Università di Napoli Federico II – Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Calcolatori Elettronici I

Macchine sequenziali: minimizzazione degli stati

Funzioni uscita e stato prossimo

- L’uscita e lo stato prossimo sono funzioni della sequenza di ingressi applicata a partire da uno “stato iniziale”:

  $u_k = \lambda(q_0, J_k)$

  $q_{k+1} = \delta(q_0, J_k)$

- con $J_k = i_0, i_1, i_2, \ldots, i_k$

Macchine complete e incomplete

Applicabilità di una sequenza

- Una sequenza di ingressi J è applicabile a M in q - *si dice a M(q)* - se è definita u=λ(q, J), la funzione che fornisce l'uscita finale u che si ottiene applicando alla macchina la sequenza di ingressi J a partire da uno "stato iniziale" q
- Se la funzione di uscita λ è definita ovunque, la macchina si dice completa, altrimenti incompleta
- <u>Per le macchine incomplete esistono sequenze non applicabili</u>
- Sequenza J_j non applicabile in q_0: λ non definita
  - Potrebbe essere applicabile una sequenza più lunga o più corta

Equivalenza

- Occorre formalizzare il fatto che due macchine possano avere lo stesso funzionamento

⇒ reagire nello stesso modo (con le stesse uscite) alle stesse sequenze di ingressi

- Definizione di ***stati equivalenti*** in macchine complete:
  - per qualsiasi sequenza di ingressi applicata a tali stati le rispettive uscite finali sono uguali

Equivalenza

- Un modo per riconoscere stati equivalenti (fondamentale negli algoritmi che vedremo) è usare la proprietà ricorsiva degli stati equivalenti:

Due stati sono equivalenti se lo sono tutte le possibili coppie di **stati successivi**, e sono uguali tutte le possibili **uscite successive**

Equivalenza: riassumendo

- Concetto di equivalenza: avere lo stesso funzionamento "esterno"
  - Reagire nello stesso modo (con le stesse uscite) alle stesse sequenze di ingressi
- Due stati sono equivalenti se, per ciascun ingresso:
  - sono uguali le uscite
  - sono equivalenti gli stati successivi
- Definizione di *stati equivalenti* in macchine complete:
  - Producono la stessa sequenza di uscite per qualsiasi sequenza di ingressi

Equivalenza tra macchine

- I due stati possono appartenere anche alla stessa macchina
- Due macchine *complete* M e M' sono equivalenti se per ciascuno stato q di M esiste almeno uno stato q’ di M’ ad esso equivalente e, viceversa

Problema della Minimizzazione

- Partendo da una macchina M(Q,I,U,τ,ω) , vogliamo trovare una macchina M’(Q’,I,U,τ’,ω’) equivalente ad M e con il minor numero di stati
- Partiamo dalla famiglia di insiemi di stati compatibili massimi $F=(S_1,S_2,\ldots,S_n)$

Problema della Minimizzazione

- La F gode delle seguenti proprietà, essenziali nei metodi di minimizzazione:
  - Gli elementi S di F sono disgiunti
  - Gli elementi S di F coprono l'insieme degli stati Q
  - Tutti gli stati di un elemento S di F portano alla stessa uscita (eventualmente non definita)
  - F è chiusa: da due stati di uno stesso elemento S di F si arriva a due stati che appartengono ad una stessa S'
- Ricerchiamo la M'(F,I,U,τ',ω')
- M' ha un numero di stati non superiore a M

Ricerca della famiglia F

- Algoritmo del partizionamento
- Metodo tabellare di Paull-Unger

- Procedono per “eliminazione”
- Partono da una presunta F (inizialmente coincidente con Q) di stati compatibili e cercano di individuare incompatibilità fin quando è possibile

Algoritmo del partizionamento

- Si individuano gli stati incompatibili rispetto alle uscite per ciascun ingresso
- Le partizioni individuate si esaminano rispetto allo stato prossimo
- Si itera fintantoché tutte le partizioni non verificano la definizione di compatibilità

Algoritmo del partizionamento

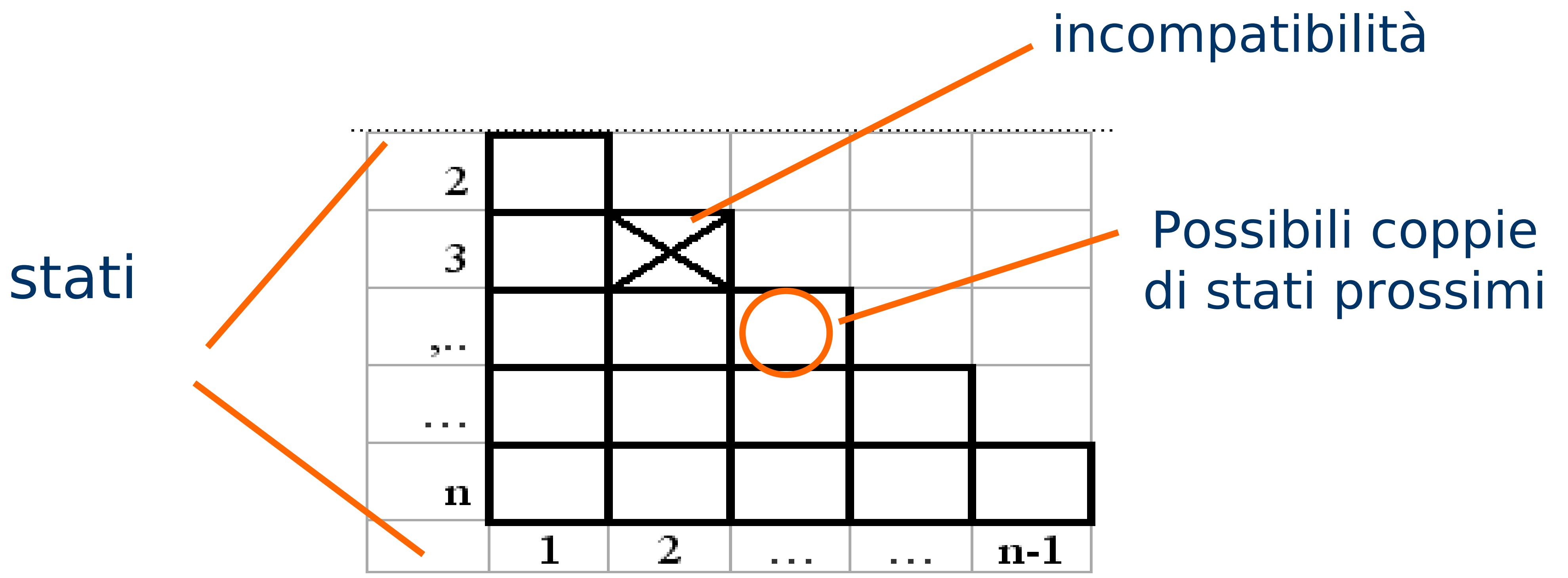
stati	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	q_7/u_2
q_2	q_4/u_2	q_7/u_1
q_3	q_1/u_1	q_5/u_2
q_4	q_2/u_2	q_3/u_1
q_5	q_4/u_1	q_3/u_2
q_6	q_1/u_2	q_2/u_2
q_7	q_5/u_1	q_5/u_2

i	Elemento in esame	Analisi uscite	Partizione elementi	Famiglia
				(1,2,3,4,5,6,7)
1	(1,2,3,4,5,6,7)	u_1: (1,3,5,7); u_2:(2,4,6)	(1,3,5,7) (2,4,6)	(1,3,5,7) (2,4,6)
2	(1,3,5,7)	u_2: (1,3,5,7)		
2	(2,4,6)	u_1:(2,4); u_2: (6)	(2,4) (6)	(1,3,5,7) (2,4,)(6)

i	Stati seguenti	Analisi stati seguenti	Partizione elemento	Famiglia
Passo 3				(1,3,5,7) (2,4) (6)
1	(1,3,5,7)→(2,1,4,5)	(2,4) (1,5)→(1,5) (3,7)	(1,5) (3,7)	(1,5) (3,7) (2,4) (6)
1	(2,4)→(4,2)			
2	(2,4)→(7,3)			

Metodo di Paull-Unger

- Riorganizza il procedimento visto prima in forma di matrice diagonale



Metodo di Paull-Unger

- Si marcano come incompatibili le coppie di stati che portano ad uscite differenti per almeno un ingresso
- Si indicano le coppie di possibili stati prossimi in ogni casella
- Si continua iterativamente il procedimento partizionando rispetto agli stati

Metodo di Paull-Unger

- Ogni elemento della Tabella delle Implicazioni contiene:
  - Il simbolo di non equivalenza (X)
  - Il simbolo di equivalenza (~)
  - La coppia di stati condizionanti se non è possible stabilire immediatamente l'equivalenza (o non equivalenza)

S1	X		
S2	X	~	
S3	S1,S2	X	X
	S0	S1	S2

Esempio – Paull-Unger

	0	1
a	g/0	e/1
b	c/0	a/1
c	e/1	g/0
d	b/0	e/1
e	g/0	a/1
f	d/1	f/0
g	a/1	g/0

b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad
	a	b	c	d	e	f

“e” ed “a” hanno le stesse uscite per ogni ingresso

“g” ed “f” sono equivalenti se lo sono “a” e “d”

“g” e “b” hanno uscite differenti (con rif ad uno stesso ingresso)

Esempio

- Procedendo iterativamente si giunge a determinare le classi di equivalenza

b	~					
c	X	X				
d	X	X	X			
e	~	~	X	X		
f	X	X	X	X	X	
g	X	X	~	X	X	X
	a	b	c	d	e	f

$\alpha = \{a,b,e\}$

$\beta = \{c,g\}$

$\gamma = \{d\}$

$\delta = \{f\}$