

Exercices équations différentielles 1

$$1) \begin{cases} xy' = \frac{y-1}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y' + y \tan x = \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y' + 2xy = x \sin x^2 \\ y(0) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$6) y' = 2xy + x^2 y^3$$

$$3) \begin{cases} y' = y^2 - y \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y' + \frac{xy}{x^2 - 1} = 3x \\ y(0) = 3x \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y'(x) = y(x) + x y''(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$8) y' = 2y - e^x y^2$$

Esercizi

1. Equazione

$$\begin{cases} xy' = \frac{y-1}{x} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $xy' = \frac{y-1}{x}$

① $y(x)=1$ è soluzione infatti

$$y(x)=1 \Rightarrow y'(x)=0 \Rightarrow 0=0 \quad \forall x \quad \checkmark$$

② Ogni altra soluzione in $\{x \neq 0\}$ non interseca $y=1$.

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)-1} = \frac{1}{x^2}$$

Integro e ottengo

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)-1} dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

Per quanto riguarda $\int \frac{y'(x)}{y(x)-1} dx$ considero $y(x)=v \Rightarrow y'(x)dx=dv$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)-1} dx = \int \frac{1}{v-1} dv = \log|v-1| = \log(y(x)-1)$$

$$\Rightarrow \log(y(x)-1) = -\frac{1}{x} + C$$

$$\Rightarrow |y(x)-1| = e^{-\frac{1}{x}+C} = d e^{-\frac{1}{x}} \quad e^C = d > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 \pm d e^{-\frac{1}{x}}$$

Siccome $d>0$, ricordando che $y=1$ è soluzione, poniamo che se

$$y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{x}} \quad x \in \mathbb{R}$$

è soluzione in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

troviamo quelle per cui $\gamma(-1) = 2$

$$2 = \gamma(-1) = 1 + e^{-\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{e}$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$\boxed{\gamma(x) = 1 + e^{-\frac{1}{x}-1}}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + 2xy = x \sin x^2 \\ y(0) = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $y' + 2xy = x \sin x^2$

L'equazione è di primo grado lineare, avere del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$a(x) = 2x$$

$$f(x) = x \sin x^2$$

la cui soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(c + \int f(x) e^{A(x)} dx \right)$$

$$\text{con } A(x) = \int a(x) dx.$$

Procediamo con il calcolo $A(x)$

$$A(x) = \int 2x dx = x^2$$

$$\text{Pertanto a } \int f(x) e^{A(x)} dx$$

$$\int x \sin x^2 e^{x^2} dx \quad \text{applich la sostituzione } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\Rightarrow \int x \sin x^2 e^{x^2} = \frac{1}{2} \int 2x \sin x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sin t e^t dt$$

Per calcolare $\int \sin t e^t dt$ devo applicare 2 volte l'integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int \sin t e^t dt &= e^t \sin t - \int e^t \cos t dt \\ &= e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \int \sin t e^t = e^t (\sin t - \cos t)$$

$$\Rightarrow \int \sin t e^t = \frac{e^t (\sin t - \cos t)}{2}$$

$$\Rightarrow \int x \sin x^2 e^{x^2} = \frac{1}{2} \int \sin t e^t = \frac{e^t (\sin t - \cos t)}{4}$$
$$= \frac{e^{x^2} (\sin x^2 - \cos x^2)}{4}$$

\Rightarrow l'integrale generale è

$$Y(x) = e^{-x^2} \left[c + e^{x^2} \frac{(\sin x^2 - \cos x^2)}{4} \right]$$
$$= c e^{-x^2} + \frac{\sin x^2 - \cos x^2}{4}$$

Troviamo quella per cui $Y(0) = \frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4} = Y(0) = c + \frac{0-1}{4} \Rightarrow c = 1$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$Y(x) = e^{-x^2} + \frac{\sin x^2 - \cos x^2}{4}$$

Esercizio

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = y^2(x) - y(x) \\ y(0) = 4 \end{array} \right.$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $y' = y^2 - y$

E' una equazione a variebeli separabili.

Come prima cosa, osservo che $y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 0$

In entrambi i casi, esse sono soluzioni infatti $y = 1 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Ogni altra soluzione non posse per 0 e per 1.

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x) - y(x)} dx = \int 1 dx = x + c$$

Per quanto riguarda $\int \frac{y'(x)}{y^2(x) - y(x)} dx$ considero $y(x) = v \Rightarrow y'(x) dx = dv$

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x) - y(x)} dx = \int \frac{dv}{v^2 - v}$$

Risolvo per qualche esempio, cerco A e B t.c.

$$\frac{1}{v^2 - v} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v-1} = \frac{Av - A + Bv}{v^2 - v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x) - y(x)} dx = \int \frac{dv}{v^2 - v} = \int \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v} dv$$

$$= \ln|v-1| - \ln|v| = \ln \left| \frac{v-1}{v} \right| = \ln \left| \frac{y(x)-1}{y(x)} \right|$$

$$\ln \left| \frac{y(x) - 1}{y(x)} \right| = x + c$$

$$\Rightarrow \left| \frac{y(x) - 1}{y(x)} \right| = e^{x+c} = d e^x \quad \text{con } d = e^c$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{y(x)} = \pm d e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(x)} = 1 \pm d e^x = 1 + a e^x \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{1 + a e^x}$$

Troviamo quelle per cui $y(0) = 4$

$$4 = y(0) = \frac{1}{1+a} \Rightarrow 1+a = \frac{1}{4} = a = -\frac{3}{4}$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4} e^x}$$

Esercizio

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = y(x) + x y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $y'(x) = y(x) + x y^2(x)$
L'equazione è di tipo Bernulli.

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{1}{y(x)} + x$$

$$\text{pongo } z(x) = \frac{1}{y(x)} \Rightarrow z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$$

$$z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\left(\frac{1}{y(x)} + x\right) = -z(x) - x$$

$\Rightarrow z(x)$ risolve l'equazione di primo grado lineare
 $z'(x) + z(x) = -x$

$$\Rightarrow A(x) = \int z \, dx = x$$

$$\int (-x)e^x \, dx = -x e^x + \int e^x \, dx = e^x (1-x)$$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-x} \left(C + e^x (1-x) \right) = C e^{-x} + (1-x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(x)} = C e^{-x} + (1-x) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{C e^{-x} + (1-x)}$$

Troviamo quelle per cui $y(0) = 1$

$$y = y(0) = \frac{1}{C + 1} \Rightarrow C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) \tan x = \cos x \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $y'(x) + y(x) \tan x = \cos x$

L'equazione è di primo grado lineare, cerca del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$a(x) = \tan x$$

$$f(x) = \cos x$$

La cui soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(c + \int f(x) e^{A(x)} dx \right)$$

$$\text{con } A(x) = \int a(x) dx.$$

Procediamo con il calcolo di $A(x)$

$$A(x) = \int \tan(x) dx = - \int \frac{(-\sin(x))}{\cos(x)} dx = - \ln |\cos(x)|$$

$$\text{Poniamo a } \int \cos(x) e^{-\ln |\cos(x)|}$$

$$\int \cos(x) e^{-\ln |\cos(x)|} = \int \frac{\cos x}{|\cos(x)|} dx = \int dx = x \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\ln |\cos(x)|} (c+x)$$

$$y(x) = \cos(x) (c+x) \quad \text{per } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Troviamo quelle per cui $y(0)=0$

$$y=0 \Rightarrow y(0) = 0 (c+0) \Rightarrow c=0$$

\Rightarrow la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

terreno

risolvere

$$y' = 2x + y + y^3$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale

L'equazione è di tipo Bernoulli.

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{2x}{y^2} + x$$

$$\text{Pongo } z(x) = \frac{1}{y(x)} \Rightarrow z'(x) = -2 \frac{1}{y^3(x)} y'(x)$$

$$\Rightarrow z'(x) = -2 \left(\frac{y'(x)}{y^3(x)} \right) = -2 \left(\frac{2x}{y^2} + x \right) = -4x z(x) - 2x$$

$$\Rightarrow z(x) \text{ Risolvo } z'(x) + 4x z(x) = 2x$$

$$A(x) = \int 4x = 2x^2$$

$$\int 2x e^{A(x)} dx = \int 2x e^{2x^2} = \frac{1}{2} \int 4x e^{2x^2} dx = \frac{e^{2x^2}}{2}$$

$$z(x) = e^{-2x^2} \left(C + \frac{e^{2x^2}}{2} \right)$$

$$z(x) = C e^{-2x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y^2} = z(x) = C e^{-2x^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{C e^{-2x^2} + 1}}$$

Esercizio

Problema

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{x y(x)}{x^2 - 1} = 3x \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Svolgimento Cerco l'integrale generale di $y'(x) + \frac{x y(x)}{x^2 - 1} = 3x$

L'equazione è di primo grado lineare, cerca del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$a(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = 3x$$

la cui soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(c + \int f(x) e^{A(x)} dx \right)$$

con

$$A(x) = \int a(x) dx$$

visto che $x_0 = 0$

$$A(x) = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln (1 - x^2)$$

calcolo $\int f(x) e^{A(x)} dx = \int 3x e^{\frac{1}{2} \ln (1 - x^2)} dx$

$$= -3 \int \frac{(-x)}{\sqrt{1 - x^2}} = -3 \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln (1 - x^2)} \left(c - 3 \sqrt{1 - x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left(c - 3 \sqrt{1 - x^2} \right)$$

$$y(x) = \frac{e}{\sqrt{1 - x^2}} - 3$$

oltre $y(0) = 3 \Rightarrow 3 = y(0) = \frac{c}{\sqrt{1 - 0}} - 3 \Rightarrow c = 6$

La soluzione è

$$y(x) = \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}} - 3$$

Esercizio

Risolvere

$$y'(x) = 2y(x) - e^x y^2(x)$$

Svolgimento Cosa l'integrale generale

L'equazione è di tipo Bernoulli.

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{2}{y(x)} - e^x$$

$$\text{Pongo } z(x) = \frac{1}{y(x)} \Rightarrow z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$$

$$\Rightarrow z(x) \text{ risolve } z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\left(\frac{2}{y(x)} - e^x\right) = -2z(x) + e^x$$

$$\Rightarrow z'(x) + 2z(x) = e^x$$

$$A(x) = \int 2dx = 2x$$

$$\int f(x) e^{A(x)} = \int e^x e^{2x} = \int e^{3x} = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-x} \left(c + \frac{e^{3x}}{3} \right)$$

$$z(x) = c e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{3}{c e^{-x} + e^{2x}}$$