Esercizi sulle Equazioni Differenziali Ordinarie

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni differenziali con le condizioni al bordo date.

1. $$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{2x}, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^{x} \cos x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} y'' + 9y = \sin(3x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} y''' + 2y'' + y' = e^{-x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = -1. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} y'' - y = \cosh(x), \\ y(0) = 1, \\ y(1) = e. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}, \\ y(0) = -2\ln(2), \\ y(1) = -e\ln(1+e) - e^2\ln(1+e). \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} y''' - y'' - y' + y = e^{x} \sin x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 1

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Soluzione.
È un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Ha una radice doppia:

$$\lambda = 2.$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = (A + Bx)e^{2x}.$$

Derivando:

$$y'(x) = (B + 2A + 2Bx)e^{2x}.$$

Applicando le condizioni iniziali:

$$y(0) = A = 1, \quad y'(0) = B + 2A = 0 \Rightarrow B = -2.$$

$$\boxed{y(x) = (1 - 2x)e^{2x}}$$

Esercizio 2

Risolvere il problema ai bordi:

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Soluzione.
L'equazione è lineare omogenea a coefficienti costanti. Scriviamo l'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Risolvendo:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Essendo le radici reali e distinte, la soluzione generale è:

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}.$$

Applichiamo le condizioni al bordo:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A, \\ y(1) &= Ae^{-1} + Be^{-2} = A(e^{-1} - e^{-2}) = 1. \end{aligned}$$

Risolvendo per A:

$$A = \frac{1}{e^{-1} - e^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}} = \frac{1}{\frac{e^2 - e}{e^2}} = \frac{e^2}{e(e-1)} = \frac{e}{e-1}.$$

Quindi $B = -A = -\frac{e}{e-1}$.
La soluzione del problema ai bordi è:

$$\boxed{y(x) = \frac{e}{e-1}\left(e^{-x} - e^{-2x}\right)}.$$

Esercizio 3

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Soluzione.
L'equazione è omogenea a coefficienti costanti. Scriviamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Troviamo le radici:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$
$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Poiché le radici sono reali e distinte, la soluzione generale è:

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{-x}.$$

Deriviamo:

$$y'(x) = 3Ae^{3x} - Be^{-x}.$$

Applichiamo le condizioni iniziali:

$$y(0) = A + B = 2,$$
$$y'(0) = 3A - B = -1.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A + B & = 2 \\ 3A - B & = -1 \end{cases}$$

Sommiamo le equazioni:

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = 2 - A = \frac{7}{4}.$$

Dunque, la soluzione è:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{7}{4}e^{-x}}.$$

Esercizio 4

Risolvere il problema ai bordi:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Soluzione.
L'equazione è omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i.$$

Le soluzioni complesse coniugate indicano che la soluzione generale è:

$$y(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Applichiamo le condizioni al bordo:

$$y(0) = A = 1,$$
$$y(\pi) = A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Dunque, la soluzione è:

$$\boxed{y(x) = \cos x}.$$

Esercizio 5

Risolvere il problema ai bordi:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Soluzione.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea. Risolviamo prima l'equazione omogenea associata:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Soluzione generale dell'omogenea:

$$y_o(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}.$$

Per trovare una soluzione particolare $y_p(x)$, utilizziamo il metodo di somiglianza. Osserviamo che il termine non omogeneo è e^{2x}, che è già presente in y_o. Quindi proponiamo:

$$y_p(x) = Cxe^{2x}.$$

Deriviamo:

$$y_p'(x) = Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}, \quad y_p''(x) = 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}.$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = (4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}) - 5(Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}) + 6Cxe^{2x}$$

$$= 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} - 5Ce^{2x} - 10Cxe^{2x} + 6Cxe^{2x} = -Ce^{2x}.$$

Visto che la soluzione cercata è e^{2x}, imponiamo che

$$C = -1 \Rightarrow y_p(x) = -xe^{2x}.$$

Soluzione generale completa:

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} - xe^{2x}.$$

Condizioni al bordo:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = 0, \\ y(1) &= Ae^2 + Be^3 - e^2 = 1. \end{aligned}$$

Dal primo: $B = -A$. Sostituendo nel secondo:

$$Ae^2 - Ae^3 - e^2 = 1 \Rightarrow A(e^2 - e^3) = 1 + e^2 \Rightarrow A = \frac{1 + e^2}{e^2 - e^3} = -\frac{1 + e^2}{e^3 - e^2}.$$

$$B = -A = \frac{1 + e^2}{e^3 - e^2}.$$

Quindi la soluzione è:

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{1 + e^2}{e^2 - e^3}\right)(e^{2x} - e^{3x}) - xe^{2x}}.$$

Esercizio 6

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Soluzione.
L'equazione è lineare non omogenea a coefficienti costanti. Risolviamo prima l'omogenea associata:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ (molteplicità 2).}$$

Soluzione generale dell'omogenea:

$$y_o(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}.$$

Per trovare una particolare soluzione $y_p(x)$, notiamo che il termine xe^{-2x} è già presente in y_o. Poiché e^{-2x} è radice doppia, proviamo:

$$y_p(x) = (C + Dx)x^2e^{-2x} = (Cx^2 + Dx^3)e^{-2x}.$$

Calcoliamo le derivate:

$$y_p'(x) = [2Cx + 3Dx^2 - 2(Cx^2 + Dx^3)]e^{-2x},$$

$$y_p''(x) = [2C + 6Dx - 4(2Cx + 3Dx^2) + 4(Cx^2 + Dx^3)]e^{-2x}.$$

Sviluppiamo passo passo:

$$y_p = (Cx^2 + Dx^3)e^{-2x},$$

$$y_p' = (2Cx + 3Dx^2 - 2Cx^2 - 2Dx^3)e^{-2x},$$

$$y_p'' = (2C + 6Dx - 8Cx - 12Dx^2 + 4Cx^2 + 4Dx^3)e^{-2x}.$$

Sostituiamo tutto nell'equazione:

$$y_p'' + 4y_p' + 4y_p = xe^{-2x}.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$[2C+6Dx-8Cx-12Dx^2+4Cx^2+4Dx^3+4(2Cx+3Dx^2-2Cx^2-2Dx^3)+4(Cx^2+Dx^3)]e^{-2x} = xe^{-2x}.$$

Raggruppiamo i coefficienti:

- Coefficiente davanti x^3: $4D - 8D + 4D = 0$,
- Coefficiente davanti x^2: $-12D + 4C + 12D + 4C = 0$,
- Coefficiente davanti x: $6D - 8C + 8C = 6D$,
- Coefficiente noto: $2C$.

Sommando tutto:

$$(2C + 6Dx)e^{-2x} = xe^{-2x}.$$

Confrontiamo i coefficienti:

$$2C = 0 \Rightarrow C = 0, 6D = 1 \Rightarrow 6D = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{6}.$$

Dunque:

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^{-2x}.$$

Soluzione generale:

$$y(x) = (A + Bx)e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{-2x}.$$

Condizioni iniziali:

$$y(0) = A = 1,$$

$$y'(x) = [-2A - 2Bx + B + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]e^{-2x}, \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -2A + B = -1.$$

$$-2(1) + B = -1 \Rightarrow B = 1.$$

Risultato finale:

$$\boxed{y(x) = (1 + x)e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{-2x}}$$

Esercizio 7

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'' - 2y' + y = e^x \cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Soluzione.
L'equazione è non omogenea a coefficienti costanti. Risolviamo prima l'omogenea:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (molteplicità 2)}.$$

Soluzione generale dell'omogenea:

$$y_o(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$$

Proviamo una soluzione particolare del tipo:

$$y_p(x) = e^x(A \cos x + B \sin x)$$

Calcoliamo le derivate:

$$y_p' = e^x[(A + B)\cos x + (B - A)\sin x]$$
$$y_p'' = e^x[(2B)\cos x + (-2A)\sin x]$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = e^x[(2B - 2(A + B) + A)\cos x + (-2A - 2(B - A) + B)\sin x]$$

$$= e^x[-A \cos x - B \sin x]$$

Uguagliamo al termine noto $e^x \cos x$:

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1, \quad -B = 0 \Rightarrow B = 0$$

Dunque:

$$y_p(x) = -e^x \cos x$$

Soluzione generale:

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2 x)e^x - e^x \cos x = e^x(C_1 + C_2 x - \cos x)$$

Condizioni iniziali:

$$y(0) = e^0(C_1 - \cos 0) = C_1 - 1 = 2 \Rightarrow C_1 = 3$$

$$y'(x) = \frac{d}{dx}[e^x(C_1 + C_2 x - \cos x)] = e^x(C_1 + C_2 x - \cos x) + e^x(C_2 + \sin x)$$

$$y'(0) = C_1 + C_2 - 1 = 0 \Rightarrow 3 + C_2 - 1 = 0 \Rightarrow C_2 = -2$$

Soluzione finale:

$$\boxed{y(x) = e^x(3 - 2x - \cos x)}$$

Esercizio 8

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'' + 9y = \sin(3x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Soluzione.
L'equazione è lineare non omogenea. Iniziamo con la soluzione dell'omogenea:

$$y'' + 9y = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i.$$

La soluzione generale dell'omogenea è:

$$y_o(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x).$$

Per trovare una particolare soluzione $y_p(x)$, notiamo che il termine non omogeneo è $\sin(3x)$, già presente in y_h. Quindi proviamo:

$$y_p(x) = x(C\cos(3x) + D\sin(3x)).$$

Deriviamo:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= C\cos(3x) + D\sin(3x) + x(-3C\sin(3x) + 3D\cos(3x)),\\
y_p''(x) &= -3C\sin(3x) + 3D\cos(3x) + (-3C\sin(3x) + 3D\cos(3x))\\
&\quad + x(-9C\cos(3x) - 9D\sin(3x))\\
&= -6C\sin(3x) + 6D\cos(3x) + x(-9C\cos(3x) - 9D\sin(3x)).
\end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$y_p'' + 9y_p = (-6C\sin(3x) + 6D\cos(3x) + x(-9C\cos(3x) - 9D\sin(3x))) + 9x(C\cos(3x) + D\sin(3x))$$

Le parti con x si cancellano, resta:

$$-6C\sin(3x) + 6D\cos(3x) = \sin(3x).$$

Confrontando i coefficienti:

$$-6C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{6}, \quad 6D = 0 \Rightarrow D = 0.$$

Quindi:

$$y_p(x) = -\frac{1}{6}x\cos(3x).$$

Soluzione generale:

$$y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x).$$

Deriviamo per applicare le condizioni iniziali:

$$y'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}x\sin(3x),$$

ma calcoliamo solo in $x = 0$:

$$y(0) = A = 0, y'(0) = 3B - \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow B = \frac{7}{18}.$$

Dunque, la soluzione è:

$$\boxed{y(x) = \frac{7}{18}\sin(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x)}.$$

Esercizio 9

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

Soluzione.
Si tratta di un'equazione differenziale lineare omogenea del terzo ordine a coefficienti costanti.
Equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Questa è la potenza di un binomio:

$$(\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (molteplicità 3).}$$

La soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$$

Calcoliamo le derivate

$$y'(x) = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)' e^x + \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right) e^x = (C_2 + 2C_3x + C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$$
$$= \left(C_1 + C_2(1 + x) + 2C_3x + C_3x^2\right) e^x$$

$$y''(x) = \left[2C_3 + C_2 + 2C_3x + C_2 + 2C_3x + C_1 + C_2x + C_3x^2\right] e^x$$

Ma calcoliamo solo i valori in $x = 0$, che è più semplice:

$$y(0) = C_1e^0 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y'(0) = (C_2 + C_1)\, e^0 = C_2 + 1 \Rightarrow C_2 = -2$$

$$y''(0) = 2C_3 + 2C_2 + C_1 \Rightarrow y''(0) = 2C_3 + 2(-2) + 1 = 2C_3 - 3$$
$$y''(0) = 0 \Rightarrow 2C_3 - 3 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{3}{2}$$

Soluzione finale:

$$\boxed{y(x) = \left(1 - 2x + \tfrac{3}{2}x^2\right) e^x}$$

Esercizio 10

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y''' + 2y'' + y' = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1.$$

Soluzione.
L'equazione è lineare non omogenea del terzo ordine. Risolviamo prima l'omogenea associata:

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Scriviamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1 \text{ (molteplicità 2).}$$

Soluzione generale dell'omogenea:

$$y_h(x) = A + Be^{-x} + Cxe^{-x}.$$

Cerchiamo una particolare soluzione. Il termine non omogeneo è e^{-x}, che è già presente nella soluzione omogenea con molteplicità 2. Quindi proponiamo:

$$y_p(x) = Dx^2e^{-x}.$$

Deriviamo:

$$\begin{aligned}
y_p' &= 2Dxe^{-x} - x^2e^{-x}, \\
y_p'' &= 2De^{-x} - 2Dxe^{-x} - 2Dxe^{-x} + Dx^2e^{-x} = D(2-4x+x^2)e^{-x}, \\
y_p''' &= -4De^{-x} + 4Dxe^{-x} + (-4De^{-x} + 2Dxe^{-x}) - Dx^2e^{-x} = D(-6+6x-x^2)e^{-x}.
\end{aligned}$$

Sostituendo:

$$y_p''' + 2y_p'' + y_p' = D(-6+6x-x^2+2(2-4x+x^2)+(2x-x^2))e^{-x}$$

$$= D(-6+6x-x^2+4-8x+2x^2+2x-x^2)e^{-x} = (-2+0x+0x^2)e^{-x} = -2De^{-x}.$$

Otteniamo quindi moltiplichiamo :

$$-2D = 1$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

Soluzione generale:

$$y(x) = A + Be^{-x} + Cxe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

Deriviamo:

$$y'(x) = -Be^{-x} + Ce^{-x} - Cxe^{-x} - xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x},$$

$$y''(x) = Be^{-x} - 2Ce^{-x} + Cxe^{-x} - e^{-x} + 2xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

Valutiamo in $x = 0$:

$$\begin{aligned}
y(0) &= A + B = 0 \Rightarrow A = -B, \\
y'(0) &= -B + C = 1, \\
y''(0) &= B - 2C - 1 = -1.
\end{aligned}$$

Sistema:

$$C = B+1, \quad B - 2(B+1) - 1 = -1 \Rightarrow B - 2B - 2 - 1 = -1 \Rightarrow -B - 3 = -1 \Rightarrow B = -2.$$

$$\Rightarrow A = 2, \quad C = -1.$$

Soluzione:

$$\boxed{y(x) = 2 - 2e^{-x} - xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}}.$$

Esercizio 11

Risolvere il problema ai bordi:

$$y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Soluzione.
Si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea. Risolviamo prima l'omogenea:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \text{ (molteplicità 2)}.$$

Soluzione generale dell'omogenea:

$$y_o(x) = Ae^{3x} + Bxe^{3x}.$$

Il termine non omogeneo è x^2e^{3x}, quindi del tipo $P_2(x)e^{3x}$ e sia e^{3x} che xe^{3x} sono soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Proviamo quindi una soluzione particolare del tipo:

$$y_p(x) = x^2(Cx^2 + Dx + E)e^{3x} = (Cx^4 + Dx^3 + Ex^2)e^{3x}.$$

Siccome calcolare le derivate di questa soluzione particolare è una rogna, proviamo se il metodo di variazione delle costanti è più immediato. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$y_c(x) = A(x)e^{3x} + B(x)xe^{3x},$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ risolvono

$$\begin{cases} A'(x)e^{3x} + B'(x)xe^{3x} = 0 \\ 3A'(x)e^{3x} + B'(x)(e^{3x} + 3xe^{3x}) = x^2e^{3x} \end{cases}.$$

Semplifichiamo quanto più possibile, ad esempio dividiamo per e^{3x} e svogliamo la parentesi

$$\begin{cases} A'(x) + B'(x)x = 0 \\ 3A'(x) + B'(x) + 3xB'(x) = x^2 \end{cases}$$

e combinando le equazioni otteniamo

$$\begin{cases} A'(x) = -B'(x)x \\ B'(x) = x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} A'(x) = -x^3 \\ B'(x) = x^2 \end{cases}.$$

Integrando $A'(x)$ e $B'(x)$ otteniamo immediatamente

$$A(x) = -\int x^3\,dx = -\frac{x^4}{4} + A$$

$$B(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + B.$$

La soluzione generale è quindi:

$$y(x) = \left(-\frac{x^4}{4} + A\right)e^{3x} + \left(\frac{x^3}{3} + B\right)xe^{3x} = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + \frac{x^4}{12}e^{3x}.$$

Condizioni al bordo:

$$y(0) = A = 1 \implies A = 1$$

$$y(1) = Ae^3 + Be^3 + \frac{1}{12}e^3 = 0 \implies B = -\frac{13}{12}.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$\boxed{y(x) = e^{3x} - \frac{13}{12}xe^{3x} + \frac{x^4}{12}e^{3x}}.$$

Esercizio 12

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Soluzione.

Si tratta di un'equazione differenziale omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti.

Equazione caratteristica:
$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$
Calcoliamo le radici complesse coniugate:
$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i.$$
Quindi, la soluzione generale è:
$$y(x) = e^{-x} \left(A\cos(2x) + B\sin(2x) \right).$$
Applichiamo le condizioni iniziali:
$$y(0) = A = 0.$$
Deriviamo:
$$y'(x) = -e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) + e^{-x}(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)).$$
Semplificando con $A = 0$:
$$y'(x) = -Be^{-x}\sin(2x) + 2Be^{-x}\cos(2x).$$
Calcolando in $x = 0$:
$$y'(0) = 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$
Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:
$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)}.$$

Esercizio 13

Risolvere il problema ai bordi:
$$y'' - y = \cosh(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

Soluzione.
È un'equazione differenziale lineare non omogenea. Risolviamo prima l'equazione omogenea:
$$y'' - y = 0.$$
Equazione caratteristica:
$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$
Soluzione generale dell'omogenea:
$$y_o(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$
Troviamo una particolare soluzione per il termine $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, già nella forma delle soluzioni omogenee. Quindi proviamo una particolare:
$$y_p(x) = Cxe^x + Dxe^{-x}.$$
Deriviamo:
$$y_p'(x) = Ce^x + Cxe^x + De^{-x} - Dxe^{-x},$$
$$y_p''(x) = 2Ce^x + Cxe^x - 2De^{-x} + Dxe^{-x}.$$
Sostituendo:
$$y_p'' - y_p = (2Ce^x + Cxe^x - 2De^{-x} + Dxe^{-x}) - (Cxe^x + Dxe^{-x}) = 2Ce^x - 2De^{-x}.$$

Vogliamo che sia uguale a $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, quindi:

$$2Ce^x - 2De^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Confrontiamo i coefficienti:

$$2C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{4}, \quad -2D = \frac{1}{2} \Rightarrow D = -\frac{1}{4}.$$

Dunque:

$$y_p(x) = \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x}.$$

Soluzione generale (ricordando che $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$:

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{4}x(e^x - e^{-x}) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}x\sinh(x).$$

Applichiamo le condizioni:

$$y(0) = A + B = 1,$$
$$y(1) = Ae + Be^{-1} + \frac{1}{4}(e - e^{-1}) = e.$$

Sostituendo la prima in seconda: $B = 1 - A$:

$$Ae + (1 - A)e^{-1} + \frac{1}{4}(e - e^{-1}) = e.$$

Sviluppiamo:

$$A(e - e^{-1}) + \frac{1}{4}(e - e^{-1}) = e - e^{-1}. \implies A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$
$$B = 1 - A = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}x(e^x - e^{-x})}.$$

Esercizio 14

Risolvere il problema ai bordi:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}, \quad y(0) = -2\ln(2), \quad y(1) = -e\ln(1 + e) - e^2\ln(1 + e).$$

Soluzione.
L'equazione è lineare non omogenea. Risolviamo prima l'omogenea associata:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

La soluzione generale dell'omogenea è:

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}.$$

Il termine non omogeneo è razionale in e^x, quindi possiamo usare il metodo della variazione delle costanti.

Cerchiamo una soluzione particolare nella forma:

$$y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{2x}.$$

Sfruttiamo le condizioni del metodo della variazione delle costanti:

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' e^{2x} = 0, \\ u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} = \frac{e^{2x}}{1+e^x}. \end{cases}$$

Sottraiamo:

$$\begin{cases} u_1' = -u_2' e^x, \\ u_2' = \frac{1}{1+e^x} \end{cases} \implies \begin{cases} u_1' = -\frac{e^x}{1+e^x}, \\ u_2' = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}.$$

Allora integrando, e ponendo $t = 1 + e^x \Rightarrow dt = e^x dx$, si ha:

$$u_1(x) = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx = -\int \frac{1}{t}\, dt = -\ln(1+e^x) + A.$$

$$u_2(x) = \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^x(1+e^x)} dx = \int \frac{1}{t(t-1)}\, dt$$

per svolgere il secondo integrale dobbiamo fare uso dei fratti semplici: ovvero dovviamo cercare C e D tali che:

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{C}{t} + \frac{D}{t-1}$$

ovvero

$$\frac{C}{t} + \frac{D}{t-1} = \frac{Ct - C + Dt}{t(t-1)} = \frac{1}{t(t-1)},$$

Da cui

$$\begin{cases} -C = 1 \\ C + D = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C = -1 \\ D = 1 \end{cases}.$$

Cio porta al seguente integrale

$$u_2(x) = \int \frac{1}{t(t-1)}\, dt = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right) dt = -\ln(1+e^x) + \ln(1+e^x-1) = -\ln(1+e^x) + x + B.$$

Soluzione generale:

$$y(x) = \left(-\ln(1+e^x) + A\right) e^x + \left(-\ln(1+e^x) + x + B\right) e^{2x} = Ae^x + Be^{2x} - \ln(1+e^x)\left(e^x + e^{2x}\right) + xe^{2x}.$$

Condizioni al bordo:

$$y(0) = -\ln(2) + A - \ln(2) + B = -2\ln(2) \implies A + B = 0$$

$$y(1) = -e\ln(1+e) + eA - e^2\ln(1+e) + e^2(B+1) = -e\ln(1+e) - e^2\ln(1+e) \implies eA + e^2(B+1) = 0$$

Quindi

$$\begin{cases} B = -A \\ A(1-e) + e = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = \frac{e}{1-e} \\ A = -\frac{e}{1-e}. \end{cases}$$

Soluzione finale:

$$\boxed{y(x) = -\frac{e^x + 1}{1-e} + \frac{e^2 x + 1}{1-e} - \ln(1+e^x)\left(e^x + e^{2x}\right) + xe^{2x}}.$$

Esercizio 15

Risolvere il problema di Cauchy:

$$y''' - y'' - y' + y = e^x \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1.$$

Soluzione.

L'equazione è lineare non omogenea del terzo ordine. Risolviamo prima l'equazione omogenea:

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Raccogliamo:

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Radici:

$$\lambda = 1 \text{ (molteplicità 2)}, \quad \lambda = -1.$$

Soluzione generale dell'omogenea:

$$y_o(x) = Ae^x + Bxe^x + Ce^{-x}.$$

Il termine non omogeneo è $e^x \sin x$, quindi proponiamo la particolare:

$$y_p(x) = e^x(P\cos x + Q\sin x).$$

Deriviamo:

$$\begin{aligned}
y_p' &= e^x(P\cos x + Q\sin x) + e^x(-P\sin x + Q\cos x) = e^x\left[(P+Q)\cos x + (Q-P)\sin x\right], \\
y_p'' &= e^x\left[(P+Q)\cos x + (Q-P)\sin x\right] + e^x\left[-(P+Q)\sin x + (Q-P)\cos x\right] \\
&= e^x\left[2Q\cos x - 2P\sin x\right], \\
y_p''' &= e^x\left[2Q\cos x - 2P\sin x\right] + e^x\left[-2Q\sin x - 2P\cos x\right] \\
&= e^x\left[(2Q-2P)\cos x + (-2P-2Q)\sin x\right],
\end{aligned}$$

Sostituendo nella equazione completa, eguagliamo i coefficienti con il termine noto $e^x \sin x$. Si trova che:

$$\begin{cases} 2Q - 2P - (2Q) - (P+Q) + P = 0 \\ -2P - 2Q - (-2P) - (Q-P) + Q = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} -2P - Q = 0 \\ -2Q + P = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} Q = -2/5 \\ P = 1/5 \end{cases}.$$

La soluzione particolare è:

$$y_p(x) = e^x\left(\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x\right).$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + Ce^{-x} + e^x\left(\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x\right).$$

Le derivate prima e seconda sono:

$$y'(x) = (A+B)e^x + Bxe^x - Ce^{-x} + e^x\left(-\frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x\right)$$

$$y''(x) = (A+2B)e^x + Bxe^x + Ce^{-x} + e^x\left(-\frac{4}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x\right)$$

Da cui

$$\begin{aligned}
y(0) &= Ae^0 + B\cdot 0\cdot e^0 + Ce^0 + e^0\left(\frac{1}{5}\cos 0 - \frac{2}{5}\sin 0\right) = A + C + \frac{1}{5} = 0 \\
y'(0) &= (A+B)e^0 + B\cdot 0\cdot e^0 - Ce^0 + e^0\left(-\frac{1}{5}\cos 0 - \frac{3}{5}\sin 0\right) = A + B - C - \frac{1}{5} = 1 \\
y''(0) &= (A+2B)e^0 + B\cdot 0\cdot e^0 + Ce^0 + e^0\left(-\frac{4}{5}\cos 0 - \frac{2}{5}\sin 0\right) = A + 2B + C - \frac{4}{5} = -1.
\end{aligned}$$

Risolviamo il sistema in A, B e C:

$$\begin{cases} A + C + \frac{1}{5} = 0 \\ A + B - C - \frac{1}{5} = 1 \\ A + 2B + C - \frac{4}{5} = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} A + C = -\frac{1}{5} \\ A - C = \frac{6}{5} \\ B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{7}{12} \\ B = 0 \end{cases}$$

Soluzione finale:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{7}{12}e^{-x} + e^x\left(\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x\right)}.$$