Corso di Calcolatori Elettronici

Algebra di Boole: definizione e proprietà

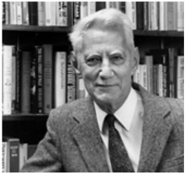
Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II

A.A. 2022-2023

George Boole

- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
  - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* (1854)
- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
  - *A symbolic analysis of relay and switching circuits* (1938)



Algebra di Boole (1)

Si dice *Algebra di Boole* una *struttura algebrica* $< K, +, \cdot, \neg, 0, 1 >$

- K è un insieme (detto **supporto**)
- 0 e 1 sono due elementi speciali del supporto K
- $+$, $\cdot$ e $\neg$ sono tre operazioni

$$
\begin{array}{lrl}
\textit{somma} & + : & K \times K \rightarrow K \\
\textit{prodotto} & \cdot : & K \times K \rightarrow K \\
\textit{complementazione} & \neg : & K \rightarrow K
\end{array}
$$

- ... che godono delle seguenti proprietà $(\forall a, b, c \in K)$

1. Commutativa:

$$a + b = b + a \tag{P1}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{P1'}$$

Algebra di Boole (2)

2. Esistenza di elemento neutro rispetto a $+$ e di elemento neutro rispetto a $\cdot$:

$$a + 0 = a \tag{P2}$$

$$a \cdot 1 = a \tag{P2'}$$

3. Distributiva:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{P3}$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \tag{P3'}$$

4. Esistenza del complemento:

$$a + (\neg a) = 1 \tag{P4}$$

$$a \cdot (\neg a) = 0 \tag{P4'}$$

Algebra di Boole a due valori

Se $K = \{0,1\}$ e le operazioni $+, \cdot, \neg$ si definiscono come segue:

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

la sestupla $< K, +, \cdot, \neg, 0, 1 >$ è **un'**algebra di Boole.

- ... ovvero sono soddisfatte le 8 proprietà (P1),(P1'),(P2),(P2'),(P3),(P3'),(P4),(P4')
- Le operazioni $+$, $\cdot$ e $\neg$ sono comunemente chiamate *OR*, *AND* e *NOT* (per motivi che saranno chiari nelle slide seguenti)

Principio di dualità

- In un'algebra di Boole, qualunque proprietà si ottenga per derivazione dagli assiomi (P1),(P1'),(P2),(P2'),(P3),(P3'),(P4),(P4') rimane valida se si scambia $+$ con $\cdot$ e viceversa, e l'elemento 0 con 1 e viceversa.

Proprietà dell'Algebra di Boole

Date tre *variabili booleane* $x, y, z \in K$, si possono far scaturire dagli 8 assiomi definitori (P1),(P1'),...,(P4),(P4') le seguenti proprietà

- Associativa:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \tag{1}$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \tag{2}$$

- Idempotenza:

$$a + a = a \tag{3}$$
$$a \cdot a = a \tag{4}$$

- Assorbimento:

$$a + (a \cdot b) = a \tag{5}$$
$$a \cdot (a + b) = a \tag{6}$$

Proprietà dell'Algebra di Boole

- Massimo e minimo assoluti in K:

$$x + 1 = 1 \tag{7}$$
$$x \cdot 0 = 0 \tag{8}$$

- Unicità del complemento:

$$\text{il complemento di } x\text{, indicato con } \neg x\text{, è unico} \tag{9}$$

- Convoluzione:

$$\neg(\neg x) = x \tag{10}$$

- Semplificazione:

$$a + (\neg a \cdot b) = a + b \tag{11}$$
$$a \cdot (\neg a + b) = a \cdot b \tag{12}$$

Notazione per l'operazione di complementazione

- Per l'assioma (P4),(P4') e per la proprietà (9), dato un elemento $x \in K$, esiste ed è unico l'elemento $\neg x \in K$ tale che:

$$x + (\neg x) = 1$$
$$x \cdot (\neg x) = 0$$

- L'elemento $\neg x$ si denota anche con i simboli $\overline{x}$ o x', e si chiama **il complemento** di x
- Le relazioni precedenti si possono dunque anche scrivere

$$x + \overline{x} = 1 \qquad\qquad x + x' = 1$$
$$x \cdot \overline{x} = 0 \qquad\qquad x \cdot x' = 0$$

- Nel seguito si utilizzerà prevalentemente la notazione $\overline{x}$

Teorema di De Morgan

- Legge di De Morgan:

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \tag{13}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \tag{14}$$

- In virtù della proprietà associativa si dà significato alle operazioni di somma e prodotto tra tre o più termini:

$$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Algebra di Boole della logica

Se $K = \{F, T\}$ e le operazioni $+, \cdot, \neg$ si definiscono come segue:

a	b	$a + b =$ a OR b
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

a	b	$a \cdot b =$ a AND b
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

a	$\neg a =$ NOT a
F	T
T	F

la sestupla $< K, +, \cdot, \neg, 0, 1 >$ è un'algebra di Boole con $F = 0$, $T = 1$

- ... ovvero sono soddisfatte le 8 proprietà (P1),(P1'),...,(P4),(P4')
- F sta per *false*, T per *true*
    - rappresentano il contenuto di verità di una proposizione
- *AND* operazione logica di *congiunzione*
- *OR* operazione logica di *disgiunzione*
- *NOT* operazione logica di *negazione*

Algebra di Boole degli insiemi

Dato un insieme T, sia K l'*insieme dei sottoinsiemi* di T.

- 0 è l'insieme vuoto ϕ
- 1 è l'insieme T

La sestupla $< K, +, \cdot, \neg, 0, 1 >$ è un'algebra di Boole se

- $+$ operazione insiemistica di *unione*
- $\cdot$ operazione insiemistica di *intersezione*
- $\neg$ operazione insiemistica di *complemento a T*

Teorema di Stone

Ogni algebra di Boole è rappresentabile su un'algebra di insiemi.

- Utilizzeremo i diagrammi di Venn per verificare proprietà di una qualsiasi algebra di Boole

Esempio di proprietà interpretabile tramite gli insiemi

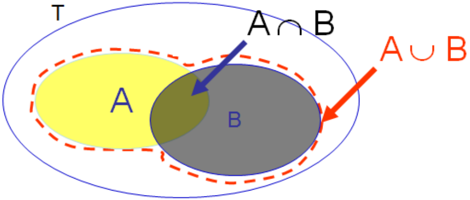
La proprietà di assorbimento (5), nelle sue due formulazioni:

$$a + (a \cdot b) = a$$
$$a \cdot (a + b) = a$$

corrisponde, nell'algebra degli insiemi, alle relazioni:

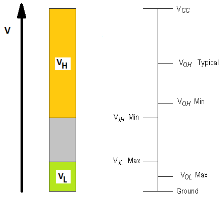
$$a \cup (a \cap b) = a$$
$$a \cap (a \cup b) = a$$

che trovano una giustificazione semplice ed intuitiva.



Circuiti elettronici digitali

- Nei *circuiti elettronici digitali*, si consente ad una grandezza fisica rappresentativa dello "stato" del circuito di assumere valori solo all'interno di intervalli limitati e disgiunti
- Ad esempio, la tensione elettrica tra un morsetto di uscita di un circuito e massa può assumere valori o in $[V_{Lmin}, V_{Lmax}]$ o in $[V_{Hmin}, V_{Hmax}]$ con $V_{Lmax} < V_{Hmin}$
  - Nel primo caso, si dice per convenzione che il *livello logico* sul morsetto di uscita è LOW (L)
  - Nel secondo caso, si dice per convenzione che il *livello logico* sul morsetto di uscita è HIGH (H)



Algebra di Boole dei circuiti di commutazione

Se $K = \{L, H\}$ e le operazioni $+, \cdot, \neg$ si definiscono come segue:

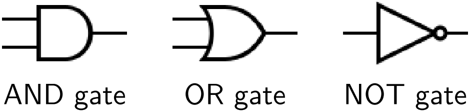
a	b	$a + b =$ a OR b
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

a	b	$a \cdot b =$ a AND b
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

a	$\neg a =$ NOT a
L	H
H	L

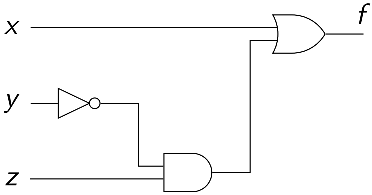
la sestupla $< K, +, \cdot, \neg, 0, 1 >$ è un'algebra di Boole con $L = 0, H = 1$

- ... ovvero sono soddisfatte le 8 proprietà (P1),(P1'),...,(P4),(P4')
- I circuiti elettronici che operano secondo le relazioni fondamentali dell'algebra di Boole dei circuiti sono detti *gate* o *porte logiche*



AND gate
OR gate
NOT gate

- Nel circuito rappresentato in figura il livello logico presente sul morsetto di uscita f è *funzione* dei livelli logici applicati sugli ingressi
- Il legame funzionale tra il valore di f e quello degli ingressi x, y e z può essere rappresentato mediante una *tabella di verità*
- Per ogni possibile combinazione delle variabili x, y e z si indica in tabella il corrispondente valore di f



$$f = x + \overline{y} \cdot z$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1