Analisi II

Barbato Rosa

a.a. 2024-2025

Author

Alessio Romano

August 30, 2025

Contents

1 Successioni di Funzioni

Definition 1.1 (Successione di funzioni)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Una *successione di funzioni* è un'applicazione matematica tale che:

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N} \to F_n(x)$$

Dove $f_n(x) : X \to \mathbb{R}$

Prendiamo per esempio la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$, potremmo chiederci intuitivamente che cosa succede alla successione di funzioni quando $n \to +\infty$. Per farlo fissiamo x, Si ottiene che

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ se } -1 < x < 1 \\ 1 \text{ se } x = 1 \\ +\infty \text{ se } x > 1 \\ \nexists \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$$

Abbiamo introdotto intuitivamente il concetto di **convergenza puntuale**. Definiamo ora la convergenza puntuale rigorosamente

Definition 1.2 (Convergenza puntuale)**.** Data una successione di funzioni $f_n(x)$ tale che $X \to \mathbb{R}$, tale successione *converge puntualmente* ad $f(x)$, in X se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$

Ossia

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_{\epsilon,x} : \forall n > \nu, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Insomma, stiamo dicendo che data una successione di funzioni, se per ogni $x \in X, \epsilon > 0$ esiste un certo indice della successione ν dipendente dal punto x e il valore ϵ, tale che preso un valore n della successione più grande dell'indice nu, la distanza tra la funzione limite $f(x)$ e la successione di funzioni è sempre minore di ϵ...

Definition 1.3 (Convergenza Uniforme)**.** f_n *converge uniformemente* a $f(x)$ in x se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_\epsilon : \forall n > \nu, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X$$

Dunque per convergenza uniforme si intende che dopo un certo indice ν, dipendente unicamente da ϵ, la distanza tra la successione di funzioni e la funzione limite è minore di ϵ, non più in un unico punto x_0, ma su tutto l'intervallo