CONFRONTO LOCALE TRA FUNZIONI

Assegnati $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X, analizzeremo alcuni comportamenti di coppie di funzioni reali, confrontando i valori che le funzioni assumono nei punti di X più vicini a x_0. Pertanto ci riferiamo alla classe funzionale che denotiamo con $F(X;\ x_0)$ costituita falle funzioni f tali che esiste un intorno I_f di x_0 tale che $I_f \cap X - \{x_0\} = domf$.

Precisiamo quanto segue:

- sia $f \in F(X;\ x_0)$ si dice che f è identicamente nulla intorno a x_0 se esiste un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f$ tale che $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) = 0$,
- sia $f \in F(X;\ x_0)$ si dice che f è mai nulla intorno a x_0 se esiste un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f$ tale che $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) \neq 0$,
- siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ si dice che f e g sono uguali intorno a x_0 se esiste un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f \cap I_g$ tale che $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) = g(x)$.

RELAZIONE O-PICCOLO

Siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ si dice che f e $o(g)_{x \to x_0}$, e si scrive $f = o(g)$, se esistono una funzione $\sigma \in F(X;\ x_0)$ ed un intorno I_0 di x_0 con $I_0 \subseteq I_f \cap I_g \cap I_\sigma$: $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad f(x) = \sigma(x)g(x)$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} \sigma(x) = 0$.

Siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ con g mai nullo intorno a x_0, allora $f = o(g) \leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Dire allora che $f = o(g)$ per x tendente a x_0 significa dire che fissato $\varepsilon > 0 \quad \exists I_\varepsilon$ di x_0 con $I_\varepsilon \subseteq I_0$: $\forall x \in I_0 \cap X - \{x_0\} \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \varepsilon$, quindi $|f(x)| < |g(x)|\varepsilon$. Conseguentemente quando la variabile x è vicina a x_0, $|g(x)|$ se non nullo è molto più piccolo di $|f(x)|$. Per questo motivo $f \ll g$.

N.B. la scrittura $f = o(g)$ è stata introdotta da Landau e viene usata di solito o quando f e g sono entrambe infinitesimi nel punto x_0, nel caso in cui si dice che f è infinitesima di ordine superiore rispetto a g, o quando f e g sono entrambe infinite in x_0, nel caso in cui si dice che g è infinito di ordine superiore rispetto a f.

ASINTOTICITÀ

Si dice che f è asintotica in g per x tendente a x_0, $f - g = o(g)$ e si scrive $f \ \widetilde{x_0}\ g$.

Siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ con g mai nullo intorno a x_0, allora $f \ \widetilde{x_0}\ g \leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

ASINTOTI NOTEVOLI

Sulla base che: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \sin x \ \widetilde{x_0}\ x$

Definiamo:

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \tan x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \quad \arcsin x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \quad \arctan x\ \widetilde{x_0}\ x$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\ 1-\cos x\ \widetilde{x_0}\frac{1}{2}x^2$	$lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad a^x-1\widetilde{x_0}\ x\ln a$	$\lim_{x\to 0}\log_a\frac{1+x}{x}=\frac{1}{\ln a} \quad \log_a 1+x\ \widetilde{x_0}\frac{x}{\ln a}$
$lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\ \alpha \quad (1+x)^\alpha-1\ \widetilde{x_0}\ \alpha\ x$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=1 \quad \sinh x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}=1 \quad \tanh x\ \widetilde{x_0}\ x$
$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsinh}\, x}{x}=1 \quad \text{arcsinh}\, x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arctanh}\, x}{x}=1 \quad \text{arctanh}\, x\ \widetilde{x_0}\ x$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2}=-\frac{1}{2}\ 1-\cosh x\ \widetilde{x_0}-\frac{1}{2}x^2$

PROPRIETÀ ASINTOTI

Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ si ha quanto segue:

- $o(g)+o(g)=o(g)$;
- $o(\lambda g)=o(g)$;
- $o(f)o(g)=o(fg)$;
- $o\big(o(g)\big)=o(g)$;
- $f\ \widetilde{x_0}\ g \qquad o(f)=o(g)$

Presupposto ciò, si ha:

- Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ con $f\ \widetilde{x_0}\ g$, allora $|f|\ \widetilde{x_0}\ |g|$
- Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ non nulle intorno a x_0 con $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}-\{1\}$ se $f\ \widetilde{x_0}\ g$, allora $log|f|\ \widetilde{x_0}\ log|g|$
- Siano $f,g\in\ F(X;\ x_0)$ se $f_1\ \widetilde{x_0}\ \lambda_1 g$ ed $f_2\ \widetilde{x_0}\ \lambda_2 g$ con λ_1 e $\lambda_2\ \in\mathbb{R}$: $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$ allora $f_1+f_2\ \widetilde{x_0}\ (\lambda_1+\lambda_2)g$
- Siano $f,f_1,g,g_1\in\ F(X;\ x_0)$ con $f\ \widetilde{x_0}\ f_1$ e $g\ \widetilde{x_0}\ g_1$, allora:
  i) $f^n\ \widetilde{x_0}\ f_1^n\ \ \forall n\in\mathbb{N}\quad f^m\ \widetilde{x_0}\ f_1^m\ \ \forall m\in\mathbb{Q}: m<0$ se f,f_1 sono non nulle in x_0
  ii) $f^\alpha\ \widetilde{x_0}\ f_1^\alpha\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}: f,f_1>0$ intorno a x_0
  iii) g,g_1 sono mai nulle intorno a $x_0 \quad \frac{f}{g}\widetilde{x_0}\frac{f_1}{g_1}$

OSSERVAZIONE: sia $f\in\ F(X;\ x_0)$ infinitesima in x_0, ricordando le asintoticità notevoli risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1 \quad \sin f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$$

Da cui:

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1 \quad \tan f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin f(x)}{f(x)}=1 \quad \arcsin f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1 \quad \arctan f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{f(x)^2}=\frac{1}{2}\ 1-\cos f(x)\ \widetilde{x_0}\frac{1}{2}f(x)^2$	$\lim_{x\to 0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a \quad a^{f(x)}-1\ \widetilde{x_0}f(x)\ln a$	$\lim_{x\to 0}\log_a\frac{1+f(x)}{f(x)}=\frac{1}{\ln a} \quad \log_a 1+f(x)\ \widetilde{x_0}\frac{f(x)}{\ln a}$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(x))^\alpha-1}{f(x)}=\ \alpha \quad (1+f(x))^\alpha-1\ \widetilde{x_0}\ \alpha f(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh f(x)}{f(x)}=1 \quad \sinh f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh f(x)}{f(x)}=1 \quad \tanh f(x)\ \widetilde{x_0}\ f(x)$
$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsinh}\, f(x)}{f(x)}=1 \quad \text{arcsinh}\, x\ \widetilde{x_0}\ f(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arctanh}\, f(x)}{f(x)}=1 \quad \text{arctanh}\, f(x)\ \widetilde{x_0}f(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh f(x)}{f(x)^2}=-\frac{1}{2}\quad 1-\cosh f(x)\ \widetilde{x_0}-\frac{1}{2}f(x)^2$

ASINTOTICITÀ NELLO STUDIO DI FUNZIONI

Siano $f, g \in F(X;\ x_0)$ con $f \widetilde{x_0}\ g, f$ e regolare in x_0 se e solo se lo è g e risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$ e $\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = \lim_{x \to x_0} a^{g(x)}$.

CALCOLO DIFFERENZIALE

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X, $\forall x \in X$ le differenze $x - x_0, f(x) - f(x_0)$ si dicono rispettivamente l'*incremento della variabile indipendente* e *l'incremento di f relativo al passaggio dal punto x_0 al punto x*.

$\forall x \in X - \{x_0\}$ il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ si chiama *rapporto incremental*e *di f relativo al passaggio dal punto x_0 al punto x*. Allora, la funzione così definita $\forall x \in X - \{x_0\} \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dicesi *rapporto incrementale di f relativo al punto x_0*.

DEFINIZIONE DERIVATA: Si dice che f è dotata di derivata nel punto x_0 se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tale limite dicesi la derivata prima o di ordine 1 di f nel punto e si denota con uno dei seguenti simboli: $f'(x_0), f^{(1)}(x_0), Df(x_0), [D^1 f(x)]_{x=x_0}$.

N.B. se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ si dice che f ha derivata infinita nel punto x_0, mentre se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ si dice che f è derivabile nel punto x_0.

DERIVATA DESTRA E SINISTRA

Se x_0 è di accumulazione a sinistra per X, si dice che f è dotata di derivata sinistra nel punto x_0 se esiste il limite: $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, mentre si dice che f è dotata di derivata destra nel punto x_0 se esiste il limite: $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Le derivate si denotano rispettivamente: f'_- e f'_+

Naturalmente se x_0 è di accumulazione sia a sinistra che a destra per X, allora, si dice che f è dotata di derivata nel punto x_0 se e soltanto se la derivata sinistra e la derivata destra nel punto x_0 coincidono.

PROPRIETÀ DERIVATE

Se f è derivabile in x_0 allora essa è continua in x_0.

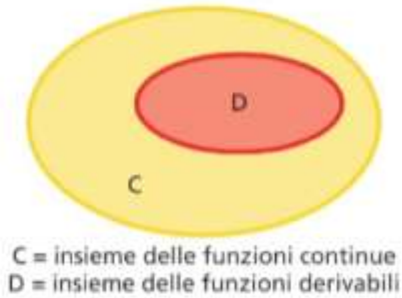
DIMOSTRAZIONE:

I. Tenendo conto che x_0 è di accumulazione per X per dimostrare che f è continua occorre mettere in evidenza l'uguaglianza: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

II. Tramite calcoli algebrici si ottiene: $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} [\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) + f(x_0)]$

III. Abbiamo quindi dimostrato l'ipotesi.

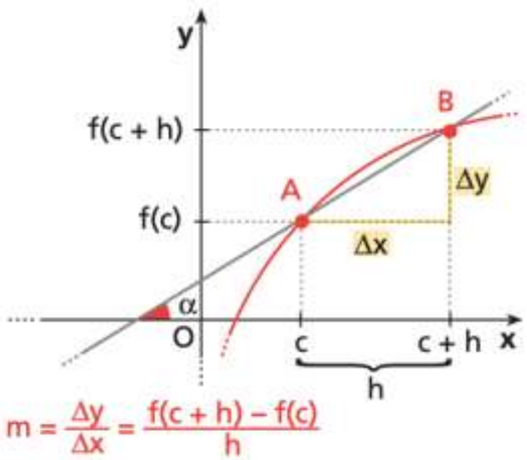
OSSERVAZIONE: Una funzione continua in un punto non è detto che sia ivi derivabile.



ALTRA DEFINIZIONE DI DERIVATA

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X, poniamo $H(x_0) = \{h \in \mathbb{R}\colon x_0 + h \in X\}$ ed osserviamo che $0 \in H(x_0)$. Se e soltanto se 0 è di accumulazione per $H(x_0)$ allora anche x_0 è di accumulazione per X. A questo punto, siano $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X, $\forall h \in H(x_0)$ la differenza $f(x_0 + h) - f(x_0)$ è *l'incremento di f relativo al passaggio dal punto x_0 al punto $x_0 + h$*. Inoltre, $\forall h \in H(x_0) - \{0\}$ il rapporto $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ dicesi il *rapporto incrementale di f relativo al passaggio dal punto x_0 al punto $x_0 + h$. Evidentemente f è dotato di derivata se esiste* $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA



EQUAZIONE RETTA

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{h} \to$$

$$y - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)\frac{x - x_0}{h} \to$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

FUNZIONE DERIVATA E ERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, X' l'insieme costituito dai punti di X in cui f è derivabile. Se $X' \neq \emptyset$, la funzione $x \in X' \to f'(x)$ dicesi la derivata prima o di ordine 1 di f e si denota con i seguenti simboli: $f', f^{(1)}, Df, D^1 f$. L'insieme X' prende il nome di insieme di derivabilità della funzione.

Sia ora $x_0 \in X'$ di accumulazione per X' se la funzione f' è dotata di derivata nel suddetto punto, si dice allora che f' è dotata di derivata seconda e si denota con: $f'', f^{(2)}, D^2 f$. Denotiamo con X'' l'insieme costituito dai punti di X in cui f è derivabile due volte. Se $X'' \neq \emptyset$, la funzione $x \in X'' \to f''(x)$ dicesi la derivata seconda o di ordine 2 di f.

Così procedendo si possono definire le n-derivate di f.

REGOLE DI DERIVAZIONE

Siano f e g funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ e derivabili in $x_0 \in X$, si ha quanto segue:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f$ è derivabile in x_0 e risulta $(\lambda f')(x_0) = \lambda f'(x_0)$;
- $f + g$ è derivabile in x_0 e risulta $f'(x_0) + g'(x_0) = (f+g)'(x_0)$;
- $f * g$ è derivabile in x_0 e risulta $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = (f * g)'(x_0)$;
- Se $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$ la funzione $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e risulta $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x)]^2}$;
- $\frac{k}{g}$ è derivabile in x_0 e risulta $\left(\frac{k}{g}\right)'(x_0) = -\frac{kg(x_0)}{[g(x)]^2}$.

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\forall x \in X \quad f(x) \in Y$, nelle ipotesi che

a. f derivabile nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X;
b. $f(x_0)$ di accumulazione per Y e g derivabile in x_0;

la funzione $g \circ f$ è derivabile in x_0 e risulta: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$.

DIMOSTRAZIONE

Si distinguono due casi: $x \neq x_0$ e $f(x) \neq f(x_0)$ oppure $x \neq x_0$ e $f(x) = f(x_0)$.

Nel primo caso si procede algebricamente:

I. $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0)}{x - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

II. $\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$.

Nel secondo caso, invece, si procede in questo modo:

I. Consideriamo la funzione $\sigma: y \in Y \to \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & se\ y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & se\ y = f(x_0) \end{cases}$. Poiché per la condizione **(b.)** la funzione g è derivabile in x_0, si ha che la funzione σ è continua in $f(x_0)$.

II. $\lim_{x \to x_0} \sigma\big(f(x)\big) = \lim_{x \to x_0} \sigma\big(f(x_0)\big) = g'(f(x_0))$;

III. $\lim_{x \to x_0} \sigma\big(f(x)\big) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0)$.

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA

Siano f una funzione reale definita e strettamente *crescente* in X, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, si ha quanto segue:

- f derivabile nel punto x_0 ed $f'(x_0\ ) \neq 0$ se e soltanto se $\leftrightarrow$ f^{-1} è derivabile nel punto x_0 e si ha che $f^{-1}(x_0\ ) = \frac{1}{f\prime(x_0\ )}$
- f derivabile nel punto x_0 ed $f'(x_0\ ) = 0$ se e soltanto se $\leftrightarrow$ $f^{-1}(y_0) = \pm\infty$
- f è continua nel punto x_0 ed $f'(x_0\ ) = \pm\infty$ se e soltanto se $\leftrightarrow$ $f^{-1}(y_0) = 0$

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Nella definizione di derivata, spesso, accade che il simbolo "h" sia sostituito col simbolo "Δx". In questo caso si pone $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in X$ di accumulazione per X, la funzione della variabile Δx data dal prodotto $f'(x_0)\Delta x$ è detta *differenziale primo* o di ordine 1 della funzione f relativo a punto e si denota con uno dei seguenti simboli: $df(x_0), d'f(x_0)$.

Se f è derivabile n volte in x_0 allora la funzione della variabile Δx così definita $f^n(x_0)$ prende il nome di n-esimo differenziale o di ordine n, e si denota col simbolo: $d^n f(x_0)$.

SOSTITUZIONE DEL DIFFERENZIALE

Osserviamo quanto segue $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f^{'}(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \frac{-f^{'}(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0\ ) - f'(x_0\ ) = 0$. Per la definizione di limite abbiamo che $\left|\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f^{'}(x_0)\Delta x}{\Delta x}\right| < \varepsilon$ e segue $\left|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x\right| < \varepsilon|\Delta x|$.

Quanto rilevato suggerisce che se $|\Delta x|$ è sufficientemente piccolo, l'errore che si commette sostituendo $f(x_0 + \Delta x)$ con $f'(x_0)\Delta x$ è trascurabile.

FORMULARIO: tavola delle derivate fondamentali

$$y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x)$$

FUNZIONE COSTANTE: $y = c \Rightarrow y' = 0$

FUNZIONE POTENZA: $y = x^n \text{ con } n \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = nx^{n-1}$

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

FUNZIONE VALORE ASSOLUTO: $y = |x| \Rightarrow y' = \frac{x}{|x|}$

FUNZIONE LOGARITMICA: $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\log_a e$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

FUNZIONE ESPONENZIALE: $y = a^x \Rightarrow y = a^x \ln a$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE:

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

FUNZIONI IPERBOLICHE:

$$y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$$

$$y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$$

$$y = \tanh x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$y = \sinh^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \cosh^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \tanh^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}$$