

Analisi II
Barbato Rosa
a.a. 2024-2025

Author
Alessio Romano

November 13, 2025

Contents

1	Successioni e Serie di Funzioni	3
1.1	Successioni di funzioni	3
1.2	Serie di funzioni	4

1 Successioni e Serie di Funzioni

1.1 Successioni di funzioni

Definition 1.1 (Successione di funzioni). Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di \mathbb{R} . Una *successione di funzioni* è un'applicazione matematica tale che:

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} : n \in \mathbb{N} \rightarrow F_n(x)$$

Dove $f_n(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$

Prendiamo per esempio la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$, potremmo chiederci intuitivamente che cosa succede alla successione di funzioni quando $n \rightarrow +\infty$. Per farlo fissiamo x , Si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Abbiamo introdotto intuitivamente il concetto di **convergenza puntuale**. Definiamo ora la convergenza puntuale rigorosamente

Definition 1.2 (Convergenza puntuale). Data una successione di funzioni $f_n(x)$ tale che $X \rightarrow \mathbb{R}$, tale successione *converge puntualmente* ad $f(x)$, in X se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$

Ossia

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_{\epsilon, x} : \forall n > \nu, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Insomma, stiamo dicendo che data una successione di funzioni, se per ogni $x \in X, \epsilon > 0$ esiste un certo indice della successione ν dipendente dal punto x e il valore ϵ , tale che preso un valore n della successione più grande dell'indice ν , la distanza tra la funzione limite $f(x)$ e la successione di funzioni è sempre minore di ϵ .

Definition 1.3 (Convergenza Uniforme). f_n *converge uniformemente* a $f(x)$ in x se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_{\epsilon} : \forall n > \nu, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X$$

Dunque per convergenza uniforme si intende che dopo un certo indice ν , dipendente unicamente da ϵ , la distanza tra la successione di funzioni e la funzione limite è minore di ϵ , non più in un unico punto x_0 , ma su tutto l'intervallo. Si noti che l'uniforme convergenza implica la convergenza puntuale, ma l'inverso non è sempre valido

Theorem 1.4 (Criterio di Cauchy convergenza uniforme). $f_n(x) \rightarrow f$ *uniformemente* in X se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_{\epsilon} : \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

In altre parole, una successione di funzioni converge uniformemente se e solo se il limite per $n \rightarrow \infty$ del suo estremo superiore tende a 0

Theorem 1.5 (Continuità del limite). Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni. Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente in X e f_n è continua $\Rightarrow f$ è continua in X

Theorem 1.6 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata). Sia f_n una successione di funzione continua in $[a, b]$, con $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $[a, b]$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Theorem 1.7 (Criterio di Cauchy uniforme). $f_n \rightarrow f$ *uniformemente* in X se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu_{\epsilon} : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \quad \forall m, n > \nu, \forall x \in X$$

Theorem 1.8. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni (derivabile con derivate continue). Se*

- $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0)$ converge
- f'_n converge uniformemente in $[a, b]$ ad una funzione g

Allora f_n converge uniformemente ad una funzione f con derivata continua in $[a, b]$ e

$$\lim_n f'_n(x) = f'(x) = (\lim_n f_n(x))'$$

1.2 Serie di funzioni