Esercizi su derivabilità

In ciascuno dei seguenti casi,

- determinare l'insieme di definizione D di f
- determinare l'insieme $E \subseteq D$ in cui esiste la derivata f', e calcolarla
- stabilire se gli eventuali punti di non derivabilità di f sono punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale o nessuna delle alternative precedenti

1. $f(x) = |x|$

2. $f(x) = x|x|$

3. $f(x) = (x-1)|x^2-3|$

4. $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^3-1}\right|$

5. $f(x) = \dfrac{|x^2-x|}{x+1}$

6. $f(x) = \sqrt{x(x-1)^2}$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x^5-x^4}$

8. $f(x) = x|x-1|\sin(\sqrt[5]{x+2})$

♦ ♦ ♦

9. Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + b & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x-2x^3}{x+3} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

i) Determinare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta continua in tutto $\mathbb{R}$.

ii) Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta anche derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

10. Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\log x}{\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

i) Determinare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta continua in tutto $\mathbb{R}$.

ii) Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta anche derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

11. Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{se } x < 0 \\ xe^{\sqrt{x}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

i) Determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f risulta continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, e scrivere l'espressione di f' per tale valore di a.

ii) La funzione f' è a sua volta derivabile in $\mathbb{R}$?

12. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, ma ha derivata f' discontinua in $x = 0$.