FISICA GENERALE I

Annalisa Allocca

Università degli Studi di Napoli,
Compl. Univ. Monte S.Angelo – Dipartimento di Fisica
Via Cinthia, I-80126, Napoli

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
sez. Napoli
Studio: 1G16, Edificio 6
+39-081-676345
annalisa.allocca@unina.it

Organizzazione

- **Sito web:** www.docenti.unina.it/annalisa.allocca
  - La registrazione al sito si può effettuare inserendo numero di matricola e pin oppure tramite SPID per chi non fosse ancora in possesso di matricola
  - Il materiale didattico si trova sulla pagina web

- **Libri di testo adottati:**
  - Mazzoldi, Nigro, Voci «Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica» Vol. 1 - Edises Napoli
  - Halliday, Resnick, Walker «Fondamenti di Fisica» - Ambrosiana Milano
  - Serway, Jewett «Principi di Fisica» - Edises Napoli

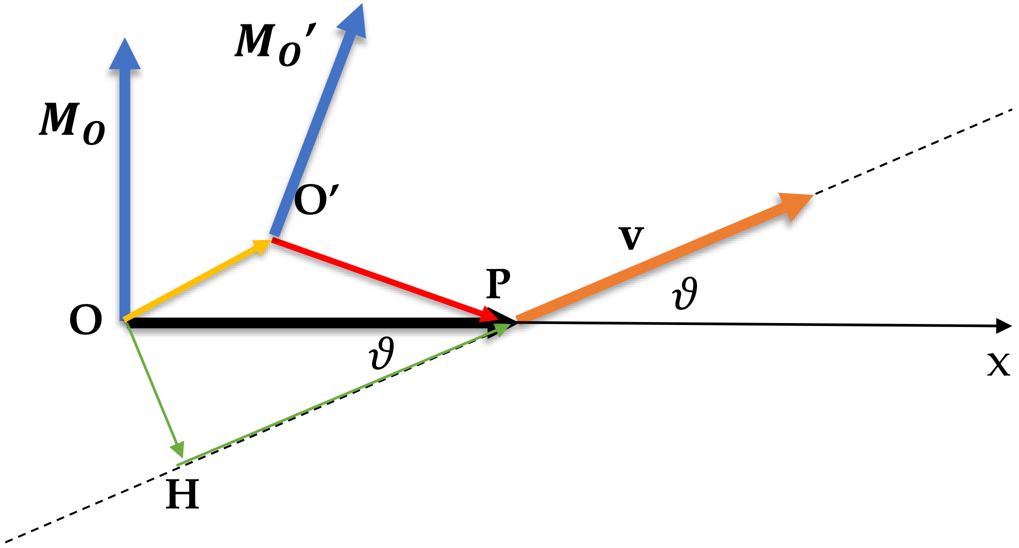
Argomenti di oggi:

- Momento di un vettore
- Dinamica dei sistemi di punti materiali
  - Conservazione della quantità di moto
  - Teorema del momento angolare
  - Conservazione del momento angolare
  - Sistema di riferimento del centro di massa
  - Teoremi di Koenig

Mazzoldi, Nigro, Voci, cap 5

Momento di un vettore rispetto ad un polo

Momento di un vettore rispetto al polo O'

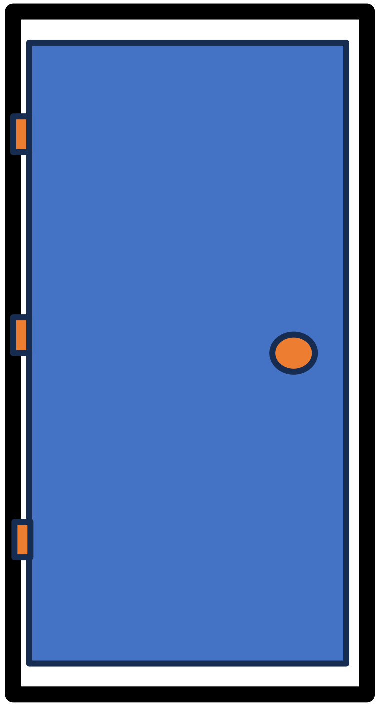


$$\vec{M}_{O'} = \overrightarrow{O'P} \times \vec{v}$$

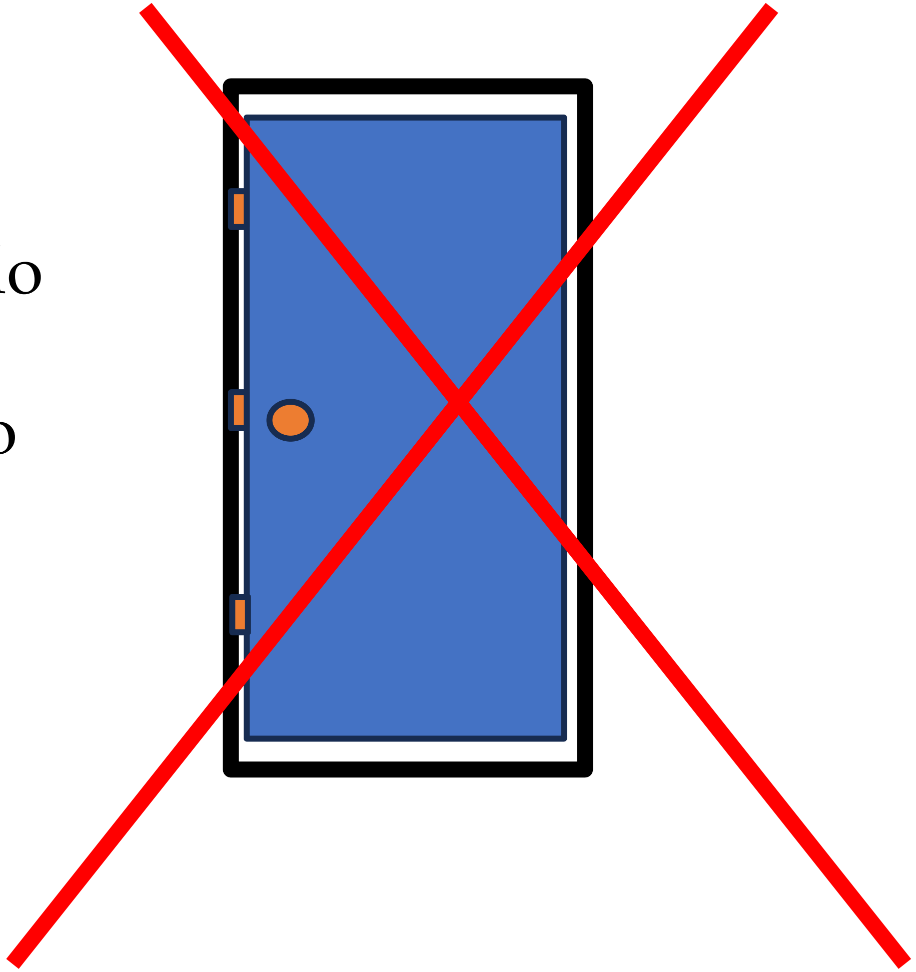
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{v} = \overrightarrow{OO'} \times \vec{v} + \overrightarrow{O'P} \times \vec{v} = \overrightarrow{OO'} \times \vec{v} + \vec{M}_{O'}$$

Il momento di un vettore dipende dal polo che si sceglie

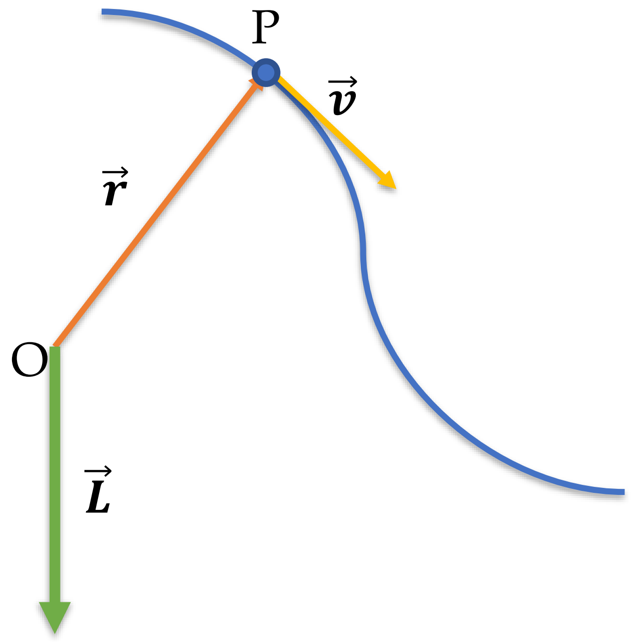


Perché il pomello
della porta è
sempre lontano
dalle cerniere?



Momento angolare

Momento del vettore *quantità di moto*



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Unità di misura:
$[L] = m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} = N \cdot \mathrm{m} \cdot s$

Teorema del momento angolare

Calcoliamo la variazione del momento angolare nel tempo:

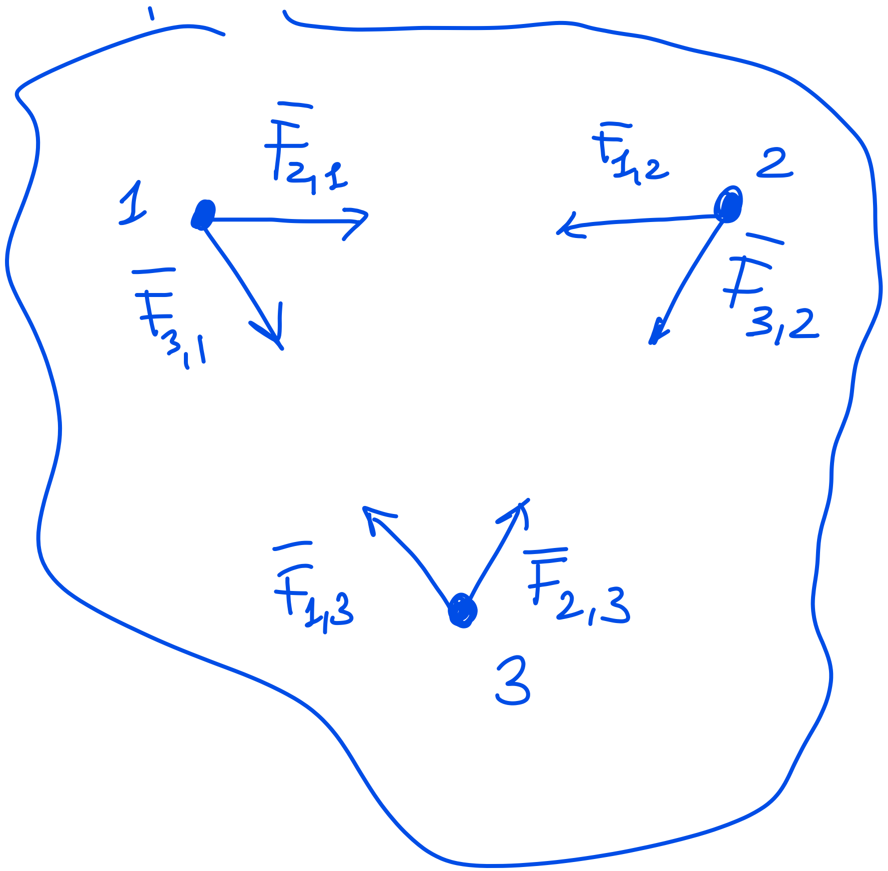
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \times} m\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{r}} \times m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{r}} \times m\vec{\boldsymbol{a}}$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{L}} = costante$$

Se il momento delle forze esterne è nullo, il momento angolare del sistema **si conserva**

Sistemi di punti materiali

Sistemi di punti: forze interne e forze esterne



$$\bar F_{i,j} = -\bar F_{j,i}$$

$$i = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$j = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar F_{i,j} = 0$$

$$i \neq j$$

i •

$$m_i \bar a_i = \bar F_i^{(I)} + \bar F_i^{(E)}$$

Sistemi di punti: forze interne e forze esterne

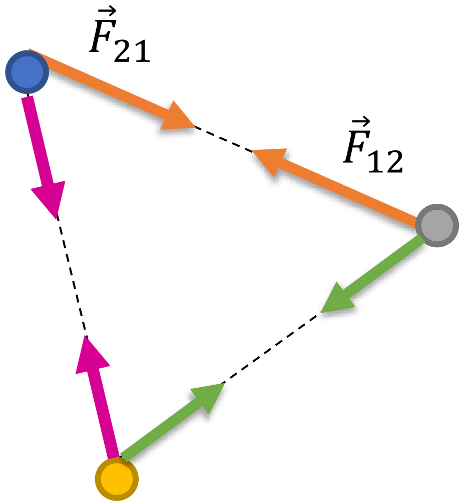
Sistemi di punti: forze interne e forze esterne

- Forza agente sul singolo punto: somma di forze interne ed esterne

$$\vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{F}}_i^{Ext} + \vec{\boldsymbol{F}}_i^{Int}$$

- La somma di tutte le forze interne al sistema è nulla
- Per ciascun punto del sistema si può definire:

  - Posizione rispetto ad un punto O $\quad \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$
  - Velocità $\quad \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$
  - Accelerazione $\quad \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{i}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{F}}_i}{m_i}$
  - Quantità di moto $\quad \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} = m_i \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$
  - Momento angolare $\quad \vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times m_i \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$
  - Energia cinetica $\quad E_k = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

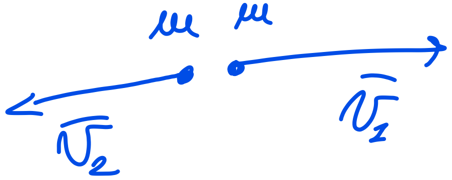


Sistemi di punti: forze interne e forze esterne

- Per il sistema <u>complessivo</u>:

$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \Rightarrow m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 0$

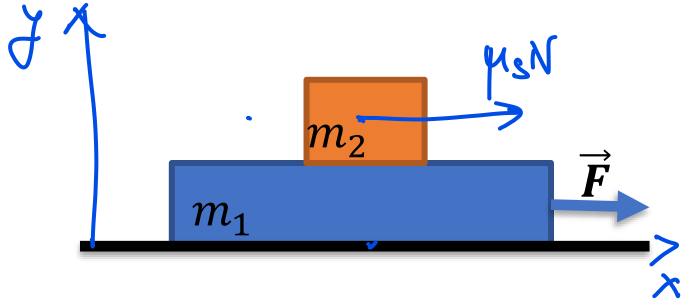
  - Quantità di moto **totale**: $\vec{\boldsymbol{P}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{i}} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$



  - Momento angolare **totale**: $\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_{\boldsymbol{i}} \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times m_i \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$
    (rispetto ad un polo coincidente con l'origine)

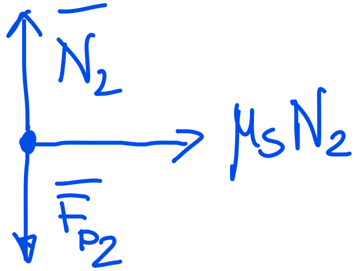
  - Energia cinetica **totale**: $E_k = \sum_i E_{k,i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, v_i^2$

Esempio: due corpi sovrapposti in moto su un piano orizzontale



Dato il sistema composto dalle masse $m_1 = 3\text{kg}$ e $m_2 = 1kg$, determinare la forza massima $\vec{F}$ che si può applicare al sistema affinché il blocco superiore non scivoli su quello inferiore, considerando che il coefficiente di attrito statico tra le superfici delle due masse è $\mu_s = 0.5$. La superficie di contatto tra m_1 e il pavimento è liscia.

(2) $\sum \vec{F} = m_2 \vec{a}$



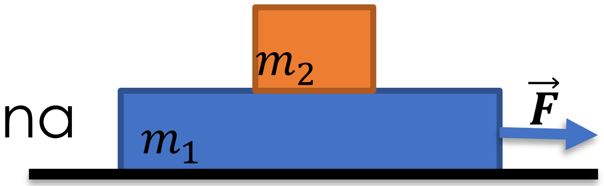
$$\begin{cases} \sum F_x = m_2 a_x \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = \cancel{m_2} a_x = \mu_s N_2 = \mu_s \cancel{m_2} g \Rightarrow a_x = \mu_s g \\ \sum F_y = 0 = m_2 g = N_2 \end{cases}$$

$$F = (m_1 + m_2) a$$
$$= (m_1 + m_2) \mu_s g$$

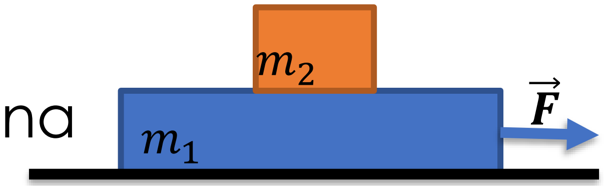
Esempio: due corpi sovrapposti in moto su un piano orizzontale

Un corpo di massa m_1 scivola su un piano orizzontale liscio sotto l'azione della forza esterna $\vec{\boldsymbol{F}}$; sul corpo è poggiato un secondo corpo di massa m_2, che scivola rispetto ad m_1. Tra m_1 e m_2 esiste una forza di attrito radente con coefficiente μ_d. Calcolare le accelerazioni dei due corpi.



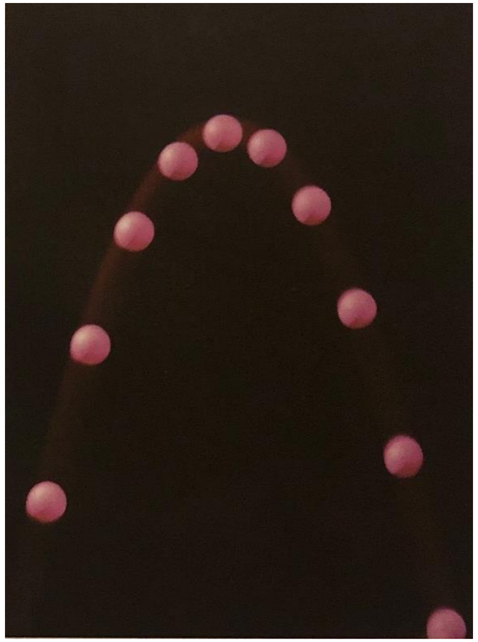
Esempio: due corpi sovrapposti in moto su un piano orizzontale

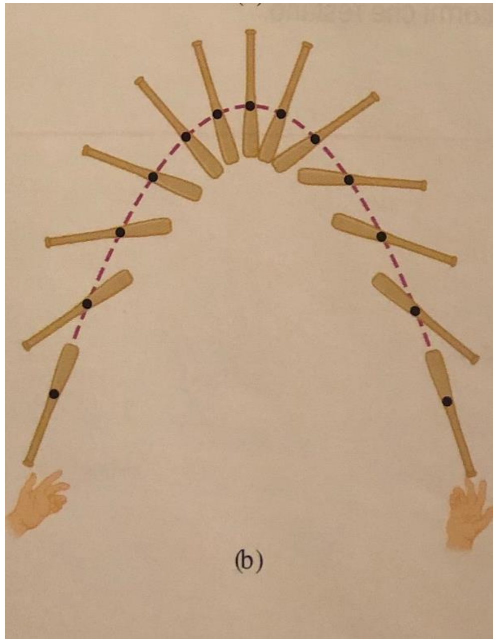
Un corpo di massa m_1 scivola su un piano orizzontale liscio sotto l'azione della forza esterna $\vec{\boldsymbol{F}}$; sul corpo è poggiato un secondo corpo di massa m_2, che scivola rispetto ad m_1. Tra m_1 e m_2 esiste una forza di attrito radente con coefficiente μ_d. Calcolare le accelerazioni dei due corpi.



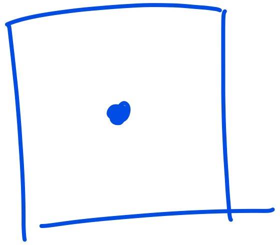
Centro di massa

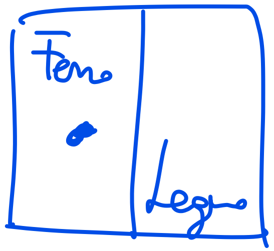
Moto di una pallina e di una mazza da baseball

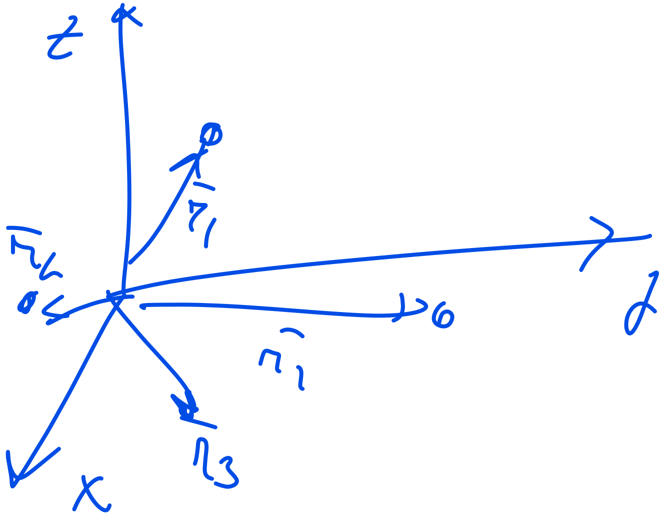


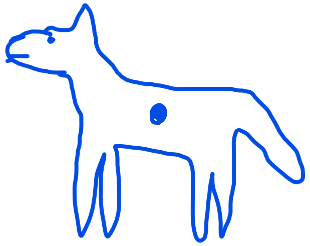


Centro di massa





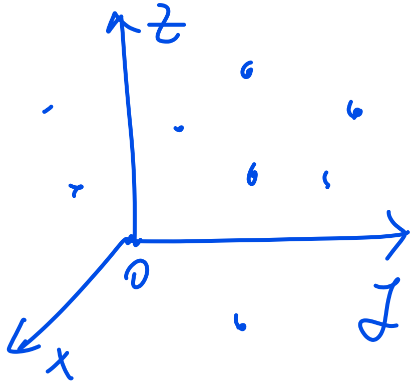




Centro di massa

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} =$$

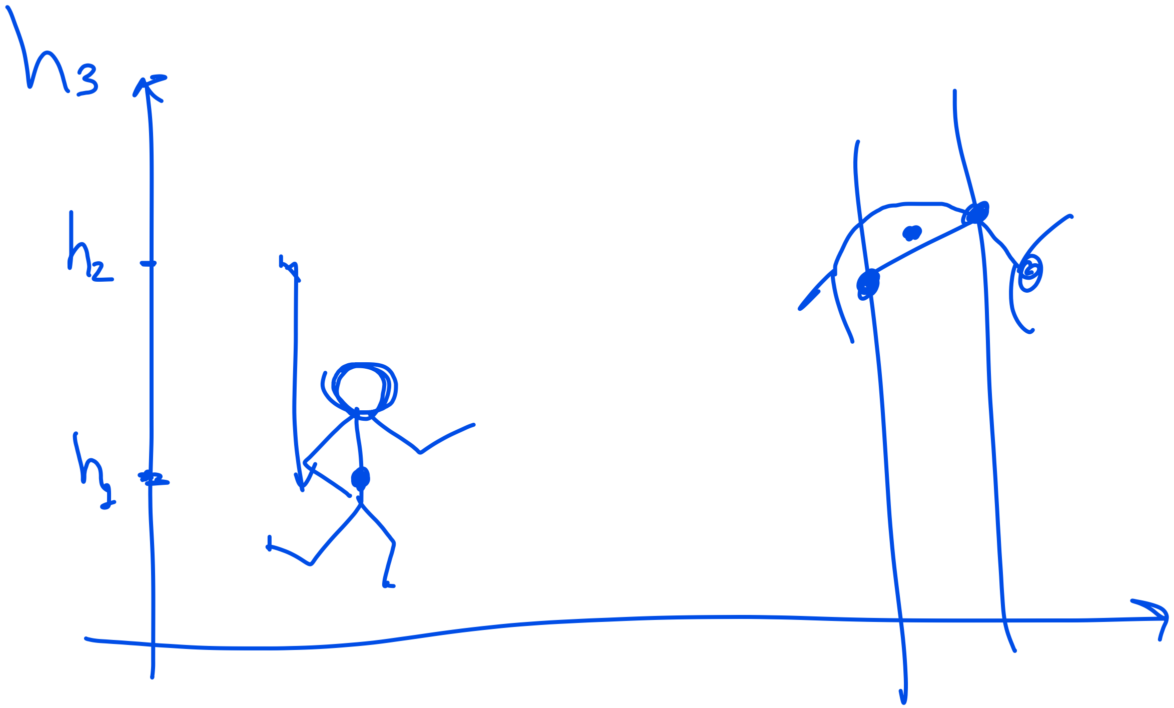
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

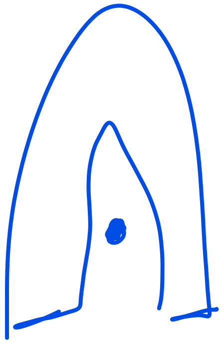


Centro di massa

Figura 9.6 Il *grand jeté*. (Adattato da Laws K., *The Physics of Dance*, Schirmer Books 1984.)

Centro di massa

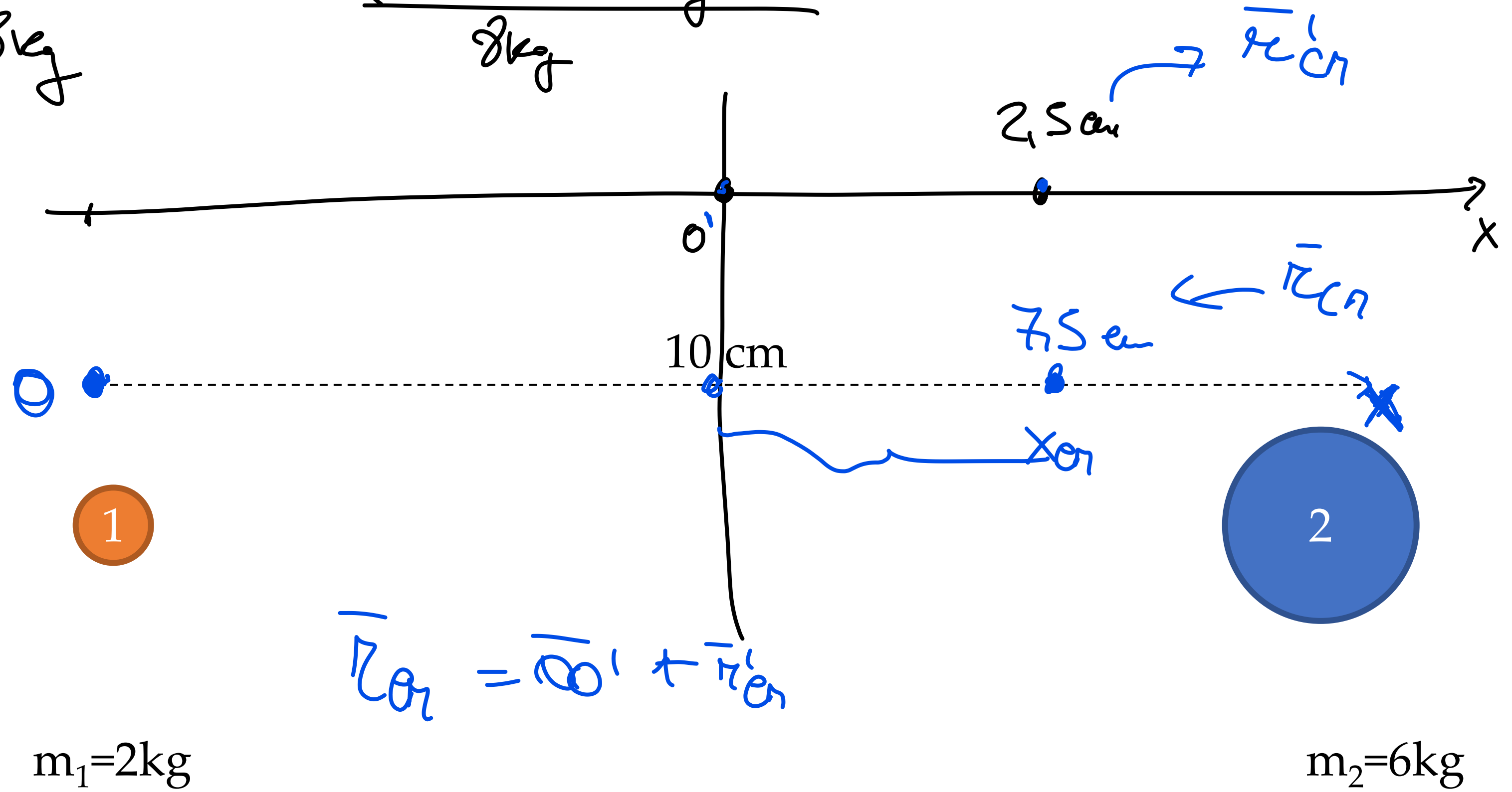




Centro di massa di un sistema di punti

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{6\,\text{kg} * 10\,\text{cm}}{8\,\text{kg}} = \frac{60\ \text{kg}\cdot\text{cm}}{8\,\text{kg}} = 7{,}5\,\text{cm}$$

$$x_{cm} = \frac{2\,\text{kg}(-5\,\text{cm}) + 6\,\text{kg}\ 5\,\text{cm}}{8\,\text{kg}} = \frac{(-10+30)\,\text{kg}\cdot\text{cm}}{8\,\text{kg}} = 2{,}5\,\text{cm}$$



$$\bar{r}_{cm} = \overline{OO'} + \bar{r}'_{cm}$$

Centro di massa di un sistema di punti

Definiamo centro di massa di un sistema di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata dal raggio vettore:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \vec{\boldsymbol{r}}_2 + \ \ldots + \ m_n \vec{\boldsymbol{r}}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

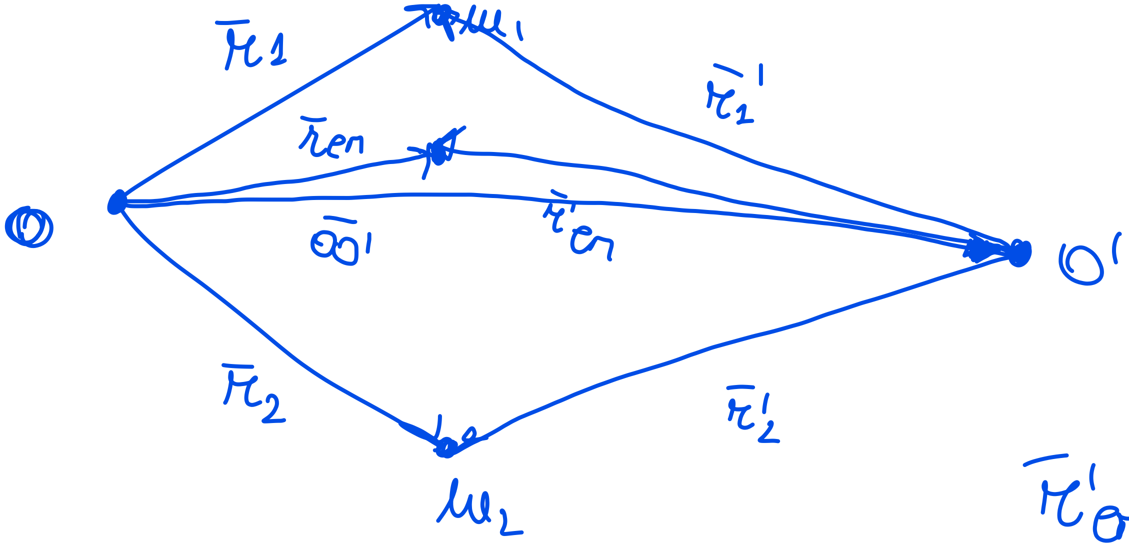
In coordinate cartesiane avremo:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

La posizione «fisica» del centro di massa non dipende dal sistema di riferimento, mentre le coordinate variano a seconda del sistema prescelto

Centro di massa di un sistema di punti

Posizione del centro di massa rispetto ad un riferimento O’



$$\bar r_1 = \bar r'_1 + \overline{OO'}$$

$$\bar r_i = \bar r'_i + \overline{OO'}$$

$$\bar r'_i = \bar r_i - \overline{OO'} = \bar r_i + \overline{O'O}$$

$$\bar r'_{cm} = \frac{\sum_i m_i \bar r'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\bar r_i + \overline{O'O})}{\sum_i m_i} =$$

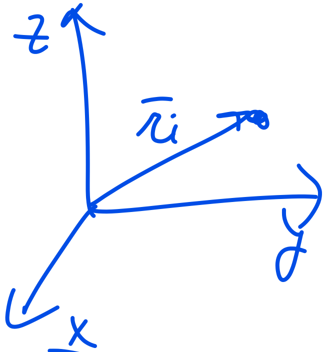
$$= \boxed{\frac{\sum_i m_i \bar r_i}{\sum_i m_i}} + \frac{\sum_i \cancel{m_i} \cdot \overline{O'O}}{\cancel{\sum_i m_i}}$$

$\bar r_{cm} \leftarrow$

Velocità e accelerazione del centro di massa

$\bar{r}_{cm}$

$$M = \sum_i m_i$$



$$\bar{v}_{cm} = \frac{d\bar{r}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i} \leftarrow \frac{\sum_i \bar{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\bar{P}}{M}$$

$$\bar{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i a_i}{\sum_i m_i} = \frac{\underbrace{\cancel{\sum_i \bar{F}_i^I}}_{0} + \sum_i \bar{F}_i^{Ex}}{\sum_i m_i} = \frac{\bar{F}^{Ex}_{tot}}{M}$$

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^I + \bar{F}_i^{Ex}$$

$$M\bar{a}_{cm} = \bar{F}^{Ex}_{tot}$$

Teorema del moto del centro di massa

Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne

Teorema del moto del centro di massa

Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne:

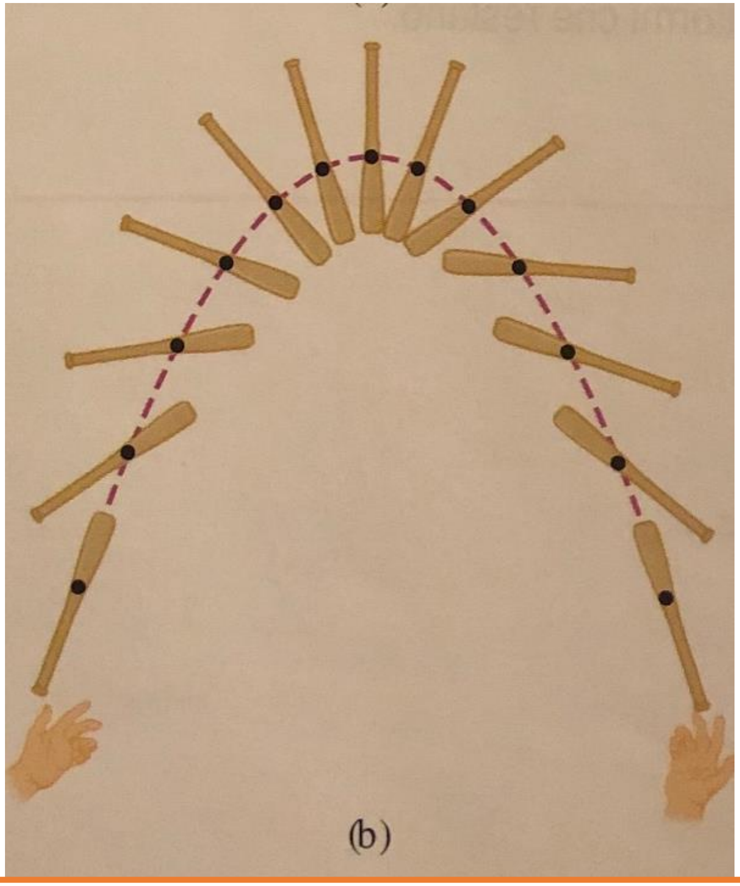
$$m\vec{\boldsymbol{a}}_{CM} = \vec{\boldsymbol{F}}^{EXT}$$

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{EXT} = m\vec{\boldsymbol{a}}_{CM} = m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt}$$

La risultante delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema

Proprietà del centro di massa



Nel suo complesso, il sistema si muove *in media* con velocità $\vec{v}_{CM}$ e accelerazione $\vec{a}_{CM}$ ($\vec{r}_{CM}$, $\vec{v}_{CM}$ e $\vec{a}_{CM}$ sono *medie pesate*)

- L'azione delle forze interne non può modificare lo stato di moto del centro di massa
- Su ciascun punto singolo del sistema agiscono sia le forze interne che quelle esterne
- La definizione di centro di massa è *matematica*: non esiste il «punto materiale centro di massa»
- La quantità di moto del centro di massa $m\vec{v}_{CM}$ è uguale alla quantità di moto totale del sistema $\vec{P}$
- L'accelerazione del centro di massa dipende dalla somma delle forze esterne agenti sul sistema $m\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{EXT}$

Conservazione della quantità di moto

- Se la somma delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema si conserva → il centro di massa resta in quiete o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme

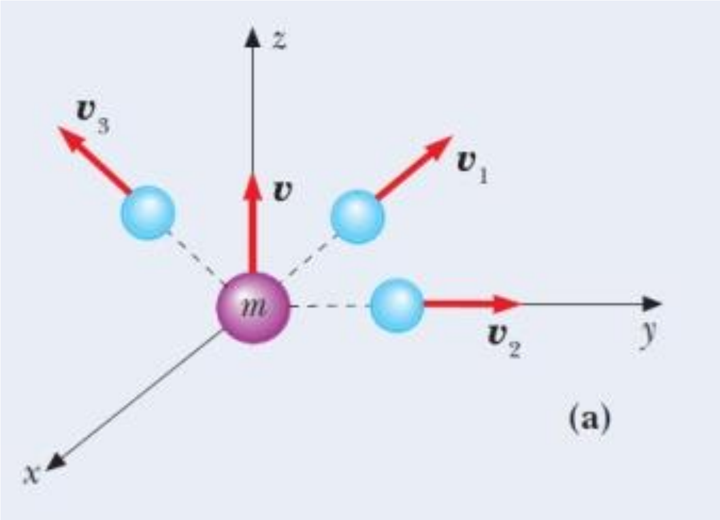
Conservazione della quantità di moto

- Se la somma delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema si conserva → il centro di massa resta in quiete o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme

- Può esserci conservazione della quantità di moto anche solo lungo una direzione: ad es, $F_x = 0$ implica la conservazione del momento solo lungo la direzione x

Esempio: un razzo esplode in aria

Un razzo di massa m, quando raggiunge una certa altezza con velocità $\vec{\boldsymbol{v}} = v_0\overrightarrow{\boldsymbol{u}_z}$ con v_0=400m/s, esplode in tre frammenti di eguale massa. Al momento dell'esplosione, un frammento ha velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_\mathbf{1} = -300\vec{\boldsymbol{u}}_x\, m/s$, un altro $\vec{\boldsymbol{v}}_\mathbf{2} = 450\vec{\boldsymbol{u}}_y\, m/s$ e il terzo $\vec{\boldsymbol{v}}_\mathbf{3}$. Calcolare il modulo della velocità del terzo frammento e la sua direzione θ rispetto alla direzione di moto del razzo. Calcolare inoltre la massima quota raggiunta dal centro di massa rispetto al punto di esplosione e il tempo impiegato per raggiungerla.



Teorema del momento angolare

Teorema del momento angolare

Teorema del momento angolare

Teorema del momento angolare

Teorema del momento angolare

Dato il momento angolare del sistema di punti materiali

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times m\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$$

Dalla sua derivata temporale ricaviamo:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}{dt} \times m\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}\right) + \left(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}}{dt}\right)$$

Dimostrando che il momento totale delle forze interne è nullo, troviamo che

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{ext}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} \times M\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}^{ext} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} \times M\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}}$$

Se:

- Il polo O è fisso, o
- Il centro di massa non si muove, o
- Il centro di massa coincide con il polo O, o
- La velocità del centro di massa e quella del polo sono parallele

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}^{ext}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Conservazione del momento angolare

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = 0 \text{ implica che } \vec{\boldsymbol{L}} \text{ è } costante$$

Principio di conservazione del momento angolare

Esempio: due punti materiali fissati ad una sbarra che ruotano

Due punti materiali di egual massa *m=0.2kg* sono legati da una sbarretta di massa trascurabile, e ruotano senza attrito su un piano orizzontale rispetto al centro della sbarretta. Nella situazione iniziale la sbarretta è lunga $2r_1$=30cm e la velocità angolare ha il valore costante $\omega_1 = 3\, rad/s$. Supponiamo che la sbarra sia telescopica e che durante il moto la lunghezza venga portata ad un valore $2r_2$=50cm. Calcolare il valore finale della velocità angolare ω_2.

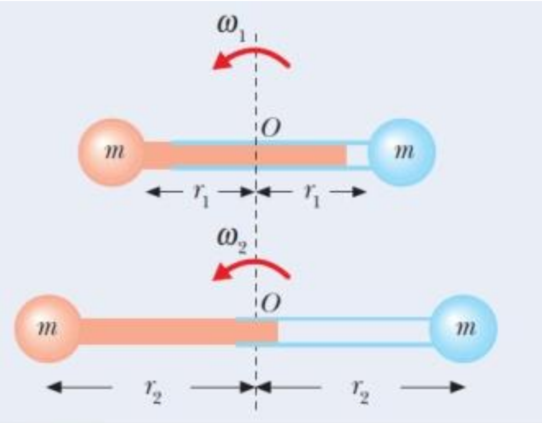


Figura 5.18

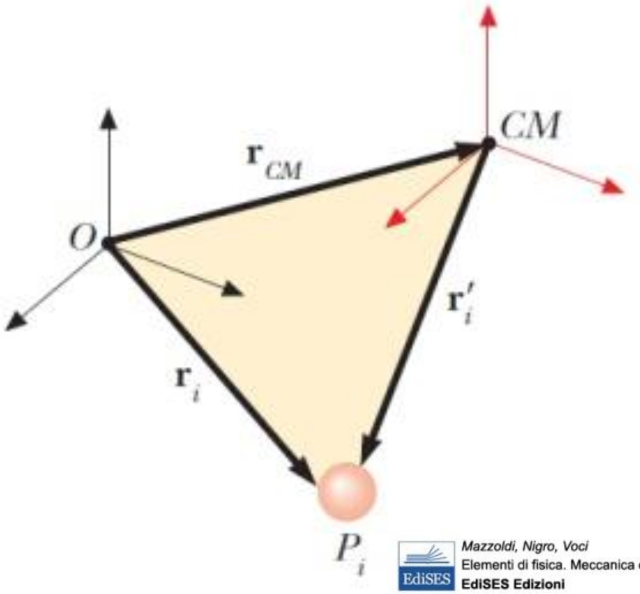
Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Sistema di riferimento del centro di massa

- Origine nel centro di massa
- Gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto a quelli del sistema di riferimento fisso e possono essere presi paralleli a questi ultimi
- In generale, è un sistema non inerziale. Solo se la risultante delle forze esterne è zero, sarà nulla l’accelerazione del centro di massa, quindi il sistema sarà inerziale.

Sistema di riferimento del centro di massa

Sistema di riferimento del centro di massa



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

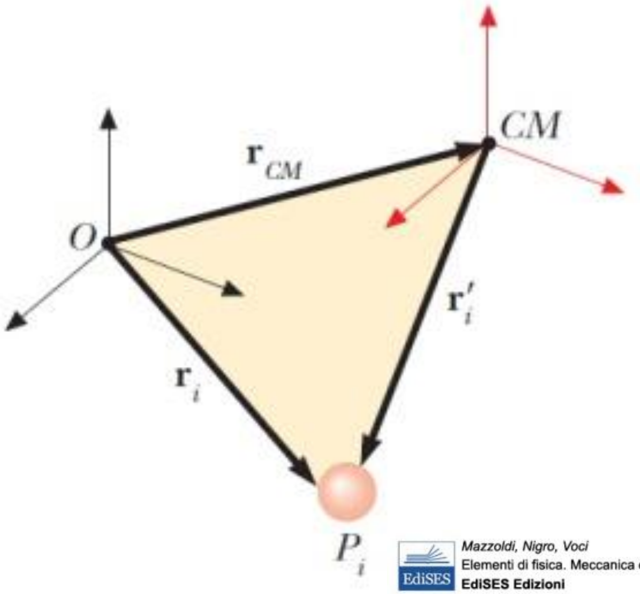
Sistema di riferimento del centro di massa

Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i + \vec{r}'_{CM} \qquad \vec{v}'_i = \vec{v}'_i + \vec{v}'_{CM}$$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Sistema di riferimento del centro di massa

Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

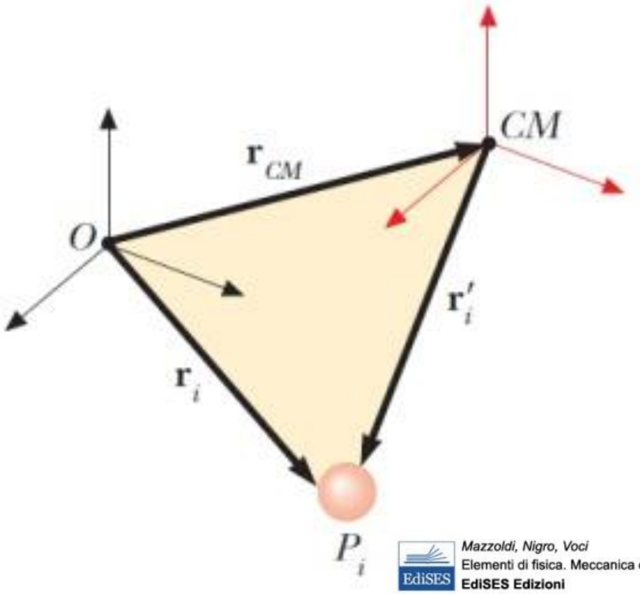
$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i + \cancel{\vec{r}'_{CM}} \qquad \vec{v}'_i = \vec{v}'_i + \cancel{\vec{v}'_{CM}}$$

La quantità di moto totale del sistema risulta sempre nulla nel sistema di riferimento del centro di massa

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

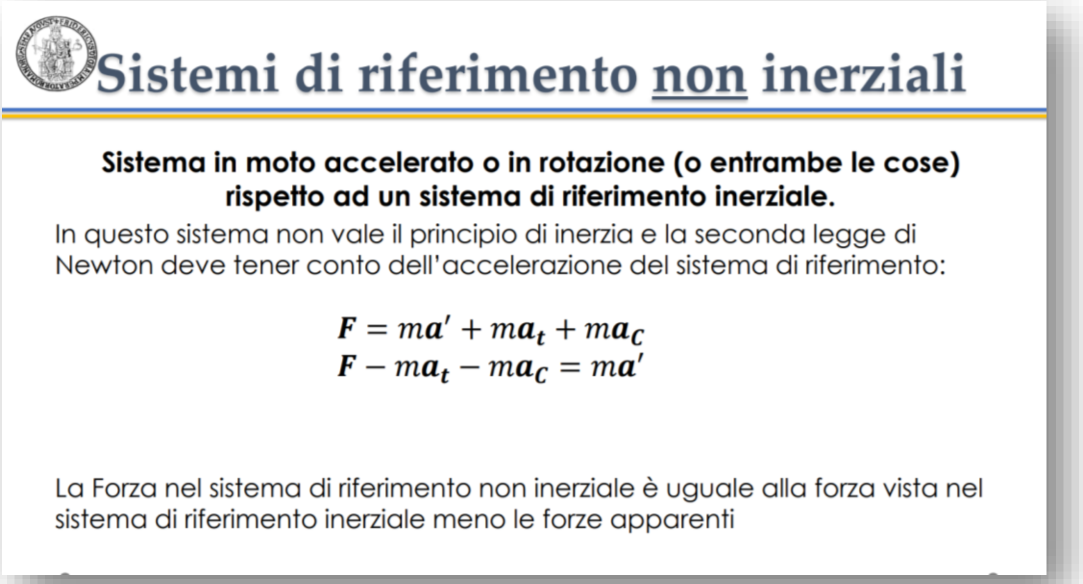
Sistema di riferimento del centro di massa

Indicando con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa avremo:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

Se scelgo come sistema di riferimento il centro di massa, avrò:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i + \vec{r}'_{CM} \qquad \vec{v}'_i = \vec{v}'_i + \vec{v}'_{CM}$$



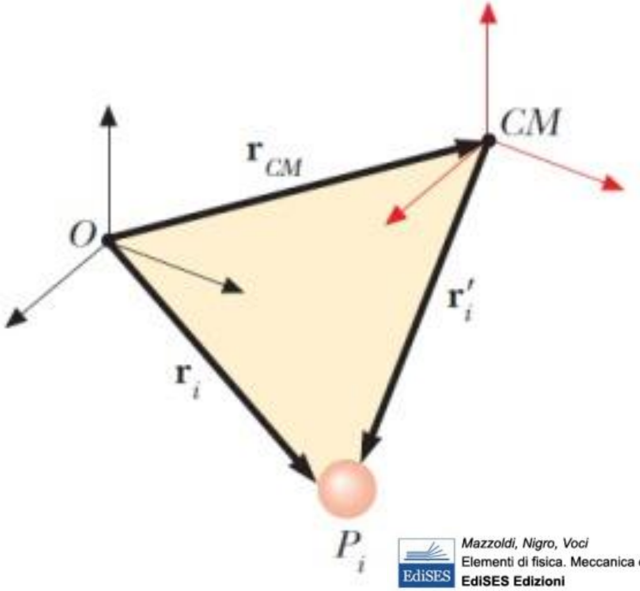
Sistemi di riferimento non inerziali

Sistema in moto accelerato o in rotazione (o entrambe le cose) rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

In questo sistema non vale il principio di inerzia e la seconda legge di Newton deve tener conto dell'accelerazione del sistema di riferimento:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}' + m\boldsymbol{a}_t + m\boldsymbol{a}_C$$
$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_t - m\boldsymbol{a}_C = m\boldsymbol{a}'$$

La Forza nel sistema di riferimento non inerziale è uguale alla forza vista nel sistema di riferimento inerziale meno le forze apparenti



EdiSES
Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni