

Exercices équations différentielles 1

$$1) \begin{cases} xy' = \frac{y-1}{x} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y' + y \tan x = \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y' + 2xy = x \sin x^2 \\ y(0) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$6) y' = 2xy + x y^3$$

$$3) \begin{cases} y' = y^2 - y \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y' + \frac{xy}{x^2-1} = 3x \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y'(x) = y(x) + x y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$8) y' = 2y - e^x y^2$$

$$\begin{cases} xy' = \frac{y-1}{x} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $xy' = \frac{y-1}{x}$

① $y(x) \equiv 1$ è soluzione infatti

$$y(x) \equiv 1 \Rightarrow y'(x) \equiv 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \forall x \quad \checkmark$$

② Ogni altra soluzione in $\{x \neq 0\}$ non interseca $y=1$.

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)-1} = \frac{1}{x^2}$$

Integro e ottengo

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)-1} dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

Per quanto riguarda $\int \frac{y'(x)}{y(x)-1} dx$ considero $y(x) = v \Rightarrow y'(x) dx = dv$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)-1} dx = \int \frac{1}{v-1} dv = \log |v-1| = \log |y(x)-1|$$

$$\Rightarrow \log |y(x)-1| = -\frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow |y(x)-1| = e^{-\frac{1}{x} + c} = d e^{-\frac{1}{x}} \quad e^c = d > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 \pm d e^{-\frac{1}{x}}$$

Se come $d > 0$, ricordando che $y=1$ è soluzione, possiamo dire che

$$y(x) = 1 + e e^{-\frac{1}{x}} \quad e \in \mathbb{R}$$

è soluzione in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

troviamo quella per cui $y(-1) = 2$

$$2 = y(-1) = 1 + a e \Rightarrow a = \frac{1}{e}$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{x} - 1}$$

$$\begin{cases} y' + 2xy = x \sin x^2 \\ y(0) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $y' + 2xy = x \sin x^2$

L'equazione è di primo grado lineare, anche del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad \begin{matrix} a(x) = 2x \\ f(x) = x \sin x^2 \end{matrix}$$

la cui soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(c + \int f(x) e^{A(x)} dx \right)$$

con $A(x) = \int a(x) dx$.

Procediamo con il calcolo $A(x)$

$$A(x) = \int 2x dx = x^2$$

Restano a $\int f(x) e^{A(x)} dx$

$$\int x \sin x^2 e^{x^2} dx \quad \text{applico la sostituzione } \tau = x^2 \Rightarrow d\tau = 2x dx$$

$$\Rightarrow \int x \sin x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sin \tau e^{\tau} d\tau$$

Per calcolare $\int \sin \tau e^{\tau} d\tau$ devo applicare 2 volte l'integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int \sin \tau e^{\tau} d\tau &= e^{\tau} \sin \tau - \int e^{\tau} \cos \tau d\tau \\ &= e^{\tau} \sin \tau - e^{\tau} \cos \tau - \int e^{\tau} \sin \tau \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \int \sin t e^t = e^t (\sin t - \cos t)$$

$$\Rightarrow \int \sin t e^t = \frac{e^t (\sin t - \cos t)}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int x \sin x^2 e^{x^2} &= \frac{1}{2} \int \sin t e^t = \frac{e^t (\sin t - \cos t)}{4} \\ &= \frac{e^{x^2} (\sin x^2 - \cos x^2)}{4} \end{aligned}$$

\Rightarrow l' integrale generale \bar{e}

$$\begin{aligned} Y(x) &= e^{-x^2} \left[c + \frac{e^{x^2} (\sin x^2 - \cos x^2)}{4} \right] \\ &= c e^{-x^2} + \frac{\sin x^2 - \cos x^2}{4} \end{aligned}$$

Trasliamo quella per cui $Y(0) = \frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4} = Y(0) = c + \frac{0-1}{4} \Rightarrow c = 1$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy \bar{e} la funzione

$$Y(x) = e^{-x^2} + \frac{\sin x^2 - \cos x^2}{4} .$$

Esercizio

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) - y(x) \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Solgerando Cerco l'integrale generale di $y' = y^2 - y$

È una equazione a variabili separabili.

Come prima cosa, osservo che $y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 0$

In entrambi i casi, esse sono soluzioni infatti $y = 1 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 0 = 0$.
Ogni altra soluzione non passa per 0 e per 1.

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2 - y(x)} dx = \int 1 dx = x + c$$

Per quanto riguarda $\int \frac{y'(x)}{y^2 - y(x)} dx$ considero $y(x) = v \Rightarrow y'(x) dx = dv$

$$\int \frac{y'(x)}{y^2 - y(x)} dx = \int \frac{dv}{v^2 - v}$$

Riusco per frazioni semplici, cerco A e B t.c.

$$\frac{1}{v^2 - v} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v-1} = \frac{Av - A + Bv}{v^2 - v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y^2 - y(x)} dx = \int \frac{dv}{v^2 - v} = \int \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v} dv$$

$$= \ln|v-1| - \ln|v| = \ln \left| \frac{v-1}{v} \right| = \ln \left| \frac{y(x)-1}{y(x)} \right|$$

$$\ln \left| \frac{y(x)-1}{y(x)} \right| = x + c$$

$$\Rightarrow \left| \frac{y(x)-1}{y(x)} \right| = e^{x+c} = d e^x \quad \text{con } d = e^c$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{y(x)} = \pm d e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(x)} = 1 \pm d e^x = 1 + a e^x \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{1 + a e^x}$$

Trascuriamo quella per cui $y(0) = 4$

$$4 = y(0) = \frac{1}{1+a} \Rightarrow 1+a = \frac{1}{4} = a = -\frac{3}{4}$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4} e^x}$$

Esercizio

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + x y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzioni Cerco l'integrale generale di $y'(x) = y(x) + x y^2(x)$
L'equazione è di tipo Bernoulli.

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{1}{y(x)} + x$$

Pongo $z(x) = \frac{1}{y(x)} \Rightarrow z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$

$$z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\left(\frac{1}{y(x)} + x\right) = -z(x) - x$$

$\Rightarrow z(x)$ risolve l'equazione di primo grado lineare
 $z'(x) + z(x) = -x$

$$\Rightarrow A(x) = \int 1 dx = x$$
$$\int (-x)e^x dx = -x e^x + \int e^x = e^x(1-x)$$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-x} \left(c + e^x(1-x) \right) = c e^{-x} + (1-x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(x)} = c e^{-x} + (1-x) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{c e^{-x} + (1-x)}$$

Trovo quella per cui $y(0) = 1$

$$1 = y(0) = \frac{1}{c + 1} \Rightarrow c + 1 = 1 \Rightarrow c = 0$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) \tan x = \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $y'(x) + y(x) \tan x = \cos x$

L'equazione è di primo grado lineare, ovvero del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad \begin{matrix} a(x) = \tan x \\ f(x) = \cos x \end{matrix}$$

La cui soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(C + \int f(x) e^{A(x)} dx \right)$$

con $A(x) = \int a(x) dx$.

Procediamo con il calcolo $A(x)$

$$A(x) = \int \tan(x) dx = - \int \frac{(-\sin(x))}{\cos(x)} dx = - \ln |\cos(x)|$$

Passiamo a $\int \cos(x) e^{-\ln |\cos x|}$

$$\int \cos(x) e^{-\ln |\cos x|} = \int \frac{\cos x}{|\cos(x)|} dx = \int 1 dx = x \quad \begin{matrix} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{intervallo in cui} \\ \cos x > 0. \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\ln |\cos(x)|} (C + x)$$

$$y(x) = \cos(x) (C + x) \quad \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Trascuriamo quella per cui $y(0) = 0$

$$y = y(0) = 1(C + 0) \Rightarrow C = -1$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

Esercizio Risolvere

$$y' = 2xy + xy^3$$

Soluzioni Cerco l'integrale generale

L'equazione è di tipo Bernoulli.

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{2x}{y^2} + x$$

Pongo $z = \frac{1}{y^2(x)}$ $\Rightarrow z'(x) = -2 \frac{1}{y^3(x)} y'(x)$

$$\Rightarrow z'(x) = -2 \left(\frac{y'(x)}{y^3(x)} \right) = -2 \left(\frac{2x}{y^2} + x \right) = -4xz(x) - 2x$$

$\Rightarrow z(x)$ Risolve $z'(x) + 4xz(x) = -2x$

$$A(x) = \int 4x = 2x^2$$

$$\int 2x e^{A(x)} dx = \int 2x e^{2x^2} = \frac{1}{2} \int 4x e^{2x^2} dx = \frac{e^{2x^2}}{2}$$

$$z(x) = e^{-2x^2} \left(C + \frac{e^{2x^2}}{2} \right)$$

$$z(x) = C e^{-2x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y^2} = z(x) = C e^{-2x^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{C e^{-2x^2} + 1}}$$

Esercizio

Problema

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{x y(x)}{x^2 - 1} = 3x \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $y'(x) + \frac{x y(x)}{x^2 - 1} = 3x$

L'equazione è di primo grado lineare, ovvero del tipo

$$y'(x) + a(x) y(x) = f(x) \quad \begin{aligned} a(x) &= \frac{x}{x^2 - 1} \\ f(x) &= 3x \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(c + \int f(x) e^{A(x)} dx \right)$$

con

$$A(x) = \int a(x) dx$$

vale che $x_0 = 0$

$$A(x) = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln (1 - x^2)$$

$$\text{calcolo } \int f(x) e^{A(x)} dx = \int 3x e^{\frac{1}{2} \ln |x^2 - 1|} dx$$

$$= -3 \int \frac{(-x)}{\sqrt{1 - x^2}} = -3 \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln (1 - x^2)} \left(c - 3 \sqrt{1 - x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left(c - 3 \sqrt{1 - x^2} \right)$$

$$y(x) = \frac{e}{\sqrt{1 - x^2}} - 3$$

$$\text{Inoltre } y(0) = 3 \Rightarrow 3 = y(0) = \frac{e}{\sqrt{1 - 0}} - 3 \Rightarrow e = 6$$

La soluzione è

$$y(x) = \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}} - 3$$

Esercizio Risolvere

$$y'(x) = 2y(x) - e^x y^2(x)$$

Soluzioni Cerco l'integrale generale

L'equazione è di tipo Bernoulli.

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{2}{y(x)} - e^x$$

Pongo $z(x) = \frac{1}{y(x)} \Rightarrow z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$

$$\Rightarrow z(x) \text{ risolve } z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\left(\frac{2}{y(x)} - e^x\right) = -2z(x) + e^x$$

$$\Rightarrow z'(x) + 2z(x) = e^x$$

$$A(x) = \int 2 dx = 2x$$

$$\int f(x) e^{A(x)} = \int e^x e^{2x} = \int e^{3x} = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-x} \left(C + \frac{e^{3x}}{3} \right)$$

$$z(x) = C e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{3}{C e^{-x} + e^{2x}}$$