Analisi 1

ANALISI 1

SIMBOLI

$\forall$ = per ogni

$\exists$ = esiste almeno uno

$\exists!$ = esiste uno solo

: oppure | = Tale / Tali che

$\in$ = appartiene

$\notin$ = non appartiene

$\emptyset$ = insieme vuoto

INSIEMI

Gli insiemi si denotano con le lettere maiuscole

A, B, C...

Gli elementi che li compongono si denotano con le lettere minuscole a, b...

Mediante la scrittura

$\{a, b, c \ldots\}$

si indica l'insieme i cui elementi sono a, b, c...

Un insieme costituito da un solo elemento viene detto "SINGLETON"

Due insiemi si dicono uguali $(A=B)$ quando contengono gli stessi elementi:

Quando B è incluso in A e A è incluso in B

INCLUSIONE

Siano A e B due insiemi con $B \neq \emptyset$ (B non vuoto), si dice che A è incluso in B, oppure un sottoinsieme di B, una parte di B, se ogni elemento di A è anche elemento di B e si usa la scrittura $A \subseteq B$.

Si dice che A è strettamente incluso in B o che A è un sottoinsieme proprio o una parte propria di B e si scrive $A \subset B$. Esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A.

UNIONE, INTERSEZIONE, DIFFERENZA

Siano A e B due insiemi qualunque, si definisce **unione** di A e B, e si scrive $A \cup B$, l'insieme costituito dagli elementi di A e dagli elementi di B.

Evidentemente: $A \cup B = B \cup A$

$A \cup A = A$

$A \cup \emptyset = A$

UNIONE

Si definisce **intersezione** di A e B, e si denota con $A \cap B$, l'insieme costituito dagli elementi comuni ad A e B

Evidentemente: $A \cap \emptyset = \emptyset$ $\qquad A \cap B = B \cap A$

$A \cap A = A$

INTERSEZIONE

Si definisce **differenza** di B ed A, e si denota con uno dei simboli $B \setminus A$, $B - A$, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a B e non ad A

DIFFERENZA

ENUPLA ORDINATA

IL PRODOTTO CARTESIANO

Sia A un insieme costituito da n elementi (con $n \geq 2$) $a_1, a_2 \ldots a_n$. Spesso è rilevabile l'ordine secondo cui tali elementi vengono disposti, in tal caso si dice che tali elementi vengono disposti e che essi costituiscono una **enupla ordinata**, che si denota con $(a_1, a_2 \ldots a_n)$. In particolare a_1 prende il nome di **prima coordinata** o componente. a_n prende il nome di **n-esima coordinata** o componente.

Siano A_1 $A_2 \ldots A_n$ insiemi ($n \geq 2$), si definisce **prodotto cartesiano** degli insiemi $A_1, A_2 \ldots A_n$ e si indica con uno dei seguenti simboli: $A_1 \times A_2 \times A_n$, $\prod_{i=1}^{n} A_i$, l'insieme delle enuple ordinate tali che $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_n \in A_n$

IMPLICAZIONE ED EQUIVALENZA

Siano α e β due proposizioni.

Si dice che α implica β e si scrive $\alpha \Rightarrow \beta$, se il verificarsi di α comporta il verificarsi di β.

Si dice che α e β sono equivalenti o che α è condizione necessaria e sufficiente per β se α implica β e β implica α

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ $\quad$ $\alpha \Rightarrow \beta$ $\quad$ $\beta \Rightarrow \alpha$

GLI INSIEMI $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Denotiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}: \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$

con $\mathbb{N}_0$ l'insieme dei numeri naturali compreso lo 0 $\mathbb{N}_0: \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$

con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}: \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \dots\}$

con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali ovvero l'insieme delle frazioni $\frac{p}{q}$ aventi per numeratore un intero qualunque e per denominatore un intero diverso da 0

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, \text{ con } q \neq 0\right\}$$

Evidentemente

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Supponiamo

$p>0$ e $q>0$, effettuando la divisione tra p e q si ottiene un allineamento decimale, ovvero un'espressione del tipo $+a,a_1a_2a_3$ dove $a \in \mathbb{N}_0$ e $a \in \{0,1,2,3\dots 9\}$. Tale allineamento dicesi la rappresentazione decimale del numero razionale $\frac{p}{q}$. Esso è periodico ovvero nella parte decimale immediatamente dopo la virgola oppure da un certo punto in poi, c'è una cifra o un gruppo di cifre che si ripete infinite volte "il periodo". Quest'ultimo non è mai costituito dalla sola cifra 9. Inoltre quando il periodo è costituito dalla sola cifra 0, questo viene omesso ed il numero razionale considerato, si dice finito.

L'INSIEME R DEI NUMERI REALI

Dicesi numero reale, un qualunque allineamento decimale periodico o non, ovvero un'espressione del tipo $-a,a_1a_2a_3$ dove $a \in \mathbb{N}_0$ ed $a_i \in \{0,1,2,3\dots 9\}$. L'insieme dei numeri reali si denota con $\mathbb{R}$ e dunque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Gli elementi di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si dicono numeri irrazionali.

CONFRONTO TRA NUMERI REALI

Sia $x = +a,a_1a_2a_3\dots$ $[-a,a_1a_2a_3\dots]$ un numero reale, si definisce opposto di x e si denota con $-x$, il numero reale $-a,a_1a_2a_3\dots$ $[+a,a_1a_2a_3]$ che sommato ad x da come risultato 0.

Siano $x = +a,a_1a_2a_3\dots$ e $y = +b,b_1b_2b_3\dots$, due numeri reali positivi, si dice che $x<y$ se $a<b$ oppure se $a=b$ e $a_1<b_1$ oppure se $a=b$ e $a_2<b_2$

CAMPO DEI NUMERI REALI

In $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni interne $+$ (somma) e $\cdot$ (prodotto) che godono delle seguenti proprietà:

- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $a+b=b+a$; $a \cdot b = b \cdot a$ (proprietà commutativa)
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $(a+b)+c = a+(b+c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (proprietà associativa)
- l'unità è l'unico numero reale tale che $\forall a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$.
- lo zero è l'unico numero reale tale che $\forall a \in \mathbb{R}$ $a+0=a$.
- $\forall a \in \mathbb{R}$ l'opposto di a che si denota con $-a$ è l'unico numero reale tale che $\forall a \in \mathbb{R}$ $a+(-a)=0$
- $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste un numero reale detto il reciproco o l'inverso di a e si denota con a^{-1} tale che $a \cdot a^{-1} = 1$
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto)
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $a<b \iff a \cdot c < b \cdot c$ $\forall c \in \mathbb{R}$ $c>0$
- $a<b \iff a+c < b+c$ $\forall c \in \mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali munito delle operazioni di somma e prodotto assume la denominazione di campo reale

DIFFERENZA

Si definisce differenza di due numeri reali a e b, la somma di a e l'opposto di b e si definisce $a - b = a + (-b)$

RAPPORTO

Siano $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si definisce rapporto di a e b, il prodotto di a con il reciproco di b e si definisce $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$

POTENZA

Sia $n \in \mathbb{N}$, si pone per definizione $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^n = \begin{cases} x & \text{se } n = 1 \\ \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots}_{n} & \text{se } n > 1 \end{cases}$

Inoltre qualunque $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$

MODULO O VALORE ASSOLUTO DI UN NUMERO REALE

Sia $x \in \mathbb{R}$, si pone per definizione $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $|x| > 0$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $|-x| = |x|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|x - y| = |y - x|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$|y - x|$ opposto di $|x - y|$

$\forall x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| \cdot \ldots |x_n|$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x^n| = |\underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots}_{n \text{ volte}}| = \underbrace{|x| \cdot |x| \cdot |x|}_{n \text{ volte}} = |x|^n$$

TEOREMA 1

Sia $\alpha > 0$ si ha quanto segue

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad |x| > \alpha \iff x < -\alpha \text{ o } x > \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad |x| \geq \alpha \iff x \leq -\alpha \text{ o } x \geq \alpha$

TEOREMA 2

Siano x e $y \in \mathbb{R}$. Si ha

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Sussistendo il segno di uguaglianza quando

$x = 0$ oppure $y = 0$

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

- retta r
- due punti O e U
- verso di percorrenza secondo cui O precede U
- In tal modo la retta r risulta orientata

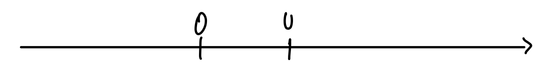
e si dice che su essa è stato fissato un riferimento cartesiano di origine O.

Una retta orientata si chiama asse e il verso di percorrenza prescelto dicesi verso positivo dell'asse.

La semiretta di origine O cui U appartiene si chiama semiasse positivo mentre la semiretta di origine O cui U non appartiene si chiama semiasse negativo.

Il punto O rappresenta il numero 0 ed U detto numero unità, rappresenta il numero 1

Per ogni coppia di punti A e B di r, indichiamo la misura o lunghezza del segmento di estremi A e B rispetto al segmento di estremi O ed U la cui misura è uguale ad 1



per ogni punto P appartenente alla retta r si chiama ==ascissa di P==, il numero reale che indichiamo con $x_P \begin{cases} 0 & \text{se } P = O \\ \overline{OP} & \text{se } O \text{ precede } P \end{cases}$, in tal modo ad ogni punto P di r, viene associato

un numero reale che è la sua ascissa e assegnato un numero reale x, si dimostra che esiste un unico punto P appartenente ad r avente ascissa x, per tal motivo, tale punto

viene detto rappresentazione geometrica del numero reale x.

x e y sono due numeri reali qualunque, il segmento di estremi x ed y ha lunghezza $|x-y|$ ed il punto medio di tale segmento è $\frac{x+y}{2}$, pertanto i numeri reali si dicono anche

punti di $\mathbb{R}$ e il modulo di $|x-y|$ prende il nome di distanza.

se x ed y sono numeri reali tali che $x<y$ si dimostra che esistono infiniti numeri razionali maggiori di x e minori di y, ciò si esprime dicendo che gli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi

in $\mathbb{R}$.

INSIEMI NUMERICI LIMITATI

Una parte X di $\mathbb{R}$ si dice limitata inferiormente [superiormente] se esiste un numero reale h tale che: $x \geq h \; [x \leq K] \quad \forall x \in X$ (1)

Ogni numero reale h [K] soddisfacente alla (1) dicesi un minorante [maggiorante] di X

Una parte X di $\mathbb{R}$ si dice limitata se lo è sia inferiormente che superiormente, ovvero se esistono due numeri reali h e K tali che: $h \leq x \leq K \quad \forall x \in X$

TEOREMA

Una parte X di $\mathbb{R}$ è limitata se e solo se esiste un numero $\alpha > 0$ tale che: $|x| \leq \alpha \quad \forall x \in X \iff -\alpha \leq x \leq \alpha \quad \forall x \in X$

MASSIMO E MINIMO

Una parte X di $\mathbb{R}$ si dice dotata di minimo [massimo] se esiste $m' \in X$ [$m'' \in X$] tale che $x \geq m'$ [$x \leq m''$] $\forall x \in X$

Se un tale elemento esiste, esso è unico, prende il nome di minimo [massimo] di X e si denota con $\min X$ [$\max X$]

TEOREMA (Completezza di $\mathbb{R}$)

Se X è una parte di $\mathbb{R}$ limitata inferiormente [superiormente] allora l'insieme dei suoi minoranti [maggioranti] è dotato di massimo [minimo].

ESTREMO INFERIORE E SUPERIORE

Sia X una parte di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente, in base al Teorema prima enunciato, l'insieme dei minoranti di X è dotato di massimo, che prende il nome di estremo inferiore di X e si indica con $\inf X$. Se X non è limitato inferiormente si pone per definizione $\inf X = -\infty$

OSSERVAZIONE

Se X è una parte di $\mathbb{R}$ limitata inferiormente e dotata di minimo m', poiché m' è un minorante di X ed ogni numero maggiore di m', allora m' è il massimo dei minoranti, ovvero l'estremo inferiore di X pertanto se $\inf X$ è un elemento di X, l'estremo inferiore coincide con l'estremo numerico inferiore

TEOREMA (Proprietà estremo inferiore)

Sia X una parte di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente, un numero reale e' è l'estremo inferiore di X se e solo se gode delle seguenti proprietà:

① $e' \leq x \quad \forall x \in X$

② $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X$ tale che $x_\varepsilon < e' + \varepsilon$

Sia X una parte di $\mathbb{R}$ limitato superiormente, in base al Teorema Completezza di $\mathbb{R}$, l'insieme dei maggioranti di $\mathbb{R}$ è dotato di minimo, che prende il nome di estremo superiore di X e si denota con $\sup X$

OSSERVAZIONE

Se il $\sup X$ appartiene ad X allora esso coincide con il $\max$ di X

TEOREMA

Sia X una parte di $\mathbb{R}$ limitata superiormente, un numero reale e'' è l'estremo superiore di X se e solo se gode delle seguenti proprietà

1. $x \leq e'' \quad \forall x \in X$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in X$ tale che $x_\varepsilon > e'' - \varepsilon$

INTERVALLI NUMERICI

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, le parti di $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b] \rightarrow$ chiuso limitato

$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[\rightarrow$ aperto limitato

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[\rightarrow$ aperto a destra limitato / semiaperto

$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b] \rightarrow$ aperto a sinistra limitato / semiaperto

Il punto $\frac{a+b}{2}$ dicesi centro dell'intervallo

$b-a$ prende il nome di dimensione o ampiezza dell'intervallo.

Introdotti i simboli $-\infty$ e $+\infty$, l'insieme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ prende il nome di insieme ampliato dei numeri reali, in particolare $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$

Gli elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ si dicono anche punti.

Sia $c \in \mathbb{R}$. Le parti di $\mathbb{R}$

$\{x \in \mathbb{R} : \ x \leq c\} = \ ]-\infty; c]$ intervallo chiuso illimitato inferiormente

$\{x \in \mathbb{R} : \ x < c\} = \ ]-\infty; c[$ intervallo aperto illimitato inferiormente

$\{x \in \mathbb{R} : \ x \geq c\} = \ [c; +\infty[$ intervallo chiuso illimitato superiormente

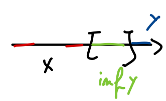
$\{x \in \mathbb{R} : \ x > c\} = \ ]c; +\infty[$ intervallo aperto illimitato superiormente

---

INSIEMI CONTIGUI

Due parti X ed Y di $\mathbb{R}$ si dicono separate se $\sup X \leq \inf Y$, in tal caso ogni numero reale appartenente all'intervallo chiuso i cui estremi sono: $[\sup X; \inf Y]$

dicesi un elemento di separazione di X ed Y



Due parti separate X ed Y si dicono contigue quando il $\sup X = \inf Y$

FUNZIONI

Siano X ed Y insiemi non vuoti, si definisce "funzione definita in X ed a valori in Y" una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa uno ed un solo elemento $y \in Y$. Per esprimere il fatto che una lettera dell'alfabeto f indica una funzione definita in X ed a valori in Y si utilizza la seguente scrittura $f: X \rightarrow Y$.

Per ogni $x \in X$, l'elemento $y \in Y$ che f associa ad x é detto il valore di f in X o anche l'immagine di X tramite f e si denota con $y = f(x)$. L'insieme X prende il nome di Dominio o Campo di Esistenza o Insieme di definizione di f.

$:=$ al variare

Si definisce Codominio di f, il sottoinsieme di Y: $f(x) = \left\{ y = f(x) : x \in X \right\}$ costituito da tutti gli elementi di Y che sono immagine di X tramite f

---

Se il codominio della funzione é costituito da un solo elemento di y allora la funzione si dice costante.

Sia X un insieme arbitrario

1) La funzione $x \in X \to x$ ad ogni elemento di X associa sé stesso. Dicesi l'identità in X o la funzione identica in X

2) La funzione $x \in X \to c$ ad ogni elemento di X associa uno stesso elemento c è detta funzione costante in X

3) La funzione $x \in X \to 0$ è detta identicamente nulla in X

Sia A un sottoinsieme non vuoto di X, la funzione che associa 1 se $x \in A$, il numero 0 se $x \notin A$ prende il nome di funzione caratteristica di A definita in X

e si denota χ_A

$$f : x \in X \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ 1 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

RESTRIZIONI E PROLUNGAMENTI DI UNA FUNZIONE

Siano X ed Y insiemi qualunque $A \subseteq X$, $f : X \to Y$ la funzione che ad ogni $x \in A$ associa il valore che f assume in X e prende il nome di restrizione di f ad A

e si indica con f/A $x \in A \to f(x)$

Se $B \supset X$, si chiama prolungamento di f su B, ogni funzione g definita in B ed ha valori in Y la cui restrizione ad x coincide con f.

EQUAZIONI

Siano X ed Y insiemi qualunque, $f: X \to Y$, $\bar{y} \in Y$, consideriamo il seguente problema

Stabilire se esistono elementi $\bar{x} \in X$ tali che

$$(1) \quad f(\bar{x}) = \bar{y}$$

ed in caso affermativo, determinarli.

Il problema posto prende il nome di equazione nell'incognita X e viene indicato brevemente tramite la scrittura $(2)\ f(x) = \bar{y}$

Ogni elemento $\bar{x} \in X$ soddisfacente alla (1) dicesi una soluzione della (2) pertanto la (2) è risolubile se e solo se $\bar{y} \in f(X)$.

FUNZIONI INVERTIBILI E FUNZIONE INVERSA

Siano X ed Y insiemi qualunque, $f: X \to Y$. Si dice che f è invertibile se $\forall x', x'' \in X$ con $x' \neq x''$ risulta $f(x') \neq f(x'')$.

Dunque f è invertibile se e solo se comunque scegliamo un elemento di Y nel suo codominio, l'equazione nell'incognita X ovvero $f(x) = y$ ammette un'unica soluzione

Se f è invertibile, l'applicazione che ad ogni $y \in f(X)$ associa l'unica soluzione dell'equazione nell'incognita X dicesi inversa di f e si denota con f^{-1}. Pertanto f^{-1} è

definita nel codominio di f ed ha per codominio il dominio di f. Inoltre per ogni $y \in f(X)$, il valore di f che assume in $f^{-1}(y)$ è esattamente uguale ad y: $f(f^{-1}(y)) = y$.

Se A è un sottoinsieme non vuoto di X e se la restrizione di f ad A è invertibile si dice che f è invertibile in A o localmente invertibile e l'inversa della restrizione di f ad A è detta inversa locale di f in A

FUNZIONE COMPOSTA

Siano X, Y, X', Y' insiemi qualunque, $f: X \to Y$, $g: X' \to Y'$. Posto $A \{x \in X : f(x) \in X'\}$ l'insieme costituito dagli elementi di X tali che gli stessi elementi appartengano al dominio di g.

Se A non è vuoto, l'applicazione che ad ogni $x \in A \to g(f(x))$ si chiama funzione composta da f e da g e si denota con il simbolo $g \cdot f$

In particolare la funzione g è detta componente esterna mentre f è detta componente interna

SUCCESSIONE

Sia A un insieme qualunque, si chiama successione di elementi di A ogni funzione definita in $\mathbb{N}$ ed a valori in A

INSIEMI NUMERABILI

Si dice che due insiemi X ed Y sono equipotenti o che hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione definita in X ed a valori in Y, invertibile ed avente codominio Y.

Un insieme Y si dice finito se esiste un numero naturale n tale che Y sia equipotente all'insieme costituito dai primi numeri naturali $\{1, 2, 3 \dots n\}$. In tal caso il numero naturale n dicesi la cardinalità di Y. Un insieme Y si dice numerabile se è equipotente all'insieme dei numeri naturali, cioè se è il codominio di una successione invertibile.

Si dimostra che l'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Si chiama funzione reale ogni funzione definita in un insieme qualunque ed a valori in $\mathbb{R}$.

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, si dice che f è limitata inferiormente [superiormente] se è tale il suo codominio

Si dice che f è limitata se è tale il suo codominio.

Si dice che f è dotata di minimo [massimo] se è tale il suo codominio, cioè se esiste $m' [m''] \in f(x)$ tale che $m' \leq f(x)$ $[m'' \geq f(x)]$ $\forall x \in X$.

Il numero m' $[m'']$ dicesi il minimo [massimo] di f e viene indicato con uno dei seguenti simboli: $\min f$, $\min\limits_{x \in X} f(x)$ $[\max f, \max\limits_{x \in X} f]$

ANALISI · Giorno 3

Ogni elemento x' appartenente ad X tale che $f(x') = \min_X f$ prende il nome di dicesi un elemento di minimo assoluto per f.

Ogni elemento x'' appartenente ad X tale che $f(x'') = \max_X f$ prende il nome di dicesi un elemento di massimo assoluto per f.

Si chiama estremo inferiore [superiore] l'estremo inferiore [superiore] di f del suo codominio e si denota con uno dei simboli $\inf f$; $\inf_X f$; $\inf_{x \in X} f(x)$;

[$\sup f$, $\sup_X f$; $\sup_{x \in X} f(x)$]

TEOREMA

La funzione f definita in X ed a valori in $\mathbb{R}$ ($f: X \to \mathbb{R}$) è limitata se e solo se $\exists\, \alpha > 0 \mid |f(x)| \leq \alpha \iff -\alpha \leq f(x) \leq \alpha$

PROPRIETÀ

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ limitata inferiormente, un numero reale ε' è l'estremo inferiore di f se e solo se gode delle seguenti proprietà:

① $\varepsilon' \leq f(x)$, $\forall x \in X$

② $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) < \varepsilon' + \varepsilon$

TEOREMA

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ limitata superiormente, un numero reale ℓ'' è l'estremo superiore di f se gode delle seguenti proprietà:

① $\ell'' \geq f(x), \forall x \in X$

② $\forall \varepsilon > 0 \; \exists X_\varepsilon \in X : f(X_\varepsilon) > \ell'' - \varepsilon$

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ — ad ogni $x \in X$ associa $-f(x)$

· la funzione $x \in X \to -f(x)$ dicesi l'opposta di f e si denota con $-f$

· la funzione $x \in X \to |f(x)|$ dicesi modulo di f e si denota con $|f|$

Posto $X' = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$, se $X' \neq \emptyset$, allora $x \in X \to \frac{1}{f(x)}$ dicesi la reciproca di f e si denota con $\frac{1}{f}$

Siano $f: X' \to \mathbb{R}$, $g: X'' \to \mathbb{R}$, se $X = X' \cap X'' \neq \emptyset$ allora le funzioni $x \in X \to f(x) + g(x)$ (SOMMA), $x \in X \to f(x) - g(x)$ (DIFFERENZA), $x \in X \to f(x) \cdot g(x)$ (PRODOTTO) di f e g e indicate con

$f+g$; $f-g$; $f \cdot g$

Posto $X^* = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$, se $X^* \neq \emptyset$, la funzione $x \in X^* \to \frac{f(x)}{g(x)}$ e si denota $\frac{f}{g}$

RAPPORTO

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, si dice che f è negativa [positiva],

e si scrive $f<0$ [$f>0$] se $\forall x \in X$ $f(x)<0$ [$f(x)>0$]

Si dice che f è non negativa [non positiva]

e si scrive $f \geq 0$ [$f \leq 0$] se $\forall x \in X$ $f(x) \geq 0$ [$f(x) \leq 0$]

Un elemento $x_0 \in X$ dicesi uno zero di f se $f(x_0)=0$

FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE

Si chiama funzione reale di variabile reale ogni funzione reale definita in una parte di $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$

Il piano reale è il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per se stesso $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

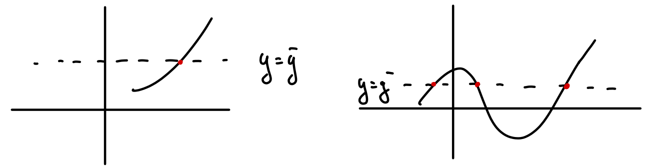
Si chiama grafico di f il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dalle coppie $(x; f(x))$ ottenute al variare di x nel dominio di f.

La rappresentazione geometrica del grafico di f prende il nome di diagramma di f o luogo dei punti del piano di equazione $y=f(x)$

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fissato $\bar{y} = (f(\bar{x}))$

risolvere l'equazione $f(x)=\bar{y}$, una volta noto il diagramma di f, dal punto di vista geometrico vuol dire determinare le ascisse dei punti di intersezione del diagramma di f con la retta di equazione $y=\bar{y}$

Evidentemente f è invertibile se e solo se $\forall \bar{y} \in f(X)$, la retta di equazione $y=\bar{y}$ interseca il diagramma di f in un solo punto.



localmente invertibile

FUNZIONI MONOTONE

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

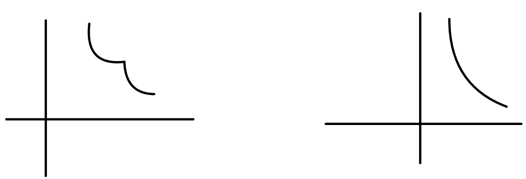
[ ] = rispettivamente

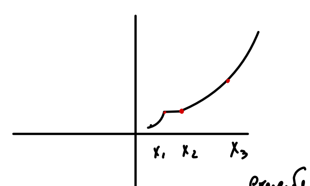
si dice che f è:

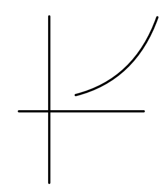
crescente [decrescente] se $\forall x_1, x_2 \in X$ con con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) \le f(x_2)$ [$f(x_1) \ge f(x_2)$]

strettamente crescente [decrescente] se $\forall x_1, x_2 \in X$ con con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$]

Le funzioni crescenti o decrescenti si dicono monotone mentre le funzioni strettamente crescenti o decrescenti si dicono strettamente monotone.







strettamente crescente

Evidente ogni funzione strettamente monotona è invertibile

TEOREMA

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

strettamente monotona

se f è str. crescente [str. decrescente] allora f^{-1} è str. decrescente [str. crescente]

TEOREMA

Siano $f: X' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: X'' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$X = \{x \in X' : f(x) \in X''\}$ il dominio di $g \circ f$. Si ha quanto segue (regola dei segni)

- se f e g sono entrambi crescenti [decrescenti] allora $g \circ f$ è crescente.
- se una delle due è crescente e l'altra è decrescente allora $g \circ f$ è decrescente.

FUNZIONE PARI, DISPARI, PERIODICA

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ammesso che $\forall x \in X \to -x \in X$ si dice che f è

DIAGRAMMA

- pari se $\forall x \in X$ $f(-x) = f(x)$ simmetrico rispetto ad y
- dispari se $\forall x \in X$ $f(-x) = -f(x)$ simmetrico rispetto all'origine degli assi

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\omega > 0$

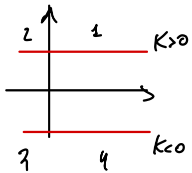
Ammesso che: $\forall x \in X$ e $\forall K \in \mathbb{Z}$ $x + K\omega \in X$

- f è periodica di periodo minimo ω se $\forall x \in X$ e $\forall K \in \mathbb{Z}$

$f(x+K\omega) = f(x)$ ← il valore che assume

FUNZIONI ELEMENTARI

· Funzione Costante $x \in \mathbb{R} \to K$



DIAGRAMMA

retta parallela all'asse x

FUNZIONE LINEARE

DIAGRAMMA

$x \in \mathbb{R} \to ax \in \mathbb{R}$

retta passante per l'origine

quadranti 1/3 se $a>0$

2/4 se $a<0$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

FUNZIONE AFFINE O POLINOMIO DI 1° GRADO

$x \in \mathbb{R} \to ax+b \in \mathbb{R}$

DIAGRAMMA

retta non passante per l'origine

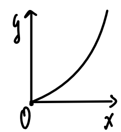
$a \neq 0$ e $b \neq 0$

a = coefficiente angolare

FUNZIONI POTENZA

· esponente α positivo non intero

CASO $\alpha > 1$



$f(x) = x^\alpha$

Dominio

$X = [0, +\infty] = f(X)$

proiettata per codominio su asse y

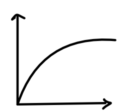
$\inf f = 0 = \min f$

strettamente crescente e invertibile

$\sup f = +\infty$

$f^{-1}: x \in [0, +\infty[\to x^{\frac{1}{\alpha}} \in [0, +\infty[$

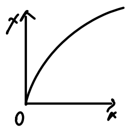
CASO $0 < \alpha < 1$



· Radice n-ma (n-esima)

$f(x)=\sqrt[n]{n}$

Caso n pari



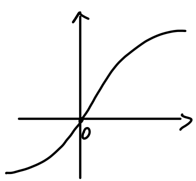
$X=[0;+\infty[=f_X$

$\inf f=0=\min f$

$\sup f=+\infty$

strettamente crescente

Caso n dispari



$X=\mathbb{R}=f(X)$

$\sup f=+\infty$

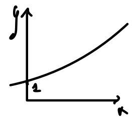
$\inf f=-\infty$

strettamente crescente

· Esponenziale

$f(x)=a^x$ base $\downarrow$ $a\in\,]0;+\infty[\,\setminus\{1\}$

Caso $a>1$



$X=\mathbb{R}$

$f(X)=]0;+\infty[$

$\inf f=0$

$\sup f=+\infty$

strettamente crescente

globalmente invertibile

$\forall y\in f(X)$

l'equazione nell'incognita $x\in\mathbb{R}$

$a^x=y$

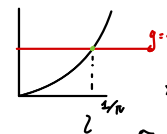
ammette una soluzione che si denota

$x=\log_a y$

Disequazioni

$x^\pi-2>0 \iff x^\pi>2 \iff x>2^{1/\pi}$

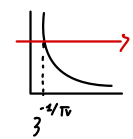
$\forall x\in\,]2^{1/\pi};+\infty[$



$x^\pi=2 \iff x=2^{\frac{1}{\pi}}$

DIAGRAMMA = Rappresentazione grafica

$x^{-\pi}-3>0 \iff x^{-\pi}>3 \iff 0<x<3^{-1/\pi}$

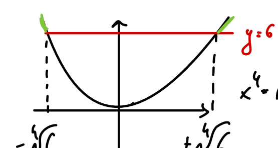


$y=3$

$x^{-\pi}=3 \iff x=3^{-1/\pi}$

$\forall x\in\,]0,3^{-1/\pi}[$

$x^4-6>0 \iff x^4>6 \iff x<-\sqrt[4]{6}\ \cup\ x>+-\sqrt[4]{6}$

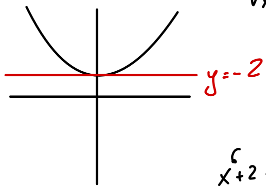


$x^4=6 \iff x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{6}$

$\forall x\in\,]-\infty;-\sqrt[4]{6}[\,\cup\,]\sqrt[4]{6};+\infty[$

$x^6+2>0 \iff x^6>-2$

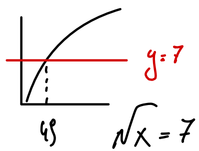
$\forall x\in\mathbb{R}$



$x^6+2<0 \iff x^6<-2$

$\emptyset$

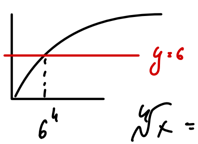
$\sqrt{x}-7\geq 0 \iff \sqrt{x}\geq 7$



$\sqrt{x}=7 \iff x=49$

$x\geq 49 \quad \forall x\in[49;+\infty[$

$\sqrt[4]{x}-6<0 \iff \sqrt[4]{x}<6$

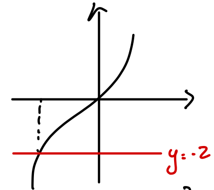


$\sqrt[4]{x}=6 \iff x=6^4$

$0\leq x<6^4 \quad \forall x\in[0;6^4[$

$x^3+2>0 \iff x^3>-2 \iff x>-\sqrt[3]{2}$

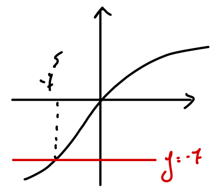
$\forall x\in]-\sqrt[3]{2};+\infty[$



$x^3=-2 \iff x=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$

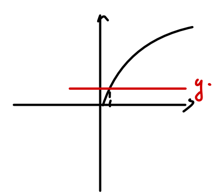
$\sqrt[5]{x}+7\geq 0 \iff \sqrt[5]{x}\geq -7 \iff x\geq -7^5$

$\forall x\in[-7^5;+\infty[$



$\sqrt[5]{x}=-7 \iff x=-7^5$

$\sqrt[6]{x}+5>0 \iff \sqrt[6]{x}>-5$

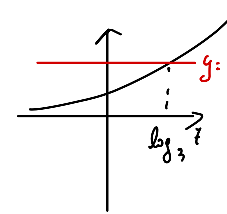


$x\geq 0$

$\forall x\in[0;+\infty[$

$3^x-7>0 \iff 3^x>7 \qquad x>\log_3 7$

$\forall x\in]\log_3 7;+\infty[$



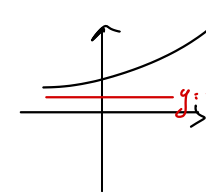
$3^x=7$

$\Updownarrow$

$x=\log_3 7$

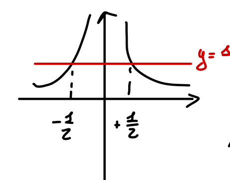
$2^x+2<0 \iff 2^x<-2$

$\emptyset$



$x^{-4}>16 \qquad -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \vee x\neq 0$

$-\frac{1}{2}<x<0 \vee 0<x<\frac{1}{2}$

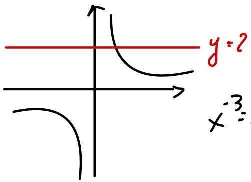


$x^{-4}=16 \iff x=\pm(16)^{-1/4}=\pm\frac{1}{2}$

$\forall x\in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[\setminus\{0\}$

$\forall x\in]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$

$x^{-3} < 2$



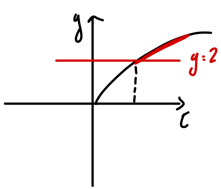
$x^{-3} = 2 \iff x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$x < 0 \vee x > 2^{-1/3}$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2^{-1/3}, +\infty[$

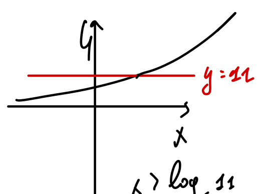
$\sqrt{5^x - 7} - 2 > 0 \iff \sqrt{5^x - 7} > 2$ $\quad 5^x - 7 = t$

$\sqrt{t} > 2$



$\sqrt{t} = 2 \iff t = 4$

$\sqrt{t} > 2 \iff t > 4 \iff 5^x - 7 > 4 \iff 5^x > 11$

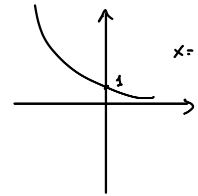


$5^x = 11 \iff \log_5 11$

$x > \log_5 11$ $\quad \forall x \in]\log_5 11, +\infty[$

Funzione esponenziale $f(x) = a^x$ dove $a \in]0,1[$

$0 < a < 1$



$x = \mathbb{R}$

$f(x) =]0, +\infty[$

$\inf f = 0$

$\sup f = +\infty$

f. è strett. decrescente

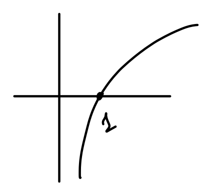
globalmente invertibile

$\forall y \in]0, +\infty[$ l'equazione nell'incognita $x \in \mathbb{R}$

$a^x = y$ ammette un'unica soluzione $= \log_a b$

Funzione logaritmo $f(x) = \log_a x$ dove $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$

caso $a > 1$

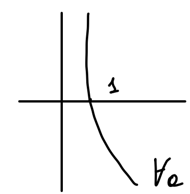


strett. crescente

$x =]0, +\infty[$

$f(x) = \mathbb{R}$

caso $0 < a < 1$



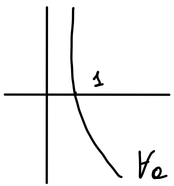
strett. decrescente

$\forall a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$

$\log_a x = 0 \iff x = 1$

funzioni inverse

caso $0<a<1$



strett. decrescente

$\forall a \in \,]0,+\infty[\, \setminus \{1\}$

$\log_a x = 0 \iff x = 1$

$\forall x_1, x_2 \in \,]0,+\infty[\,$ $\log_a x_1 + \log_a x_2$

$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

$\forall x \in \,]0,+\infty[\,$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\log_a^\lambda x = (\log_a x)^\lambda \;\Big|\; \log_a x^\lambda = \lambda \log_a x$

$\log_a a = 1$

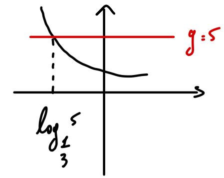
$\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione nell'incognita $x \in \,]0,+\infty[$

$\log_a x = y$

ammette un'unica soluzione

$x = a^y$

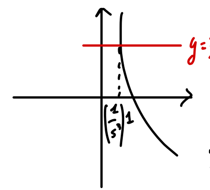
$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 > 0 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x > 5$



$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 5 \iff x = \log_{\frac{1}{3}} 5$

$\forall x \in \,]-\infty; \log_{\frac{1}{3}} 5[$

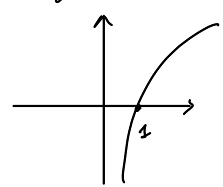
$\log_{\frac{1}{5}} x > 3$



$\log_{\frac{1}{5}} x = 3 \iff x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3}$

$\forall x \in \,]0; \frac{1}{5^3}[$

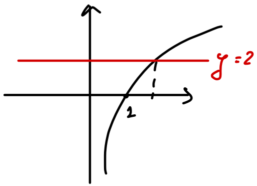
$\log_2 x > 0$



$\forall x \in \,]1; +\infty[$

$\log(3x+1)-2>0 \iff \log(3x+1)>2$ $\qquad 3x+1=t$

$\log t>2$



$\log t = 2 \iff t=e^2$

$t>e^2$

$3x+1>e^2$

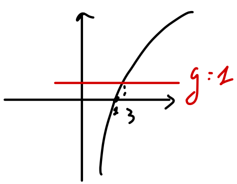
$x>\dfrac{e^2-1}{3}$

$\forall x\in \left]\dfrac{e^2-1}{3};+\infty\right[$

$\log_3(5x-1)<1$

$t=(5x-1)$

$\log_3 t<1$

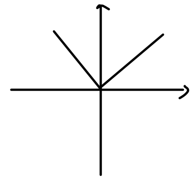


$\log_3 t=1 \iff t=3^1=3$

$0<t<3 \iff \dfrac{1}{5}<x<\dfrac{4}{5}$

Funzione modulo o valore assoluto

$f(x)=|x|$



$= \begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ x & \text{se } x<0 \end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}$

$|-x|=|x|$

$]-\infty;0[$ strettamente decrescente

$]0;+\infty[$ strett. crescente.

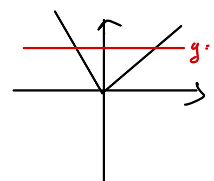
$X=\mathbb{R}$

$f(X)=[0;+\infty[$

$\sup f=+\infty$

$\min f=0$

$|x|-6\geq 0 \iff |x|\geq 6$



$|x|=6 \iff x=\pm 6$

$x\leq -6 \vee x\geq +6$

$\forall x\in\,]-\infty;-6[\,\cup\,]+6;+\infty[$

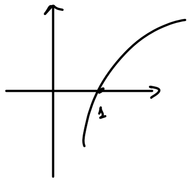
$|x|<6$

$-6<x<6$

$\log\left(\underbrace{|x-1|-2}\right)>0$ $\quad T=(|x-1|-2)$

$\log T>0$

$T>1$



$|x-1|-2>1 \iff |x-1|>3$

$h=x-1$

$|h|>3$

$h<-3 \vee h>3$

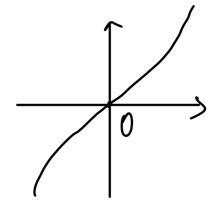
$\Updownarrow$

$x<-2 \vee x>4$

$\forall x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]4,+\infty[$

Funzioni: seno iperbolico e arcoseno iperbolico

$f(x)=\operatorname{senh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$



$X=\mathbb{R}$

$f(X)=\mathbb{R}$

$\sup f=+\infty$

$\inf f=-\infty$

funzione dispari

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\operatorname{senh}(-x)=-\operatorname{senh}x$

strett. crescente

globalmente invertibile

$\forall y\in\mathbb{R}$

l'equazione nell'incognita $x\in\mathbb{R}$ $\operatorname{senh}x=y$

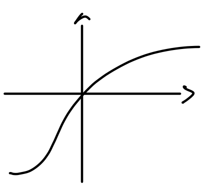
ammette un'unica soluzione

$x=\operatorname{arcsinh}y$

$\sqrt[3]{\log(x-2)-1}>0$

$\log(x-2)-1=T$

$\sqrt[3]{T}>0$ $\quad T>0 \iff \log(x-2)-1>0 \iff \log(x-2)>+1$



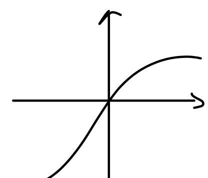
$x-2=h$

$\log h>1 \iff e^{+1}<h \iff e<x-2 \iff x>e+2$

$\forall x\in\,]e+2,+\infty[$

L'inversa di f è la funzione arcoseno iperbolico

$g(x)=f^{-1}(x)=\operatorname{arcsinh}x=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$



$X_g=\mathbb{R}$

$f(X)=\mathbb{R}$

strett. crescente

$\forall y\in\mathbb{R}$

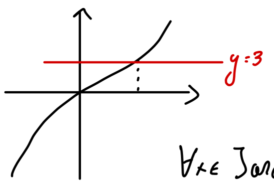
l'equazione $x\in\mathbb{R}$ $\operatorname{arcsinh}x=y$

ammette un'unica soluzione

$x=\operatorname{senh}y$

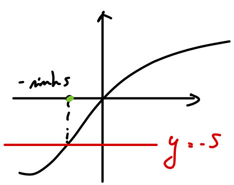
$\operatorname{senh} x > 3$

$\operatorname{senh} x = 3 \iff x = \operatorname{arcsinh} 3$



$\forall x \in \,]\operatorname{arcsinh} 3 \, ; +\infty[$

$\operatorname{arcsinh} x > -5$



$\operatorname{arcsinh} x = -5 \iff x = \sinh(-5) = -\sinh 5$

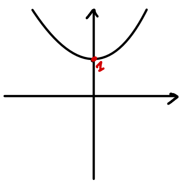
$\forall x \in \,]-\sinh 5 \, ; +\infty[$

$\operatorname{arcsinh} x = \operatorname{settsinh} x$

ANALISI - Giorno 4

Le funzioni coseno iperbolico e arcoseno iperbolico

$f(x) = \cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$



$X = \mathbb{R}$

$f(X) = [1; +\infty[$

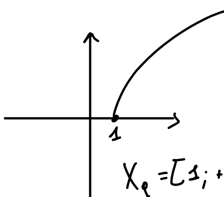
$\min f = 1$, $\sup f = +\infty$

funzione pari

str. decrescente in $]-\infty; 0]$

e str. crescente in $[0; +\infty[$

L'inversa della restrizione di f all'intervallo $[0; +\infty[$ è la funzione



$g(x) = \operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ per $x \geq 1$

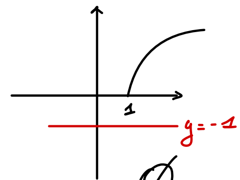
settcoshx

$X_g = [1; +\infty[$

$f(X_g) = [0; +\infty[$

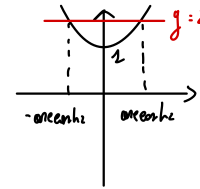
Esempi

$\operatorname{arccosh} x < -1$



$\emptyset$

$\cosh x < 2$



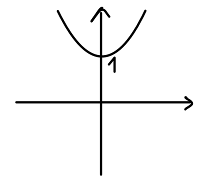
$\forall x \in]-\operatorname{arccosh} 2; \operatorname{arccosh} 2[$

$\cosh x = 2$

$\Updownarrow$

$\operatorname{arccosh} 2$

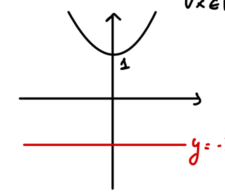
$-\cosh x < 0$



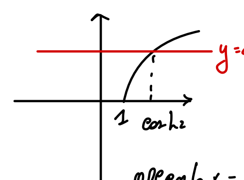
$\emptyset$

$\cosh x > -3$

$\forall x \in \mathbb{R}$



$\operatorname{arccosh} > 2$

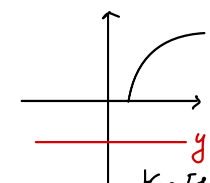


$\operatorname{arccosh} x = 2$

$x = \cosh 2$

$\forall x \in]\cosh 2; +\infty[$

$\operatorname{arccosh} x > -2$

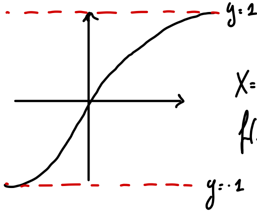


$\forall x \in [1; +\infty[$

Funzioni Tangente iperbolica e arcotangente iperbolica

$f(x) = \text{Tgh}\,x = \frac{\text{senh}\,x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

$\text{Tanh}\,x$



$X = \mathbb{R}$

$\inf x = -1$

$\sup x = 1$

$f(X) =]-1;1[$

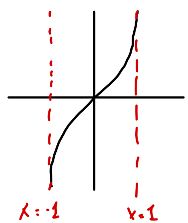
funzione dispari

strett. crescente e globalmente invertibile

L'inverso è $\text{arcTgh}\,x$

$g(x) = \text{arcTgh}\,x = \frac{1}{2}\log\frac{(1+x)}{(1-x)}$ per $x \in]-1;1[$

$\text{settTgh}\,x$



$X_g =]-1;1[$

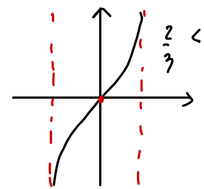
$f(X_g) = \mathbb{R}$

crescente

$\text{arcTgh}(3x-2) > 0$

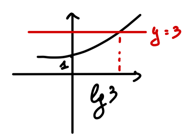
$T: 3x-2$

$\text{arcTgh}\,T > 0$



$\frac{2}{3} < x < 1$

$\forall x \in]\frac{2}{3};1[$



Composte crescente entrambe crescenti

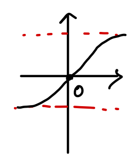
$\text{Tgh}(e^{x}-3) > 0$

$e^{x}-3 = T$

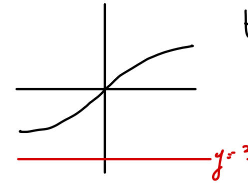
$\text{Tgh}\,T > 0$

$\Updownarrow$

$\forall x \in]\log 3; +\infty[\iff e^{x} > 3 \iff e^{x}-3 > 0 \iff T > 0$



$\text{Tgh}\,x > -3$

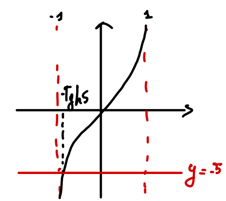


$\forall x \in \mathbb{R}$

$\text{Tgh}\,x < -3$

$\emptyset$

$\text{arcTgh}\,x > -5$

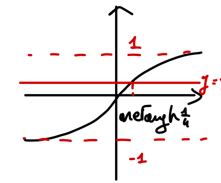


$\forall x \in]-\text{Tgh}\,5; +1[$

$\text{arcTgh}\,x = -5$

$x = \text{Tgh}\,{-5} = -\text{Tgh}\,5$

$\text{Tgh}\,x < \frac{1}{4}$



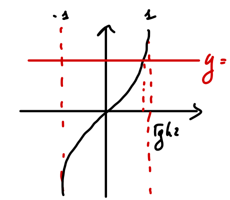
$\text{Tgh}\,x = \frac{1}{4}$

$\Updownarrow$

$x = \text{arcTangh}\,\frac{1}{4}$

$\forall x \in]-\infty; \text{arcTgh}\,\frac{1}{4}[$

$\text{arcTgh}\,x \leq 2$



$\text{arcTgh}\,x = 2$

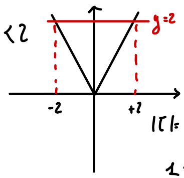
$x = \text{Tgh}\,2$

$\forall x \in]-1; \text{Tgh}\,2]$

$|e^x - 3| < 2$

$e^x - 3 = t$

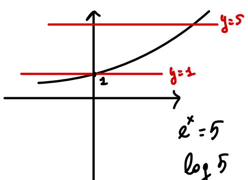
$|t| < 2$



$|t| = 2 \iff t = \pm 2$

$1 < e^x < 5$

$1 < e^x < 5$

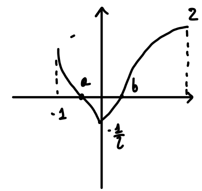


$\forall x \in]0; \log 5[$

$e^x = 5$

$\log 5$

Sia f la funzione il cui diagramma è rappresentato in figura



1. Stabilire dominio e codominio di f
2. Precisare $\inf f$ e $\sup f$
3. Risolvere: $f(x) < 0$

   $f(x) > -3$
4. Stabilire se l'equazione $f(x) = 0$ è risolubile
5. Precisare se f è localmente o globalmente invertibile

intervallo chiuso e limitato

si dice anche compatto

1 $X = [-1; 2]$

$f(X) = [-\frac{1}{2}; 2]$

2 $\min f = -\frac{1}{2}$

$\max f = 2$

3 $\forall x \in]a; b[$

$\forall x \in [-1; 2]$

$\forall x \in X$

4 $x_1 = a$

$x_2 = b$

5 localmente

Verificare che $f(x) = 2x - 3$ è invertibile e determinare l'espressione dell'inversa

$$2x - 3 = y \iff x = \frac{y+3}{2}$$

$X = \mathbb{R}$ crescente

$f(X) = \mathbb{R}$ globalmente invertibile

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$$

Posto $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ precisare $g \circ f(x) = g(f(x))$

$X = \mathbb{R}$

$f(X) = [0, +\infty[$

$X = [0, +\infty[$

$f(X) = \mathbb{R}$

$\forall x \in X_g \quad f(x) \in X_g$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \quad \sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha \cdot \cosh\beta \pm \cosh\alpha \cdot \sinh\beta$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \quad \cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha \cdot \cosh\beta \pm \sinh\alpha \cdot \sinh\beta$

Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni

$f(x) = \log\left(\frac{|x-1|-1}{2^x + x^{-\pi}}\right)$

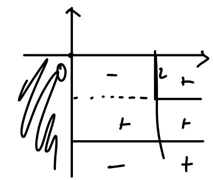
$T = x-1$

$\frac{|x-1|-1}{2^x + x^{-\pi}} > 0 \iff N>0 \quad |x-1|-1>0 \iff |T|>1$

$T<-1 \vee T>1$

$x<0 \vee x>2$

$D>0 \quad 2^x + x^{-\pi} > 0 \iff x>0$



$X =]2;+\infty[$

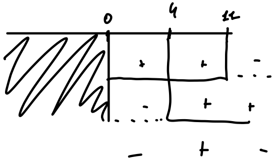
$f(x) = \sqrt[4]{\frac{\sinh(11-x)}{\sqrt{x}-2}}$

$[0;+\infty[$

$\frac{\sinh(11-x)}{\sqrt{x}-2} \geq 0$

$N \geq 0 \quad \sinh(11-x) \geq 0 \iff 11-x \geq 0 \iff x \leq 11$

$D>0 \quad \sqrt{x}-2>0 \iff \sqrt{x}>2 \iff x>4$



$4<x<11$

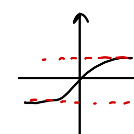
$X =]4;11[$

$f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{tgh}(\sqrt[3]{x}-2)}{x^2-16}}$

$[0;+\infty[$

$\frac{\operatorname{tgh}(\sqrt[3]{x}-2)}{x^2-16} > 0$

$N \geq 0 \quad \operatorname{tgh}(\sqrt[3]{x}-2) \geq 0$



$\sqrt[3]{x}-2 \geq 0$

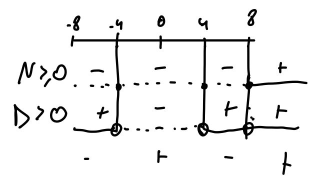
$\Updownarrow$

$\sqrt[3]{x} \geq 2$

$\uparrow$

$x \geq 8$

$D>0 \quad x^2>16 \quad x<-4 \vee x>4$



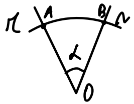
$-4<x<4 \quad \vee x \geq 8$

$X =]-4;4[\cup [8;+\infty[$

ANALISI - Giorno 5 ~~IIII~~

Misura in Radianti di un angolo

In un piano, consideriamo un angolo α



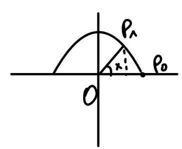
, denotiamo con γ la circonferenza di raggio O e unitario e con A e B, i punti di intersezione di γ con le semirette r ed s. Si chiama misura in radianti dell'angolo α, la lunghezza dell'arco di γ di estremi A e B incluso in α.

Si dimostra che la misura in rad di un angolo piatto è un numero irrazionale $(3,14 < x < 3,15)$ e si denota con π.

Denotata con ρ e g rispettivamente la misura in radianti e quella con gradi sessagesimali dell'angolo α vale la proporzione: $\rho : \pi = g : 180°$ da cui si evince:

g	ρ
0	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
270	$\frac{3}{2}\pi$

Fissiamo nel piano, un riferimento cartesiano $(O, x; y)$ e consideriamo la circonferenza γ di origine O e raggio unitario. Denotiamo con P_0 il punto in cui γ interseca il semiasse positivo delle ascisse. Se $x \in [0; 2\pi]$, a partire da P_0 in senso antiorario, fissiamo su γ il punto P_x tale che la lunghezza dell'arco di γ di estremi P_0 e P_x sia uguale ad x.

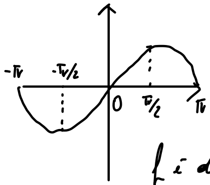


Si definisce ascissa di P_x, il coseno di x.

Si definisce ordinata di P_x, il seno di x.

FUNZIONI SENO E ARCOSENO

$f(x) = \operatorname{sen} x$



Dominio $= \mathbb{R}$

Codominio $= [-1;1]$

$\min f = -1$

$\max f = 1$

f è dispari

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

periodica di periodo minimo 2π

$\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$

f è strettamente crescente in

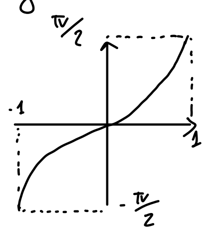
$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

f è strettamente decrescente in

$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

Una delle inverse locali è la funzione arcoseno. Precisamente la funzione è l'inversa della restrizione seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$g(x) = \operatorname{arcsen} x$



Dom: $[-1;1]$

Codom: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\min f = -\frac{\pi}{2}$

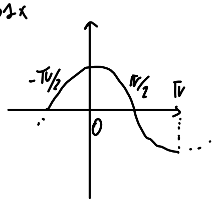
$\max f = \frac{\pi}{2}$

f è dispari

$\forall x \in [-1;1] \quad \operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen}(x)$

COSENO E ARCOCOSENO

$f(x) = \cos x$



Dom: $\mathbb{R}$

Codominio: $[-1;1]$

$\min f = -1$

$\max f = 1$

f è pari

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x$

f è periodica di periodo minimo 2π

$\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

f è strettamente decrescente in

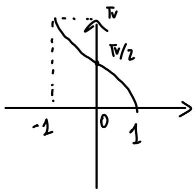
$[2k\pi, \underbrace{\pi + 2k\pi}_{(1+2k)\pi}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

f è strettamente crescente in

$[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Una delle inverse locali è la funzione arcocoseno. Precisamente la funzione arcoseno è l'inversa della restrizione coseno all'intervallo $[0, \pi]$

$f(x) = \arccos x$



Dom: $[-1; 1]$

Codom: $[0; \pi]$

$\min f = 0$

$\max f = \pi$

$\forall x \in [-1; 1] \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Le funzioni arcoseno e arcocoseno sono legate tramite la relazione: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad \forall x \in [-1; 1]$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

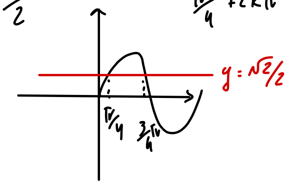
$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\,x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$



$$\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,;\, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right[$$

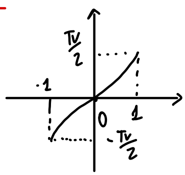
$\text{sen}\,x \leq \frac{1}{2}$ $\qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \cup \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$ $\qquad \forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\left[2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]\right\}$

$\text{sen}\,x > 0$ $\qquad 0 < x < \pi$ $\qquad \forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi \,;\, \pi + 2k\pi\right[$

$\text{sen}\,x > -3$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{sen}\,x < -3$ $\qquad \emptyset$

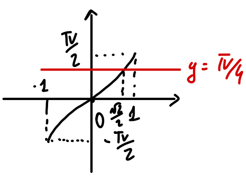
$\text{arcsen}\,x \geq 0$



$0 \leq x \leq 1$

$\forall x \in [0 \,;\, 1]$

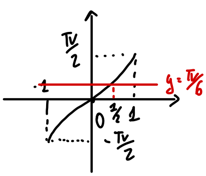
$\text{arcsen}\,x > \pi/4$



$\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$

$\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

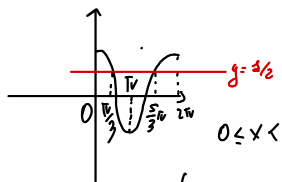
$\text{arcsen}\,x \leq \frac{\pi}{6}$



$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{1}{2}\right]$

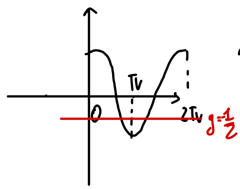
$\cos x > \frac{1}{2}$



$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi$

$$\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{5}{3}\pi + 2k\pi \,;\, 2\pi + 2k\pi\right]\right\}$$

$\cos x > -\frac{1}{2}$



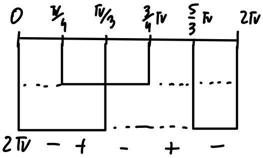
$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{4}{3}\pi < x \leq 2\pi$

$$\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{4}{3}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]\right\}$$

$$\frac{2\sin x - \sqrt{2}}{2\cos x - 1} > 0$$

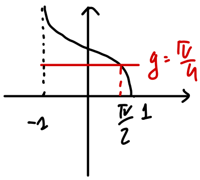
$N > 0 \iff \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$

$D > 0 \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff 0 \le x < \frac{\pi}{3} \cup \frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi$



$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right[\right\}$$

$\arccos x > \frac{\pi}{4}$



$-1 \le x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \forall x \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

$|\cos x| \le 1 \iff -1 \le \cos x \le 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\log^2 x + \log x + 5}{\log x - 2} > 0$$

$N > 0$

$\log^2 x + \log x + 5 > 0 \qquad \log x = t$

$t^2 + t + 5 > 0$

$\forall x \in]0, +\infty[$

$D > 0 \iff \log x > 2 \iff x = e^2$

$\forall x \in]e^2, +\infty[$

$2^{x^2+2} > 4$

$\Updownarrow$

$2^{x^2} \cdot 2^2 > 4 \iff 2^{x^2} \cdot 4 > 4$

$\Updownarrow$

$2^{x^2} > 1 \iff 2^{x^2} > 2^0$

$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 > 0$

$\Updownarrow$

$(3^x)^2 - 3^x \cdot 3 + 2 > 0$

$3^x = t$

$t^2 - 3t + 2 > 0$

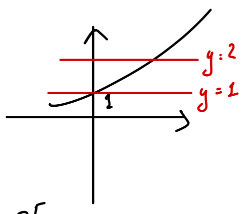
$\Delta = 1 \qquad t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

$t < 1 \cup t > 2$

$3^x < 3^0 \cup 3^x > 2$

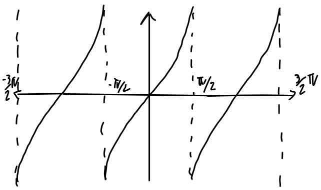
$x < 0 \cup x > \log_3 2$

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]\log_3 2, +\infty[$



ANALISI, GIORNO 6

Funzione Tangente e arcotangente



$f(x) = tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$

Dom $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

Codom $\mathbb{R}$

Dispari

periodica di periodo minimo π

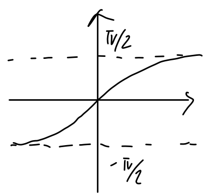
strett. crescente

localmente invertibile

$\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione nell'incognita X $\quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad tg\,x = y \qquad x = arctg\,y$

$\forall y \in \mathbb{R}$ le infinite soluzioni della funzione $\quad tg\,x = y \qquad x = arctg\,y + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Una delle inverse locali della funzione tg è la funzione $arctg$ che è esattamente l'inversa della restrizione della funzione tangente all'intervallo aperto di estremi $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$



$g(x) = arctg\,x$

Dom $\mathbb{R}$

Codom $\left]-\pi/2; \pi/2\right[$

$\inf g = -\pi/2$

$\sup g = \pi/2$

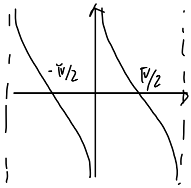
Dispari

Crescente

$\forall x \in \mathbb{R} \quad tg(arctg\,x) = x$

$\forall x \in \left]-\pi/2; \pi/2\right[\quad arctg(tg\,x) = x$

FUNZIONI COTANGENTE E ARCOCOTANGENTE



$$f(x) = \cot g\, x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Dom $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$

Codom $\mathbb{R}$

$\inf f = -\infty$

$\sup f = +\infty$

Periodica di periodo minimo π

illimitata

Dispari

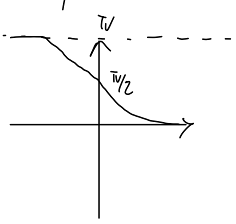
In ciascuno degli intervalli aperti la cui unione è l'insieme di definizione, la funzione cotg è strettamente decrescente.

localmente invertibile

$\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione nell'incognita $x \in]0, \pi[$ $\cot g\, x = y$ ammette un'unica soluzione che si denota con $x = \operatorname{arccotg} y$

$\forall y \in \mathbb{R}$ le infinite soluzioni dell'equazione nell'incognita x $\cot g\, x = y$ sono date in $x = \operatorname{arccotg} y + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Una delle inverse locali della funzione cotg è la funzione arctg che è esattamente l'inversa della restrizione della funzione cotangente all'intervallo aperto di estremi $]0; \pi[$



$g(x) = \operatorname{arccotg} x$

Dominio $\mathbb{R}$

Codominio $]0, \pi[$

limitata

$\sup g = \pi$

$\inf g = 0$

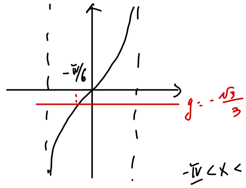
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cot g(\operatorname{arccotg} x) = x$

$\forall x \in]0, \pi[\quad \operatorname{arccotg}(\cot g\, x) = x$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{1 + \cot g^2 x} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \qquad \cos x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

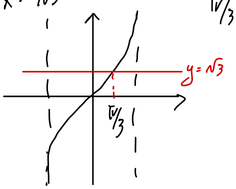
$\tg x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$



$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$

$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; -\frac{\pi}{6}+k\pi\right[$

$\tg x > \sqrt{3}$



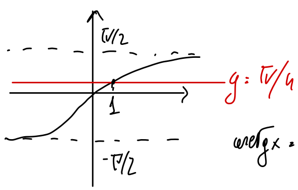
$\pi/3 < x < \pi/2$

$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\pi/3 + kz ; \pi/2 + kz\right[$

$4 \operatorname{arctg} x - \pi \geq 0$

$\Updownarrow$

$\operatorname{arctg} x \geq \pi/4$

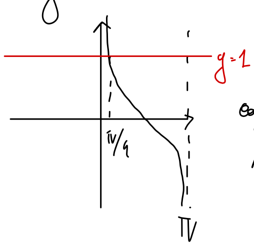


$\operatorname{arctg} x = \pi/4$

$x \geq 1$

$\forall x \in [1 ; +\infty[$

$\operatorname{cotg} x < 1$



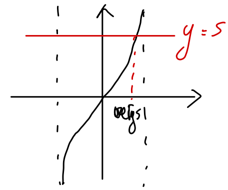
$\operatorname{cotg} x = 1$

$x = \pi/4$

$\pi/4 < x < \pi$

$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\pi/4 + k\pi ; \pi + k\pi\right[$

$\tg < 5$



$\tg x = 5$

$x = \operatorname{arctg} 5$

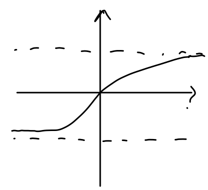
$-\pi/2 < x < \operatorname{arctg} 5$

$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\pi/2 + k\pi , \operatorname{arctg} 5 + k\pi\right[$

$\operatorname{arctg}(4-|x|) \geq 0$

$4-|x| = t$

$\operatorname{arctg} t \geq 0$



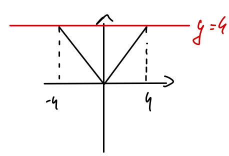
$\operatorname{arctg} t \geq 0$

$t \geq 0$

$4 - |x| \geq 0$

$\Updownarrow$

$|x| \leq 4$



$-4 \leq x \leq 4$

$\forall x \in [-4 ; 4]$

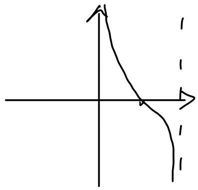
compatto: chiuso e limitato

$\cot g\, x \geq 1$

$0 < x \leq \pi/4$

$\forall x \in \bigcup_{K \in \mathbb{Z}} \left]K\pi ; \frac{\pi}{4} + K\pi\right]$

$\cot g\, x < 0$



$\pi/2 < x < \pi$

$\forall x \in \bigcup_{K \in \mathbb{Z}} \left]\pi/2 + K\pi ; \pi + K\pi\right[$

$f(x) = (4 + \cos x)^{-\sqrt{2}}$

$4 + \cos x > 0$

$\cos x > -4$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{\frac{16\, \operatorname{arctg}^2 x - \pi^2}{2^x + \sqrt{x}}}$

$\Downarrow$

$[0 ; +\infty[$

$$\begin{cases} \frac{16\, \operatorname{arctg}^2 x - \pi^2}{2^x + \sqrt{x}} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$D > 0$

$2^x + \sqrt{x} > 0$

$\Updownarrow$

$x \geq 0$

$N \geq 0 \iff 16\, \operatorname{arctg}^2 x - \pi^2 \geq 0$

$\operatorname{arctg}^2 x \geq \frac{\pi^2}{16}$

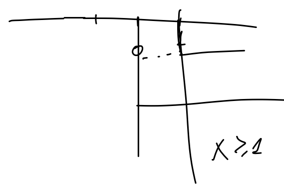
$T \leq -\pi/4 \ \cup\ T \geq \pi/4$

$\Updownarrow$

$\operatorname{arctg} x \leq -\pi/4 \ \cup\ \operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{4}$

$\Updownarrow$

$x \leq -1 \cup x \geq 1$



$x \geq 1$

$[1 ; +\infty[$

$X = [1 ; +\infty[$

$f(x) = \operatorname{arcTgh} \frac{x}{10}$

$]-1 ; 1[$

$-10 < \frac{x}{\cancel{10}} < 10$

$X =]-10, 10[$

$f(x) = \sqrt{\operatorname{Tgh}(\log x)}$

$[0 ; +\infty[$ $\quad \mathbb{R} \quad x > 0$

$$\begin{cases} \operatorname{Tgh}(\log x) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \to \operatorname{Tgh}(T) \geq 0$$

$\Updownarrow$

$T \geq 0 \iff \log x \geq 0 \iff x \geq 1$

$f(x) = \operatorname{arccosh}(x - 3)$

$\Updownarrow$

$[1, +\infty[$

$x - 3 \geq 1 \iff x \geq 4$

$X = [4 ; +\infty[$

$f(x) = \operatorname{arccosh}(5 - \sqrt{x}) \longrightarrow [0 ; +\infty[$

$\Updownarrow$

$[1, +\infty[$

$5 - \sqrt{x} \geq 1$

$\sqrt{x} \leq 4$

$0 \leq x \leq 16$

$X = [\quad]$

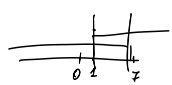
$f(x) = \log(7 - x) + \operatorname{arccosh} x$

$\Updownarrow$

$]0 ; +\infty[$

$7 - x > 0$

$$\begin{cases} x < 7 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



$1 \leq x < 7$

$X = [1, 7[$

$f(x) = [g(x)]^{h(x)} = e^{h(x) \lg g(x)}$

$f(x) = (x + 1)^x = e^{x \cdot \lg(x+1)}$

$g(x) > 0$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

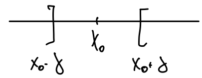
$x\ ]-1, +\infty[$

ANALISI - Giorno 7

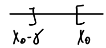
Intorni di un punto di $\overline{\mathbb{R}}$

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$,

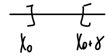
Si definisce intorno di x_0, ogni intervallo aperto di centro x_0, ovvero del tipo $]x_0-\delta; x_0+\delta[$



Si definisce intorno sinistro [destro] di x_0, ogni intervallo del tipo $]x_0-\delta; x_0]$



[$[x_0; x_0+\delta[$



OSSERVAZIONE

Evidentemente

L'intersezione di un numero finito di intorni [destri, sinistri] di x_0 è ancora un intorno [intorno destro, intorno sinistro] di x_0

Se x_0 e y_0 sono punti distinti di $\mathbb{R}$, esistono un intorno I di x_0 e un intorno J di y_0 disgiunti, ovvero tali che $I \cap J = \emptyset$

Si definisce intorno di $+\infty$, ogni intervallo aperto del tipo $]\delta, +\infty[$ con $\delta > 0$

Si definisce intorno di $-\infty$, ogni intervallo aperto del tipo $]-\infty, -\delta[$ con $\delta > 0$

L'intersezione di un numero finito di intorni di $+\infty$ $[-\infty]$ è ancora un intorno di $+\infty$ $[-\infty]$

Se x_0 e y_0 sono elementi distinti di $\overline{\mathbb{R}}$, esistono un intorno I di x_0 e un intorno J di y_0 disgiunti.

PUNTO ISOLATO

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in X$

Si dice che x_0 è un punto isolato di X se esiste almeno un intorno di x_0 che non contiene altri elementi di X

$X = \{0\} \cup [1,3[$

0 è un punto isolato

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad X_0 \in \mathbb{R}$

Si dice che X_0 è un punto di accumulazione di X, se ad ogni suo intorno appartiene almeno un punto di X diverso da esso.

$\forall$ intorno I di X_0 $\quad I \cap X - \{0\} \neq \emptyset$

Si dice che X_0 è un punto di accumulazione a destra [a sinistra] per X se ad ogni suo intorno destro [sinistro] appartiene almeno un punto di X diverso da esso.

Evidentemente

Se X_0 è un punto di accumulazione a destra o a sinistra per X, allora esso è anche punto di accumulazione per X

Esempio

$X =]1, 5]$

Inoltre se X_0 è di accumulazione per X, allora ad ogni suo intorno appartengono infiniti punti di X.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$,

si dice che $+\infty$ è di accumulazione di X, se ad ogni suo intorno appartiene almeno un punto di X.

si dice che $-\infty$ è di accumulazione di X, se ad ogni suo intorno appartiene almeno un punto di X.

Evidentemente

$+\infty$ è di accumulazione se e soltanto se X è un insieme illimitato superiormente

$-\infty$ è di accumulazione se e soltanto se X è un insieme illimitato inferiormente

INSIEME APERTO

Un insieme X si dice aperto se $\forall x_0 \in X$ $\exists$ un intorno di x_0 contenuto in X

Un insieme $X \subset \mathbb{R}$ si dice chiuso, se il suo complementare $\{x \in \mathbb{R} : x \notin X\}$ è aperto

$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono gli unici aperti e contemporaneamente chiusi.

TEOREMA

Un insieme X è chiuso se e soltanto se contiene tutti i suoi punti di accumulazione

OSSERVAZIONE

Un insieme infinito ha sempre almeno un punto di accumulazione. Infatti se un insieme è illimitato inferiormente [superiormente] almeno $-\infty$ [$+\infty$] è di accumulazione per esso.

TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS

Ogni insieme infinito e limitato ammette almeno un punto di accumulazione.

TEOREMA

Ogni insieme X chiuso e limitato superiormente [inferiormente] è dotato di massimo [minimo]

DIMOSTRAZIONE

Proviamo che se X è chiuso e limitato superiormente, allora esso è dotato di massimo

Intanto l'ipotesi X chiuso vuol dire che ogni punto di accumulazione per X appartiene ad X. Invece l'ipotesi X limitato superiormente, significa che il suo estremo superiore è un numero reale.

Per provare che X è dotato di massimo, bisogna far vedere che il suo estremo superiore appartiene all'insieme stesso $e'' = \sup X < +\infty$

Se e'' è punto di accumulazione per X, essendo per ipotesi X chiuso, allora $e'' \in X$ per cui e'' è il max di X

Se X non fosse un punto di accumulazione per X, $\exists$ un intorno e'' $]e''-\delta, e''+\delta[$ al quale $\notin$ punti di X. Per cui $e''-\delta$ risulterebbe un maggiorante di X

il che è assurdo perché supposto $e''=\sup X$, e'' è dunque il più piccolo dei maggioranti. Pertanto l'asserto è provato

DEFINIZIONE

Un insieme compatto è dotato di minimo e massimo.

Un insieme dotato di minimo e massimo non è detto che sia compatto. Ad esempio:

$X=[1,2[\cup]5,11]$

È dotato di minimo pari ad 1 e di massimo pari ad 11 ma non è compatto in quanto, pur essendo limitato non è chiuso perché

2 e 5 sono punti di accumulazione per X ma non appartengono ad X

L'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$

L'insieme $\mathbb{Z}$ ne ha due: $\pm\infty$

DEFINIZIONE DI LIMITE PER LE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Siano $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, $l\in\overline{\mathbb{R}}$

Si dice che al tendere di x ad x_0, $f(x)$ tende ad l o al limite l e si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ se è verificata la seguente condizione

$\angle$) $\forall$ intorno J di l $\exists$ un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x\in I_0\cap X-\{x_0\}$ $f(x)\in J$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Al tendere di X ad X_0, $f(x)$ non può tendere a due elementi distinti di $\overline{\mathbb{R}}$

DIMOSTRAZIONE

Ragionando per assurdo, ammettiamo che al tendere di X a X_0, $f(x)$ tende a due elementi distinti di $\overline{\mathbb{R}}$, l_1 e l_2.

Essendo l_1 e l_2 due elementi distinti di $\overline{\mathbb{R}}$, esistono un intorno J_1 di l_1 ed un intorno J_2 di l_2 disgiunti, ovvero tali che $J_1 \cap J_2 = \emptyset$

In base all'ipotesi fatta, in corrispondenza di J_1 esiste un intorno I_1 di X_0 tale che $\forall x \in I_1 \cap X - \{X_0\}$ $f(x) \in J_1$ e in corrispondenza dell'intorno J_2 di l_2, esiste un intorno I_2 di X_0 tale che $\forall x \in I_2 \cap X - \{X_0\}$ $f(x) \in J_2$

Posto $I_0 = I_1 \cap I_2$ (ancora un intorno di X_0) si ha allora che $\forall x \in I_0 \cap X - \{X_0\}$ $f(x) \in J_1 \cap J_2$, ma ciò è assurdo giacché J_1 e J_2 sono disgiunti.

In base a tale teorema se al tendere di X a X_0 $f(x)$ tende ad l, tale elemento è unico e prende il nome di limite di f nel punto X_0

Se $l \in \mathbb{R}$ si dice anche che f è convergente in X_0.

Se $l = +\infty$ si dice anche che f diverge positivamente in X_0

Se $l = -\infty$ si dice anche che f diverge negativamente in X_0.

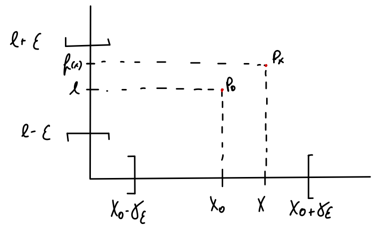
In particolare se $l = 0$ si dice anche che f è infinitesima in X

Se f è dotata di massimo in X_0, si dice anche che f è regolare in X_0

La condizione ℓ è nota come definizione di limite e si specializza nei seguenti 8 casi possibili.

1) $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ $\qquad x_0-\delta_\varepsilon < x < x_0+\delta_\varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in X$ con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ $\quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \iff -\delta_\varepsilon < x - x_0 < \delta_\varepsilon \iff x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$



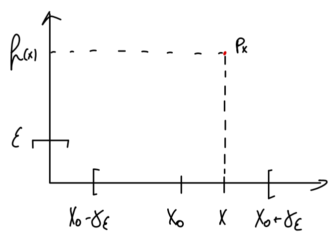
$\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + \ell$

$J =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Geometricamente l'uguaglianza 1 vuol dire che attribuendo alla variabile x valori sempre più vicini ad x_0, ma distinti da x_0, il punto $P_x\ (x, f(x))$ tende ad assumere la posizione $P_0\ (x_0, \ell)$

2) $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in X$ con $\quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ risulta $f(x) > \varepsilon$

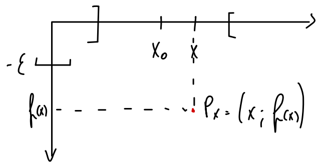
② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad J =]\varepsilon, +\infty[$



Geometricamente l'uguaglianza 2 vuol dire che attribuendo alla variabile x valori sempre più vicini ad x_0, ma distinti da x_0, il punto $P_x\ (x, f(x))$ tende a spostarsi verso l'alto senza arrestarsi mai

3) $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad l = -\infty$

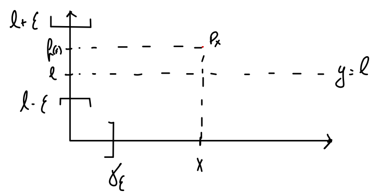
(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X$ con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ risulta $f(x) < -\varepsilon$



Geometricamente l'uguaglianza 3 vuol dire che attribuendo alla variabile x valori sempre più vicini ad x_0, ma distinti da x_0, il punto $P_x\ (x, f(x))$ tende a spostarsi verso il basso senza arrestarsi mai

4) $x_0 = +\infty$, $\quad l \in \mathbb{R}$

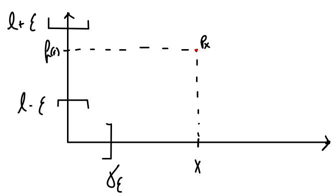
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X$ con $x > \delta_\varepsilon$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$



Geometricamente l'uguaglianza 4 vuol dire che attribuendo alla variabile x valori sempre più grandi, il punto $P_x\ (x, f(x))$ si avvicina sempre di più alla retta di equazione $y = l$

5) $x_0 = +\infty$, $\quad l = +\infty$

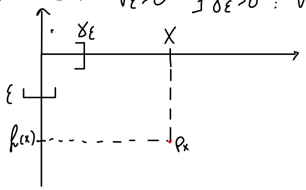
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X$ con $x > \delta_\varepsilon$ risulta $f(x) > \varepsilon$



Geometricamente l'uguaglianza 5 vuol dire che attribuendo alla variabile x valori sempre più grandi, il punto $P_x\ (x, f(x))$ si sposta verso l'alto senza arrestarsi mai

6) $X_0 = +\infty$, $l = -\infty$

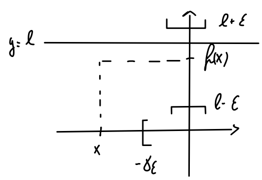
6) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma_\varepsilon > 0 : \forall x \in X$ con $x > \gamma_\varepsilon$ risulta $f(x) < -\varepsilon$



Geometricamente l'uguaglianza 6 vuol dire che attribuendo alla variabile X valori sempre più grandi, il punto P_x $(x, f(x))$ si sposta verso il basso senza arrestarsi mai

7) $X_0 = -\infty$, $l \in \mathbb{R}$

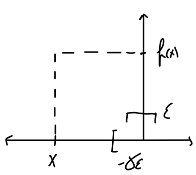
7) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma_\varepsilon > 0 : \forall x \in X$ con $x < -\gamma_\varepsilon$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$



Geometricamente l'uguaglianza 4 vuol dire che attribuendo alla variabile X valori sempre più piccoli, il punto P_x $(x, f(x))$ si avvicina sempre di più alla retta di equazione $y = l$

8) $X_0 = -\infty$, $l = +\infty$

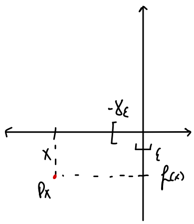
8) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma_\varepsilon > 0 : \forall x \in X$ con $x < -\gamma_\varepsilon$ risulta $f(x) > \varepsilon$



Geometricamente l'uguaglianza 4 vuol dire che attribuendo alla variabile X valori sempre più piccoli, il punto P_x $(x, f(x))$ tende a spostarsi verso l'alto senza arrestarsi mai

9) $x_0 = -\infty$, $\ell = -\infty$

9) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X$ con $x < -\delta_\varepsilon$ risulta $f(x) < -\varepsilon$



Geometricamente l'uguaglianza 4 vuol dire che attribuendo alla variabile X valori sempre più piccoli, il punto $P_x\ (x, f(x))$ tende a spostarsi verso il basso senza arrestarsi mai

OSSERVAZIONI SUI LIMITI

Siano $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X

Se esistono un intorno I_0 di x_0 ed una costante reale K tale che $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) = K$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = K$

DIMOSTRAZIONE

Infatti detto J un arbitrario intorno di K si ha che $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) \in J$ e dunque $\lim_{x \to x_0} f(x) = K$

Se A è una parte di X avente x_0 come punto di accumulazione allora il limite nel punto x_0 della restrizione di f ad A quando esiste, prende il nome di limite nel punto x_0 di f su A e si denota con il simbolo $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$

Per $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha.

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \ell$

DIM

L'ipotesi fatta ci dice che fissato un arbitrario intorno J di ℓ $\exists$ un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) \in J$ e conseguentemente $\forall x \in I_0 \cap A \setminus \{x_0\}$ $f(x) \in J$ e ciò vuol dire che $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \ell$

Dall'implicazione 1 si evince che se A e B sono parti di X aventi entrambe x_0 come punto di accumulazione e tali che esistono e sono diversi tra loro i limiti

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$ $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x)$ allora f non è regolare in x_0 (non esiste nel punto x_0 il limite)

Tali considerazioni e consentono di stabilire ad esempio che le funzioni sen x, cos x, tg x, cotg x non sono regolari nei punti $+\infty$ e $-\infty$

Posto

$$A = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\},\ B = \{2k\pi + \tfrac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\},\ C = \{2k\pi + \tfrac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Tenuto che $-\infty$ e $+\infty$ sono punti di accumulazione per ciascuno di questi insiemi risultando

$\forall x \in A$ sen $x = 0$, $\forall x \in C$ sen $= 1$

$\forall x \in A$ cos $x = 1$, $\forall x \in C$ cos $= 0$

$\forall x \in A$ tg $= 0$, $\forall x \in B$ tg $= 1$

$\forall x \in C$ cotg $= 0$, $\forall x \in B$ cotg $= 1$

Riassumendo tutto questo si ha:

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in A}} \operatorname{sen} x = 0,\ \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in C}} \operatorname{sen} x = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in A}} \cos x = 1,\ \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in C}} \cos x = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in A}} \operatorname{tg} = 0,\ \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in B}} \operatorname{tg} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in C}} \operatorname{cotg} = 0,\ \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in B}} \operatorname{cotg} = 1$$

Pertanto le funzioni sen, cos, tg, cotg non sono dotate di limite nei punti $\pm\infty$

Osserviamo che studiare il limite di f nel punto x_0 equivale a studiare il limite in x_0 della restrizione di f a $I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ essendo I_0 un intorno di x_0

Per $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$$

DIMOSTRAZIONE

Se $l \in \mathbb{R}$, in base all'ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I_ε di x_0 tale che $\forall x \in I_\varepsilon \cap X \setminus \{x_0\}$ $|f(x) - l| < \varepsilon$, da cui $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$

e ciò vuol dire che $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

Se $l = -\infty$, in base all'ipotesi dato $\varepsilon > 0$ $\exists$ un intorno I_ε di x_0 tale che $\forall x \in I_\varepsilon \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) > \varepsilon$ per cui $\forall x \in I_\varepsilon \cap X \setminus \{x_0\}$ $|f(x)| > \varepsilon$ ovvero $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

Se $l = +\infty$, in base all'ipotesi dato $\varepsilon > 0$ $\exists$ un intorno I_ε di x_0 tale che $\forall x \in I_\varepsilon \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) < -\varepsilon$ per cui $\forall x \in I_\varepsilon \cap X \setminus \{x_0\}$ $|f(x)| = -f(x) > \varepsilon$

ovvero $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |-\infty| = +\infty$. L'implicazione inversa è vera se e solo se l è uguale a 0

OSSERVIAMO

Osserviamo che esistono situazioni in cui il modulo di una funzione è regolare in un punto senza che lo sia la funzione

$f: x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, non è regolare in 0, in quanto $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in [0, +\infty[}} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in [-\infty, 0]}} f(x) = 0$, invece il modulo della funzione $|f|: x \in \mathbb{R} \to 1$

è regolare in 0 ed ha ivi limite $= 1$

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X

la scrittura $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l^+$ $[\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l^-]$ dove $l \in \mathbb{R}$ vuol dire che sono verificate le due seguenti condizioni:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
- $\exists$ un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) > l$ $[f(x) < l]$

LIMITE SINISTRO E DESTRO

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione a sinistra [destra] per X

$X_{(x_0^-)} = \{x \in X : x < x_0\}$, $[X_{(x_0^+)} = \{x \in X : x > x_0\}]$

Si dice che f è regolare a sinistra [destra] nel punto x_0 se esiste il seguente limite: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X(x_0^-)}} f(x)$ $\left[\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X(x_0^+)}} f(x)\right]$

Tale limite dicesi allora il limite sinistro [destro] di f nel punto x_0 e si denota con uno dei seguenti simboli: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ o $f(x_0^-)$

$\left[\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \text{ o } f(x_0^-)\right]$

Se x_0 è di accumulazione sia a sinistra che a destra per X, allora f è regolare in x_0 con limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\exists$ e sono uguali ad l, il limite sinistro e quello destro nel punto x_0

Limiti delle funzioni monotone

Sussiste il seguente teorema:

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone

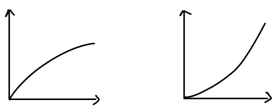
Se $e'' = \sup X$ è di accumulazione per X allora f crescente $\Rightarrow \lim_{x \to e''} f(x) = \sup f(x)$ con $x \in X - \{e''\}$

f decrescente $\Rightarrow \lim_{x \to e''} f(x) = \inf f(x)$ con $x \in X \setminus \{e''\}$

Se $e' = \inf X$ è di accumulazione per X allora f crescente $\Rightarrow \lim_{x \to e'} f(x) = \inf f(x)$ con $x \in X \setminus \{e'\}$

f decrescente $\Rightarrow \lim_{x \to e'} f(x) = \sup f(x)$ con $x \in X \setminus \{e'\}$

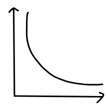
$f(x) = x^{\alpha}$ $\quad \alpha =$ numero non intero positivo



Dom $[0, +\infty[$ = Codominio

$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$

$f(x) = x^{-\alpha}$

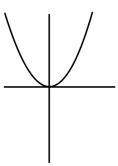


Dom $]0, +\infty[$ = Codominio

$\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} = 0$

$\lim_{x \to 0} x^{-\alpha} = +\infty$

$f(x) = x^n$ $\quad n$ pari



Dom

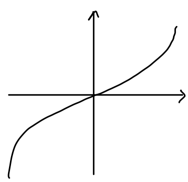
$X = \mathbb{R}$

Codom $f(x) = [0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = x^n$ $\quad n$ dispari

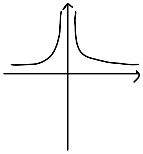


$X = \mathbb{R} = f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = x^{-n}$ n pari



$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

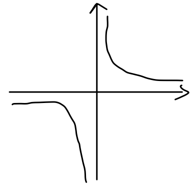
$f(X) =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$f(x) = x^{-n}$ n dispari



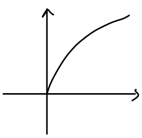
$Dom = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ = Codominio

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

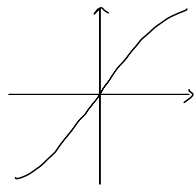
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ n pari



$Dom = [0, +\infty[$ = Codom

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ n dispari

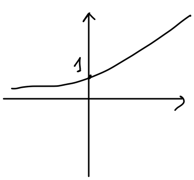


$Dom = \mathbb{R}$ = Codom

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$

$f(x) = a^x$ $a > 1$



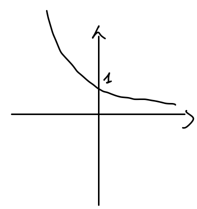
$Dom = \mathbb{R}$

Codom $= [0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

$f(x) = a^x$ $0 < a < 1$



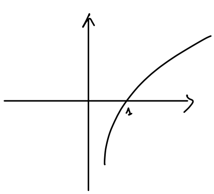
Dom

Codom

$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

$f(x) = \log_a x$ $a > 1$



$Dom =]0, +\infty[$

Codom $= \mathbb{R}$

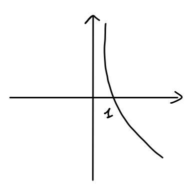
$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$

$f(x) = \log_a x$ $0 < a < 1$

$Dom = [0, +\infty[$

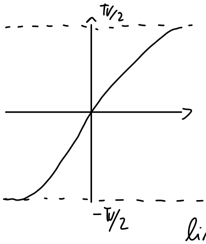
Codom $= \mathbb{R}$



$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

$\lim_{x \to 0} \log_a x = +\infty$

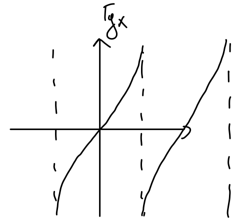
Analisi - Giorno 8



$f(x) = \operatorname{arctang} x$

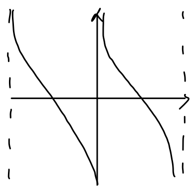
$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$

$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$



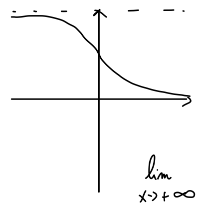
$f(x) = \operatorname{Tg} x$

$\lim_{x \to (\pi/2 + k\pi)^{\pm}} \operatorname{Tg} x = \mp \infty$



$f(x) = \operatorname{cotg} x$

$\lim_{x \to (k\pi)^{\pm}} \operatorname{cotg} = \pm \infty$



$f(x) = \operatorname{Arccotg} x$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$

Funzione Continua

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$

Si dice che f è continua in x_0 se $\forall$ intorno J di $f(x_0)$ $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x \in I_0 \cap X$ $f(x) \in J$

Ovvero se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$: $\forall x \in X$ con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Se x_0 è di accumulazione per X allora f è continua in x_0 $\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Se A è una parte di X, si dice che f è continua in A se essa è continua in ogni punto di A. Le funzioni continue in ogni punto del loro insieme di definizione si dicono funzioni continue

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 di acc. a sinistra [destra] per X,

Si dice che f è continua a sinistra [destra] in x_0 $\iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ $\left[\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\right]$

Evid. f è continua in $x_0 \iff$ lo è sia a sinistra che a destra.

Teorema (*) CRITERIO DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona

Se $\underset{\text{Codom di } f.}{f(X)}$ è un intervallo, allora f è continua.

Dal Teorema si deduce che ogni funzione elementare è continua

TEOREMI SUI LIMITI (DI CONFRONTO)

① Permanenza del segno

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X con $\overset{\text{limite}}{\ell} \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Se $\ell > 0$ allora $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) > 0$

Se $\ell < 0$ allora $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) < 0$

DIM.

(Caso $\ell > 0$)

Se $\ell = +\infty$, tenendo presente la def. di limite, fissato $\varepsilon > 0$ $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) > \varepsilon$ da cui essendo $\varepsilon > 0$ segue che $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) > 0$

Caso $\ell \in]0; +\infty[$, in base alla def. di limite, fissato $\varepsilon \in]0, \ell[$ $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ risulta $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ da cui $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) > 0$ (essendo $f(x) > \ell - \varepsilon$ ed $0 < \varepsilon < \ell$)

Analogamente si prova il caso $\ell < 0$

(2)

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dotata di limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Se $\exists$ un intorno I_0 di x_0: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) \geq 0$ $[f(x) \leq 0]$ allora $l \geq 0$ $[l \leq 0]$

Dim

Supponiamo che $\exists$ un intorno I_0 di x_0: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) \geq 0$ e facciamo vedere che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \geq 0$

Ragionando per assurdo ammettiamo che sia $l < 0$. In tal caso stante il Teorema (1) esisterebbe un intorno I_1 di x_0: $\forall x \in I_1 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) < 0$

Posto $I_2 = I_0 \cap I_1$, si avrebbe $\forall x \in I_2 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) \geq 0$ e $f(x) < 0$ il che non è possibile. Pertanto l'assunto è provato

I teoremi (1) e (2) sono casi particolari del seguente teorema: (3)

Siano f_1 ed f_2 funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$, regolari nel punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Posto $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = l_1$, $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = l_2$ si ha quanto segue:

Se $l_1 < l_2$ allora $\exists$ un intorno I_0 di x_0: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f_1(x) < f_2(x)$

Se $\exists$ un intorno I_0 di x_0: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f_1(x) \leq f_2(x)$ allora $l_1 \leq l_2$

Criteri di Regolarità per Confronto

(4) Siano f, f_1 ed f_2 funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di acc. per X.

Nelle ipotesi f_1 ed f_2 convergono in x_0 verso lo stesso limite l

$\exists I_0$ di x_0: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$

Risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Dim

Sia $\varepsilon>0$

Fissato $\varepsilon>0$ l'ipotesi 1 assicura che $\exists$ due intorni I_1 e I_2 di x_0 : $\forall x\in I_1\cap X\setminus\{x_0\}$ $l-\varepsilon<f_1(x)<l+\varepsilon$

$\forall x\in I_2\cap X\setminus\{x_0\}$ $l-\varepsilon<f_2(x)<l+\varepsilon$

Posto $I_3=I_0\cap I_1\cap I_2$ tenendo presente la seconda ipotesi si ha allora che $\forall x\in I_3\cap X\setminus\{x_0\}$ $l-\varepsilon<f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)<l+\varepsilon$ e

Ciò significa che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

TEOREMA (5)

Siano f_1 ed f_2 funzioni reali definite in $X\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Supponiamo che $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x\in I_0\cap X\setminus\{x_0\}$ $f_1(x)\le f_2(x)$

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=+\infty$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=+\infty$ A_1

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=-\infty$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=-\infty$ A_2

Proviamo $A1$ Dim

L'ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=+\infty$ vuol dire che fissato $\varepsilon>0$ $\exists$ un intorno I_1 di x_0: $\forall x\in I_1\cap X\setminus\{x_0\}$ $f_1(x)>\varepsilon$

Posto $I_2=I_0\cap I_1$ si ha allora che $\forall x\in I_2\cap X\setminus\{x_0\}$ $\varepsilon<f_1(x)\le f_2(x)$ ovvero $\forall x\in I_2\cap X\setminus\{x_0\}$ $f_2(x)>\varepsilon$ ovvero $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=+\infty$

Limite di una funzione composta (6)

Siano $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g: Y\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A=\{x\in X: f(x)\in Y\}$ l'insieme di definizione di $g\circ f$, $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ di acc. per A

Nelle ipotesi

1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)=y_0$ con $y_0\in\overline{\mathbb{R}}$ di acc. per Y;

2) $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=l\in\overline{\mathbb{R}}$

3) $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) \neq y_0$

Risulta $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

DIM

L'ipotesi 2 assicura che dato J un intorno di l $\exists$ un intorno J_1 di y_0 : $\forall y \in J_1 \cap Y \setminus \{y_0\}$ $g(y) \in J$ (*)

in base all'ipotesi 1 in corrispondenza di J_1 $\exists$ un intorno I_1 di x_0 : $\forall x \in I_1 \cap A \setminus \{x_0\}$ $f(x) \in J_1$

Posto $I_2 = I_0 \cap I_1$ tenendo presente (*) si ha allora che $\forall x \in I_2 \cap A \setminus \{x_0\}$ $g(f(x)) \in J$ $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$

OSSERVAZIONE

L'ipotesi 3 è verificata quando $y_0 \notin Y$, in particolare quando $y_0 = \pm\infty$

$\lim_{x \to 0} \log_{\frac{1}{3}} \operatorname{sen} x$ $\quad y = \operatorname{sen} x$

$\downarrow$

$\lim_{y \to 0} \log_{\frac{1}{3}} y = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} e^{x} = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = 0$

$\lim_{x \to 0} \log_2 \frac{1}{x^2} = \quad \Rightarrow \lim_{y \to +\infty} \log_2 y$

$y = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $\quad \nexists$

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{y \to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\pi/2$

$y = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \pi/2$

$\downarrow$
$+\infty$

$y = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{senh} \sqrt[3]{x^2}$ $\quad \lim_{y \to +\infty} \operatorname{senh} \sqrt[3]{y}$ $\quad \lim_{T \to +\infty} \operatorname{senh} T = +\infty$

$\downarrow$
$+\infty$

$\downarrow$
T

ANALISI - Giorno 8

Limite di una somma, prodotto, rapporto di funzioni

Premettiamo le seguenti convenzioni

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} \quad (+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\} \quad (-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \quad (+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0 \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \quad (-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \quad \frac{+\infty}{x} = +\infty \cdot \frac{1}{x} \; , \; -\frac{\infty}{x} = -\infty \cdot \frac{1}{x}$

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad \frac{x}{+\infty} = 0 \; , \; \frac{x}{-\infty} = 0$

Non viene attribuito nessun significato a:

$+\infty - \infty \, , \; -\infty + \infty \, , \; 0 \cdot (\pm\infty) \, , \; (\pm\infty) \cdot 0 \, , \; \frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)} \; ; \; \frac{\lambda}{0} \; \forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$

Le precedenti scritture, tranne l'ultima quando $\lambda \neq 0$, sono dette forme indeterminate

TEOREMA

Siano f_1 ed f_2 reali e definite in $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X.

Nelle ipotesi:

$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}} \, , \; \lim_{x \to x_0} f_2(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

si ha quanto segue:

se $l_1 + l_2$ non è una forma indeterminata allora,

$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$

se $l_1 \cdot l_2$ non è una forma indeterminata, allora:

$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = l_1 \cdot l_2$

se $l_2 \neq 0$ ed $\frac{l_1}{l_2}$ non è una forma indeterminata, allora

$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right] = \frac{l_1}{l_2}$

TEOREMA

Siano $f_{(1)}$ ed $f_{(2)}$ reali, definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ con $f_2(x) \neq 0 \ \forall x \in X$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Nelle ipotesi

$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \to x_0} f_{(2)}x = 0$

si ha quanto segue:

se $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0^+ [0^-]$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lambda \cdot (+\infty) \ [\lambda \cdot (-\infty)]$

· se $\forall$ intorno I_0 di x_0 in $I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f_2(x)$ assume sia valori positivi che negativi, allora: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ non è regolare in x_0

OSSERVAZIONE

Dai due teoremi si deduce che nulla può dirsi circa l'esistenza o meno del $\lim_{x \to x_0} f_1/f_2$ nei casi $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\frac{0}{0}$

TEOREMI

Siano f_1 ed f_2 reali, definite in $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X

· Se $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = +\infty \ [-\infty]$ e se f_2 è lim. inf. [sup.] allora $\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = +\infty \ [-\infty]$ 1

· Se $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = 0$ e f_2 è limitata allora $\lim_{x \to x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = 0$ 2

DIM. 1

L'ipotesi f_2 lim. inf. vuol dire che $\exists$ un numero reale h : $f_2(x) \geq h \quad \forall x \in X$

Conseguentemente $\forall x \in X$ $f_1(x) + f_2(x) \geq f_1(x) + h$ da cui tenuto conto che $\lim_{x \to x_0} f_1(x) + h = +\infty + h = +\infty$ per un noto criterio di regolarità per confronto risulta $\lim_{x \to x_0} f_1(x) + f_2(x) = +\infty$

Proviamo ora 2

L'ipotesi f_2 limitata garantisce che $\exists$ un numero $\lambda > 0$: $\forall x \in X \quad |f_2(x)| \leq \lambda$

Conseguentemente $\forall x \in X$ $|f_1(x) \cdot f_{(2)}x| = |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| \leq |f_1(x)| \cdot \lambda$

. L'ipotesi 2 vuol dire che fissato $\varepsilon > 0$, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\} \quad |f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$

da cui:

$$\forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\} \quad |f_1(x)\cdot f_2(x)| \le |f_1(x)| \cdot \cancel{\delta} < \frac{\varepsilon}{\cancel{\delta}}\cdot \cancel{\delta}$$

E ciò stante la def. di limite significa che $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{x^4}_{+\infty}+\sin^2 x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\log_{\frac13} x}_{+\infty} + \underbrace{\cos^6 \tfrac{1}{x}}_{\text{lim}}\Big)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{\sqrt[5]{5x}}_{-\infty}+\sqrt[3]{\cos x})=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\Bigg(\underbrace{\log_2 2^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}_{-\infty}+\underbrace{\frac{1}{2+\sin^2\frac{1}{x}}}_{\text{lim}}\Bigg)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^4 x}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\boxed{\frac{1}{\underbrace{e^x}_{+\infty}}=0}\ \sin^4 x=0$$

$$\lim_{x\to 3}\underbrace{2^{-\frac{1}{\sqrt{x-3}}}}_{0}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{\cos x}\right)=0$$

Applicazione del teorema del segno

Da tale teorema si deduce il seguente

Sia $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua in $x_0\in X$ di acc. per X

Se $f(x_0)>0$ $[f(x_0)<0]$ allora $\exists$ un intorno I_0 di x_0 : $\forall x\in I_0\cap X$ $f(x)>0$ $[f(x)<0]$

Dai teoremi prec. stabiliti, si evince che: il modulo di una funzione continua è una funzione continua, una f. composta da f. continue è una f. continua, la somma, il prodotto e il rapporto di f. continue sono f. continue

CONTINUITÀ E LIMITI DI POLINOMI E FUNZIONI RAZIONALI

Siano $a_0, a_1 \dots a_n$ numeri reali, la f. $p: x\in\mathbb{R}\to a_0+a_1x+a_nx^n$ si chiama f. polinomio di grado n. Tale f. in quanto somma di f. continue è una f. continua. Circa il calcolo dei limiti della funzione p. in $\mp\infty$ si procede come segue

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0+a_1x+\dots a_nx^n)=\lim_{x\to\pm\infty}x^n\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\dots a_n\right)=\lim_{x\to\pm\infty}a_n\cdot x^n$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2-5x^4-7x^7\right)=\lim_{x\to+\infty}-7x^7=-7\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lg x=y$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3\lg^2 x-5\lg^6 x\right)=\lim_{x\to+\infty}\lg x=+\infty \Rightarrow \lim_{y\to+\infty}\left(3y^2-5y^6\right)=\lim_{y\to+\infty}5y^6=-5\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot 7^x-3\cdot 7^{x+1}+2\cdot 7^{4x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot 7^x-21\cdot 7^x+2\cdot 7^{4x}\right)\Rightarrow\lim_{y\to+\infty}\left(2y-21y+2y^4\right)=\lim_{y\to+\infty}2y^4=2\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$7^{(4x)}=\left(7^x\right)^4$$

$$\lim_{x\to+\infty}7^x=+\infty$$

$$7^x=y$$

Assegnati i polinomi $P_1(x)=a_0+a_1x+\dots a_mx^m$

$P_2(x)=b_0+b_1x+\dots b_mx^m$

$f(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ è detta funzione razionale

Per il calcolo di f in $\pm\infty$ si procede come segue

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m\cdot x^m}{b_m\cdot x^m}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3x^5+11}{x^2+x^4+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^5}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}-3x=-3(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x^2+\sqrt[3]{\operatorname{sen}x}}{x^5+\cos\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{5}3}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^3}}=e^0=1$$

$$\lg_5 x=y$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\lg_5 x+4\lg_5^2 x}{\lg_5^4 x+3}=\lim_{y\to+\infty}\frac{3x+4y^2}{y^4+3}=\lim_{y\to+\infty}\frac{4\cancel{y^2}}{y^{\cancel{4}2}}=\frac{4}{y^2}=0$$

APPUNTI DI ANNALISA

FORME INDETERMINATE

CASO DELLE SUCCESSIONI REALI

SUCCESSIONI ESTRATTE / REGOLARI / MONOTONE

TEOREMA PONTE

PROPRIETÀ FUNZIONI CONTINUE

LIMITI NOTEVOLI

Analisi - Giorno 10

$\forall a \in]1; +\infty[$ e $\forall R \in]0; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} |x|^R \cdot e^x = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^R} = +\infty$ $\qquad e^x$ prevale su x^R

$\forall a \in]0, 1[$ e $\forall R \in]0; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{|x|^R} = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} x^R \cdot e^x = 0$

Risulta

$\forall a \in]0; +\infty[\setminus \{1\}$ e $\forall R \in]0; +\infty[$

$\lim_{x \to 0} x^R \log_a x = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^R} = 0$

Risulta

$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsinh} x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Tgh} x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctgh} x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh x}{x} = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

PUNTO DI DISCONTINUITÀ

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di acc. per X

Si dice che f è discontinua in x_0 o che x_0 è punto di discontinuità per f quando si verifica una delle seguenti condizioni:

1) $x_0 \notin X$

2) $x_0 \in X$ ed f non é continua in x_0.

Si dice che x_0 é punto di discontinuità eliminabile per f se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

In tal caso $\tilde{f} : x \in X \cup \{x_0\} \to \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$

Se $x_0 \in X$ si ottiene da f modificandone il valore in x_0 ed associando l ad x_0. Se $x_0 \notin X$, la f. prima definita é un prolungamento di f su $X \cup \{x_0\}$ detto

il prolungamento continuo di f su x_0.

Esempio

Consideriamo $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ la quale é definita su $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_0 = 0$ é di acc. per X. Pertanto f é discontinua in $x_0 = 0$. Poiché $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, x_0 é punto di

discontinuità eliminabile per f

Rilevato che $x_0 = 0 \notin X$, la f. definita come segue

$\tilde{f} : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é il prolungamento continuo di f su $x_0 = 0$.

Si dice che x_0 é punto di discontinuità di prima specie per f sia a destra che a sinistra, ed esistono e sono distinti il limite destro e sinistro. In tal caso

$S_f(x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ prende il nome di salto di discontinuità della funzione f nel punto x_0.

Si dice che x_0 é punto di discontinuità di seconda specie per f, quando non é né eliminabile né di prima specie

Esercizi sui limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - 2\operatorname{sen} x}{4x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (3 - 2\overbrace{\tfrac{\operatorname{sen} x}{x}}^{1})}{\cancel{x}(4 - \underbrace{\tfrac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1})} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 1} (1 + \log x)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e \qquad y = \log x$$

$$\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e \qquad y=3x$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{\log x}\right)^{\log x} = \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{2}{y}\right)^{y} = e^{2} , \qquad y=\log x$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg(1+\operatorname{arcsinh} x)}{(1+\operatorname{arcsinh} x)^5} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\log y}{y^5} = 0 \qquad y=(1+\operatorname{arcsinh} x)$$

$$\lim_{x\to 0} 11x \cdot \log 11x = \lim_{y\to 0} y \log y = 0 \qquad y=11x$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}} \sqrt[5]{3x-1} \cdot \lg(3x-1) = \lim_{x\to \frac{1}{3}} y^{\frac{1}{5}} \cdot \lg y = 0 \qquad y=3x-1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{y\to 0} (y^2)^{y^3} = \qquad y=\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{y^3 \log y^2} = \lim_{y\to 0} e^{2y^3 \log y} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg(2-\operatorname{tgh} x)}{1-\operatorname{tgh} x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\lg[1+(1-\operatorname{tgh} x)]}{1-\operatorname{tgh} x} = \lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1 \qquad y=1-\operatorname{tgh} x \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

ASINTOTI

Siano $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ di acc. a sinistra [a destra] per X

(1) Se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ $\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty\right]$ si dice che la retta $x=x_0$ è asintoto verticale a sinistra [a destra] del diagramma di f, in alto se il lim. (1) vale $+\infty$, in basso se lim. (1) vale $-\infty$

Siano $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con X illimitato superiormente [inferiormente], Γ il diagramma di f, r una retta non verticale di equazione $y=mx+q$.

Si dice che la retta r è asintoto a destra [a sinistra] di Γ se $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$ $\left[\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+q)]=0\right]$. In particolare per $m=0$ si parla di asintoto orizzontale, mentre per $m\neq 0$ si parla di asintoto obliquo

TEOREMA

La retta r è asintoto a destra [a sinistra] per Γ $\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q$ $\left[\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q \right]$. Evidentemente

Γ è dotato di asintoto orizzontale a destra [a sinistra] $\Leftrightarrow$ f è convergente in $\pm\infty$

Esempio

$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$

1. Insieme di definizione

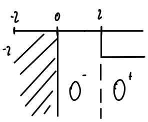
$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ $\quad X = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$ di discontinuità per f

pari: $\forall x \in X \quad f(-x) = f(x)$

f_1

2. ASINTOTI

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x < -2 \cup x > 2$



$\lim_{x \to 2^-} f_1(x) = 2 \cdot \frac{1}{0^-} = 2(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f_2(x) = 2 \cdot \frac{1}{0^+} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$

$x = -2$ è asintoto verticale a sinistra in alto, a destra in basso del diagramma Γ

Tenendo presente che X è illimitato si ha:

$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}_{\,1}} = 1$ $\qquad$ $y = 1$ è asintoto orizzontale bilatero di Γ

i punti -2 e 2 sono punti di discontinuità di seconda specie per f

Analisi - Giorno 11

Confronto Locale tra Funzioni

Assegnati $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X, analizzeremo alcuni comportamenti per coppie di f. reali in cui intervengono esclusivamente i valori che esse assumono nei punti di X vicini ad x_0. Pertanto ci riferiamo alla classe funzionale che denotiamo con $\mathcal{F}(X, x_0)$ costituita dalle funzioni f. tali che $\exists$ un intorno I_f di x_0: $I_f \cap X \setminus \{x_0\} \subseteq \text{dom} f$

Precisiamo quanto segue:

Sia $f \in \mathcal{F}(X, x_0)$ si dice che f. è identicamente nulla intorno ad x_0 se $\exists$ un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f$: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) = 0$

si dice che f è mai nulla, non nulla [positiva][negativa] intorno ad x_0 se $\exists$ un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f$ $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) \neq 0$; [$f(x) > 0$][$f(x) < 0$]

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ si dice che f e g sono uguali intorno ad x_0 se $\exists$ un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f \cap I_g$: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) = g(x)$

La Relazione "O Piccolo"

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ si dice che "f è o piccolo di g per x tendente ad x_0": e si scrive $f = o_{x_0}(g)$ se $\exists$ una f. $\gamma \in \mathcal{F}(X, x_0)$ ed un intorno I_0 di x_0 con

$I_0 \subseteq I_f \cap I_g \cap I_\gamma$: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$ $\lim_{x \to x_0} \gamma(x) = 0$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon \qquad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \varepsilon$$

$$|f(x)| < \varepsilon \cdot |g(x)|$$

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ con g mai nulla intorno ad x_0

$$f = o_{x_0}(g) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Osservazione

In base alla prop. precedente dire che f è o piccolo di g per x tendente ad x_0, significa dire che fissato $\varepsilon > 0$ $\exists$ un intorno I_ε di x_0 con $I_\varepsilon \subseteq I_0$ $\forall x \in I_\varepsilon \cap X \setminus \{x_0\}$ $|f(x)| < \varepsilon |g(x)|$

Conseguentemente quando la variabile x è vicina ad x_0, il modulo di $g(x)$, se non nullo, è molto più grande del modulo di f si dice che f è trascurabile rispetto a g per x tendente ad x_0 e si scrive $f \underset{x_0}{\ll} g$

$f = o_{x_0}(g)$ è stata introdotta da Landau e viene di solito usata, quando f e g sono entrambe infinitesime in x_0, caso in cui si dice che f è infinitesima di ordine superiore rispetto a g oppure quando f e g sono entrambe infinite nel punto x_0 $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$, caso in cui si dice che g è infinita di ordine superiore rispetto ad f.

Asintoticità

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ si dice che f è asintotica a g per x tendente ad x_0, se $f - g = \underset{x_0}{o}(g)$

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ con g non nulla intorno ad x_0, allora $f \underset{x_0}{\overset{\text{Asintotica}}{\sim}} g \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Dalla prop. appena enunciata, si evincono le seguenti asintoticità notevoli

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \sin x \underset{0}{\sim} x$,

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad \operatorname{tg} \underset{0}{\sim} x$,

$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \arcsin x \underset{0}{\sim} x$,

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \quad \operatorname{arctg} x \underset{0}{\sim} x$,

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} x^2$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lg a \quad a^x - 1 \underset{0}{\sim} x \lg a$

$\lim_{x \to 0} \frac{\lg_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\lg a} \quad \lg_a (1+x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\lg a}$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1 \quad \sinh x \underset{0}{\sim} x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1 \quad \operatorname{tgh} x \underset{0}{\sim} x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsinh} x}{x} = 1 \quad \operatorname{arcsinh} x \underset{0}{\sim} x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctgh} x}{x} = 1 \quad \operatorname{arctgh} x \underset{0}{\sim} x$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad 1 - \cosh x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} x^2$

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ si ha quanto segue:

$o_{x_0}(g) + o_{x_0}(g) = o_{x_0}(g)$

$o_{x_0}(\lambda g) = o_{x_0}(g) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$o_{x_0}(f) \cdot o_{x_0}(g) = o_{x_0}(f \cdot g)$

$o_{x_0}\left(o_{x_0}(g)\right) = o_{x_0}(g)$

Se $f \underset{x_0}{\sim} g$ allora $o_{x_0}(f) = o_{x_0}(g)$

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ con $f \underset{x_0}{\sim} g$ allora $|f| \underset{x_0}{\sim} |g|$

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ non nulle intorno ad x_0 con $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lambda \in [0, +\infty[\setminus \{1\}$ se $f \underset{x_0}{\sim} g$ allora $\log|f(x)| \underset{x_0}{\sim} \log|g(x)|$

dom
↑ Funzionali

Siano $f_1, f_2, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ se $f_1 \underset{x_0}{\sim} \lambda_1 \cdot g$ e $f_2 \underset{x_0}{\sim} \lambda_2 \cdot g$ con λ_1 e λ_2 tali: $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, allora $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot g$

Siano $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{F}(X, x_0)$ con $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ e $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ allora $f^m \underset{x_0}{\sim} f_1^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$f^m \underset{x_0}{\sim} f_1^m$ $\forall$ intero relativo negativo se f ed f_1 sono non nulle intorno ad x_0

$f^\alpha \underset{x_0}{\sim} f_1^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ se f ed f_1 sono positive intorno ad x_0

se g e g_1 sono mai nulle intorno ad x_0 $\dfrac{f}{g} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{f_1}{g_1}$

Osservazione

Sia $f \in \mathcal{F}(X, x_0)$ infinitesima in x_0, risulta quanto segue

$\sin f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$

$\operatorname{tg} f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$

$\arcsin f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$

$\operatorname{arctg} f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$

$1 - \cos f(x) \underset{x_0}{\sim} \frac{1}{2} f(x)^2$

$a^{f(x)} - 1 \underset{x_0}{\sim} f(x) \cdot \log a$

$\log_a (1 + f(x)) \underset{x}{\sim} \dfrac{f(x)}{\log a}$

$(1 + f(x))^\alpha - 1 \underset{x}{\sim} \alpha \cdot f(x)$

$\sinh f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$

$\operatorname{tgh} f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$

$\operatorname{arcsinh} f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$

$\operatorname{arctgh} f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$

$1 - \cosh f(x) \underset{x_0}{\sim} -\frac{1}{2} f(x)^2$

Asintoticità Nello Studio Dei Limiti

Siano $f, g \in \mathcal{F}(X, x_0)$ con $f \underset{x_0}{\sim} g$, si ha quanto segue

f è regolare in x_0 $\iff$ lo è g e risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

e^f è regolare in x_0 $\iff$ lo è e^g e risulta $\lim_{x \to x_0} e^{f(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x)}$

Esercizi

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin(2x-1)}}{\sqrt[5]{\operatorname{Tg}(2x-1)}}$$

poichè $\lim_{x \to \frac{1}{2}} 2x-1 = 0$, si ha $\quad \sin(2x-1)^{\frac{1}{3}} \underset{\frac{1}{2}}{\sim} (2x-1)^{\frac{1}{3}} \qquad \operatorname{Tg}(2x-1)^{\frac{1}{5}} \underset{\frac{1}{2}}{\sim} (2x-1)^{\frac{1}{5}}$

pertanto il limite assegnato può essere riscritto come $\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^{\frac{1}{3}}}{(2x-1)^{\frac{1}{5}}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x-1)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x-1)^{\frac{2}{15}} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg_2(1+e^{-x})}{\sqrt[3]{1+e^{-x}} - 1} \qquad \lg_2(1+e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{\lg 2} \qquad (1+e^{-x})^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3} e^{-x}$$

il limite assegnato può essere riscritto come segue $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\cancel{e^{-x}}}{\lg 2}}{\frac{1}{3}\cancel{e^{-x}}} = \frac{3}{\lg 2}$

Studio Del Calcolo Differenziale

La Derivata di una funzione reale di variabile reale.

DEFINIZIONE

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ di acc. per X

$\forall x \in X$ le differenze $x - x_0$, $f(x) - f(x_0)$ si dicono rispettivamente "l'incremento della variabile indipendente e l'incremento di f relativo al passaggio dal punto x_0 al punto x"

$\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ il rapporto $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ prende il nome di "rapporto incrementale di f relativo al passaggio dal punto x_0 al punto x"

La funzione $x \in X \setminus \{x_0\} \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ dicesi "il rapporto incrementale di f relativo al punto x_0"

DERIVATA

Si dice che f è dotata di derivata nel punto x_0 se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Tale limite dicesi allora la derivata prima o di ordine 1 di f

nel punto x_0 e si denota con uno dei seguenti simboli $f'(x_0)$, $f^{(1)}(x_0)$, $Df(x_0)$, $D^1 f(x_0)$, $[Df(x)]_{x = x_0}$

Se il limite 1 vale $\pm\infty$ si dice che f ha derivata infinita nel punto x_0. Se il limite è finito si dice che f è derivabile in x_0

Se x_0 è di acc. a sinistra [destra] per X si dice che f è dotata di derivata sinistra [destra] nel punto x_0 se $\exists$ il seguente limite: $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\left[\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$
Tale limite dicesi allora la derivata sinistra [destra] di f nel punto x_0 e si denota con $f'_-(x_0)$ $[f'_+(x_0)]$

Se x_0 è di acc. sia a sinistra che a destra per X, allora f è dotata di derivata nel punto x_0 $\Leftrightarrow$ essa è dotata in x_0 sia di derivata sinistra che di

derivata destra, le quali coincidono.

Proposizione

Se f è derivabile in x_0 allora essa è continua in x_0

Tenuto conto che x_0 è di acc. per X, per provare che f è continua in x_0, bisogna far vedere che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Infatti si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)+f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\Big[\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}\cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to x_0-x_0\to 0}+f(x_0)\Big] = f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)$$

Oss.

Una funzione continua in un punto non è detto che sia ivi derivabile. Ad esempio la funzione $f: x\in\mathbb{R}\to|x|$ è continua in $\mathbb{R}$, per cui è tale anche nel punto $x_0=0$ ed $f(0)=|0|=0$. Tuttavia risultando:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{x}^{\,1}}{\cancel{x}_{\,1}}=-1\ ;\ \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

ovvero $f'_-(0)=-1\neq f'_+(0)=1$, la funzione considerata non è derivabile nel punto 0

Oss.

Siano $X\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in X$

Poniamo $H(x_0)=\{h\in\mathbb{R}: x_0+h\in X\}$, ed osserviamo che 0 appartiene ad $H(x_0)$ [se $h=0$, $x_0+h=x_0+0=x_0\in X$]

Inoltre x_0 è di acc. [a sinistra, a destra] $\Leftrightarrow$ 0 è di acc. [a sinistra, a destra] di $H(x_0)$.

Premesso ciò, siano $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x_0\in X$ di acc. per X

$\forall h\in H(x_0)$ $f(x_0+h)-f(x_0)$ è dunque l'incremento di f relativo al passaggio dal punto x_0 al punto x_0+h.

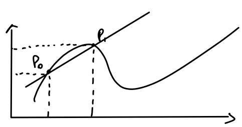
Inoltre $\forall h\in H(x_0)\setminus\{0\}$ il rapporto $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è il rapporto incrementale di f relativo al passaggio dal punto x_0 al punto x_0+h.

Evidentemente, f è dotata di derivata nel punto x_0 se $\exists\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Oss. 3

Siano f una funzione reale definita in un intervallo (a,b), dotata di derivata nel punto $x_0\in\,]a,b[$, x_1 è un elemento di (a,b) diverso da x_0, Γ_f il diagramma di f

Consideriamo i punti $P_0(x_0;f(x_0))$ e $P_1(x_1,f(x_1))$ appartenenti a Γ_f, tracciamo la retta r_1 passante per essi, la quale ha equazione



$$\frac{y-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$\downarrow$$

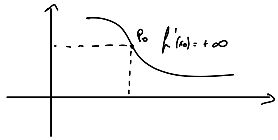
coefficiente angolare di r_1

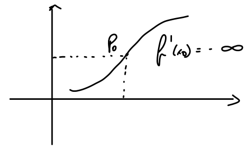
$$y=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0)$$

Facendo tendere x_1 ad x_0, il coeff. angolare di r_1, ovvero $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ tende al coeff. angolare della retta r tangente a Γ_f nel punto P_0, la cui equazione è $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Se f è derivabile in x_0, allora la sua derivata prima in x_0, geometricamente è il coef. ang. della retta tangente a Γ_f nel punto di ascissa x_0

Se $f'(x_0)=\pm\infty$, la retta tangente a I_f nel punto di ascissa x_0 ha equazione $x=x_0$ ed il punto P_0 è detto punto di flesso a tangente verticale





DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Siano $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, X' l'insieme costituito dei punti di X in cui f è derivabile. Se $X'\neq\emptyset$, la funzione $f': x\in X'\to f'(x)$ dicesi la derivata prima o di ordine 1 di f e si denota con uno dei seguenti simboli $f', f^{(1)}, Df, D^1f$

L'insieme X' prende il nome di insieme di derivabilità di f

Sia ora $x_0\in X'$ di acc. per X'

Se f' è dotata di derivata nel punto x_0 si dice che f è dotata di derivata seconda nel punto x_0, che si denota con uno dei simboli $f''(x_0), f^{(2)}(x_0), D^2f(x_0), [D^2f(x)]_{x=x_0}$

Denotiamo con X'' l'insieme costituito dei punti di X in cui f è derivabile due volte. Se $X''\neq\emptyset$ la funzione $f'': x\in X''\to f''(x)$ prende il nome di funzione derivata seconda o di ordine 2 di f e si denota con uno dei simboli $f'', f^{(2)}, D^2f$

$f^{(0)}(x_0)$ = valore di f in x_0

Così procedendo si possono definire la derivata terza o di ordine 3 di f, ... la derivata n-esima o di ordine n di f

REGOLE DI DERIVAZIONE

TEOREMA 1

Siano f e g funzioni reali definite in $X\subseteq\mathbb{R}$ e derivabili nel punto $x_0\in X$

Si ha quanto segue

- $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, la funzione λf è derivabile in x_0 e risulta $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$
- $f+g$, è derivabile in x_0 e risulta $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
- $f\cdot g$ è derivabile in x_0 e risulta $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$

Se $g(x)\neq 0 \quad \forall x\in X$

- $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e risulta $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$
- $\frac{1}{g}$ è derivabile in x_0 e risulta $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-3^x+\lg x}{x^2+\lg^{10}x+3^{x+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\cancel{3^x}}{\cancel{3^x}\cdot 3^2} = -\frac{1}{9}$$

$$N \underset{+\infty}{\sim} -3^x$$

$$D \underset{+\infty}{\sim} 3^{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)+\operatorname{tgh}\left(\frac{3}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{7}{x^2}\right)+\operatorname{arctg}\frac{5}{x}} = \lim_{y\to0} \frac{\arcsin y^2+\operatorname{tg}3y}{\lg(1+7y^2)+\operatorname{arctg}5y} = \lim_{y\to0} \frac{3y}{5y} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{x}=y$$

$$N = y^2+o(y^2)+3y+o(3y) = o(y)+o(o(y))+3y+o(y) = 3y+o(y)$$

$$D = 7y^2+o(y^2)+5y+o(y) = o(y)+o(o(y))+5y+o(y) = 5y+o(y)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{3x^2+\sin^4 x}{2^x+\sqrt[3]{\cos(x+1)}}}-1\right)\cdot\left(3^{2x}+\operatorname{arctg}^4 x\right)$$

$$\left(e^{\frac{3x^2+\sin^4 x}{2^x+\sqrt[3]{\cos(x+1)}}}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{3x^2}{2^x}}-1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{3x^2}{2^x}$$

$3^{2x}+\operatorname{arctg}^4 x \underset{+\infty}{\sim} 3^{2x}$, il limite assegnato può riscriversi come segue $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2^x}\cdot 3^{2x}$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2\cdot\underbrace{\frac{9^x}{2^x}}_{+\infty} = +\infty$$

Analisi - Giorno 13

Teorema

Siano $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\forall x \in X$ $f(x) \in Y$. Nelle ipotesi:

1) f derivabile in $x_0 \in X$ di acc. per X

2) $f(x_0)$ è di acc. per Y e g è derivabile in $f(x_0)$,

la funzione $g \circ f$ è derivabile in x_0 e risulta che $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ (1)

Dim.

Supponiamo che per $x \neq x_0$ risulti $f(x) \neq f(x_0)$. In tal caso è lecito dividere e moltiplicare per $f(x) - f(x_0)$, il rapporto incrementale della funzione $g \circ f$ relativo al punto x_0. E si ha

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (2)$$

Passando al $\lim_{x \to x_0}$ nella 2 si ottiene la 1 in quanto per la (i1) essendo f derivabile in x_0 essa è anche continua in x_0 per cui se $x \to x_0$ si ha che $f(x) \to f(x_0)$

Ora supponiamo che per $x \neq x_0$ risulta $f(x) = f(x_0)$

Consideriamo allora la funzione

$$\sigma : y \in Y \to \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{se } y = f(x_0) \end{cases}$$

Poiché per la (i2) la funzione g è derivabile in $f(x_0)$ si ha subito che la funzione σ è continua in $f(x_0)$ per cui $\lim_{x \to x_0} \sigma(f(x)) = g'(f(x_0))$. Pertanto si ha

$\lim_{x \to x_0} \sigma(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ e dunque la 1 è provata

Teorema Derivazione della Funzione Inversa

Sia f una funzione reale definita e strett. cresc. [strett. decresc.] in X, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$

Si ha quanto segue

1) f derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0 \iff f^{-1}$ è derivabile in y_0 e $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$;

2) f derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0 \iff (f^{-1})'(y_0) = +\infty\ [-\infty]$;

3) f continua in x_0 e $f'(x_0) = +\infty\ [-\infty] \iff f^{-1}$ è derivabile in y_0 e $(f^{-1})'(y_0) = 0$.

Differenziale

Spesso nella definizione di derivata di una funzione in un punto, il simbolo h viene sostituito con Δx, caso in cui si pone $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $x_0 \in X$ di acc. per X. La funzione della variabile $\Delta x \in \mathbb{R}$ data dal prodotto $f'(x_0) \cdot \Delta x$ prende il nome di "differenziale primo o di ordine uno" della funzione f relativo al punto x_0 e si denota con uno dei seguenti simboli: $df(x_0)$, $d'f(x_0)$

OSS

Osserviamo quanto segue:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f'(x_0)\cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Ciò vuol dire che fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0 : \forall \Delta x \in \mathbb{R}$ con $|\Delta x| < \delta_\varepsilon$ risulta $\left| \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} \right| < \varepsilon$ ovvero $|f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x| < \varepsilon|\Delta x|$. Quanto rilevato ci dice che se $|\Delta x|$ è sufficientemente piccolo, l'errore che si commette sostituendo $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ con $f'(x_0)\cdot\Delta x$ è trascurabile

Se f è derivabile n-volte nel punto x_0, la funzione della variabile $\Delta x \in \mathbb{R}$ così definita $f^{(n)}(x_0)\cdot \Delta x^{(n)}$ prende il nome di differenziale n-esimo o di ordine n di f relativo al punto x_0 e si denota con $d^n f(x_0)$

Derivate Funzioni Elementari

Sia $f: x \in X \to c$. Allora $\forall x_0 \in X$ $f'(x_0) = c$

Detto x_0 un elemento arbitrario di X si ha infatti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Sia $f: x \in X \to x$. Allora si ha $\forall x_0 \in X$ $f'(x_0) = 1$

Detto x_0 un arbitrario elemento di X

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(\cancel{x_0}+h) - \cancel{x_0}}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, consideriamo la funzione $f: x \in \mathbb{R} \to x^n$ per la quale risulta $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = n x^{n-1}$

Se $x = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^n - 0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^n}{h} = h^{n-1} = 0 = n \cdot 0^{n-1}$$

Se $x \neq 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[x(1+\frac{h}{x})]^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n \cdot (1+\frac{h}{x})^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n \cdot (1+\frac{h}{x})^n - 1}{x \cdot \frac{h}{x}} = \lim_{h \to 0} x^{n-1} \frac{(1+\frac{h}{x})^n - 1}{\frac{h}{x}} = n \cdot x^{n-1}$$

Per λ non intero si ha $\forall x \in]0; +\infty[$ $D[x^\lambda] = \lambda x^{\lambda-1}$

$$D[x^\lambda]_{x=0} = \begin{cases} +\infty & 0 < \lambda < 1 \\ 0 & \lambda > 1 \end{cases}$$

Esponenziale

Per $a>0$ e $a\neq 1$ si ha:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad D[a^x] = a^x \log a$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad D[e^x] = e^x$

Dim

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x_0}\cdot\left(a^{x-x_0}-1\right)}{x-x_0} = a^{x_0}\cdot \log a$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad D[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad D[\cos x] = -\operatorname{sen} x$

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\} \quad D[\operatorname{cotg} x] = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\operatorname{sen} x\cdot \operatorname{sen} x - \cos x\cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\} \quad D[\operatorname{tg} x] = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad D[\operatorname{arctg} x] = \frac{1}{1+x^2}$

$\forall x \in \,]-1;1[\quad D[\operatorname{arcsen} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ la funzione arcsen è definita in $[-1;1]$ ma non è derivabile nei punti -1 ed 1, in particolare $D[\operatorname{arcsen}]_{x=\pm1} = +\infty$

$\forall x \in \,]-1;1[\quad D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ la funzione arccos è definita in $[-1;1]$ ma non è derivabile nei punti -1 ed 1, in particolare $D[\arccos x]_{x=\pm1} = -\infty$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad D[\operatorname{arccotg} x] = -\frac{1}{1+x^2}$

Nel caso della funzione radice n-esima per $n \in \mathbb{N}$ dispari [pari] si ha

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ [\forall x \in \,]0;+\infty[\,] \qquad D[\sqrt[n]{x}] = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad [D\sqrt[n]{x}]_{x=0} = +\infty$

Per $a \in \,]0;+\infty[\setminus\{1\}$

$\forall x \in \,]0;+\infty[\quad D\log_a x = \frac{1}{x\log a}$, in particolare $D\log x = \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad D\operatorname{senh} x = \cosh x$, $D\cosh x = \operatorname{senh} x$, $D\operatorname{Tgh} x = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $D\operatorname{arcsenh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\forall x \in \,]-1;1[\quad D\operatorname{arcTanh} x = \frac{1}{1-x^2}$,

$\forall x \in \,]1;+\infty[\quad D\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $[D\operatorname{arccosh} x]_{x=1} = +\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) = \log_a |x| = \begin{cases} \log_a x & \text{se } x>0 \\ \log_a x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$\forall x \in \,]0;+\infty[\quad D\log_a x = \frac{1}{x\log a}$

$\forall x \in \,]-\infty;0[\quad f'(x) = \frac{1}{(-x)\log a}\cdot D(-x) = \frac{-1}{-x\log a} = \frac{1}{x\log a}$

Pertanto $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \log_a |x| = \frac{1}{x\log a}$

Per il calcolo della derivata di una funzione del tipo $f_1(x)^{f_2(x)}$ si utilizza l'uguaglianza $f_1(x)^{f_2(x)} = e^{f_2(x)\cdot \log f_1(x)}$

$\log_{f_2(x)} f_1(x)$ si sfrutta l'uguaglianza $\log_{f_2(x)} f_1(x) = \frac{\log f_1(x)}{\log f_2(x)}$

$|x|$ $\quad x\neq 0$

x^α $\quad \alpha<1$ $\quad x\neq 0$

arcsen x e arccos x $\quad x_1\neq -1$ $\quad x_2\neq 1$

arccosh x $\quad x\neq 1$

Determinare X e X' delle seguenti funzioni

$f(x) = \text{arctgh}(|e^x-3|-4)$

$]-1,1[$

$-1<|e^x-3|-4<1$

$3<|e^x-3|<5 \rightarrow 3<|t|<5 \iff \begin{cases} |t|>3 \\ |t|<5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t<-3 \vee t>3 \\ -5<t<5 \end{cases}$

$e^x-3=t$

$-5<t<-3 \vee 3<t<5$

$-2<e^x<0 \vee 6<e^x<8$

$\emptyset \qquad \log 6<x<\log 8$

$X =]\log 6; \log 8[$

$X' =]\log 6; \log 8[$

$f(x) = \text{arctgh}(|x|-1) + (\sqrt[3]{x}+1)^\pi$

$]-1;1[$

$\begin{cases} -1<|x|-1<1 \\ \sqrt[3]{x}+1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0<|x|<2 \rightarrow x\neq 0, -2<x<2 \\ \sqrt[3]{x} \geq -1 \rightarrow x\geq -1 \end{cases}$

$X = X' =]-1;2[\setminus \{0\}$

$f(x) = (\text{arctgh} \log(e^x-1))^\pi + |e^x-3|$

$\begin{cases} \text{arctgh} \log(e^x-1) \geq 0 \\ -1<\log(e^x-1)<1 \\ e^x-1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0\leq \log(e^x-1)<1 \\ e^x-1>0 \end{cases} \rightarrow 2\leq e^x < e+1$

$X =]\log 2; \log e+1$?

$X' = X \setminus \{\log 3\}$

$f(x) = \text{arccosh}\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{arctg}\, x}$

$[1;+\infty[$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{arctg}\, x} \geq 1 \iff \text{arctg}\, x \leq 0 \iff x\leq 0$

$X =]-\infty;0]$

$X' = X \setminus \{0\}$

$f(x) = \text{arccosh} \log x$

$\log x \geq 1 \rightarrow x\geq e$

$x>0$

$X = [e;+\infty[$

$X' = X\setminus\{e\}$

$f(x) = (\log(x-1))^{\sqrt{2}} + \sqrt[4]{\text{arcsen}\, \frac{x}{4}}$

$\begin{cases} \log(x-1)\geq 0 \rightarrow x-1\geq 1 \\ x-1>0 \\ \text{arcsen}\, \frac{x}{4} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 2 \\ 0\leq x\leq 4 \end{cases} \qquad 2\leq x\leq 4$

$-1\leq \frac{x}{4} \leq 1 \quad 0\leq \frac{x}{4}\leq 1$

$X = [2;4]$

$X' = X\setminus\{4\}$

$f(x) = \log(x^2+1) \qquad D \log g(x) = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$

$x^2+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \forall x\in X' \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2$

$X = X' = \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x-3}$

$x-3\geq 0 \rightarrow x\geq 3 \qquad X = [3;+\infty[$

$X' = X\setminus\{3\}$

$\forall x\in X' \qquad \frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{g(x)^{n-1}}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

$\lim_{x\to 3} \frac{1}{2\sqrt{x-3}} = +\infty$

$f'(3) = +\infty$

$f(x) = e^{\sqrt{5-x}}$

$x \leq 5 \qquad X =]-\infty; 5]$

$X' = X \setminus \{5\}$

$\forall x \in X \quad -\frac{1}{2\sqrt{5-x}} \cdot f(x)$

$\lim_{x\to 5} -\frac{1}{2\sqrt{5-x}} \cdot f(x) = -\infty$

$f'(5) = -\infty$

$f(x) = \arcsin e^x$

$-1 < e^x < 1 \iff e^x \leq 1 \iff x \leq 0$

$X =]-\infty; 0]$

$X' = X \setminus \{0\}$

$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$

$\forall x \in X' \quad f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$

$f'(0) = +\infty$

$f(x) = \frac{1}{\arcsin x} \qquad f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} = -\frac{1}{\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1-x}}$

$X = [-1; 1] \setminus \{0\}$

$X' = X \setminus \{-1, 1\}$

$\lim_{x\to -1} f'(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 1} f'(x) = -\infty$

$f(x) = \cos\sqrt{x} + x^2 - 5$

$x \geq 0 \qquad X = [0; +\infty[$

$X' = X \setminus \{0\}$

$\forall x \in X' \quad f'(x) = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + 2x$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin\sqrt{x} + 2x & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f(x) = (1-x^2) \cdot \arccos x$

$X = [-1; 1] \quad X' = X \setminus \{-1, 1\}$

$\forall x \in X' \quad (-2x)\arccos x + (1-x^2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \underset{\frac{\pi}{2}}{(-2x)}\underset{\pi}{\arccos x} + \underset{0}{(1-x^2)} \cdot -\sqrt{1-x^2}$

$\lim_{x\to -1} f'(x) = 2\pi$

$\lim_{x\to 1} f'(x) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} (-2x)\arccos x - \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2\pi & \text{se } x = -1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f(x) = \sqrt{\log(1+x^2)}$

$\begin{cases} \log(1+x^2) \geq 0 \to 1+x^2 \geq 1 \\ 1+x^2 > 0 \end{cases}$

$X = \mathbb{R}$

$X' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall x \in X' \quad f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2\sqrt{\log(1+x^2)}} = \frac{x}{1+x^2 \cdot \sqrt{\log(1+x^2)}}$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{x}{(1+x^2)\cdot|x|} = \nexists$

$\log(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$

$f(x) = \log(1 + |x-2|) = \begin{cases} \log(x-1) & \text{se } x \geq 2 \\ \log(3-x) & \text{se } x < 2 \end{cases}$

$X = \mathbb{R}$

$X' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x > 2 \\ \frac{-1}{3-x} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 1$

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -1$

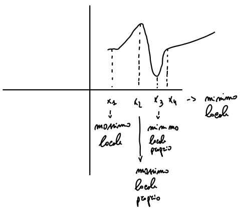
Massimi e Minimi Locali

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ di acc. per X

Si dice che: x_0 è punto di minimo [massimo] locale per f se $\exists$ un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x \in I_0 \cap X$ $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$]; (1)

x_0 è punto di massimo [minimo] locale proprio di f se $\exists$ un intorno I_0 di x_0 tale che: $\forall x \in I_0 \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) < f(x_0)$ [$f(x) > f(x_0)$]; (2)

La (1) significa che x_0 è il massimo [minimo] della restrizione di f ad $I_0 \cap X$ e pertanto diciamo un minimo [massimo] locale per f.



Teorema di Fermat

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dotata di derivata nel punto $x_0 \in X$ di acc. sia a sinistra che a destra di X. Se x_0 è minimo o massimo locale per f allora la derivata prima in x_0 è uguale a 0 $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione

Supponiamo che x_0 sia un minimo locale per f, ciò vuol dire che $\exists$ un intorno I_0 di x_0 tale che $\forall x \in I_0 \cap X$ $f(x) \geq f(x_0)$

In particolare se $x \in I_0 \cap X$ e $x < x_0$ allora $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Conseguentemente, per un noto teorema di regolarità per confronto, deve essere $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ (2)

Allo stesso modo, se $x \in I_0 \cap X$ e $x > x_0$ allora $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ per cui $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (3)

Poiché per ipotesi, f è dotata di derivata nel punto x_0, i limiti (2) e (3) devono essere uguali ad $f'(x_0)$ e affinché ciò accada deve essere $f'(x_0) = 0$

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo (a, b) e derivabile in $]a, b[$. Le eventuali soluzioni dell'equazione $\forall x \in]a, b[$ $f'(x_0) = 0$ prendono il nome di punti stazionari o critici o estremali per f.
I punti critici che risultano essere di massimo o di minimo locale per f sono detti estremanti. I punti critici non estremanti per f sono detti punti sella.
Consideriamo ad esempio la funzione $f: x \in \mathbb{R} \to x^3$, la quale è definita, continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Poiché $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2$, si ha $f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0$ ovvero lo zero è l'unica soluzione dell'equazione $f'(x) = 0$, ciò vuol dire che $x = 0$ è l'unico punto critico per la funzione considerata. Tuttavia tale punto non è né di massimo né di minimo locale per la funzione considerata, per cui è punto sella.

Teorema di Rolle e Lagrange

Una conseguenza del Teorema di Fermat è il Teorema di Rolle. Sia f una funzione reale, continua nell'intervallo compatto $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ con $f(a) = f(b)$.
Allora $\exists$ almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$

Dimostrazione

In base al Teorema di Weierstrass essendo f continua nell'intervallo compatto $[a,b]$, essa è ivi dotata di minimo e massimo. Se il minimo ed il massimo di f cadono entrambi negli estremi dell'intervallo, poiché per ipotesi $f(a)=f(b)$, la funzione risulta essere costante e dunque la sua derivata è nulla in ogni punto. In caso contrario f assumerà il suo valore massimo o minimo in almeno un punto $c \in]a,b[$ per cui, stante il Teorema di Fermat, risulta $f'(c)=0$

Teorema di Lagrange

Sia f una funzione reale continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora $\exists$ almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dimostrazione

Consideriamo la funzione $g: x \in [a,b] \to f(x)-(x-a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, la quale è continua nell'intervallo compatto $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Poiché $g(a)=f(a)-\cancel{(a-a)}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(a)$

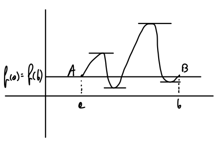
$g(b)=f(b)-\cancel{(b-a)}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}=f(b)-f(b)+f(a)=f(a)$,

alla funzione g è applicabile il Teorema di Rolle in base al quale esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che $g'(c)=0$.

Visto che $\forall x \in]a,b[\ g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, risulta $g'(c)=0 \iff f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \iff f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Osservazione

Dal punto di vista geometrico, il Teorema di Rolle garantisce l'esistenza di almeno un punto del diagramma di f diverso dai punti $A=(a, f(a))$; $B=(b; f(b))$ in cui la retta tangente è parallela alla retta passante per A e B



Conseguenze del Teorema di Lagrange

Sia f una funzione reale continua in un intervallo (a,b) e derivabile in $]a,b[$

Se $f'(x)=0\ \forall x \in]a,b[$ allora f è costante.

Dimostrazione

Consideriamo due punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$. Poiché f è continua in (a,b) e derivabile nei suoi punti interni, in particolare f è continua nell'intervallo compatto di estremi x_1 e x_2 e derivabile in $]x_1;x_2[$, pertanto alla restrizione di f all'intervallo compatto $[x_1, x_2]$ è applicabile il Teorema di Lagrange, il quale ci garantisce l'esistenza di almeno un punto $c \in]x_1;x_2[$ tale che $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Tenuto conto che $\forall x \in]a,b[\ f'(x)=0$ si ha in particolare $\forall x \in]x_1,x_2[\ f'(x)=0$, per cui $f'(c)=0 \iff \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \iff f(x_2)-f(x_1)=0 \iff f(x_2)=f(x_1)$ e dunque f è costante stante l'arbitrarietà dei punti scelti x_1 e x_2

T.2 Sia f una funzione reale continua in (a,b) e derivabile in $]a,b[$ si ha quanto segue:

Se $f'(x) \geq 0\ \forall x \in]a,b[$, allora f è crescente in (a,b) (a_1)

Se $f'(x) \leq 0\ \forall x \in]a,b[$, allora f è decrescente in (a,b) (a_2)

Dimostriamo ad esempio la a_1, consideriamo due punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$. Allora alla restrizione di f all'intervallo compatto $[x_1, x_2]$ è applicabile il teorema di Lagrange, in base al quale esiste almeno un punto $c \in]x_1, x_2[$ tale che $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Poiché per ipotesi $\forall x \in]a,b[\ f'(x) \geq 0$, in particolare si ha $\forall x \in]x_1, x_2[\ f'(x) \geq 0$ per cui deve essere

$$f'(c) \geq 0 \iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0 \text{ perché } x_1 < x_2}} \geq 0 \iff f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \iff f(x_2) \geq f(x_1)$$

e ciò vuol dire che f è crescente a causa dell'arbitrarietà dei punti scelti x_1, x_2

T_3 Sia f una funzione reale continua in (a,b) e derivabile in $]a,b[$ si ha quanto segue:

- $f'(x) > 0\ \forall x \in]a,b[$ allora f è strettamente crescente in (a,b)
- $f'(x) < 0\ \forall x \in]a,b[$ allora f è strettamente decrescente in (a,b)

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{\lg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{0} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) = -2$$

$$\lg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lg\left(1 + \frac{x-1}{x+1} - 1\right) = \lg\left(1 + \frac{x-1-x-1}{x+1}\right) = \lg\left(1 + \frac{-2}{x+1}\right) \underset{0}{\sim} \frac{-2}{x+1} \underset{0}{\sim} \frac{-2}{x}$$

$\lg x = y$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\lg \operatorname{senh} 5x}{\lg \operatorname{tgh} 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\lg 5x}{\lg 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\lg 5 + \lg x}{\lg 3 + \lg x} = \lim_{x \to 0} \frac{\lg 5 + y}{\lg 3 + y} = 1$$

$\operatorname{senh} 5x \underset{0}{\sim} 5x$

$\operatorname{tgh} 3x \underset{0}{\sim} 3x$

$\lg x = y$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\lg(x^6 - x^4 + 1)}^{\nearrow +\infty} + 3}{\underbrace{\lg(x^8 + x^7 + 3)}_{\searrow +\infty} - 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6 \lg x + 3}{8 \lg x - 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6y + 3}{8y - 5} = \frac{3}{4}$$

$\lg(x^6 - x^4 + 1) \underset{+\infty}{\sim} \lg(x^6) = 6 \lg x$

$\lg(x^8 + x^7 + 3) \underset{+\infty}{\sim} \lg(x^8) = 8 \lg x$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}^4 \sqrt[3]{e^x + 1} \left(e^{\frac{10x + \operatorname{arctg} x}{3^x + x^4}} - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}^4 \sqrt[3]{e^x + 1} \cdot \frac{10x}{3^x} = 0$$

$\frac{10x + \operatorname{arctg} x}{3^x + x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{10x}{3^x}$

$\left(e^{\frac{10x + \operatorname{arctg} x}{3^x + x^4}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{10x}{3^x}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{10x}{3^x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_{1}} = 1$$

$\sqrt{x^2 + 3x} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = |x|$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[5]{1 + e^x} - 1\right)^{\frac{3x+1}{x^2+5}} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{5} e^x\right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{3}{x} \cdot \lg \frac{1}{5} e^x} = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{3}{x} \cdot \left(\lg \frac{1}{5} + \lg e^x\right)} = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{3}{x} \cdot \left(\lg \frac{1}{5} + x\right)} = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{3}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}} = e^3$$

$\lg \frac{1}{5} + x \underset{-\infty}{\sim} x$

$\sqrt[5]{1 + e^x} - 1 \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{5} e^x$

$\frac{3x+1}{x^2+5} \underset{-\infty}{\sim} \frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{5^{2x+1}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\operatorname{tgh}\left(\frac{3x + \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}}{5^{2x+2} + \cos^2 x}\right)}_{0} = \lim_{x \to +\infty} 5^{2x+1} \cdot \frac{3x}{5^{2x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{5} x = +\infty$$

$\operatorname{tgh}\left(\frac{3x + \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}}{5^{2x+2} + \cos^2 x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \operatorname{tgh}\left(\frac{3x}{5^{2x+2}}\right) \sim \frac{3x}{5^{2x+2}}$

Analisi - Giorno 14

Massimi e Minimi locali: condizioni sufficienti

Una conseguenza del Teorema (3) è il:

T.(4)

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua nel punto $x_0 \in X$ di acc. per X, I_0 un intorno di x_0 contenuto in X tale che f sia derivabile in $I_0 - \{x_0\}$

(e1) se $f'(x) > 0$ $\forall x \in I_0$ con $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ $\forall x \in I_0$ con $x > x_0$ allora x_0 è punto di massimo locale proprio per f;

(e2) se $f'(x) < 0$ $\forall x \in I_0$ con $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ $\forall x \in I_0$ con $x > x_0$, allora x_0 è punto di minimo locale proprio per f

Dimostriamo la (e1). La continuità di f in x_0 e l'ipotesi $f'(x) > 0$ $\forall x \in]x_0 - \delta; x_0]$ ci assicurano che f è strettamente crescente in base al teorema 3 in $]x_0 - \delta; x_0[$ per cui $\forall x \in]x_0 - \delta; x_0[$ $f(x) < f(x_0)$.

Allo stesso modo, la continuità di f nel punto x_0 e l'ipotesi $f'(x) < 0$ $\forall x \in]x_0; x_0 + \delta[$ ci garantiscono, sempre grazie al Teorema 3 che la funzione f è strettamente decrescente nell'intervallo $]x_0, x_0 + \delta[$ e ciò vuol dire che $\forall x \in]x_0; x_0 + \delta[$ $f(x_0) > f(x)$.

Pertanto risulta $\forall x \in I_0 - \{x_0\}$ $f(x) < f(x_0)$

Dal Teorema 4 segue il Teorema 5.

Sia f una funzione reale definita nell'intervallo (a, b), derivabile in $]a, b[$ e dotata di derivata seconda nel punto $x_0 \in]a, b[$ si ha quanto segue:

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ $[f''(x_0) > 0]$ allora x_0 è punto di minimo [massimo] locale proprio per f.

Dim

Le ipotesi $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ ci dicono che $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$. Conseguentemente in base al Teorema della permanenza del segno $\exists$ un intorno I_0 di x_0 contenuto in (a, b) tale che $\forall x \in I_0 - \{x_0\}$ $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0^{(*)}$. In particolare se $x_0 \in]x_0, x_0 - \delta[$ $(x - x_0 < 0)$, affinché * sia vera, deve essere $f'(x) > 0$; invece se $x \in]x_0; x_0 + \delta[$ $(x - x_0 > 0)$, affinché sia vera, $f'(x) > 0$. Pertanto, stante il Teorema 4, x_0 è punto di massimo locale proprio per f

Teoremi di De L'Hôspital

Siano f, g funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ $\forall x \in X$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc. per X. Supponiamo verificate le seguenti ipotesi:

(i1) $\exists$ un intorno I_0 di x_0 con $I_0 - \{x_0\} \subseteq X$ tale che le funzioni f e g sono derivabili in $I_0 - \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I_0 - \{x_0\}$

Primo Teorema

Nelle ipotesi (i1) e

(i2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $\exists$ il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora $\exists$ anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}$ e risulta $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Secondo Teorema

Nelle ipotesi (i1) e

(i'2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, $\exists$ il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$

allora $\exists$ anche il $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}$ e risulta $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Osservazione

I due precedenti teoremi non si possono invertire ovvero la regolarità nel punto x_0 di $\frac{f}{g}$ non comporta la regolarità in x_0 di $\frac{f'}{g'}$ ad esempio per le funzioni $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ e $g(x) = x$

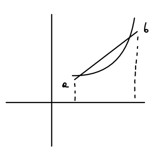
nel punto $x_0 = 0$ si ha $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}$ $\qquad f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x} \cdot x^2 = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$

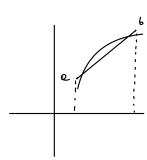
Funzioni Convesse e Concave Strettamente

Siano $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Γ il diagramma di f.

Si dice che f è strettamente convessa [concava] in I se $\forall a, b \in I$ i punti di Γ aventi l'ascissa $\in \,]a, b[$ sono tutti strettamente al di sotto [al di sopra] del segmento di estremi $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$



F = strettamente convessa



F = strettamente concava

Siano f una funzione reale derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, Γ il diagramma di f. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) f' strett. crescente [strett. decrescente] in I;

(2) f strettamente convessa [concava] in I;

(3) $\forall P_0 \in \Gamma$ i punti di $\Gamma - \{P_0\}$ sono tutti strettamente al di sopra [strett. al di sotto] della retta tangente a Γ nel punto P_0

Punti Di Flesso

Siano f una funzione reale definita in $I \subseteq \mathbb{R}$, Γ il diagramma di f, x_0 un punto interno ad I, $P_0(x_0, f(x_0))$. Supponiamo che esiste un intorno di x_0 $]x_0-\delta; x_0+\delta[$ incluso in I

Tale che f sia strett. concava in $]x_0-\delta; x_0[$ e strett. convessa in $]x_0; x_0+\delta[$ oppure tale che f sia strettamente convessa in $]x_0-\delta; x_0[$ e strettamente concava in $]x_0; x_0+\delta[$.

Nel primo caso si dice che P_0 è punto di flesso ascendente per Γ mentre nel secondo caso si dice che P_0 è punto di flesso discendente per Γ

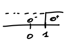
$f(x) = \arctg\left(\frac{x}{x-1}\right)$

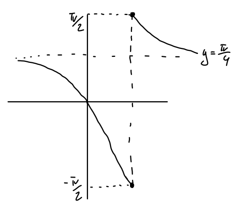
1. $X \in X'$

$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$ $\qquad X: \mathbb{R} \setminus \{1\} = X'$

2. Asintoti

$x-1>0 \quad x>1$





$$\lim_{x \to 1^-} \arctg\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \arctg\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Discontinuità di prima specie con salto: $\left|\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right| = \pi$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \arctg\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Asintoto bilaterale

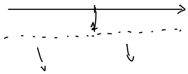
3. Proprietà di Monotonia

Poiché la f. composta ha come componente esterna la funzione arctg che è strett. crescente, limitiamo lo studio della derivata prima alla componente interna, ovvero $g(x) = \frac{x}{x-1}$

$\forall x \in X' \quad g'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$g'(x) > 0$

$\frac{-1}{(x-1)} > 0$



$f(x) > 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$

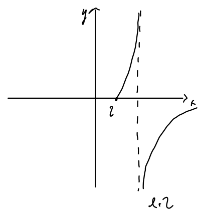
$f(x) = \frac{3}{1 - \lg(x-2)}$

$$\begin{cases} 1 - \lg(x-2) \neq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq e+2 \\ x > 2 \end{cases}$$

$X =]2; +\infty[\setminus \{e+2\} = X'$

Discontinuità di seconda specie

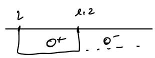
$\lim_{x \to 2} \frac{3}{1 - \lg(x-2)} = 0 \qquad f(2) = 0$



$1 - \lg(x-2) > 0$

$\lg(x-2) < 1$

$x < 2 \lor x > e+2$



$\lim_{x \to (e+2)^{\mp}} f(x) = \pm\infty$

$x = e+2$ asintoto verticale in alto a destra e a sinistra in basso

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = \frac{3}{(x-2)[1 - \lg(x-2)]^2}$

$\nearrow \quad [2; e+2[\text{ e } [e+2; +\infty[$

$f(x) = e^{\sqrt{\operatorname{tgh} x}}$ $\qquad X = [0; +\infty[$

$X' =]0; +\infty[$

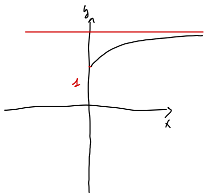
$\operatorname{tgh} x \geq 0 \to x \geq 0$

Asintoti

$\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{\operatorname{tgh} x}} = e$ $\qquad y = e$ Asintoto Orizzontale

$\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{\operatorname{tgh} x}}$ strett. crescente poiché formata da funzioni strettamente crescenti

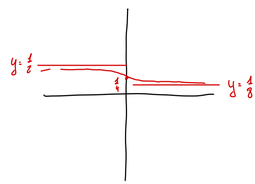
$f(0) = 1$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{tgh} x + 2}$ $\qquad X = \mathbb{R} = X'$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}^{\operatorname{tgh} x + 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ A.O. a destra

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}^{\operatorname{tgh} x + 2} = \frac{1}{2}$ A.O. a sinistra



$\nearrow \left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad \nearrow \operatorname{tgh} x + 2$

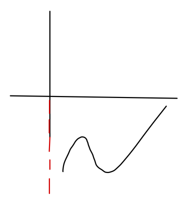
strett. decrescente perché formata da una funzione decrescente ed una crescente

$f(0) = \frac{1}{4}$

$f(x) = 4 \lg x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2}x$

$X :]0; +\infty[= X'$

$x > 0$



$f(2) = -n$

$f(8) = -n$

$f(x) > 0$ $\quad \forall x \in]\alpha; +\infty[$

$\lim_{x \to 0} 4 \lg x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2}x = -\infty$ A.V. in basso

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1}{8}x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = +\infty$

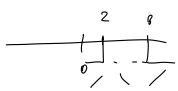
$\forall x \in X'$ $\quad f'(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{4} - \frac{5}{2} = \frac{16 + x^2 - 10x}{4x}$

$f'(x) > 0$

$x^2 - 10x + 16 > 0$

$\Delta = 100 - 64 = 36$

$\frac{10 \pm 6}{2} = \begin{matrix} \nearrow 8 \\ \searrow 2 \end{matrix}$



$x_1 = 2$ pMAX

$x_2 = 8$ pMIN

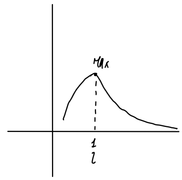
$\nearrow$ $]0; 2]$; $[8; +\infty[$

$\searrow$ $]2; 8[$

$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$

$x \geq 0$ $\qquad X : [0; +\infty[$

$X' =]0; +\infty[$



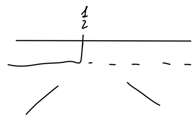
$f(0) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$ A.O.

$\forall x \in X'$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot \sqrt{x} = e^{-x} \left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}} \right)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ $\qquad 0 < x < \frac{1}{2}$



$\nearrow [0; \frac{1}{2}]$

$\searrow]\frac{1}{2}; +\infty[$

$x_1 = \frac{1}{2}$ pMAX

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$

$f(x) = \lg(e^{2x} - 3e^x - 4)$ $\qquad X =]\lg 4; +\infty[= X'$

$e^x = T$

$e^{2x} - 3^{ex} - 4 > 0$

$T^2 - 3T - 4 > 0$

$T < -1 \lor T > 4$

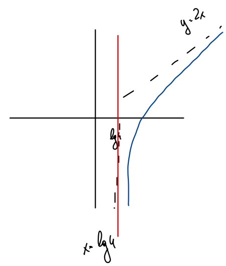
$\Delta = 9 + 16 = 25$

$\frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$\cancel{e^x < -1}$ $\quad \emptyset$

$e^x > 4$

$x > \lg 4$



$\lim_{x \to \lg 4} f(x) = -\infty$ A.V. in bordo

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \lg e^{2x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

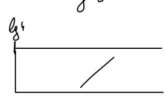
$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 2x - 2x = 0$

A. Obliquo $y = 2x$

PROPRIETÀ DI MONOTONIA

$\forall x \in X' : 2e^{2x} - 3e^x = e^x(2e^x - 3) \Leftrightarrow 2e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \lg 3/2$

$g(x) = e^{2x} - 3e^x - 4$

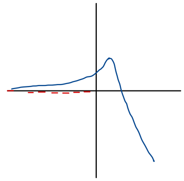


$\nearrow =]\lg 4; +\infty[$

$f(x) = e^x - \frac{1}{8}e^{2x} \qquad X = X' = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} e^x - \frac{1}{8}e^{2x} = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \cancel{e^x} - \frac{1}{8}e^{2x} = 0$ A.O. a sinistra

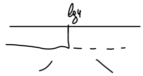


$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \dfrac{-\frac{1}{8}e^{2x}}{x} = -\infty$

MONOTONIA

$\forall x \in X' \quad f'(x) = e^x - \frac{1}{4}e^{2x} = e^x\left(1 - \frac{1}{4}e^x\right)$

$f'(x) > 0 \iff 1 - \frac{1}{4}e^x > 0 \quad \frac{1}{4}e^x < 1 \iff x < \lg 4$



$x_1 = \lg 4$ p. MAX LOCALE PROPRIO

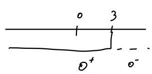
$\nearrow \;]-\infty; \lg 4[$

$\searrow \; [\lg 4; +\infty[$

$f(x) = e^{\operatorname{arctg} \frac{x}{3-x}} \qquad X = \mathbb{R} \setminus \{3\} = X'$

$3 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

$3 - x > 0 \iff x < 3$



$\lim_{x \to 3^-} e^{\operatorname{arctg} \frac{x}{3-x}} = e^{\frac{\pi}{2}}$

$\lim_{x \to 3^+} e^{\operatorname{arctg} \frac{x}{3-x}} = e^{-\pi/2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\operatorname{arctg} \frac{x}{3-x}} = e^{-\pi/4}$ A.O. bilaterale $\longleftrightarrow$

PAG. 67

$g(x) = \frac{x}{3-x}$

$\forall x \in X' \quad g'(x) = \frac{3 - x + x}{(3-x)^2} = \frac{3}{(3-x)^2}$

$$f(x) = (3x-1)\lg(3x-1) \qquad X = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

$$3x-1>0 \to x>\frac{1}{3}$$

$$\bar{f} : x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[\to \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{se } x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} (3x-1)\lg(3x-1) = 0$$

Discontinuità Eliminabile

$$\lim_{x \to +\infty} (3x-1)\lg(3x-1) = +\infty$$

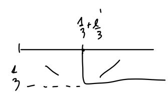
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(3x-1)\lg(3x-1)}{x} = +\infty$$

MONOTONIA

$$\forall x \in X' \quad f'(x) = 3\lg(3x-1) + \cancel{(3x-1)}^{1} \cdot \frac{3}{\cancel{(3x-1)}_{1}} = 3(\lg 3x-1 + 1)$$

$$f'(x) > 0 \iff \lg_{3x-1} > -1 \iff \lg t > -1 \iff t > e^{-1} \iff 3x-1 > e^{-1} \iff x > \frac{e^{-1}+1}{3}$$

$3x-1=t$



$$x_1 = \frac{1+e^{-1}}{3} \quad \text{p Min}$$

$$\searrow = \left[\frac{1}{3}; \frac{1+e^{-1}}{3}\right]$$

$$\nearrow = \left[\frac{1+e^{-1}}{3}; +\infty\right[$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+e^{2x}+\cos\sqrt[3]{x^2+2x}}{\operatorname{sen}(e^{-x})+e^x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{\cancel{e^x}}=+\infty$$

$N \underset{+\infty}{\sim} e^{2x}$

$D \underset{+\infty}{\sim} e^{x}$

$x^{1\cdot\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x^2+\lg(1+\operatorname{tgh}x)}{\operatorname{arcsenh}\sqrt{x}+e^{\operatorname{sen}^2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to}\sqrt{x}=0$$

$N:\ \operatorname{sen}x^2 \underset{0}{\sim} x^2 \iff \operatorname{sen}x^2=x^2+o(x^2)$

$\lg(1+\operatorname{tgh}x)\underset{0}{\sim}\operatorname{tgh}x\underset{0}{\sim}x \iff \lg(1+\operatorname{tgh}x)=x+o(x)$

$N:\ x^2+o(x^2)+x+o(x)=o(x)+o(o(x))+x=x+o(x) \iff N\underset{0}{\sim}x$

$D:\ \operatorname{arcsenh}\sqrt{x}\underset{0}{\sim}\sqrt{x}\iff\operatorname{arcsenh}(\sqrt{x})=\sqrt{x}+o(\sqrt{x})$

$e^{\operatorname{sen}^2x}-1\underset{0}{\sim}\operatorname{sen}^2x\underset{0}{\sim}x^2\iff e^{\operatorname{sen}^2x}-1=x^2+o(x^2)$

$D:\ \sqrt{x}+o(\sqrt{x})+x^2+o(x^2)=\sqrt{x}+o(\sqrt{x})+o(\sqrt{x})+o(o(\sqrt{x}))\iff D\underset{0}{\sim}\sqrt{x}$

Analisi - Giorno 21

La formula di Taylor

Sia f una funzione reale definita nell'intervallo (a,b) ivi derivabile $n-1$ volte ($n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$) e derivabile n volte nel punto $x_0 \in (a,b)$

Il seguente polinomio $\forall x \in (a,b)$ $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Il seguente polinomio il cui grado è non superiore ad n, è detto Polinomio di Taylor [Mac Laurin se $x_0=0$] di ordine n relativo ad f e di punto iniziale x_0. Evidentemente P_n è derivabile n volte nel punto x_0 e si ha $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n^{(1)}(x_0) = f^{(1)}(x_0)$, $P_n^{(2)}(x_0) = f^{(2)}(x_0)$, $P_n^{(n)}(x_0)\ f^{(n)}(x_0)$.

Premesso ciò, consideriamo la funzione $w_n(x) = f(x) - P_n(x)$ $\forall x \in (a,b)$ (1), detta Resto, la quale è derivabile $n-1$ volte in (a,b) ed n volte in x_0 e risulta $w_n(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) = 0$, $w_n^{(1)}(x_0) = 0$, $w_n^{(n)}(x_0) = 0$.

Circa la funzione w_n sussiste il seguente teorema:

T. 1 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{w_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ ovvero $w_n(x) = o_{x_0}((x-x_0)^n)$ (2)

DIMOSTRAZIONE

Intanto osserviamo che il rapporto $\frac{w_n(x)}{(x-x_0)^n}$ (2) si presenta nel punto x_0 nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ inoltre ciascuno degli $n-1$ rapporti che si ottengono derivando successivamente il numeratore ed il denominatore della (2) ovvero $\frac{w_n^{(1)}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$; $\frac{w_n^{(2)}(x)}{n\cdot(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$; $\frac{w_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}$ si presenta nel punto x_0 nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Tenuto conto che w_n è derivabile n volte nel punto x_0 e che la derivata n-esima in x_0 $w_n^{(n)}(x_0) = 0$, si ha $\lim_{x\to x_0} \frac{w_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{n!}\cdot\frac{w_n^{(n-1)}(x) - w_n^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\cdot w_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!}\cdot 0$. Pertanto in base al primo teorema De L'Hospital $\lim_{x\to x_0} \frac{w_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Dalla 1 segue che: $\forall x \in (a,b)$ $f(x) = P_n(x) + w_n(x)$

Tenendo presente T. 1 introduciamo la funzione $\sigma : x \in (a,b) \to \begin{cases} \frac{w_n(x)}{(x-x_0)^n} & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$ per la quale la funzione f può esprimersi come segue

$$\forall x \in (a,b)\ f(x) = P_n(x) + \sigma(x)\cdot(x-x_0)^n \Leftrightarrow \forall x \in (a,b)\ f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \sigma(x)\cdot(x-x_0)^n \qquad (3)$$

La (3) è nota come formula di Taylor [Mac Laurin se $x=x_0$] di ordine n e di punto iniziale x_0 con il resto nella forma di Peano

Una conseguenza della (3) è il seguente teorema

T. 2 Sia f una funzione reale derivabile $n-1$ volte in (a,b) ed n volte nel punto $x_0 \in]a,b[$. Nelle ipotesi $f^{(1)}(x_0) = 0$; $f^{(2)}(x_0) = 0$; $f^{(n-1)}(x_0) = 0$; $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ si ha quanto segue

(c.1) se n è dispari allora x_0 è punto sella per f

(a2) se m è pari e $f^{(m)}(x_0)>0$ $[f^{(m)}(x_0)<0]$ allora, allora x_0 è punto di minimo [massimo] locale proprio

Dimostriamo la (a1):

Poiché per ipotesi, le derivate di f dalla prima fino a quella di ordine $m-1$ sono nulle in x_0, la (3) può riscriversi come segue.

$\forall x \in (a,b)$ $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\sigma(x)\cdot(x-x_0)^m$. Ne segue che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\cdot\cancel{(x-x_0)^m}+\sigma(x)\cdot\cancel{(x-x_0)^m}}{\cancel{(x-x_0)^m}}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}+\underset{\downarrow}{\sigma(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

Pertanto, tenuto conto che per ipotesi $f^{(m)}(x_0)\neq 0$ in base al teorema della permanenza del segno $\exists$ un intorno di x_0 contenuto in (a,b) tale che $\forall x \in I_0\setminus\{x_0\}$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m}$ ha lo stesso segno di $f^{(m)}(x_0)$.

Ciò premesso se m è dispari e ad esempio $f^{(m)}(x_0)>0$ deve essere $\forall x \in I_0\setminus\{x_0\}$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m}>0$ (4)

In particolare se $x\in I_0$ e $x<x_0$, poiché $(x-x_0)^m<0$ (m è dispari) affinché la (4) sia vera deve essere $f(x)-f(x_0)<0 \iff f(x)<f(x_0)$. Invece se $x\in I_0$ e $x>x_0$ siccome $(x-x_0)^m>0$ affinché la (4) sia vera, deve essere $f(x)-f(x_0)>0 \iff f(x)>f(x_0)$.

Pertanto x_0 non è punto né di massimo né di minimo locale proprio per f ovvero x_0 è punto sella per f.

Analogamente si dimostra la (a2)

Enunciamo infine il seguente T.3

T.3

Sia f una funzione reale derivabile n volte in (a,b) e sia $x_0\in(a,b)$. Nelle ipotesi:

(i1) la derivata n-esima di f è continua nel punto x_0;

(i2) f è derivabile $n+1$ volte in $(a,b)-\{x_0\}$

allora $\forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$ $\exists$ almeno 1 punto c_x interno all'intervallo chiuso $[x;x_0]$ tale che $w_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (5)

La (5) esprime il resto nella forma di Lagrange

FUNZIONE PRIMITIVA

Sia f una funzione reale definita e continua nell'intervallo X, si chiama primitiva di f ogni funzione reale F definita in X ivi derivabile e tale che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$

OSSERVAZIONE

Se F è una primitiva di f allora sono primitive di f tutte sole le funzioni del tipo $F+c$ con c costante reale

Intanto osserviamo che risultando $\forall x \in X$ $D[F(x)+c] = DF(x) + Dc = F^{(1)}(x) + 0 = f(x)$ $\forall c \in \mathbb{R}$, $F+c$ è una primitiva di f. Proviamo adesso che se G è un'altra primitiva di f allora G è del tipo $F+c$. Essendo G un'altra primitiva di f essa è per definizione definita in X, ivi derivabile e tale che $\forall x \in X$ $G'(x) = f(x)$

Consideriamo allora la funzione $G-F$, la quale è definita in X ivi derivabile e si ha: $\forall x \in X$ $D[G(x)-F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Pertanto, in base ad una conseguenza del teorema di Lagrange, la funzione $G-F$ è costante ovvero $\forall x \in X$ $G(x) - F(x) = c$ ovvero $\forall x \in X$ $G(x) = F(x) + c$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO

Sia f una funzione reale definita e continua nell'intervallo X. Si chiama integrale indefinito di f e si denota con il simbolo $\int f(x)dx$ l'insieme di tutte le primitive di f dunque se F è una primitiva di f, si pone per definizione $\int f(x)dx = F(x) + c$ dove la funzione f prende il nome di integrando o funzione integranda. Il simbolo che la precede prende il nome di segno di integrale, la lettera x è detta variabile di integrazione.

Integrali Indefiniti Fondamentali

- $\int dx = x + c$
- $\forall k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\int k\,dx = kx + c$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è definita e continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ che non è un intervallo ma è l'unione di 2 intervalli: $I_1 =]-\infty;0[$, $I_2 =]0;+\infty[$, una primitiva della restrizione di f ad I_1 è la funzione $F_1(x) = \log(-x)$, invece una primitiva della restrizione di f all'intervallo I_2 è la funzione $F_2(x) = \log x$. Dunque entrambe le suddette primitive hanno l'espressione $\log|x|$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\forall a \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$ $\rightarrow$ $\int e^x dx = e^x + c$

9.30 — 14.00

7/14 Gennaio

Scritto e Orale — Solo Orale SGT1

14.00 — 14.00

4/11 Febbraio

Scritto e Orale SGII2 — Solo Orale SGT1

14.00 — 14.00

4/11 Marzo

Scritto e Orale SGII2 — Solo Orale SGT1

- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$
- $\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

Un'altra primitiva dell'integrando è la funzione $-\arccos x$ tuttavia le due primitive ovvero $\arcsin x$ e $-\arccos x$ differiscono per la costante $\pi/2$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log|x+\sqrt{x^2-1}| + c$

La funzione integranda f è definita nell'unione $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]1; +\infty[$. Una primitiva della restrizione di f all'intervallo I_2 è la funzione $\operatorname{arccosh}$ per $x \neq 1$ $= \log(x+\sqrt{x^2-1})$.

Invece una primitiva della restrizione di f all'intervallo I_1 è la funzione $\log(-x-\sqrt{x^2-1})$. Pertanto le suddette primitive hanno entrambe l'espressione $\log|x+\sqrt{x^2-1}|$

- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$

Una primitiva della funzione integranda è anche la funzione $-\operatorname{arcctg} x$ e risulta $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

La funzione integranda è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ che risulta l'unione di 3 intervalli ovvero $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]1; +\infty[$. Una primitiva della restrizione della funzione integranda all'intervallo I_2 è la funzione $\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Una primitiva della restrizione dell'integrando sia ad I_1 che ad I_3 è la funzione $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$ le suddette primitive hanno entrambe l'espressione $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

$\alpha \neq -1$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

$\int f'(x) \cdot [f(x)]^\alpha dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

$\int \frac{\log x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \log x \, dx = \frac{\log^2 x}{2} + c = \frac{1}{2}\log^2 x + c$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1} + c$

$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \cos x \cdot (\sin x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{\sin x} + c$

$\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsinh} x}{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (\operatorname{arcsinh} x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arcsinh}^3 x} + c$

- $\int e^x dx = e^x + c$ $\quad \int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$

$$\int \frac{e^{tg x}}{\cos^2 x}\,dx = e^{tg x} + c$$

$$\int (tg^2 x + 1)\,dx = tg x + c$$

$$D\,tg x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = tg^2 x + 1$$

$$\int (3tg^2 x + 3)\cdot e^{3tg x}\,dx = \frac{1}{3} e^{3tg x} + c$$

$$\int (tg^2 x + 3)\,dx = \int (tg^2 x + 2 + 1)\,dx = \int (tg^2 x + 1)\,dx + \int 2\,dx = tg x + 2x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = lg|x| + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = lg|f(x)| + c$$

$$\int \frac{dx}{arcsen x\,\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{arcsen x}\,dx = \log|arcsen x| + c$$

$$\int tg x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -lg|\cos x| + c$$

$$\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 sen x + 11}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 2\cos x}{x^2 + 2 sen x + 11} = \log|x^2 + 2 sen x + 11| + c$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\,lg(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2x}{(x^2+1)}}{lg(x^2+1)} = \frac{1}{2} lg|lg(x^2+1)| + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = arctg f(x) + c$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{6x}+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{(e^{3x})^2+1}\,dx = \frac{1}{3} arctg e^{3x} + c$$

$$\int \frac{dx}{(x+3)[1+lg^2(x+3)]} = \int \frac{\frac{1}{x+3}}{1+lg^2(x+3)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsen x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = arcsen f(x) + c$$

$$\int \frac{1+tg^2 x}{\sqrt{1-tg^2 x}}\,dx = arcsen tg x + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} arcsen x^2 + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = arcsenh x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}\,dx = arcsenh f(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5(1+\frac{x^2}{5})}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{5}}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}}\,dx = arcsenh \frac{x}{\sqrt{5}} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+11}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+6x+9)+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+2}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}\,dx = arcsenh \frac{x+3}{\sqrt{2}} + c$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx = lg(x^2+x+7) + c$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+4}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2} lg(x^2+2x+5) + 2I$$

$\Delta < 0$

$$I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2} lg(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + c$$

$$\int f'(x)\cdot\cos f(x)\,dx = sen f(x) + c$$

$$\int \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cos\sqrt{x+1}\,dx = 2 sen \sqrt{x+1} + c$$

$$\int tg^3 x\,dx = \int tg x \cdot tg^2 x\,dx = \int tg x\cdot(tg^2 x + 1 - 1)\,dx = \int tg x\cdot(tg^2 x + 1)\,dx + \int -tg x\,dx = \frac{1}{2} tg^2 x + lg|\cos x| + c$$

$$\int f'(x)\cdot(f(x))^1\,dx$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1-(f(x))^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x(1-lg^2 x)} = \int \frac{\frac{1}{x}}{(1-lg^2 x)}\,dx = \frac{1}{2} lg\left|\frac{1+lg x}{1-lg x}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{sen^2 x} = -cotg x$$

$$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}\,dx = -cotg f(x) + c$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x+1}}{sen^2(e^{2x+1}+3)} = -\frac{1}{2} cotg(e^{2x+1}+3) + c$$

$$\int (cotg^2 x + 1)\,dx = cotg x + c$$

$$D\,cotg x = -\frac{1}{sen^2 x} = -(cotg^2 x + 1)$$

Amelini

$$\int f^{n+1}\Big/_{n+1} + c$$

$$\int \frac{3}{x^2-12x+36}\,dx = 3\int \frac{1}{(x-6)^2}\,dx = 3\int (x-6)^{-2}\,dx = -\frac{3}{x-6}+c$$

$$\int \frac{x+10}{x^2+6x+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+20}{x^2+6x+9}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6+14}{x^2+6x+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}\,dx + 7\int (x+3)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\lg|x^2+6x+9| - \frac{7}{(x+3)}+c$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x+3} = \lg|x-1| + 2\lg|x+3| + c$$

$$x^2+2x-3 = (x-1)\cdot(x+3)$$

$$\frac{3x+1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{(A+B)x+3A-B}{(x-1)\cdot(x+3)}$$

$A+B=3 \quad = \quad B=3-A$

$3A-B=1 \;\rightarrow\; 3-B=1 \;\rightarrow\; B=2$

$3A-3+A=1 \;\Rightarrow\; \cancel{4}A=\cancel{4}^{1} \;\Rightarrow\; A=1$

$$\int \frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x^2-5x+6)} = \int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{dx}{(x-2)} - \int \frac{dx}{(x-3)} = \lg|x-1| + \lg|x-2| - \lg|x-3| + c = \lg\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}\right| + c$$

RIDUZIONE A GRADINI

$$(x-1)(x^2-5x+6) \Rightarrow \frac{x^2-6x+7}{(x-1)\cdot(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)} = \frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^2(A+B+C)+x(-5A-4B-3C)+6A+3B+2C}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -5A-4B-3C=-6 \\ 6A+3B+2C=7 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B+C=1 \\ B+2C=-1 \\ -3B-4C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B+C=1 \\ B+2C=1 \\ \frac{2C}{\cancel{2}} = -\frac{2^{1}}{\cancel{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2+1}{x\cdot(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lg|x| + \frac{1}{2}\lg(x^2+1)+c$$

$$\frac{2x^2+1}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+Cx+A}{x\cdot(x^2+1)}$$

$A+B=2$

$C=0$

$A=1$

$B=1$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{P_2(x)}\,dx$$

$\deg P_1 \geq \deg P_2$

Si effettua la divisione $\frac{P_1}{P_2}$, $Q(x)$ = quoziente, $R(x)$ = resto

$$\int \frac{2x^2+5}{3+x^2}\,dx = \int 2\,dx \qquad \int \frac{-1}{3+x^2}\,dx = 2x - \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = 2x - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+0x+5 & x^2+0x+3 \\ \hline -2x^2+0x-6 & 2 \ \ Q(x) \\ \hline // \ \ // \ \ \underbrace{-1}_{R(x)} & \end{array}$$

$$\int \frac{3x^3+7x^2+4x-1}{3x^2+7x+2}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{2x-1}{3x^2+7x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + I \qquad f(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{x(A+B)+\frac{1}{3}A+2B}{(x+2)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)}\right)$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ \frac{1}{3}A+2B=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A \\ \frac{1}{3}A+4-2A=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=+3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+7x^2+4x-1 & 3x^2+7x+2 \\ \hline -3x^3-7x^2-2x & x \ \ Q(x) \\ \hline // \ // +2x-1 & \\ \quad R(x) & \end{array}$$

$$I = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+\frac{1}{3}} = \lg|x+2| - \frac{1}{3}\lg\left|x+\frac{1}{3}\right| + c = \lg|x+2| - \frac{1}{3}\lg|3x+1| + c$$

$$\frac{1}{3}\lg\left|\frac{3x+1}{3}\right|$$

$$\frac{1}{3}\lg|3x+1| - \frac{1}{3}\lg 3 + c$$

$$\int \frac{e^x-1}{2e^x-1} = \int \frac{t-1}{2t-1}\frac{1}{t}\,dt \quad \int \frac{t-1}{t(2t-1)}\,dt = \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2t-1}\,dt = \lg|t| - \frac{1}{2}\lg|2t-1|\,dt$$

$$\frac{t-1}{t(2t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t-1} = \frac{t(2A+B)-A}{t(2t-1)}$$

$e^x = t \Leftrightarrow x = \lg t$

$dx = \frac{1}{t}\,dt$

$2A+B=1 \Rightarrow B=-1$

$+A=+1$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\cos^2 \alpha x = \frac{1 + \cos 2\alpha x}{2}$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\operatorname{sen}^2 \alpha x = \frac{1 - \cos 2\alpha x}{2}$

$$\int \cos^2(\sqrt{3}\,x)\,dx = \int \frac{1 + \cos(2\sqrt{3}x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \int \frac{\cos(2\sqrt{3}x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\int 2\sqrt{3}\cos(2\sqrt{3}x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{sen}(2\sqrt{3}x) + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\pi}\cdot\operatorname{sen}(2\pi x) + c$$

$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$ $\qquad \cosh^2 \alpha x = \frac{1 + \cosh 2\alpha x}{2}$

$\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$ $\qquad \operatorname{senh}^2 \alpha x = \frac{\cosh 2\alpha x - 1}{2}$

$$\int \operatorname{senh}^2(\sqrt{5}x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cosh(2\sqrt{5}x)\,dx - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4\sqrt{5}}\cdot\int 2\sqrt{5}\cosh(2\sqrt{5}x)\,dx - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{senh}(2\sqrt{5}x) - \frac{1}{2}x + c$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 + \cos^2(2x) + 2\cos(2x)}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \underbrace{\frac{1}{4}\int \frac{1 + \cos 4x}{2}\,dx}_{I}$$

$$I = \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int 4\cos 4x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + c$$

Integrazione indefinita per parti:

Siano f e g funzioni reali, derivabili in X con derivata continua. Si ha quanto segue

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\int x^2 \lg x = \frac{x^3}{3}\lg x - \int \frac{x^{3^2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \frac{x^3}{3}\lg x - \int \frac{x^2}{3} = \frac{x^3}{3}\lg x - \frac{x^3}{9} + c$$

$f'(x) = x^2$, $f(x) = \frac{x^3}{3}$

$g(x) = \lg x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg|1+x^2| + c$$

$f'(x) = 1$, $f(x) = x$

$g(x) = \operatorname{arctg} x$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \operatorname{arctg}(x-1)\,dx = (x-1)\cdot\operatorname{arctg}(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{1+(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+1-2x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\lg|x^2-2x+2| + c$$

$f'(x) = 1$; $f(x) = x-1$

$g(x) = \operatorname{arctg}(x-1)$; $g'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}$

$$\frac{1}{3}\int 3\lg(3x+1)\,dx$$

$f'(x) = 3 \qquad f = 3x+1$

$g'(x) = \frac{3}{3x+1}$

$$\int (x^2+3)\,\mathrm{senh}\,x\,dx = \text{"} + c$$

$$\int (3x-1)\,e^{2x+1}\,dx = \text{"} + c$$

$$\frac{1}{2}\int 2\,\mathrm{senh}(2x+1)\,dx = \text{"} + c$$

$$\int \mathrm{sen}\,\alpha x\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}(\alpha+\beta)x\,dx + \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}(\alpha-\beta)x\,dx$$

$\mathrm{sen}(\alpha x+\beta x) = \mathrm{sen}\,\alpha x\cos\beta x + \mathrm{sen}\,\beta x\cos\alpha x \quad (1)$

$\mathrm{sen}(\alpha x-\beta x) = \mathrm{sen}\,\alpha x\cos\beta x - \mathrm{sen}\,\beta x\cos\alpha x \quad (2)$

sommando membro a membro, si ottiene $\mathrm{sen}(\alpha x+\beta x)+\mathrm{sen}(\alpha x-\beta x) = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha x\cos\beta x \iff \mathrm{sen}((\alpha+\beta)(x)) + \mathrm{sen}((\alpha-\beta)(x)) = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha x\cos\beta x \iff \mathrm{sen}\,\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}((\alpha+\beta)(x)) + \mathrm{sen}((\alpha-\beta)(x))\right]$

$$\int \mathrm{sen}\,5x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,8x\,dx + \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,2x\,dx = \frac{1}{16}\int 8\,\mathrm{sen}\,8x\,dx + \frac{1}{4}\int 2\,\mathrm{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

$$\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(\alpha+\beta)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(\alpha-\beta)x\,dx$$

$\cos(\alpha x+\beta x) = \cos\alpha x\cos\beta x - \mathrm{sen}\,\alpha x\,\mathrm{sen}\,\beta x \quad (3)$

$\cos(\alpha x-\beta x) = \cos\alpha x\cos\beta x + \mathrm{sen}\,\alpha x\,\mathrm{sen}\,\beta x \quad (4)$

sommando membro a membro le (3) e (4) si ottiene $\cos(\alpha x+\beta x)+\cos(\alpha x-\beta x) = 2\cos\alpha x\cos\beta x \iff \cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x$

$$\int \cos 7x\cos 3x = \frac{1}{2}\int \cos 10x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{20}\int 10\cos 10x\,dx + \frac{1}{8}\int 4\cos 4x = \frac{\mathrm{sen}\,10x}{20} + \frac{\mathrm{sen}\,4x}{8}$$

$$\int \mathrm{sen}\,\alpha x\,\mathrm{sen}\,\beta x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(\alpha-\beta)x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(\alpha+\beta)x\,dx$$

sottraendo membro a membro (3) e (4) si ha:

$\cos(\alpha x+\beta x) - \cos(\alpha x-\beta x) = -2\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,\mathrm{sen}\,\beta x$

$\mathrm{sen}\,\alpha x\,\mathrm{sen}\,\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x]$

$$\int \mathrm{sen}\,8x\cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 3x - \frac{1}{2}\int \cos 13x = \frac{1}{6}\int 3\cos 3x - \frac{1}{26}\int 13\cos 13x = \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}\,3x - \frac{1}{26}\,\mathrm{sen}\,13x$$

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\Downarrow$

$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \iff x = 2\operatorname{arctg} t \; ; \; dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x - 1} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - 3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{2t - 3 + 3t^2 - 1 - t^2} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{2t^2+2t-4} = \int \frac{1}{t^2+t-2}\,dt = \int \frac{1}{t^2+t-2}\,dt = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} = -\frac{1}{3}\lg|t+2| + \frac{1}{3}\lg|t-1|$$

$$= \frac{1}{3}\lg\left|\frac{t-2}{t-1}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{3}\lg\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + c$$

$$\frac{1}{t^2+t-2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} = \frac{(A+B)t - A + 2B}{(t+2)(t-1)} \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{4\sin x + \cos x + 1} = \int \frac{1}{\frac{8t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4}\lg|4t+1| + c = \frac{1}{4}\lg\left|4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{5 - 4\sin^2 x} \quad \int \frac{1}{5 - \frac{4t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{5+5t^2-4t^2} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{t^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{t^2}{5}+1}\,dt = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt5}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt5}\int \frac{\frac{1}{\sqrt5}}{\left(\frac{t}{\sqrt5}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt5}\right) + c = \frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt5}\right) + c$$

$\operatorname{tg} x = t \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \; ; \; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

$x = \operatorname{arctg} t \; , \; dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + 3} = \int \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}+3} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{1+3+3t^2} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{3t^2+4}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{3}{4}t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt3}{2}t\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2\sqrt3}\int \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\left(\frac{\sqrt3}{2}t\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt3}{2}t = \frac{1}{2\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt3}{2}\operatorname{tg} x\right) + c$$

$$\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6}\,dx = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{t^2-5t+6} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{t^2-5t+6}\,dt = -\int \frac{dt}{t-2} + \int \frac{dt}{t-3} = -\lg|t-2| + \lg|t-3| + c = \lg\left|\frac{t-3}{t-2}\right| + c = \lg\left|\frac{\operatorname{tg} x - 3}{\operatorname{tg} x - 2}\right| + c$$

$$\frac{1}{t^2-5t+6} = \frac{A}{(t-2)} + \frac{B}{(t-3)} = \frac{At - 3A + Bt - 2B}{(t-2)(t-3)} = \frac{(A+B)t + Bt - 2B}{(t-2)(t-3)} = \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$\operatorname{tg} x = t \; , \; x = \operatorname{arctg} t \; , \; dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \; , \; \int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$a < 0 \qquad \Delta > 0$

Dette α e β le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ risulta $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)\cdot(x-\beta)} = \sqrt{-a(x-\alpha)\cdot(\beta-x)} = \sqrt{\frac{a(x-\alpha)^2(\beta-x)}{x-\alpha}} = \left(\sqrt{-a}\right)\cdot(x-\alpha)\cdot\left(\sqrt{\frac{(\beta-x)}{x-\alpha}}\right)$

$$\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}} = t \implies \frac{\beta-x}{x-\alpha} = t^2 \iff \beta - x = t^2(x-\alpha)$$

$$\iff +x + t^2x = +\beta + \alpha t^2$$

$$x\cdot(1+t^2) = \alpha t^2 + \beta$$

$$x = \frac{\alpha t^2+\beta}{1+t^2}$$

$$x - \alpha = \frac{\alpha t^2+\beta}{1+t^2} - \alpha \iff \frac{\cancel{\alpha t^2} + \beta - \alpha - \cancel{\alpha t^2}}{1+t^2} = \frac{\beta-\alpha}{1+t^2} \implies dx = \frac{-(\beta-\alpha)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} \qquad a=-1<0 \quad \Delta = 1>0$$

$\alpha = 1$ e $\beta = 2$

$$\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} = t \rightarrow t^2 = \frac{2-x}{x-1}$$

$$\sqrt{-x^2-3x-2} = \sqrt{-(x-1)\cdot(x-2)} = \sqrt{(x-1)(2-x)} = \sqrt{\frac{(x-1)^2\,(2-x)}{x-1}} = (x-1)\cdot\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} = \; =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad , \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$a>0$

poniamo in evidenza $\sqrt{a}$ per far sì che il coefficiente di x^2 sia 1

Supponiamo $a=1$,

sostituiamo

$x+\sqrt{x^2+bx+c} = t$

$\sqrt{x^2+bx+c} = t-x$

Eleviamo entrambi i membri al quadrato

$\cancel{x^2}+bx+c = t^2-2tx+\cancel{x^2}$

$bx+2tx = t^2-c$

$$x(b+2t) = t^2-c \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b+2t} \quad ; \quad dx = \frac{2t(b+2t)-(t^2-c)\cdot(2)}{(b+2t)^2}\,dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}} = \int \frac{1}{\frac{t^2+t+3}{1+2t}} \cdot \frac{2t^2+2t+6}{(1+2t)^2}\,dt \quad \int \frac{\cancel{1+2t}}{\cancel{t^2+t+3}} \frac{2\cancel{(t^2+t+3)}}{\cancel{(1+2t)^2}}\,dt = \int \frac{2}{1+2t}\,dt = \lg|1+2t|+c = \lg\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+3}\right|+c$$

$x+\sqrt{x^2+x+3} = t$

$$\sqrt{x^2+x+3} = t-x \Rightarrow \sqrt{x^2+x+3} = t-\frac{t^2-3}{1+2t} = \frac{t+2t^2-t^2+3}{1+2t} = \frac{t^2+t+3}{1+2t}$$

$\cancel{x^2}+x+3 = t^2+\cancel{x^2}-2tx$

$x+2tx = t^2-3$

$$\frac{x\cancel{(1+2t)}}{\cancel{1+2t}} = \frac{t^2-3}{1+2t}$$

$$x = \frac{t^2-3}{1+2t} \qquad dx = \frac{2t(1+2t)-2(t^2-3)}{(1+2t)^2}\,dt = \frac{2t+4t^2-2t^2+6}{(1+2t)^2}\,dt = \frac{2t^2+2t+6}{(1+2t)^2}\,dt$$

$$\int \frac{e^x+5}{e^{2x}+3e^x+2} \cdot e^x\,dx$$

$e^x = t \qquad e^x\,dx = dt$

$$\int \frac{t+5}{t^2+3t+2}\,dt = 4\int \frac{1}{t+1}\,dt - 3\int \frac{1}{t+2}\,dt = 4\lg|t+1|-3\lg|t+2|+c$$

$\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \int \sqrt{a \sinh^2 t + a^2} \cdot \sqrt{a} \cosh t \, dt$

$x = \sqrt{a} \sinh t$, $dx = \sqrt{a} \cosh t \, dt$

$\int \sqrt{x^2+3}\, dx$, $\int \sqrt{x^2+2}\, dx$, $\int \sqrt{x^2+5}$

CENNI SULLA TEORIA DELLA MISURA SECONDO PEANO-JORDAN IN $\mathbb{R}^2$

Assegnati ed $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ con $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$, consideriamo gli intervalli compatti $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$. Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \left\{ P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a_1, b_1],\ y \in [a_2, b_2] \right\}$

Rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^2$ di dimensioni $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ ed il punto $P_0 = \left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2} \right)$ dicesi il centro di R. Se almeno una delle dimensioni di $\mathbb{R}$ è nulla allora $\mathbb{R}$ si dice degenere. In caso contrario, R è rappresentato geometricamente da un rettangolo i cui lati sono paralleli agli assi coordinati

Siano $I \subseteq \mathbb{R}^2$, P_0 un punto di $\mathbb{R}^2$, si dice che P_0 è interno ad I se esiste un rettangolo chiuso non degenere di centro P_0 strettamente contenuto in I

L'insieme dei punti interni ad I dicesi l'interno di I e si denota col simbolo $\mathring{I}$

Si dice che P_0 è punto frontiera per I se ad ed ogni rettangolo chiuso non degenere di centro P_0 appartengono sia punti di I sia punti di $\mathbb{R}^2 \setminus I$

L'insieme dei punti frontiera per I dicesi la frontiera di I e si denota con uno dei simboli FI, ∂I

Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}^2$ si dice limitato se esiste un rettangolo chiuso non degenere che lo contiene

Sia $\mathbb{R}$ un rettangolo chiuso del piano reale $(\mathbb{R}^2)$, si definisce misura o area di $\mathbb{R}$ il numero reale non negativo

L'unione di un numero finito di rettangoli chiusi non degeneri a due a due privi di punti interni comuni prende il nome di pluri-rettangolo o pluri-intervallo di $\mathbb{R}$, e la

sua misura è pari alla somma delle misure dei rettangoli che lo compongono

L'unione di un numero finito di rettangoli chiusi degeneri prende il nome di pluri-rettangolo o pluri-intervallo degenere di $\mathbb{R}^2$ e la sua misura è nulla

Sia I una parte limitata di $\mathbb{R}^2$ denotati con:

· $A(I)$ l'insieme numerico costituito dalle misure dei plurirettangoli chiusi inclusi in I;

· $B(I)$ l'insieme numerico costituito dalle misure dei plurirettangoli chiusi contenenti in I;

si dimostra che

$\sup A(I) \leq \inf B(I)$

si dice che I è misurabile secondo Peano-Jordan se il $\sup A(I) = \inf B(I)$

In tal caso, il numero reale non negativo $\mu_2(I) = \sup A(I) = \inf B(I)$

dicesi "misura" o "area" di I.

Inoltre, si pone per definizione

$$\mu_2(\emptyset) = 0$$

OSSERVAZIONI

1. Se I è privo di punti interni allora gli unici plurirettangoli chiusi inclusi in I sono quelli degeneri per cui $A(I) = \{0\}$,

e dunque se I è misurabile, esso ha misura nulla.

2. Se I_1 e I_2 sono parti limitate e misurabili di $\mathbb{R}^2$ con $I_1 \subseteq I_2$ allora $\mu_2(I_1) \leq \mu_2(I_2)$

Poniamo $\forall n \in \mathbb{N}$ $Q_n = [-n, n] \times [-n, n]$

Una parte I non limitata di $\mathbb{R}^2$ si dice "P.J.-misurabile" se $\forall n \in \mathbb{N}$ l'insieme $I \cap Q_n$, che può essere vuoto o limitato, è misurabile

Ammesso che I sia misurabile, rilevato che $\forall n \in \mathbb{N}$ $I \cap Q_n \subseteq I \cap Q_{n+1}$

si ha $\mu_2(I \cap Q_n) \leq \mu_2(I \cap Q_{n+1})$ e pertanto tenendo presente il teorema sui limiti delle successioni monotone risulta (1) $\lim \mu_2(I \cap Q_n) = \sup \mu_2(I \cap Q_n)$

il limite (1) dicesi la misura o l'area di I. Se vale $+\infty$ si dice che I ha misura infinita, se $\mu_2(I) < +\infty$ si dice che I ha misura finita.

OSSERVAZIONI

Siano I_1 e I_2 parti di $\mathbb{R}^2$, limitate o non, misurabili, si dimostra quanto segue:

$I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \mu_2(I_1) \leq \mu_2(I_2)$

se $\mu_2(I_1 \cap I_2) < +\infty$ allora $\mu_2(I_1 \cup I_2) = \mu_2(I_1) + \mu_2(I_2) - \mu_2(I_1 \cap I_2)$, in particolare se I_1 e I_2 sono disgiunti o privi di punti interni comuni, poichè

$\mu_2(I_1 \cap I_2) = 0$, allora $\mu_2(I_1 \cup I_2) = \mu_2(I_1) + \mu_2(I_2)$

se $I_1 \subseteq I_2$ e $\mu_2(I_1) < +\infty$ allora $\mu_2(I_2 - I_1) = \mu_2(I_2) - \mu_2(I_1)$, inoltre si dimostra che una parte I di $\mathbb{R}^2$ limitata o non è misurabile se e solo se la sua

frontiera è misurabile ed ha misura nulla.

INTEGRALE DEFINITO DI UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN INTERVALLO COMPATTO

Sia $[a,b]$ un intervallo compatto con $a<b$.

Fissati in (a,b) i punti

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1},$$

posto $x_0 = a$, $x_m = b$, gli m intervalli $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ ... $[x_{m-1}; x_m]$

sono a due a due privi di punti interni comuni e la loro unione coincide con l'intervallo compatto di estremi a e b

Si dice che i suddetti intervalli costituiscono una decomposizione di $[a,b]$ in intervalli compatti, che denotiamo con $D(x_0, x_1, x_2 \dots x_m)$, della quale chiamiamo ampiezza il numero

positivo

$$d = \max\{x_1 - x_0; x_2 - x_1, \dots, x_m - x_{m-1}\}$$

Sia ora f una funzione reale continua in $[a,b]$.

Detta $D(x_0, x_1, \dots, x_n)$ una decomposizione di $[a,b]$ poniamo

$$m_0 = \min_{[x_0,x_1]} f \ , \ m_1 = \min_{[x_1,x_2]} f \ , \ \dots \ , \ m_n = \min_{[x_{n-1},x_n]} f$$

$$M_0 = \max_{[x_0,x_1]} f \ , \ M_1 = \max_{[x_1,x_2]} f \ , \ \dots \ , \ M_n = \max_{[x_{n-1},x_n]} f$$

e consideriamo le somme

$$s_D(f) = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$S_D(f) \sum_{i=0}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Denotiamo con $\Sigma'(f)\ [\Sigma''(f)]$ l'insieme numerico costituito dalle somme

$$s_D(f)\ [S_D(f)]$$

ottenute al variare della decomposizione D dell'intervallo $[a,b]$

Si dimostra che $\Sigma'(f)$ e $\Sigma''(f)$ sono separati e contigui ossia $\sup \Sigma'(f) = \inf \Sigma''(f)$ *

Il numero reale (*) dicesi "l'integrale definito di f da a a b" e si denota con il simbolo $\int_A^B f(x)\,dx$

Si pone per definizione $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Se $f(x) = K \quad \forall x \in [a,b]$

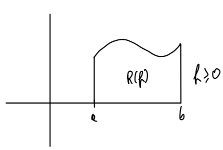
poiché qualunque sia la decomposizione $D(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $s_D(f) = S_D(f) = K\cdot(b-a)$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = K\cdot(b-a)$

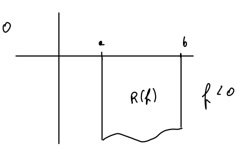
SIGNIFICATO GEOMETRICO INTEGRALE DEFINITO

Se f una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a,b]$ ed ivi non negativa [non positiva], il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}(f) = \{P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ prende il nome di

$[\mathbb{R}(f) = \{P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq 0\}$

rettangoloide relativo ad f e di base l'intervallo compatto $[a,b]$





Si dimostra che $R(f)$ è misurabile e risulta che $m_2(R(f)) = \int_a^b f(x)\,dx$ $\quad [m_2(R(f)) = -\int_a^b f(x)\,dx$

PROPRIETÀ INTEGRALE DEFINITO

Prop. 1

Sia f una funzione reale continua in $[a,b]$ ed ivi non negativa. Se $[c,d]$ è compatto e contenuto in $[a,b]$ e risulta $\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

Prop. 2

Sia f una funzione reale continua in $[a,b]$ ed ivi non negativa. Se $\int_a^b f(x)dx = 0$ allora $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Prop. 3 Proprietà Additiva

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Qualunque siano i punti $a,b,c \in I$ risulta $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Prop. 4 Proprietà di Linearità

Siano K una costante reale, f e g funzioni reali, continue nell'intervallo compatto $[a,b]$. Si ha: $\int_a^b K f(x)dx = K\int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Prop. 5 Proprietà di Monotonia

Siano f e g funzioni reali continue nell'intervallo compatto $[a,b]$. Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ allora $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Prop. 6 Proprietà del Modulo

Se f è una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a,b]$ allora $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Prop. 7 Proprietà della Media

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a,b]$

Posto $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$, si ha $\quad m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$

Inoltre $\exists\, c \in [a,b] : f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

Dim. Infatti risulta $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$ e dunque per la Prop. 5 si ha: $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx \iff m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\cdot(b-a) \iff m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$

Conseguentemente $\exists\, c \in [a,b] : f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE

Premessa

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo I, fissato $x_0 \in I$ introduciamo la funzione reale $F: x \in I \to \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$; nota come funzione integrale relativa ad f e di punto iniziale x_0

Teorema

La funzione F è una primitiva di f, ovvero $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Dimostrazione

Si tratta di provare che fissato $\bar{x} \in I$ risulta $F'(\bar{x}) = f(\bar{x}) \iff \lim_{x \to \bar{x}} \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(\bar{x})$

Infatti osserviamo che $\forall x \in I \setminus \{\bar{x}\}$

Proprietà Additiva

$\frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}{x - \bar{x}} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \int_{\bar{x}}^{x_0} f(t)\,dt}{x - \bar{x}} = \frac{\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt}{x - \bar{x}}$, per la proprietà della media $\forall x \in I \setminus \{\bar{x}\} \ \exists\, c_x \in [\bar{x}, x]$ tale che $f(c_x) = \frac{\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt}{x - \bar{x}}$. Pertanto $\forall x \in I \setminus \{\bar{x}\} \ \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(c_x)$

Poiché per ipotesi f è continua in I, essa è continua in $\bar{x}$ e ciò vuol dire che fissato $\varepsilon > 0$ $\exists$ un intorno I_ε di $\bar{x}$ tale che $\forall x \in I_\varepsilon \cap I \ |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

Visto che $\forall x \in I_\varepsilon \cap I \setminus \{\bar{x}\}$ $c_x \in I_\varepsilon \cap I$ risulta $\forall x \in I_\varepsilon \cap I \setminus \{\bar{x}\} \ |f(c_x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \iff \left| \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f(\bar{x}) \right| < \varepsilon$. Questo vuol dire che $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(\bar{x}) \iff F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si evince che ogni funzione continua in un intervallo è dotata di primitiva

Prop. 8

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a,b]$. Se φ è una primitiva di f allora $\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$ *. Consideriamo la funzione integrale relativa ad f e di punto iniziale a

ovvero $\forall x \in [a,b] \ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, la quale in base al teorema fondamentale del calcolo integrale è una primitiva di f. Poiché per ipotesi φ è una primitiva di f allora $\exists$ una costante reale c tale che

$\forall x \in [a,b] \ F(x) = \varphi(x) + c \iff \forall x \in [a,b] \int_a^x f(t)\,dt = \varphi(x) + c \quad (1)$

Ponendo nella (1) $x = a$, si ottiene $\int_a^a f(t)\,dt = \varphi(a) + c \iff 0 = \varphi(a) + c \iff -\varphi(a) = c$

Sostituendo nella (1) $c = -\varphi(a)$ si ottiene $\forall x \in [a,b] \int_a^x f(t)\,dt = \varphi(x) - \varphi(a)$. Sostituendo nell'ultima uguaglianza $x = b$ si ottiene la *. La * è nota come formula fondamentale del calcolo integrale

il cui secondo membro viene di solito indicato con $[\varphi(x)]_a^b$ che si legge "$\varphi(x)$ calcolata tra a e b".

OSS.

Sia f un'espressione elementare, mentre le derivate di f sono espressioni elementari, altrettanto non può dirsi per le sue primitive. Si dimostra ad esempio che le funzioni $\frac{\sin x}{x}$ ed $\frac{e^x}{x}$ sono sprovviste di primitive che risultano essere espressioni elementari

DEF

Un'espressione elementare si dirà elementarmente integrabile se le sue primitive sono espressioni elementari

OSS.

Dunque quando f è un'espressione elementare, la formula fondamentale del calcolo integrale è utilizzabile solo se f è elementarmente integrabile

INTEGRAZIONE DEFINITA PER PARTI E PER SOSTITUZIONE

Prop. 1 (Integrazione definita per parti)

Siano f e g funzioni reali dotate di derivata continua nell'intervallo compatto $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$

DIMOSTRAZIONE

Infatti si ha $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int_a^b [f(x) g'(x) + f'(x)\cdot g(x) - f'(x)\, g(x)]\,dx \iff \int_a^b [f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)]\,dx - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx \iff \int_a^b (f(x)\, g(x))'\,dx - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx \iff [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx \iff f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$

Esempio

$$\int_2^5 \log x\,dx = [x\log x]_2^5 - \int_2^5 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = 5\log 5 - 2\log 2 - [x]_2^5 = 5\log 5 - 2\log 2 - 3$$

u_2 $\log x$

$f(x) = \log(x)$

$x:]0;+\infty[$

$$\int_0^2 x e^x = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

$h(x) = x\, e^x$ $\mathbb{R}$

Prop. 2 (Prima regola di Integrazione definita per sostituzione)

Sia $f(t)$ una funzione reale continua nell'intervallo I. Sia $g(x)$ una funzione reale dotata di derivata continua nell'intervallo compatto $[a,b]$ e tale che $\forall x \in [a,b]\ g(x) \in I$

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Esempio

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = \int_{\sin\frac{\pi}{2}}^{\sin\pi} e^t\,dt = \int_1^0 e^t\,dt = [e^t]_1^0 = 1-e$$

$\sin x = t$

$\cos x\,dx = dt$

Prop. 3 (II regola di integrazione definita per sostituzione)

Sia $f(x)$ una funzione reale e continua nell'intervallo compatto $[a,b]$. Sia $g(t)$ una funzione reale definita e dotata di derivata continua nell'intervallo compatto $[c,d]$ ivi strettamente crescente [decrescente] ed avente per codominio l'intervallo $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt \quad \left[\int_a^b f(x)\,dx = \int_d^c f(g(t))\,g'(t)\,dt\right]$$

Dim.

Proviamo l'asserto supponendo che g sia strettamente crescente nell'intervallo compatto $[c,d]$. Sia $\varphi(x)$ una primitiva di f. Poiché $\forall t\in[c,d]$ $D\varphi(g(t)) = \varphi'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\cdot g'(t)$, la funzione $\varphi(g(t))$ è una primitiva di $f(g(t))\cdot g'(t)$.

Conseguentemente $\int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = [\varphi(g(t))]_c^d = \underbrace{\varphi(g(d))}_{b} - \underbrace{\varphi(g(c))}_{a} = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Esercizi

$$\int \frac{x+1}{9x^2+6x+4}\,dx = \int\frac{x+1}{(3x+2)^2}\,dx = \int\frac{\frac{t-2}{3}+1}{t^2}\,\frac{1}{3}dt = \int\frac{t+1}{9t^2}\,dt = \frac{1}{9}\int\frac{t+1}{t^2}\,dt = \frac{1}{9}\int\frac{t}{t^2}\,dt + \frac{1}{9}\int\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{9}\lg|t| - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{t} + c = \frac{1}{9}\left(\lg|3x+2| - \frac{1}{3x+2}\right)+c$$

$(3x+2) = t \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$

$x = \frac{t-2}{3}$

$$\int\frac{x+1}{x^2(x+3)}\,dx =$$

$$\frac{x+1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2}$$

$$\int\frac{Bx+C}{x^2}\,dx = \int\frac{B}{x}\,dx + \int\frac{C}{x^2}\,dx$$

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2\cdot(x^2-x+1)}\,dx$$

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$\int e^x\cdot\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx \;:\; \frac{2\int e^x\sin x\,dx}{2} = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)+c$$

$f'(x) = e^x \quad g(x) = \sin x$ $\qquad$ $f'(x) = e^x \quad g(x) = \cos x$

$f(x) = e^x \quad g'(x) = \cos x$ $\qquad$ $f(x) = e^x \quad g'(x) = -\sin x$

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)+c$$

$$\int e^{-x^2}\cdot x^3 dx = \int e^{-x^2}\cdot x\cdot x^2 = -\frac{1}{2}\int (-2x)\cdot e^{-x^2}\cdot x^2 dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\cdot x^2 + \int e^{-x^2}\cdot 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$f'(x) =$ $\quad g(x) = x^2$

$f(x) = e^{-x^2}$ $\quad g'(x) = 2x$

---

f é una funzione tale continua su un'intervallo simmetrico $[-K, K]$ e

- f é pari, allora $\int_{-K}^{K} f(x)dx = 2\int_0^K f(x)dx$
- f é dispari, allora $\int_{-K}^{K} f(x)dx = 0$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$f(x) = \cos x$ pari

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0$$

$f(x) = \sin x$ dispari

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}dx = 2\int_0^1 e^{-|x|}dx = 2\int_0^1 e^{-x}dx = 2\left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$f(x) = e^{-|x|}$ pari

$$\int_0^2 |(x-1)(x+3)|dx = \int_0^1 (1-x)(x+3) + \int_1^2 (x-1)(x+3)dx$$

$(x-1)(x+3) \geq 0$

$x \geq 1$

$x \geq -3$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \hline | & | & | \end{array}$$

$$|(x-1)\cdot(x+3)| = \begin{cases} (x-1)(x+3) & \text{se } x \in [1,2] \\ (1-x)(x+3) & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x+2+1}{x^2+2x+2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+1+1}dx =$$

$$\left[\lg(x^2+2x+2)\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+(x+1)^2}dx = \lg 2 + \left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_{-1}^{0} = \lg 2 + \frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^2 \frac{2x^2+1}{(x^2+1)x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\lg x\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[\lg(x^2+1)\right]_1^2 = \lg 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lg 2 + \frac{1}{2}\lg 5 = \frac{1}{2}\lg 10$$

$$\frac{2x^2+1}{(x^2+1)x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)} =$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ A=1 \\ C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\int_{\lg 2}^{\lg 3} \frac{3e^{2x}+2e^x}{2e^{2x}+3e^x+1}dx = \int_{\lg 2}^{\lg 3} \frac{3e^x+2}{2e^{2x}+3e^x+1}\cdot e^x dx = \int_2^3 \frac{3t+2}{2t^2+3t+1}dt = \int_2^3 \frac{3t+2}{(t+1)(2t+1)}dt = \int_2^3 \frac{dt}{t+1} + \int_2^3 \frac{dt}{2t+1} = \left[\lg(t+1)\right]_2^3 + \frac{1}{2}\left[\lg(2t+1)\right]_2^3 = \lg\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\lg\frac{7}{5}$$

$e^x = t \quad e^x dx = dt$

$x = \lg 2 \Rightarrow t = 2$

$x = \lg 3 \Rightarrow t = 3$

$$2(t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right) = \cancel{2}(t+1)\frac{(2t+1)}{\cancel{2}}$$

$$\frac{3t+2}{(t+1)(2t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{2t+1} = \frac{(2A+B)t + A+B}{(t+1)(2t+1)}$$

$2A+B=3$

$A+B=2$

$A=1$

$B=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+tg^2 x}{tg^2 x - 5tg x+6}\,dx$$

$tg\, x = t$

$(1+tg^2 x)\,dx = dt$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2-5t+6} \qquad \log\frac{4}{3}$$

INTEGRALI IMPROPRI

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo semiaperto a destra [a sinistra] limitato o non. Si dice che f è integrabile in senso improprio nell'intervallo (a,b) oppure che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è convergente se esiste ed è finito il seguente limite

$$\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx \quad \left[\lim_{t\to a}\int_t^b f(x)dx\right].$$

In tal caso si pone per definizione $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx$ $\left[\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)dx\right]$ (1)

Se il limite nella (1) è $+\infty$ o $-\infty$, l'integrale si dirà divergente. Se il limite nella (1) non esiste, allora l'integrale non esiste.

Esempio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1}[\arcsin x]_0^t = \lim_{t\to 1}(\arcsin t) = \lim_{t\to 1} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ è definita e continua in $]-1,1[$ per cui è continua in $[0,1[$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg\, x\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} -lg(\cos t) = +\infty$$

$f(x) = tg\, x$ $\quad \underbrace{\mathbb{R}\setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}}$

è continua in $\qquad$ e quindi in $[0,\frac{\pi}{2}[$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1}\left(-2\sqrt{1-t}+2\right) = 2$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ è definita e continua in $]-\infty,1[$ per cui è continua $[0,1[$

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} = \lim_{t\to 1}\int_t^e \frac{dx}{x\sqrt{lg}} = \lim_{t\to 1}\left[2\sqrt{lg\, x}\right]_t^e = \lim_{t\to 1} 2 - 2\sqrt{lg\, t} = 2$$

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ x>0 \\ lg\, x>0 \end{cases}$$

è definita è continua in $]1,+\infty[$, continua in $]1,e]$

$\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$

$\alpha=3$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to 0}\int_t^1 = \lim_{t\to 0}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{-2t^2}\right) = -\infty$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to 0} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to 0} [2\sqrt{x}]_t^1 = \lim_{t \to 0} (2 - 2\sqrt{t}) = 2$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \to 0} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{T \to 0} (-\lg|t|) = +\infty$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} \log t = +\infty$$

$\alpha > 1$

il limite converge

$\alpha < 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{dx}{dx} = \lim_{t \to +\infty} (2\sqrt{t} - 2) = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \text{ converge} \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Funzioni sommabili

Si dice che una funzione reale f è sommabile in un intervallo (a,b) se il suo modulo è integrabile in (a,b). In tal caso si dice che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è assolutamente convergente

sommabilità $\Rightarrow$ integrabilità

La precedente implicazione diventa un'equivalenza se la funzione è non negativa in (a,b)

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano f e g funzioni reali integrabili in (a,b) con $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Sussistono le seguenti implicazioni

- g integrabile in (a,b) $\Rightarrow$ f integrabile in (a,b)
- f non integrabile in (a,b) $\Rightarrow$ g non integrabile in (a,b)

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano f e g funzioni reali definite in (a,b). $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per (a,b) con f e g integrabili in un intorno I_0 di x_0. Se $|f| \underset{x_0}{\sim} |g|$ e se f e g sono non nulle in $I_0 \setminus \{x_0\}$

allora f è sommabile in x_0 $\Leftrightarrow$ g è sommabile in I_0

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$0 < e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$\forall x \in [1, +\infty[$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t e^{-x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} [-e^{-x}]_1^t = \lim_{t \to +\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1}$$

Quanto appena stabilito vuol dire che la funzione $g(x) = e^{-x}$ è sommabile ($\Leftrightarrow$ integrabile) in $[1; +\infty[$ per cui la funzione $f(x) = e^{-x^2}$, in virtù del criterio del confronto, è sommabile in $[1; +\infty[$ pertanto l'integrale assegnato è assolutamente convergente.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+2} \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\left|\frac{1}{x^3+2} \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\right| \underset{+\infty}{\sim} = \left|\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{|x^5|}$$

Poiché $g(x) = \frac{1}{x^5}$ ($\alpha = 5 > 1$) è sommabile in $[1; +\infty[$ in base al criterio del confronto asintotico, è sommabile in $[1; +\infty[$, dunque l'integrale assegnato è assolutamente convergente

Limiti di successioni: (Notevoli)

$a > 1$, $\alpha > 0$ $\quad \lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

$n^n,\ n!,\ a^n (a>1),\ n^\alpha (\alpha > 0),\ \log_a n\ (a>1)$

$\alpha > 0$ $\lim n^\alpha = +\infty$

$a > 1$ $\lim a^n = +\infty$

$$\lim \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim \log n = +\infty$$

$$\lim n! = +\infty$$

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\lim n^n = +\infty$$

$$\lim \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim n^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \lim \sqrt[n]{3^n} = 3$$

Formula di Stirling

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

$$\lim \sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}} = \lim \sqrt[n]{n^n} \cdot \sqrt[n]{e^{-n}} \cdot \sqrt[n]{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}} = \lim n \cdot e^{-1} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = +\infty$$

$$\lim n^n \operatorname{sen} n^{-(n+1)} = \lim n^n \cdot \frac{1}{n^{n+1}} = \lim \cancel{n^n}^{\,1} \cdot \frac{1}{\cancel{n^n}_{\,1} \cdot n} = \lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\operatorname{sen} n^{-(n+1)} = \operatorname{sen}\frac{1}{n^{n+1}} \sim \frac{1}{n^{n+1}}$$

$$\lim \frac{2^n}{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{n^n}\right) = \lim \frac{2^n}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{n^n} = \lim 2^n \cdot \frac{1}{n^n} = 0$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{n^n}\right) \sim \frac{n}{n^n}$$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{5^n+7^n}{n^n+n!}} = \lim \frac{\sqrt[n]{5^n+7^n}}{\sqrt[n]{n^n+n!}} = \lim \frac{\sqrt[n]{7^n}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim \frac{7}{n} = 0$$

$$\lim \left(n^2+5\right)^2 \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{3n+1}{2n^7+n^5+5}\right) = \lim \cancel{n^4}\cdot\frac{3}{2n^{\cancel{6}2}} = \lim \frac{3}{2n^2} = 0$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{3n+1}{2n^7+n^5+5}\right) \sim \operatorname{arcsen}\left(\frac{3n}{2n^7}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{2n^6}\right) \sim \frac{3}{2n^6}$$

$$\left(n^2+5\right)^2 \sim \left(n^2\right)^2 = n^4$$

$$\lim \; 5^n+n^2 \;\; \log\left(1+e^{-n}\right) = \lim 5^n\cdot\frac{1}{e^n} = +\infty$$

$$5^n+n^2 \sim 5^n$$

$$\log\left(1+e^{-n}\right) \sim \frac{1}{e^n}$$

$$\lim \left(2n^2+n+1\right)^3\left(1-\cos n^{-n}\right) = \lim 8n^6\cdot\frac{1}{2n^{2n}} = 0$$

$$\left(2n^2+n+1\right)^3 \sim \left(2n^2\right)^3 = 8n^6$$

$$1-\cos n^{-n} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\left(n^n\right)^2} = \frac{1}{2n^{2n}} =$$

$$\lim \frac{\left(\sqrt[3]{1+2^{-n}}-1\right)\cdot 3^{n+1}}{\operatorname{arctg} 3^{n+1}+3^{n+1}} = \lim \frac{\frac{1}{3\cdot 2^n}\cdot\cancel{3^{n+1}}\,1}{\cancel{3^{n+1}}\,1} = \lim \frac{1}{3\cdot 2^n} = 0$$

$$\left(\sqrt[3]{1+2^{-n}}-1\right) \sim \frac{1}{3}\cdot 2^{-n} = \frac{1}{3\cdot 2^n}$$

$$\operatorname{arctg} 3^{n+1}+3^{n+1} \sim 3^{n+1}$$

$$\lim \left(2^n+n^n\right)\left(e^{n^{-n}}-1\right) = \lim \cancel{n^n}\cdot\frac{1}{\cancel{n^n}} = 1$$

$$2^n+n^n \sim n^n$$

$$e^{n^{-n}}-1 \sim n^{-n} = \frac{1}{n^n}$$

$$\lim \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^n} = \lim e^{n^n\log\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim e^{n^n\cdot\frac{3}{n^2}} = +\infty$$

$$\log\left(1+\frac{3}{n^2}\right) \sim \frac{3}{n^2}$$

Serie numeriche

Generalità

Sia $\{a_n\}$ una successione reale. La successione di operazioni $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3+\dots+a_n \dots$ prende il nome di serie numerica di termine generale a_n e si denota con uno dei seguenti simboli $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n\dots$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (1)

$\forall n \in \mathbb{N}$ la seguente somma $s_n = a_1+a_2+\dots+a_n$ prende il nome di somma parziale n-esima della (1)

Si dice che la (1) è regolare se è tale la successione s_n delle sue somme parziali, ovvero se esiste il seguente limite $\lim s_n$ (2)

Se la (1) è regolare allora il limite (2) prende il nome di somma della serie e si denota anch'esso con uno dei simboli (1). Si dice che la (1) converge [diverge pos., diverge neg.] se il (2) è finito [$+\infty$; $-\infty$]

Se la successione $\{s_n\}$ non è regolare, si dice che la serie (1) è indeterminata. Si definisce carattere della (1) la proprietà che essa ha di essere convergente o divergente positivamente o divergente negativamente.

Teor.

Condizione necessaria affinché la (1) converga è che il suo termine generale sia infinitesimo ovvero $\lim a_n = 0$

Dimostrazione

Per ipotesi la (1) converge e ciò per definizione vuol dire che la successione (s_n) delle sue somme parziali è convergente ovvero il limite di tale successione esiste ed è finito.

Chiamiamo tale limite $s (\in \mathbb{R})$. Osserviamo allora che essendo la successione s_{n-1} estratta dalla successione s_n, è chiaro che $\lim s_{n-1} = s$. Pertanto si ha

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

Serie Note

Serie Geometrica

Sia $q \in \mathbb{R}$, la serie numerica

$1+q+q^2+\dots+q^n+\dots$, ovvero $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ è nota come serie geometrica di ragione q. Si dimostra che:

- se $q \neq 1$ $\quad s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per cui se $|q|<1$ allora $\lim s_n = \dfrac{1}{1-q}$

- se $q>1$ allora $\lim s_n = +\infty$, inoltre si dimostra che se $q=1$ $s_n = n+1$ per cui $\lim s_n = +\infty$

- se $q \leq -1$ allora la successione s_n non è dotata di limite.

Dunque la serie considerata converge solo se $|q|<1$ ed in tal caso la sua somma è uguale ad $\frac{1}{1-q}$

Esempio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La serie assegnata è la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ per cui converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty}$$

Serie Armonica

La seguente serie numerica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ ovvero $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Si dimostra che tale serie diverge positivamente (Nonostante la condizione necessaria sia verificata)

Serie Numeriche a termini non negativi

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (1) una serie numerica a termini non negativi
(ovvero $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$)

Denotata con $\{S_n\}$ la successione delle somme parziali della (1) è chiaro che $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n \leq S_{n+1}$ ovvero la successione S_n è crescente pertanto in base al teorema sui limiti delle successioni monotone, la successione S_n è regolare ed il suo limite è esattamente uguale al suo estremo superiore. Quanto appena rilevato ci consente di affermare che la (1) o è convergente oppure diverge positivamente. Analogamente una serie numerica a termini non positivi o converge oppure diverge negativamente.

Serie Armonica Generalizzata

La seguente serie numerica $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \in]0;+\infty[$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ è detta serie armonica generalizzata di esponente α.

Si dimostra quanto segue:

- se $\alpha > 1$ la serie converge
- se $0<\alpha<1$ la serie diverge positivamente
- se $\alpha=1$ detta serie è esattamente la serie armonica, la quale diverge positivamente

Criterio del Confronto

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (1), $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ (2) ... due serie numeriche a termini non negativi e tali che $\exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{\nu} \quad a_n \le b_n$

Si dice allora che la (1) é maggiorata dalla (2) oppure che la (2) é minorata dalla (1). Valgono le seguenti implicazioni

(2) convergente $\Rightarrow$ (1) convergente

(1) divergente positivamente $\Rightarrow$ (2) divergente positivamente

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n+n}$$

Rilevato che $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{\operatorname{arctg} n}{2^n+n} < \frac{\pi/2}{2^n+n} < \frac{\pi/2}{2^n}$

la serie assegnata é maggiorata dalla serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, poiché l'ultima serie converge, in base al criterio del confronto, anche la serie generale converge.

Serie a Segni Alterni

Si definisce serie a segni alterni o anche serie alternante una serie numerica del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$ dove $\{a_n\}$ é a termini positivi ovvero $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$

Criterio di Leibniz

Assegnata la serie numerica a segni alterni $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$, se la successione a_n é decrescente e infinitesima, allora la serie converge

Esempio

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^n+2}$, rilevato che la successione $\frac{1}{n^n+2}$ é a termini positivi, la serie é a segni alterni. Poiché la successione prima considerata é decrescente e infinitesima, in base al criterio di Leibniz, la serie assegnata converge.

SERIE COMPLETAMENTE CONVERGENTI

Assegnata una serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (1),$$

la seguente serie numerica a termini non negativi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \quad (2)$$

è detta "serie dei moduli" della (1)

Si dice che la (1) è assolutamente convergente se la (2) converge.

OSSERVAZIONE

Ad esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (*)$$

la serie a segni alterni, per il criterio di Leibniz, converge. La serie dei moduli della $(*)$ è: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è la serie armonica, la quale non converge ma diverge positivamente

Pertanto la $(*)$ converge ma non converge assolutamente

Una serie che sia convergente ma non assolutamente convergente, si dice anche semplicemente convergente

TEOREMA 1

Se la (2) converge allora anche la (1) converge e risulta $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

Oss

In base al teorema (1), una serie numerica che sia assolutamente convergente, è anche convergente

CRITERIO DEL CONFRONTO — TEOREMA 2

Una serie numerica la cui serie dei moduli sia maggiorata da una serie numerica a termini non negativi, convergente è assolutamente convergente

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n+1}$$

Risultando $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\frac{\cos n}{3^n+1}\right| = \frac{|\cos n|}{3^n+1} \leq \frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n}$, la serie dei moduli della serie assegnata è maggiorata dalla serie numerica a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$, la quale converge in quanto serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$. Pertanto la serie data in virtù del criterio del confronto converge assolutamente

Criterio della radice (Teorema 3)

Assegnata la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (*)$$

se la successione $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ è regolare, posto $l = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, si ha quanto segue:

- se $l<1$ allora la $(*)$ converge assolutamente;
- se $l>1$ allora la $(*)$ non converge
- se $l=1$ nulla può dirsi circa il carattere della $(*)$

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

La serie assegnata è a termini positivi. Intanto si ha:

$$\lim \frac{n^2}{2^n} = 0$$

Avendosi

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$$

, in base al criterio della radice, la serie assegnata converge

Criterio del Rapporto

Assegnata la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (*)$$

se la successione $\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$ è regolare, posto $l = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, si ha quanto segue

- se $l<1$ allora la $(*)$ è assolutamente convergente;
- se $l>1$ allora la $(*)$ non converge;
- se $l=1$ nulla può dirsi circa il carattere della $(*)$

Criterio del Confronto Asintotico

Se $|a_n| \sim |b_n|$ allora

$\sum a_n$ converge assolutamente $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ converge assolutamente

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(3n+1)\left(e^{\frac{1}{(n+2)^4}}\right)$$

Risultato

$(3n+1)\left(e^{\frac{1}{(n+2)^4}}-1\right) \sim 3n\cdot\frac{1}{(n+2)^4} \sim \frac{3n}{n^4}=\frac{3}{n^3}$, il carattere della serie assegnata coincide con il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n^3}$, la quale converge in quanto ottenibile dalla serie armonica generalizzata di esponente 3 moltiplicandone i termini per il numero 3, pertanto in base al Criterio del Confronto Asintotico, la serie assegnata converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{n^2+2}{n^n+2^n}\right)$$

Risultando

$\operatorname{arctg}\left(\frac{n^2+2}{n^n+2^n}\right) \sim \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2}{n^n}\right) \sim \frac{n^2}{n^n}$, il carattere della serie assegnata coincide con il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n^n}$ (*) per la quale si ha $\lim\sqrt[n]{\frac{n^2}{n^n}}=\lim\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{n^n}}=0$

la (*) converge per il Criterio della Radice, conseguentemente la serie assegnata in base al Criterio del Confronto Asintotico è convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}$$

Avendosi

$\lim\sqrt[n]{\frac{n+1}{n!}}=\lim\frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{n+1}}}{\underset{\searrow +\infty}{\sqrt[n]{n!}}}=0$ Criterio della Radice, converge

Risultando

$\lim\frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}}=\lim\frac{n+2}{(n+1)\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n+1}=\frac{n+2}{(n+1)^2}=0$ Criterio del Rapporto, Converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{tgh}(n^2+3)}{(n+1)^2+7^n}$$

Avendosi

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{\operatorname{tgh}(n^2+3)}{(n+1)^2+7^n}<\frac{1}{(n+1)^2+7^n}<\frac{1}{7^n}$. La serie assegnata è maggiorata dalla serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{7^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

la quale è convergente (geometrica di ragione $\frac{1}{7}$)

Criterio del Confronto, converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(3n+1)}{n^4+n!}\ (*)$$

Risultando

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\left|\frac{(-1)^n\sin(3n+1)}{n^4+n!}\right|=\frac{|(-1)^n\sin(3n+1)|}{n^4+n!}=\frac{|(-1)^n|\cdot|\sin(3n+1)|}{n^4+n!}=\frac{|\sin(3n+1)|}{n^4+n!}\le\frac{1}{n^4+n!}<\frac{1}{n!}$

La serie dei moduli della (*) è maggiorata dalla serie numerica a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ (**) per la quale si ha $\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$. Quindi la (**) per il Criterio della Radice converge e conseguentemente per il Criterio del Confronto la (*) converge assolutamente e quindi converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}+n^2+1}{n!+n^n}$$

Poiché

$$\lim \frac{n^{2n}+n^2+1}{n!+n^n} = \lim \frac{n^{2n}}{n^n} = \lim n^n = +\infty$$

diverge positivamente (non è verificata la condizione necessaria relativa alla convergenza)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n+2^n} \quad (*)$$

Poiché la successione $\left\{\frac{1}{5^n+2^n}\right\}$ è positiva, decrescente e infinitesima, in base al criterio di Leibniz la $(*)$ converge

Studiamo il carattere della serie dei moduli della $(*)$ ovvero della serie:

$$\overset{(**)}{\sum_{n=1}^{+\infty}} = \left|\frac{(-1)^n}{5^n+2^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n+2^n}$$ per la quale si ha $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{5^n+2^n}}$ $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{5^n+2^n}} = \frac{1}{5}$. La $(**)$ per il criterio della radice converge, pertanto $(*)$ è assolutamente convergente quindi convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \quad (*)$$

Risultando

$$\frac{n^n}{(n!)^2} \sim \frac{n^n}{\left(n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{\cancel{n^n}}{n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot 2\pi n} = \frac{e^{2n}}{n^n \cdot 2\pi n}$$

il carattere della $(*)$ coincide con il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2n}}{n^n \cdot 2\pi n}$ $(**)$ poiché $\lim \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n \cdot 2\pi n}} = \lim \frac{\overset{\nearrow e^2}{\sqrt[n]{e^{2n}}}}{\underset{\downarrow n}{\sqrt[n]{n^n}} \cdot \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{2\pi n}}} = 0$ Per il criterio della radice la $(**)$ è convergente. Pertanto per il criterio del confronto asintotico la $(*)$ converge

CRITERI DI CONVERGENZA DEGLI INTEGRALI IMPROPRI

Criterio 1

Sia $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e integrabile su ogni intervallo compatto $[a, b]$ con $b > a$.

- condizione sufficiente perchè esista $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è che f sia infinitesima per $x \to +\infty$ di ordine $\alpha > 1$

- se per $x \to +\infty$ $f(x)$ ha limite $l \neq 0$ oppure è infinitesima di ordine $\alpha \leq 1$ allora l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

Esempio

$\log\left(1 + \frac{3}{x^4}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{x^4}$ infinitesima di ordine 4

$e^{\frac{\sin x + x}{7x^3+1}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{7x^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{7x^2}$ infinitesima di ordine 2

$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ infinito per $x \to 1^+$ di ordine 1

$\lim_{x \to \infty} \log\left(1 + \frac{3x^5}{e^x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3x^5}{e^x} = 0$ infinito con ordine maggiore di 1

Secondo Criterio

Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e integrabile su ogni intervallo compatto del tipo $[a + \delta; b]$ $(\delta > 0 : a < a + \delta < b)$

- Condizione sufficiente affinché $\exists \int_a^b f(x)\,dx$ è che f risulti per $x \to a^+$ infinita di ordine $\alpha < 1$

- Se per $x \to a^+$ f è infinita di ordine $\alpha \geq 1$ allora l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ non converge

Studiare la convergenza dei seguenti integrali

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

La funzione integranda è continua e non negativa in $[1; +\infty[$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

La funzione integranda per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine $\alpha = \frac{3}{2}$ $(\alpha > 1)$ per cui l'integrale assegnato converge

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

La funzione integranda è continua e positiva in $[1;+\infty[$

Poiché $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$

La funzione integranda per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine $\alpha = 2$ $(\alpha > 1)$ per cui l'integrale assegnato converge

$$\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt[3]{x-2}}\, dx =$$

La funzione integranda è continua e positiva in $[2;+\infty[$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt[3]{x-2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{4}{3}}}$$

La funzione integranda per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine $\alpha = \frac{4}{3}$ $(\alpha > 1)$ per cui l'integrale assegnato converge

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x^2-3x+2}\, dx$$

La funzione integranda è continua e positiva in $[3;+\infty[$

Poiché

$$\frac{1+e^{-x}}{x^2-3x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

La funzione integranda per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine $\alpha = 2$ $(\alpha > 1)$ per cui l'integrale assegnato converge

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x}}$$

La funzione integranda è continua e positiva in $[2;+\infty[$

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{dx}{x^{2/3}}$$

La funzione integranda per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine $\alpha = \frac{2}{3}$ $(\alpha > 1)$ per cui l'integrale assegnato non converge

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

La funzione integranda è positiva e continua in $]0;\pi/4]$

Poiché

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

La funzione integranda per $x \to 0$ è infinita di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ $(\alpha < 1)$ per cui l'integrale converge.

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$$

La funzione integranda è continua e positiva in $]0,1]$

$$\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

La funzione integranda per $x \to 0$ è infinita di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ $(\alpha<1)$ per cui l'integrale converge.

$$\int_2^5 \frac{1+e^{-x}}{x^2-3x+2}\,dx$$

La funzione integranda è continua e positiva in $]2,5]$

$$\frac{1+e^{-x}}{x^2-3x+2} = \frac{1+e^{-x}}{(x-2)(x-1)} \quad \left(\lim_{x \to 2^+} \frac{1+e^{-x}}{(x-2)(x-1)} = +\infty \right)$$

La funzione integranda per $x \to 0$ è infinita di ordine $\alpha = 1$ $(\alpha<1)$ per cui l'integrale non converge.

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+r}{1+r^2+r}\,2r\,dr = 2\int \frac{r^2+r}{r^2+r+1}\,dr = 2\int 1\,dr - 2\int \frac{1}{r^2+r+1}\,dr = 2r - 2\int \frac{1}{r^2+r+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}\,dr = 2r - 2\int \frac{1}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dr = -2\int \frac{dr}{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -2\int \frac{dr}{(2r+1)^2+3} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2r+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dr = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2r+1}{\sqrt{3}} + 2r + c = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{x} + c$$

$\sqrt{x} = r$

$x = r^2$

$dx = 2r\,dr$

$$\begin{array}{l|l} r^2+r & r^2+r+1 \\ \hline -r^2-r-1 & 1 \;\; R \\ \hline // \;\; -1 & \end{array}$$

$$\int e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int e^{-r}\,2r\,dr = -e^{-r}\,2r + \int e^{-r}\,2\,dr = -e^{-r}\,2r - 2e^{-r} + c =$$

$\sqrt{x} = r$ $\quad f'(r) = e^{-r}$ $\quad g(r) = 2r$

$x = r^2$ $\quad f(r) = -e^{-r}$ $\quad g'(r) = 2$

$dx = 2r\,dr$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{r}{\sqrt{r-1}}\,dr =$$

$e^x = r$

$e^x\,dx = dr$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx = \int \frac{x+2-2}{\sqrt{x+2}}\,dx = \int \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}\,dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \int \sqrt{x+2}\,dx - 2\int (x+2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{(x+2)} - 4\sqrt{x+2} + c$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{e^x e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{r^2+1}{\cancel{r}}\,2\cancel{r}\,dr = 2\int r^2\,dr + 2\int dr = \frac{2}{3}r^3 + 2r + c = \frac{2}{3}(e^x-1)\sqrt{e^x-1} + 2\sqrt{e^x-1} + c$$

$\sqrt{e^x-1} = r$

$e^x - 1 = r^2$

$e^x = r^2+1$

$e^x\,dx = 2r\,dr$

$$\int \frac{\log(1+\lg x)}{x(1+\lg x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{1+\lg x}\cdot \lg(1+\lg x)\,dx = \frac{1}{2}\lg^2(1+\lg x)+c$$

$$\int \frac{1}{x}\lg(1+\lg x)\,dx = \int \log(1+t)\,dt = (1+t)\lg(1+t) - \int \cancel{1+t}\cdot\frac{1}{\cancel{1+t}}\cdot dt = -t = (1+\lg x)\lg(1+\lg x)-\lg x$$

$\lg x = t$

$\frac{1}{x}dx = dt$

$f'(t) = 1 \qquad g(t) = \lg(1+t)$

$f(t) = 1+t \qquad g'(t) = \frac{1}{1+t}$

$$\int \cos x\cdot \lg \operatorname{sen} x\,dx = \int \lg t\,dt = t\lg t - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt = t\lg t - t + c = \operatorname{sen} x\lg\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x + c$$

$f'(t) = 1 \qquad g(t) = \lg t$

$f(t) = t \qquad g'(x) = \frac{1}{t}$

$\operatorname{sen} x = t$

$\cos x\,dx = dt$

$$\int \frac{x+1}{x^2}\lg x\,dx = \int\left(\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\lg x\,dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\lg x\,dx = \int \frac{1}{x}\lg x\,dx + \int \frac{1}{x^2}\lg x\,dx = \frac{1}{2}\lg^2 x - \frac{1}{x}\lg x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lg^2 x - \frac{1}{x}\lg x - \frac{1}{x} + c$$

$f'(x)$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C}+\frac{B}{C}$$

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{3}x}}{1+3x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}\,e^{\operatorname{arctg}\sqrt{3}x}}{1+(\sqrt{3}x)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\operatorname{arctg}\sqrt{3}x}+c$$

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg}(x+1)}}{x^2+2x+2} = e^{\operatorname{arctg}(x+1)}+c$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{9+\operatorname{sen}^4 x} = \int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{9+(\operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{2}{3}\operatorname{sen} x\cos x}{1+\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{3}\right)^2}\,dx = \frac{3}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{3}$$

$$\int \operatorname{arcsenh}(7x+2)\,dx = \frac{1}{7}\int 7\operatorname{arcsenh}(7x+2)\,dx = \frac{1}{7}(7x+2)\cdot(\operatorname{arcsenh} 7x+2) - \frac{1}{7}\int (7x+2)\cdot\frac{7}{\sqrt{1+(7x+2)^2}}\,dx = \frac{1}{7}(7x+2)\cdot(\operatorname{arcsenh} 7x+2) - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\int 2(7x+2)\cdot 7\left[1+(7x+2)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{7}(7x+2)\cdot(\operatorname{arcsenh} 7x+2) - \frac{1}{14}\cdot 2\sqrt{1+(7x+2)^2}+c$$

$f'(x) = 7$

$f(x) = 7x+2$

$g(x) = \operatorname{arcsenh}(7x+2)$

$g'(x) = \frac{7}{\sqrt{1+(7x+2)^2}}$

$$\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx = \int x\frac{(1-\cos 2x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}x\,dx - \int \frac{x}{2}\cos 2x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\int\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = +\frac{1}{4}\cos 2x + c$$

$f'(x) = \cos 2x$

$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

$g(x) = x$

$g'(x) = 1$

$$\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = -\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsenh} x + c$$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$$

Poiche

$$\log\left(1+\frac{\cancel{n^2}+2-\cancel{n^2}-1}{n^2+1}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Criterio del Confronto Asintotico Converge

Tenendo presente che la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ è convergente, in quanto serie armonica di esponente $\alpha = 2$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+\lg n}$$

Poiché

$$\frac{1}{n+\lg n}\sim\frac{1}{n}$$

Tenendo conto che la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge positivamente anche quella assegnata

$$*\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n+3^n}{2^{2n}+3^{2n}}$$

La serie assegnata è a segni alterni, studiamo il carattere della serie dei suoi moduli, ovvero della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{2n}+3^{2n}}$ 2*

Applicando il criterio della radice si ha: $\lim\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{2^{2n}+3^{2n}}}=\lim\frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[n]{2^{2n}+3^{2n}}}=\lim\frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{3^{2n}}}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{9}}=\frac{1}{3}$

Per cui la (2*) converge, per cui la * converge assolutamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^6+5n^4+1}{5n^6+n^2}\right)^n$$

La serie assegnata è a termini positivi e si ha $\lim\sqrt[n]{\left(\frac{2n^6+5n^4+1}{5n^6+n^2}\right)^{\cancel{n}}}=\lim\frac{2n^6+5n^4+1}{5n^6+n^2}=\frac{2}{5}$, per il criterio della radice, la serie converge

Poiché

$$*\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Il carattere della * coincide con quello della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ la quale diverge positivamente in quanto ottenibile moltiplicando per $\frac{1}{2}$ i termini della serie armonica generalizzata di esponente $\alpha=\frac{1}{2}$. Pertanto per il criterio del confronto asintotico, la * diverge positivamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\lim\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{\left(n!(n+1)\right)^2}{\left(\cancel{2n!}(2n+1)(2n+2)\right)}\cdot\frac{\cancel{2n!}}{(n!)^2}=\lim\frac{\cancel{(n!)^2}\cdot(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{1}{\cancel{(n!)^2}}=\lim\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\lim\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

la serie converge

$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\lg 2^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\lg 2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\lg 2}\cdot\frac{1}{n}$ la quale diverge positivamente in quanto ottenibile moltiplicando $\frac{1}{\lg 2}$ la serie armonica pertanto la serie assegnata diverge positivamente.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\lg n}$ Applicando Cauchy si ottiene

Criterio di Condensazione di Cauchy

Sia $\{a_n\}$ una successione positiva decrescente e infinitesima allora la serie numerica converge se e solo $\sum 2^n\cdot a_{2^n}$ converge

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{|x|}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{|x|}} = \lim_{r \to 0^-} \int_{-1}^{r} \frac{dx}{(x-4)\cdot\sqrt{-x}} + \lim_{r \to 0^+} \int_{r}^{1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}$$

SOSTITUZIONE

$\sqrt{-x} = r$

$\sqrt{x} = r$