Funzioni 2

venerdì 17 novembre 2023 12:46

Teorema. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua e strettamente MONOTONA allora $f^{-1}: f(I) \to I \subseteq \mathbb{R}$ è continua

Dim.
Osservo preliminarmente che, essendo f strettamente MONOTONA, in particolare f è iniettiva.
Quindi $f: I \to f(I)$ è iniettiva e suriettiva, cioè biettiva e quindi esiste la funzione inversa $f^{-1}: f(I) \to I$

Osservo che $f(I)$ è un intervallo (perché I è un intervallo e f è continua), e osservo che f^{-1} è strettamente MONOTONA

(Giustifico l'affermazione f^{-1} strettamente MONOTONA)

Suppongo che f sia strettamente crescente.
Siano dati x e $y \in f(I)$ con $x<y$. Devo dimostrare che $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ per vedere se è strettamente crescente

Per definizione di funzione inversa, $a = f^{-1}(x)$ $b = f^{-1}(y)$ sono elementi di I tali che $f(a)=x$ $f(b)=y$

Devo mostrare che $a<b$. Suppongo per assurdo che sia falso, cioè che sia $a \geq b$

- $a=b$ non può verificarsi, poiché $f(a)=x \neq y = f(b)$
- se fosse $a>b$ allora si avrebbe $x=f(a)>f(b)=y$, poiché f strettamente crescente, per ipotesi è $x<y$, quindi assurdo

Concludo quindi che $a \leq b$, cioè $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$

RAGIONAMENTO ANALOGO SE f STRETTAMENTE DECRESCENTE

Quindi $f^{-1}: f(I) \to I$ è una funzione strettamente monotona, con dominio $f(I)$ un intervallo, e immagine $f^{-1}(f(I)) = I$ (un intervallo)
Per il teorema di ieri concludo che f^{-1} è continua $\square$

FUNZIONI ELEMENTARI:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, la funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, n pari, f_z $[0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, n dispari, f_z $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a>0$, f_z $[0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^a$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a<0$, f_z $(0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^a$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a=0$, la funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^0 = 1$
- $\forall a>0$, $a \neq 1$, la f_z $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$
- $\forall a>0$, $a \neq 1$, la f_z $(0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a(x)$
- $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $tg : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi\} \to \mathbb{R}$, $\sinh$, $\cosh$, $tgh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

Teorema
Tutte le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione

"Dim": le funzioni $x \mapsto x^n$, $x \mapsto x^{-n}$ $(n \in \mathbb{R})$ sono continue nei rispettivi domini, come conseguenza del fatto che prodotti e quozienti di funzioni continue sono continui

le funzioni $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sono continue, nei rispettivi domini, poiché inverse di funzioni continue su intervalli

Mostro che la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ è continua

Proposizione: la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ continua
Dim
f è continua in $x=0$, cioè devo mostrare che $\forall \varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ t.c $1-\varepsilon < e^x < 1+\varepsilon$ $\forall x \in (-\delta,+\delta)$
Ricordo disuguaglianza di Bernoulli: $(1+t)^n \geq 1+n \cdot t$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t>-1$
cioè $\frac{(1+t)^n-1}{n} \geq t$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t>-1$
Se scelgo $t=e^x-1$, con $x \in \mathbb{R}$ $(\Rightarrow t>-1)$

$$\frac{(e^x)^n-1}{n} \geq e^x-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{e^{n \cdot x}-1}{n} \geq e^x-1$$

Sia dato $\varepsilon>0$, scelgo un $n \in \mathbb{N}$ t.c $\frac{e-1}{n}<\varepsilon$. Se $x \in [0,\frac{1}{n}]$, allora $\boxed{0 \leq e^x-1} \leq \frac{e^{nx}-1}{n} < \frac{e-1}{n} \boxed{<\varepsilon}$

Se $x \in (-\frac{1}{n},0)$, allora $0 \leq |\underbrace{e^x-1}_{<0}| = 1-e^x = e^{-x}-1 = 1-\frac{1}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}}$
Siccome $x<0$, ho $-x>0 \Rightarrow e^{-x}>1$
Inoltre $x \in (-\frac{1}{n},0) \Rightarrow -x \in (0,\frac{1}{n})$
Quindi $\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}} < e^{-x}-1$
cioè $0 \leq |e^x-1| < \varepsilon$, cioè $0 \leq 1-e^x < \varepsilon$

In conclusione: dato $\varepsilon>0$ se $n \in \mathbb{N}$ è t.c $\frac{e-1}{n}<\varepsilon$, allora se $\delta=\frac{1}{n}>0$ si ha $-\varepsilon<e^x-1<\varepsilon$ $\forall x \in (-\delta,\delta)$

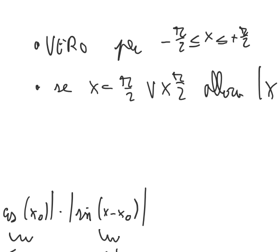
Quindi la $f(x)=e^x$ è continua in $x=0$
Sia in generale, $x_0 \in \mathbb{R}$. Osservo che $f(x)=e^x=e^{x_0+x-x_0}=e^{x_0} \cdot e^{x-x_0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

La funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x)=x-x_0$ è continua in particolare in x_0

La funzione $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ è continua in 0 e osservo che $0=g(x_0)$
Allora la funzione composta $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{x-x_0}$ è continua in x_0, di conseguenza anche f_z $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{x_0} \cdot e^{x-x_0}$

Quindi:
- $x \mapsto e^x$ continua in $\mathbb{R}$
- $\forall a>0$, $a \neq 1$ $\Rightarrow$ $a^x = e^{(\log a) \cdot x}$
- $x \mapsto \log a \cdot x$ è continua in $\mathbb{R}$, quindi è continua $x \mapsto a^x$
- $\forall a>0, a \neq 1$, la f_z $(0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x$ è continua poiché inversa di $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$ (CHE MANCAVA)
- $\forall a \in \mathbb{R}$, la f_z $(0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^a$ è continua poiché $x^a = (e^{\log x})^a$, $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è continua
  $a \cdot \log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è continua

Proposizione
La funzione $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua



Lemma: Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $|\sin x| \leq |x|$

- Caso $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow 0 \leq \sin(x) \leq x$
- Caso $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ $\Rightarrow |\sin x| = |-\sin x|$ $|\sin(-x)| \leq |-x| = |x|$
- VERO per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\frac{\pi}{2}$
- se $x < -\frac{\pi}{2} \vee x > \frac{\pi}{2}$ allora $|x| > \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\sin x|$

Dim: Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ sia $x \in \mathbb{R}$ vale $\sin x - \sin x_0$
$\sin(x) - \sin(x_0) = \sin(x_0 + x - x_0) - \sin x_0$
$= \sin(x_0) \cdot \cos(x-x_0) + \cos(x_0) \cdot \sin(x-x_0) - \sin x_0$
$= \sin(x_0)\left[\cos(x-x_0)-1\right] + \cos(x_0) \cdot \sin(x-x_0)$

In particolare: $|\sin(x)-\sin(x_0)| \leq |\sin(x_0)| \cdot |\cos(x-x_0)-1| + \underbrace{|\cos(x_0)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\sin(x-x_0)|}_{\leq |x-x_0|}$

- $|\cos(x_0)| \cdot |\sin(x-x_0)| \leq |x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ ✱
- $|\sin(x_0)| \cdot |\cos(x-x_0)-1| \leq |\cos(x-x_0)-1| \leq 2\left|\sin^2\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ○

se $x-x_0<\delta$ con $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{2};\sqrt{\varepsilon}\}$

Ricordo che vale $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos(2\alpha)-1 = -2\sin^2\alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
Sia $\varepsilon>0$, sia $\delta>0$ t.c $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ e $\frac{\delta^2}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$ (cioè $\delta<\sqrt{\varepsilon}$) allora se $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ cioè $|x-x_0|<\delta$ ✱
vale $2\left|\sin^2\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|^2 = \frac{(x-x_0)^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ ○

Corollario: Le funzioni $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $tg : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi\} \to \mathbb{R}$ sono continue
Dim. $\forall x \in \mathbb{R}$ vale $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$ (verifico $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(x) - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin x$)
Quindi $\cos$ è continua poiché composizione di funzioni continue

Inoltre tg è continua poiché quoziente di funzioni continue $\square$

LIMITI DI FUNZIONI

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice intorno di x_0 un qualunque insieme della forma $(x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0-\delta < x < x_0+\delta\}$ per qualche $\delta>0$
es $(-1,1)$ è intorno di 0 $(1,2)$ non è intorno di 1

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione per D se per ogni $\delta>0$ esiste $x \in D \cap (x_0-\delta; x_0+\delta)$, con $x_0 \neq x$
es $[1,2)$ $x_0=2$ è di accumulazione per D
$[0;1] \cup \{2\}$ $x_0=2$ non è di accumulazione

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ $f: D \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per D
Sia $l \in \mathbb{R}$ si dice che l è $\lim_{x \to x_0} f(x)$ se $\forall \varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che $|f(x)-l|<\varepsilon$ $\forall x \in D \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ con $x \neq x_0$

=

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$
$l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$

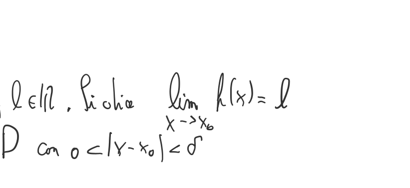
Def
- Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un intorno di x_0 è un intervallo della forma $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, con $\varepsilon>0$

Def
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione per D se $\forall \delta>0$ esiste $x \in D \cap (x_0-\delta; x_0+\delta)$ con $x \neq x_0$
cioè se per ogni $U \subseteq \mathbb{R}$ di x_0 esiste $x \in D \cap U$ con $x=x_0$

Def
Sia $f: D \to \mathbb{R}$ funzione, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per D, $l \in \mathbb{R}$. Si dice $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ t.c $|f(x)-l|<\varepsilon$ per ogni $x \in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$
cioè $f(x) \in (l-\varepsilon; l+\varepsilon)$ per $x \in D \cap (x_0-\delta; x_0+\delta)$ con $x \neq x_0$
cioè se per ogni intorno di l $V \in \mathbb{R}$ esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}$ di x_0 t.c $f(x) \in V$ $\forall x \in D \cap U$ con $x \neq x_0$

Oss. Sia $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$
1) f è continua in x_0 se e solo se per ogni intorno $V \subseteq \mathbb{R}$ di $f(x_0)$ esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}$ di x_0 t.c $f(x) \in V$, $\forall x \in D \cap U$
2) Se x_0 è anche di accumulazione per D allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Un intorno di $+\infty$ è un intervallo della forma $(M;+\infty)$ con $M \in \mathbb{R}$
- Un intorno di $-\infty$ è un intervallo della forma $(-\infty;M)$ con $M \in \mathbb{R}$



Def
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$. Dico che a è un punto di accumulazione per D se per ogni intorno $V \subseteq \mathbb{R}$ di a esiste $x \in D \cap V$ con $x \neq a$

Oss. $+\infty$ è di accumulazione per D se e solo se D è illimitato superiormente $\sup D = +\infty$
$-\infty$ è di accumulazione $D \Leftrightarrow \inf D = -\infty$

Def
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ $f: D \to \mathbb{R}$ funzione $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ di accumulazione per D, $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$
Si dice $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ($f(x) \to$ per $x \to a$)
se per ogni intorno $V \subseteq \mathbb{R}$ di l esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}$ di a tale che $f(x) \in V$, $\forall x \in D \cap U$ con $x \neq a$

es
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ significa $\forall \varepsilon>0$, $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\underset{(2-\varepsilon<f(x)<2+\varepsilon)}{|f(x)-2|<\varepsilon}$ per ogni $x \in D$ con $x>K$

es
$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ significa che $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists \delta>0$ t.c $f(x)<M$ per ogni $x \in D \cap (1-\delta; 1+\delta)$ con $x \neq 1$

Teorema
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione in D, $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti
1) $\lim_{x \to a} f(x) = l$
2) per ogni successione $\{x_n\} \subseteq D \setminus \{a\}$ t.c $x_n \to a$ deve valere che $f(x_n) \to l$

Def (limite destro/sinistro)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ funzione, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$
- Se $\forall \delta>0$ l'insieme $D \cap (x_0, x_0+\delta) \neq \emptyset$, ha senso la def seguente:
  si dice che $\underset{\text{è limite destro di } x_0}{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l}$ se per ogni intorno di l esiste $\delta>0$ t.c. $f(x) \in V$, $\forall x \in (x_0; x_0+\delta) \cap D$
  (analogamente per x_0^-)

es
$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Oss
In generale: se $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è t.c. $\forall \delta>0$ $D \cap (x_0, x_0+\delta) \neq \emptyset$
$D \cap (x_0-\delta, x_0) \neq \emptyset$
allora un certo numero l è limite della funzione nel punto se e solo se sia destro e sinistro sono uguali
$\lim_{x \to x_0} = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Def (limite per eccesso / per difetto)
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ di accumulazione, $l \in \mathbb{R}$
- Si dice $\lim_{x \to a} f(x) = l^+$ x eccesso se $\forall \varepsilon>0$ esiste $V \subseteq \mathbb{R}$ intorno di a t.c $l<f(x)<l+\varepsilon$, $\forall x \in D \cap V$ con $x \neq a$
- Si dice $\lim_{x \to a} f(x) = l^-$ se $\forall \varepsilon>0$ $\exists V \subseteq \mathbb{R}$ intorno di a t.c $l-\varepsilon<f(x)<l$, $\forall x \in D \cap V$ con $x \neq a$

Teorema
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per D. Siano $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
Se $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$ allora $l_1 = l_2$ (Unicità del limite)

Teorema
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per D, $\lim_{x \to a} f(x) = l$ $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$
Se $l>0$ oppure $l=+\infty$ allora esiste un intorno di a $U \in \mathbb{R}$ t.c $f(x)>0$ $\forall x \in D \cap U \setminus \{a\}$

Corollario: (Permanenza del segno per funzioni continue)
Se $f: D \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in D$
- Se $f(x_0)>0$ allora esiste $\delta>0$ t.c. $f(x)>0$ $\forall x \in D \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$
- Se $f(x_0)<0$ allora $\exists \delta>0$ t.c. $f(x)<0$ $\forall x \in D \cap (x_0-\delta; x_0+\delta)$

Teorema
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per D
1) Se $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ sono tali che $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in D$ allora:
- se $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$
- se $f(x)$ $g(x)$ $h(x)$ sono t.c $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$ allora $\lim_{x \to a} g(x) = l$

Teorema (di esistenza di un limite per funzioni MONOTONE)
Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e $f: (a,b) \to \mathbb{R}$
- Se f è non-decrescente in (a,b) allora esiste $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$

Oss
Il teorema resta vero con $(-\infty, b)$ $(a,+\infty)$ o $(-\infty,+\infty)$ al posto di (a,b)
Il teorema è falso se al posto di (a,b) ho $[a,b]$ $(a,b]$ $[a,b]$ $[a,+\infty)$ $(-\infty,b]$

- Se f è non crescente in (a,b) allora esiste $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf f$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup f$

limiti delle funzioni elementari
- $\forall a \in \mathbb{R}$ vale $\lim_{x \to +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ 1 & \text{se } a=0 \\ 0^+ & \text{se } a<0 \end{cases}$, $\lim_{x \to 0^+} x^a \begin{cases} 0^+ & \text{se } a>0 \\ 1 & \text{se } a=0 \\ +\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $\lim_{x \to -\infty} x^n \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$, $\lim_{x \to 0^+} x^n \begin{cases} 0^+ & \text{se } n \text{ pari} \\ 0^- & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ con n dispari vale $\lim_{n \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \sqrt[n]{x} = 0^-$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ $a>1$ se $0<a<1$ inverso
- $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} \log x = -\infty$ $a>1$ se $0<a<1$ inverso

Teorema
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ $g: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ($x_0 = \pm\infty$ oppure $x \to x_0^{\pm}$) punto di accumulazione per D. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$
con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, 0^-, 0^+, +\infty\}$ allora
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)+g(x)] = a+b$ (se $a+b$ è definito)
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$ ($a \cdot b$ è def)
- $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ è def)

Teorema
Siano $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per D
Suppongo che esistano $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ $l = \lim_{y \to y_0} g(y)$
Se è verificata una delle condizioni:
1) g è continua in y_0 (allora $y_0 \in D$)
2) $f(x) \neq y_0$ $\forall x \neq x_0$

allora il $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

Oss
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = y^+$ e $\lim_{y \to y_0^+} g(y)$ allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$