

Lezione 16

Fisica I – Ingegneria Automazione e Informatica
Università di Napoli "Federico II"
prof. Nicola R. Napolitano

Riepilogo della lezione precedente

- 1) Momento della Forza
- 2) Equilibrio corpi rigidi
- 3) Momento angolare e sua conservazione

In questa lezione

- 1) Giroscopio
- 2) Rotolamento su piano inclinato
- 3) Leve
- 4) Statica dei corpi rigidi

Energia Cinetica Rotazionale

Un corpo ruotante con velocità angolare ω possiede un'energia cinetica rotazionale. Ogni particella del corpo ha energia cinetica $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, dove $v_i = \omega r_{\perp i}$. L'energia cinetica rotazionale è la somma di tali energie:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove I è noto come *momento d'inerzia*.

Notare l'analogia fra energie cinematiche associate al moto lineare:

$K = \frac{1}{2}mv^2$, e associate al moto rotazionale, $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$.

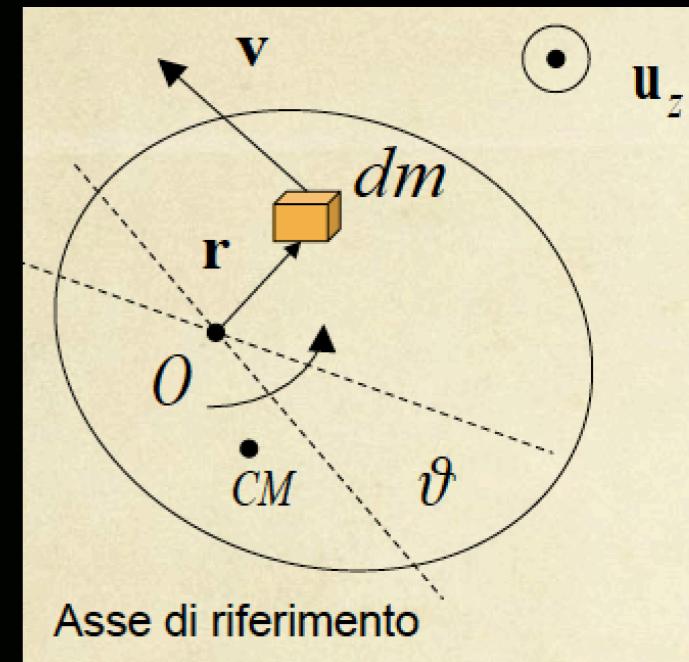
L'energia cinetica rotazionale non è un nuovo tipo di energia! E' energia cinetica e si misura nelle stesse unità, joule (J)

Momento d'Inerzia

Definizione del momento d'inerzia: $I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$ (Unità SI: $\text{kg}\cdot\text{m}^2$).

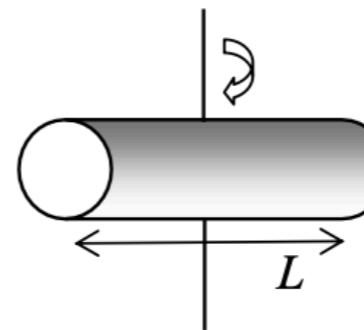
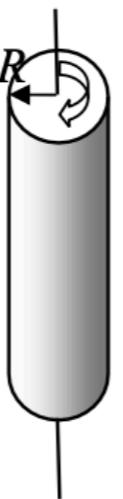
- Il momento d'inerzia *dipende dall'asse di rotazione!* (ma può essere calcolato rispetto a qualunque origine, purché sull'asse di rotazione).
- Si può calcolare il momento d'inerzia di un corpo dividendolo in piccoli elementi di volume, ognuno di massa Δm_i . Nel limite continuo:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 = \int r_{\perp}^2 dm.$$



- Come per il centro di massa, tale integrale è in generale complicato, salvo per corpi di densità ρ costante (in tal caso $dm = \rho dV$ e ci si riduce a un integrale di volume), oggetti di forma semplice, asse di rotazione simmetrico.

Esempio: cilindro retto di massa M , lungo L con base circolare di raggio $R < L$.

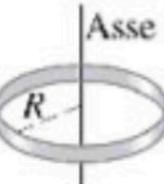
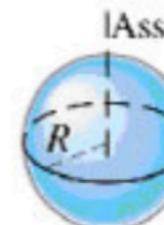
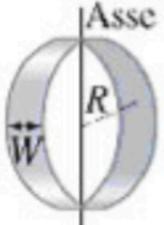
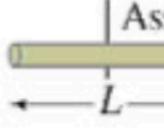
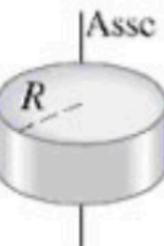
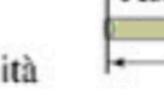
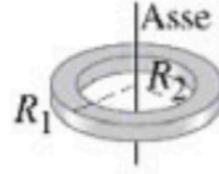
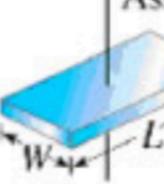


$$\text{Caso a)} \quad I_a = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\text{Caso b)} \quad I_b = \frac{1}{12}ML^2$$

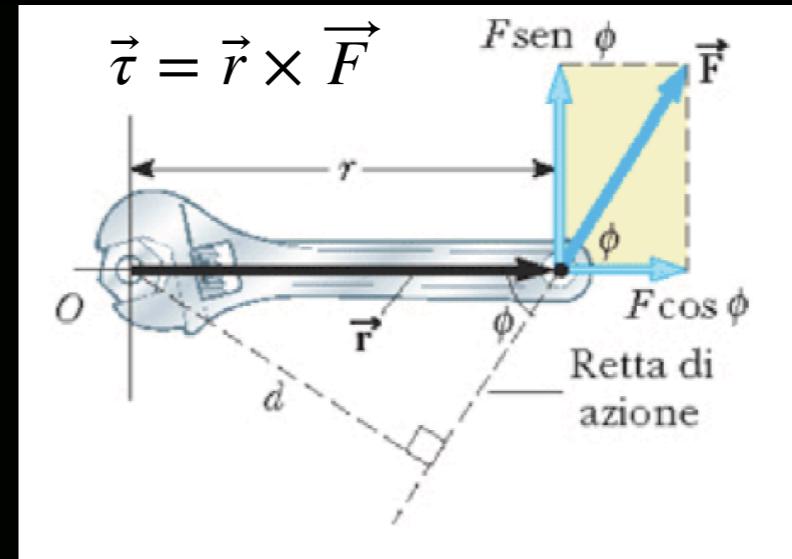
Poiché la distanza delle m_i dall'asse di rotazione è in media minore nel caso a) rispetto al caso b), risulta $I_a < I_b$.

Esempi di momenti di inerzia:

Passante per il centro		MR^2	Passante per il centro		$\frac{2}{5}MR^2$
Passante per il diametro centrale		$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}MW^2$	Passante per il centro		$\frac{1}{12}ML^2$
Passante per il centro		$\frac{1}{2}MR^2$	Passante per un'estremità		$\frac{1}{3}ML^2$
Passante per il centro		$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	Passante per il centro		$\frac{1}{12}M(L^2 + W^2)$

Momento della forza

- Il momento della forza ci dà la "tendenza" di una forza a far ruotare un corpo (attorno ad un certo asse).
- Solo la componente della forza ortogonale a \vec{r} produce momento, ovvero tende a far ruotare un corpo



- La componente lungo \vec{r} della forza non produce momento, ovvero non tende a far ruotare un corpo
- Il momento è *positivo* se la rotazione indotta è *antioraria*

Unità SI del momento: N·m. Attenzione: benché il momento sia una forza moltiplicata per una distanza, è molto diverso da lavoro ed energia! Il momento non si indica mai in Joule.

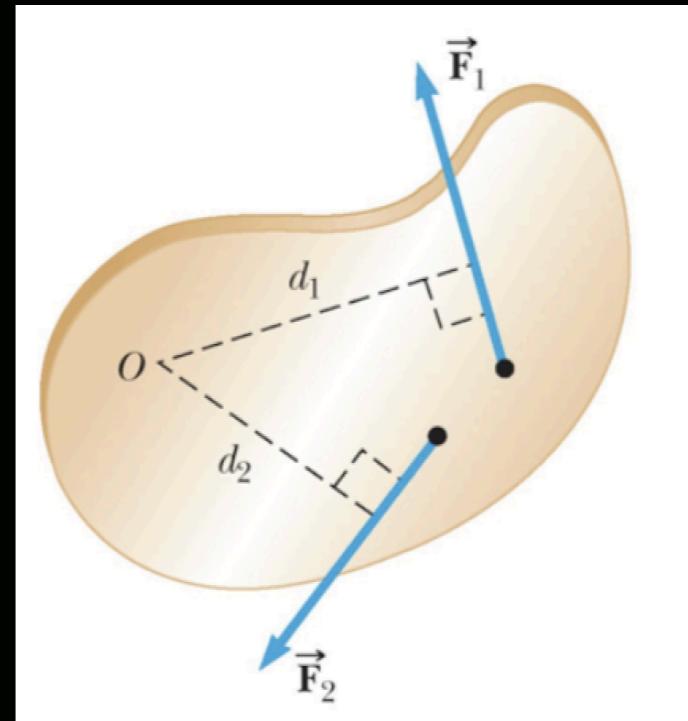
Equilibrio di un corpo rigido

Il momento totale (o risultante) è la *somma vettoriale* dei momenti.

- Nell'esempio accanto, la forza \vec{F}_1 tenderà a causare una rotazione antioraria del corpo; la forza \vec{F}_2 tenderà a causare una rotazione oraria del corpo.

Come si compongono i momenti ? In altre parole dov'e' diretto il vettore τ ?

- $\tau = |\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2| = (d_1 F_1 - d_2 F_2)$; il vettore $\vec{\tau}$ è ortogonale al piano.



Condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Momento Angolare

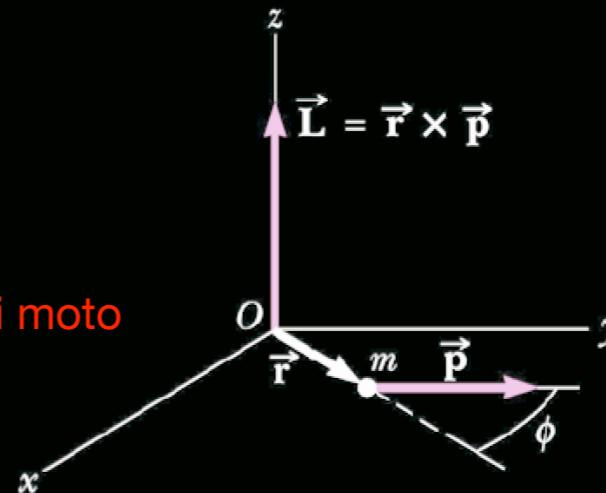
Se il momento è l'analogo rotazionale della forza, qual è l'analogo rotazionale della quantità di moto?

Momento angolare: è un vettore, di solito indicato con \vec{L} , definito come

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Il momento angolare è l'analogo rotazionale della quantità di moto

dove $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto di una particella.



- E' noto anche come *momento della quantità di moto*
- Il suo valore dipende dalla scelta dell'origine
- E' nullo se $\vec{r} \parallel \vec{p}$, ha modulo $L = rp \sin \phi$, dove ϕ è l'angolo fra \vec{r} e \vec{p} .

Equazioni del Momento Angolare

Dalla II legge di Newton, scelta un'origine, troviamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Quindi, $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$, analogo rotazionale della II Legge di Newton.

- Non è una nuova legge fondamentale della dinamica! E' la II legge di Newton, specializzata al caso del moto rotatorio
- \vec{L} e $\vec{\tau}$ sono calcolati rispetto agli stessi assi e alla stessa origine fissa; tuttavia la legge vale qualunque siano gli assi e l'origine scelta
- Valido per sistemi di riferimento inerziali.

Momento Angolare di un sistema di particelle

Il momento angolare di un sistema di particelle è la somma vettoriale dei momenti angolari di ogni particella:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

Differenziando rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{tot}$$

dove $\vec{\tau}_{tot}$ è il momento totale delle forze. Analogamente al caso della quantità di moto, solo il momento delle forze esterne è responsabile per la variazione del momento angolare!

Per un corpo rigido, il momento angolare totale diventa un integrale.

Momento Angolare di un corpo rigido

Consideriamo un caso semplice: disco ruotante con velocità angolare ω

$$L = \sum L_i = \sum_i m_i v_i r_{\perp i} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \omega \equiv I\omega$$

dove I è il momento d'inerzia del disco (attorno all'asse di rotazione). Si può dimostrare che tale relazione ha validità generale e può essere scritta sotto forma vettoriale: $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Questa è l'analogia rotazionale della relazione fra velocità e quantità di moto.

La relazione fra momento e accelerazione angolare:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

valida per asse di rotazione fisso, è l'analogia rotazionale di $\vec{F} = m\vec{a}$.

Conservazione del MA

Il momento angolare di un corpo, o di un sistema di particelle, è *conservato* se la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla:

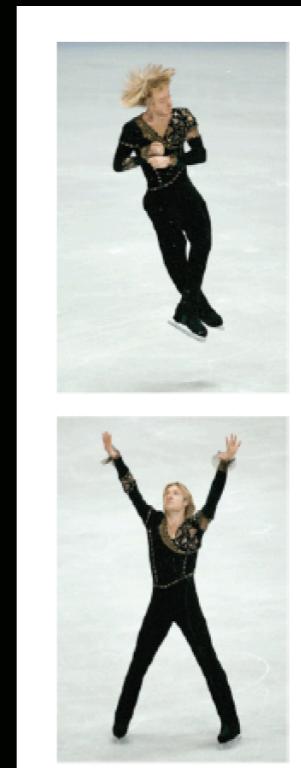
$$\vec{L} = \text{costante} \implies \vec{L}_f = \vec{L}_i$$

durante un processo in cui non agiscano momenti esterni.

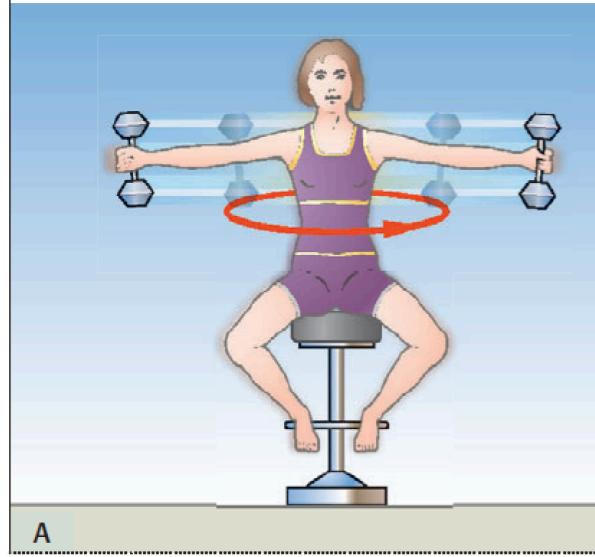
Ciò rimane vero anche se la massa si ridistribuisce e il momento d'inerzia cambia durante il processo. Se l'asse di rotazione rimane fisso, vale la relazione:

$$L = I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

dove $I_{i,f}$ sono i momenti d'inerzia iniziale e finale, $\omega_{i,f}$ le velocità angolari iniziale e finale. Se $I_f > I_i$, allora $\omega_f < \omega_i$ e viceversa.

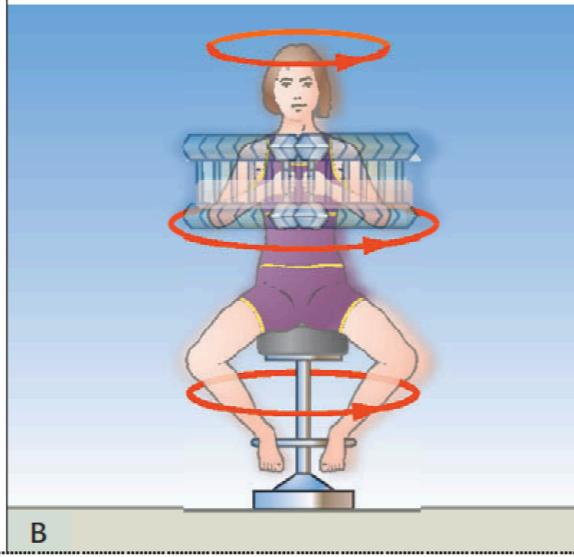


► Una ragazza che regge due manubri da palestra con le braccia aperte siede su uno sgabello, girevole attorno a un asse, e ruota con una certa velocità angolare.



A

► Se stringe le braccia, il suo momento angolare rmv si conserva (se gli attriti sono trascurabili). Visto che r diminuisce, la velocità v delle varie parti aumenta.



B

In questo esempio, il momento angolare si conserva perché il momento totale delle forze esterne rispetto a qualsiasi punto è nullo. In assenza di attriti, una volta messo in rotazione lo sgabello, le uniche forze esterne che agiscono sulla ragazza sono la sua forza-peso e la reazione vincolare dello sgabello, che si annullano.

$$L = \sum L_i = \sum_i m_i v_i r_{\perp i} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \omega \equiv I\omega$$

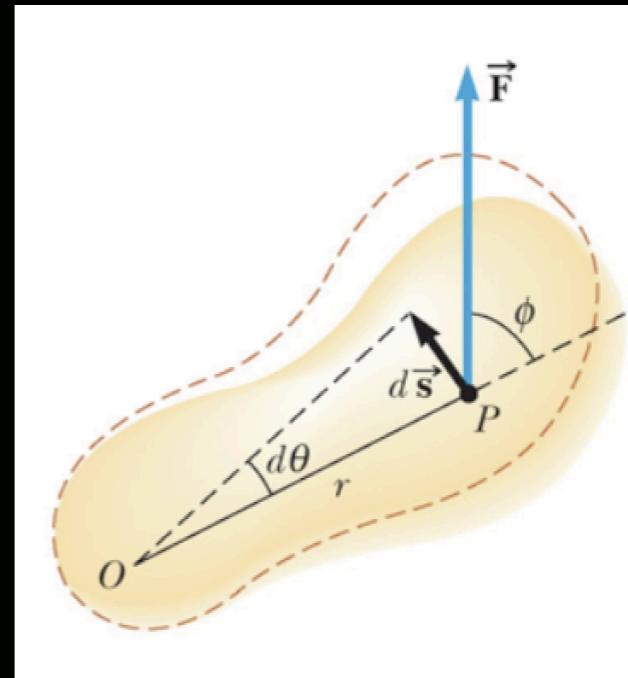
Lavoro del moto rotazionale

Qual è il lavoro (W) fatto da una forza su di un corpo che sta ruotando?

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi)(rd\theta) = \tau d\theta$$

$$\sin \phi = \cos(90^\circ - \phi)$$

La componente radiale della forza, $F \cos \phi$, non fa lavoro perché ortogonale allo spostamento



Teorema dell'energia cinetica, versione "rotazionale":

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega = \Delta K_R , \quad K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

In presenza di traslazioni e rotazioni:
$$W = \Delta K + \Delta K_R .$$

Potenza del moto rotazionale

Il lavoro fatto per unità di tempo è detto *potenza*:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega.$$

Questo è l'analogo di $P = Fv$ per il moto rotatorio.

Riassunto del moto rotazionale

	Moto di traslazione	Moto rotatorio (attorno ad un asse fisso)
Massa	m	I
velocità	\vec{v}	$\vec{\omega}$
accelerazione	\vec{a}	$\vec{\omega}$
Quantità di moto	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Energia cinetica	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
Equilibrio	$\sum \vec{F} = 0$	$\sum \vec{\tau} = 0$
Il Legge di Newton	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
alternativamente	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Legge di conservazione	$\vec{p} = \text{costante}$	$\vec{L} = \text{costante}$
Potenza	$P = Fv$	$\mathcal{P} = \tau\omega$

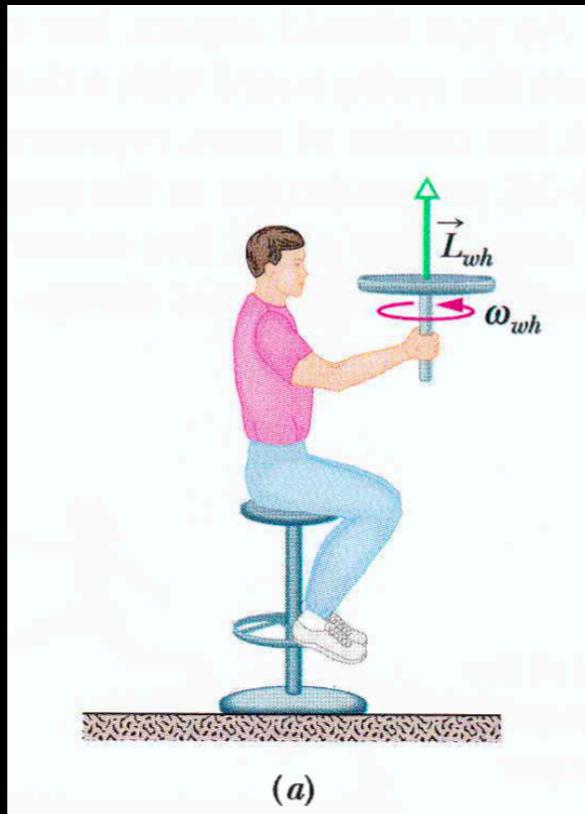
Riassunto leggi di conservazione

Per un sistema isolato (non sottoposto a forze esterne) valgono:

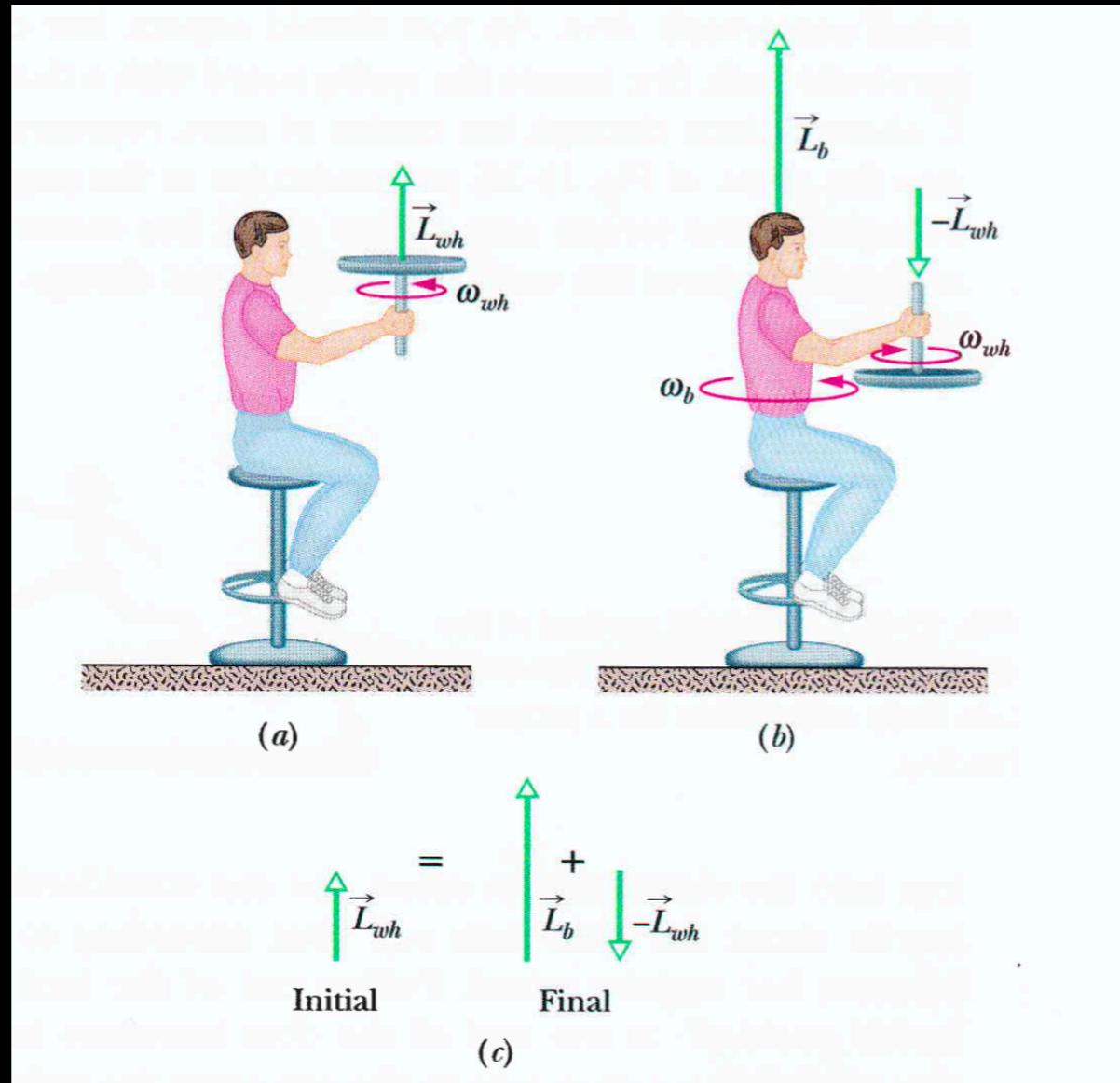
1. Conservazione dell'energia cinetica, $K_f = K_i$
2. Conservazione della quantità di moto, $\vec{p}_f = \vec{p}_i$
3. Conservazione del momento angolare, $\vec{L}_f = \vec{L}_i$

Per sistemi sotto forze conservative: conservazione dell'energia meccanica, $E_f = K_f + U_f = K_i + U_i = E_i$.

Leggi di conservazione



Leggi di conservazione



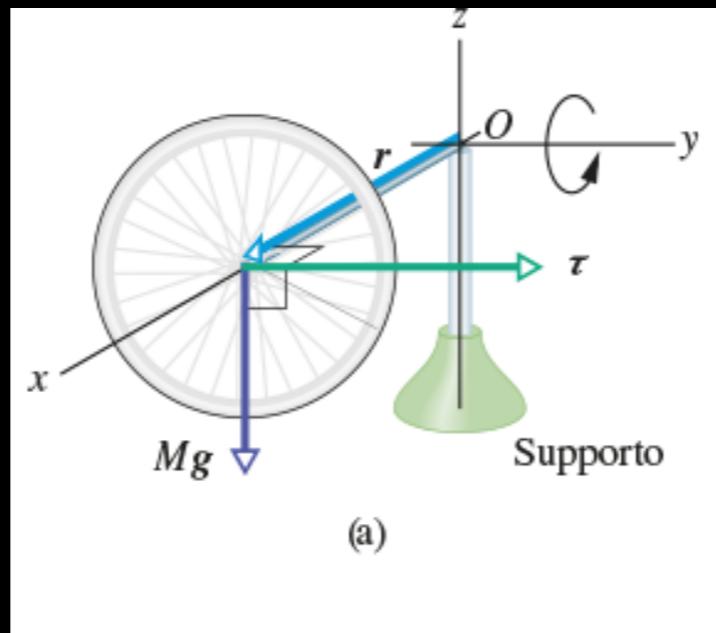
La “magia” del

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Il Giroscopio

La “magia” del

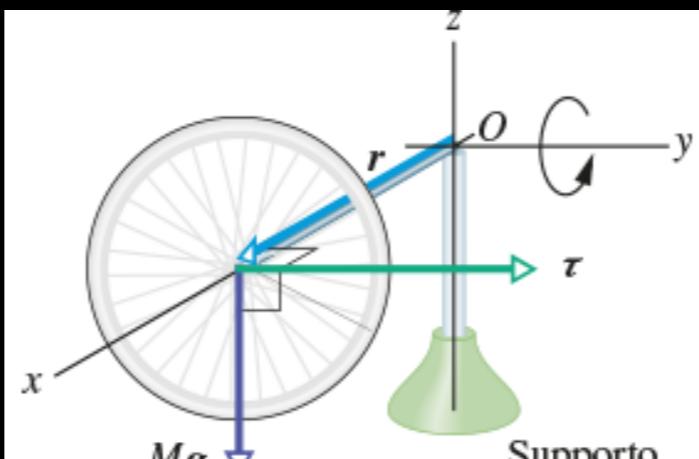
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



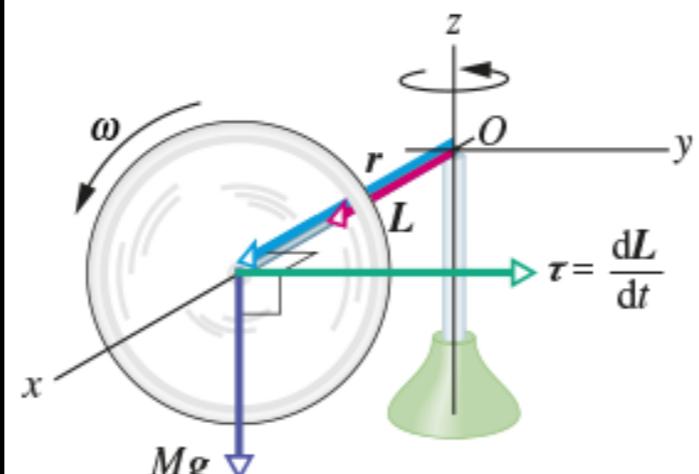
Il Giroscopio

La “magia” del

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



(a)

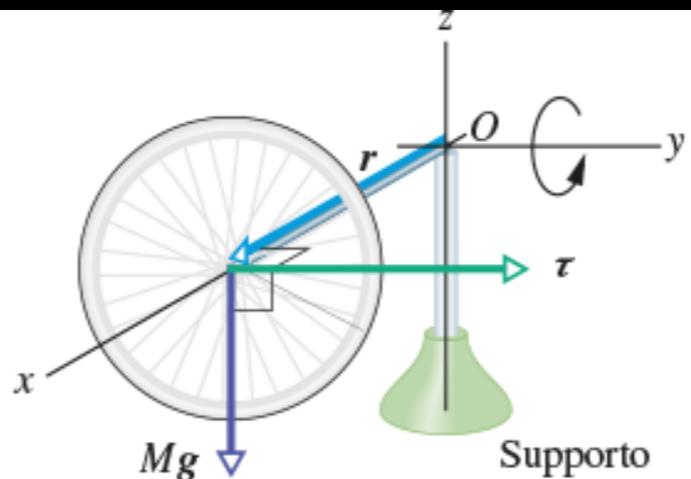


(b)

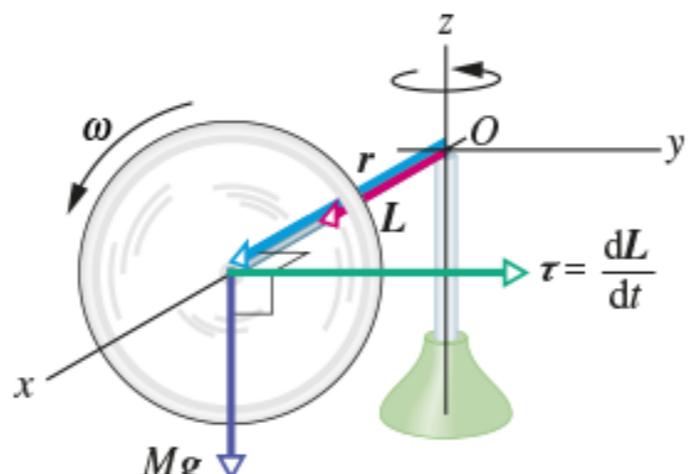
Il Giroscopio

La “magia” del

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

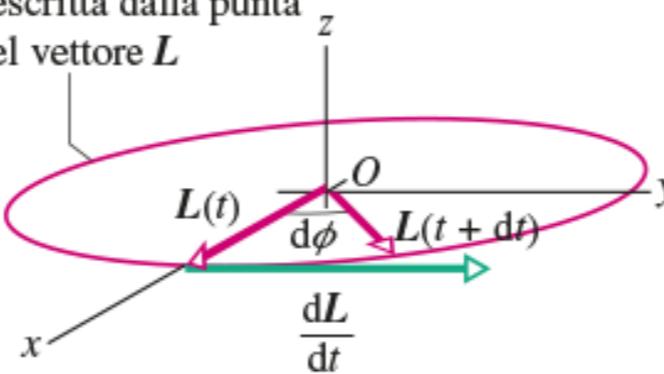


(a)



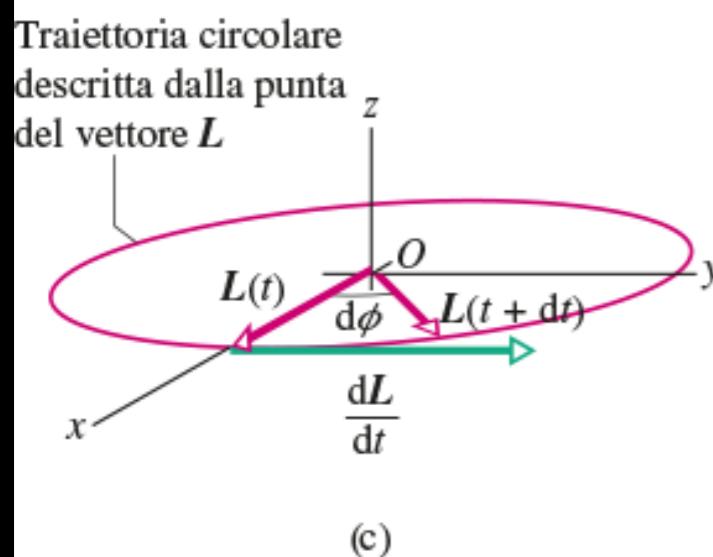
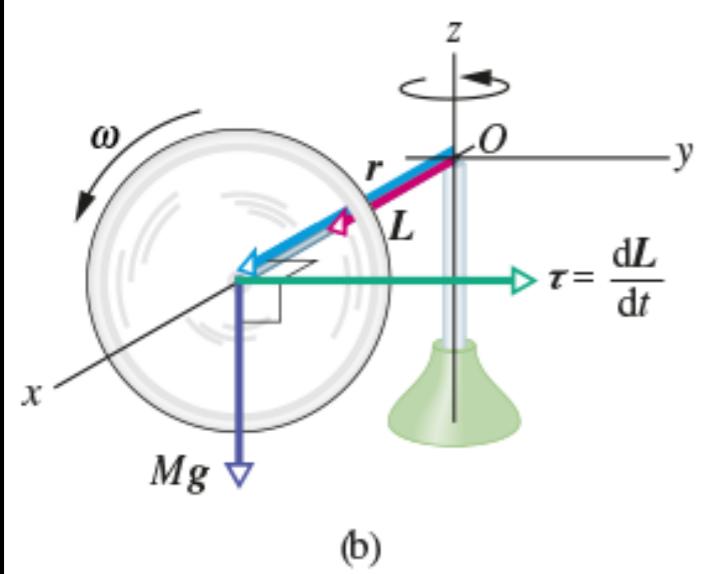
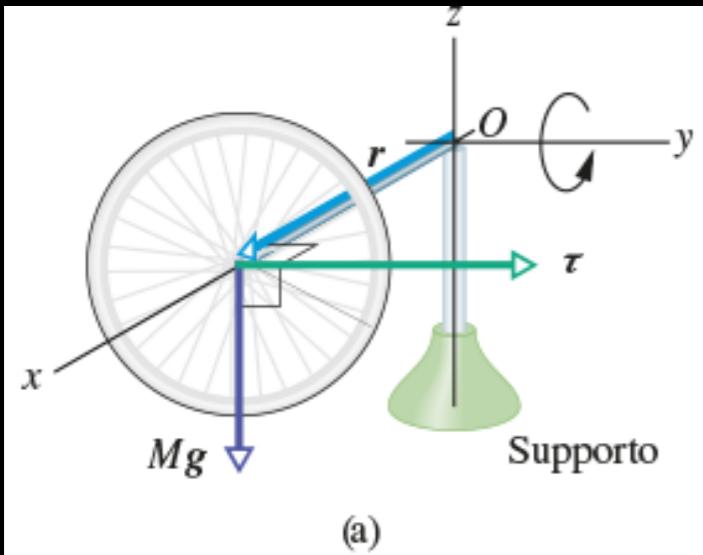
(b)

Traiettoria circolare
descritta dalla punta
del vettore \vec{L}



(c)

Il Giroscopio



1) se la ruota non gira, la forza peso genera un momento della forza

$$\tau = Mgr \sin 90^\circ = Mgr$$

2) se la ruota gira ha un momento angolare diretto lungo il raggio \vec{r} (perché?)

$$L = I\omega$$

3) ma la forza peso produce ancora un momento della forza che e' diretto perpendicolarmente a \vec{r} e a \vec{L} e che introduce una variazione della direzione del momento angolare detta **precessione** (vedi figura in basso). Quindi siccome

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt.$$

allora

$$dL = \tau dt = Mgr dt.$$

4) Dalla figura in basso vediamo anche che il dL puo' essere scritto come

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr dt}{I\omega}.$$

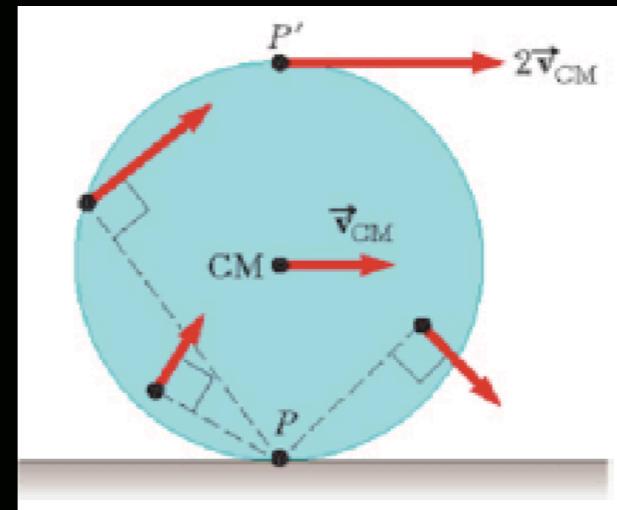
Dividendo primo e secondo membro per dt si ottiene che la velocita' angolare della precessione e'

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$$

Moto roto-traslatorio: il rotolamento

Definizione: quando un corpo rotola senza strisciare, ovvero la velocità del punto di contatto (P in figura) lungo il piano di contatto è nulla.

Il moto di rotolamento puro può essere descritto come un moto di rotazione attorno ad un asse *istantaneo* passante per il punto P , di velocità angolare ω ; il centro di massa ha velocità $v_{cm} = \omega R$, dove R è il raggio della ruota. Il punto P ha velocità nulla!



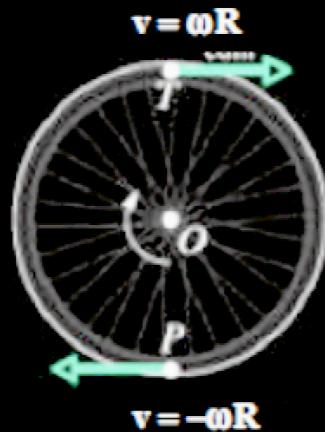
Descrizione alternativa: moto di traslazione del centro di massa con velocità v_{cm} , più un moto rotatorio attorno al centro di massa con velocità angolare ω . Valgono le seguenti relazioni:

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad , \quad a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

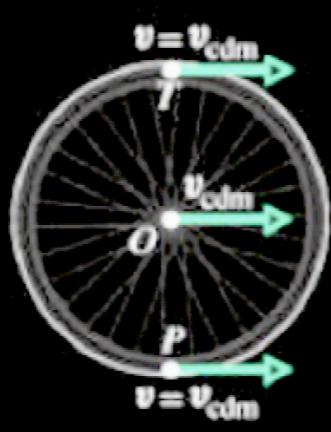
Moto roto-traslatorio: il rotolamento

possiamo separare il moto **rototraslatorio** in **rotazione** del corpo rispetto al suo CM, e **traslazione** del CM rispetto al laboratorio.

(a) Rotazione pura



(b) Traslazione pura



(c) Moto di rotolamento



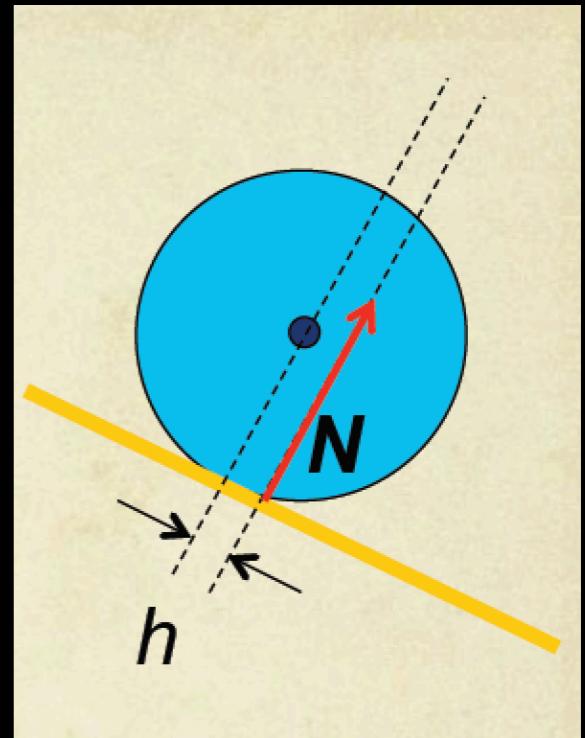
$$\begin{aligned}v_P &= -\omega R \\v_O &= 0 \\v_T &= \omega R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_P &= v_{CM} \\v_O &= v_{CM} \\v_T &= v_{CM}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}v_P &= v_{CM} - \omega R \\v_O &= v_{CM} \\v_T &= v_{CM} + \omega R\end{aligned} \right\} \begin{aligned}v_P &= 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow v_{CM} = \omega R\end{aligned}$$

Attrito Volvente

- Si attribuisce questo fenomeno ad una nuova forma di attrito, detto volvente, che è attivo tra il corpo e la superficie di appoggio
- È attribuito alla deformazione locale del corpo e della superficie
- Per una ruota in moto, la retta d'azione della componente normale ***N della reazione vincolare*** alla superficie d'appoggio non contiene il centro della ruota



Attrito Volvente

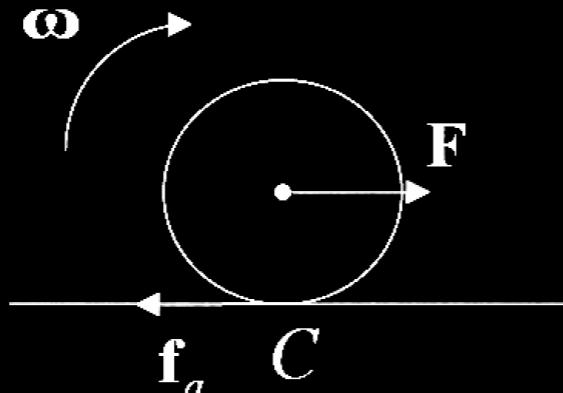
- L'effetto e` schematizzato con l'azione di un momento che si oppone al moto $\tau_v = -hN$ (h è il braccio di N — la forza normale — ed e` detto coefficiente di attrito volvente)
- L'effetto dell'attrito volvente è sempre molto minore di quello dell'attrito radente e statico, per cui è generalmente trascurabile
- Da qui deriva il grande vantaggio che si ottiene, in molti casi, di dotare i veicoli di ruote piuttosto che di pattini

Dal punto di vista energetico il **sistema risulta conservativo**, dato che la **forza di attrito statico non compie mai lavoro** non essendo associata ad uno spostamento.

N.B.: nel rotolamento non esiste attrito radente perché non c'e' strisciamento

Rotolamento puro Sfera

Se applichiamo la forza \mathbf{F} , per ruotare, la sfera deve avere attrito (~statico) con il piano, altrimenti striscia.



Per la
traslazione

$$\begin{cases} F - f_a = ma_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

Per la
rotazione

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}_a = I\alpha \Rightarrow f_a r = I\alpha \quad \text{dove } a_{CM} = \alpha R$$

Considerando tutte le equazioni

$$\begin{cases} F - f_a = ma_{CM} \\ f_a = \frac{I}{R^2} a_{CM} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_{CM} = \frac{F}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{mR^2} \right)}$$

$$f_a = \frac{I}{R^2} a_{CM} = \frac{I}{R^2} \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{mR^2} \right)} = \frac{F}{\left(\frac{R^2}{I} m + 1 \right)} < F$$

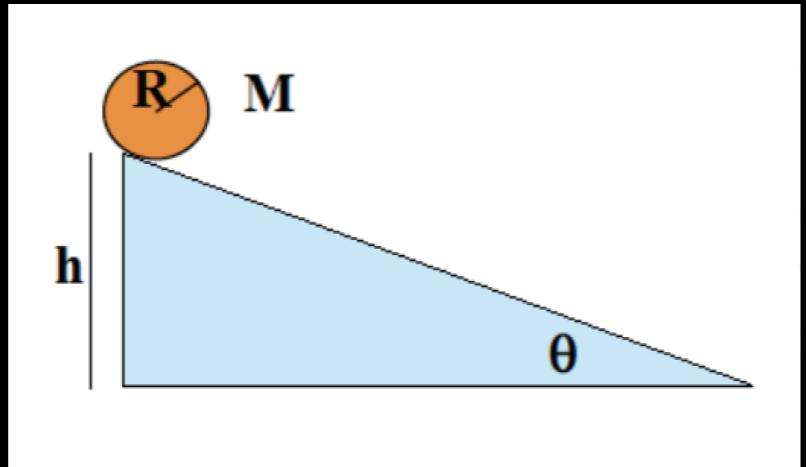
Per il rotolamento puro occorre che

$$f_a \leq \mu_s mg$$

vedi anche dimostrazione nelle slide seguenti

L'accelerazione e' minore rispetto a quella che avremmo per solo strisciamento senza attrito

Rotolamento puro Sfera



Sia μ_s il coefficiente di attrito statico tra il piano e il corpo rigido e supponiamo che il corpo sia fermo quando inizia il moto e si trovi ad un'altezza **h** dal suolo. Sia inoltre **I'** il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il CM e \perp al foglio.

All'istante **t = 0 s** il corpo viene lasciato libero di muoversi e scende lungo il piano inclinato con velocità angolare **ω** ; il moto è fin dall'inizio di **puro rotolamento**.

$$E_{m_i} = E_{m_f} \quad \text{Ener. meccanica}$$

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} I' \omega^2$$

Possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica perche' l'attrito volvente e' trascurabile rispetto all'attrito statico e a quello dinamico

Ricordando la condizione di puro rotolamento, $v_{CM} = \omega R$, si ha

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I' \frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

$$v_{CM}^2 = 2Mgh \left(\frac{1}{M + \frac{I'}{R^2}} \right)$$

Ricordiamo ora che il rapporto tra **I'** ed **R** è proporzionale ad **M**, il coefficiente di proporzionalità **α** dipendendo dalla **geometria del corpo**

$$I' = MR^2 \quad \text{anello} \quad v_{CM} = \sqrt{gh}$$

$$I' = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{cilindro} \quad v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

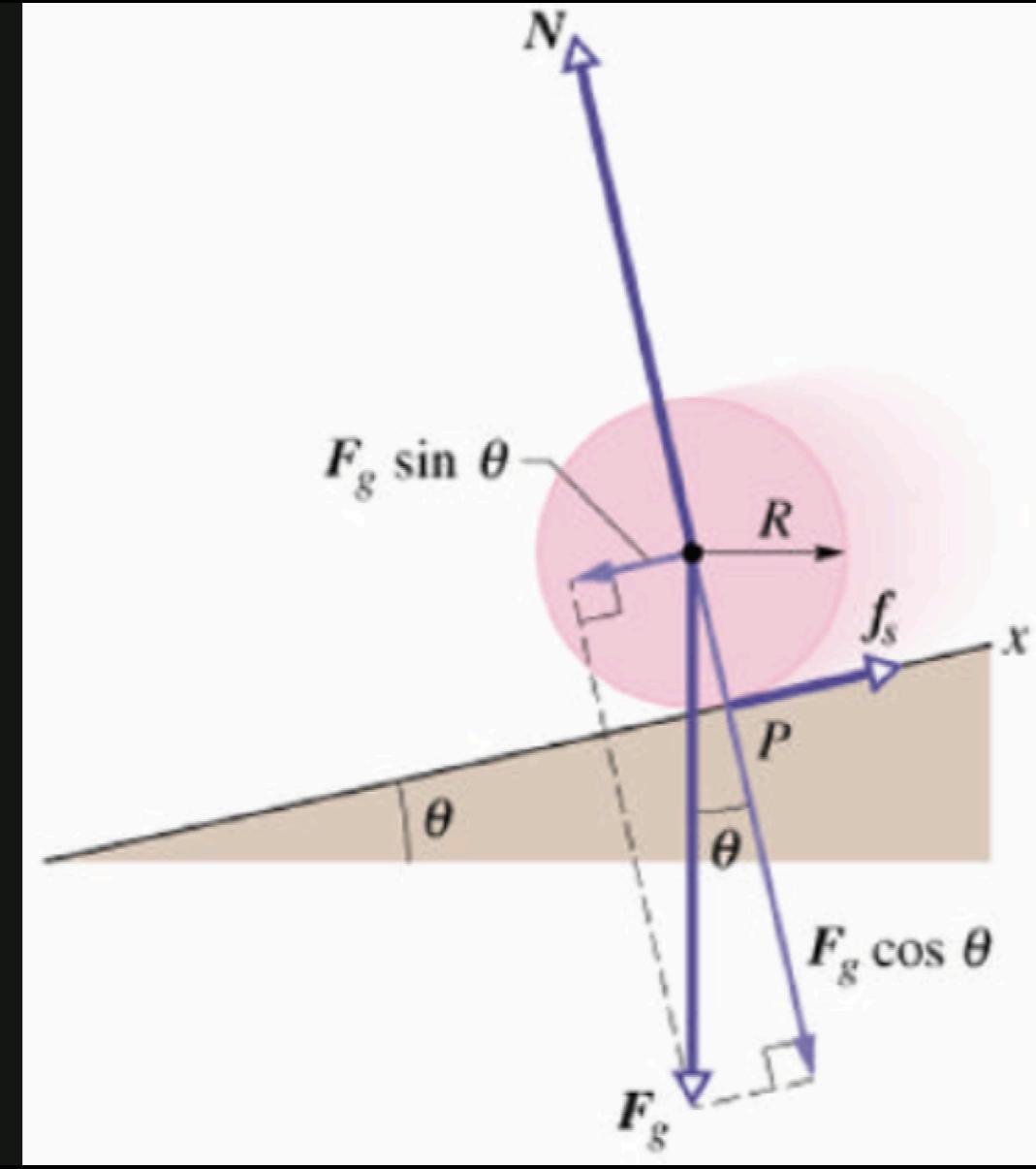
$$I' = \frac{2}{3} MR^2 \quad \text{sfera cava} \quad v_{CM} = \sqrt{\frac{6}{5} gh}$$

I risultati così ottenuti vanno confrontati con quelli ricavati nel caso in cui il **corpo rigido scende senza rotolare** dalla stessa altezza lungo un **piano liscio** con lo stesso **angolo di inclinazione θ** , sappiamo già che otteniamo per ogni corpo lo stesso risultato, $v_{CM} = \sqrt{2gh}$.

La differenza tra le velocità ottenute nei due casi (**entrambi conservativi** dal punto di vista energetico e con la **medesima E_m iniziale**) è dovuta al fatto che, nel caso del puro rotolamento, **il corpo deve impiegare parte della sua energia potenziale gravitazionale per entrare in rotazione**, ciò a discapito della traslazione. Come conseguenza, nel caso del puro rotolamento, abbiamo **velocità finali del CM più piccole**.

Esaminiamo ora il problema dal **punto di vista dinamico**. Scriviamo le due **equazioni cardinali della dinamica per il corpo rigido (rotazione attorno ad un asse principale d'inerzia senza punto fisso in un sistema inerziale)**

$$\begin{cases} \text{M} = I' \vec{\alpha} \\ \sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{CM} \end{cases}$$



$$\begin{cases} Rf_s = I\alpha \\ M\vec{g} + \vec{f}_s + \vec{N} = M\vec{a}_{CM} \\ a_{CM} = \alpha R \\ f_s = \frac{I\alpha_{CM}}{R^2} \\ Mg \sin \vartheta - f_s = Ma_{CM} \\ N - Mg \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

Infine

$$a_{CM} = g \sin \vartheta - \frac{f_s}{M} \text{ e } f_s = \frac{I'}{R^2} \left(g \sin \vartheta - \frac{f_s}{M} \right)$$

$$f_s \left(1 + \frac{I'}{MR^2} \right) = \frac{I'}{R^2} g \sin \vartheta \text{ e } f_s = \frac{MI'}{I' + MR^2} g \sin \vartheta$$

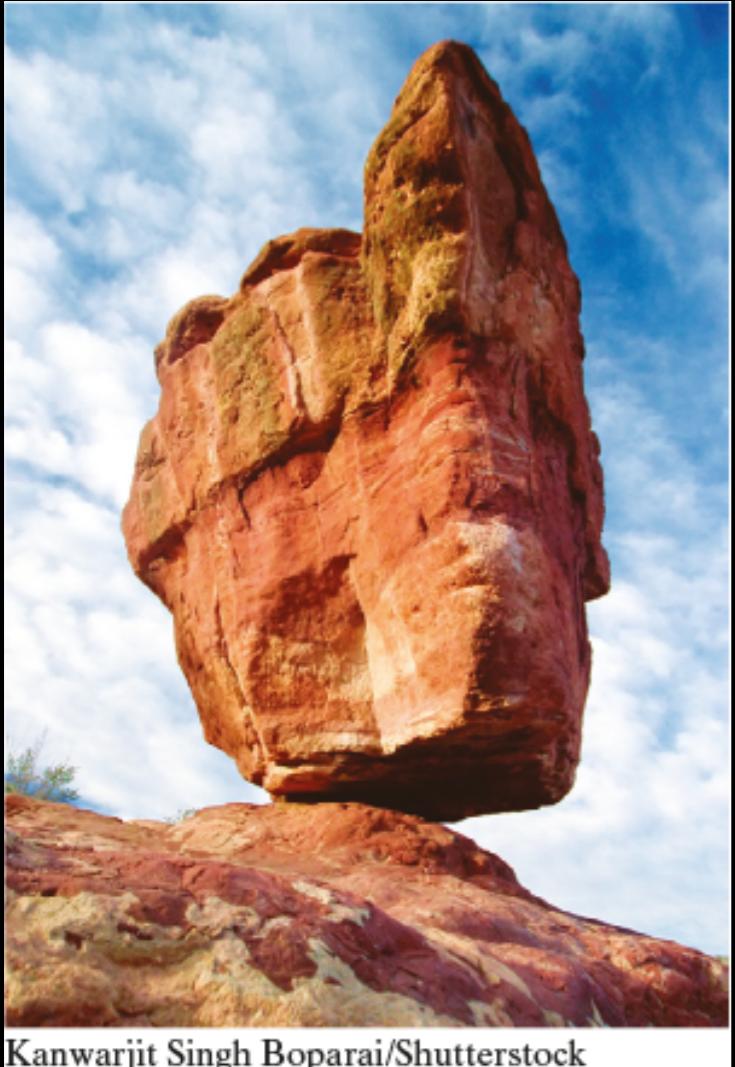
$$a_{CM} = g \sin \vartheta \frac{\frac{MR^2}{I' + MR^2}}{\text{costante} \Rightarrow \text{motouniformemente accelerato}}$$

Per i vari corpi

$f_s = \frac{1}{2} Mg \sin \vartheta$	anello	$a_{CM} = \frac{1}{2} g \sin \vartheta$
$f_s = \frac{1}{3} Mg \sin \vartheta$	cilindro	$a_{CM} = \frac{2}{3} g \sin \vartheta$
$f_s = \frac{2}{5} Mg \sin \vartheta$	sfera cava	$a_{CM} = \frac{3}{5} g \sin \vartheta$
$f_s^{MAX} = \mu_s Mg \cos \vartheta$	strisciamento	$a_{CM} = g \sin \vartheta$

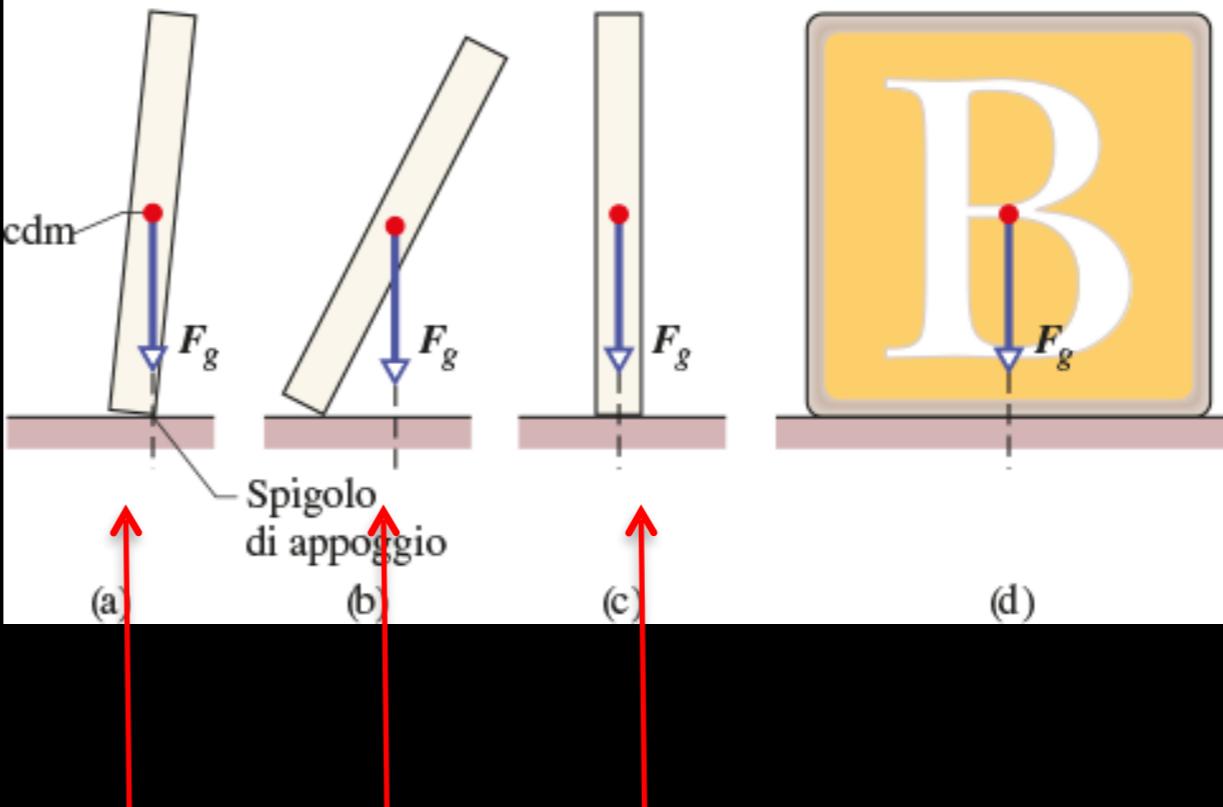
Conclusione:

- 1) l'attrito statico nel moto di rotolamento è sempre minore del caso del puro strisciamento
- 2) l'attrito dinamico è per definizione inferiore rispetto all'attrito statico
- 3) l'attrito volvente è minore rispetto a entrambi
- 4) gli attriti possono essere trascurati nel rotolamento e si può applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica

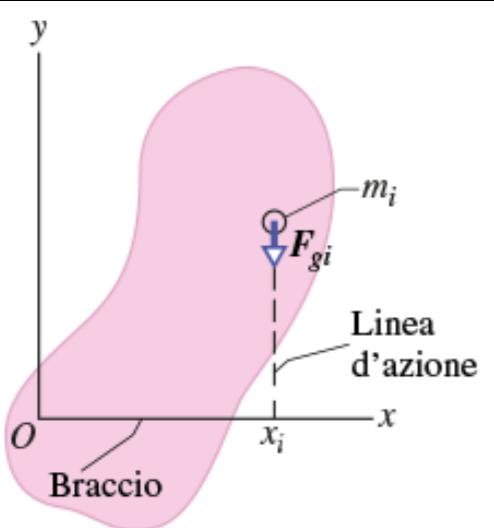


Kanwarjit Singh Boparai/Shutterstock

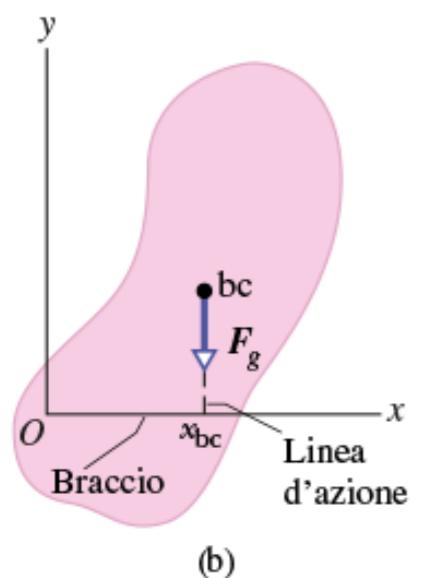
Per ribaltare la tessera il centro di massa
deve sporgere rispetto allo spigolo d'appoggio



Quanto valgono le risultanti? E i momenti?



Centro di gravità = Centro di massa



L'equilibrio di un corpo rigido

Un corpo rigido fermo rimane in **equilibrio** quando:

- la somma vettoriale delle *forze* applicate su di esso è uguale a zero;
- la somma vettoriale dei *momenti delle forze*, calcolati rispetto a un punto qualsiasi, è uguale a zero.

L'equilibrio di un corpo rigido

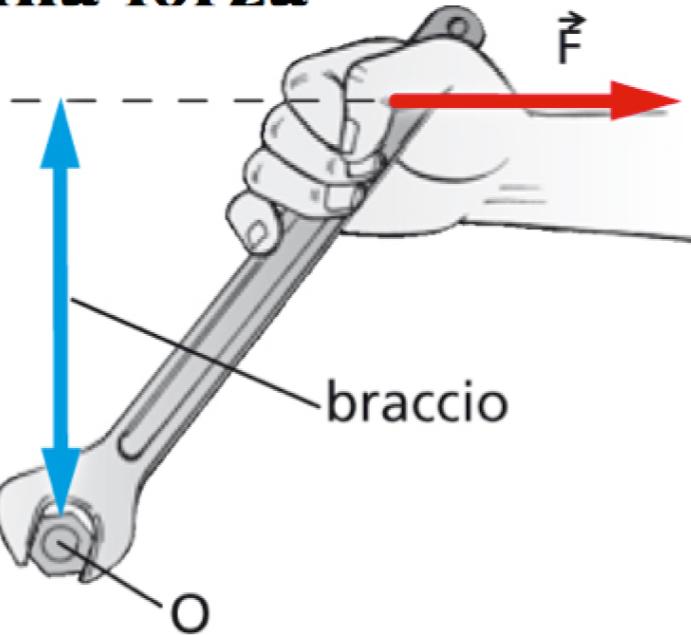
Modello	Proprietà rilevanti	Grandezze	Equilibrio
Punto materiale	Si sposta nello spazio. Non ruota.	Forze	$\vec{F}_{tot} = 0$
Corpo rigido	Si sposta nello spazio. Ruota.	Forze Momenti	$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = 0 \\ \vec{M}_{tot} = 0 \end{cases}$

Equazioni cardinali

Il **braccio** di una forza

Il **braccio** di una forza F rispetto a un punto O è dato dalla distanza tra il punto O e la retta che contiene F . Perché la rotazione del bullone è più agevole se la chiave inglese è più lunga?

Il momento di una forza F rispetto a un punto O è uguale al prodotto dell'intensità F della forza per il braccio b .



$$M = Fb$$

Il momento di una coppia di forze

Il **momento di una coppia** è dato dalla somma dei momenti delle forze rispetto al punto medio O .

Esso è uguale al prodotto dell'intensità F di una forza per la distanza d tra le rette di azione delle due forze.

momento
della coppia ($N \cdot m$)

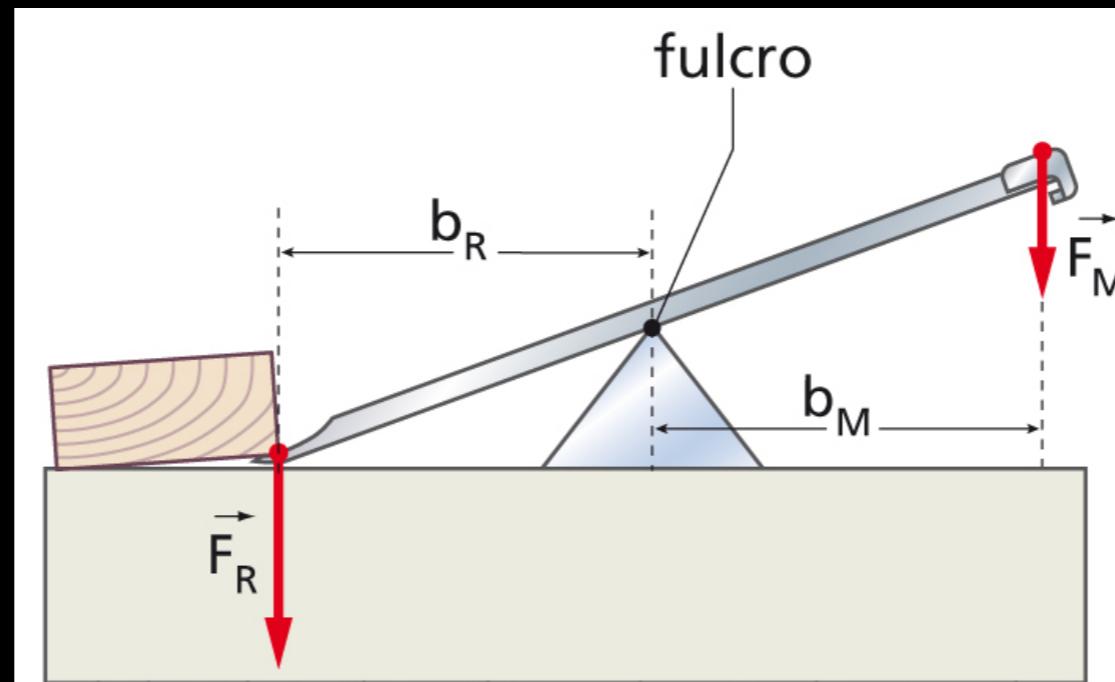
intensità
di una delle forze (N)

$$M = Fd$$

distanza (m)



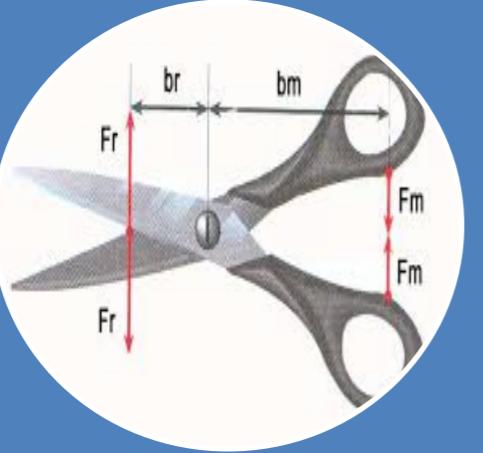
Le leve



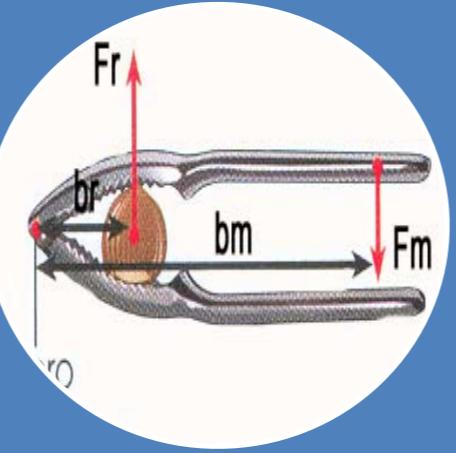
$$F_R b_R = F_M b_M$$

momento della forza resistente

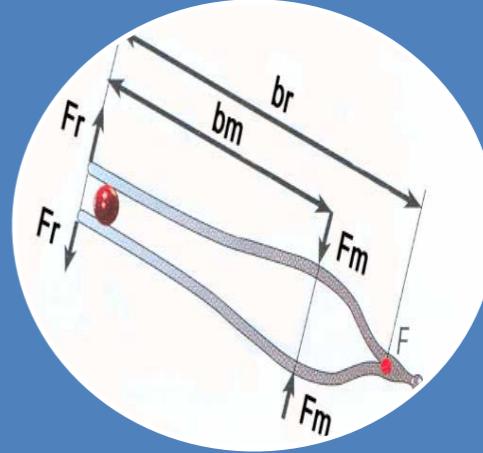
momento della forza motrice



leve di primo genere: il fulcro è posto tra le due forze (interfulcate); possono essere vantaggiose, svantaggiose o indifferenti



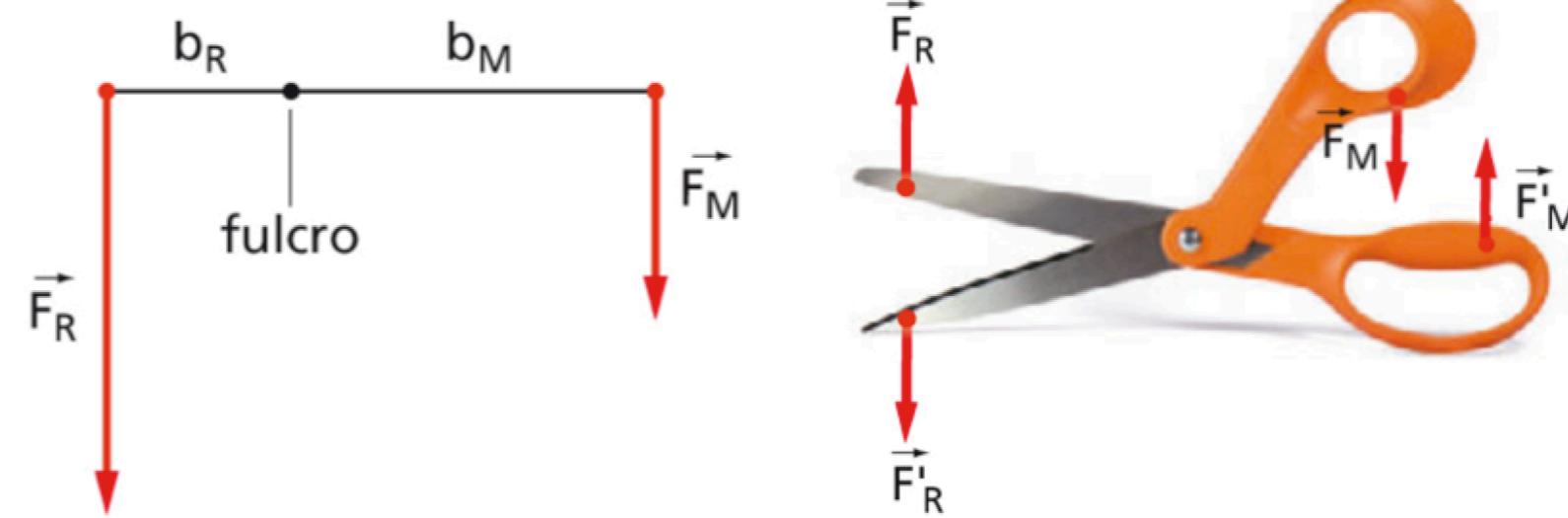
leve di secondo genere: la forza resistente è tra il fulcro e la forza motrice (o potenza) (interresistente); sono sempre vantaggiose



leve di terzo genere: la forza motrice (potenza) è tra il fulcro e la forza resistente; sono sempre svantaggiose

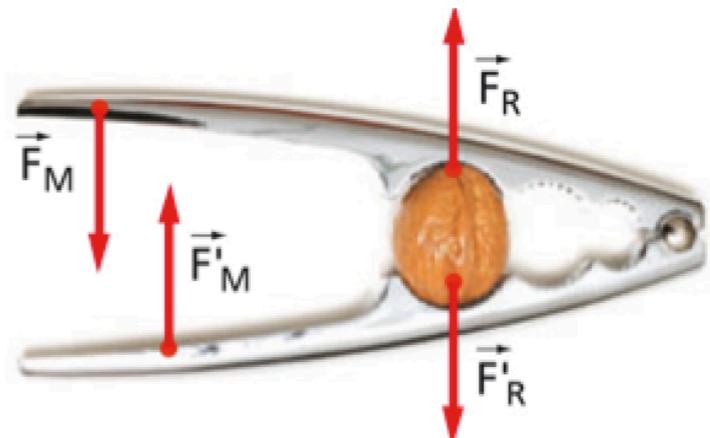
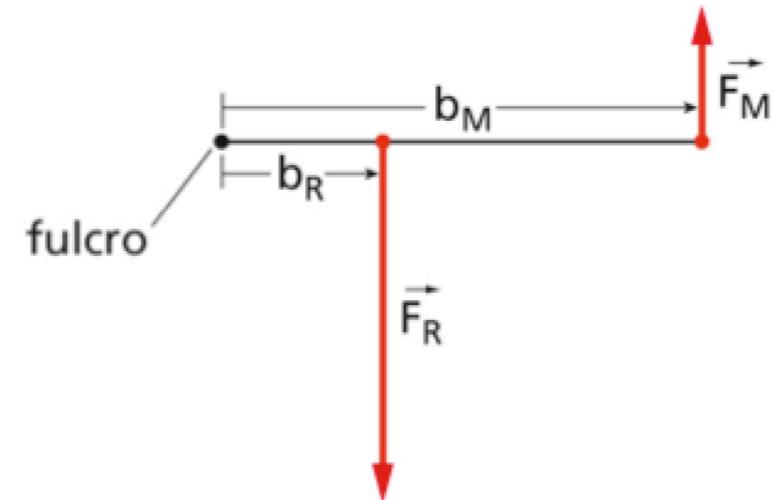
Le leve di **primo** genere

Il fulcro è posto tra le due forze.



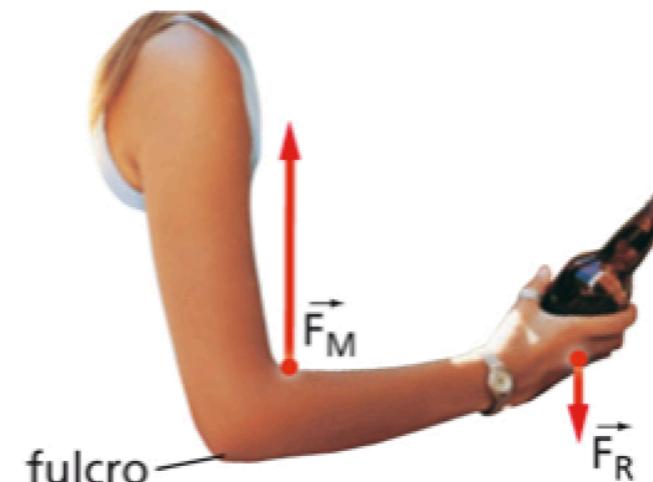
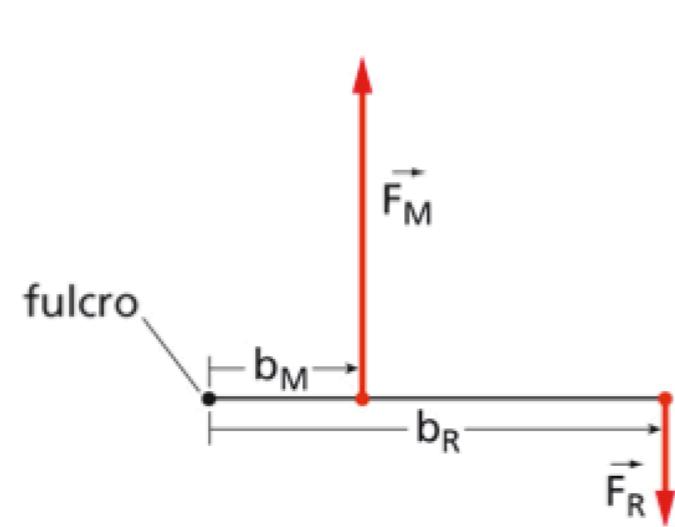
Le leve di **secondo** genere

La forza resistente è tra il fulcro e la forza motrice.



Le leve di **terzo** genere

La forza motrice è tra il fulcro e la forza resistente.



Un'asse di massa 2Kg può essere utilizzata come dondolo per due bambini. Un bimbo ha una massa di 30Kg e siede a 2.5m dal punto di appoggio. A quale distanza x dal punto di appoggio deve sedere un bimbo di 25Kg per bilanciare il dondolo?

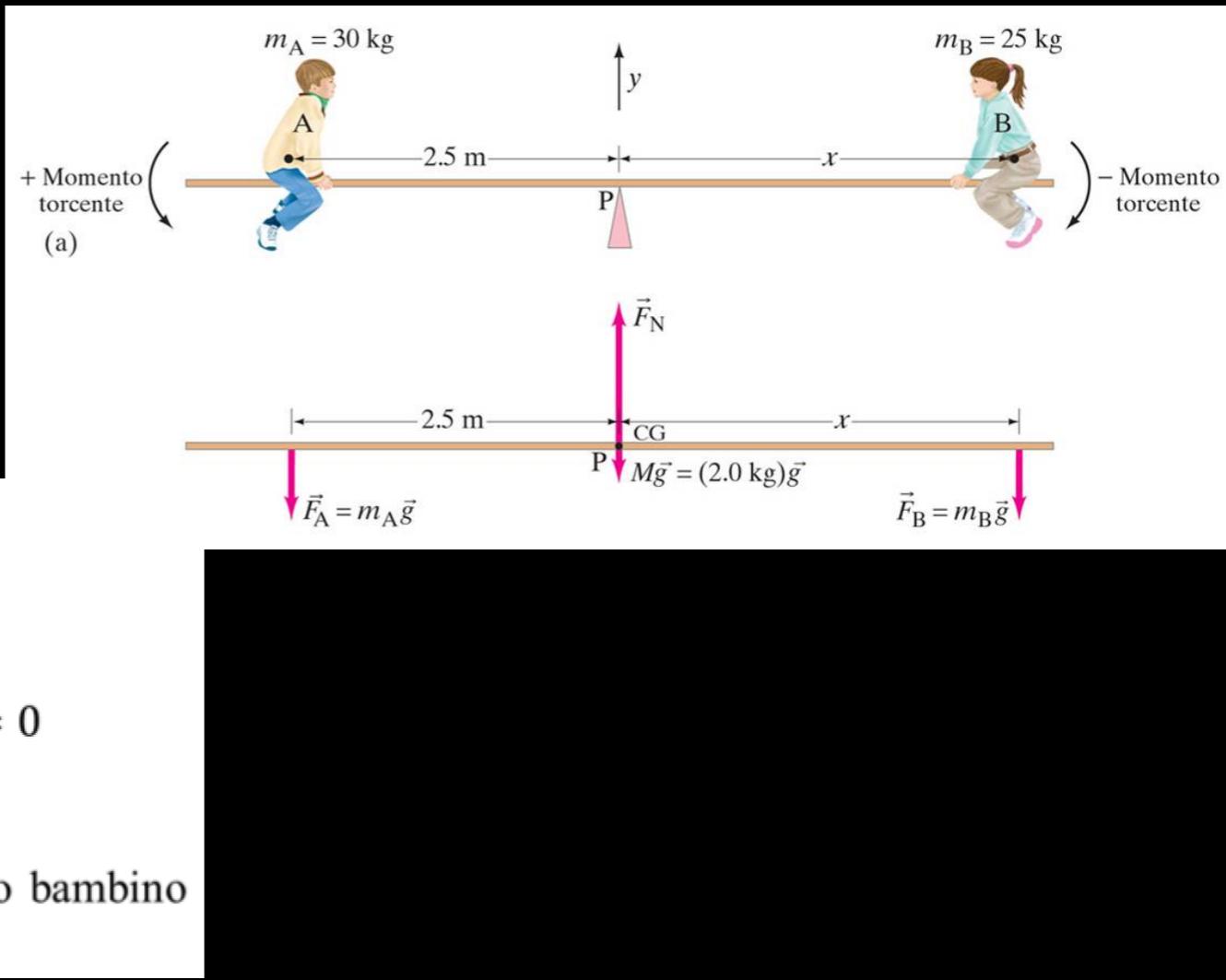
$$\sum M = 0$$

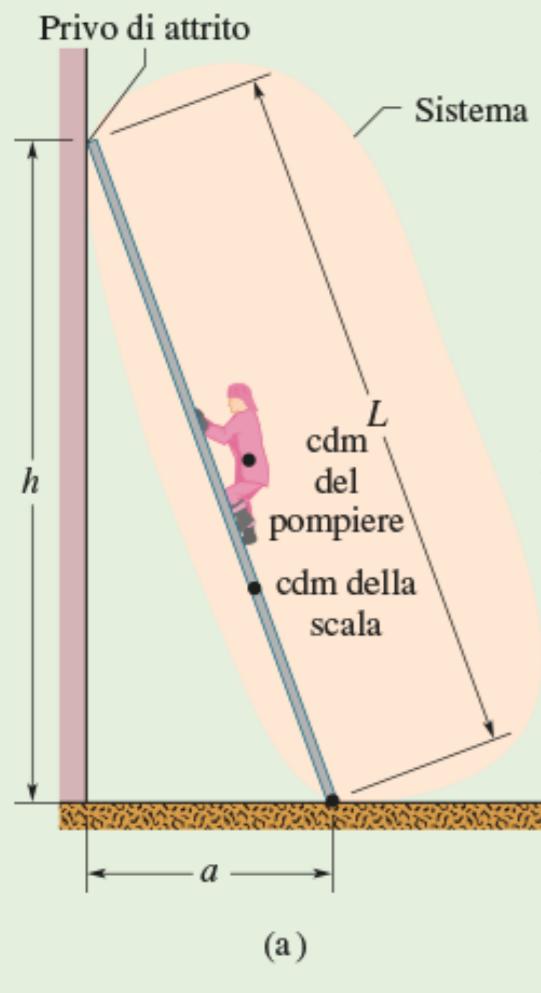
cioè:

$$\sum M = (30Kg) \cdot \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) (2.5m) - (25Kg) \cdot \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) \cdot x = 0$$

da cui:

$$x = \frac{(30Kg)(2.5m)}{25Kg} = 3m. \text{ Quindi, per bilanciare il dondolo, il secondo bambino deve sedere a } 3m \text{ dal fulcro.}$$

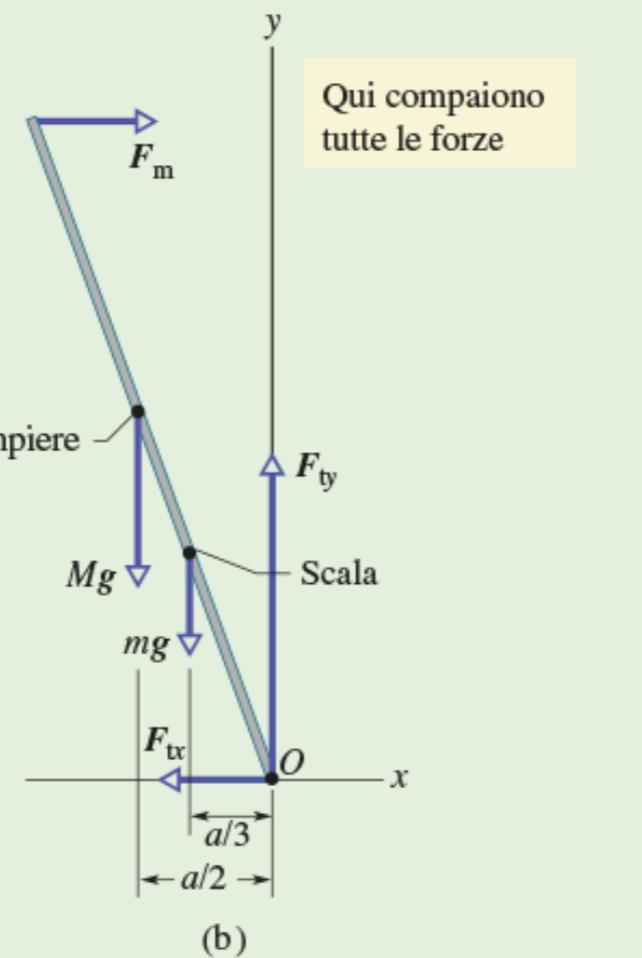
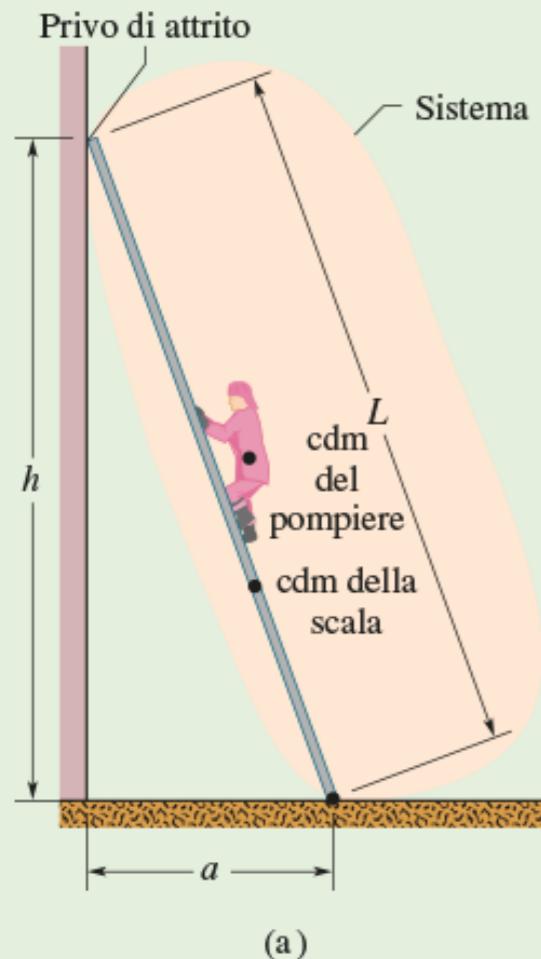




$$\begin{aligned}
 L &= 12\text{m} \\
 m_{\text{scala}} &= 45\text{kg} \\
 h &= 9.3\text{m} \\
 M_{\text{pom}} &= 72\text{kg}
 \end{aligned}$$

quando il pompiere raggiunge metà' della scala, qual'e' il modulo forze che si esercitano su:
 scala
 muro
 terreno

sapendo che il CM della scala sta ad 1/3 della sua Lunghezza?



$$\begin{aligned}L &= 12 \text{ m} \\m_{\text{scala}} &= 45 \text{ kg} \\h &= 9.3 \text{ m} \\M_{\text{pom}} &= 72 \text{ kg}\end{aligned}$$

quando il pompiere raggiunge metà' della scala, qual'e' il modulo forze che si esercitano su:
scala
muro
terreno

sapendo che il CM della scala sta ad 1/3 della sua Lunghezza?