FISICA GENERALE I

Dott.ssa Annalisa Allocca

Università degli Studi di Napoli,
Compl. Univ. Monte S.Angelo – Dipartimento di Fisica
Via Cinthia, I-80126, Napoli

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
sez. Napoli
Studio: 1G16, Edificio 6
+39-081-676345
annalisa.allocca@unina.it

Organizzazione

- **Sito web:** www.docenti.unina.it/annalisa.allocca
  - La registrazione al sito si può effettuare inserendo numero di matricola e pin oppure tramite SPID per chi non fosse ancora in possesso di matricola
  - Il materiale didattico si trova sulla pagina web

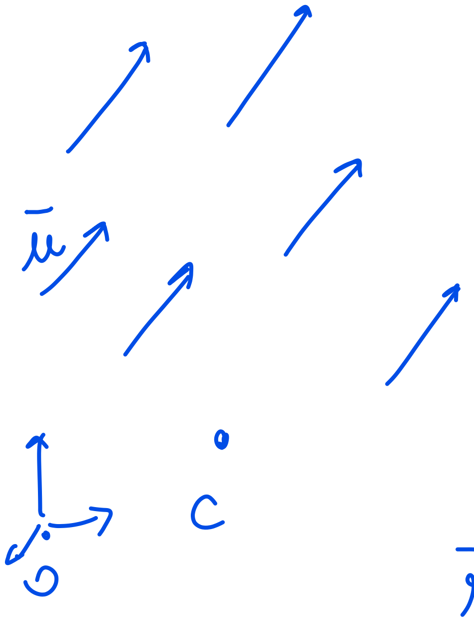
- **Libri di testo adottati:**
  - Mazzoldi, Nigro, Voci «Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica» Vol. 1 - Edises Napoli
  - Halliday, Resnick, Walker «Fondamenti di Fisica» - Ambrosiana Milano
  - Serway, Jewett «Principi di Fisica» - Edises Napoli

Argomenti di oggi:

- Sistemi di forze parallele
- Dinamica del corpo rigido
  - Equilibrio statico
  - Rotazioni rigide intorno ad un asse fisso
  - Momento di inerzia
  - Teorema di Huygens-Steiner
  - Energia cinetica di un corpo rigido

Sistema di forze parallele

$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$



$$\bar{F}_i = F_i \bar{u} \quad \rightarrow \quad \bar{F} = \left(\sum_i F_i\right) \bar{u}$$

$$\bar{M} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_i \bar{r}_i \times F_i \bar{u} = \left(\sum_i F_i \bar{r}_i\right) \times \bar{u}$$

$$\underbrace{\bar{M} = \overline{OC} \times \bar{F}}$$

$$\bar{M} = \bar{r}_c \times \bar{F}$$

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_i F_i \bar{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{F_1 \bar{r}_1 + F_2 \bar{r}_2 + \dots + F_n \bar{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}$$

$\parallel$

$\overline{OC}$

Sistema di forze parallele

$$\bar{F}_i = m_i \bar{g} = m_i g \hat{u} \qquad \bar{F} = \sum_i m_i \bar{g} = \sum_i m_i g \bar{u}$$

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_i F_i \bar{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i m_i g \bar{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} = \bar{r}_{CM}$$

Centro di massa e forza peso per un corpo rigido

Sistema di forze parallele

Dato un sistema di forze parallele, la **forza risultante** sarà (con $\vec{\boldsymbol{u}}$ versore che ne individua la direzione)

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}} = F_i \vec{\boldsymbol{u}}$$

e il **momento risultante**:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \sum_i (\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times F_i \vec{\boldsymbol{u}}) = \sum_i (F_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}) \times \vec{\boldsymbol{u}}$$

Il momento è ortogonale alla forza. Deve quindi essere possibile trovare un punto C dove applicare la forza, tale che:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OC}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$$

Questo vettore è detto **centro delle forze parallele**

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{C}} = \frac{\sum_{\boldsymbol{i}} F_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}{\sum_{\boldsymbol{i}} F_i}$$

Mazzoldi, Nigro, Voci, par. 5.9

Sistema di forze parallele

- Se la forza in questione è la **forza peso**, il centro delle forze (**baricentro** o centro di gravità) risulta essere il **centro di massa del sistema**

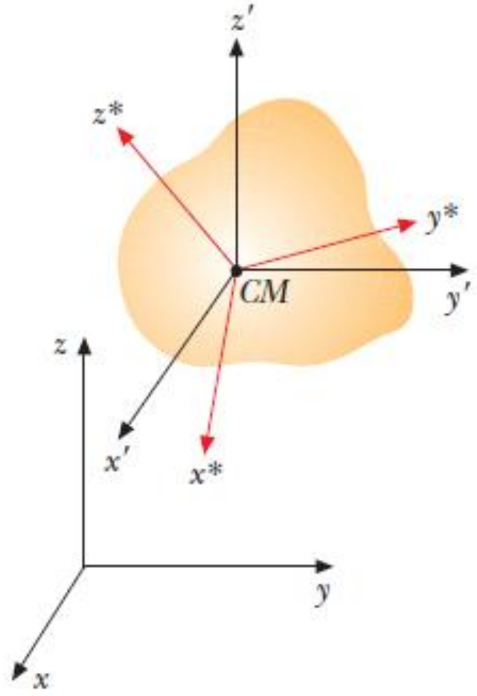
$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{C}} = \frac{\sum_{\boldsymbol{i}} m_i g \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}{\sum_{\boldsymbol{i}} m_i g} = \frac{\sum_i m_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}{\sum_{\boldsymbol{i}} m_i} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}}$$

Il momento risultante della forza peso sarà:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{C}} \times m\vec{\boldsymbol{g}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} \times m\vec{\boldsymbol{g}}$$

Corpo rigido – scelta del sistema di riferimento

- Sistema di riferimento inerziale (x,y,z)
- Sistema di riferimento del centro di massa (x’,y’,z’)
- Sistema di riferimento del corpo rigido (x*,y*,z*)



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III
EdiSES Edizioni

Moto del corpo rigido

- I equazione cardinale

$$\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}_{CM}$$

(solo forze **esterne**)

- II equazione cardinale

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}$$

(solo momento delle forze **esterne**)

- Teorema dell'energia cinetica

$$W = \Delta E_k$$

Il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è sempre nullo, perché non cambiano le mutue distanze tra i punti

Posizione del centro di massa

Nel discreto:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}{\sum_i m_i}$$

Nel continuo:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \frac{\int \vec{\boldsymbol{r}} dm}{\int dm}$$

$$= \frac{\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

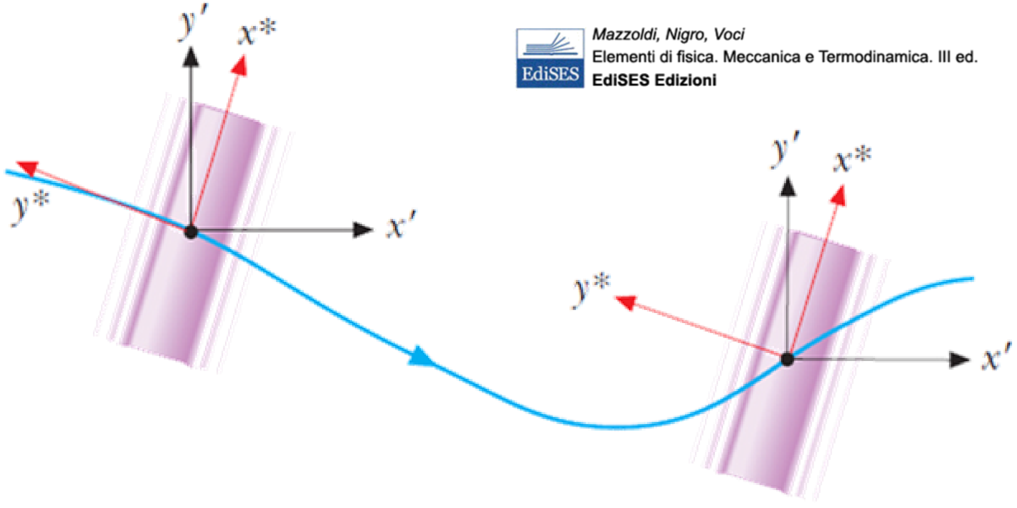
$$= \frac{1}{m} \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \rho dV$$

Per un corpo omogeneo:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \frac{\rho}{m} \int_V \vec{\boldsymbol{r}}\, dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{\boldsymbol{r}}\, dV$$

Moto di un corpo rigido

- Traslazione



La posizione del sistema di riferimento solidale al corpo non cambia rispetto al sistema di riferimento del centro di massa → $\vec{L}' = 0 \;\; e \;\; E'_k = 0$

Tutti i punti del corpo descrivono traiettorie uguali e la loro velocità coincide in modulo, direzione e verso con quella del centro di massa.

Noto il moto del centro di massa, è noto il moto di qualsiasi altro punto.

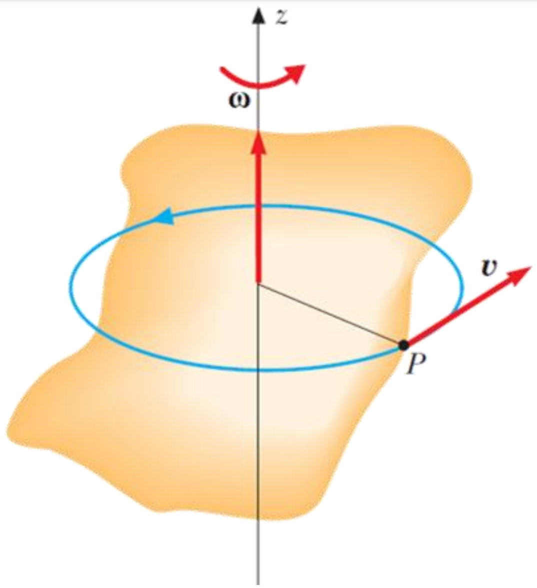
- Equazione del moto del centro di massa: $\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$
- Equazione del momento angolare: $\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$

Moto di un corpo rigido

- Rotazione

La rigidità del corpo implica che tutti i punti descrivono archi di circonferenza che stanno su piani tra loro paralleli, con centro situato sull'asse di rotazione

Le velocità dei singoli punti sono diverse tra loro ($\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$), ma la velocità angolare è uguale per tutti i punti $\omega = \frac{v_i}{R_i}$, dove R_i è la distanza di ciascun punto dall'asse di rotazione.



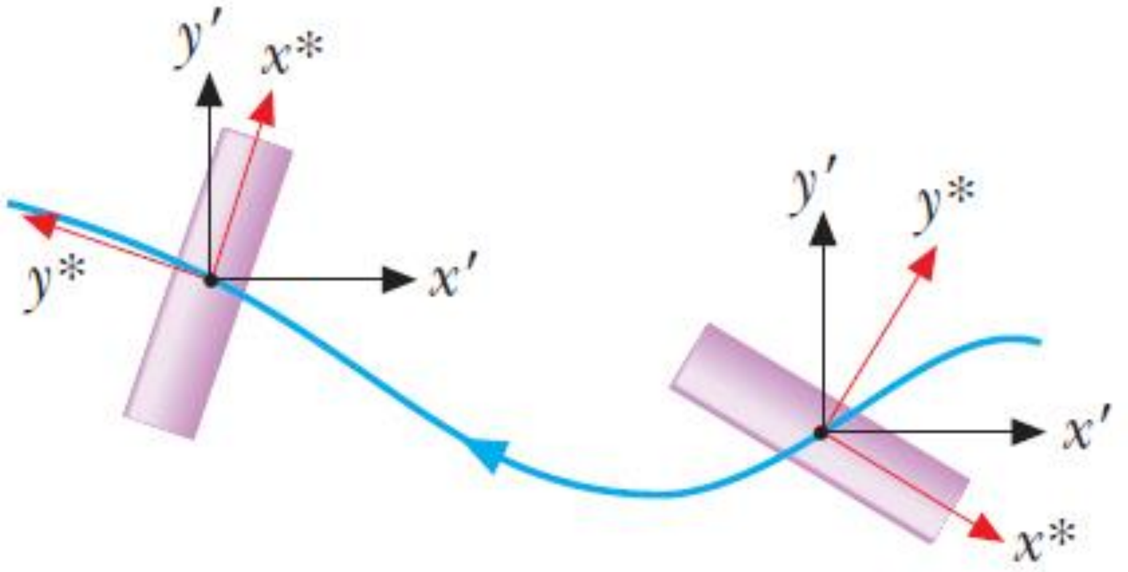
Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Equazione del moto:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}$$

Moto di un corpo rigido

Il moto rigido più generale è **rototraslazionale**: ogni spostamento infinitesimo può essere sempre considerato come la somma di una traslazione più una rotazione infinitesime, individuate da $\vec{v}$ ed $\vec{\omega}$ variabili nel tempo.



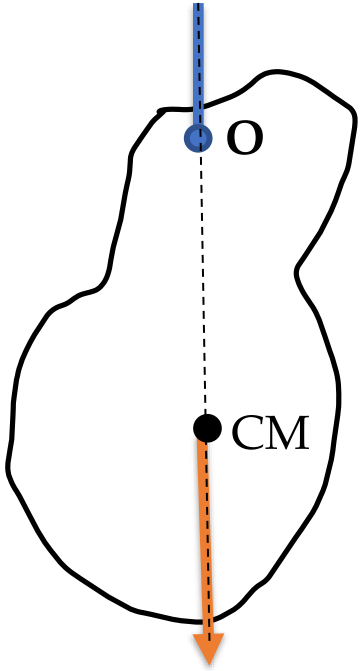
Equilibrio statico del corpo rigido

- Assenza di moto traslazionale → $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{CM}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}} = 0$

  Se il corpo è inizialmente in quiete → $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{CM}} = 0$

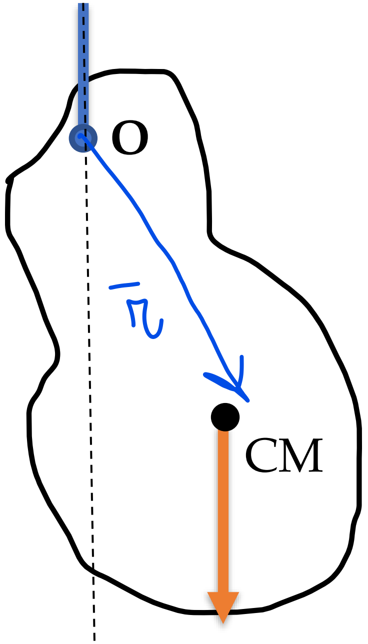
- Assenza di moto rotazionale → $\vec{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{M}} = 0$

Condizioni di equilibrio di un corpo rigido



Se il centro di massa si trova lungo la verticale passante per il centro di sospensione, il momento della forza peso rispetto ad O è zero e tutto è in equilibrio

Condizioni di equilibrio di un corpo rigido

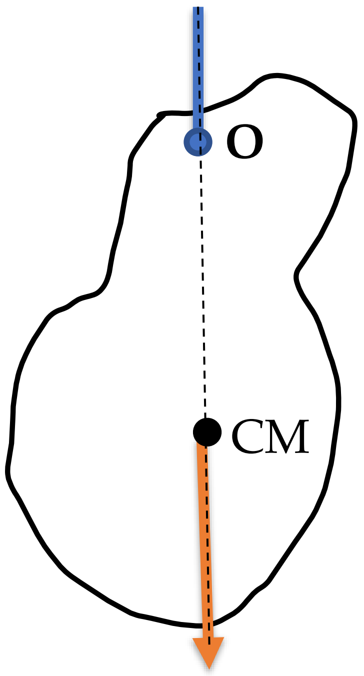


Se il centro di massa non si trova lungo la verticale passante per il centro di sospensione, il momento della forza peso rispetto ad O è diverso da zero e comunica al corpo un'accelerazione angolare

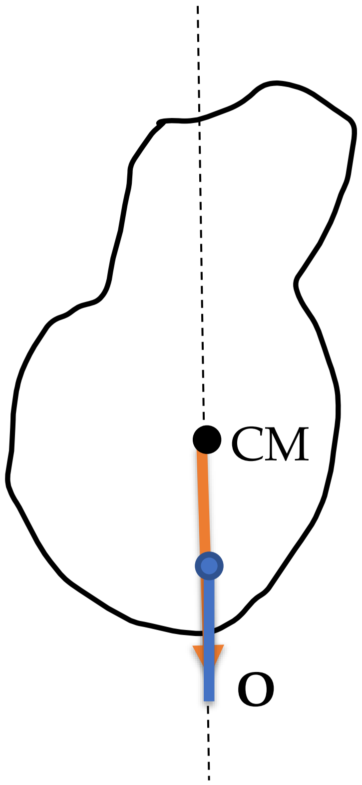
$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F_p}$$

Condizioni di equilibrio

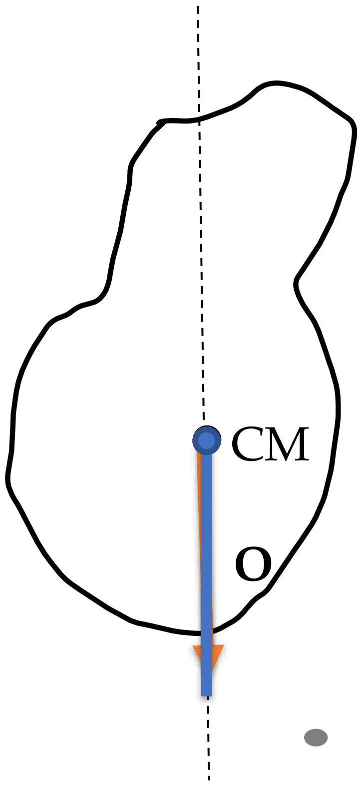
Baricentro **sotto** il punto di sospensione



Baricentro **sopra** il punto di sospensione

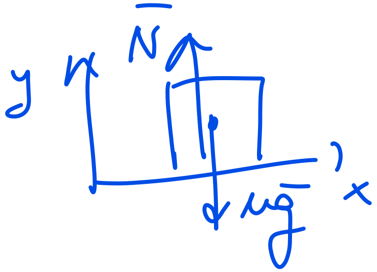


Baricentro **coincidente** con il punto di sospensione

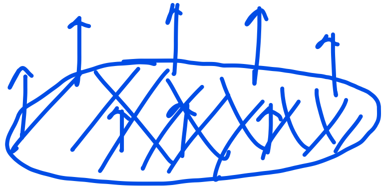


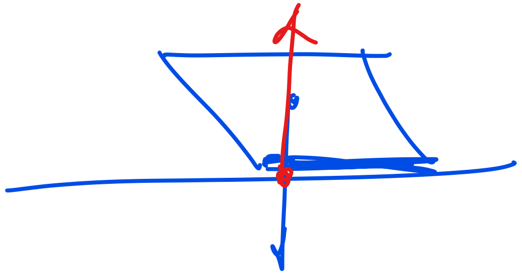
Condizioni di equilibrio di un corpo rigido

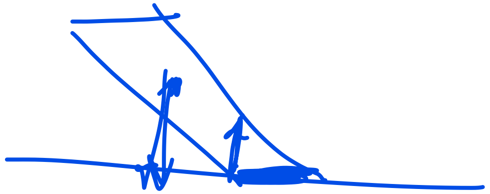
Perché non casca?



$m\bar{g} + \bar{N} = 0$







Condizioni di equilibrio di un corpo rigido

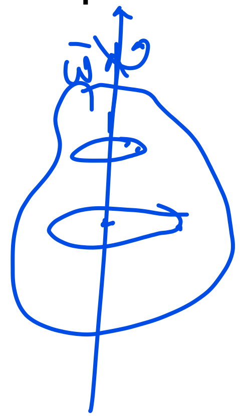
Perché non casca?

La torre è un corpo che poggia su un piano orizzontale che ha con questo più punti di contatto. Da ciascuno di questi punti viene esercitata una forza di reazione verticale e diretta verso l’alto → sistema di forze parallele equivalenti ad una sola forza totale **N** applicata in un solo punto **interno alla superficie di appoggio.**

L’equilibrio si verifica solo se **la proiezione del baricentro del corpo sul piano di appoggio cade entro la base di appoggio**

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

- Punti dell'asse di rotazione → fissi: possono essere usati come polo nel calcolo dei momenti



- La velocità angolare è diretta lungo l'asse di rotazione

- Se $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ varia, anche l'accelerazione angolare $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ sarà diretta lungo l'asse di rotazione

- In un corpo rigido, ciascun elemento infinitesimo di massa *dm* descrive una traiettoria circolare nel piano ortogonale all'asse di rotazione, con raggio R dato dalla distanza del corpo dall'asse

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

- *Momento angolare, momento d'inerzia*

$\bar{r} \perp \bar{v}$

$$d\bar{L} = \bar{r} \times dm\,\bar{v}$$

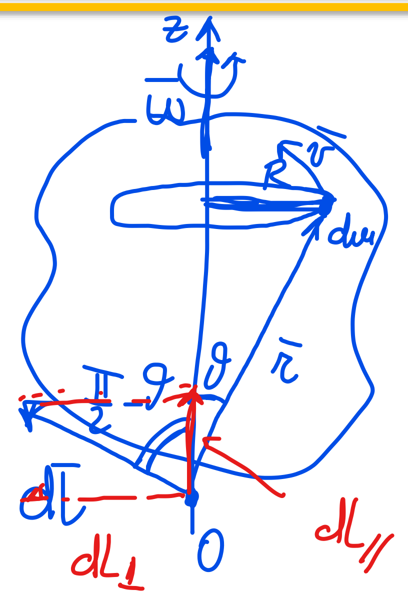
$\rightarrow \underline{v} = \omega R$

$R = r \sin\vartheta$

$$dL = r\,dm\,v = r\,dm\,\omega R$$

$$dL_{//} = dL_z = dL\cos\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right) = \underline{dL}\sin\vartheta = dm\,r\,\omega R\sin\vartheta = dm\,\omega R^2$$

$$L_z = \underbrace{\boxed{\int dm\,R^2}}_{I_z}\,\omega = I_z\,\omega$$



Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

- *Momento angolare, momento d'inerzia*

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

Momento angolare, momento d'inerzia

Qual è la relazione tra il momento angolare e la velocità angolare?

- Momento angolare di un elemento di massa *dm*:

$$d\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times dm\vec{\boldsymbol{v}}$$

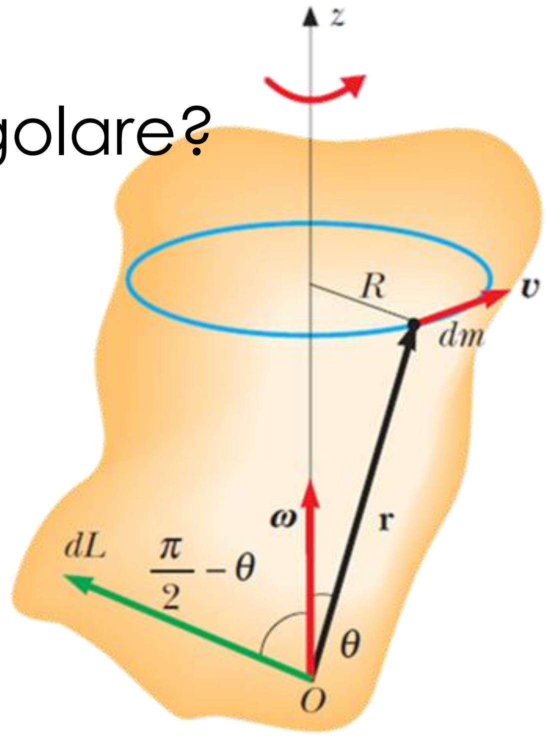
In modulo: $dL = dm\, r\, v = dm\, r\, \omega R$

- Momento angolare assiale $dL_z = dL \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = dL\, sin(\vartheta)$

$$dL_z = dm\omega Rr sin(\vartheta) = dm\omega R^2$$

Integrando:

$$L_z = \int dL_z = \boxed{\int dmR^2}\, \omega = I_z\, \omega$$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

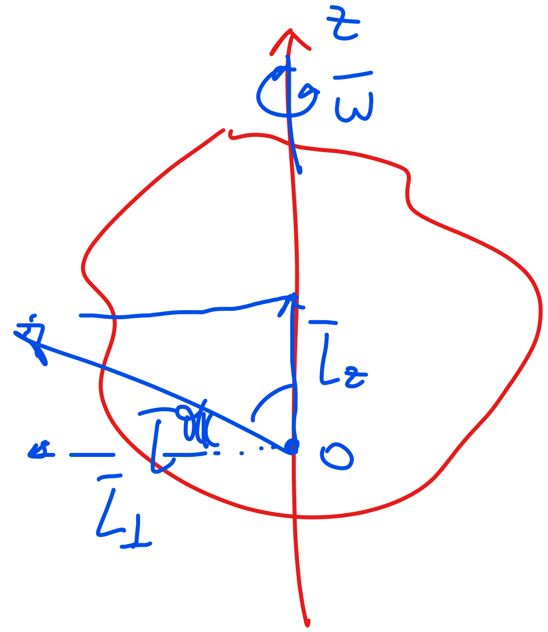
I_z **= Momento di inerzia rispetto all'asse z**

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse e ruota attorno all'asse insieme al corpo

$$L_{\parallel} = I_z \omega$$

$$L_{\perp} = L \cos\vartheta = \int dm\, r R \cos\vartheta\, \omega$$

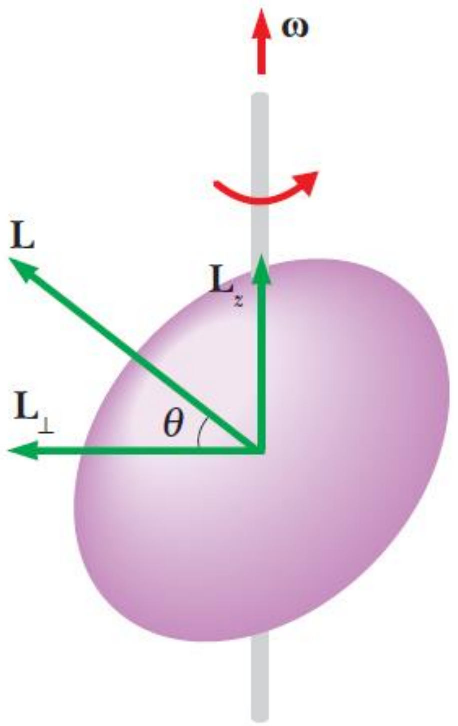


Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse e ruota attorno all'asse insieme al corpo

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

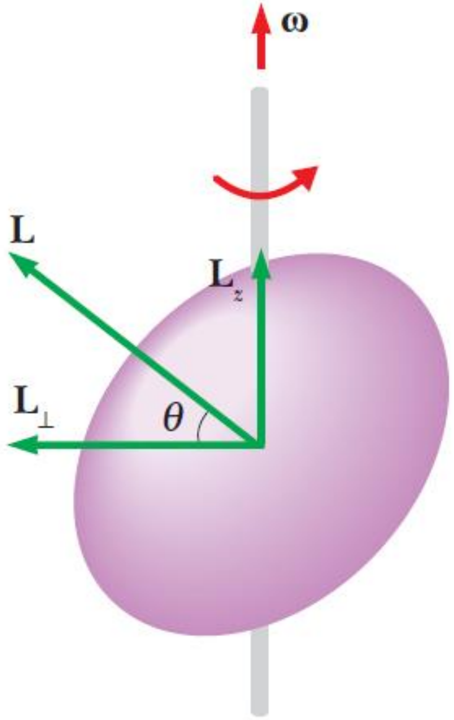
Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse e ruota attorno all'asse insieme al corpo



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
in un sistema di riferimento inerziale

Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse e ruota attorno all'asse insieme al corpo



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

$$L_{||} = \omega \int dmR^2 = I_z\omega$$

Può variare solo in modulo, la direzione è sempre quella dell'asse di rotazione

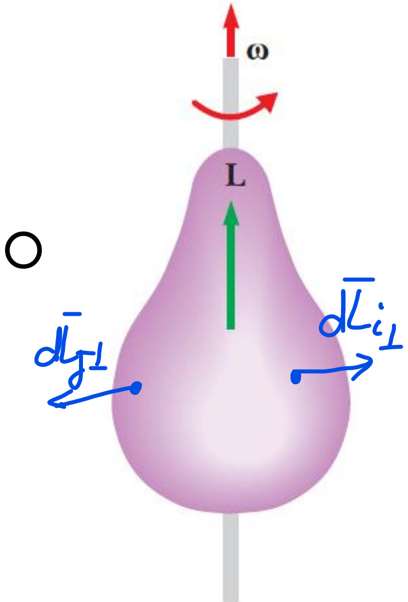
$$L_{\perp} = \int dLcos\vartheta = \int dm\, r\omega Rcos\vartheta$$

Varia in direzione perché ruota intorno all'asse
Varia in modulo se varia ω e dipende dalla scelta del polo

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
$\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

- Caso particolare: $\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$ **quando l'asse di rotazione coincide con un asse di simmetria del corpo**

  Per ogni $d\vec{L}_i$ c'è un $d\vec{L}_j$ simmetrico ortogonale all'asse che lo cancella

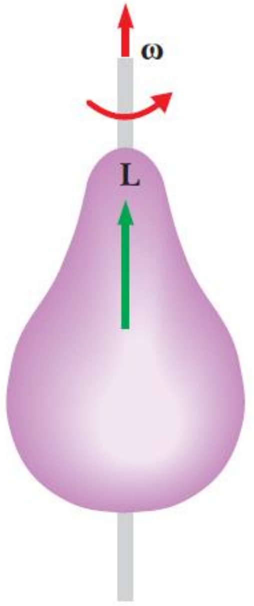


Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
$\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

- Caso particolare: $\vec{\boldsymbol{L}}$ parallelo a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ **quando l'asse di rotazione coincide con un asse di simmetria del corpo**

Per ogni $d\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{i}}$ c'è un $d\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{j}}$ simmetrico ortogonale all'asse che lo cancella



$$\vec{\boldsymbol{L}} = I_z\vec{\boldsymbol{\omega}} \qquad \mathrm{L} = \mathrm{L_z} \qquad L_\perp = 0$$

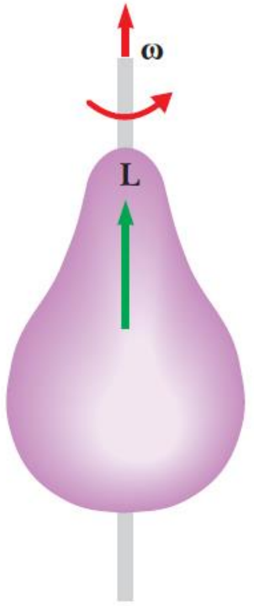
Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Se $\vec{\boldsymbol{L}}$ è variabile, le variazioni sono sempre parallele a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
$\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

- Caso particolare: $\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

$\bar{L}_z = I_z \bar{\omega}$



Equazioni del moto

II eq. card. $\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\bar{\omega}) = I_z\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right) = I_z\bar{\alpha}$

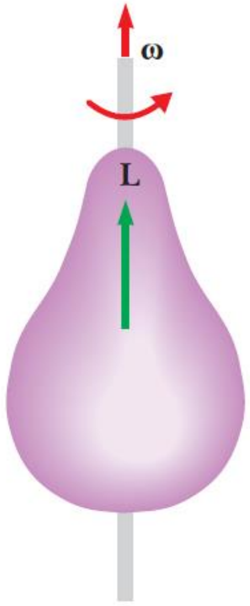
$$\bar{M} = I_z\bar{\alpha}$$

Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)\,dt$, $\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt \overset{\text{unif. acc.}}{\Longrightarrow} \vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
$\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

- Caso particolare: $\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Equazioni del moto

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{\boldsymbol{\omega}}) = I_z\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \boxed{I_z\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\boldsymbol{M}}}$$

Legge oraria

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \quad \rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt \quad \rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega\, dt$$

Momento di inerzia

Il momento di inerzia ha un ruolo simile a quello della massa nella seconda legge di Newton, perché rappresenta l'inerzia di un corpo a ricevere una certa accelerazione

Seconda legge di Newton

$$a = \frac{F}{m}$$

Si può sempre assegnare una massa ad un corpo

Equazione del moto di rotazione di un corpo rigido

$$\alpha = \frac{M}{I_z}$$

Il momento di inerzia **ha bisogno di un asse** per essere definito

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
$\vec{L}$ parallelo a $\vec{\omega}$

Assi principali di inerzia

Fissato un punto O di un corpo rigido, è sempre possibile trovare almeno tre assi cartesiani mutuamente ortogonali con centro in O tali che, se si sceglie uno di questi assi come asse di rotazione, $\vec{L}$ risulta parallelo a $\vec{\omega}$.

Energia cinetica e lavoro
di un corpo rigido in rotazione

- Energia cinetica

Energia cinetica e lavoro
di un corpo rigido in rotazione

- Lavoro e potenza

Energia cinetica e lavoro
di un corpo rigido in rotazione

- Energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{L^2}{2I_z}$$

- Lavoro e potenza istantanea

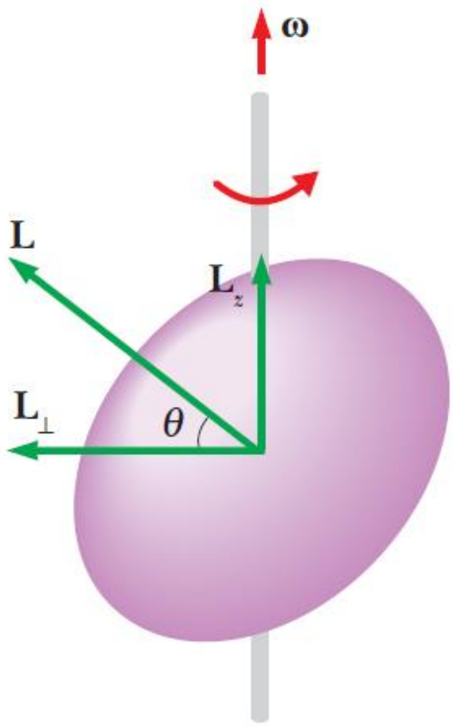
$$W = \int_0^{\theta} M(\theta) d\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso
$\vec{L}$ non parallelo a $\vec{\omega}$

- $\vec{L}$ non parallelo a $\vec{\omega}$: **l'asse di rotazione non è un asse di simmetria del corpo**

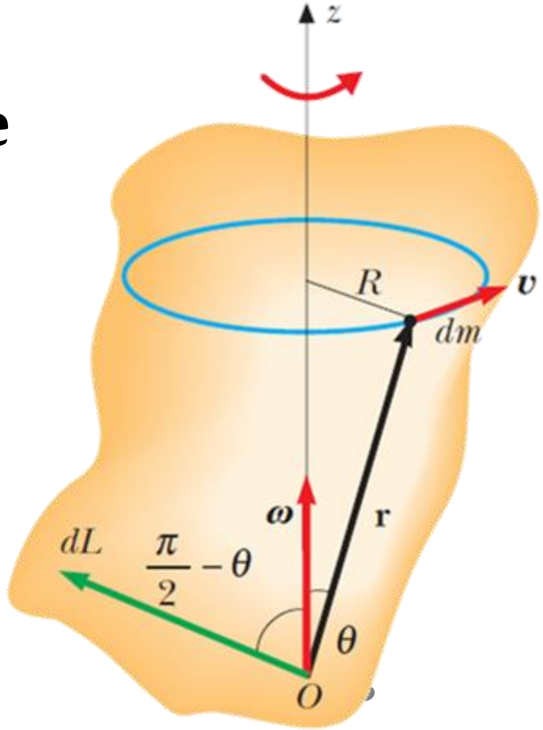
$$L_{\perp} = \int dL cos\vartheta = \int dm\, r\omega R cos\vartheta$$



Varia in direzione perché ruota intorno all'asse

Varia in modulo se varia ω

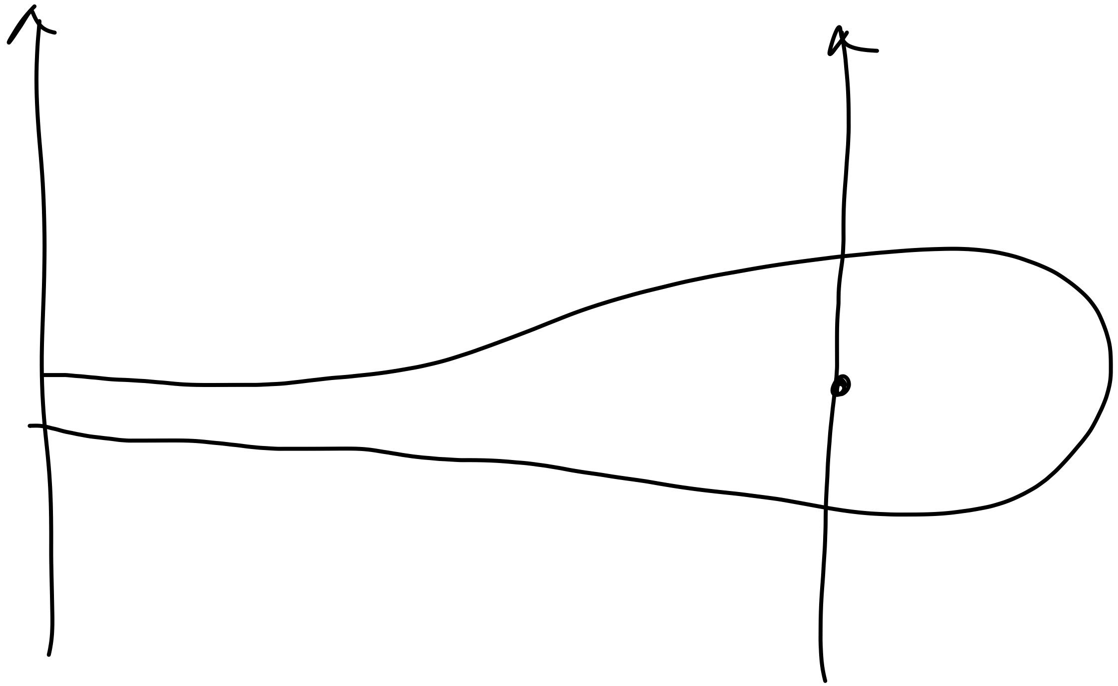
Poiché è proporzionale ad r, la componente del momento angolare ortogonale all'asse **dipende dalla scelta del polo**



Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di fisica. Meccanica e Termodinamica. III ed.
EdiSES Edizioni

Momento di inerzia

$$\alpha = \frac{M}{I_z}$$



Momento di inerzia

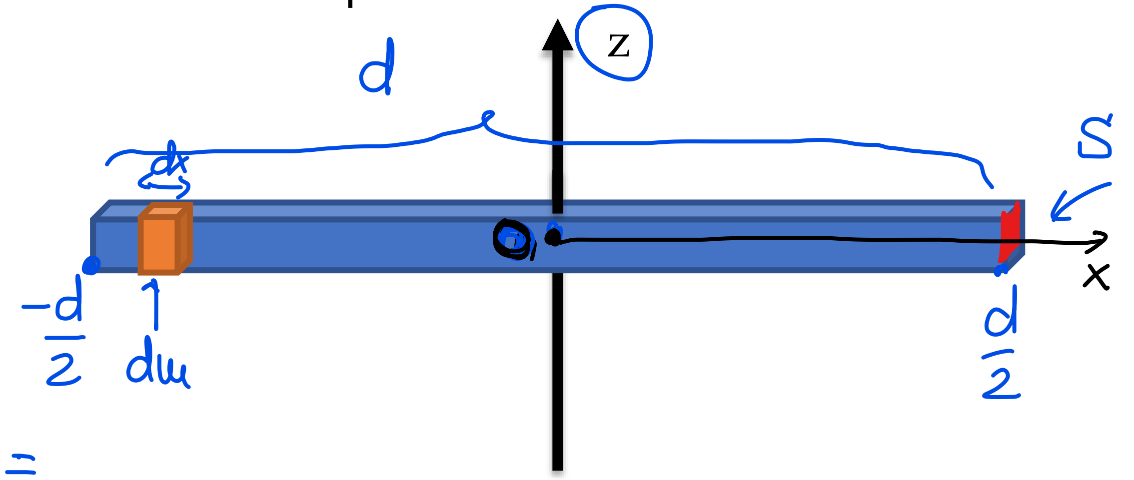
$$I_z = \int R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$$

L'inerzia rotazionale di un corpo rigido dipende dalla distribuzione delle masse intorno all'asse di rotazione

Esempio: momento di inerzia di un'asta rispetto ad un asse ortogonale

Calcolare il momento di inerzia di un'asta sottile omogenea, di massa *m* e lunghezza *d*, rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante

- per il suo centro
- per l'estremo dell'asta



$$m = \rho V = \rho S d \Rightarrow dm = \rho S\, dx$$

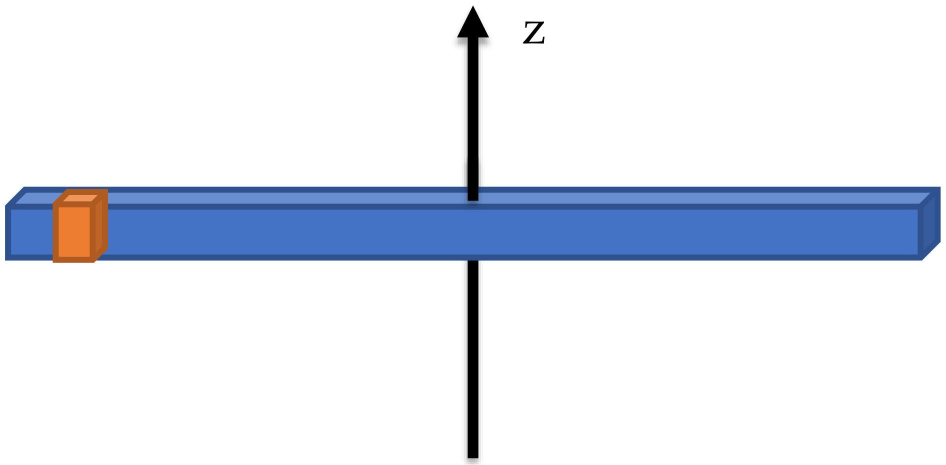
$$I_z = \int dm\, x^2 = \int_{-d/2}^{d/2} \rho S\, dx\, x^2 = \rho S \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx =$$

$$= \rho S \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = \rho S \left(\frac{d^3}{24} + \frac{d^3}{24}\right) = \rho S \frac{d^3}{12} = \boxed{\frac{m d^2}{12}}$$

Esempio: momento di inerzia di un'asta rispetto ad un asse ortogonale

Calcolare il momento di inerzia di un'asta sottile omogenea, di massa *m* e lunghezza *d*, rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante

- per il suo centro
- per l'estremo dell'asta

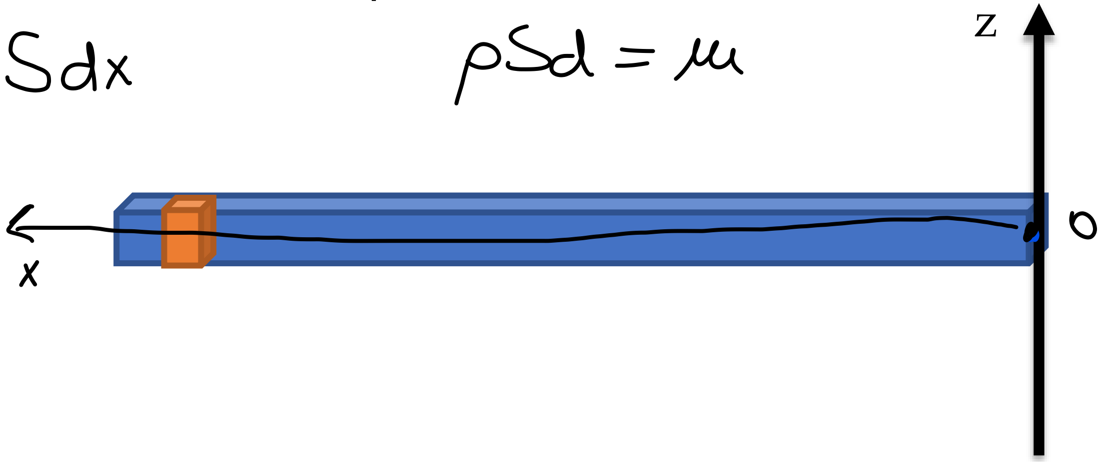


Esempio: momento di inerzia di un'asta rispetto ad un asse ortogonale

Calcolare il momento di inerzia di un'asta sottile omogenea, di massa *m* e lunghezza *d*, rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante

- per il suo centro
- per l'estremo dell'asta

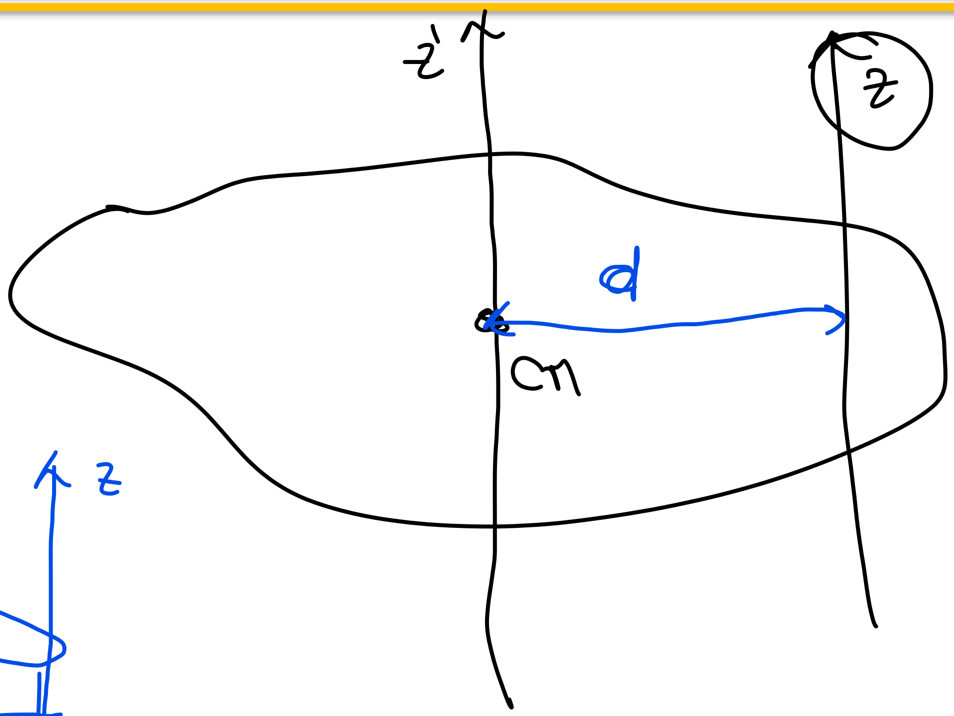
$$dm = \rho S\, dx \qquad \rho S d = m$$



$$I_z = \int dm\, x^2 = \int_0^d \rho S\, dx\, x^2 =$$

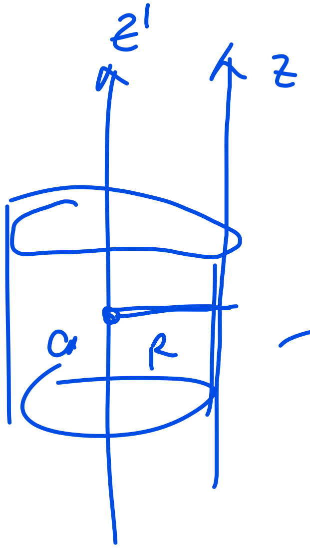
$$= \rho S \int_0^d x^2\, dx = \rho S \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^d = \rho S \frac{d^3}{3} = \boxed{\frac{m d^2}{3}}$$

Teorema di Huygens-Steiner

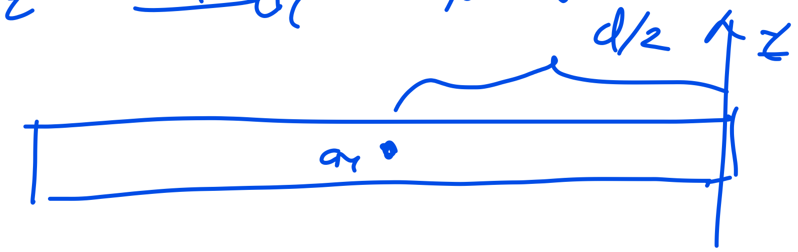


$$I_{cm} \longrightarrow I_z$$

$$I_z = I_{cm} + m d^2$$



$$I_z = I_{cm} + m R^2$$

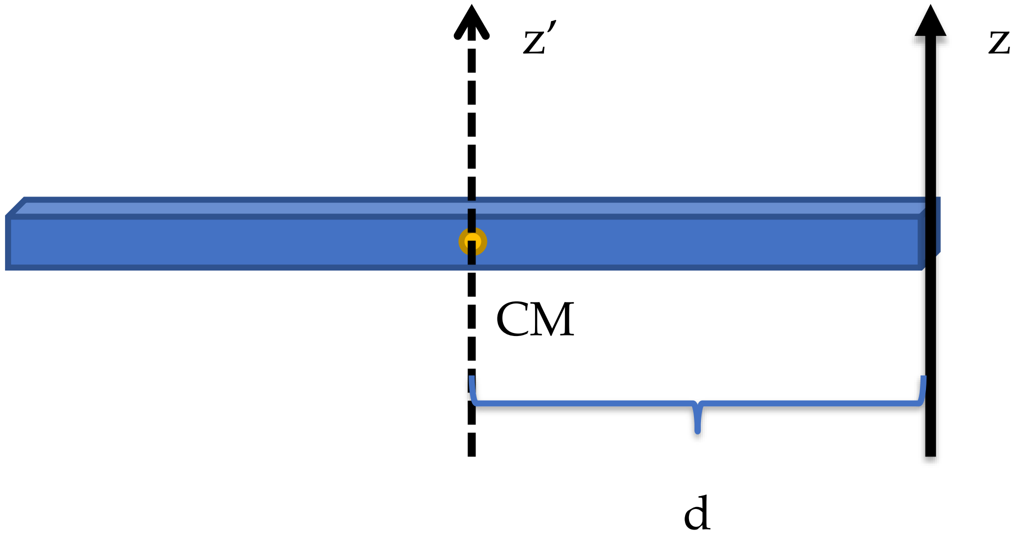


$$I_{cm} = \frac{m d^2}{12} + \frac{m d^2}{4}$$

Teorema di Huygens-Steiner

Il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse non passante per il centro di massa è dato da:

$$I = I_{CM} + md^2$$



dove:

- I_{CM} è il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo al primo
- d è la distanza dell'asse dal centro di massa

Teorema di Huygens-Steiner

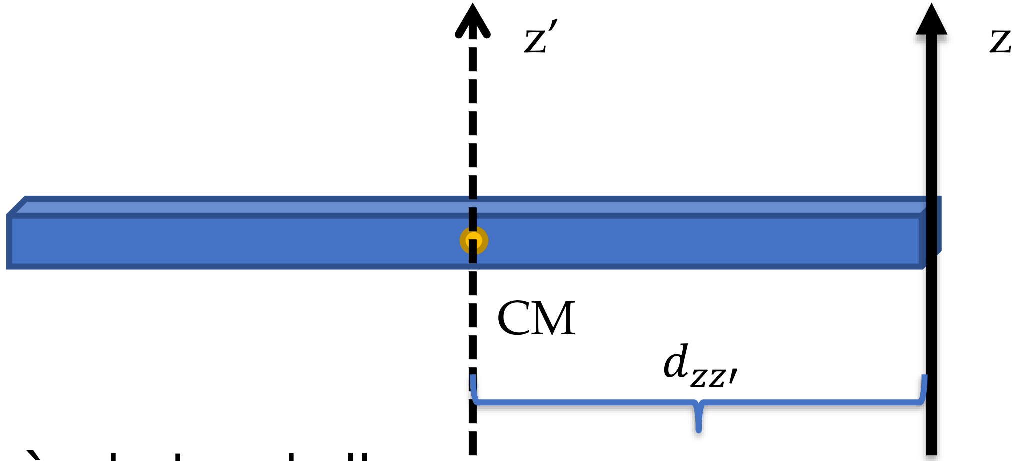
Teorema di Huygens-Steiner e teorema di Koenig

Riprendiamo l'espressione dell'energia cinetica e applichiamo il teorema di Huygens-Steiner

Teorema di Huygens-Steiner e teorema di Koenig

Riprendiamo l'espressione dell'energia cinetica e applichiamo il teorema di Huygens-Steiner

$$E_k = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$



L'energia cinetica totale di un corpo rigido è data dalla somma dell'**energia cinetica rotazionale** intorno ad un asse passante per il centro di massa più l'**energia cinetica traslazionale** del centro di massa

Notare che ω e v_{CM} **non** sono indipendenti ($v_{CM} = \omega\, d_{zz'}$)