GRUPPO

La struttura algebrica $(S, \perp)$ è detta gruppo se:

1) $\perp$ è un'operazione associativa
2) esiste l'elemento neutro rispetto a $\perp$
3) ogni elemento S è dotato di simmetrico

Se $\perp$ è commutativa il gruppo $(S, \perp)$ è detto gruppo abeliano

SPAZI VETTORIALI

· Definizione spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ è una quaterna $(V, K, +, \cdot)$ costituita dall'insieme V, dal campo K, dall'operazione interna $+$ e dall'operazione esterna $\cdot$, tale che valgono le seguenti proprietà:

1. $(V, +)$ è un gruppo abeliano
2. $\alpha \cdot u + \alpha \cdot v = \alpha(u+v)$
3. $\alpha \cdot u + \beta \cdot u = (\alpha + \beta) \cdot u$
4. $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$
5. $1 \cdot u = u$

· Definizione sottospazio

Considerati

V uno spazio vettoriale definito sul campo K

$H \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto di V

Il sottoinsieme H dello spazio vett. V è un sottospazio vettoriale se

$\boxed{H \leq V}$

1. $\forall u, v \in H \quad u+v \in H$

2) $\forall \alpha \in K \quad \forall v \in H \quad \alpha v \in H$

· Lineare dipendenza / indipendenza

-> I vettori $v_1, v_2 \dots v_m$ sono detti linearmente indipendenti se l'unica possibilità per ottenere il vettore nullo $\underline{0}$, come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2 \dots v_m$, è moltiplicare scalarmente i suddetti vettori con 0.

Qualora esistono scalari $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_m v_m = 0$ allora i vettori $v_1, v_2 \dots v_m$ si dicono linearmente dipendenti

-> I vettori $v_1, v_2 \dots v_m$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi dipende dai rimanenti vettori, ovvero se è scritto come combinazione lineare di tutti gli altri

Dim: considerati gli scalari $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m \in K$:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

Se i vettori $v_1, v_2 \dots v_m$ sono linearmente dipendenti, allora esiste un $i = 1, 2 \dots m$ tale che $\alpha_i \neq 0$

$\Rightarrow \alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_m v_m$

moltiplicando per α_i^{-1}

$\alpha_i^{-1} \alpha_i v_i = \alpha_i^{-1} (-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_m v_m)$

$v_i = -\alpha_i^{-1} \alpha_1 v_1 - \alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_i^{-1} \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_i^{-1} \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_i^{-1} \alpha_m v_m$

Ponendo $\beta_j = -\alpha_i^{-1} \alpha_j$ per $j = 1, 2 \dots$

$v_i = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m$

$\Rightarrow v_i$ è scritto come combinazione lineare dei restanti vettori

· Th di Steinitz

Dato uno spazio vettoriale V e due sistemi di vettori $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $T = \{v_1, v_2 \dots v_m\}$. Se i vettori di S sono linearmente indipendenti ed ognuno di essi dipende dai vettori di T, allora la cardinalità di S è minore od uguale della cardinalità di T ovvero $n \leq m$.

Dim: si ragiona per induzione su $m \geq 1$

- si pone $m = 1$

ovvero si suppone che il sistema T sia costituito da un solo vettore $T = \{v_1\}$

$\Rightarrow$ anche il sistema S non può avere più di un vettore, perché, se per assurdo S fosse costituito da due vettori u_1 e u_2, ciascuno di essi, per hp, dipenderebbe dal solo vettore v_1 di T

$u_1 = \alpha v_1 \qquad u_2 = \beta v_1$

$v_1 = \alpha^{-1} u_1 \qquad \Rightarrow u_2 = \beta\alpha^{-1} u_1 \qquad \Rightarrow$ i vettori u_1 e u_2 sono proporzionali e linearmente dipendenti

$\rightarrow$ ciò è assurdo perché, per hp, il sistema S è linearmente indipendente

- sia $m > 1$ e si suppone il th. vero per $m - 1$
- si dimostra il teorema per m

Poiché, per hp, ogni vettore $u_i \in S$ dipende linearmente dagli m vettori di T, si ha:

$$u_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1m} v_m$$

$$u_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{2m} v_m$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$u_n = a_{n1} v_1 + a_{n2} v_2 + \dots + a_{nm} v_m \qquad \text{con } a_{ij} \text{ scalari} \in K$$

I vettori del sistema S sono linearmente indipendenti e dunque i suddetti vettori $u_i \neq 0 \ \forall i = 1, 2 \dots n$

Si può considerare il vettore u_1 e richiedere che non sia nullo.

Deve risultare $\exists\, j = 1, 2, .. n \quad : a_{ij} \neq 0$

ovvero deve esistere almeno un coeff. della combinazione lineare che non sia nullo.

Si può considerare $a_{11} \neq 0$

Allora: $a_{11} v_1 = u_1 - a_{12} v_2 - \ldots - a_{1n} v_n$

Moltiplicando per a_{11}^{-1}

$$a_{11}^{-1} a_{11} v_1 = a_{11}^{-1} u_1 - a_{11}^{-1} a_{12} V_2 - \ldots - a_{11}^{-1} a_{1n} v_n :$$

$$v_1 = a_{11}^{-1} u_1 + b_{12} v_2 + \ldots + b_{1n} v_n$$

Ponendo $b_{1j} = a_{11}^{-1} a_{1j}$ si sostituisce l'espressione v_1 nelle relazioni di $u_2 \ldots u_m$

$$u_2 = a_{21} (a_{11}^{-1} u_1 + b_{12} v_2 + \ldots + b_{1n} v_n) + a_{22} v_2 + \ldots + a_{2n} v_n$$

$$u_m = a_{m1} (a_{11}^{-1} u_1 + b_{12} v_2 + \ldots + b_{1n} v_n) + a_{m2} v_2 + \ldots + a_{mn} v_n$$

Posto $c_{i1} = a_{i1} a_{11}^{-1}$ e d_{ij} i coeff. che accompagnano i vett. $v_2 .. v_n$.

$$u_2 - c_{21} u_1 = d_{22} v_2 + .. + d_{2n} v_n$$

$$u_m - c_{m1} u_1 = d_{m2} v_2 + .. + d_{mn} v_n$$

Costruendo i seguenti vettori:

$$w_i = u_i - c_{i1} u_i \qquad i = 2, \ldots, m$$

le precedenti relazioni diventano:

$$w_2 = d_{22} v_2 + \ldots + d_{2n} v_n$$

$$w_m = d_{m2} v_2 + \ldots + d_{mn} v_n$$

Il seguente sistema di vettori $S' = \{w_2 \ldots w_m\}$ soddisfa le seguenti proprietà:

- S' è un sistema di vettori linearmente indipendenti

(perchè se così non fosse ci sarebbe un vettore $w_i \in S'$ che dipenderebbe dai restanti vettori $w_j \in S'$ con $j = 2 .. m$ e $j \neq 1$. Ciò implicherebbe che anche il vett. $u_i \in S$

dipenderebbe dai rimanenti vettori $v_j \in S$ con $j = 2 \dots m$, $m \geq j \geq 1$

- Ogni vettore di S' dipende linearmente dai vettori $v_2 \dots v_n \in T$

Per hp. induttiva, allora la cardinalità del sistema di vettori S' è minore o uguale alla cardinalità del sistema di vettori di T, ovvero: $m-1 \leq n-1 \Rightarrow m \leq n$

$\Rightarrow$ segue l'asserto del teorema

- Definizione di base

Un sistema di generatori linearmente indipendenti è chiamato base dello spazio vettoriale V

- Munito, massimale e minimale

1) Il sottoinsieme X si dice <u>munito</u> della proprietà P, quando $\forall x \in S$:

$x \in X \Leftrightarrow x$ soddisfa la proprietà P

2) Il sottoinsieme X si dice <u>massimale</u> rispetto alla proprietà P, quando:

$\forall Y \subseteq S : X \subset Y \Rightarrow Y$ non ha la proprietà P.

Il Y, ottenuto dal sottoinsieme X con l'aggiunta di un elemento dell'insieme S, non gode della proprietà P assegnata

3) Il sottoinsieme X si dice <u>minimale</u> rispetto alla proprietà P, quando:

$\forall Y \subseteq S : Y \subset X \Rightarrow Y$ non ha la proprietà P

Il Y, ottenuto dal sottoinsieme X sottraendo un elemento dell'insieme S, non gode della proprietà P assegnata

· **Sottospazio congiungente**

Il sottospazio generato dall'unione dei sottospazi H e T, $(H \cup T)$, è chiamato sottospazio congiungente. $\to H+T$

· **Formula di Grassmann**

Sia V uno spazio vettoriale e siano H e T due suoi sottospazi con dimensione finita :

$$\dim(H+T) = \dim H + \dim T - \dim(H \cap T)$$

· Se $H \subseteq T$, allora si avrà :

$H \cup T = T$, $H \cap T = H$

$\Rightarrow \dim(H+T) = \dim T$

$\dim H + \dim T - \dim(H \cap T) = \dim H + \dim T - \dim H = \dim T$

Ora si supponga che nessuno dei due sottospazi sia contenuto nell'altro

Indicando $\dim H = h$ e $\dim T = t$

e le basi di H e T rispettivamente

$B_H = \{u_1, u_2, \dots u_h\}$ $\qquad$ $B_T = \{v_1, v_2 \dots v_t\}$

Si indichi con $B = \{u_1, u_2, \dots u_h, v_1, v_2, \dots v_t\}$ il sistema di vettori ottenuto dall'unione delle due basi B_H e B_T

· $B_H \cup B_t$ è un sistema di generatori di $H+T$

· $B_H \cup B_t$ è formato da vettori linearmente indipendenti

– Si dimostri $H \cap T = \{\underline{0}\} \Rightarrow B$ base di $H+T$

· linear indipendenza

$$\underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n}_{=a} + \underbrace{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots \beta_t v_t}_{=b} = 0$$

Poiché a è combinazione lineare dei vettori della base B_H e il vettore b è combinazione lineari dei vettori della base B_t, allora rispettivamente $a \in H$ e $b \in T$.

La precedente combinazione lineare diverrà:

$$a + b = \underline{0} \Rightarrow a = -b$$

Per definizione di sottospazio vettoriale, dato che $b \in T \Rightarrow -b \in T$.

Ciò implica che

$$a \in H \cap T \quad , \; b \in H \cap T$$

Per hp. $H \cap T = \{\underline{0}\}$, quindi $a = \underline{0}$, $b = \underline{0}$

ovvero

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = \underline{0}$$
$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_t v_t = \underline{0}$$

Poiché B_H e B_T sono basi e i rispettivi vettori sono linearmente indipendenti

Si conclude:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_t = 0$$

$\Rightarrow$ B è un sistema di vettori linearmente indipendenti di $H+T$ ✓

· sistema di generatori : si consideri un vettore $v \in H+T$, dunque

$$\exists\, a \in H, \exists\, b \in T : \quad v = a + b$$

I vettori $a \in H$ e $b \in T$ sono combinazione lineare dei vettori delle rispettive basi B_H e B_t:

$\Rightarrow \quad v = a+b = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_h u_h + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_t v_t$.

$\Rightarrow$ il vettore v è combinazione lineare dei vettori di B.

Per la generalità del vettore $v \in H+T$, si ha che B è un sistema di generatori per $H+T$

1. Nel caso in cui $H \cap T = \{\underline{0}\}$, in particolare $\dim(H \cap T) = 0$, una base di $H+T$ è ottenuta come unione delle rispettive basi di H e di T.

Ciò implica che $\dim(H+T) = h+t = \dim H + \dim T$ $\Rightarrow$ formula dimostrata

2. Nel caso in cui $H \cap T \neq \{\underline{0}\}$ e quindi $\dim(H \cap T) = q \neq 0$.

Si consideri una base di $H \cap T$:

$B_{H\cap T} = \{e_1, e_2 \ldots e_q\}$.

Valgono le seguenti relazioni

$$\begin{matrix} H \cap T \subseteq H \\ H \cap T \subseteq T \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dim(H \cap T) \leq \dim H \\ \dim(H \cap T) \leq \dim T \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} q \leq h \\ q \leq t \end{matrix}$$

Possiamo quindi aggiungere alla base $B_{H\cap T}$

- $h-q$ vettori per complementarla ad una base di H, $B_H = \{e_1, e_2, \ldots e_q, u_{q+1} \ldots u_h\}$, scegliendo $u_{q+1}, \ldots, u_h$ in $H - (H \cap T)$;
- $t-q$ vettori per complementarla ad una base di T, $B_t = \{e_1, e_2, \ldots e_q, v_{q+1}, \ldots v_t\}$, scegliendo $v_{q+1} \ldots v_t$ in $T - (H \cap T)$

Dobbiamo dimostrare che $B = \{e_1, e_2 \ldots e_q, u_{q+1}, \ldots u_h, v_{q+1}, \ldots v_t\}$ è una base di $H+T$

- <u>lineare indipendenza</u>

$$\overbrace{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} e_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h}^{=a} + \overbrace{\beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t}^{=b} = \underline{0}$$

Poichè il vettore a è combinazione lineare dei vettori della base B_H e il vettore b è combinazione lineare dei vettori delle base B_t, allora rispettivamente $a \in H$ e $b \in T$.

La precedente combinazione lineare diventa

$$a + b = \underline{0} \quad \Rightarrow a = -b$$

$$a \in H \cap T, \quad b \in H \cap T$$

In particolare, poichè $B_{H \cap T}$ è una base di $H \cap T$ allora:

$$\beta_{q+1} v_{q+1} + \dots + \beta_t v_t = b = \delta_1 e_1 + \dots + \delta_q e_q$$

$$\delta_1 e_1 + \dots + \delta_q e_q - \beta_{q+1} v_{q+1} - \dots - \beta_t v_t = \underline{0}$$

Essendo B_t una base, i vettori $e_1 \dots e_q, v_{q+1} \dots v_t$ sono linearmente indipendenti.

$$\delta_1 = \dots = \delta_q = \beta_{q+1} = \dots = \beta_t = 0$$

La combinazione lineare iniziale diventerà

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \dots + \alpha_h u_h = \underline{0}$$

$B_H \to$ base

$e_1 \dots e_n$ lin. indipendenti

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_q = \alpha_h = 0 = \beta_t = 0$

$\Rightarrow B$ linearmente indipendente

· <u>Sistema di generatori</u>

si consideri un vettore $v \in H + T$:

$\exists a \in H, \exists b \in T$:

$v = a + b =$ $= \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_q e_q + \beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t$

$= \delta_1 e_1 + \ldots + \delta_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \ldots + \alpha_h u_h + \beta_{q+1} v_{q+1} + \ldots + \beta_t v_t$

avendo posto $\delta_i = \alpha_i + \beta_i$

Il vettore v è combinazione lineare dei vettori di B.

Per la generalità del vettore $v \in H+T$, si ha che B è un sistema di generatori per $H+T$

$$\Rightarrow \dim(H+T) = q+h-q+t-q = h+t-q = \dim H + \dim T - \dim(H \cap T)$$

- Sottospazi supplementari