LIMITI FUNZIONI MONOTONE

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona se $e'' = supX$ è di accumulazione per X allora $f_{crescente} \rightarrow \lim_{x \to e''} f(x) = supX_{x \in X - \{e''\}}$. Rispettivamente sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona se $e'' = inf$ è di accumulazione per X allora $f_{decrescente} \rightarrow \lim_{x \to e''} f(x) = infX_{x \in X - \{e''\}}$.

FUNZIONE CONTINUA

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ si dice che f è continua in x_0 se per ogni intorno J di $f(x_0)$ esiste un intorno $I_{(x_0)}$ tale che $\forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \in J$. Ovvero che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X$ con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Se x_0 è un punto di accumulazione per f allora f è continua in $x_0 \leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

CRITERIO DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

Sulla base che una funzione è continua se lo è in ogni punto del suo dominio, se il codominio di f è un intervallo allora f è continua.

OSSERVAZIONI SUI LIMITI

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X:

- Se $\exists\, I_{(x_0)} \vee k \in \mathbb{R}$: $\forall\, x \in A \cap X - \{x_0\} \ \ f(x) = k$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$;
- Se $A \subseteq X$ e ha x_0 come punto di accumulazione, allora il limite nel punto x_0 della restrizione di f ad A, quando esiste, prende il nome di limite in x_0 di f su A. Si scrive $\lim_{x \to x_{0_{x \in A}}} f(x)$
- Per $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora anche $\lim_{x \to x_{0_{x \in A}}} f(x) = l$.

L'ipotesi fatta indica che fissato un arbitrario intorno $J_l \ \exists\, I_{(x_0)} : \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \in J_l$ e conseguentemente $\forall\, x \in I_{(x_0)} \cap A - \{x_0\} \quad f(x) \in J_l$. Dall'implicazione si evince che se $A, B \subseteq X$ aventi entrambe x_0 come punto di accumulazione e tali che esistono e sono diversi i loro limiti, in questo caso $f(x)$ non è regolare in x_0, cioè il limite non esiste.

Tale considerazione ci consente di stabilire che le funzioni $\sin(x), \cos(x), tg(x)$ e $cotg(x)$ non sono regolari nei punti $\pm\infty$.

MODULO FUNZIONE REGOLARE IN x_0

Per $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

DIMOSTRAZIONE:

I. Se $l \in \mathbb{R}$ in base all'ipotesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ fissato $\varepsilon > 0 \ \ \exists\, I_{(\varepsilon)} : \forall\, x \in I_{(\varepsilon)} \cap X - \{x_0\} \ \ |f(x) - l| < \varepsilon$
II. Sapendo che $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$ allora $\big||f(x)| - |l|\big| \le |f(x) - l|$ e ciò comporta che $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

N.B. *L'implicazione inversa vale se e solo se* $l = 0$.

Osserviamo, inoltre, che esistono situazioni in cui il modulo di una funzione è regolare in un punto senza che la funzione stessa lo sia.

TEOREMI DI CONFRONTO

PERMANENZA DEL SEGNO: sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ regolare nel punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X con $l \in \overline{\mathbb{R}} - \{0\}$, se $l > 0$ allora $\exists\, I_{(x_0)} : \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) > 0$. Mentre se $l < 0$ allora $\exists\, I_{(x_0)} : \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) < 0$.

DIMOSTRAZIONE ($l > 0$):

I. Se $l = +\infty$ si tiene presente la definizione di limite;
II. Secondo quest'ultima, fissato $\varepsilon > 0 \;\; \exists\, I_{(x_0)} : \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \;\; |f(x) - l| < \varepsilon$, in particolare $0 < f(x) < l + \varepsilon$ e $f(x) > 0$.

INVERSO TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO: sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, se $\exists\, I_{(x_0)} : \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \geq 0$ allora $l \geq 0$. Rispettivamente se $\exists\, I_{(x_0)} : \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \leq 0$ allora $l \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE:

I. Supponiamo $\exists\, I_{(x_0)} : \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \geq 0$ e ragioniamo per assurdo ($l < 0$)
II. Sfruttando il teorema della permanenza del segno, sappiamo che $\exists\, I_{1(x_0)} : \forall\, x \in I_1 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) < 0$
III. Posto $I_2 = I_0 \cap I_1$ si ha che $\forall\, x \in I_2 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \leq 0 \quad e\; f(x) < 0$
IV. Quindi $I_2 = \emptyset$

N.B. Entrambi i teoremi sopracitati, sono casi particolari del seguente teorema: Siano f_1 e f_2 funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ regolari nel punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, posto $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = l_2$ se $l_1 < l_2$ allora $\exists\, I_{(x_0)}: \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \;\; f_1(x) < f_2(x)$.

CRITERIO DI REGOLARITÀ PER CONFRONTO

Siano f_1 e f_2 funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ regolari nel punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, nell'ipotesi che:

- f_1 e f_2 convergono in x_0 verso lo stesso limite l;
- $\exists\, I_{(x_0)} : \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \;\; f_1(x) < f(x) < f_2(x)$ risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

DIMOSTRAZIONE:

I. La prima affermazione assicura l'esistenza di due intorni I_1 e I_2 di x_0 tali che $\forall\, x \in I_1 \cap X - \{x_0\} \;\; |f_1(x) - l| < \varepsilon$ e $\forall\, x \in I_2 \cap X - \{x_0\} \;\; |f_2(x) - l| < \varepsilon$
II. La seconda implica invece che $l - \varepsilon < f_1(x) < f(x) < f_2(x) < l + \varepsilon$

III. Posto $I_3 = I_1 \cap I_2$ si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Siano f_1 e f_2 funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ regolari nel punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, supponiamo che $\exists\, I_1 : \forall\, x \in I_1 \cap X - \{x_0\} \;\; f_1(x) \leq f_2(x)$, se $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = +\infty$ e se $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = -\infty$.

DIMOSTRAZIONE:

I. Si sfrutta la definizione di limite, per cui $\exists\, I_1 : \forall\, x \in I_1 \cap X - \{x_0\} \;\; f_1(x) > \varepsilon$
II. Posto $I_2 = I_0 \cap I_1$ si ha che $\forall\, x \in I_2 \cap X - \{x_0\} \;\; \varepsilon < f_1(x) < f_2(x)$
III. Ciò significa $\forall\, x \in I_2 \;\; f_1(x) > \varepsilon$, ovvero $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = +\infty$

LIMITE FUNZIONE COMPOSTA

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: Y \subseteq \mathbb{R} \to$, $A = \{x \in X: f(x) \in Y\}$ l'insieme di definizione di $g\big(f(x)\big)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A, nell'ipotesi:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ con $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per Y
- $\lim_{y \to y_0} g(y) = l$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$
- $\exists\, I_{(x_0)}: \forall\, x \in I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\} \;\; f(x) \neq y_0$

Risulta $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

DIMOSTRAZIONE:

I. Si sfrutta la definizione di limite, per cui la condizione due assicura che $\exists\, J_1 : \forall\, y \in J_1 \cap Y - \{y_0\}$: $g(y) \in J$
II. La prima condizione, invece, garantisce $\exists\, I_1 : \forall\, x \in I_1 \cap A - \{x_0\}$: $f(y) \in J_1$
III. Posto $I_2 = I_0 \cap I_1$ e tenendo presente che $\forall\, y \in J_1 \cap Y - \{y_0\}$ si ha che $: \forall\, x \in I_1 \cap A - \{x_0\} \;\; g(f(x)) \in J$.

LIMITE DI UNA SOMMA, PRODOTTO, RAPPORTO DI FUNZIONI

Poste le seguenti convenzioni:

- $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} - \{-\infty\} \;\; (+\infty) + x = +\infty$
- $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} - \{+\infty\} \;\; (-\infty) + x = -\infty$
- $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} - \{0\} \;\; (+\infty)x = \begin{cases} +\infty & se\ x > 0 \\ -\infty & se\ x < 0 \end{cases}$
- $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} - \{0\} \;\; (-\infty)x = \begin{cases} -\infty & se\ x > 0 \\ +\infty & se\ x < 0 \end{cases}$
- $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} - \{0\} \;\; \frac{(\pm\infty)}{x} = \pm\infty$
- $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \;\; \frac{(x)}{\pm\infty} = 0$

Non viene attribuito nessun significato a: $+\infty - \infty$, $(\pm\infty)0$, $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$. Le seguenti scritture sono dette *forme indeterminate*.

ENUNCIATO DEL TEOREMA: Siano $f_1\ e\ \ f_2$ funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, nell'ipotesi che $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = l_1\ e\ \lim_{x\to x_0} f_2(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha quanto segue:

- Se $l_1 + l_2$ non è una forma indeterminata allora $\lim_{x\to x_0}[f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$
- Se $l_1 * l_2$ non è una forma indeterminata allora $\lim_{x\to x_0}[f_1(x) * f_2(x)] = l_1 * l_2$
- Se $l_2 \neq 0$ ed $\frac{l_1}{l_2}$ non è una forma indeterminata allora $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

TEOREMA DEL RAPPORTO

Siano $f_1\ e\ \ f_2$ funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$, con $f_2(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, nell'ipotesi che $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}} - \{0\}\ e\ \lim_{x\to x_0} f_2(x) = 0$, si ha quanto segue:

- Se $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = 0^+[0^-]$ allora $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \alpha(+\infty)[\,\alpha(-\infty)]$;
- Se $\forall\ x \in\ I_0 \cap X - \{x_0\}\ \ f_2(x)$ assume sia valori positivi che negativi, allora $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ non è regolare in x_0.

Dai teoremi precedenti si osserva che nulla può dirsi circa l'esistenza o meno del $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ nei casi $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ e $\frac{0}{0}$

Siano $f_1\ e\ \ f_2$ funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$, con $f_2(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X:

- Se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = -\infty$ e se f_2 è limitata $infX[supX]$ allora $\lim_{x\to x_0}[f_1(x) + f_2(x)] = \pm\infty$
- Se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = 0$ e f_2 è limitata allora $\lim_{x\to x_0}[f_1(x) * f_2(x)] = 0$

DIMOSTRAZIONE 1° AFFERMAZIONE:

I. L'ipotesi che f_2 è limitata $infX[supX]$ implica che $\exists h \in \mathbb{R}: f_2(x) \geq h\ \ \ \forall\ x \in X$
II. Conseguentemente $\forall\ x \in X\ \ \ f_1(x) + f_2(x) \geq\ f_1(x) + h$
III. Tenendo conto che $\lim_{x\to x_0}[f_1(x) + h\,] = +\infty + h = +\infty$
IV. Per un noto criterio di regolarità per confronto, allora $\lim_{x\to x_0}[f_1(x) + f_2(x)] = +\infty$

DIMOSTRAZIONE 2° AFFERMAZIONE:

I. L'ipotesi che f_2 è limitata implica che $\exists\ \alpha > 0: |f_2(x)| \geq \alpha\ \ \ \forall\ x \in X$
II. Conseguentemente $\forall\ x \in X\ \ \ |f_1(x) * f_2(x)| = |f_1(x)| * |f_2(x)| \leq |f_1(x)|\alpha$
III. In corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{\alpha}\ \ \exists\ I_{(x_0)}: \forall\ x \in\ I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\}\ \ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$
IV. Da ciò $\forall\ x \in\ I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\}\ \ \ |f_1(x) * f_2(x)| \leq |f_1(x)|\alpha < \frac{\varepsilon}{\alpha}\,\alpha$

V. Quindi $|f_1(x) * f_2(x)| \leq |f_1(x)| < \varepsilon$

VI. Stante la definizione di limite $\lim_{x \to x_0} [f_1(x) * f_2(x)] = 0$

CONTINUITÀ E LIMITI DI POLINOMI E FUNZIONI RAZIONALI

Un polinomio è una scrittura del tipo $p(x) = a_n x^n + a_n x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Si dice grado di un polinomio il più grande intero i tale che ai $a_i \neq 0$. Tale funzione è continua in quanto somma di funzioni continue.

REGOLA CALCOLO LIMITE DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE FRATTA

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \pm\infty & \text{se } n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \end{cases}$$

FORME INDETERMINATE $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Siano $f_1 \colon X_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f_2 \colon X_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, posto $X = \{x \in X_1 \cap X_2 \colon f_1 > 0\}$ se $X \neq \emptyset$, la funzione $\forall\, x \in X \to \left(f_1(x)\right)^{f_2(x)}$ si denota con ${f_1}^{f_2}$. Detto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, si ha la seguente espressione $\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x)\right)^{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{f_2(x)\log(f_1(x))}$. Tenendo presente il teorema sul limite di una funzione composta, il limite $\lim_{x \to x_0} e^{f_2(x)\log(f_1(x))}$ esiste se e solo se esiste $\lim_{x \to x_0} f_2(x)\log(f_1(x)$. In generale, può dirsi nulla circa l'esistenza di $\lim_{x \to x_0} f_2(x)\log(f_1(x)$ nei seguenti casi:

a. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0$
b. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \pm\infty \quad \vee \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0$
c. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = 1 \quad \vee \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \pm\infty$

Nei casi a, b, c si dice che la funzione ${f_1}^{f_2}$ si presenta nella rispettiva forma indeterminata $0^0, \infty^0, 1^\infty$.

CASO DELLE SUCCESSIONI REALI

Def. Successione reale: sia $\{y_n\}$ una successione reale, si dice che $\{y_n\}$ è crescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ \{y_n\} \leq \{y_{n+1}\}$. Rispettivamente, si dice che $\{y_n\}$ è decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ \{y_n\} \geq \{y_{n+1}\}$.

Una successione reale $\{y_n\}$, invece, si dice strettamente crescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ \{y_n\} < \{y_{n+1}\}$ e strettamente decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ \{y_n\} > \{y_{n+1}\}$.

ESEMPI SUCCESSIONI STRETTAMENTE CRESCENTI: $\{2_n\}, \{2_{n+1}\}, \{n!\}$

Tenendo presente che $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$, se esiste il limite di $\{y_n\}$, esso si denota con uno dei seguenti simboli: $\lim_{n\to+\infty} y_n, \lim_n y_n, \lim y_n$. Da ciò nasce la *definizione del limite di una successione reale*, la afferma: **il limite di $\boldsymbol{y_n}$ è un numero reale** $\mathbb{R}$ $\forall \boldsymbol{\varepsilon > 0}$ $\exists \boldsymbol{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$: $\forall \boldsymbol{n > \delta_\varepsilon}$ $\boldsymbol{|y_n - l| < \varepsilon}$.

N.B. I teoremi riguardanti i limiti delle funzioni reali di una variabile reale sono validi, in particolare, anche per le successioni. Volendoli enunciare si deve tener presente che la locuzione "$\exists\ I_{(x_0)} : \forall\ x \in\ I_{(x_0)} \cap X - \{x_0\}$" va sostituita con "$\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \delta_\varepsilon$".

SUCCESSIONI ESTRATTE

Siano $\{y_n\}$ reale e $\{k_n\}$ strettamente crescente di numeri $\mathbb{N}$, rilevato che $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N}: k_n \in \mathbb{N}\}$ la funzione composta da k_n e y_n è definita in $\mathbb{N}$ ed è una successione reale del tipo $n \in \mathbb{N} \to y_{k_n}$. Tale successione prende il nome di *successione estratta*.

TEOREMA DELLE SUCCESSIONI ESTRATTE REGOLARI

"Se $\{y_n\}$ è regolare allora ogni sua estratta è regolare ed ha lo stesso limite."

Da questo teorema si evince il teorema inverso, secondo il quale: una successione reale avente due estratte regolari e con limiti distinti non è regolare.

TEOREMA DELLE SUCCESSIONI ESTRATTE

Da ogni successione reale $\{y_n\}$ se ne può estrarre almeno una regolare, la quale converge se $\{y_n\}$ è limitata, diverge positivamente se $\{y_n\}$ è limitata superiormente o diverge negativamente se $\{y_n\}$ è limitata inferiormente.

Dalla definizione di limite, si evince il *teorema inverso*: ogni successione reale convergente è limitata.

TEOREMA SUCCESSIONI REALI MONOTONE

Dal teorema sul limite delle funzioni reali monotone segue: ogni successione reale monotona diverge ed ha per limite il suo estremo superiore se essa è crescente e il suo estremo inferiore se essa è decrescente.

ESEMPIO: $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

TEOREMA PONTE

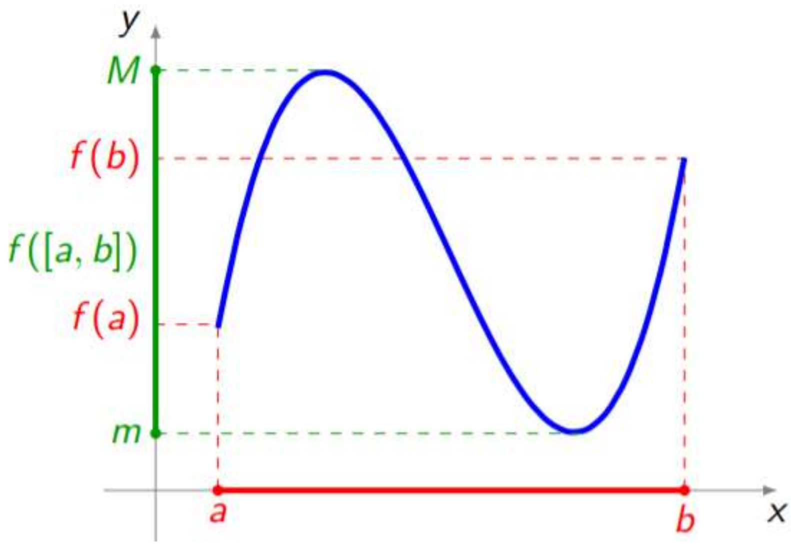
Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to\ \mathbb{R},\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X allora $\lim_{x\to x_0} f(x)\ = l$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\forall \{x_n\} \subseteq \mathrm{X} - \{x_0\}$convergente e x_0 risulta $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)\ = n$.

PROPRIETÀ FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA DEGLI ZERI: se f è una funzione reale continua in un intervallo compatto $[a; b]$ tale che $f(a) < 0 \; o \; f(b) > 0$ allora esiste almeno un punto c interno a $]a; b[$ tale che $f(c) = 0$.

TEOREMA DI BOLZANO: una funzione reale continua in un intervallo ha per codominio un intervallo.

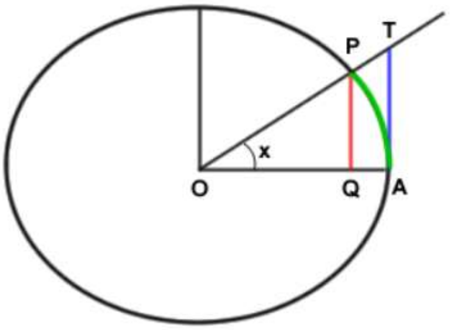
TEOREMA DI WEIERSTRASS: una funzione reale definita e continua in un intervallo compatto ha per codominio un intervallo compatto, ovvero è dotata di minimo e massimo.



LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \quad \lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1 \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

DIMOSTRAZIONE PRIMO LIMITE NOTEVOLE:



$$\overline{PQ} < \overset{\frown}{AP} < \overline{TA}$$

$$sen(x) < x < tg(x)$$

$$\frac{sen(x)}{sen(x)} < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tg(x)}{sen(x)}$$

sapendo che

$$\boxed{tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \Rightarrow \frac{tg(x)}{sen(x)} = \frac{1}{cos(x)}}$$

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}$$

$$cos(x) < \frac{sen(x)}{x} < 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to0} cos(x) = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to0} 1 = 1}$$

Per quanto concerne le altre eguaglianze si ha:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} * \frac{1}{\cos x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\tan(\arctan x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 * 0 = 0$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sin y}\right) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$	$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$	$\lim_{x\to 0}\log_a\frac{1+x}{x} = \frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$	$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$	
$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsinh} x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctanh} x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

CONFRONTO INFINITI E INFINITESIMI

$\forall a \in \mathbb{R}: a > 1$ e $\forall r \in \mathbb{R}: r > 0$, $\lim_{x\to-\infty} |x|^r a^x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{|x|^r} = +\infty$.

Se $0 < a < 1$ $\forall r \in \mathbb{R}: r > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{|x|^r} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^r}{a^x} = 0$.

Risulta $\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ e $\forall r \in \mathbb{R}: r > 0$, $\lim_{x\to 0} x^r \log_a x = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^r} = 0$.

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X si dice che f è discontinua in x_0 o che x_0 è punto di discontinuità per f quando si verifica una delle seguenti condizioni:

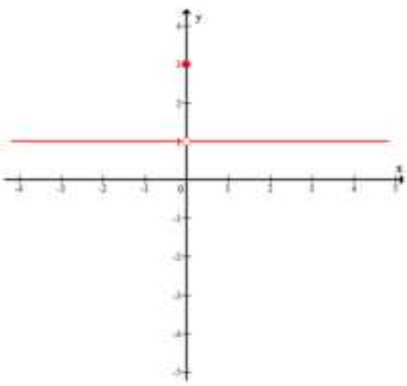
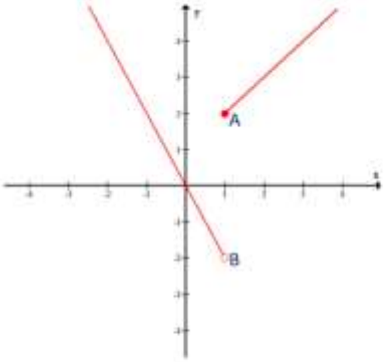
- $x_0 \notin X$;
- $x_0 \in X$ ed f non è continua in x_0.

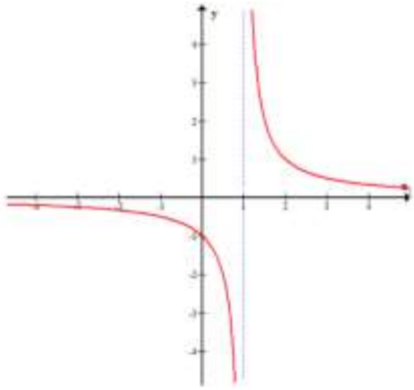
Si dice che x_0 è punto di discontinuità eliminabile per f se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l\ con\ l \in \mathbb{R}$. In tal caso, la funzione $f\ (x)$: $\forall x \in X \cup\ x_0 \to \begin{cases} f(x) & se\ x \neq x_0 \\ l & se\ x \neq x_0 \end{cases}$. Se $x_0 \in X$ si ottiene da f, modificandone il valore in x_0, ed associando l in x_0. Invece se $x_0 \notin X$ la funzione prima definita è un prolungamento di f su $X \cup\ x_0$, detto il prolungamento continuo di f su x_0.

Si dice che x_0 è punto di discontinuità di prima specie per f quando x_0 è di accumulazione sia a destra che sinistra per X ed esistono finiti e distinti tra loro i limiti sinistro e destro di f nel punto

x_0. In tal caso la differenza $S_f(x_0) \; = \; f({x_0}^+) - f({x_0}^-)$ prende il nome di <u>*salto di discontinuità*</u> della funzione f nel punto x_0.

Si dice che x_0 è punto di discontinuità di seconda specie per f quando non è né eliminabile né di prima specie.



ASINTOTI

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \; \mathbb{R}$, $x_0 \in \; \mathbb{R}$ di accumulazione a sinistra per X, se $\lim\limits_{x \to {x_0}^-} f(x) = \; \pm\infty$ si dice che la retta $x = x_0$ è asintoto verticale a sinistra del diagramma di f in alto se il limite vale +∞, in basso se il limite vale -∞. Rispettivamente, se $\lim\limits_{x \to {x_0}^+} f(x) = \; \pm\infty$ si dice che la retta $x = x_0$ è **asintoto verticale** a destra del diagramma di f in alto se il limite vale +∞, in basso se il limite vale -∞.

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \; \mathbb{R}$, con X illimitato superiormente, γ il diagramma di f, r una retta non verticale di equazione $y = mx + q$, si dice che la retta r è asintoto a destra di γ se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx - q \; = 0$. Rispettivamente, si dice che la retta r è asintoto a sinistra di γ se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - mx - q \; = 0$.

N.B. In particolare per $m = 0$ si parla di *asintoto orizzontale*, mentre per $m \neq 0$ di *asintoto obliquo*.

TEOREMA ASINTOTICITÀ

La retta r è asintoto *a destra* se soltanto se $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q$. La retta r è asintoto *a sinistra* se soltanto se $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = q$.

N.B. Evidentemente γ è dotata di asintoto orizzontale a destra se e solo se f è convergente in $+\infty$. Evidentemente γ è dotata di asintoto orizzontale a sinistra se e solo se f è convergente in $-\infty$.

CONFRONTO LOCALE TRA FUNZIONI

Assegnati $X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, analizzeremo alcuni comportamenti di coppie di funzioni reali, confrontando i valori che le funzioni assumono nei punti di X più vicini a x_0. Pertanto ci riferiamo alla classe funzionale che denotiamo con $F(X;\ x_0)$ costituita falle funzioni f tali che esiste un intorno I_f di x_0 tale che $I_f \cap X - \{x_0\} = domf$.

Precisiamo quanto segue:

- sia $f \in F(X;\ x_0)$ si dice che f è identicamente nulla intorno a x_0 se esiste un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f$ tale che $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) = 0$,
- sia $f \in F(X;\ x_0)$ si dice che f è mai nulla intorno a x_0 se esiste un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f$ tale che $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \neq 0$,
- siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ si dice che f e g sono uguali intorno a x_0 se esiste un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f \cap I_g$ tale che $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) = g(x)$.

RELAZIONE O-PICCOLO

Siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ si dice che $f\ e\ o(g)_{x \to x_0}$, e si scrive $f = o(g)$, se esistono una funzione $\sigma \in F(X;\ x_0)$ ed un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f \cap I_g \cap I_\sigma$: $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) = \sigma(x)g(x)$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} \sigma(x) = 0$.

Siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ con g mai nullo intorno a x_0, allora $f = o(g) \leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Dire allora che $f = o(g)$ per x tendente a x_0 significa dire che fissato $\varepsilon > 0 \quad \exists I_\varepsilon$ di x_0 con $I_\varepsilon \subseteq I_0$: $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \varepsilon$, quindi $|f(x)| < |g(x)|\varepsilon$. Conseguentemente quando la variabile x è vicina a x_0, $|g(x)|$ se non nullo è molto più piccolo di $|f(x)|$. Per questo motivo $f \ll g$.

N.B. la scrittura $f = o(g)$ è stata introdotta da Landau e viene usata di solito o quando f e g sono entrambe infinitesimi nel punto x_0, nel caso in cui si dice che f è infinitesima di ordine superiore rispetto a g, o quando f e g sono entrambe infinite in x_0, nel caso in cui si dice che g è infinito di ordine superiore rispetto a f.

ASINTOTICITÀ

Si dice che f è asintotica in g per x tendente a x_0, $f - g = o(g)$ e si scrive $f \widetilde{x_0}\ g$.

Siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ con g mai nullo intorno a x_0, allora $f \widetilde{x_0}\ g \leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

ASINTOTI NOTEVOLI

Sulla base che: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \sin x\ \widetilde{x_0}\ x$

Definiamo:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \tan x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \quad \arcsin x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \quad \arctan x\ \widetilde{x_0}\ x$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad 1-\cos x\ \widetilde{x_0}\frac{1}{2}x^2$	$lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad a^x-1\widetilde{x_0}\ x\ln a$	$\lim\limits_{x\to 0}\log_a\frac{1+x}{x}=\frac{1}{\ln a} \quad \log_a 1+x\ \widetilde{x_0}\frac{x}{\ln a}$
$lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\ \alpha \quad (1+x)^\alpha-1\ \widetilde{x_0}\ \alpha\, x$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=1 \quad \sinh x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}=1 \quad \tanh x\ \widetilde{x_0}\ x$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsinh} x}{x}=1 \quad \operatorname{arcsinh} x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctanh} x}{x}=1 \quad \operatorname{arctanh} x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2}=-\frac{1}{2} \quad 1-\cosh x\ \widetilde{x_0}-\frac{1}{2}x^2$

PROPRIETÀ ASINTOTI

Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ si ha quanto segue:

- $o(g)+o(g)=o(g)$;
- $o(\lambda g)=o(g)$;
- $o(f)o(g)=o(fg)$;
- $o\big(o(g)\big)=o(g)$;
- $f\ \widetilde{x_0}\ g \qquad o(f)=o(g)$

Presupposto ciò, si ha:

- Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ con $f\ \widetilde{x_0}\ g$, allora $|f|\ \widetilde{x_0}\ |g|$
- Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ non nulle intorno a x_0 con $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}-\{1\}$ se $f\ \widetilde{x_0}\ g$, allora $log|f|\ \widetilde{x_0}\ log|g|$
- Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ se $f_1\ \widetilde{x_0}\ \lambda_1 g$ ed $f_2\ \widetilde{x_0}\ \lambda_2 g$ con λ_1 e $\lambda_2\ \in\mathbb{R}$: $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$ allora $f_1+f_2\ \widetilde{x_0}\ (\lambda_1+\lambda_2)g$
- Siano $f,f_1,g,g_1\in\ F(X;\ x_0)$ con $f\ \widetilde{x_0}\ f_1$ e $g\ \widetilde{x_0}\ g_1$, allora:
  i) $f^n\ \widetilde{x_0}\ f_1^n\ \ \forall n\in\mathbb{N} \quad f^m\ \widetilde{x_0}\ f_1^m\ \ \forall m\in\mathbb{Q}: m<0$ se f,f_1 sono non nulle in x_0
  ii) $f^\alpha\ \widetilde{x_0}\ f_1^\alpha\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}: f,f_1>0$ intorno a x_0
  iii) g,g_1 sono mai nulle intorno a $x_0 \quad \frac{f}{g}\widetilde{x_0}\frac{f_1}{g_1}$

OSSERVAZIONE: sia $f\ \in\ F(X;\ x_0)$ infinitesima in x_0, ricordando le asintoticità notevoli risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1 \quad \sin f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$$

Da cui:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1 \quad \tan f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin f(x)}{f(x)}=1 \quad \arcsin f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1 \quad \arctan f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{f(x)^2}=\frac{1}{2} \quad 1-\cos f(x)\ \widetilde{x_0}\frac{1}{2}f(x)^2$	$lim_{x\to 0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a \quad a^{f(x)}-1\ \widetilde{x_0}f(x)\ln a$	$\lim\limits_{x\to 0}\log_a\frac{1+f(x)}{f(x)}=\frac{1}{\ln a} \quad \log_a 1+f(x)\ \widetilde{x_0}\frac{f(x)}{\ln a}$
$lim_{x\to 0}\frac{(1+f(x))^\alpha-1}{f(x)}=\ \alpha \quad (1+f(x))^\alpha-1\ \widetilde{x_0}\ \alpha f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh f(x)}{f(x)}=1 \quad \sinh f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tanh f(x)}{f(x)}=1 \quad \tanh f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsinh} f(x)}{f(x)}=1 \quad \operatorname{arcsinh} x\ \widetilde{x_0}\ f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctanh} f(x)}{f(x)}=1 \quad \operatorname{arctanh} f(x)\ \widetilde{x_0}f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cosh f(x)}{f(x)^2}=-\frac{1}{2} \quad 1-\cosh f(x)\ \widetilde{x_0}-\frac{1}{2}f(x)^2$

ASINTOTICITÀ NELLO STUDIO DI FUNZIONI

Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ con $f\ \widetilde{x_0}\ g, f$ e regolare in x_0 se e solo se lo è g e risulta $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ e $\lim\limits_{x\to x_0}a^{f(x)}=\ \lim\limits_{x\to x_0}a^{g(x)}$.