI TAYLOR

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ A aperto, $f \in C^2(A)$

Siano $P_1 = (x_0, y_0)$ e $P_2 = (x_0 + th, y_0 + tk)$

t.c il segmento che congiunge P_1 e P_2 sta in

A, $t \in [0,1]$.

Consideriamo la funzione composta

$$F(t) = f(\underbrace{\varphi(t)}_{\text{segmento}}) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

F e' derivabile due volte perché lo e' f:

$$F'(t) = f_x(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h +$$

$$+ f_y(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k$$

Itero il ragionamento sulle derivate delle funzioni composte

$$F''(t) = f_{xx}(x_0 + th, y_0 + tk) h^2 +$$

$$+ f_{yy}(x_0 + th, y_0 + tk) k^2 +$$

$$+ f_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk) hk +$$

$+ f_{yx}(x_0+th, y_0+tk)kh$

$f_{xy} = f_{yx}$ perché $f \in C^2$ per Schwarz

quindi

e dunque applico taylor al II ordine

di punto iniziale $t=0$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(\theta)}{2}t^2$$

$\theta \in (0,1)$

$t = 1$

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(\theta)}{2}$$

e usando le espressioni di F' e F'' lo riscrivo

$$F(x_0+h, y_0+k) = F(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$
$$+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(\;)hk + f_{yy}(\;)k^2\right]$$

che prende il nome di Formula di taylor con il resto di lagrange. In forma compatta

$$F(P_0+\underline{v}) = F(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot\underline{v} + \frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(P_0+\theta\underline{v})\underline{v}, \underline{v}\rangle.$$

Formula di Taylor con resto di Peano.

$$f(P_0+\underline{v}) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot \underline{v} + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(P_0)\underline{v}, \underline{v}\rangle +$$

$$+\, o(|\underline{v}|^2), \quad |v| \to 0.$$

Estremi relativi

DEF $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto

Si dice che (x_0, y_0) e' di minimo relativo (massimo relativo) per

$f \iff \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0)$ risulta

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$
$$(\leq)$$

Condizione necessaria al I ordine

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, A aperto, f derivabile

in (x_0, y_0), (x_0,y_0) estremo relativo

$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) = \underline{0}$.

Dim Supponiamo (x_0,y_0) di minimo

relativo: $\quad f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0)$

fisso $y = y_0$

$f(x,y_0) \geq f(x_0,y_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

cioè $F(x) \geq F(x_0)$

x_0 è di minimo per F, quindi per Fermat

$F'(x_0) = 0 \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = 0$

Analogamente per $f_y(x_0, y_0) = 0$.

DEF Se $\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$, allora (x_0, y_0) si dice punto critico (o stazionario).

Es 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = \underline{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \text{ punto critico}$$

$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq f(0,0) = 0$

$(0,0)$ minimo assoluto.

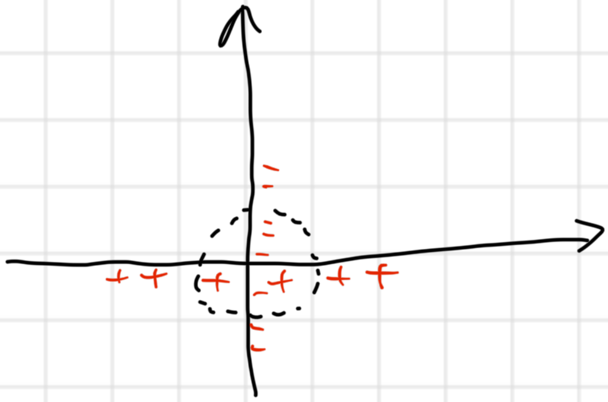
Es 2 $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) = \underline{0}$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ punto critico}$$

$f(0,0) = 0$

Cosa succede in un intorno di $(0,0)$?



$f(x,0) = x^2 > 0$ per $x \neq 0$

$f(0,y) = -y^2 < 0$ per $y \neq 0$

non e' nè di max nè di min $\Rightarrow$ sella.

Condizione necessaria del II ordine

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Sia $(x_0, y_0) \in A$

estremo relativo $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$

$$\det(\nabla^2 f)(x_0, y_0) \geq 0.$$

Inoltre, (x_0, y_0) e' di minimo relativo $\Rightarrow$

$$f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0, \quad f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0.$$

(x_0, y_0) e' di massimo relativo $\Rightarrow$

$$f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0, \quad f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Dim Sia (x_0, y_0) punto di minimo per $f \in C^2$

Sia $\underline{v} = (\alpha, \beta)$ una direzione

$F(t) = f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$ $t \in I$

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{v} = 0 \ \forall \underline{v}$$

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0$ ✓

$F''(0) = f_{xx}(x_0, y_0)\alpha^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\alpha\beta +$
$+ f_{yy}(x_0, y_0)\beta^2 = \beta^2 \left[f_{xx}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2f_{xy}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + f_{yy} \right]$

$\beta \neq 0$ polinomio di II grado in $\frac{\alpha}{\beta}$

se e' di minimo $F'' \geq 0 \Rightarrow f_{xx} \geq 0$

$\frac{\Delta}{4} = f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = -H_f(x_0, y_0)$

Quindi se $\frac{\Delta}{4} = -H_f(x_0, y_0) < 0$

cioe' $H_f(x_0, y_0) > 0$ allora $\forall (\alpha, \beta)$

ho $F''(0) > 0$.

$H_f(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \Rightarrow f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2 > 0$

$\Rightarrow f_{xx}$ essendo positivo so che $f_{yy} > 0$.

$\square$

Condizione sufficiente del II ordine

Sia $f \in C^2(A)$, A aperto, $(x_0, y_0) \in A$

con $\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$. Allora

se $\begin{cases} H_f(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0)$ min. rel.

$$\text{se} \begin{cases} H_f(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ max rel.}$$

OSS:
Ricorda se $H_f(x_0, y_0) > 0$, f_{xx} e f_{yy} hanno lo stesso segno.

Dim Senso la formula di taylor con

$$\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h^2 + f_{xy}hk + f_{yy}k^2$$

$$\theta \in (0,1)$$

$$= k^2 \overbrace{\left[f_{xx}\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2f_{xy}\left(\frac{h}{k}\right) + f_{yy} \right]}^{\text{polinomio in } \frac{h}{k}}$$

$\Rightarrow$ se $\frac{\Delta}{4} < 0$, il polinomio non cambia segno al variare di $\frac{h}{k}$)

$$\frac{\Delta}{4} = -H_f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) < 0$$

Essendo che f e' C^2, H_f e' continuo

allora $\exists \delta : H_f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) > 0$

in un intorno quindi $\forall (h,k) : \sqrt{h^2+k^2} < \delta$

poiché H_f è continuo, $H_f > 0$ nei punti vicini al (x_0, y_0).

Se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, per h, k piccoli

$$f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) > 0$$

$\Rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0 \quad \forall h, k$

sufficientemente piccoli

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ è un minimo relativo.

Se $f_{xx} < 0$, allora $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0$

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ è un massimo relativo.

$\square$

Schema esercizi

$\nabla f = \underline{0} \rightsquigarrow H_f$
- $\to > 0$
  - $\to f_{xx} > 0$ min rel
  - $\to f_{xx} < 0$ max rel
- $\to < 0$ né min né max
- $\to = 0$ non si può concludere la natura del punto critico

$\underline{\text{Es}}$ $(x-1)^2 \operatorname{arctg} y$ con Hessiano nullo

Esercizi

① $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3 y$

- gradiente di f

$$\begin{cases} f_x = 6x - 3x^2 y = 0 \Rightarrow 3x(2 - xy) = 0 \\ f_y = 2y - x^3 = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \Rightarrow 2 \cdot \frac{2}{x} - x^3 = 0$

$\Rightarrow 4 - x^4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$(0,0) \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

- Hessiano

$f_{xx} = 6 - 6xy \qquad f_{yy} = 2$

$f_{yx} = -3x^2 \qquad f_{xy} = -3x^2$

$$H_f = \det \begin{pmatrix} 6 - 6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12 > 0 \Rightarrow (0,0)$ è di minimo

$f_{xx} > 0$

$H_F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = H_F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) < 0$ quindi sono punti di sella

(2) $f(x,y) = x(x-1)^2 - y^2$

$$\begin{cases} f_x = (x-1)^2 + 2x(x-1) = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases}$$

$(x-1)(x-1+2x) = 0 \Rightarrow (x-1)(3x-1) = 0$

$x = 1, \quad y = 0 \qquad\qquad x = \frac{1}{3} \quad y = 0$

$(1, 0) \qquad\qquad (\frac{1}{3}, 0)$

$f_{xx} = 2(x-1) + 2(x-1) + 2x = 6x - 4 \qquad f_{xy} = 0$

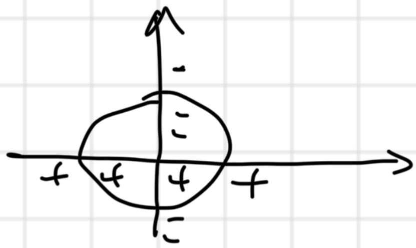
$f_{yy} = -2 \quad f_{yx} = 0$

$H_F(1,0) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 < 0$ sella

$H_F(\frac{1}{3}, 0) = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 > 0$ $\Rightarrow$ max rel.
$f_{xx} < 0$

(3) $f(x,y) = x^4 - y^4$ *

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 = 0 \\ f_y = -4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ punto stazionario}$$



$f(0,0) = 0$

$f(x,0) = x^4 > 0$ per $x \neq 0$

$f(0,y) = -y^4 < 0$ per $y \neq 0$ $\Rightarrow (0,0)$ né max né min

4) $f(x,y) = (x+y)\,xy$

$$\begin{cases} f_x = xy + y(x+y) = 0 \\ f_y = xy + x(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(2x+y) = 0 \\ x(x+2y) = 0 \end{cases}$$

$x = 0$
$y = 0$

$(0,0)$

$y = -2x$

$x(x-4x) = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$

$f_{xx} = 2y \qquad f_{yy} = 2x$

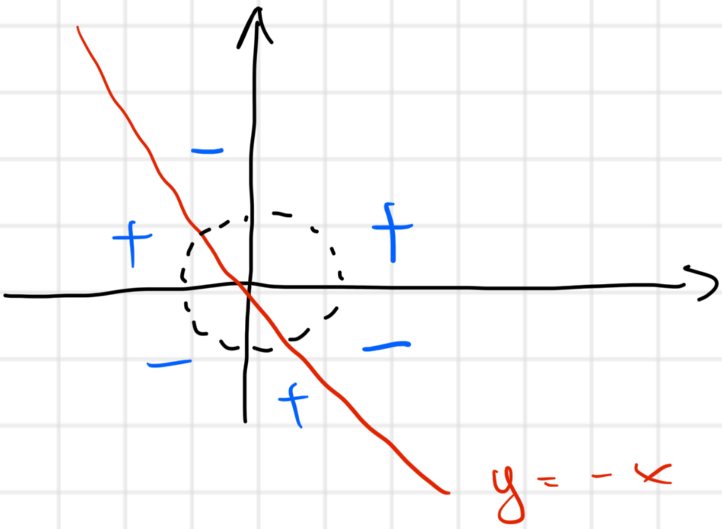
$f_{xy} = 2x + 2y \qquad f_{yx} = 2x + 2y$

$H_f(0,0) = 0 \quad , \; f(0,0) = 0$

Studiamo $f(x,y) - f(0,0) \geq 0$

$$f(x,y) = (x+y)\,xy \geq 0$$

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y \leq 0 \\ xy \leq 0 \end{cases}$$



né max né min

In alternativa (che vale solo se non è di max o min)

$$y = mx$$

$$g(x) = f(x, mx) = (x+mx)\,m x^2$$

$$= m x^3 (1+m)$$

$$g'(x) = 3mx^2(1+m) \geq 0 \quad \text{per } m \neq 0, -1$$

quindi $x=0$ non è né di max né di min

per g $\Rightarrow$ quindi se in una direzione è 'così'

allora globalmente anche non è di max e min.

Controesempio ✗

$f(x,y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$

$$\begin{cases} f_x = -8xy + 12x^3 = 0 \Rightarrow 4x\,(3x^2 - 2y) = 0 \\ f_y = 2y - 4x^2 = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ punto stazionario

$f_{xx} = 4\,(3x^2 - 2y^2) + 24x^2 \Big|_{(0,0)} = 0$

$f_{yx} = -8x \Big|_{(0,0)} = 0$

$H_f(0,0) = 0$

$y = mx \qquad f(x,mx) = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$

$g(x) = 3x^4 - 4mx^3 + m^2x^2$

$g'(x) = 12x^3 - 12mx^2 + 2m^2x$

$= 0$

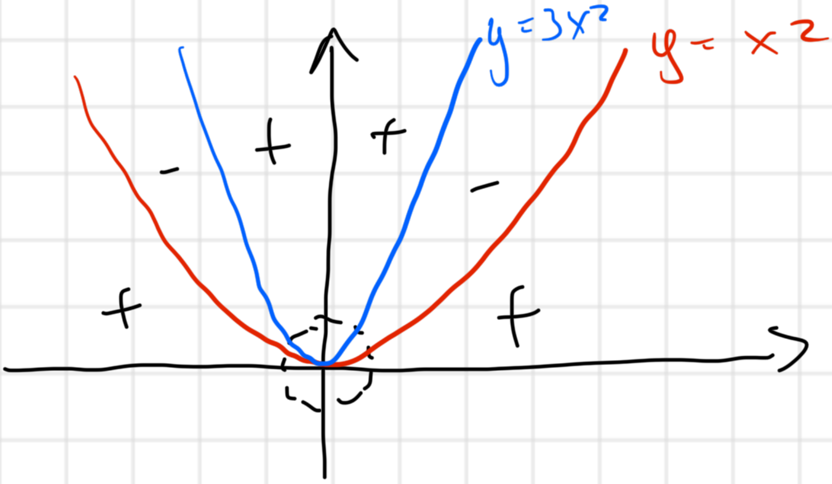
$2x\,(6x^2 - 6mx + m^2)\Big|_{x=0} = 0$ ✓

$g''(x) = 36x^2 - 24mx + 2m^2 \Big|_{x=0}$

$= 2m^2 > 0 \quad \forall m \Rightarrow x = 0$ è di minimo

$\Rightarrow (0,0)$ è di minimo per $f(x,y)$?

$$f(x,y) - f(0,0) = (y-x^2)(y-3x^2) > 0$$



$(0,0)$ né min né max.

5 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

$f_x = 4x^3 - 4x + 4y$

$f_y = 4y^3 + 4x - 4y$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{somma}} \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ 4y^3 - 4y - 4y = 0 \Rightarrow 4y(y^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

$y = 0 \quad x = 0$

$y = \sqrt{2} \quad x = -\sqrt{2}$

$y = -\sqrt{2} \quad x = \sqrt{2}$

$(0,0) \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ punti critici

$f_{xx} = 12x^2 - 4 \qquad f_{yy} = 12y^2 - 4$

$f_{xy} = f_{yx} = 4$

$$\det Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{vmatrix}$$

$$= 144x^2y^2 - 48x^2 - 48y^2 + \cancel{16} - \cancel{16}$$

$\det Hf(0,0) = 0$

$\det Hf(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 144 \cdot 4 - 48 \cdot 2 - 48 \cdot 2$

$= 384 > 0$ e $f_{xx} > 0$

$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ min rel.

$\det Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 384 > 0$ $\Rightarrow$ min rel
$f_{xx} > 0$

Cosa succede in $(0,0)$:

test sulle rette

$f(x, mx) = x^4 + m^4x^4 - 2x^2 + 4mx^2 - 2m^2x^2$

$f' = 4x^3 + 4m^4x^3 - 4x + 8mx - 4m^2x$

$$= 4x\left(x^2 + m^4x^2 - 1 + 2m - m^2\right) \geq 0$$

$x = 0$ ✓

$$f'' = 12x^2 + 12m^4x^2 - 4 + 8m - 4m^2$$

$$f''\big|_{x=0} = -4m^2 + 8m - 4 \geq 0$$

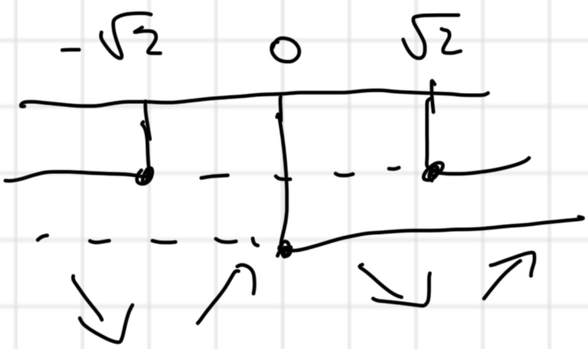
$$= (m-1)^2 \leq 0$$

$m = 1$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x = 0$ min

$m = -1$

$x^2 \geq 2 \Rightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$



$x = 0$ max

$\Rightarrow$ quindi $(0,0)$ non è né max né min

6 $f(x,y) = x^4 + (y-1)^2$

$f_x = 4x^3$ $\qquad$ $f_y = 2(y-1)$

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

$(0,1)$ punto stazionario

$f_{xx} = 12x^2$ $\qquad$ $f_{yy} = 2$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$$\det Hf(0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$f(x,y) - f(0,1) = x^4 + (y-1)^2 \geq 0 = f(0,1)$$

$$f(x,y) \geq f(0,1) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow (0,1)$ min

CURVE

La funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ continua

$$t \in [a,b] \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$$

di componenti scalari $x : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{y : [a,b] \to \mathbb{R}}_{\text{quindi anche loro continue}}$$

è detta curva.

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = x(t) \\ \varphi_2(t) = y(t) \end{cases}$$

prendono il nome di equazioni parametriche della curva

Il codominio $\varphi([a,b])$ è detto sostegno della curva. $= \{ \varphi(t) : t \in [a,b] \}$

DEF Una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ si dice regolare se $\varphi \in C^1([a,b])$ e $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in (a,b)$

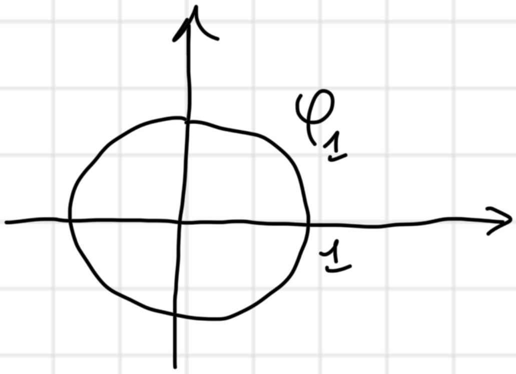
$$x(t), y(t) \in C^1([a,b])$$

$$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0) \quad \forall t \in [a,b]$$

ES 1 $\varphi_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$x^2(t) + y^2(t) = 1$ eq. della circonferenza di centro l'origine e raggio 1:



φ_1 è una curva regolare

$\varphi \in C^1([0, 2\pi])$

$\varphi_1'(t) = (-\text{sen}\, t, \cos t)$,

$|\varphi'(t)| = \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$

quindi $\varphi' \neq \underline{0}$ perché ha modulo 1.

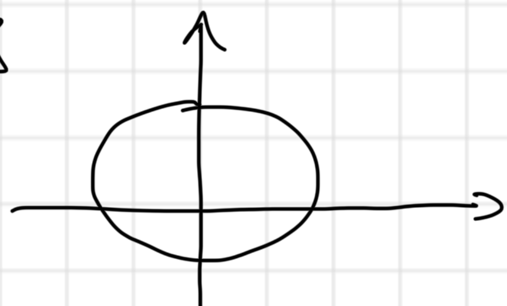
$\varphi([0, 2\pi])$ è il sostegno della curva

$\Downarrow$

circonferenza di raggio 1

ES 2 $\quad \varphi_2 = (\cos t, \text{sen}\, t) \qquad t \in [0, 4\pi]$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \text{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 4\pi]$$



$\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$

φ_2 regolare

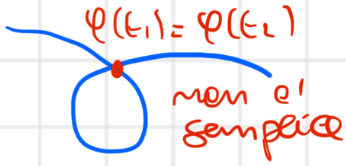
curve diverse, stesso sostegno.

ES 3 $\quad \varphi_3 = (\cos(2t), \text{sen}(2t)) \qquad t \in [0, \pi]$

$|\varphi_3'| = 2 \neq 0$

φ_3 regolare. Ha lo stesso sostegno di φ_1 e φ_2

DEF φ si dice semplice se $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ $\forall\, t_1, t_2 \in [a,b]$, di cui almeno uno tra t_1 e t_2 è interno all'intervallo.



DEF Una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ si dice chiusa $\iff$ $\varphi(a) = \varphi(b)$

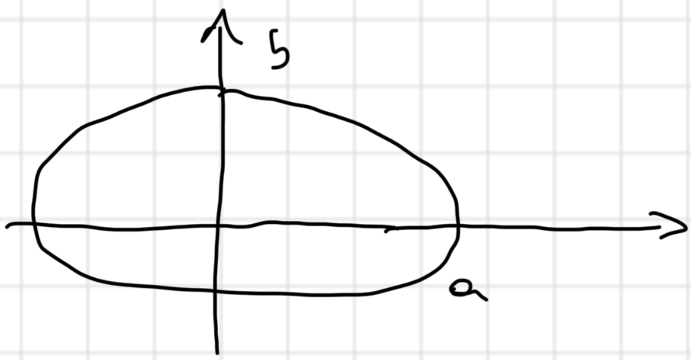
ES 4 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono regolari, chiuse

φ_1 e φ_3 sono semplici

φ_2 non è semplice $\varphi(t) = \varphi(t + 2\pi)$ $\forall\, t \in (0, 2\pi)$.

ES (Ellisse) $\varphi : [0, 2\pi] \to (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ eq. ellisse



$$\frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 t}{b^2} = 1$$

$$\varphi(t) : \begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi'(t) = (-a \operatorname{sen} t,\ b\cos t) \neq (0,0)$$

regolare. Inoltre è semplice e chiusa

$\varphi(0) = \varphi(2\pi)$.

Versore tangente

Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare

$\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

Prendiamo $t_0, t_1 \in [a,b]$ e la retta passante per

$$\varphi(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) \quad \text{e}$$

$$\varphi(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$$

$$r: \begin{cases} x(t) = x(t_0) + \dfrac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0) \\ y(t) = y(t_0) + \dfrac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0) \end{cases}$$

se mandiamo t_1 a t_0

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

otteniamo la retta tangente a $\varphi(t)$ nel punto $\varphi(t_0)$.

$\varphi'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ e' il vettore tangente alla curva $\varphi(t)$ nel punto $\varphi(t_0)$.

Il vettore unitario

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \quad \text{versore tangente}$$

$N(t)$ = versore ortogonale a $T(t)$ ottenuto ruotando $T(t)$ di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario

Es $\varphi(t) = (t, F(t))$ $\quad F : [a,b] \to \mathbb{R}$

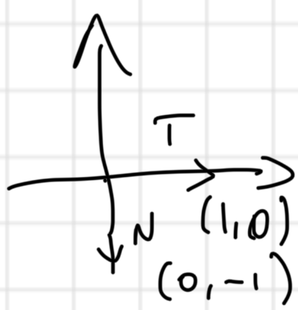
↘ ho come sostegno il grafico di F

curva grafico di funzione

$$\varphi'(t) = (1, F'(t))$$

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{1 + [F'(t)]^2} \Rightarrow \text{se } F \in C^1 \text{ e' regolare}$$

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+[F'(t)]^2}} (1, F'(t))$$



$$N(t) = \frac{(F'(t), -1)}{\sqrt{1+[F'(t)]^2}}$$

OSS $|T(t)|^2 = 1$. $\frac{d}{dt} |T(t)|^2 = 0 \Rightarrow$

$T(t) = (a(t), b(t))$

$$\frac{d}{dt} |T(t)|^2 = \frac{d}{dt} \left(a^2(t) + b^2(t)\right)$$
$$= 2\left(a(t)a'(t) + b(t)b'(t)\right)$$
$$= 0$$

cioè $\langle T(t), T'(t) \rangle = 0 \Rightarrow T'(t)$ è ortogonale a $T(t)$

$\Rightarrow T'(t) = -k(t) N(t)$ $\quad$ $k(s)$ curvatura scalare

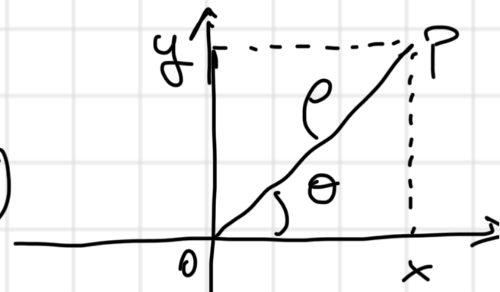
$\frac{1}{k(s)}$ raggio di curvatura della curva

Il cerchio di raggio $\frac{1}{|k(s)|}$ è detto cerchio osculatore e approssima la curva al secondo ordine (la retta tangente al I ordine).

Equazione polare di una curva

$P = (x, y) \rightsquigarrow (\rho, \theta)$

θ = angolo che il vettore P forma con il semiasse delle x positive



$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ogni punto può essere rappresentato nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0, +\infty) \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$

Le coordinate (x, y) sono le coordinate cartesiane.

Le coordinate (ρ, θ) sono le coordinate polari.

L'equazione polare di una curva

$$\rho = \rho(\theta) \qquad \theta_0 \le \theta \le \theta_1$$

Per rappresentarla come siamo abituati

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta) \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

θ quindi e' il parametro e la curva e'

$$\varphi(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta)$$

La curva e' regolare se $\rho(\theta) \in C^1$ e

$$\varphi'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta, \rho'(\theta)\operatorname{sen}\theta + \rho(\theta)\cos\theta)$$

$$|\varphi'(\theta)| = (\rho'^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta - 2\rho'\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta +$$

$$+ \rho'^2\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2\theta + 2\rho'\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \rho'^2 + \rho^2 > 0 \qquad \forall\, \theta \in (\theta_0, \theta_1).$$

Es (cardioide)

$$\rho(\theta) = a(1+\cos\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\rho'(\theta) = -a\operatorname{sen}\theta$$

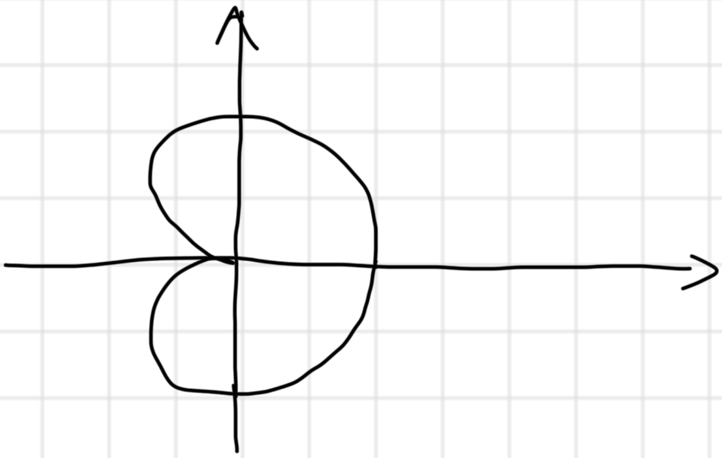
$$\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2 = a^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2$$

$$= a^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2 + a^2\cos^2\theta + 2a^2\cos\theta$$

$$= 2a^2(1+\cos\theta) > 0$$

$\iff \theta \neq \pi$ quindi non e' regolare

$$\rho(\pi) = \rho'(\pi) = 0$$



$\varphi(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta)$

il sostegno e' rappresentato in figura.

DEF Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare

Sia $g : [c,d] \to [a,b]$ biettiva,

$g \in C^1([c,d])$ e $g'(t)$ di segno costante.

La curva $\psi(\tau) = \varphi(g(\tau))$ si dice **equivalente** a φ.

$t = g(\tau)$, $\tau = g^{-1}(t)$

$\psi(\tau) = \varphi(g(\tau)) \Rightarrow \psi(g^{-1}(t)) = \varphi(t)$

e scriveremo $\varphi \sim \psi$

Osserviamo che

$\varphi \sim \varphi$, se $\varphi \sim \psi \Rightarrow \psi \sim \varphi$,

(riflessiva) (simmetrica)

$\varphi \sim \psi$, $\psi \sim \eta \Rightarrow \varphi \sim \eta$ (transitiva)

Es $\varphi(t) = \left(\sqrt{1-t^2}, t\right) \quad t \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\psi(\tau) = (\cos\tau, \operatorname{sen}\tau) \quad \tau \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$g(\tau) = \operatorname{sen}\tau \qquad t = \operatorname{sen}\tau = g(\tau)$$

$$\varphi(g(\tau)) = (\cos\tau, \operatorname{sen}\tau)$$

$$\varphi(t) = \varphi(g(\tau)) = \psi(\tau)$$

OSS Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno.

Es $\varphi_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\varphi_3(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)) \quad t \in [0, \pi]$

$\varphi_1 \sim \varphi_3$ infatti

$g(s) = \frac{s}{2}$ e' t.c

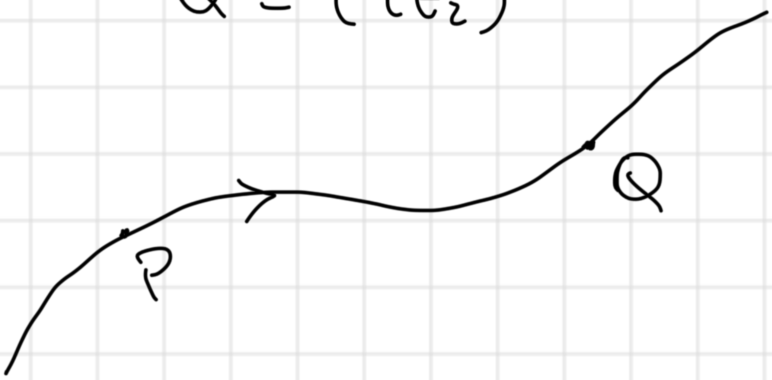
$g'(s) \neq 0$ e $\varphi_3(g(s)) = \varphi_1(s)$.

Ogni parametrizzazione individua un verso di percorrenza della curva $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

P precede Q nel verso indotto dal parametro

$: \Longleftrightarrow \quad P = \varphi(t_1) \qquad Q = \varphi(t_2)$

$t_1 < t_2$



DEF $\varphi \sim \psi$ inducono lo stesso verso di percorrenza $\Longleftrightarrow$ $g' > 0$

Curve

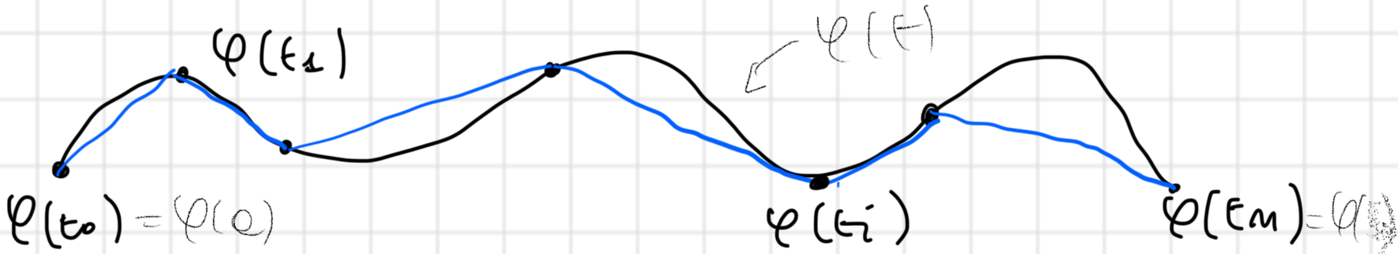
Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva.

Sia $D = \{t_0, \dots, t_m\}$ t.c

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$$

D e' una partizione di $[a,b]$.

Consideriamo la poligonale P, inscritta nella curva di vertici $\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_m)$



La lunghezza della poligonale e'

$$\ell(P) = |\varphi(t_1) - \varphi(t_0)| + \dots + |\varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

DEF La lunghezza di una curva φ e'

$$\ell(\varphi) = \sup_{D} \ell(P)$$

φ si dice rettificabile $\iff \ell(\varphi) < +\infty$.

TEOR (di rettificabilità) Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva $C^1([a,b])$. Allora φ è rettificabile

e
$$\ell(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

OSS Basta che sia C^1, non è necessario che sia regolare.

Es (Asteroide) $\varphi(t) = \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \text{sen}^3 t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$\varphi \in C^1([0,2\pi])$

$\varphi'(t) = (-3\cos^2 t \,\text{sen}\, t, \; 3\,\text{sen}^2 t \cos t)$

$\varphi'(0) = (0,0)$ per $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

φ è C^1 ma non è regolare

$$\ell(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t\,\text{sen}\,t)^2 + (3\,\text{sen}^2 t \cos t)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t\,\text{sen}^2 t + 9\,\text{sen}^4 t \cos^2 t}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t\,\text{sen}^2 t\,(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 3\sqrt{\cos^2 t \,\text{sen}^2 t} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \,\text{sen}\, t$$

$$= 12 \left.\frac{\text{sen}^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$$

OSS La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione della curva

Siano $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ e $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^2$

due rappresentazioni parametriche della curva.

Sia $g : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ crescente t.c

$$\varphi(t) = \varphi(g(s)) = \psi(s)$$

$$\psi'(t) = \varphi'(g(s))\; g'(s), \text{ con } g' > 0$$

$$\ell(\psi) = \int_c^d |\psi'(s)| = \int_c^d |\varphi'(g(s))|\,|g'(s)|$$

se facciamo un cambio di variabili

$g(s) = t$ otteniamo

$$\ell(\psi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt = \ell(\varphi)$$

Ascissa curvilinea

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ rappresentazione parametrica di γ,

$$S(t) = \int_a^t |\gamma'(s)| ds \qquad t \in [a,b]$$

$S'(t) = |\gamma'(t)| > 0 \Rightarrow$ quindi s è derivabile e strettamente crescente.

$s : [a,b] \longrightarrow [0, \ell(\gamma)]$ è invertibile ($s' > 0$) e se $s = s(t)$, $t = t(s)$ è la sua inversa

$$t : [0, \ell(\gamma)] \longrightarrow [a,b]$$

e $\varphi(s) = \gamma(t(s)) \qquad s \in [0, \ell(\gamma)]$

s prende il nome di ascissa curvilinea o lunghezza d'arco

derivata funzione inversa

$$\varphi'(s) = \gamma'(t(s)) \cdot t'(s) = \frac{\gamma'(t(s))}{s'(t(s))}$$

$$= \frac{\gamma'(t(s))}{|\gamma'(t(s))|} \Rightarrow |\varphi'(s)| = 1$$

$\Rightarrow \varphi'(s)$ è il versore tangente alla curva nel punto di ascissa curvilinea s.

$$\ell(\varphi) = \int_0^{\ell(\gamma)} |\varphi'(s)| = \ell(\gamma).$$

Es Nella circonferenza, l'ascissa curvilinea è θ.

$$\gamma: \begin{cases} x(t) = \cos\theta \\ y(t) = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$|\gamma'(\theta)|^2 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Integrali curvilinei

Sia γ una curva regolare e sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una sua parametrizzazione.

Sia $\Gamma = \varphi([a,b])$ il sostegno della curva.

Sia $F : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ continua.

Consideriamo l'integrale

$$\int_\Gamma F \, ds = \int_a^b F(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \, dt$$

Se $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ è una rappresentazione parametrica della nostra curva, con parametro s ascissa curvilinea

$$\int_\Gamma F\, ds = \int_0^L F(\gamma(s))\, ds$$

$|\gamma'(s)| = 1$ se s è l'ascisse curvilinea.

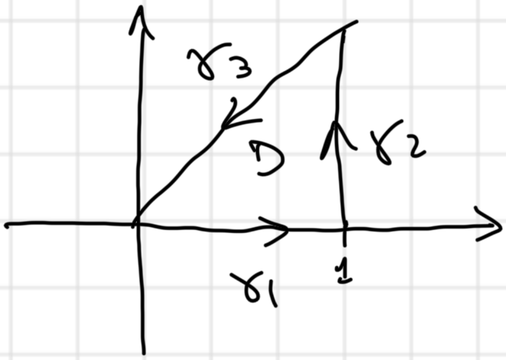
$\int_\Gamma F\, ds$ prende il nome di integrale curvilineo.

OSS L'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione.

Esercizi max e min vincolati

1) $f(x,y) = e^{2x} x^2 y^2 - y^4$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x \}$



$f_x = 2e^{2x} x^2 y^2 + 2e^{2x} x y^2$

$f_y = 2e^{2x} x^2 y - 4y^3$

$$\begin{cases} 2e^{2x} x y^2 (x+1) = 0 \\ 2y\,(e^{2x} x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ $(0,0)$ sulla frontiera (no punti interni)

$x = -1 \Rightarrow 2y\left(\frac{1}{e^2} - 2y^2\right) = 0$

$y = 0$

$y^2 = \frac{1}{2e^2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\,e}$

$\left(-1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}e}\right)$ non stanno in D

$y = 0$ $x = x \in [0,1]$, tutto il segmento $[0,1]$[∈∂]

sempre sulla frontiera

Dobbiamo parametrizzare il bordo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$f(\gamma_1) = f(t,0) = 0$$

$$F(\gamma_2) = F(1,t) = e^2 t^2 - t^4$$

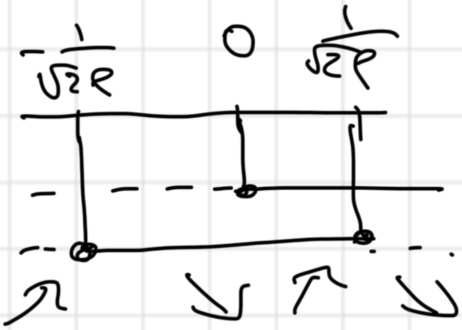
$$F'(\gamma_2) = 2e^2 t - 4t^3 \geq 0$$

$$2t\,(e^2 - 2t^2) \geq 0$$

$$t = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}e} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}e}$$

NO NO >1



sempre crescente per $t \in [0,1]$

per $t=0$ $\quad f(1,0)=0$

per $t=1$ $\quad f(1,1)=e^2-1$

$$f(\gamma_3)=f(t,t)=e^{2t}\,t^4-t^4$$

$$=(e^{2t}-1)\,t^4$$

$$f'(\gamma_3)=2e^{2t}\,t^4+4(e^{2t}-1)\,t^3$$

$$=\underbrace{2t^3}_{\geq 0}\left(\underbrace{e^{2t}\,t}_{>0}+\underbrace{2e^{2t}-2}_{>0}\right)>0$$

sempre crescente per $t\in[0,1]$

$f(0,0)=0$

$f(1,1)=e^2-1$

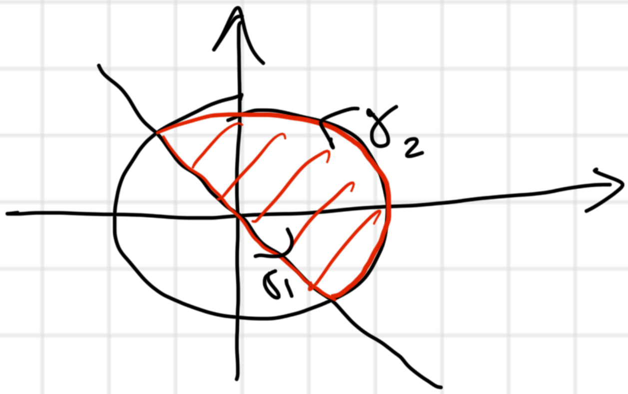
$(x,0)$ minimi assoluti

$(1,1)$ max assoluto

$$\begin{cases} x(t)=x_A+t\,(x_B-x_A) \\ y(t)=y_A+t\,(y_B-y_A) \end{cases} \qquad t\in[0,1]$$

② $f(x,y) = x^4 + y^2$

$D = \{ x^2+y^2 \leq 1, \quad x+y \geq 0 \}$



$f_x = 4x^3$ $\qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad (0,0)$ punto critico sempre di frontiera

$f_y = 2y$

parametrizziamo D passando alle coordinate polari

$\gamma_2: \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{4}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \frac{3}{4}\pi$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \qquad t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\rho^4 \cos^4\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta = \rho(\theta)$$

$$\rho'(\theta) = 4\rho^4 \cos^3\theta\,(-\operatorname{sen}\theta) + 2\rho^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$= 2\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\,(-2\cos^2\theta + 1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \pm\frac{\pi}{4} \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$f(1,0) \qquad f(0,1) \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(1,0) = 1$$

$$f(0,1) = 1$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$f(\gamma_1) = f(t, -t) = t^4 + t^2$$

$$f' = 4t^3 + 2t \geq 0 \Rightarrow 2t\,(2t^2+1) \geq 0$$
$$t \geq 0$$

$t = 0$ min $f(0,0) = 0$

$(0,0)$ min assoluto

$(1,0)$ $(0,1)$ max assoluti

(3) $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-x^2-y^2}$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \}$

circonferenza di raggio 1 e centro $(1,0)$

$$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\nabla f(x,y) = \Big(2x e^{-x^2-y^2} - 2x(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2},$$
$$2y e^{-x^2-y^2} - 2y(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \Big)$$
$$= \underline{0}$$

$$\begin{cases} 2x e^{-x^2-y^2}(1 - x^2 - y^2) = 0 \\ 2y e^{-x^2-y^2}(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \in \mathring{D} \quad \text{non è interno}$$

e $x^2+y^2=1 \cap \mathring{D}$ sono punti stazionari

$$f(1+\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (1+\cos^2\theta + 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, e^{-2-2\cos\theta}$$

$$= (2 + 2\cos\theta)\, e^{-2-2\cos\theta} = 0$$

$\Leftrightarrow \cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$

$f(0,0) = 0$

per $\theta = 0$ $\quad f(2,0) = 4e^{-4}$

$\mathring{D} \cap C_1$ i punti che risolvono $x^2+y^2=1$

$$f(\quad) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$(0,0)$ min assoluto

i punti di $\{x^2+y^2=1\} \cap \mathring{D}$ sono max assoluti

$$\begin{cases} x^2+1-2x+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-2x=0 \\ x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$-2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

4) $f(x,y) = e^{xy}$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3 \}$

$f_x = y e^{xy}$

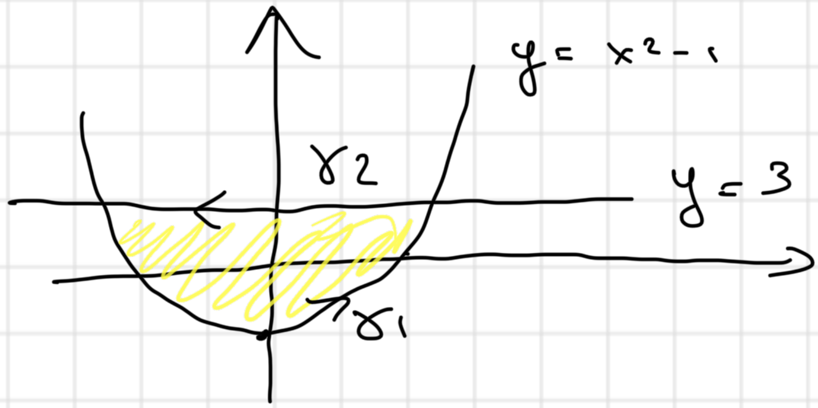
$f_y = x e^{xy}$

$\nabla f(x,y) = \underline{0}$

$\iff (x,y) = (0,0) \in D ?$

$y = 3$

$y = x^2 - 1$



$(0,0)$ è interno a D

Classifichiamo i punti interni:

$f_{xx} = y^2 e^{xy}$ $\quad f_{yy} = x^2 e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} + yx e^{xy} = f_{yx}$

$$\det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

punto di sella.

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 4$$
$$\Rightarrow x = \pm 2$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \end{cases} \qquad t \in [-2, 2]$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \qquad t \in [-2, 2]$$

$$f(\gamma_1) = e^{t(t^2-1)}$$

$$f'(\gamma_1) = e^{t(t^2-1)} (t^2 - 1 + 2t^2)$$
$$= e^{t(t^2-1)} (3t^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \in [-2, 2]$$

$$\Rightarrow \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3} \right) = e^{-\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3} \right) = e^{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

$f(\gamma_2) = e^{3t}$

$f'(\gamma_2) = 3e^{3t} = 0$ mai

sempre crescente $\xRightarrow{\text{agli estremi}}$ $t = 2 \Rightarrow (2, 3)$

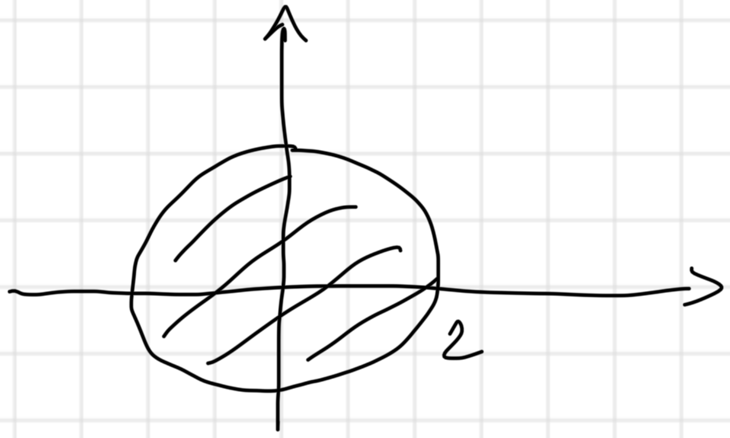
$f(2, 3) = e^{6}$ $\quad$ $f(-2, 3) = e^{-6}$

$(2, 3)$ massimo assoluto

$(-2, 3)$ minimo assoluto

(5) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \}$



$f_x = 6x - 6$

$f_y = 8y$

$(1,0) \in D$

$f_{xx} = 6 \qquad f_{yy} = 8 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0$

$\det HF(1,0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 48 > 0$

$6 > 0$

$\Rightarrow$ minimo relativo

$f(1,0) = 3 - 6 - 12 = -15$

$\gamma_1 : \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$$f(\gamma_1) = 12\cos^2\theta + 16\,\text{sen}^2\theta - 12\cos\theta$$
$$-12$$

$$f'(\gamma_1) = -24\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 32\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$+12\,\text{sen}\,\theta$$
$$= 8\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 12\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$= 4\,\text{sen}\,\theta\,(2\cos\theta + 3) = 0$$

$\cos\theta = -\frac{3}{2}$ mai

$\text{sen}\,\theta = 0 \iff \theta = 0$ e $\theta = 2\pi$

$\theta = \pi$

$\theta = 0 \rightsquigarrow (2, 0)$

$\theta = 2\pi \rightsquigarrow (2, 0)$

$\theta = \pi \rightsquigarrow (-2, 0)$

$f(2, 0) = -12$

$f(-2, 0) = 12$

$(-2, 0)$ massimo assoluto

$(1, 0)$ minimo assoluto

Altri esercizi su max e min

① $f(x,y) = 3x^4 - y^6$

$f_x = 12x^3 \qquad f_y = -6y^5$

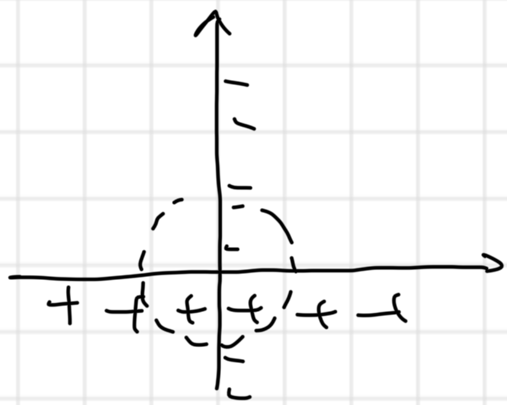
$(0,0)$ punto critico

$f_{xx} = 36x^2 \qquad f_{yy} = -30y^4 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0$

$\det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$f(x,0) = x^4$

$f(0,y) = -y^6$



$(0,0)$ né max né min

② $f(x,y) = y(x-y)^2$

$f_x = 2y(x-y) \qquad f_y = (x-y)^2 - 2y(x-y)$

$$\begin{cases} 2y(x-y) = 0 \\ (x-y)(x-3y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x = x_0 \end{cases}$$

tutti i punti della retta $y = x$ sono punti critici

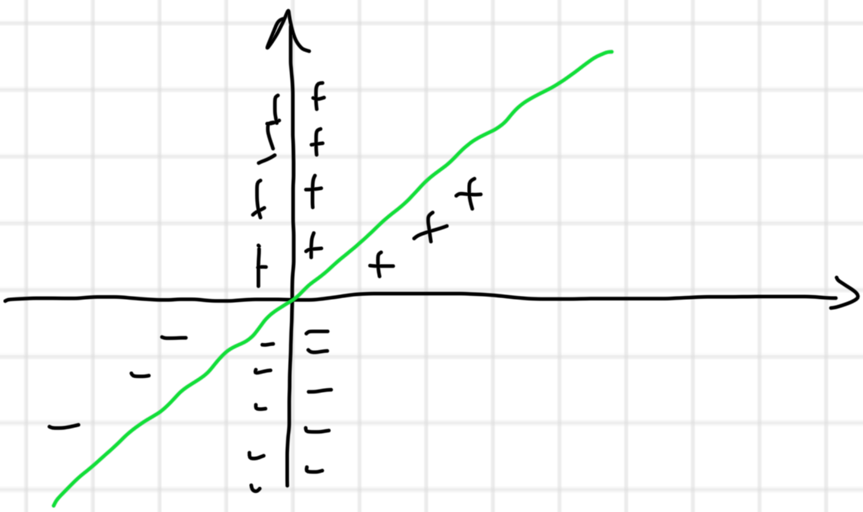
$f_{xx} = 2y \qquad f_{yy} = -2(x-y) - 2(x-y) + 2y$

$f_{xy} = f_{yx} = 2(x-y) - 2y$

in (x_0, x_0)

$$\det Hf(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 2x_0 & -2x_0 \\ -2x_0 & 2x_0 \end{vmatrix} = 4x_0^2 - 4x_0^2 = 0$$

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = y(x-y)^2 \geq 0$$



per $y > 0$ $f > 0$

per $y < 0$ $f < 0$

$(0,0)$ sella

$x_0 < 0$ $\quad (x_0, x_0)$ e' un max

$x_0 > 0$ $\quad (x_0, x_0)$ e' min

3 $f(x,y) = x^3 y + x^3 - x^2 y$

$f_x = 3x^2 y + 3x^2 - 2xy$

$f_y = x^3 - x^2$

$$\begin{cases} x\,(3xy + 3x - 2y) = 0 \\ x^2 (x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 3y + 3 - 2 = 0 \Rightarrow 3y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

~~tutti~~ i punti ~~dell~~ dell'asse y sono punti stazionari

$f_{xx} = 6xy + 6x - 2y$

$f_{yy} = 0$

$f_{xy} = f_{yx} = 3x^2 - 2x$

$$\det Hf\left(1, -\frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{14}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

sella

$$\det HF(0, y_0) = \begin{vmatrix} -2y_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

proviamo test rette $y = mx$

$$f(x, mx) = mx^4 + x^3 - mx^3$$

$$f' = 4mx^3 + 3x^2 - 3mx^2 = 0$$

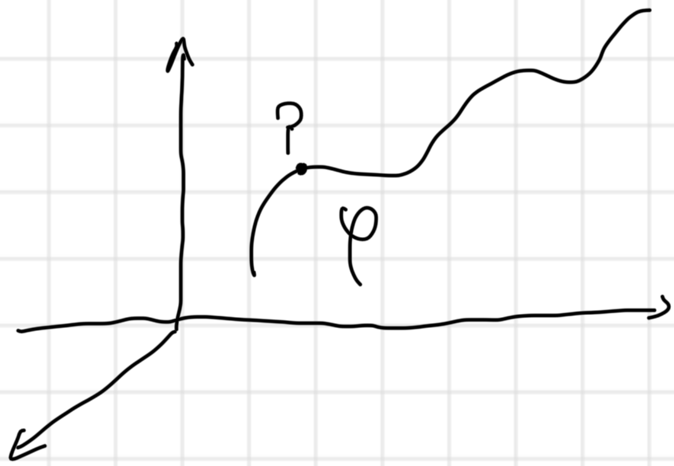
$$x^2 (4mx + 3 - 3m) = 0$$

$$f'' = 12mx^2 + 6x - 6m \Big|_{x=0}$$

se $m > 0$ ho un max
se $m < 0$ ho un min

Forme differenziali

Sia P un punto materiale di massa $m = 1$ che si muove su una curva φ, su cui agisce una forza F



F e' il campo di forze definito come l'applicazione

$$F : (x, y, z) \in A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow (F_1, F_2, F_3) \in \mathbb{R}^3$$

che agisce su P quando si trova nella posizione (x, y, z).

Sappiamo che $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$

$$t \in [a,b] \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

Se il punto si muove con velocità $\vec{v}$

$$E(t) = \frac{1}{2} m |\vec{v}(t)|^2 = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

energia cinetica

Dalla legge di Newton si può scrivere il campo di forze

$$\underset{(F_1, F_2, F_3)}{\vec{F}} = m\vec{a} = \varphi'' = (x'', y'', z'')$$

Il teor. dell'energia cinetica ci dice che il lavoro della forza risultante compiuto su un corpo e' uguale alla variazione di energia cinetica =>

$$L = E_f - E_i = E(b) - E(a) = \int_a^b E'(t)$$

ma

$$E'(t) = \left(x'x'' + y'y'' + z'z'' \right)$$

$$= \underbrace{(x', y', z')}_{\varphi'} \cdot \underbrace{(x'', y'', z'')}_{\varphi'' = \vec{F}}$$

$$= F_1 x' + F_2 y' + F_3 z'$$

$$\Rightarrow L = \int_a^b \langle \varphi', \varphi'' \rangle = \int_a^b F_1 x' + F_2 y' + F_3 z'$$

l'integranda prende il nome di forma differenziale

DEF $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, una forma differenziale lineare e' un'applicazione

$$\omega : P \in A \longmapsto \omega(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\, dx_i$$

$n = 2$ $\quad \omega(x, y) = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$

$n = 3$ $\quad \omega(x, y, z) = a(x, y, z)\, dx + b(x, y, z)\, dy + c(x, y, z)\, dz$

Ad ogni forma differenziale possiamo associare un campo vettoriale

$$F(x,y) = (a(x,y),\ b(x,y)) \quad n=2$$

$$F(x,y,z) = (a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)) \quad n=3$$

Le funzioni $a(x,y)$, $b(x,y)$, $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$, $c(x,y,z)$

sono dette coefficienti della forma differenziale

Una forma differenziale $\omega \in C^k(A)$ se i coefficienti sono $C^k(A)$.

ES di forma differenziale

$F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile

Il differenziale di F

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$$

è una forma differenziale.

OSS non tutte le forme differenziali sono il differenziale di una funzione.

Integrale di una forma differenziale

$$\omega : A \subseteq \mathbb{R}^2 \ (\text{o } \mathbb{R}^3) \longmapsto \mathbb{R}^2 \ (\text{o } \mathbb{R}^2)$$

$\varphi : [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva regolare

$\varphi(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b]$

L'integrale della forma differenziale

$$\int_\varphi \omega = \int_\varphi \langle \omega(x,y), T(x,y) \rangle \, ds \underset{(*)}{=}$$

è un integrale curvilineo

$$T(x,y) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\underset{(*)}{=} \int_a^b \omega(x,y) \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} \cdot |\varphi'(t)| \, dt$$

$$= \int_a^b a(x,y)\, x'(t) + b(x,y)\, y'(t) \, dt$$

OSS

Se $-\varphi$ è la curva equivalente ma orientata nel verso opposto

$$T_\varphi(x,y) = -T_{-\varphi}(x,y) \Rightarrow$$

$$\int_\varphi \omega = -\int_{-\varphi} \omega$$

OSS

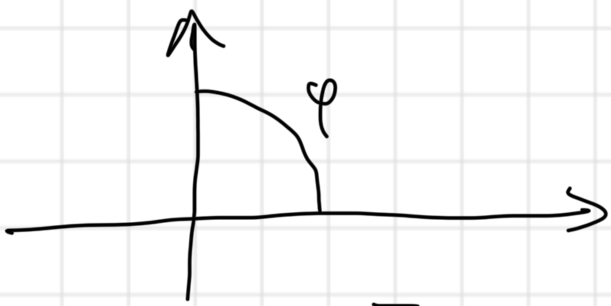
Se $\varphi = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i$ cioè se è unione di più curve, allora

$$\int_\varphi \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi_i} \omega$$

ES $\omega(x,y) = xy\, dx - y^2\, dy$

$$F(x,y) = (xy\, , -y^2)$$

$$\varphi(t) = (\cos t\, , \operatorname{sen} t) \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$



$$\int_\varphi \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t \operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen}^2 t \cos t$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$$

$$= -2 \left. \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}$$

DEF Una forma differenziale ω si dice **esatta** se $\exists\ F : A \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(A)$

$\Rightarrow$ $\omega = dF$

$$\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$$

per essere esatta
$$a(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$$
$$b(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

OSS Se A è un aperto connesso, date F e g due primitive di ω

$$F = g + c$$

questo perché $dF = dg = \omega \Rightarrow$ le derivate sono ordinatamente uguali
$\Rightarrow$ $\nabla(F - g) = 0$ in A aperto connesso

Ricorda che

TEOR $h \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto connesso.

se $\nabla h = \underline{0}$ $\Rightarrow$ h è costante.

Quindi è vero che ~~tutte~~ le primitive di ω si ottengono aggiungendo una cost ad una primitiva (se ω esatta in un un connesso)

TEOR Sia ω una forma differenziale lineare continua definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto ed esatta.

Siano $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ due punti di A e φ una curva che congiunge $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$, orientata da x_0 a x_1.

Allora $$\int_\varphi \omega = F(x_1,y_1) - F(x_0,y_0)$$

con F una qualsiasi primitiva di ω.

Dim ω e' esatta $\Rightarrow \exists F \in C^1$ t.c

$\omega = dF$

$\varphi(t) = (x(t), y(t)) \qquad t \in [a,b]$

$\varphi(a) = (x_0, y_0) \quad \varphi(b) = (x_1, y_1)$

$$\int_\varphi \omega = \int_a^b F_x(x(t),y(t))\, x'(t) + F_y(\ )\, y'(t)$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\varphi(t))\, dt$$

teor derivazione delle funzioni composte

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

dipende solo dagli estremi non dalla curva $\rightarrow$ $= F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0)$ $\square$

TEOR (di caratterizzazione delle forme differenziali esatte)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Sia ω una forma differenziale lineare continua su A.

Siano $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ curve regolari contenute in A.

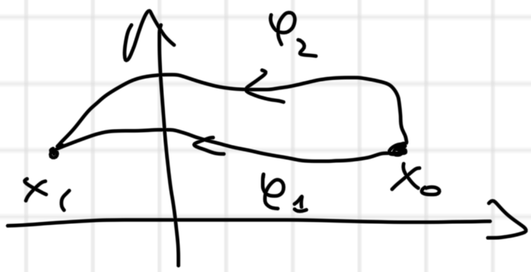
Le seguenti sono equivalenti:

1) ω e' esatta in A

2) $\forall \varphi$ chiusa $\int_\varphi \omega = 0$

3) se φ_1 e φ_2 hanno gli stessi estremi e stesso verso di percorrenza

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega$$



Dim

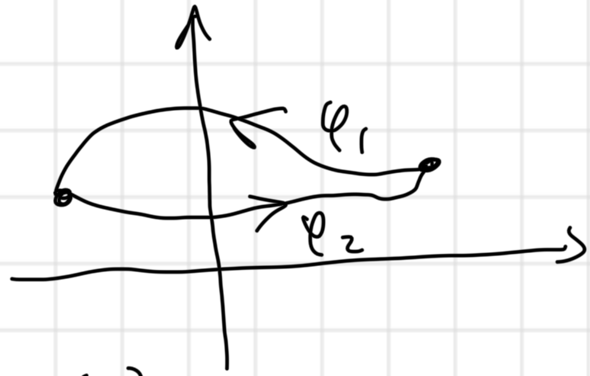
1) => 2) φ e' chiusa quindi $\varphi(a) = \varphi(b)$

ma ω esatta $\Rightarrow \int_\varphi \omega = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$

$= 0$ ✓

2) => 3) ho φ_1 e φ_2 con gli stessi estremi e costruisco

$$\varphi = \varphi_1 \cup (-\varphi_2)$$



$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\int_{\varphi} \omega} = \int_{\varphi_1} \omega + \int_{-\varphi_2} \omega$$

$$= \int_{\varphi_1} \omega - \int_{\varphi_2} \omega$$

ma φ e' chiusa => $\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega$

3) => 1) Devo dim che ω e' esatta in A, cioe' devo trovare una primitiva, ossia una f t.c

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2$$

Fisso $(x_0, y_0) \in A$

A e' connesso, quindi $\exists\ \varphi : \varphi(a) = (x_0, y_0)$
$\varphi(b) = (x, y)$

$\varphi \subseteq A$

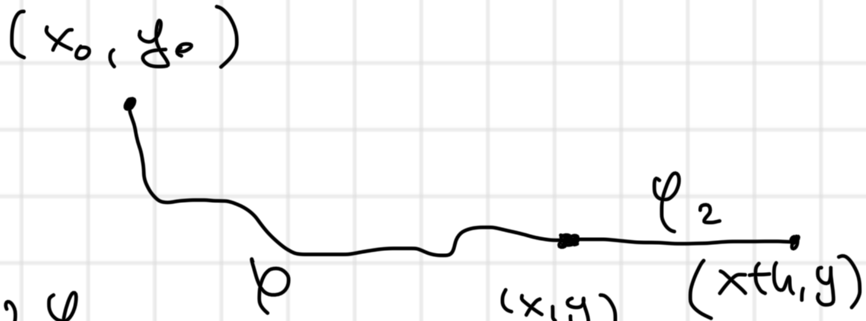
Quindi definiamo $f(x,y) = \int_{\varphi} \omega$

f e' ben definita perche l'integrale non dipende dalla curva (hp 3).

Mostriamo che $dF = \omega$ cioè:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a(x,y) \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y} = b(x,y)$$

(se $\omega = a\,dx + b\,dy$)



$\varphi_1 = \varphi \cup \varphi_2$

$$F(x+h,y) - F(x,y) = \int_{\varphi_1} \omega - \int_{\varphi} \omega$$

$$= \int_{\varphi \cup \varphi_2} \omega - \int_{\varphi} \omega$$

$$= \int_{\varphi} \omega + \int_{\varphi_2} \omega - \int_{\varphi} \omega$$

$$= \int_{\varphi_2} \omega$$

$\varphi_2(t) = (x+t, y) \quad t \in [0,h] \quad h > 0$

$\varphi_2' = (1,0)$

$$\int_{\varphi_2} \omega = \int_0^h [a(x+t,y)\cdot 1 + b(x+t,y)\cdot 0]\,dt$$

$$= \int_0^h a(x+t,y)\,dt$$

divido per h

$$\Rightarrow \frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h a(x+t,y)\,dt$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h a(x+t,y)$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$$

per il teor della media $\exists\, t_h \in [0,h]$ t.c

il limite a destra e' uguale ad $a(x+t_h,y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} a(x+t_h,y) = a(x,y)$$

$\square$

OSS se γ e' chiusa e $\oint_\gamma \omega \neq 0 \Rightarrow$

ω non puo' essere esatta.

Forme differenziali chiuse

Una forma differenziale $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$

$\omega \in C^1(A)$ si dice <u>chiusa</u> se

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in A$$

TEOR Sia $\omega = F_1\,dx + F_2\,dy$

$\omega \in C^1(A)$ (cioè $F_i \in C^1(A)$), A

aperto. Sia inoltre ω esatta. Allora

ω è chiusa in A, ossia $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ in A.

Dim ω è esatta quindi $\exists f : A \to \mathbb{R}$ t.c.
$\in C^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x y}$$

per il teor di Schwarz $(f \in C^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$\square$

Il viceversa non è sempre vero: chiusa $\not\Rightarrow$ esatta

Es $\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$

$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ω e' chiusa

Sia $\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

quindi chiuse

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t(\cos t)$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

quindi ω non e' esatta

OSS In $A = \{(x,y) : x > 0\}$

ω ammette una primitiva che e'

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow \omega = dF$ in A

F e' una primitiva di ω in A.

Forme differenziali nello spazio

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$, $\omega \in C^1(A)$,

$\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ e' chiusa

in $A \iff \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$

cioe' $\iff$ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \underline{0}$.

In tal caso si dice che $\vec{F}$ e' un campo irrotazionale.

ES i campi conservativi sono irrotazionali.

ω e' esatta se $\exists\, f : \omega = df \Rightarrow$

$F = \nabla f$

ω esatta $\Rightarrow$ chiusa, quindi $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$

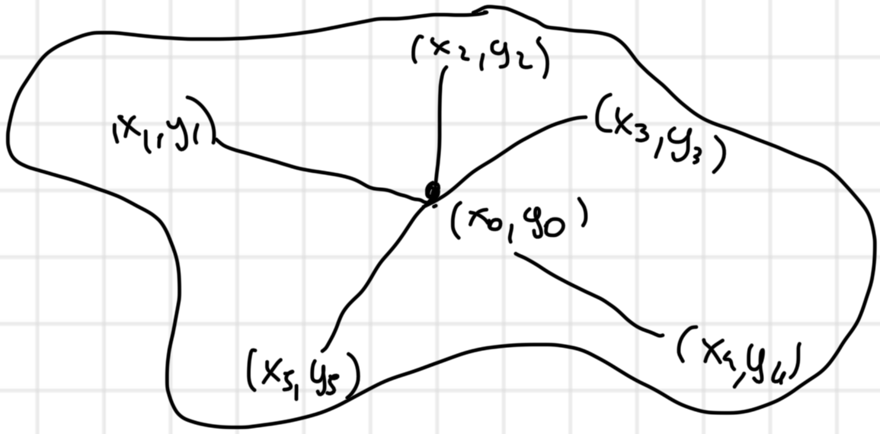
chiusa $\not\Rightarrow$ esatta nemmeno nello spazio, in generale.

Quando posso invertire?

DEF $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ aperto, si dice

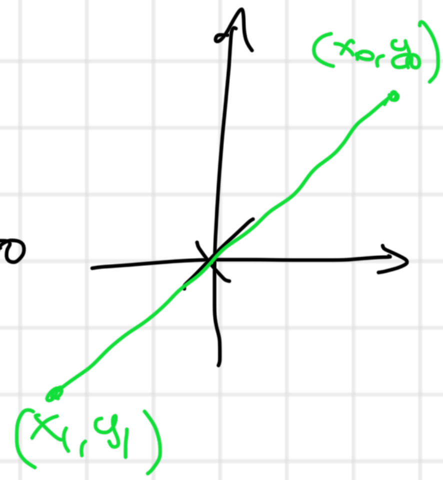
stellato rispetto a $P \in A$ se $\forall\, Q \in A$

$[P, Q] \subseteq A$ Quindi $\exists\,(x_0, y_0) \in A$ t.c il segmento che congiunge (x_0, y_0) con un qualunque punto $(x, y) \in A$ e' tutto contenuto in A.



Es $\mathbb{R}^2$ e' stellato

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non e' stellato



non e' stellato

DEF $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ aperto si dice semplicemente connesso $\iff$ ogni curva semplice e chiusa contenuta in A si può contrarre a un punto con continuità, senza uscire da A.

TEOR $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto stellato o semplicemente connesso, $\omega \in C^1(A)$ forma differenziale chiusa. Allora ω e' esatta.

Es $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non e' semplicemente connesso

Esercizi

① $\omega(x,y) = 2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$

Stabilire se ω è esatta e chiusa.
Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (t, t^2)$
$t \in [0,1]$.

$A = \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = 2x$$

quindi ω è chiusa $\Rightarrow$ esatta

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 2t^3 \cdot 1 + (t^2 + t^4)\cdot(2t)$$

$$= \int_0^1 2t^3 + 2t^3 + 2t^5 \, dt$$

$$= 4\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^6}{6}\Big|_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

opp trovo la primitiva

$$\int 2xy\,dx = x^2y + c(y)$$

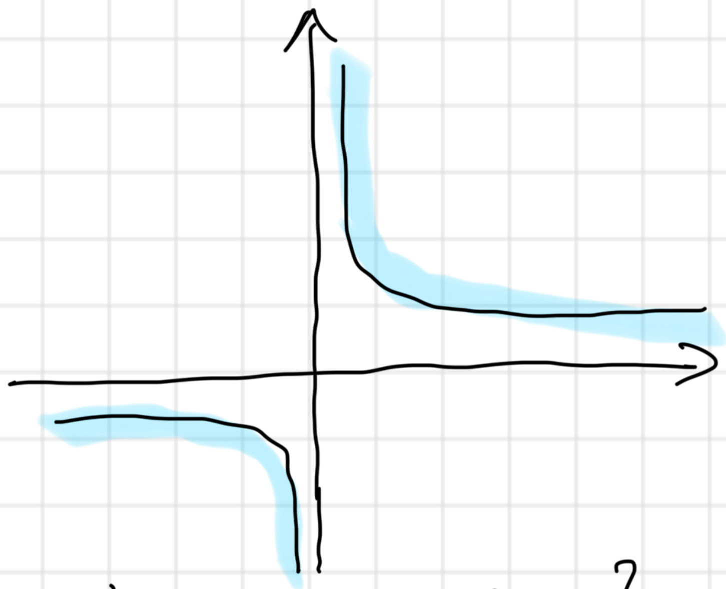
derivo in y $\quad x^2 + c'(y) = x^2 + y^2$
$\Rightarrow c(y) = \frac{y^3}{3} \Rightarrow F = x^2y + \frac{y^3}{3}$

② $\omega(x,y) = \dfrac{y}{1+xy}\,dx + \left(\dfrac{x}{1+xy} + \dfrac{x}{y}\right)dy$

Stabilire se ω e' chiusa ed esatta.
Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ e' la curva $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \in [0,1]$ orientata nel verso delle x crescenti

$D = ?$

$y \neq 0$
$xy \neq -1$ iperbole



$D = \{$ tutto cio' che non ho evidenziato $\}$

non e' semplicemente connesso o stellato

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{(1+xy)^2} + \frac{1}{y}$$

ω non e' chiusa, quindi non puo' essere esatta.

Osserviamo che

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_1 = \frac{y}{1+xy}\, dx + \frac{x}{1+xy}\, dy$$

$$\omega_2 = 0 \cdot dx + \frac{x}{y}\, dy$$

ω_1 è chiusa $\Rightarrow$ è esatta in un semplicemente connesso

La curva $\gamma \subseteq A = \{(x,y) : xy < -1\} \cap \{x,y > 0\}$

che è semplicemente connesso

$$\int_\gamma \omega = \underbrace{\int_\gamma \omega_1}_{\text{devo trovare la primitiva}} + \underbrace{\int_\gamma \omega_2}_{\text{devo calcolarlo}}$$

$$\int_\gamma \omega_1 = \int \frac{y}{1+xy}\, dx = \log(1+xy) + g(y)$$

$$\frac{x}{1+xy} + g'(y) = \frac{x}{1+xy}$$

$$g(y) = \text{cost} \Rightarrow F(x,y) = \log(1+xy) + c$$

$$\int_{\gamma} \omega_1 = -F(0,1) + F(1, e^{-\frac{1}{2}})$$

$$= \log(1+e^{-\frac{1}{2}}) + c - \log 1 - c$$

$$= \log(1+e^{-\frac{1}{2}})$$

$$\int_{\gamma_2} \omega_2 =$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = e^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

$$\int_0^1 \omega(t, e^{-\frac{t^2}{2}}) \cdot (1, -t e^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

$$\int_0^1 (0, t e^{\frac{t^2}{2}})(1, -t e^{-\frac{t^2}{2}})$$

$$\int_0^1 -t^2 \, dt = -\frac{1}{3}$$

$$\int_{\gamma} \omega = \log(1+e^{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}.$$

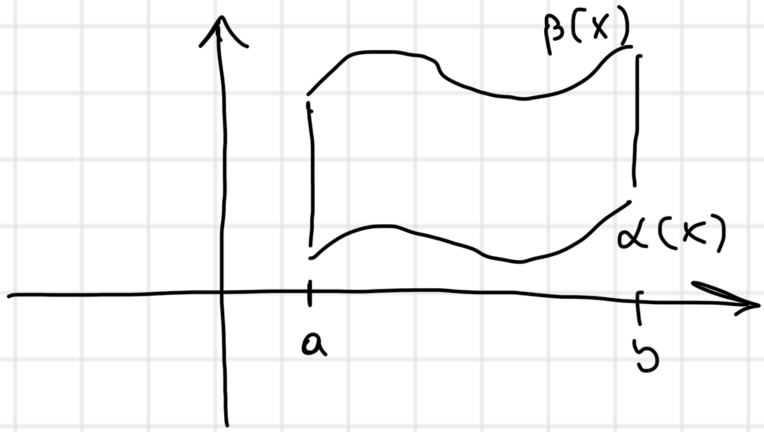
Integrali doppi

Domini normali nel piano

Prendiamo un intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Consideriamo due funzioni

$$\alpha(x) : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \beta(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$$

continue e tali che $\alpha \leq \beta$



L'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

è detto dominio normale rispetto all'asse x.

L'area del dominio D:

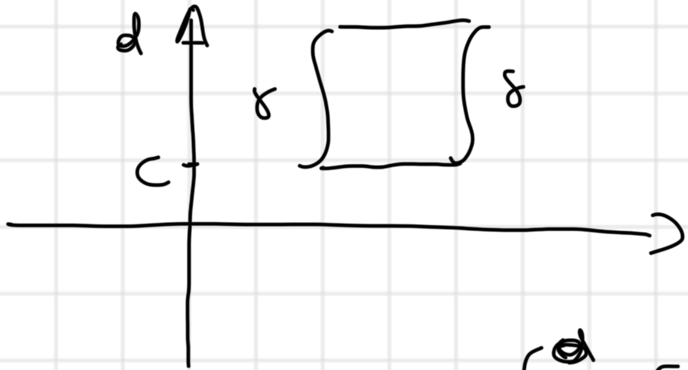
$$m(D) = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)]\, dx$$

cioè è la differenza tra l'area sottesa al grafico di $\beta(x)$ e quella sottesa al grafico di $\alpha(x)$.

Analogamente, $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo
$\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue, $\gamma \leq \delta$

L'insieme $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \}$

è detto dominio normale rispetto all'asse y

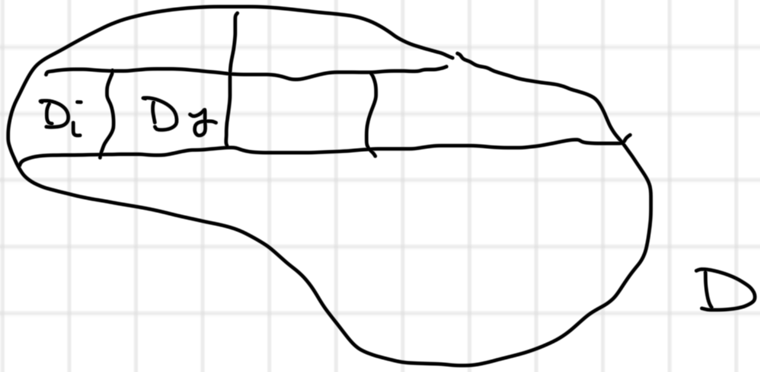


La sua area è $m(D) = \int_c^d [\delta(y) - \gamma(y)] dy$

DEF Sia D un dominio normale di $\mathbb{R}^2$. Una partizione di D in domini normali è un insieme finito $\{D_1 \dots D_n\}$ di domini normali $\subseteq D$ tali che

$$\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \text{ e } \bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$$

L'area $m(D) = \sum_{i=1}^{n} m(D_i)$



Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio normale, $F: D \to \mathbb{R}$ limitata in D.

Sia $P = \{D_1 \dots D_n\}$ una partizione di D.

Possiamo definire le somme integrali

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m(D_i) \inf_{D_i} f \qquad \text{somme inferiori}$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} m(D_i) \sup_{D_i} f \qquad \text{somme superiore}$$

Proprietà

Sia D un dominio normale di $\mathbb{R}^2$

$f: D \to \mathbb{R}$ limitata

1) $\forall P$ partizione di D $\quad s(P) \leq S(P)$

2) $\forall P_1, P_2$ partizioni di D, $\quad s(P_1) \leq S(P_2)$

3) $A = \{ s(P) \mid P \text{ partizione di } D \}$

$B = \{ S(P) \mid P \text{ partizione di } D \}$

$\Rightarrow$ A e B sono separati   cioè vale la 2) per ogni coppia di partizioni

DEF D dominio normale, $f: D \to \mathbb{R}$ limitata
f si dice integrabile secondo Riemann in $D \iff$

$\sup_P A = \inf_P B$, cioè A e B sono contigui.

Il loro unico elemento di separazione è

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

detto integrale doppio di F esteso a D.

Situazione analoga di Analisi I

$I = [a,b]$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata
$P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ partizione

Adesso invece di avere gli intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ ho i domini D_i
le somme inferiori $s(P) = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) \inf_{[x_i,x_{i+1}]} F$

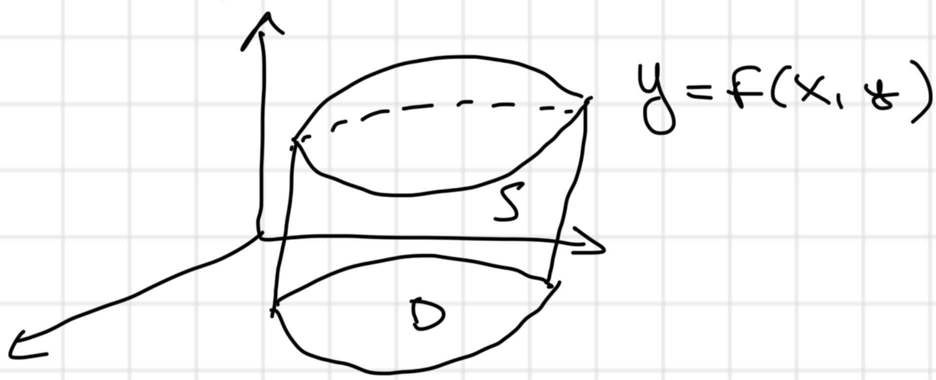
e $(x_{i+1} - x_i)$ e' proprio $m([x_i, x_{i+1}])$.

Interpretazione geometrica dell'integrale

Sia $F \geq 0$ in D, $\iint_D F \, dx dy$ rappresenta il volume del solido delimitato da F e D

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \, 0 \leq z \leq F(x,y) \}$$

$$\text{vol}(S) = \iint_D F \, dx dy$$



Proprietà integrale doppio

Sia D un dominio normale, F e g integrabili secondo Riemann

1) linearità

$$\iint_D (\alpha F + \beta g)\, dx\, dy = \alpha \iint_D F\, dxdy + \beta \iint_D g\, dxdy$$

2) monotonia

se $F \leq g$ $\qquad \iint_D F\, dxdy \leq \iint_D g\, dxdy$

3) additività rispetto al dominio

$D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$, $\{D_i\}$ partizione di D

$$\iint_D F\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} F\, dxdy$$

4) $m(D) \inf_D F \leq \iint_D F\, dxdy \leq m(D) \sup_D F$

La formula 3) ci permette di definire l'integrale anche per domini MISURABILI

DEF $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un dominio misurabile se è unione finita (e disgiunta) di domini normali

$\exists\, D_i \quad i = 1 \dots m$, domini normali t.c

$$\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \quad \forall i, j \quad e \quad D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$$

In questo caso $\iint_D F\, dxdy = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} F\, dxdy$

TEOR D dominio normale, $f: D \to \mathbb{R}$ continua
$\Rightarrow$ f e' integrabile secondo Riemann.

Formule di riduzione per gli integrali doppi

1) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto all'asse x

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

α, β continue.

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$

$$\iint_D f \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

2) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto all'asse y

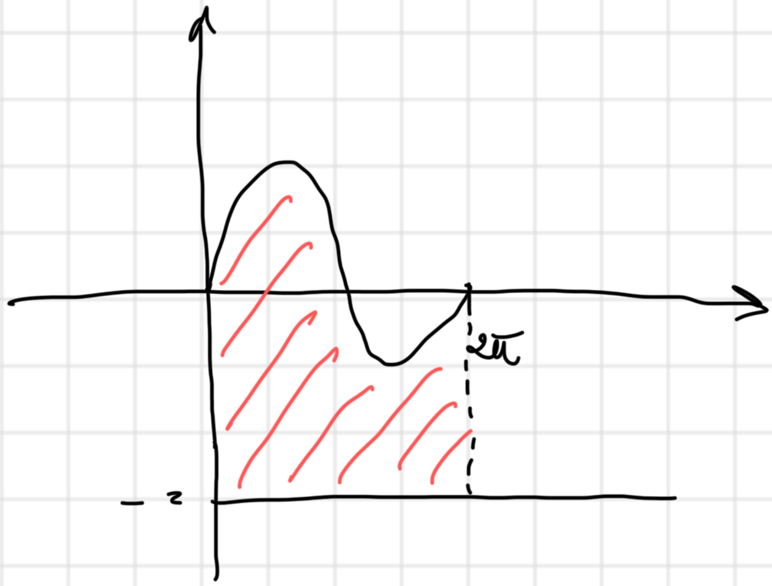
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$

γ, δ continue.

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$

$$\iint_D f \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

① $\iint_D 2xy \; dx\,dy \qquad D=\{x\in[0,2\pi], -2\le y\le \text{sen}\,x\}$



D e' un dominio normale rispetto all'asse x

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{-2}^{\text{sen}\,x} 2xy \; dy\right)dx$$

$$= \int_0^{2\pi} xy^2\Big|_{-2}^{\text{sen}\,x} \; dx$$

$$= \int_0^{2\pi} x\,\text{sen}^2 x - 4x \; dx$$

$$= \int_0^{2\pi} x\,(\text{sen}^2 x - 4)\,dx$$

$$f = x \qquad g' = \text{sen}^2 x - 4$$

$$\int \text{sen}^2 x = -\text{sen}\,x\cos x + \int 1 - \text{sen}^2 x$$

$$= \frac{-\text{sen}\,x\cos x + x}{2}$$

$$g(x) = \frac{x - \text{sen}\,x\cos x}{2} - 4x$$

$$x\left(\frac{x - \text{sen}\,x\cos x}{2} - 4x\right)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,x\cos x}{2} - 4x$$

$$2\pi\left(\pi - 8\pi\right) - \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\cos^2 x}{4} - 2x^2\right]_0^{2\pi}$$

$$2\pi^2 - 16\pi^2 - \pi^2 - \cancel{\frac{1}{4}} + 8\pi^2 + \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$= -7\pi^2$$

(2) $\displaystyle\iint_D x e^{xy}\, dx\, dy$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{1}{y},\ 1 \le y \le 2 \right\}$$

normale rispetto all'asse y

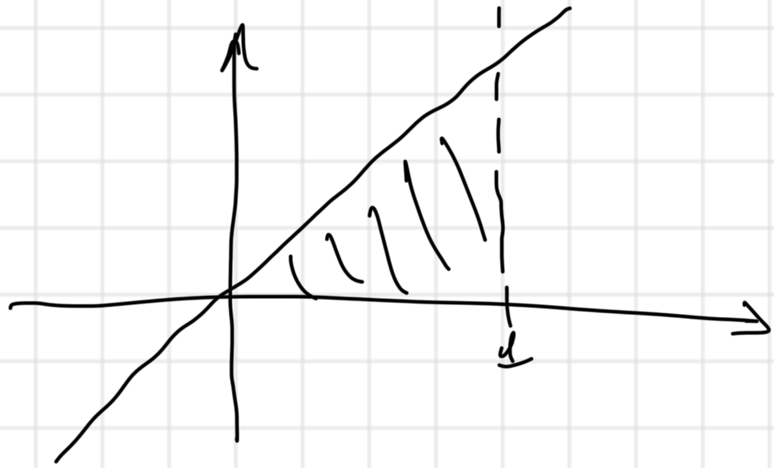
$$\int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{y}} x e^{xy}\, dx \right) dy$$

$$\int_1^2 \frac{x}{y} e^{xy} \Big|_0^{\frac{1}{y}} dy = \int_1^2 \frac{e}{y^2}\, dy = -\frac{e}{y}\Big|_1^2$$

$$= -\frac{e}{2} + e = \frac{e}{2}$$

③ $\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad D = \{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$

normale rispetto all'
asse x



$$\int_0^1 \left(\int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} \left[(2x^2)^{\frac{3}{2}} - x^{2\cdot\frac{3}{2}} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 2\sqrt{2}x^3 - x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(2\sqrt{2}-1)}{4}$$

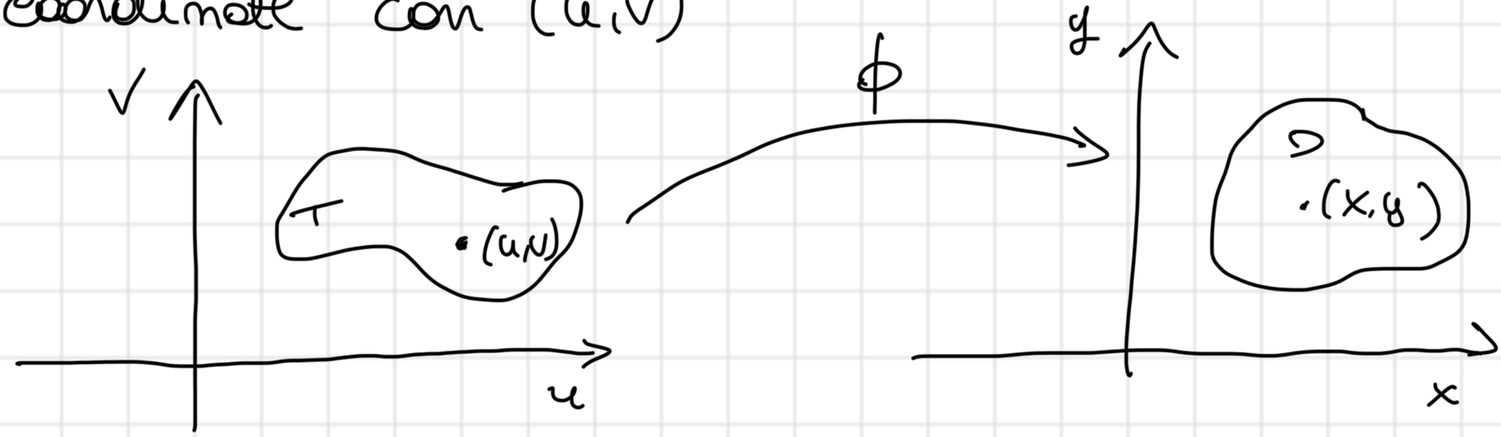
Cambio di variabili negli integrali doppi

DEF Un dominio normale regolare è tale che

$\alpha < \beta$ in (a,b) e $\alpha, \beta \in C^1([a,b])$.

Un dominio è regolare se è unione finita di domini normali regolari.

Sia T un dominio regolare, denotiamo le coordinate con (u,v)



Considero una mappa

$$\phi : (u,v) \in T \longmapsto (x(u,v), y(u,v)) \in D$$

con $x, y \in C^1(T)$, $D = \phi(T)$.

Posso definire la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

e lo jacobiano di ϕ come $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = x_u y_v - x_v y_u$

TEOR Siano T, D domini regolari, $\Phi : T \to D$ invertibile, C^1, t.c. $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \ \forall (u,v) \in T$.

Se $f : D = \Phi(T) \to \mathbb{R}$ continua, allora

$$\iint_{D=\Phi(T)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{T=\Phi^{-1}(D)} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$= \iint_T f(\Phi)\, |J_\Phi|$$

ES Le coordinate polari

$$\Phi : (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\rho, \theta \rightsquigarrow \begin{cases} x = x(\rho, \theta) = \rho \cos\theta \\ y = y(\rho, \theta) = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ non è invertibile

perché non è iniettiva

$$\Phi(0, \theta) = (0,0) \ \forall \theta$$

$$\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, 2\pi) \ \forall \rho \geq 0$$

Quando ci restringiamo all'insieme $\underbrace{(0, +\infty) \times [0, 2\pi)}_{=T}$

$\Rightarrow \Phi(T) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

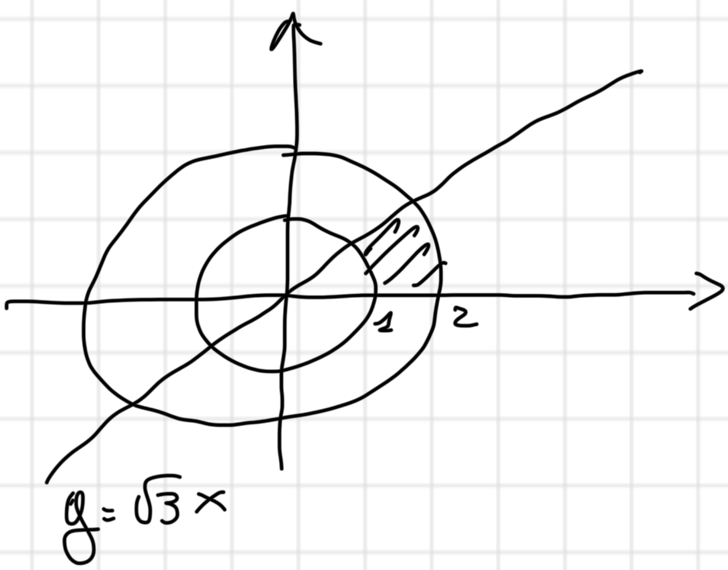
$$J_\phi = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho .$$

Se D è un dominio regolare che non contiene l'origine e $T = \phi^{-1}(D)$ è un dominio regolare contenuto in $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, allora

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

ES 1 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{3}x,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow 1 \le \rho \le 2$$

$$0 \le \rho\operatorname{sen}\theta \le \sqrt{3}\rho\cos\theta \Rightarrow 0 \le \operatorname{tg}\theta \le \sqrt{3}$$

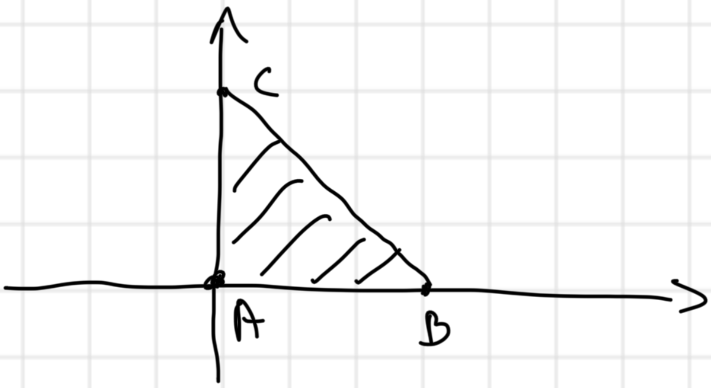
$$\Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^2 \frac{1}{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\log(1+\rho^2)\Big|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\log 5 - \log 2\right] = \frac{\pi}{6}\log\frac{5}{2}$$

Es 2 $\displaystyle\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$

T triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(0,1)$.
$\quad A \quad B \quad C$



$T = \{(x,y): x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le x+y \le 1\}$

Usiamo il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

dobbiamo invertirlo perché voglio $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

$$\begin{cases} x = u+y \Rightarrow x = u + \frac{v-u}{2} = \frac{u+v}{2} \\ v = u+2y \Rightarrow y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

$$\det J_\phi = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Dove variano u e v?

$x \geq 0 \Rightarrow \frac{u+v}{2} \geq 0 \Rightarrow u \geq -v$

$y \geq 0 \Rightarrow \frac{v-u}{2} \geq 0 \Rightarrow u \leq v$

$\Rightarrow -v \leq u \leq v$

$0 \leq x+y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq v \leq 1$

$D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : -v \leq u \leq v,\ 0 \leq v \leq 1 \}$

$$\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} = \int_0^1 dv \int_{-v}^{v} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^{v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 v \left[e - \frac{1}{e} \right] = \frac{1}{4} \left[e - \frac{1}{e} \right]$$

Formule di Gauss-Green

Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$, $F \in C^1(D)$.

Allora,

1) $$\iint_D \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{+\partial D} F\, dy$$

2) $$\iint_D \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{+\partial D} F\, dx$$

Dim Caso 1 Sia D un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi.

$$D = \{ (x,y) : c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \}$$

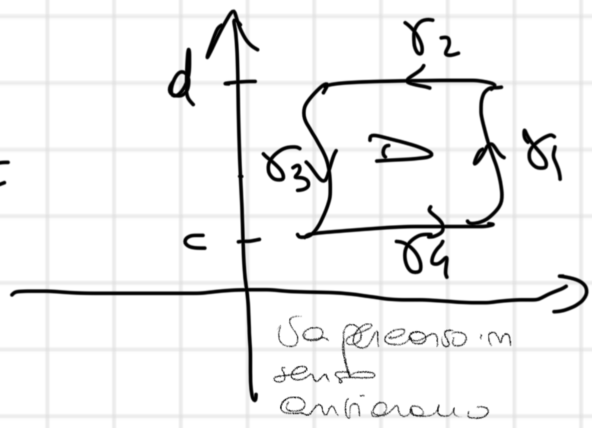
$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial F}{\partial x}\, dx \right) dy$$

$$= \int_c^d F(\delta(y), y) - F(\gamma(y), y)\, dy$$

è una forma differenziale

Ora calcoliamo $\int_{+\partial D} F\, dy$

$$= \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F + \int_{\gamma_4} F$$



$$\gamma_1(t) : \begin{cases} x = \delta(t) \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [c, d]$$

$$-\gamma_2(t) : \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases} \qquad t \in [\gamma(d), \delta(d)]$$

$$-\gamma_3(t) : \begin{cases} x = \gamma(t) \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [c, d]$$

$$\gamma_4(t) : \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \qquad t \in [\gamma(c), \delta(c)]$$

$$\int_{+\partial D} F\, dy = \int_{\gamma_1} F\, dy - \int_{\gamma_2} F\, dy - \int_{\gamma_3} F\, dy + \int_{\gamma_4} F\, dy$$

$$= \int_c^d F(\delta(t), t) \cdot 1\, dt - \int_{\gamma(d)}^{\delta(d)} F(t, d) \cdot 0\, dt +$$

$$- \int_c^d F(\gamma(t), t) \cdot 1\, dt + \int_{\gamma(c)}^{\delta(c)} F(t, c) \cdot 0\, dt$$

$$= \int_c^d F(\delta(t), t)\, dt - \int_c^d F(\gamma(t), t)\, dt$$

$$= \int_c^d [F(\delta(t), t) - F(\gamma(t), t)]\, dt$$

$$= \int_c^d F(\delta(y), y) - F(\gamma(y), y)\, dy \Rightarrow \int_{+\partial D} F\, dy = \iint_D \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy$$

Abbiamo così verificato la ①. La ② si verifica allo stesso modo scrivendo D come dominio normale rispetto all'asse x (perché stiamo supponendo che sia normale rispetto ad entrambi gli assi).

Caso 2 Sia D unione di domini normali $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$

$\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset$ se $i \neq j$

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{+\partial D_i} f\, dy$$

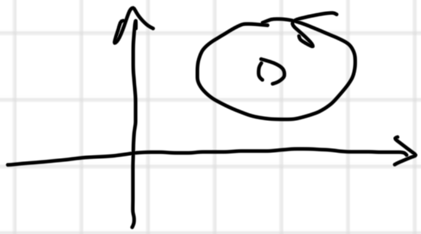
per caso 1.

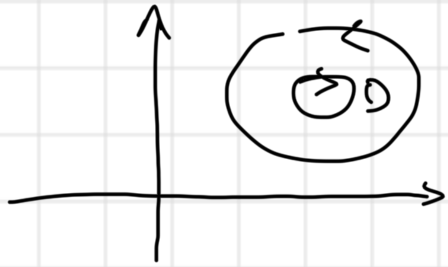
$$\underset{(*)}{=} \int_{+\partial D} f$$

(*)

questo tratto di bordo di D_i viene percorso in due versi diversi quando lo considero come parte del bordo di D_1 e D_2 ⇒ le somme si cancellano e mi restano solo le parti di ∂D_i che sono anche parti di ∂D.

OSS con $+\partial D$ si intende il verso di percorrenza per cui la normale alla curva $\gamma = \partial D$ punta sempre verso l'esterno





verso antiorario per le parti "esterne", orario per le "interne".

Conseguenze di Gauss Green

TEOR (della divergenza) Sia $F = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale, $F \in C^1(D)$. Sia D un domenio regolare di $\mathbb{R}^2$. Allora

$$\iint_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} \langle F \cdot N \rangle \, ds$$

N normale esterna a D

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Dim $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ parametrizzazione positiva di ∂D, $t \in [a,b]$. Allora

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

e $N(t)$ si ottiene da $T(t)$ ruotandolo di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario, quindi

$$N(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|\gamma'(t)|}.$$

$$\iint_D \operatorname{div} F \, dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy \overset{G.G}{=}$$

$$\int_{+\partial D} F_1 \, dy - F_2 \, dx = \int_a^b F_1(x(t), y(t)) y' - F_2 x'$$

$$= \int_a^b \left[F_1(x(t), y(t)) \frac{y'(t)}{|\gamma'(t)|} - F_2(x(t), y(t)) \frac{x'(t)}{|\gamma'(t)|} \right] |\gamma'|$$

$$= \int_a^b \langle F \cdot N \rangle |\gamma'(t)| = \int_{\partial D} \langle F \cdot N \rangle \, ds$$

integrale curvilineo

$\square$

Formula di Stokes

Sia $F = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale, $F \in C^1(D)$

Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$

$$\int_{+\partial D} F_1 \, dx + F_2 \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Dim (per esercizio)

Immediata da G.G

$$\int_{+\partial D} F_1 \, dx = -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dx\,dy$$

$$\int_{+\partial D} F_2 \, dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} \, dx\,dy$$

$\square$

La formula di Stokes ci permette di dimostrare il teorema delle forme differenziali

TEOR $\omega \in C^1(A)$, A semplicemente connesso

ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta.

Dim Sia γ una curva semplice e chiusa in A

$\Rightarrow$ visto che A è semplicemente connesso

$\gamma = \partial D \qquad D \subseteq A \qquad \omega(x,y) = a(x,y)dx + b(x,y)dy$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = \int_{+\partial D} \omega \overset{\text{stokes}}{=} \iint_D \underbrace{\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}}_{} = 0$$

la forma è chiusa

$\Rightarrow$ per la caratterizzazione delle forme esatte $\Rightarrow$ ω è esatta.

Altre conseguenze

Formule di integrazione per parti

$$\text{①} \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx dy = \int_{+\partial D} f g \, dy - \iint_D f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy$$

$$\text{②} \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} g \, dx dy = -\int_{+\partial D} f g \, dx - \iint_D f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy$$

Area di un dominio nel piano

$$m(D) = \iint_D dx dy \overset{G.G}{=} \int_{+\partial D} x \, dy = -\int_{+\partial D} y \, dx$$

$$\Rightarrow m(D) = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} -y\,dx + x\,dy$$

Es (area ellisse) $\gamma(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$$m(E) = \frac{1}{2}\int_{+\partial E} x\,dy - y\,dx =$$

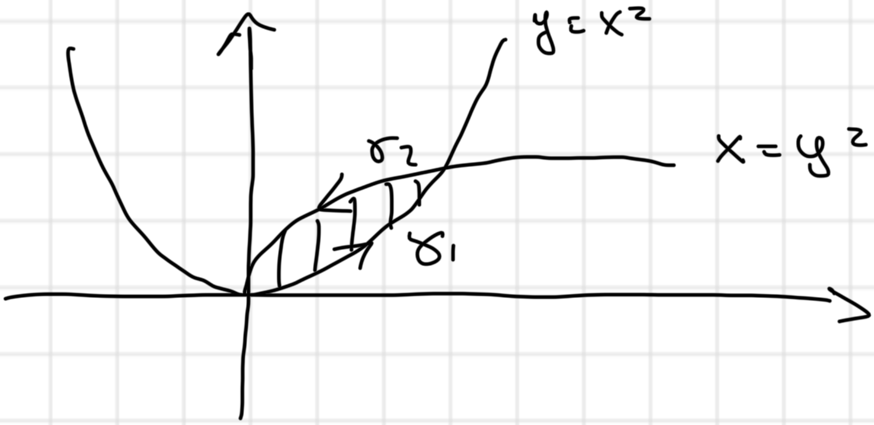
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t\,(b\cos t) - b\,\text{sen}\,t\,(-a\,\text{sen}\,t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t + ab\,\text{sen}^2 t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{2\pi\,ab}{2} = \pi ab$$

Es Calcolare $\iint_T \frac{x}{y}\,dx\,dy$

T e' il dominio del piano racchiuso dalle parabole $y = x^2$ $x = y^2$



$$\iint_T \frac{x}{y}\,dx\,dy \overset{G.G}{=} \int_{+\partial D} \frac{x^2}{2y}\,dy = (*)$$

$+\partial D = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\circledast = \int_0^1 \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{2}\cancel{t^2}} (\cancel{2}t)\, dt - \int_0^1 \frac{t^{\cancel{4}\,3}}{2\cancel{t}} \cdot 1\, dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

BARICENTRO $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare

Il baricentro di D e' il punto $G(x_B, y_B)$ di coordinate

$$x_B = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \, dx\, dy$$

$$y_B = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \, dx\, dy$$

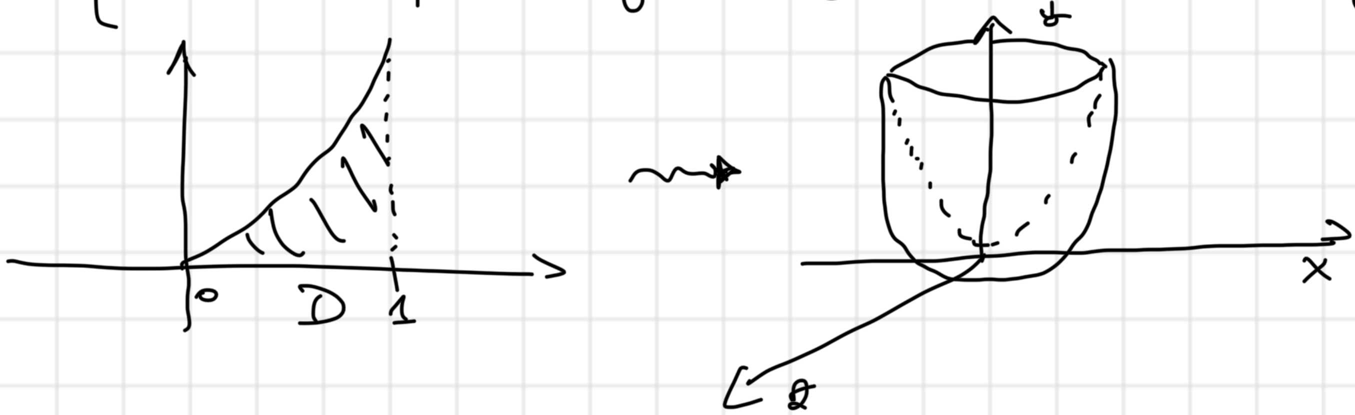
TEOR (di Guldino per i volumi) ND

Sia D un dominio normale nel piano. Il volume che si ottiene ruotando D rispetto a una retta r che non interseca D è uguale al prodotto della misura di D per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro di D durante la rotazione

$$V_S = m(D) \cdot \alpha \, d(G, r)$$

ES Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando di 2π il settografico

$D = \{ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2 \}$ attorno all'asse y



$$V_S = m(D) \cdot 2\pi \cdot x_0 = m(D) \cdot 2\pi \frac{1}{m(D)} \iint_D x \, dx \, dy$$

$$= 2\pi \iint_D x \, dx \, dy = 2\pi \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x \, dy = 2\pi \int_0^1 x^3$$

$$= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Integrali tripli

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice un dominio normale rispetto al piano (x,y) se è della forma

$$E = \{ (x,y) \in D \, , \, \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y) \}$$

dove D è un dominio misurabile del piano e

α, β sono due funzioni continue, t.c $\alpha \le \beta$.

Analogamente possiamo definire i domini normali rispetto ai piani (x,z) e (y,z).

Il volume (o misura) di E

$$Vol(E) = \iint_D [\beta(x,y) - \alpha(x,y)] \, dx\, dy$$

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata, $P = \{E_i\}_{i=1 \dots m}$

partizione di E, formata da domini normali a

due a due privi di punti interni in comune.

Definiamo

$$s(P) = \sum_{i=1}^{m} \inf_{E_i} f \quad m(E_i) \qquad \text{somma inferiore}$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{E_i} f \quad m(E_i) \qquad \text{somma superiore}$$

$A = \{ s(P) : P \text{ partizione di } E \}$

$B = \{ S(P) : P \text{ partizione di } E \}$

A e B sono separati, cioè $s(P) \leq S(Q) \; \forall P, Q$ partizioni

Quando sono contigui

$$\sup A = \inf B = \iint_E f \, dx\,dy\,dz$$

f si dice integrabile secondo Riemann su E; come in $\mathbb{R}^2$, f continua => f integrabile.

Formule di riduzione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio normale

$E = \{ (x,y) \in D, \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y) \}$

$f : E \to \mathbb{R}$ continua

$$\Rightarrow \iiint_E f \, dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f \, dz \right) dx\,dy$$

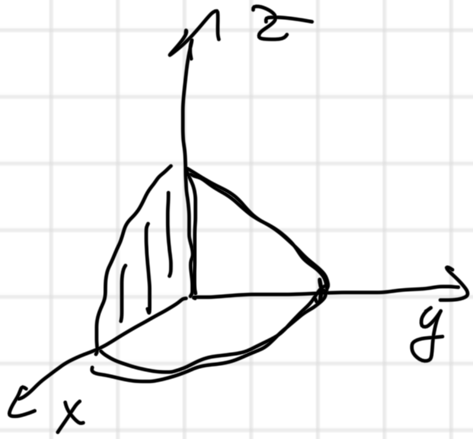
ES $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad y \leq 2 - x^2 - z^2 \}$

$$\iiint_E \frac{xz}{\sqrt{y}} \, dx\,dy\,dz$$

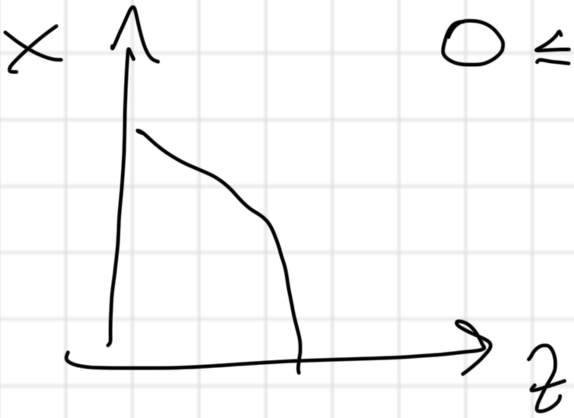
$$\iint_D \left(\int_0^{2-x^2-z^2} \frac{xz}{\sqrt{y}}\, dy \right) dx\, dz$$

$$= \iint_D \left(2\sqrt{y} \Big|_0^{2-x^2-z^2} xz \right) dx\, dz$$

$$= \iint_D 2xz\sqrt{2-x^2-z^2}\, dx\, dz$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

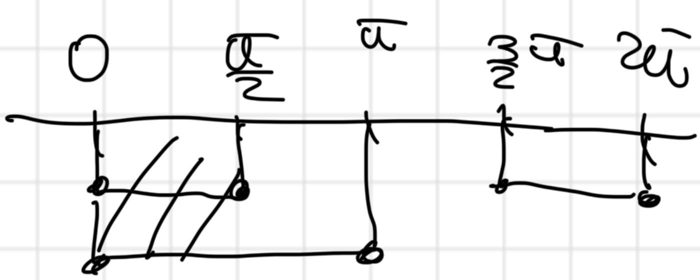


$$0 \leq y \leq 2-\rho^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \rho\cos\theta \geq 0 \\ \rho \operatorname{sen}\theta \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \cup \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$



$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} 2\rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \sqrt{2-\rho^2}\, d\rho \right) d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \,\operatorname{sen}\theta \left(\underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \left(2\rho \sqrt{2-\rho^2}\right) d\rho}_{(*)} \right) d\theta$$

$$(*) \quad \rho^2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{(2-\rho^2)^3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} + \int_0^{\sqrt{2}} 2\rho \cdot \frac{2}{3}(2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{5}(2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \iiint = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16}{15}\sqrt{2}\,\cos\theta \,\operatorname{sen}\theta$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16}{15}\sqrt{2} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{15}\sqrt{2}$$

Formule di cambiamento delle variabili

Sia $\phi : T \subseteq \mathbb{R}^3 \to E$

T dominio regolare dello spazio (u, v, w)

E dominio regolare dello spazio (x, y, z)

$\phi \in C^1(T)$ invertibile $\phi : (u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(\ ), z(\ ))$

$$\Rightarrow \iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T = \phi^{-1}(E)} f(\phi(u,v,w))\,|J_\phi|\,du\,dv\,dw$$

$$J_\phi = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

Cambi di variabile notevoli

1) coordinate sferiche

$$\phi : \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\psi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\psi \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \in [0, +\infty) \\ \psi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(x,\psi,z)}{\partial(\rho,\psi,\theta)} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\psi\cos\theta & \rho\cos\psi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\psi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\psi\cos\theta \\ \cos\psi & -\rho\operatorname{sen}\psi & 0 \end{pmatrix}$$

$J_\phi(\rho,\psi,\theta) = \cos\psi\,(\rho^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi +$

$+ \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}^2\theta) +$

$+ \rho \operatorname{sen}\varphi \left(\rho \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\theta + \rho \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta \right)$

$= \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi + \rho^2 \operatorname{sen}^3\varphi = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

OSS $|J_\phi| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ perché $\varphi \in [0, \pi]$

2) coordinate cilindriche

$$\phi \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in (0, +\infty) \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|J_\phi| = \rho\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta = \rho$

TEOR (della divergenza in $\mathbb{R}^3$)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio regolare

$F : E \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1

$$\Rightarrow \iiint_E \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial E} F \cdot \nu \, d\sigma$$

ν è la normale esterna ad E

L'oggetto $\int_{\partial E} F \cdot \nu \, d\sigma$ è detto flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie ∂E

Che cos'è una superficie?

Superfici parametrizzate regolari

Sia D un dominio connesso del piano. Una superficie parametrizzata è un'applicazione $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1.

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

φ è regolare se

1) φ ristretta a $\mathring{D}$ è invertibile

2) la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = D\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

ha rango 2 in ogni $(u,v) \in D$

La (2) è l'analogo di $\gamma' \neq 0$ per le curve regolari e assicura l'esistenza del piano tangente nel punto $\varphi(u,v)$.

DEF $\varphi(D) = \Sigma$ è il sostegno della superficie. Il suo bordo orientato è $+\partial\Sigma = \varphi(\gamma(t))$ dove γ parametrizza $+\partial D$.

PRODOTTO VETTORIALE

$\xi \wedge \eta$ $\qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

$$\xi \wedge \eta = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \; -\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1, \; \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$$

OSS $D\varphi$ ha rango $2 \iff \varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0$

$\varphi_u = (x_u, y_u, z_u) \qquad \varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$

Es Superficie grafico di funzione

$f \in C^1(A) \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad f: A \to \mathbb{R}$

$$\varphi : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in A$$

La matrice Jacobiana $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$ ha sempre rango 2

Es Sfera di raggio r

$$\varphi : \begin{cases} x = r \operatorname{sen} u \cos v \\ y = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = r \cos u \end{cases} \qquad (u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v & -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ r \cos u \operatorname{sen} v & r \operatorname{sen} u \cos v \\ -r \operatorname{sen} u & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 $\Longleftrightarrow \varphi_u \wedge \varphi_v \neq \underline{0} \quad \forall (u,v)$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos u \cos v & r \cos u \operatorname{sen} v & -r \operatorname{sen} u \\ -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & r \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(r^2 \operatorname{sen}^2 u \cos v,\ r^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v,\ r^2 \operatorname{sen} u \cos u\right)$$

$$= r^2 \left(\operatorname{sen}^2 u \cos v,\ \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u \cos u\right)$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = r^2 \sqrt{\text{sen}^4 u \cos^2 v + \text{sen}^4 u\, \text{sen}^2 v + \text{sen}^2_u \cos^2 u}$$

$$= r^2 \sqrt{\text{sen}^4 u + \text{sen}^2 u \cos^2 u} = r^2 \,\text{sen}\, u \quad (\text{perché } u \in [0,\pi])$$

ES Superficie cilindrica

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

$$\varphi : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z \end{cases} \qquad (t,z) \in [a,b] \times [0,h]$$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ y' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se γ e' regolare allora φ e' regolare

Piano tangente a una superficie

Sia φ una superficie regolare

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

$P = (x_0, y_0, z_0)$ appartenente alla superficie

$\Rightarrow P = \varphi(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D$

$\varphi_u \wedge \varphi_v$ si chiama normale alla superficie

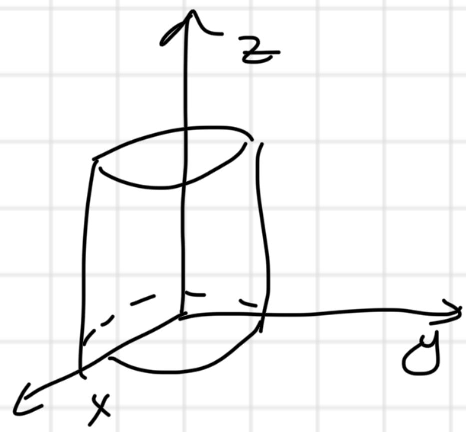
$\nu = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$ si chiama versore normale alla superficie.

Il piano tangente alla superficie in $\varphi(u_0, v_0) = P$ è dato da

$$\nu(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ES $\varphi(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ $\quad u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0,1]$

cilindro



$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \wedge (0,0,1)$

$= (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$

se $(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \varphi(u_0, v_0) = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow (\varphi_u \wedge \varphi_v)(u_0, v_0) = (0, 1, 0)$

Il piano è $(0,1,0)\left(x - 0, y - 1, z - \frac{1}{2}\right) = 0$
$\Rightarrow y = 1$

Area delle superfici

Sia $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare

$$A(\varphi) = \iint_D |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv = \int_\varphi d\sigma$$

Integrale di superficie

Sia $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ superficie regolare

D dominio connesso regolare del piano

$\Sigma = \varphi(D)$ il sostegno

$f : \Sigma \to \mathbb{R}$ continua

l'integrale di superficie di f su S è

$$\int_S f \, d\sigma = \iint_D f(\varphi(u,v)) \, |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv$$

Flusso del campo attraverso la superficie

$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regolare

$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$\nu(u,v)$ il vettore normale alla superficie

$F : \Sigma \to \mathbb{R}^3 \quad \Sigma = \varphi(D)$ è un campo vettoriale C^1

Il flusso del campo vettoriale attraverso la superficie Σ nella direzione ν

$$\int_\Sigma F \cdot \nu \, d\sigma = \iint_D \left(F(\varphi(u,v)) \cdot \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \right) |\varphi_u \wedge \varphi_v|$$

$$= \iint_D F(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v)$$

il flusso è un integrale di superficie con integrando $F \cdot \nu$

ES Calcolare area della sfera

$$\iint_D |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv = A$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = r^2 (\operatorname{sen}^2 u \cos v, \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos u)$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = r^2 \operatorname{sen} u$$

$$\iint_D r^2 \operatorname{sen} u \, du \, dv$$

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \quad u \in [0, \pi] , v \in [0, 2\pi]\}$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (r^2 \operatorname{sen} u) dv \right) du$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} r^2 \operatorname{sen} u \, du = 2\pi (-\cos u) \Big|_0^{\pi} r^2$$

$$= (2\pi + 2\pi) r^2 = 4\pi r^2 .$$

(2) Calcolare il flusso di $\left(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z^2\right)$ attraverso la superficie $\varphi(\theta,z)=(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $z \in [0,2]$

$$F = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z^2\right)$$

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_z = ?$$

$$\varphi_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\varphi_z = (0, 0, 1)$$

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_z = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$|\varphi_\theta \wedge \varphi_z| = 1$$

$$\int_\Sigma F \, d\sigma = \iint_D F(\varphi(\theta,z)) \cdot \nu(\theta,z) \cdot |\varphi_\theta \wedge \varphi_z|$$

$$= \iint_D F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$= \int_0^2 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1}, 0, z^2\right)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$= \int_0^2 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = \int_0^2 \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dz$$

$$= 2 .$$

TEOR (di Stokes in $\mathbb{R}^3$) Sia F un campo vettoriale C^1 e sia Σ una superficie regolare con bordo.

Allora $\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\sigma = \underbrace{\int_{+\partial\Sigma} (F \cdot T)\, ds}_{\text{circuitazione del campo di } F \text{ lungo una curva } +\partial\Sigma.}$

Calcolare la circuitazione

ES $F = (z, x, y)$ lungo il bordo del disco

$\varphi(u,v) = (u, v, 1) \qquad (u,v) \in D \quad D = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$

$$\int_{+\partial\Sigma} (F \cdot T)\, ds = \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \nu$$

$$= \iint_D \left(\operatorname{rot} F(\varphi(u,v)) \cdot \frac{(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \right) |\varphi_u \wedge \varphi_v|$$

$\varphi_u = (1, 0, 0) \qquad \varphi_v = (0, 1, 0)$

$\varphi_u \wedge \varphi_v = (0, 0, 1) \qquad \operatorname{rot} F = (1, 1, 1)$

$D = \{ \rho, \theta : \rho \in [0,1], \ \theta \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big((1, 1, 1)(0, 0, 1) \Big) \rho = \pi^2$$

div in $\mathbb{R}^2$

$$\iint_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} (F \cdot N)\, ds$$

φ parametrizza ∂D

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b F(\varphi(t))\, \frac{\varphi'}{|\varphi|}\, dt$$

Stokes in $\mathbb{R}^2$

$$\int_{+\partial D} F_1\, dx + F_2\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

div in $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_E \operatorname{div} F = \underbrace{\int_\Sigma F \cdot \nu \, d\sigma}_{\text{integrale superficiale}}$$

$\Sigma = \partial E$

Stokes in $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \nu\, d\sigma}_{\text{flusso del rotore (integrale superficiale)}} = \overbrace{\int_{+\partial\Sigma} \langle F \cdot T \rangle\, ds}^{\text{circuitazione del campo}}$$

$$① \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \nu = \iint_D (\operatorname{rot} F \cdot \nu)\, |\varphi_u \wedge \varphi_v|$$

$$\textcircled{2}\int_{\Sigma} F\cdot\nu\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (F\cdot\nu)\,|\varphi_u\wedge\varphi_v|$$

$$\textcircled{1} = \iint_{D} \operatorname{rot} F \cdot (\varphi_u\wedge\varphi_v)$$

$$\textcircled{2} = \iint_{D} F \cdot (\varphi_u\wedge\varphi_v)$$

Equazioni differenziali

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
$x \in [a,b] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

vogliamo determinare $y(x)$, $x \in [a,b]$ t.c

$$y'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Per il teor. fondamentale del calcolo integrale

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$$

Fissato $x_0 \in [a,b]$, se impongo $y(x_0) = y_0$

$$\Rightarrow y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt + c = y_0$$

$$\Rightarrow c = y_0$$

trovo un'unica $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0$

soluzione.

Il problema
$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
prende

il nome di problema di Cauchy.

ES $y'' + \omega_0^2 y = 0$ eq. moto armonico

e' un'eq. diff. del II ordine.

Le sol del moto armonico sono combinazioni lineari di seno e coseno. Infatti

$y(t) = \cos(\omega_0 t)$ $\quad y' = -\text{sen}(\omega_0 t)\,\omega_0$

$y''(t) = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$

e' sol.

$y(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ $\quad y''(t) = -\omega_0^2\,\text{sen}(\omega_0 t)$

e' sol. Quindi $y(t) = A\,\text{sen}(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$

$A, B \in \mathbb{R}$.

Ho infinite soluzioni, a meno di imporre le condizione iniziale su y e y'.

DEF Un' equazione differenziale di ordine n

e' un' equazione del tipo $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$

che lega x, y e le derivate di y fino all'ordine n.

Una soluzione in I di $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ e' una

funzione $y(x)$, $x \in I$: $F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

$\forall x \in I$.

L'eq. si dice scritta in forma normale se

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Il problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

$n = 1$ $\qquad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$y(x)$ è soluzione se $\qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

La soluzione esiste?

Consideriamo un problema di Cauchy del I ordine

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dove $[a, b] \times \mathbb{R}$ è un intorno del punto (x_0, y_0).

Supponiamo

1) f continua in $[a, b] \times \mathbb{R}$

2) f Lipschitziana in y uniformemente rispetto a x, cioè $\exists L > 0$ t.c.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

$\forall x \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

PROP Sia f continua in $[a,b] \times \mathbb{R}$, derivabile rispetto a y.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ è limitata in $[a,b] \times \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$

f è Lipschitziana e vale che $\sup_{[a,b]\times\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$

ES $f(y) = \sqrt{y}$ non è lip in $[0, +\infty)$

$$|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \overset{?}{\leq} L |y_1 - y_2|$$

no perché $\frac{1}{2\sqrt{y}} \longrightarrow +\infty$ per $y \to 0^+$

TEOR (Esistenza e unicità globale)

Nelle hp 1) e 2), $\forall x_0 \in [a,b]$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}$

$\exists !$ $y = y(x)$ derivabile in $[a,b]$ che risolve su $[a,b]$ il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Corollario Se f è continua in $[a,b] \times \mathbb{R}$, derivabile rispetto a y e $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ limitata in $[a,b] \times \mathbb{R}$.

Allora vale la tesi del th $\exists!$ globale.

Es $\begin{cases} y' = 3x^2 y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\qquad f(x,y) = 3x^2 y$

mettiamoci in $[-a, a] \times \mathbb{R}$

f continua, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \leq 3a^2 \Rightarrow$ limitata in $[-a,a] \times \mathbb{R} \Rightarrow \exists!$ sol del P. C in $[-a,a]$

Poiché a è arbitrario la sol y è definita in $\mathbb{R}$.

Es $\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad f(x,y) = 1 + y^2$

$y = \operatorname{tg} x \qquad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$

$y(0) = \operatorname{tg}(0) = 0$ quindi verifica eq e condizione iniziale

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e la sol è def in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ non in tutto $\mathbb{R}$, quindi
Non vale il th. di $\exists!$ globale, infatti

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ non è limitata.

TEOR (esistenza e unicità locale)

Sia $f : I \times J \to \mathbb{R}$, $I \times J$ rettangolo $= [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$

1) f continua in $I \times J$

2) f lip in $y \in J$ uniformemente rispetto a $x \in I$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in J \quad \forall x \in I$

Allora $\exists\, \delta > 0$, $\exists !\, y(x) :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ t.c

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Corollario Date due sol $y_1(x)$ e $y_2(x)$ distinte di $y' = f(x, y)$. Allora i grafici di $(x, y_1(x))$ e $(x, y_2(x))$ non si toccano mai se si toccano risolvono lo stesso problema di Cauchy

Sistemi di equazioni del I ordine

Sia $\underline{y} = (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{F}(x, \underline{y}) = \big(f_1(x, \underline{y}), \dots, f_n(x, \underline{y}) \big)$$

$\underline{y}' = \underline{F}(x, \underline{y})$ è un sistema di eq. diff del I ordine

Per esteso

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

dati iniziali

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^0 \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_n^0 \end{cases}$$

Vale il th. di esistenza e unicità globale, se le $f_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono tali che

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \quad \forall i,j \text{ sono limitate in } [a,b] \times \mathbb{R}^n$$

allora $\exists !$ sol globale.

Eq differenziali di ordine n

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Chiamo

$$y = y_1$$
$$y' = y'_1 = y_2$$
$$y'' = y''_1 = y'_2 = y_3$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_1 = y'_{n-1} = y_n$$

$\Rightarrow$ ho il sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = F(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Conosciamo le condizioni di esistenza delle soluzioni delle eq. diff. di ordine n

Eq. diff. a variabili separabili

$$y' = f(x)\, g(y)$$

se $g(y) \neq 0$ divido per $g(y)$

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$ e integro

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\, dx = \int f(x)\, dx$$

$$y(x) = y \Rightarrow y'(x)\, dx = dy$$

cambio di variabili

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

Sia $G(y)$ una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$

$F(x)$ una primitiva di $f(x)$

$$\Rightarrow G(y) = F(x) + C.$$

Se G e' invertibile, troviamo y

$$y = G^{-1}(F(x) + C)$$

Es $y' = xy^3$ a variabili separabili

$y = 0$ e' sol.

se $y(x) \neq 0$

$$\frac{y'}{y^3} = x \Rightarrow \int \frac{1}{y^3}\, dy = \int x\, dx$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\frac{1}{y^2} = -x^2 + c \Rightarrow y^2 = \frac{1}{c - x^2}$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{c - x^2}}$$

$y = 0$

$$y = \frac{1}{\sqrt{c - x^2}} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{c - x^2}}$$

Sono tutte soluzioni.

Se fissiamo il dato iniziale $\begin{cases} y' = xy^3 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{c - x^2}}$ è l'unica che posso prendere perché $y(0) = -3$

$$y(0) = -\frac{1}{\sqrt{c}} = -3 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

Esercizi

(1) $\begin{cases} y' = x(1-y^2) \\ y(0)=0 \end{cases}$

$$y' = x(1-y^2) \Rightarrow \frac{y'}{1-y^2} = x$$

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int \frac{1}{(1-y)(1+y)}\,dy = \int \frac{A}{1-y} + \int \frac{B}{1+y}$$

$$1 = A + Ay + B - By \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ A = B \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\log(1+y) - \log(1-y)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

$$\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = Ce^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \frac{1+y}{1-y} = Ce^{x^2}$$

$$1 + y - (1-y)Ce^{x^2} = 0$$

$$1+y-ce^{x^2}+yce^{x^2}=0$$

$$y\left(1+\cancel{ce^{x^2}}\right)=\frac{ce^{x^2}-1}{ce^{x^2}+1}$$

$$0=\frac{c-1}{c+1}\Rightarrow c=1$$

② $y'=(x+1)(y^2+1)$

$$\frac{y'}{y^2+1}=x+1 \Rightarrow \text{arctg}\, y=\frac{x^2}{2}+x+c$$

$$y=\text{tg}\left(\frac{x}{2}+x+c\right)$$

③ $\begin{cases} y'=e^{x+y} \\ y(1)=1 \end{cases}$

$$\frac{y'}{e^y}=e^x \Rightarrow -e^{-y}=e^x+c$$

$$e^{-y}=-e^x+c$$

$$-y=\log(-e^x+c)$$

$$y=-\log(-e^x+c)$$

$$1 = -\log(-e + c) \Rightarrow e^{-1} = c - e$$

$$\Rightarrow c = e + \frac{1}{e}$$

Risoluzione per sostituzione

Data un'equazione differenziale, e' possibile risolverla sfruttando funzioni ausiliarie.

$$y' = y(ax+by)$$

$z = ax+by \quad , \quad z' = a + by'$

$\Rightarrow z' - a = by' \Rightarrow \dfrac{z'-a}{b} = y'$

$g(z) = \dfrac{z'-a}{b} \Rightarrow z' = bg(z) + a$

Esempio 1 $y' = (x+y)^2$ non e' a variabili separabili

$z = x+y \Rightarrow z' = 1 + y' \Rightarrow z' - 1 = y'$

$z' - 1 = z^2$ andando a sostituire

$\Rightarrow z' = z^2 + 1$ a variabili separabili

$\dfrac{z'}{z^2+1} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{z^2+1}\, dz = \int 1\, dx$

$\operatorname{arctg} z = x + c \Rightarrow z = tg(x+c) \Rightarrow$

torno indietro $x + y = tg(x+c) \Rightarrow y = tg(x+c) - x$

Es 2 $y' = \dfrac{y}{x} \log\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right) \qquad z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \Rightarrow$

$y' = z'x + z \quad , \quad g(z) = z'x + z$

$z = \frac{y}{x} \qquad z' = \frac{y'x - y}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{z' x^2 + y}{x} = y'$

$\Rightarrow z'x + \frac{y}{x} = y' \Rightarrow z'x + z = y'$

$\Rightarrow z'x + z = z \log z$

$z'x = z \log z - z$

$z'x = z(\log z - 1) \Rightarrow z' = \frac{z(\log z - 1)}{x}$

e' a variabili separabili . Immediatamente $z = e$ e' soluzione di equilibrio

$$\frac{z'}{z(\log z - 1)} = \frac{1}{x}$$

$x > 0$

$$\int \frac{1}{z(\log z - 1)} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \log x + c$$

$\log(|\log z - 1|) = \log x + c$

$|\log z - 1| = e^{\log x + c}$

$\log z = (\pm c x) + 1$

$z = e^{\pm c x + 1} \Rightarrow y = lx e^{kx} \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Es 3 $\begin{cases} y'' + 2x(y')^2 = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

$z = y'$ $\qquad z' + 2xz^2 = 0$

$z' = -2xz^2$, $z = 0$ sol singolare $\Rightarrow y = \text{cost}$

$$\frac{z'}{z^2} = -2x$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{z} = -x^2 + C \Rightarrow z = \frac{1}{C + x^2}$$

$$z(0) = y'(0) = 1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$$

$$z = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y(x) = \arctan x + C$$

$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

Equazioni differenziali lineari

Si chiama equazione differenziale lineare di ordine m, un'equazione del tipo

$$y^{(m)} + a_{m-1}(x)\,y^{(m-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)$$

$a_{m-1} \ldots a_1, a_0(x)$ si chiamano coefficienti

Si chiama equazione lineare perché se chiamo

$$L(y) = y^{(m)} + a_{m-1}(x)\,y^{(m-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y$$

$L(y+z) = L(y) + L(z) \Rightarrow L$ è un operatore lineare perché la derivata è un operatore lineare

$$(y+z)' = y' + z' \qquad (y+z)^{(k)} = y^{(k)} + z^{(k)}.$$

Date due soluzioni di un'equazione differenziale lineare

$$L(y) = g \qquad L(z) = g$$

$\Rightarrow$ $y - z$ risolve $L(y-z) = 0$ e

l'equazione $L(w) = 0$ $w = y - z$ è detta

l'equazione omogenea associata a $L(y) = g$

TEOR Posto

$$F(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) = g(x) - a_{n-1}(x) y^{(n-1)} - \dots - a_1 y' - a_0 y$$

se $g(x)$, $a_i(x)$ sono continue in $[a;b]$ vale

il th. di esistenza e unicità globale

Dim Vale il th $\exists !$ globale se F è continua in $[a,b]$
e lo è perché è differenza di funzioni continue
e se è lipschitziana rispetto a $y, y', \dots y^{(n-1)}$

o analogamente $\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}$ sono limitate, ma

$\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = -a_k(x)$, continua in un compatto allora
limitata, dunque

$$\sup_{[a,b]} \left| \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right| = \max_{[a,b]} |a_k(x)| < C$$

$n = 1$

$$y' + a_0(x)\, y = g(x)$$

a_0, g funzioni continue in $[a,b]$

Sia $F(x,y) = g(x) - a_0(x)\, y$

F e' continua perché differenza di funzioni continue

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -a_0(x)$$ limitata in $[a,b]$ (continua in un compatto)

quindi vale il teor. di esistenza e unicità locale

$y' = F(x,y)$ ha soluzione

Vediamo come trovare le soluzioni ora che so che esistono

Equazioni lineari del I ordine

1) $y' + a_0(x)\, y = g(x)$ $\quad a_0, g$ continue in $[a,b]$

Sia $A_0(x)$ una primitiva di $a_0(x)$ (esiste perché è continua)

moltiplichiamo la nostra equazione per $e^{A_0(x)}$

$$\underbrace{y' e^{A_0(x)} + a_0(x) e^{A_0(x)} y}_{\frac{d}{dx}\left[y e^{A_0(x)}\right]} = g(x) e^{A_0(x)}$$

integro tra x_0 e x

$$y(x) e^{A_0(x)} = \int_{x_0}^{x} g(t) e^{A_0(t)} dt + C$$

$$y(x) = e^{-A_0(x)} \left[\int_{x_0}^{x} g(t) e^{A_0(t)} dt + C \right]$$

questo e' l'integrale generale di ①

ossero tutte le sue possibili soluzioni.

Es 1 $\quad y' - \frac{x}{1+x^2} y = 0$

$$a_0(x) = -\frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = 0$$

$$A_0(x) = \int -\frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

$$y(x) = e^{-A_0(x)} \left[\int 0 \cdot e^{A_0(x)} dx + C \right]$$

$$= e^{\frac{1}{2}\log(1+x^2)} C$$

$$= C\sqrt{1+x^2}$$

(2) $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ supp $x>0$

$a_0(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x$

$A_0(x) = \int \frac{1}{x} \, dx = \log|x$

$y(x) = e^{-\log x} \left[\int x e^{\log x} dx + C \right]$

$= \frac{1}{x} \left[\int x^2 dx + C \right] = \frac{1}{x} \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$

$= \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

Equazione di Bernoulli

$y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0$ (*)

se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ non è più un'equazione lineare

ma posso ricondurla ad una lineare

$z = y^{1-\alpha}$ $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

divido (*) per y^{α}

$\frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)y^{1-\alpha} + b(x) = 0$

e ottengo in termini di z

$$\frac{z'}{1-\alpha} + a(x) z + b(x) = 0$$

ed e' lineare, quindi la risolvo come prima.

Es 1 $\begin{cases} y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$\alpha = 2$ $\qquad z = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

$$-z' + \frac{2x}{1+x^2} z = 1$$

$$z' - \frac{2x}{1+x^2} z = -1$$

$a_0(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2}$ $\qquad g(x) = -1$

$$A_0(x) = -\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\log(1+x^2)$$

$$z(x) = e^{+\log(1+x^2)} \left[\int -1 \cdot e^{-\log(1+x^2)}\,dx + C \right]$$

$$= (1+x^2)\left[C - \operatorname{arctg} x\right]$$

$$\frac{1}{y} = (1+x^2)\left[C - \operatorname{arctg} x\right]$$

$$y(x) = \frac{1}{(1+x^2)\left[C - \operatorname{arctg} x\right]}$$

$$y(0) = 1$$

$$1 = \frac{1}{(1+0)\left[C - \operatorname{arctg} 0\right]} = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$$

$$y(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1 - \operatorname{arctg} x)}$$

Equazioni differenziali lineari di ordine $n=2$

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

Come si trovano le soluzioni ($\exists !$ vista prima)

STEP 1 Scrivere l'integrale generale di $L[y]=0$ (cioè risolvere l'eq. omogenea associata) che indichiamo y_0

STEP 2 trovare una soluzione di $L[y] = g$ che chiamiamo y_p soluzione particolare

Ora l'integrale generale dell'eq. $L[y] = g$ è dato dalla somma della soluzione omogenea y_0 e di una soluzione particolare y_p.

Infatti, se $v(x)$ e' soluzione di $L[v] = g$ allora $L[v - y_p] \underset{\text{lineare}}{=} L[v] - L[y_p]$

$$= g - g = 0$$

$\Rightarrow$ $v - y_p$ e' soluzione dell'omogenea associata (rientra nell'integrale generale di $L[y_0] = 0$)

Viceversa se $\bar{y}$ e' soluzione omogenea $L[\bar{y}] = 0$ allora $\bar{y} + y_p$ e' soluzione di $L[y] = g$.

Equazioni omogenee

Come trovare le soluzioni di $L[y_0] = 0$, ossia di

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (\text{om})$$

PROP Se y_1, y_2 sono sol di (om) $\Rightarrow$

$\alpha y_1 + \beta y_2$ e' sol di (om).

Dim $L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha y_1'' + \beta y_2'' +$

$+ a_1(x)(\alpha y_1' + \beta y_2') + a_0(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0$

$\Rightarrow \alpha \underbrace{L[y_1]}_{=0} + \beta \underbrace{L[y_2]}_{=0} = 0$

Definiamo

$$\mathcal{U} = \{ \bar{y} : [a,b] \to \mathbb{R} : \bar{y} \text{ e' sol di } (\text{O}\Omega) \}$$

allora $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ e' uno spazio vettoriale.

PROP 2 $(U, +, \cdot)$ ha dimensione 2 (n se l'eq. differenziale ha ordine n).

Significa che $\exists$ due soluzioni linearmente indipendenti, cioe'

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

Inoltre ogni altra soluzione di $(\text{O}\Omega)$ e' combinazione lineare di $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

Ricapitolando:

Se ho $L[y] = g(x)$
considero $L[y] = 0$ e $\exists\, n$ sol linearmente indipendenti $y_1 \dots y_n$

L'integrale generale di $(\text{O}\Omega)$ e' $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$.

trovo poi y_p sol di $L[y] = g$, l'integrale generale di $L[y] = g(x)$ sarà

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p$$

Non sempre però sappiamo risolvere $L[y]=0$.
Il caso più semplice è quello per $n=1$ (vedi sopra) e lo sappiamo fare se i coefficienti a_i sono costanti: $a_i(x)=c_i \in \mathbb{R}$ $\forall x \in [a,b]$

Equazioni differenziali lineari a coeff. costanti

Equazioni omogenee

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

$a_i \in \mathbb{R}$

Definiamo il polinomio caratteristico associato a (on):

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

e troviamo le radici λ_i

Per fissare le idee facciamolo per $n=2$

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

trovo sempre due sol λ_1 e λ_2

CASO 1 $\exists \lambda_1, \lambda_2$ reali e distinte

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

allora in questo caso le due sol linearmente indipendenti sono

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad e \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

CASO 2 $\exists \lambda_1$ radice doppia $(\lambda_1 = \lambda_2)$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$$

Le due sol. linearmente indipendenti sono

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$$

CASO 3 $\exists \lambda_1, \lambda_2$ radici complesse coniugate

$$\lambda_1 = a + ib \qquad \lambda_2 = a - ib$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Le due soluzioni sono linearmente indipendenti sono

$$y_1(x) = e^{ax} \cos(bx) \qquad y_2(x) = e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$$

Dim (per esercizio)

ES 1 $y'' - 8y' + 16y = 0$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \implies (\lambda - 4)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4 \qquad \text{(caso 2)}$$

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$$

2 $y'' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda = \pm 2i$$

$$a = 0 \qquad b = 2$$

$y_1 = e^{0 \cdot x} \cos(2x) \qquad y_2 = e^{0x} \operatorname{sen}(2x)$

$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x).$

③ $y'' + 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow -2 \end{matrix}$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2$

$y_1 = e^{-x} \qquad y_2 = e^{-2x} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

④ $y'' + y' + y = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$= -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

$a = -\dfrac{1}{2} \qquad b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Equazioni non omogenee

$$L[y] = y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

y_1, y_2 soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $\Rightarrow$

l'integrale generale è $\underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}_{(*)} + \underbrace{y_p(x)}_{(**)}$

(*) integrale generale eq. omogenea associata

(**) soluzione particolare eq. non omogenea.

Come si trova una soluzione particolare?

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Sia $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$

Imponiamo che sia soluzione di $L[y] = g$

$$y_p' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

imponiamo che $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$

$$\Rightarrow y_p' = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

Deriviamo di nuovo

$$y_p'' = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_2''(x)$$

essendo y_1 e y_2 soluzioni dell'omogenea

$$y''_1 = -a_1 y_1' - a_0 y_1$$

$$y''_2 = -a_1 y_2' - a_0 y_2$$

$$\Rightarrow y''_p = C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_1(x)\left(-a_1 y_1' - a_0 y_1\right) + C_2(x)\left(-a_1 y_2' - a_0 y_2\right)$$

$$\Rightarrow y''_p = C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) - a_1 \big(\underbrace{C_1 y_1' + C_2 y_2'}_{y_p'}\big) + - a_0 \big(\underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{y_p}\big)$$

$$\Rightarrow y''_p = C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) - a_1 y_p' - a_0 y_p$$

$$\Rightarrow \underbrace{y''_p + a_1 y_p' + a_0 y_p}_{= g(x) \iff y_p \text{ è soluzione}} = C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x)$$

Quindi y_p è soluzione se

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$

sistema nelle incognite $C_1'(x)$, $C_2'(x)$

Sia $W(x)$ il determinante dei coefficienti

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \quad ; \quad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

Es 1 $y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x$

(1) sol omogenea $y'' + 2y' + y = 0$

trovo le sol del polinomio caratteristico

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

radice doppia

$y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = x e^{-x}$

(2) cerco una sol particolare del tipo $y_p(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}$

Imposto il sistema
$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) = e^{-x} \log x \end{cases}$$

$y_1' = -e^{-x}$ $\qquad y_2' = e^{-x} - x e^{-x}$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) x e^{-x} = 0 \\ -C_1(x) e^{-x} + C_2(x) (e^{-x} - x e^{-x}) = 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x}$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\log x & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-xe^{-2x}\log x}{e^{-2x}}$$

$$= -x\log x$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\log x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{e^{-2x}\log x}{e^{-2x}}$$

$$= \log x$$

$$C_1(x) = -\int x\log x\,dx \overset{P.P}{=} -\frac{x^2}{2}\log x + \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}$$

$$C_2(x) = \int \log x \overset{P.P}{=} x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log x - x$$

$$y_p(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}\right)e^{-x} + (x\log x - x)xe^{-x}$$

l'integrale generale è $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4} + \log x - 1\right)$$

$$= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}\left(\frac{1}{2}\log x - \frac{3}{4}\right)$$

Es 2 $\quad y'' + y = \log(\operatorname{sen} x)$

1. $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ radici complesse coniugate

$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x$

2. $y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ -C_1'(x)\operatorname{sen} x + C_2'(x)\cos x = \log(\operatorname{sen} x) \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \log(\operatorname{sen} x) & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1} = \operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x)$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \log(\operatorname{sen} x) \end{vmatrix}}{1} = \cos x \log(\operatorname{sen} x)$$

$$c_1(x) = \int \operatorname{sen}x \log(\operatorname{sen}x)\, dx$$

$$\overset{p.p}{=} -\cos x \log(\operatorname{sen}x) + \int \cos x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2 x} \cos^2 x\, dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}x}{(1-\cos^2 x)} \cos^2 x\, dx$$

$$\cos x = t \Rightarrow -\operatorname{sen}x\, dx = dt$$

$$\int \frac{-t^2}{1-t^2}\, dt = \int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt$$

$$= \int 1 + \frac{1}{t^2-1}\, dt$$

$$= t + \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\, dt$$

$$\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{1}{t^2-1}$$

$$(A+B)t + A - B = 1 \qquad \begin{cases} A = -B \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\, dt$$

$$= t + \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1|$$

$$\Rightarrow \cos x + \frac{1}{2}\log(\cos x - 1) - \frac{1}{2}\log(\cos x + 1) = C_1(x)$$

$$C_2(x) = \int \cos x \log(\operatorname{sen} x)\, dx$$

$$\overset{P.P}{=} \operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x) - \int \operatorname{sen} x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx$$

$$= \operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x .$$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + y_p(x).$$

METODO DI SOMIGLIANZA

$$y'' + a y' + b y = g(x)$$

Se $g(x)$ e' una particolare funzione, posso trovare y_p seguendo questo metodo

① $g(x) = e^{\lambda x}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

1.1 λ non e' soluzione del polinomio caratteristico $\Rightarrow$

$$y_p(x) = A e^{\lambda x}$$

1.2 λ e' soluzione del polinomio caratteristico $\Rightarrow$

$$y_p(x) = A x^k e^{\lambda x} \quad (k \text{ molteplicità di } \lambda,\ k = 1, 2, \dots)$$

Es 1 $y'' - 2y' + y = e^{-x}$

$g(x) = e^{-x}$ $\qquad \lambda = -1$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\qquad$ sol doppia

$y_1 = e^x$, $\quad y_2 = xe^x$

ma $\lambda_{1,2} \neq \lambda = -1$ quindi siamo nel caso 1.1

$y_p(x) = A e^{-x}$, deve essere sol quindi la metto nell'equazione

$$+Ae^{-x} + 2Ae^{-x} + Ae^{-x} = e^{-x}$$

$4Ae^{-x} = e^{-x} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y_p = \frac{1}{4}e^{-x}$

$y(x) = y_0 + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$

$= C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + \frac{1}{4} e^{-x}$

Es 2 $\quad y'' - 3y' + 2y = e^{x}$

$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad$ (OM)

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix} \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$

$y_1 = e^{x} \qquad y_2 = e^{2x} \Rightarrow y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

troviamo la particolare, sapendo che $g(x) = e^{x}$

quindi sol tipo $e^{\lambda x}$ con $\lambda = 1 = \lambda_1$ quindi

siamo nel caso 1.2

$y_p(x) = Axe^{x}$ e impongo che sia sol

$y_p' = Ae^{x} + Axe^{x} \qquad y_p'' = Ae^{x} + Ae^{x} + Axe^{x}$

$2Ae^{x} + \cancel{Axe^{x}} - 3Ae^{x} - \cancel{3Axe^{x}} + \cancel{2Axe^{x}} = e^{x}$

$-Ae^{x} = e^{x} \Rightarrow A = -1 \Rightarrow y_p = -xe^{x}$

l'integrale generale e': $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - xe^{x}$

② $g(x) = P_m(x)\, e^{\lambda x}$ $\quad$ P_m polinomio di grado m

2.1 $\quad y_p(x) = Q_m(x)\, e^{\lambda x}$ $\quad$ se λ non e' sol del polinomio caratteristico

2.2 $\quad y_p(x) = Q_m\, x^k e^{\lambda x}$ $\quad$ se λ e' sol del polinomio caratteristico di molteplicita' k

Q_m e' il generico polinomio dello stesso grado di $P_m(x)$.

Es 1 $\quad y'' - 2y' + y = e^x(x+1)$

$$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \text{ doppia}$$

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$g(x) = e^x (x+1) \qquad P_m(x) = x+1 \text{ di grado } 1\ (m=1)$$

$\lambda = 1 = \lambda_{1,2}$ $\quad$ quindi siamo nel caso 2.2

$$y_p(x) = Q_m\, x^k e^{\lambda x} \Rightarrow Q_m = Q_1 = Ax + B$$
$$k = 2, \quad \lambda = 1$$

$$y_p(x) = (Ax+B)\, x^2 e^x = (Ax^3 + Bx^2) e^x$$

$$y_p' = (3Ax^2 + 2Bx + Ax^3 + Bx^2) e^x$$

$$y_p'' = (6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 2Bx + Ax^3 + Bx^2) e^x$$

$$\Rightarrow y_p'' - 2y_p' + y_p = e^x (x+1)$$

$$[6Ax + 2B + \cancel{3Ax^2} + \cancel{2Bx} + \cancel{3Ax^2} + \cancel{2Bx} + \cancel{Ax^3} + \cancel{Bx^2} +$$
$$- \cancel{6Ax^2} - \cancel{4Bx} - \cancel{2Ax^3} - \cancel{2Bx^2} + \cancel{Ax^3} + \cancel{Bx^2}]\, e^x =$$
$$e^x(x+1)$$

$$6Ax + 2B = x+1 \Rightarrow \begin{cases} 6A = 1 & \Rightarrow A = \frac{1}{6} \\ 2B = 1 & \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right) x^2 e^x$$
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right) x^2 e^x$$

(3) $g(x) = e^{\lambda x}\left(\alpha \operatorname{sen}(\mu x) + \beta \cos(\mu x)\right)$ $\mu \neq 0$

3.1 $\lambda + i\mu$ non e' sol di $P(\lambda) = 0 \Rightarrow$

$$y_p(x) = e^{\lambda x}\left(A \operatorname{sen}(\mu x) + B \cos(\mu x)\right)$$

3.2 $\lambda + i\mu$ e' soluzione del polinomio caratteristico

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = x e^{\lambda x}\left(A \operatorname{sen}(\mu x) + B \cos(\mu x)\right)$$

con A e B da determinare

Es 1 $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$

(om) $y'' + 4y = 0 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$$

$g(x) = \operatorname{sen} x \qquad \lambda = 0 \qquad \mu = 1$

$\lambda + i\mu = i$ è sol? no quindi siamo nel caso 3.1

$y_p(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$

$y'_p = A \cos x - B \operatorname{sen} x \qquad y''_p = -A \operatorname{sen} x - B \cos x$

$\Rightarrow -A \operatorname{sen} x - B \cos x + 4A \operatorname{sen} x + 4B \cos x = \operatorname{sen} x$

$3A \operatorname{sen} x + 3B \cos x = \operatorname{sen} x$

$A = \frac{1}{3}$

$B = 0$

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{3} \operatorname{sen} x$

4) $g(x) = e^{\lambda x} \left(P_m(x) \operatorname{sen}(\mu x) + Q_m(x) \cos(\mu x) \right)$

P_m e Q_m polinomi di grado m

4.1 $\lambda + i\mu$ non è sol di $P(\lambda) = 0 \Rightarrow$

$y_p(x) = e^{\lambda x} \left(R_m(x) \operatorname{sen}(\mu x) + S_m(x) \cos(\mu x) \right)$

4.2 $\lambda + i\mu$ è sol di $P(\lambda) = 0 \Rightarrow$

$y_p(x) = x e^{\lambda x} \left(R_m(x) \operatorname{sen}(\mu x) + S_m(x) \cos(\mu x) \right)$

$R_m(x)$ e $S_m(x)$ sono generici polinomi di grado al più m.

Es 1 $\quad y'' + 2y' + y = x\,\text{sen}x + \cos x$

(OM) $\quad y'' + 2y' + y = 0 \,,\; P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$ doppie

$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

$g(x) = x\,\text{sen}x + \cos x$

$\lambda = 0 \qquad \mu = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad Q_0(x) = 1$

$\lambda + i\mu = i$ non e' sol di $P(\lambda) = 0$ quindi

caso 4.1

$y_p(x) = (Ax+B)\,\text{sen}x + (Cx+D)\cos x$

$y_p' = A\,\text{sen}x + C\cos x + (Ax+B)\cos x - (Cx+D)\,\text{sen}x$

$= (A - D - Cx)\,\text{sen}x + (B + C + Ax)\cos x$

$y_p'' = -C\,\text{sen}\,x + A\cos x + (A - D - Cx)\cos x - (B+C+Ax)\,\text{sen}x$

$\Rightarrow \text{sen}x\,(-C - Ax - B - C + 2A - 2D - 2(x + Ax + B) +$

$\cos x\,(A - D - Cx + A + 2B + 2C + 2Ax + D + Cx) =$

$= x\,\text{sen}x + \cos x$

$$\begin{cases} -2C = 1 \\ -2C + 2A - 2D = 0 \\ 2A = 0 \\ 2A + 2B + 2C = 1 \end{cases}$$

$A = 0$

$B = 1$

$C = -\frac{1}{2}$

$D = \frac{1}{2}$

$$y_p(x) = \operatorname{sen} x + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\cos x$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}(1 - x)\cos x$$