# Limk

mercoledì 18 ottobre 2023 08:30

Per ogni $b, c \in \mathbb{R}$, $b>1$ e $c>0$ vale:

① $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^c} = 0$ — 1 si ottiene da 2'

② $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{b^n} = 0$

③ $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ — 2, 3, 4 si dimostrano con il test del rapporto

④ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Inoltre, se $a_n \to +\infty$ allora

①' $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b(a_n)}{(a_n)^c} = 0$

②' $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_n)^c}{b^{a_n}} = 0$

③' $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}}{(a_n)^{a_n}} = 0$

Test del rapporto

Sia $a_n$ è successione di numeri reali positivi;

1) se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (1,+\infty) \cup \{+\infty\}$ allora la successione $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

2) se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0,1)$ allora la successione $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Usando il test del rapporto si dimostra

② $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n^c}{b^n}}_{a_n} = 0 \qquad \forall b>1$ e $c>0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^c}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n^c} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^c \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^c}_{1} \cdot \frac{1}{b} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^c \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \in (0,1)$$

③ $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{b^n}{n!}}_{a_n} = 0 \qquad \forall b>1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{b^{n+1}}{b^n} = \frac{1}{n+1} \cdot b = \frac{b}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$(n+1)! = n+1 \cdot n \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 2 \cdot 1 = n!\,(n+1)$

Oss. Dando per vero che $\forall b>1$ e $c>0$ si abbia $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_n)^{c'}}{b^{a_n}} = 0$ * se $a_n \to +\infty$

si deduce ① $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^c} = 0$

Mostrare la ① $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^c} = 0$

Fisso $a_n = \log_b(n^c) = \underset{>0}{c} \cdot \underbrace{\log_b(n)}_{+\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Do per vero *

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b^{a_n}} = 0$ (applicato con $c'=1$) cioè $\lim_{n\to+\infty} \frac{c \cdot \log_b(n)}{n^c} = 0$ da cui $\lim_{n\to+\infty} \frac{c \log_b n}{n^c} \cdot \frac{1}{c} = 0$

Proprietà: sia $\{a_n\}$ successione regolare di numeri reali, cioè tale che esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- Se $b \in \mathbb{R}$, $b>1$ allora $\lim_{n\to+\infty} b^{a_n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a = +\infty \\ b^a & \text{se } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } a = -\infty \end{cases}$$

- Se $b \in (0,1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} \begin{cases} 0 & \text{se } a = +\infty \\ b^a & \text{se } a \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } a = -\infty \end{cases}$$

Teorema

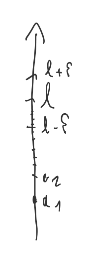
Sia $a_n$ una suc a valori in $\mathbb{R}$ e $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

① Se $a_n$ è monotona non decrescente, allora esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$

② Se $a_n$ è monotona non crescente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf A$

Dimostrazione ①

Per ipotesi $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$




Distinguo i casi $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\sup A = +\infty$

- Caso = $\sup A \in \mathbb{R}$ $\quad l = \sup A$ $\quad$ Voglio mostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

  Devo mostrare che esiste $N$ tale che $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

Per definizione $l$ è il più piccolo dei maggioranti di $A$, che significa che è un maggiorante

- $a_n \leq l \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- ogni numero $l' < l$ NON è un maggiorante per $A$, ogni numero in particolare $\forall l' < l \ \exists N \in \mathbb{N}$ che $l' < a_n$

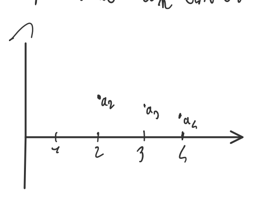
  In particolare $l' = l - \varepsilon$ e quindi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > l - \varepsilon$. Poiché $a_n$ non-decrescente vale $l - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \underbrace{l \leq l - \varepsilon}$

- Caso $\sup A = +\infty$ cioè $A$ illimitato superiormente. Voglio mostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Dato $M \in \mathbb{R}$, devo mostrare che $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M \quad \forall n \geq N$. Siccome $A$ è limitato superiormente non esistono maggioranti di $A$ in particolare $M$ NON è un maggiorante quindi $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$

  In particolare $a_n \geq a_N \underbrace{> M} \quad \forall n \geq N$ $\qquad$ fine dimostrazione

Osservazione generale: è vero che ogni successione definitivamente monotona è regolare ($\lim_{n\to+\infty} a_n$ può NON essere $\sup A$ / $\inf A$)

esempio Considero $a_n$ data da $a_1 = -1 \quad a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2$




Teorema Definizione di e

$a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \geq 1$ è monotona non-decrescente e limitata. Il suo limite è $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in (1,+\infty)$

oss $a_n$ è strettamente crescente

$e = 2,71$

Dim

① Dimostro che la successione è non decrescente. Questo significa

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 2$

$a_n \geq a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$ equivale a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 2$

che equivale a $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$

cioè $\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \geq \frac{n-1}{n}$

$$\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

devo provare che $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2$

Dis di Bernulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \geq 1, \ \forall x > -1$

La applico con $x = -\frac{1}{n^2} > -1$ per $n \geq 2$ e ottengo che:

$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$ $\qquad$ fine ①

Dim ② Dimostro che $a_n$ è limitata. Si definisce $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \geq 1$ e si mostra che:

1) $b_n$ è monotona non crescente

2) che $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1$ $\qquad$ (facile $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$)

Queste 2 cose insieme dimostrano che $a_n$ è limitata perché $\forall n \geq 1$ vale $a_n \leq b_n \leq b_1 = 4$

Verifica di $b_n$ non crescente. Devo mostrare che $\forall n \geq 2$ vale $b_n \leq b_{n-1}$ cioè $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$

cioè $1+\frac{1}{n} \leq \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n$

cioè $1+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \quad \forall n \geq 2$

x Bernulli

$x = \frac{1}{n^2-1}$ vale $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} > 1+\frac{1}{n}$ $\qquad$ mostra la prima dis (monotona non crescente)