Università di Napoli Federico II – Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Calcolatori Elettronici I

Minimizzazione di funzioni incompletamente specificate

Funzioni incompletamente specificate

- Nei problemi di progetto, è possibile, in alcune circostanze, che il valore di una funzione booleana per alcune n-uple di valori delle sue variabili possa essere indifferentemente 0 o 1
  - Il valore può essere irrilevante ai fini del funzionamento del sistema descritto dalla funzione
  - Può esserci una dipendenza tra le variabili che esclude alcune combinazioni

Funzioni incompletamente specificate

- Si parla pertanto di **punti di non specificazione** o **don’t care**
- Due funzioni si dicono **compatibili** se assumono gli stessi valori, eccetto al più nei punti di non specificazione
- Se i punti di non specificazione sono k le funzioni compatibili sono 2^k
- Due funzioni compatibili “speciali”
  - f_0 = vale 0 in tutti i k punti di non specificazione
  - f_1 = vale 1 in tutti i k punti di non specificazione

Esempio

- Tabella di decodifica da codice BCD a Eccesso 3
  - I trattini indicano condizioni di indifferenza

A	B	C	D	w	x	y	z
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	-	-	-	-
1	0	1	1	-	-	-	-
1	1	0	0	-	-	-	-
1	1	0	1	-	-	-	-
1	1	1	0	-	-	-	-
1	1	1	1	-	-	-	-

Presenza di don't care

- I don’t care possono essere sfruttati per minimizzare ulteriormente la struttura di una funzione logica
  - si può cercare tra tutte le funzioni compatibili quella che ha costo minimo
- Gli '1' nella tabella di verità consentono di ottenere implicanti più “ampi”
- D’altro canto, un maggior numero di ‘0’ nella tabella di verità riduce il numero di mintermini da coprire
  - conviene considerare i d.c. come ‘1’ quando si cercano gli implicanti, e come ‘0’ quando si ricerca la copertura
- **Metodo**: si determinano tutti i PI della funzione compatibile f_1 (esclusi quelli che coprono solo d.c.) e si imposta con questi il problema di copertura degli 1 della funzione compatibile f_0

Definizioni

- Sia $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(X)$ una funzione di n variabili
- Si definiscono i seguenti insiemi
  - ON-Set $\Sigma = \{X_i \mid f(X_i) = 1\}$
  - DC-Set (Don't Care-Set) $\Delta = \{X_i \mid f(X_i) = -\}$
  - OFF-Set $\varphi = \{X_i \mid f(X_i) = 0\}$
- Valgono le relazioni
  - $\Sigma \cup \Delta \cup \varphi = B^n$; $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$; $\Sigma \cap \varphi = \emptyset$; $\Delta \cap \varphi = \emptyset$
- Due dei tre insiemi sono sufficienti a definire in modo completo e univoco una funzione

Minimizzazione: fase di espansione

- Mappe di Karnaugh
  - I punti di non specificazione possono essere considerati pari a 1 per generare sottocubi di area maggiore e pari a 0 se non è utile che siano “coperti”
- Metodo di Quine-McCluskey
  - Oltre ai mintermini appartenenti all'ON-Set si considerano anche i mintermini appartenenti al DC-Set
  - Gli implicanti generati dal consenso di mintermini tutti appartenenti al DC-Set vengono marcati a priori
    - Non è necessario includerli tra gli implicanti primi

Esempio

Minimizzare la funzione f(x_3, x_2, x_1, x_0) specificata come segue:

ON-Set={0100,1010,1011,1101,1110,1111}

DC-Set={0011,0101,0110,0111}

Espansione tramite mappe di Karnaugh

x_1x_0 \ x_3x_2	00	01	11	10
00		1		
01		-	1	
11	-	-	1	1
10		-	1	1

Implicanti primi

01--

-11-

1-1-

--11

-1-1

Esempio

ON-Set = {0100, 1010, 1011, 1101, 1110, 1111}

DC-Set = {0011, 0101, 0110, 0111}

Espansione tramite Quine-McCluskey

4	0100	✔
3	0011	✔
5	0101	✔
6	0110	✔
10	1010	✔
7	0111	✔
11	1011	✔
13	1101	✔
14	1110	✔
15	1111	✔

4, 5	010-	✔
4, 6	01-0	✔
3, 7	0-11	✔
3, 11	-011	✔
5, 7	01-1	✔
5, 13	-101	✔
6, 7	011-	✔
6, 14	-110	✔
10, 11	101-	✔
10, 14	1-10	✔
7, 15	-111	✔
11, 15	1-11	✔
13, 15	11-1	✔
14, 15	111-	✔

4, 5, 6, 7	01--
3, 7, 11, 15	--11
5, 7, 13, 15	-1-1
6, 7, 14, 15	-11-
10, 11, 14, 15	1-1-

Matrice di copertura

- È necessario “coprire” i soli mintermini appartenenti all'ON-SET

$\overbrace{\hspace{6em}}^{\text{Mintermini} \in \text{ON-Set}}$

	0100	1010	1011	1101	1110	1111
01--	1					
--11			1			1
-1-1				1		1
-11-					1	1
1-1-		1	1		1	1

Implicanti primi

Matrice di copertura

Mintermini ∈ ON-Set

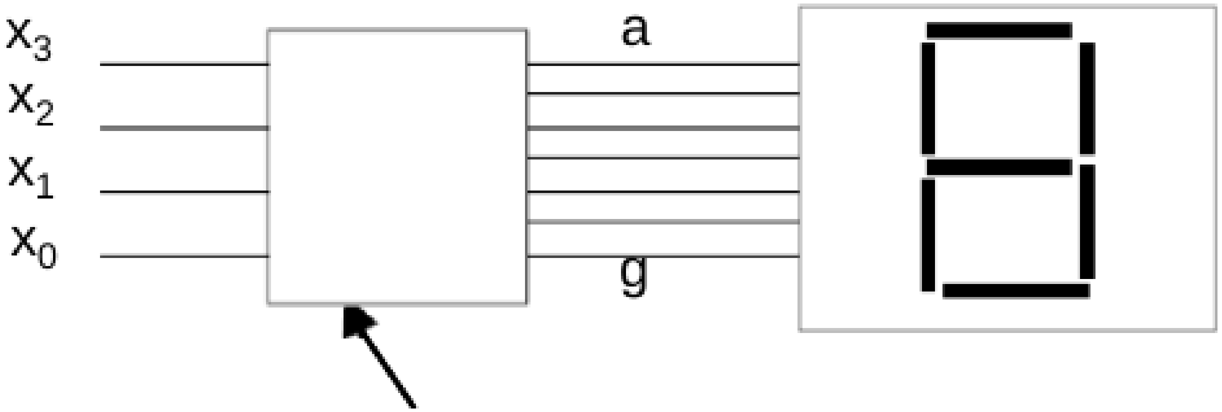
	0100	1010	1011	1101	1110	1111
01--	1					
--11			1			1
-1-1				1		1
-11-					1	1
1-1-		1	1		1	1

Implicanti primi

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \overline{x}_3 x_2 + x_2 x_0 + x_3 x_1$$

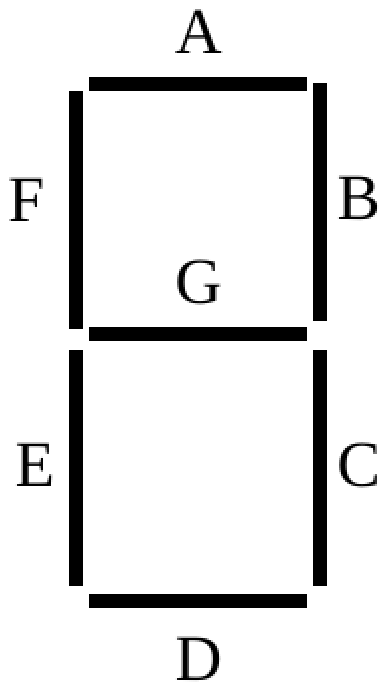
Esercizio

- Progettare una rete combinatoria che riceve in ingresso una cifra decimale codificata in binario (codice BCD) e produce in uscita sette segnali (uscite: a, b, c, d, e, f, g) che accendono (valore 1) o spengono (valore 0) i sette segmenti di un display decimale



Transcodificatore per display a 7 segmenti

Esercizio



x3	x2	x1	x0	A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1

DC = {1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111}

Esempio

Minimizzazione della funzione A

Espansione tramite mappe di Karnaugh

$x_1x_0 \backslash x_3x_2$	00	01	11	10
00	1		-	1
01		1	-	1
11	1	1	-	-
10	1		-	-

Implicanti primi

1--- essenziale

-0-0 essenziale

-01-

--11

-1-1 essenziale

$A = x_3 + \overline{x_2}\,\overline{x_0} + x_2x_0 + \overline{x_2}x_1$ oppure $A = x_3 + \overline{x_2}\,\overline{x_0} + x_2x_0 + x_1x_0$