1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\log x - x^{n+2}}{x^n} \qquad x \in [1, +\infty)$$

2) $$f_n(x) = \begin{cases} x^n \log(x^n) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2.1) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme di f_n.

2.2) Calcolare $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\, dx$

3) $$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sqrt{1 - x^{2n}} \qquad x \in [-1, 1]$$

Studiare convergenza puntuale ed uniforme.

4) $$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad x \in [0, +\infty)$$

Dimostrare che non si ha convergenza uniforme su $(0, +\infty)$, mentre si ha convergenza uniforme su $[a, +\infty)$ $\forall a > 0$.

5) $$f_n(x) = \frac{x + n}{x^2 + n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Studiare convergenza puntuale e uniforme.

sol. (4)

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad x \in [0, +\infty)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

$f_n(x)$ continua, $f(x)$ discontinua, quindi in $[0, +\infty)$ non posso avere conv. uniforme.

Sia $a > 0$ (il problema è $x = 0$ dove f è discontinua)

Studiamo la conv. uniforme in $[a, +\infty)$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{x} \right|$$

$$= \left| \frac{x^2 - x^2 - \frac{1}{n}}{x\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)} \right| = \frac{1}{nx\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$x^2 + \frac{1}{n} \geq x^2 \Rightarrow x\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) \geq x^3$$

$$\Rightarrow nx\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) \geq n x^3 \qquad (*)$$

ma $x \in [a, +\infty) \Rightarrow x \geq a$

(*) $nx\left(x^2+\frac{1}{n}\right) \geq nx^3 \geq na^3$

e $\dfrac{1}{n\left(x^2+\frac{1}{n}\right)} \leq \dfrac{1}{na^3} \Rightarrow$

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{na^3} \longrightarrow 0$$

per $n\to+\infty$.

Quindi in $[a,+\infty)$ ho conv uniforme

per $a>0$.

(2) $$f_n(x) = \begin{cases} x^n \log(x^n) & 0<x\leq 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n \log(x^n)|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} nx^n |\log x| = (*)$$

$\log x \leq 0 \iff x<1 \Rightarrow$ in $(0,1]$

il $\log x$ e' sempre negativo.

Quindi

(*) $$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left(-f_n(x)\right)$$

$$D\left[-n x^n \log x\right] = -n^2 x^{n-1}\log x - n x^n \frac{1}{x}$$

$$= n x^{n-1}\left(-n\log x - 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log x \leq -\frac{1}{n} \Rightarrow x \leq e^{-\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n - f| = \lim_n -n e^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{e} \not\to 0$$ non ho conv uniforme

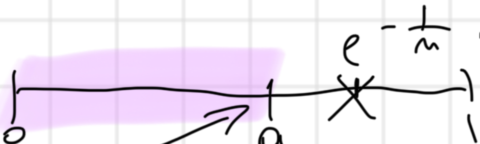
2.1) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx$$

posso passare al limite sotto il segno di integrale? Devo controllare se in $[0,\frac{1}{2}]$ ho conv uniforme

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |n x^n \log x| \leq n\left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\log\frac{1}{2}\right|$$

$\longrightarrow 0$ conv uniforme

OSS n grande



ho conv uniforme in $[0,a]$ $\forall\ 0<a<1$

$$\Rightarrow \lim_n \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \log(x^n) = \int_0^{\frac{1}{2}} 0 = 0$$