Università di Napoli Federico II – Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Calcolatori Elettronici I

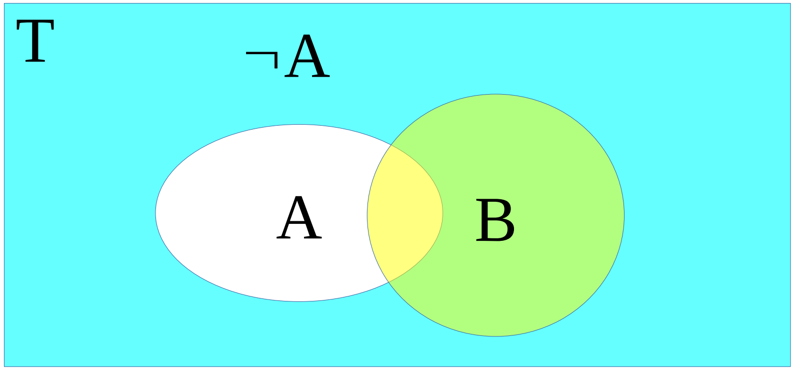
Mappe di Karnaugh

Funzione equivalenza

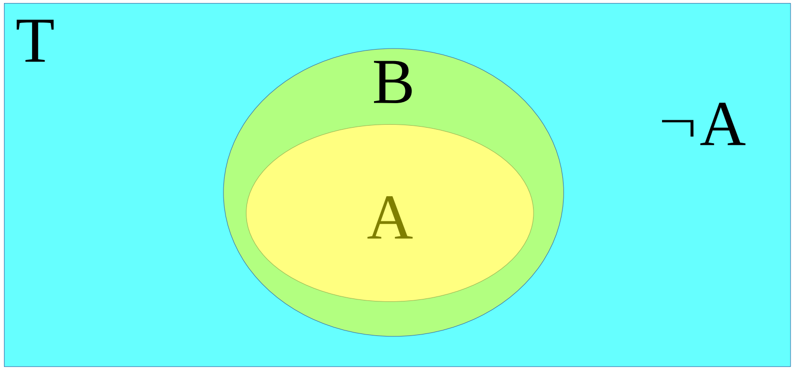
- Funzione equivalenza
  - (*logica delle proposizioni*) si dice che due proposizioni A e B sono equivalenti ($A \leftrightarrow B$) quando sono entrambe vere o entrambe false: $A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B = V$
  - (*logica dei circuiti*) si dice che $a \leftrightarrow b$ (a e b variabili o funzioni booleane) quando $a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b} = 1$
  - (*algebra degli insiemi*) si dice che $A \leftrightarrow B$ (A e B due insiemi) quando $A \cap B \cup \neg A \cap \neg B = T$

Funzione implicazione

- Funzione implicazione
  - (*logica delle proposizioni*) si dice che la proposizione A implica la proposizione B ($A \rightarrow B$) quando dalla verità di A scaturisce necessariamente la verità di B: $A \wedge \neg B = F$ oppure (De Morgan) $\neg A \vee B = V$
  - (*logica dei circuiti*) si dice che $a \rightarrow b$ (a e b variabili o funzioni booleane) quando $\overline{a} + b = 1$
  - (*algebra degli insiemi*) si dice che $A \rightarrow B$ (A e B insiemi) quando $\neg A \cup B = T$



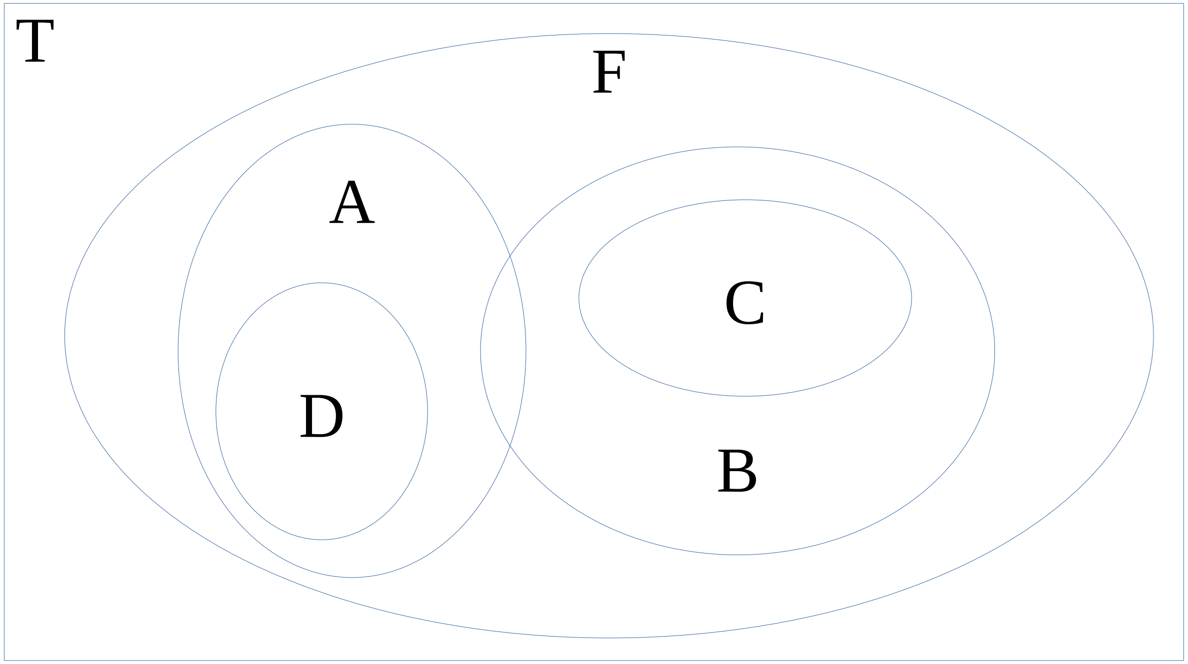
$\neg A \cup B \neq T$



$\neg A \cup B = T \ (A \rightarrow B)$

Implicanti di una funzione

- Nella logica dei circuiti, un **implicante** di una funzione f è una funzione f_1 tale che $f_1 \rightarrow f$ ovvero $\overline{f_1} + f = 1$
- Nell'insieme degli implicanti di f, definiamo **primi** quegli implicanti che a loro volta non implicano nessun altro implicante di f: $f_1 \rightarrow f \wedge \nexists f_2 : f_2 \rightarrow f \wedge f_1 \rightarrow f_2$



- A, B, C, D sono tutti implicanti di F
- Solo A e B sono implicanti primi

Proprietà degli implicanti

- La clausola di una funzione f in forma di tipo P è un suo implicante

$$f = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad \overline{A_i} + f = \overline{A_i} + (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$$

- Una clausola B ne implica un'altra A se e solo se B contiene tutti i letterali di A (deriva da De Morgan)
  - es. abc → ab
    - $\overline{abc} + ab = 1$; $\overline{ab} + \overline{c} + ab = 1 + \overline{c} = 1$
- La somma di due clausole di ordine n che contengono n-1 letterali uguali ed in cui un letterale dell'una sia il complemento di quello dell'altra è la clausola di ordine n-1 formata dai letterali comuni (detta **consenso**) (deriva da prop. Distributiva)
  - es. $\overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc = \overline{a}b(\overline{c} + c) = \overline{a}b$

Proprietà degli implicanti

- Ad una funzione f può essere aggiunto un suo implicante f_1 senza alterarne il valore
  - Se $f_1=0$ allora $f+f_1=f+0=f$, se $f_1=1$ allora $f=1$ e $f+f_1=1+1=1$ $(=f)$
- A è un implicante di f se e solo se nella prima forma canonica di f sono presenti tutti i mintermini aventi A come fattore
  - Infatti, se A è un implicante, lo si può aggiungere ad f, per poi espanderlo in mintermini (facendo comparire anche le variabili assenti in A)
  - Se, viceversa, sono presenti tutti i mintermini aventi A come fattore, essi possono essere raccolti in modo da far apparire A come clausola di f

$f(x,y,z)=xy+yz$ e quindi $xy\rightarrow f$ e $yz\rightarrow f$; infatti si ha

$f(x,y,z)=xy\bar{z}+xyz+xyz+\bar{x}yz$

Mappe di Karnaugh

- Le mappe di Karnaugh sono una rappresentazione “tabellare” delle funzioni booleane, alternativa alla tabella di verità
- Consentono di individuare facilmente “consensi” nell’espressione algebrica
- Due mintermini adiacenti sulle MdK differiscono in un solo letterale
  - Rappresentano una clausola di ordine n-1
  - Es: $\overline{a}b\overline{c} + ab\overline{c} = (\overline{a} + a)b\overline{c} = b\overline{c}$

Mappe di Karnaugh

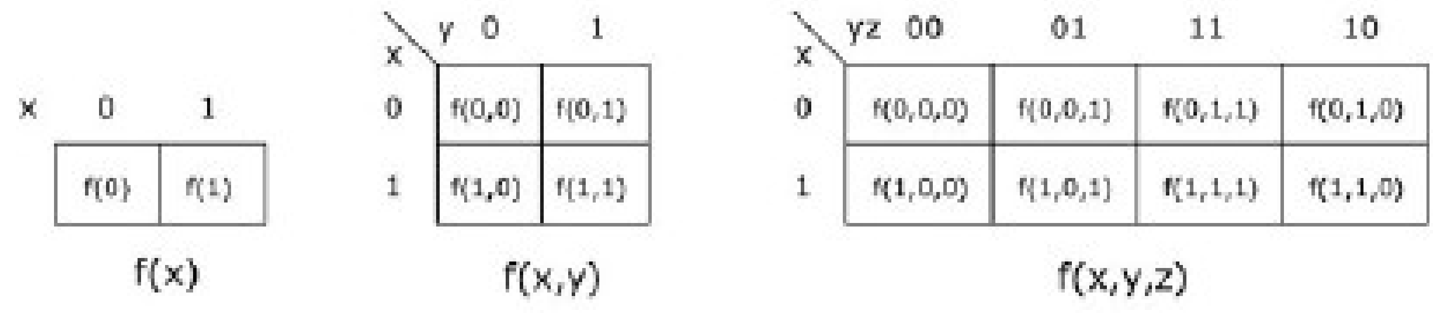


Figura 3.8 - Mappe di Karnaugh di ordine 1, 2 e 3. La figura indica chiaramente che ogni casella riporta il valore di *f* per la configurazione delle variabili che ne dà le coordinate.

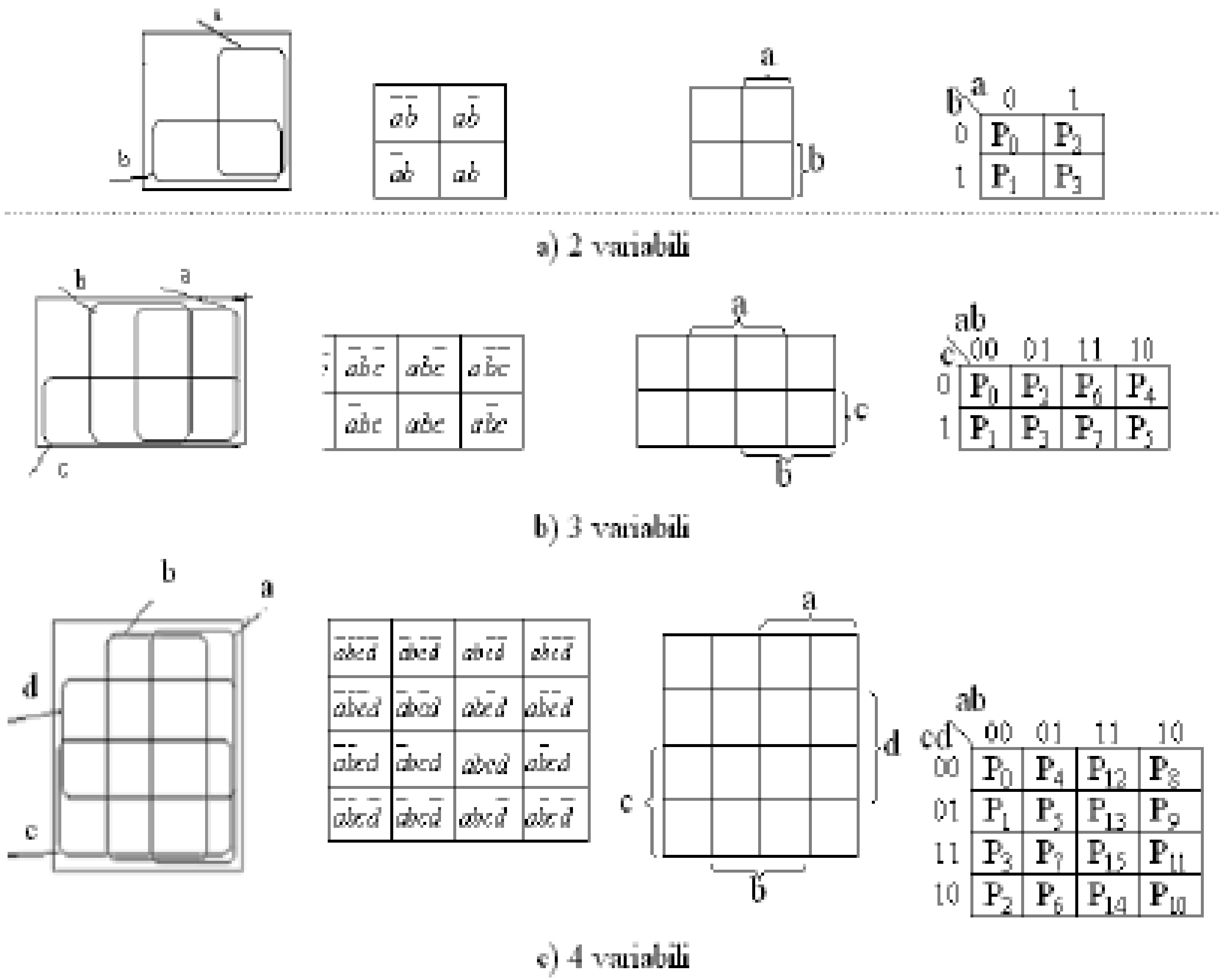
da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

Mappe di Karnaugh

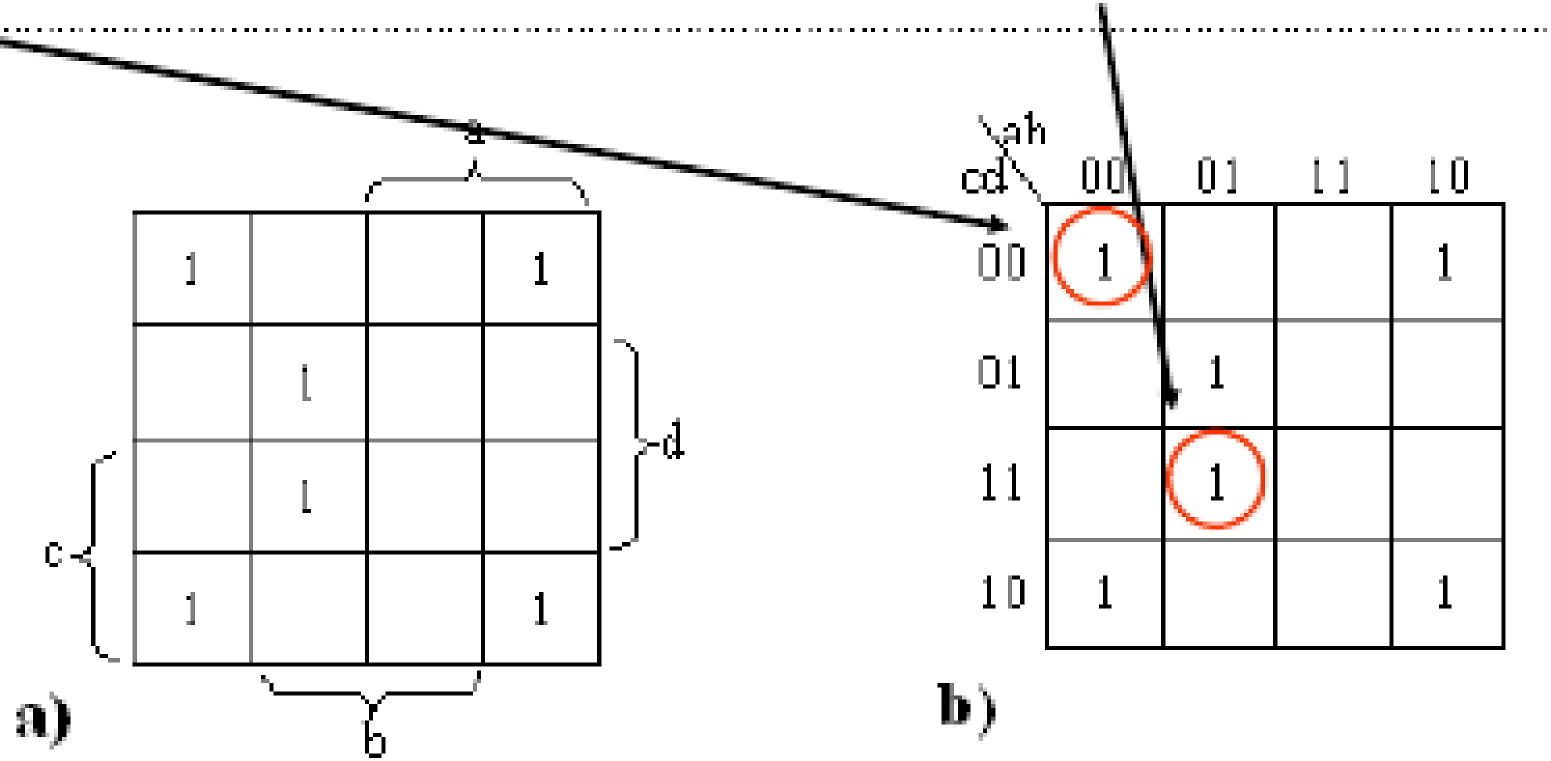
a	b	c	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

c \ ab	00	01	11	10
0	1			1
1		1		

Mappe di Karnaugh



$$y = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} + \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d + a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} + a\,\overline{b}\,c\,\overline{d} + \overline{a}\,b\,c\,d$$



Proprietà notevoli

- I mintermini che si oppongono in una sola variabile sono adiacenti e quindi le coppie di quadratini adiacenti rappresentano clausole di ordine n-1;
- Le clausole di ordine n-1 ($n \geq 2$) che si oppongono in una sola variabile sono ancora adiacenti e quindi le "quadruple" rappresentano clausole di ordine n-2;
- Le "ottuple" ($n \geq 3$) rappresentano clausole di ordine n-3.
- Le clausole sono anche dette "cubi", o "sottocubi"
- Maggiore è la dimensione del sottocubo, minore l'ordine (numero di letterali) della clausola
- I sottocubi di area massima rappresentano gli implicanti primi della funzione

Implicanti primi sulle mappe di Karnaugh

- Gli implicanti primi sono individuati graficamente come sottocubi di area massima

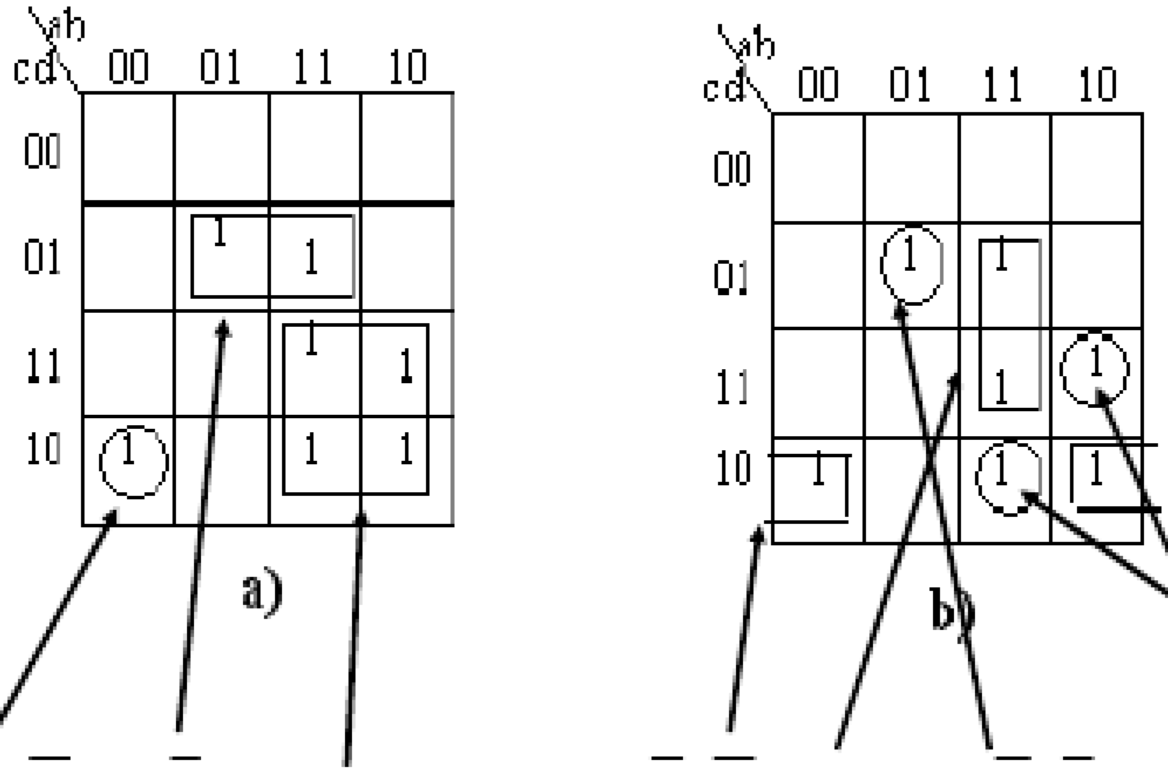
$$f = abcd + \bar{a}\,bcd + \bar{a}\bar{b}\,cd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\,d + ab\,\bar{c}\,d + abc\,\bar{d} + ab\,\bar{c}\bar{d}$$

cd \ ab	00	01	11	10
00			1	
01	1		1	
11	1	1	1	
10			1	

Implicanti primi: $bcd,\ \bar{a}\,cd,\ \bar{a}\bar{b}\,d,\ ab$

Mappe di Karnaugh

- Due modi per rappresentare la stessa funzione



$$a)\ y_1 = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + b\bar{c}d + ac \quad b)\ y_2 = \bar{b}c\bar{d} + abd + \bar{a}b\bar{c}d + a\bar{b}cd + abc\bar{d}$$

Mappe di Karnaugh

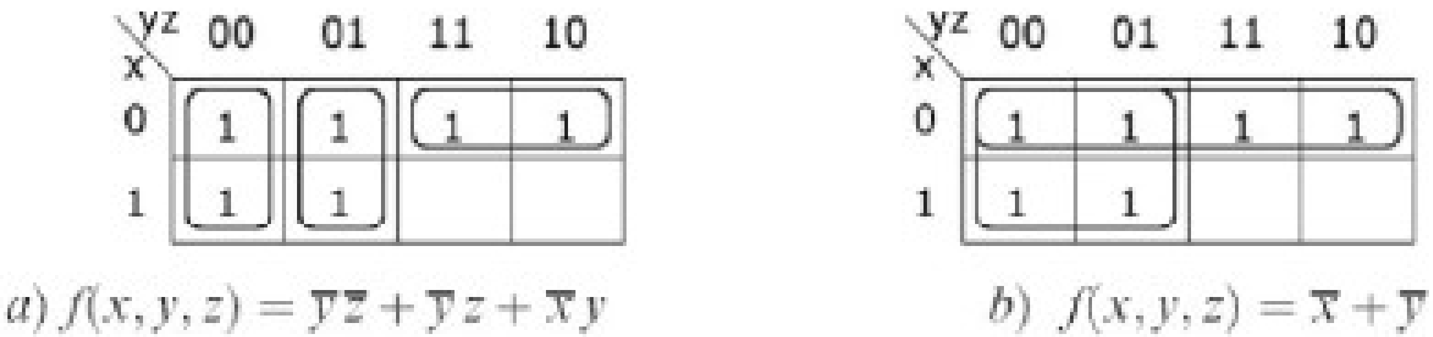
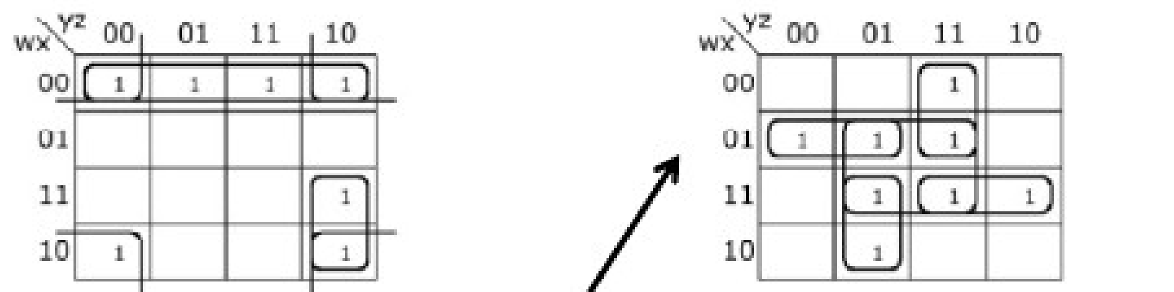


Figura 3.10 - Esempio di due diverse coperture di una stessa funzione. La copertura di destra, essendo formata da sottocubi più ampi, fornisce la minima espressione SP.

Implicanti primi essenziali

- Un implicante primo E_i di una funzione f è detto essenziale se è l'unico ad essere implicato da un mintermine di f
- In altri termini, E_i è l'unico a "coprire" un determinato mintermine della funzione



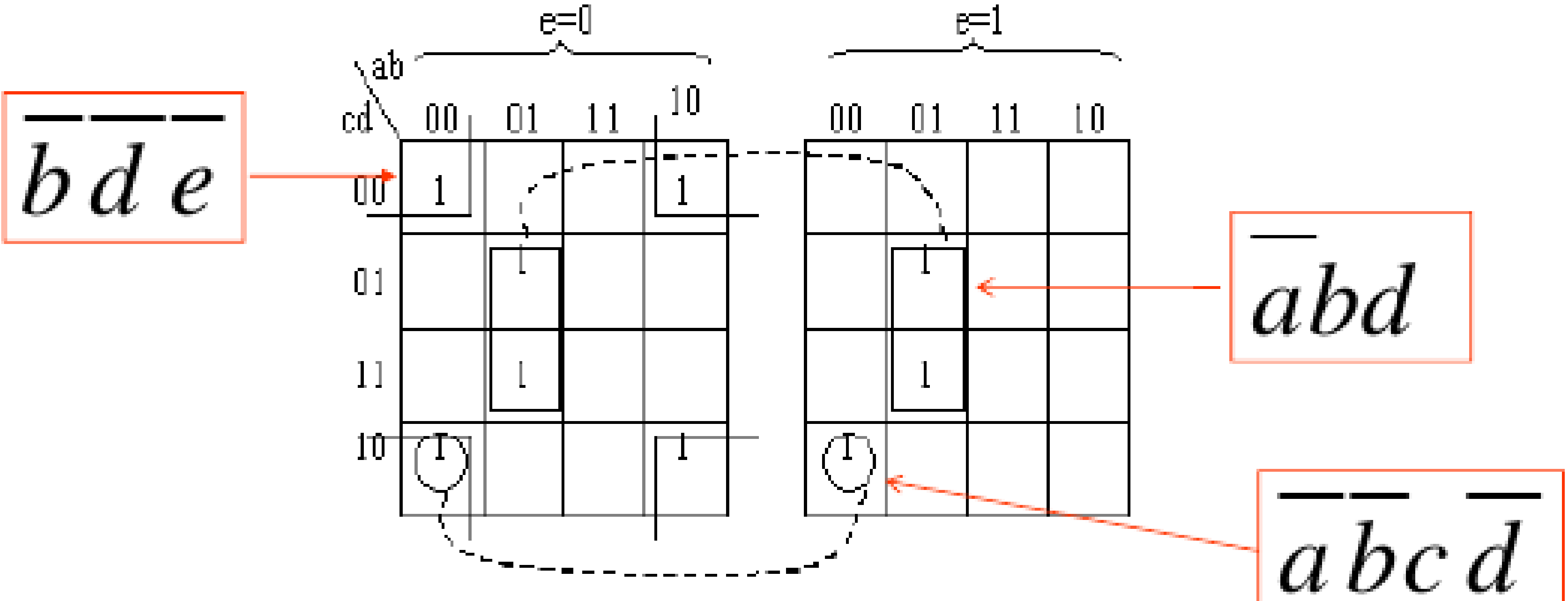
$a)\ f(w,x,y,z) = \overline{w}\,\overline{z} + wy\overline{z} + \overline{x}\,\overline{z}$ $b)\ f(w,x,y,z) = \overline{w}x\overline{y} + \overline{w}yz + wxy + w\overline{y}z$

Figura 3.11 - Esempio di mappe di ordine 4. Sulla mappa di sinistra si noti l'implicante corrispondente alle quattro caselle poste agli angoli della mappa. Esso porta un contributo pari a $\overline{x}\overline{y}$. L'espressione minima SP relativa alla mappa di destra non comprende l'implicante primo xz

xz (quadrato centrale) non è un implicante essenziale, gli altri si

Mappe di Karnaugh a 5 variabili

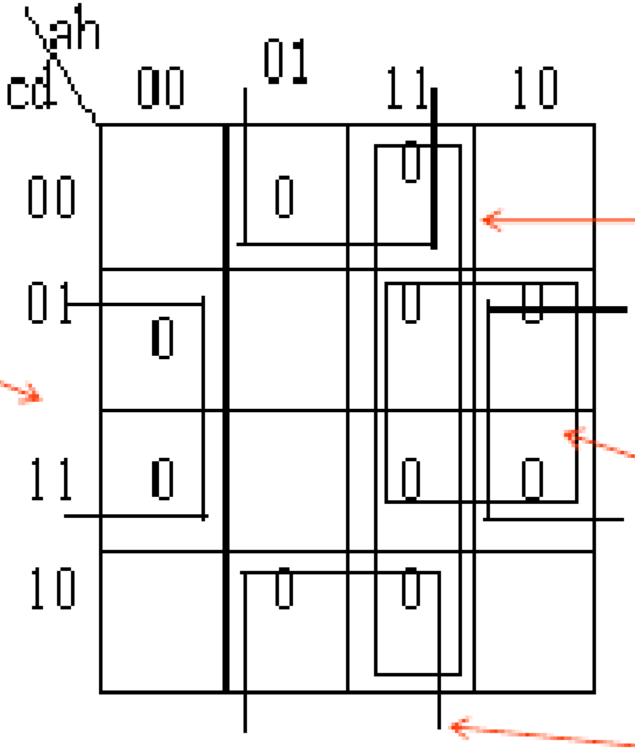
- Possono essere usate anche per funzioni di 5 variabili, perdendo tuttavia l'efficacia e l'immediatezza della rappresentazione



Mappe di Karnaugh

- Mappe per funzioni in forma S

$$\left(b + \overline{d}\right)$$



$$\left(\overline{a} + \overline{b}\right)$$

$$\left(\overline{a} + \overline{d}\right)$$

$$\left(\overline{b} + d\right)$$