# Lezione 17

Fisica I – Ingegneria Automazione e Informatica

Università di Napoli "Federico II"

prof. Nicola R. Napolitano

## Riepilogo della lezione precedente

1) Giroscopio
2) Rotolamento su piano inclinato

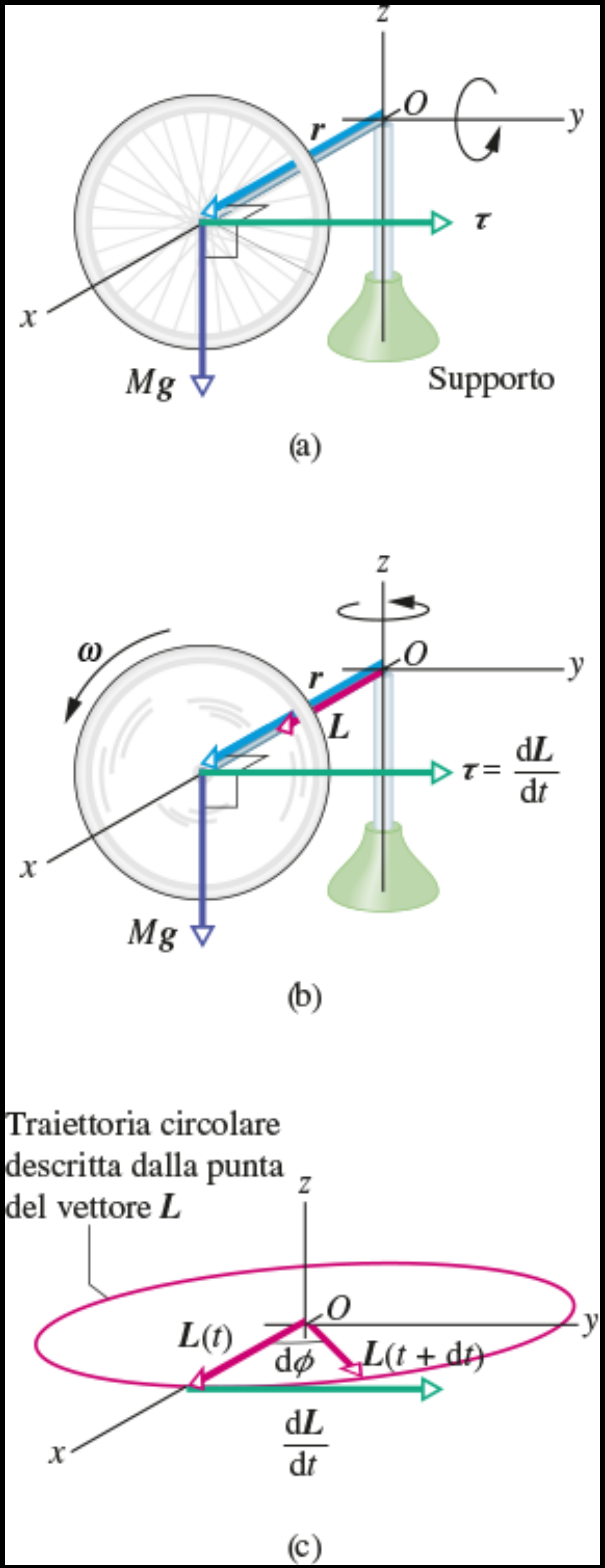
## In questa lezione

1) Leve
2) Statica dei corpi rigidi
3) Leggi di Keplero

# Riassunto del moto rotazionale

| | Moto di traslazione | Moto rotatorio (attorno ad un asse fisso) |
|---|---|---|
| Massa | $m$ | $I$ |
| velocità | $\vec{v}$ | $\vec{\omega}$ |
| accelerazione | $\vec{a}$ | $\overrightarrow{\varpi}$ |
| Quantità di moto | $\vec{p} = m\vec{v}$ | $\vec{L} = I\vec{\omega}$ |
| Energia cinetica | $K = \frac{1}{2}mv^2$ | $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$ |
| Equilibrio | $\sum \vec{F} = 0$ | $\sum \vec{\tau} = 0$ |
| II Legge di Newton | $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ | $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ |
| alternativamente | $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ | $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ |
| Legge di conservazione | $\vec{p}$ =costante | $\vec{L}$ =costante |
| Potenza | $P = Fv$ | $\mathcal{P} = \tau\omega$ |

# Il Giroscopio




1) se la ruota non gira, la forza peso genera un momento della forza

$$\tau = Mgr \sin 90^\circ = Mgr$$

2) se la ruota gira ha un momento angolare diretto lungo il raggio $\vec{r}$ (perché?)

$$L = I\omega$$

3) ma la forza peso produce ancora un momento della forza che e' diretto perpendicolarmente a $\vec{r}$ e a $\overrightarrow{L}$ e che introduce una variazione della direzione del momento angolare detta **precessione** (vedi figura in basso). Quindi siccome

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\, dt$$

allora

$$dL = \tau\, dt = Mgr\, dt$$

4) Dalla figura in basso vediamo anche che il $dL$ puo' essere scritto come

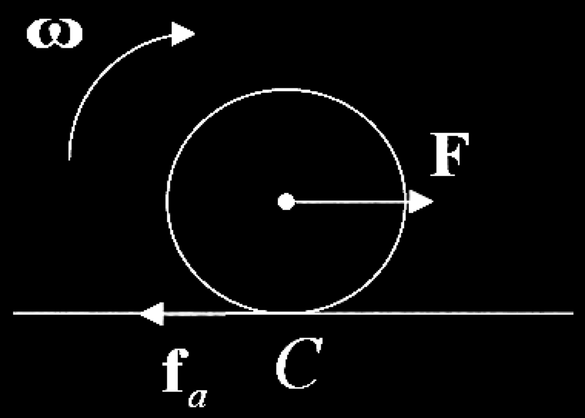
$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr\, dt}{I\omega}$$

Dividendo primo e secondo membro per $dt$ si ottiene che la velocita' angolare della precessione e'

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$$

# Rotolamento puro Sfera

Se applichiamo la forza **F**, per ruotare, la sfera deve avere attrito (~statico) con il piano, altrimenti striscia.




Per la traslazione

$$\begin{cases} F - f_a = ma_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

Per la rotazione

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}_a = I\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow$$

$$f_a r = I\alpha \qquad \text{dove} \qquad a_{\mathrm{CM}} = \alpha R$$

Considerando tutte le equazioni

$$\begin{cases} F - f_a = ma_{CM} \\ f_a = \dfrac{I}{R^2} a_{CM} \end{cases} \Rightarrow$$

$$F = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{F}{\left(m + \dfrac{I}{R^2}\right)} = \frac{F}{m\left(1 + \dfrac{I}{mR^2}\right)}$$

L'accelerazione e' minore rispetto a quella che avremmo per solo strisciamento senza attrito

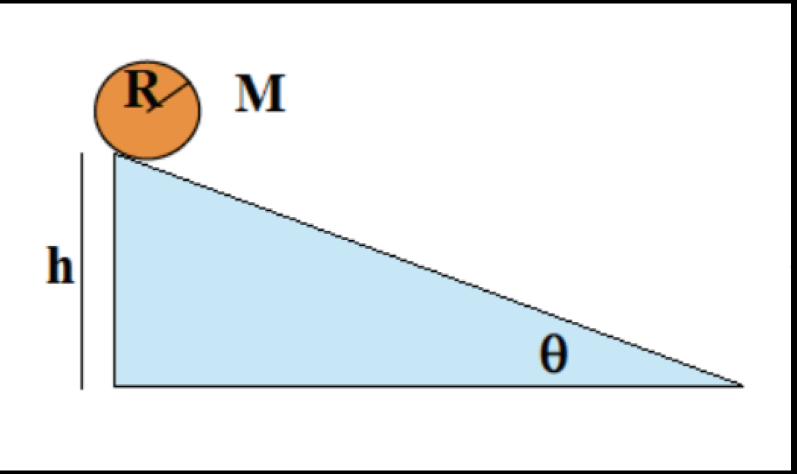
$$f_a = \frac{I}{R^2} a_{CM} = \frac{I}{R^2} \frac{F}{m\left(1 + \dfrac{I}{mR^2}\right)} = \frac{F}{\left(\dfrac{R^2}{I} m + 1\right)} < F$$

Per il rotolamento puro occorre che

$$f_a \leq \mu_s mg$$

vedi anche dimostrazione nelle slide seguenti

# Rotolamento puro Sfera




Sia $\mu_s$ il coefficiente di attrito statico tra il piano e il corpo rigido e supponiamo che il corpo sia fermo quando inizia il moto e si trovi ad un'altezza **h** dal suolo. Sia inoltre **I'** **il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il CM** e ⊥ al foglio.

All'istante t = 0 s il corpo viene lasciato libero di muoversi e scende lungo il piano inclinato con velocità angolare **ω**; il moto è fin dall'inizio di **puro rotolamento**.

$$E_{m_i} = E_{m_f}$$ Ener. meccanica

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I' \omega^2$$

Possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica perche' l'attrito volvente e' trascurabile rispetto all'attrito statico e a quello dinamico

Ricordando la condizione di puro rotolamento, $v_{CM} = \omega R$, si ha

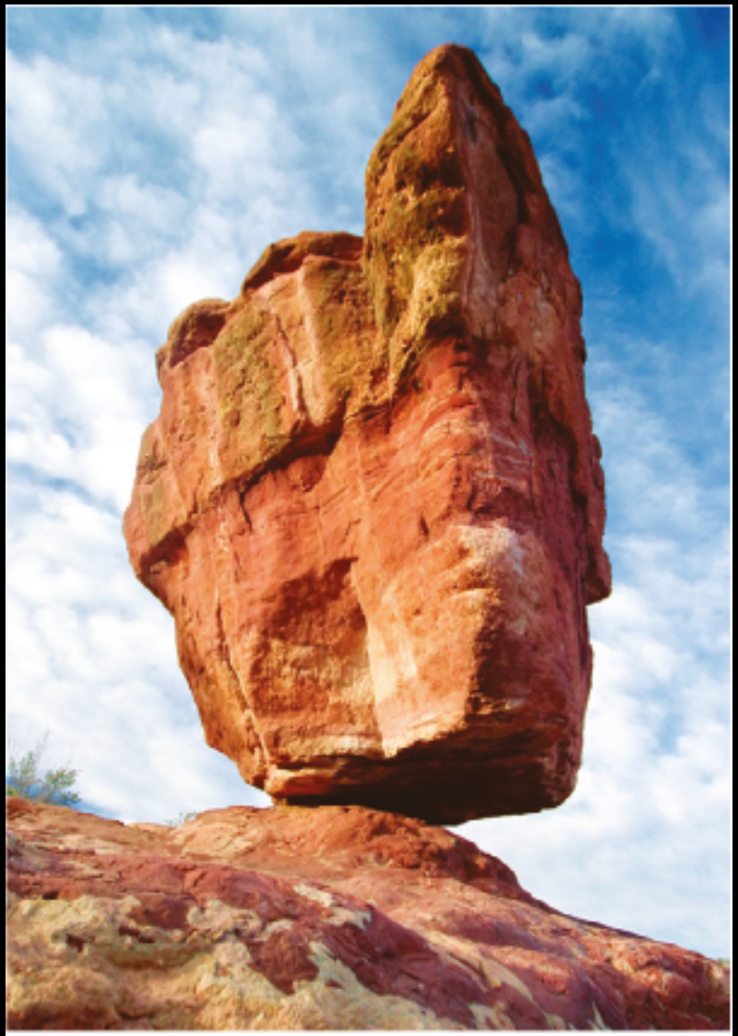
$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad + \frac{1}{2} I' \frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

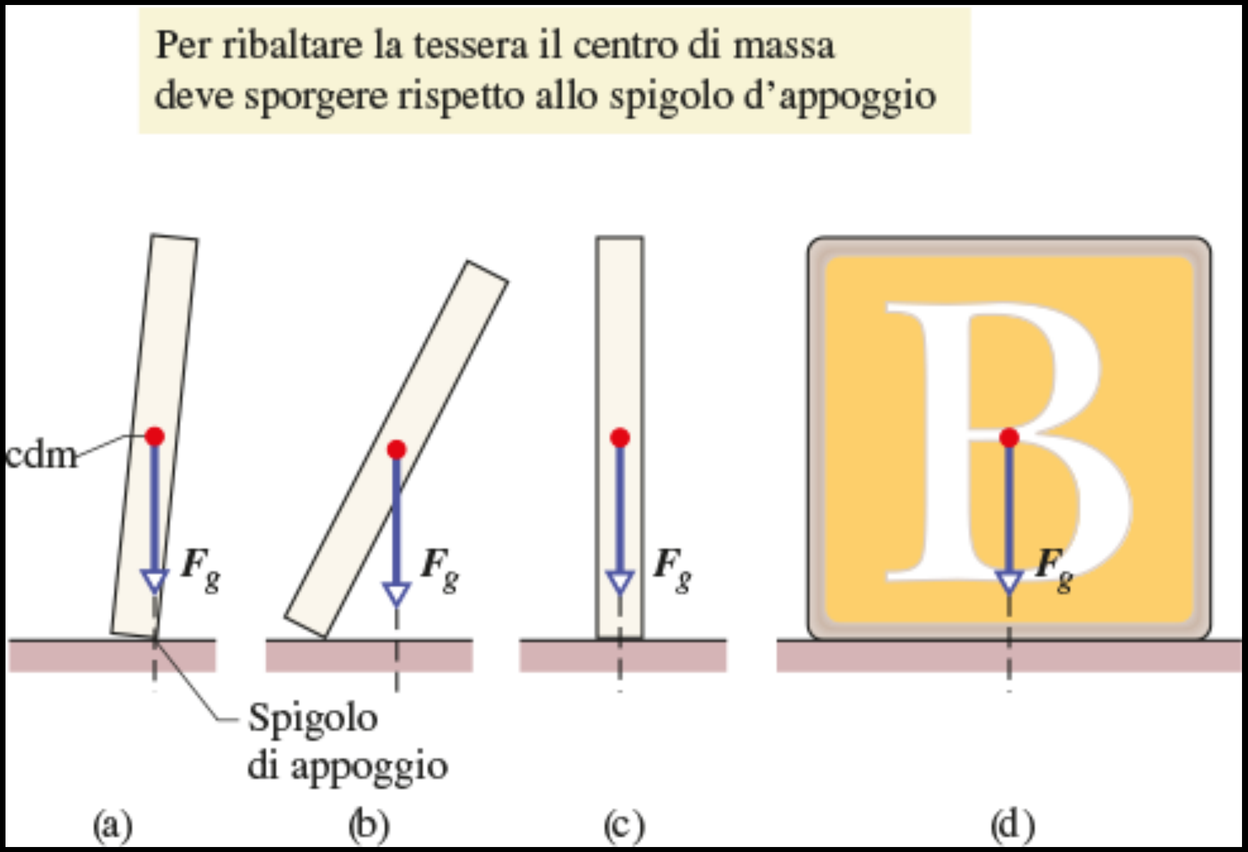
$$v_{CM}^2 = 2Mgh \left( \frac{1}{M + \frac{I'}{R^2}} \right)$$

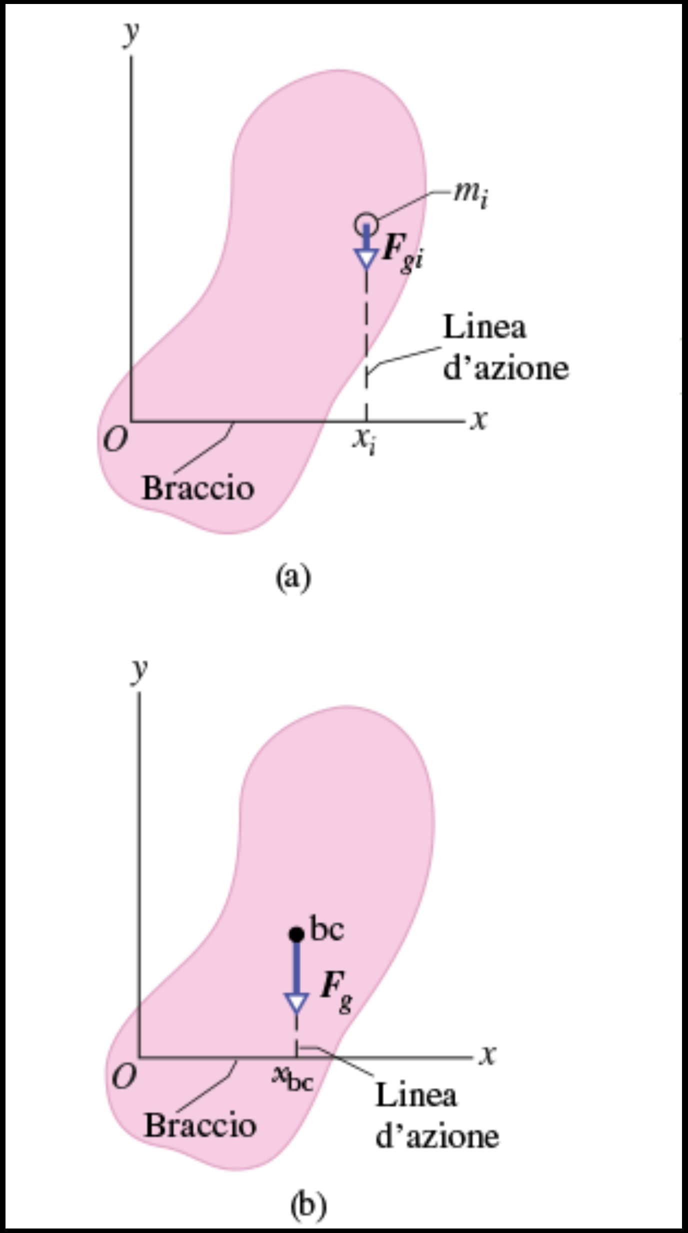
Ricordiamo ora che il **rapporto** tra **I' ed R è proporzionale ad M**, il coefficiente di proporzionalità **α** dipendendo dalla **geometria** del corpo

| | | |
|---|---|---|
| $I' = MR^2$ | anello | $v_{CM} = \sqrt{gh}$ |
| $I' = \frac{1}{2} MR^2$ | cilindro | $v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$ |
| $I' = \frac{2}{3} MR^2$ | sfera cava | $v_{CM} = \sqrt{\frac{6}{5} gh}$ |

I risultati così ottenuti vanno confrontati con quelli ricavati nel caso in cui il **corpo rigido scende senza rotolare** dalla stessa altezza lungo un **piano liscio** con lo stesso **angolo di inclinazione** $\theta$, sappiamo già che otteniamo **per ogni corpo** lo stesso risultato, $v_{CM} = \sqrt{2gh}$.
La differenza tra le velocità ottenute nei due casi (**entrambi conservativi** dal punto di vista energetico e con la **medesima** $E_m$ **iniziale**) è dovuta al fatto che, nel caso del puro rotolamento, **il corpo deve impiegare parte della sua energia potenziale gravitazionale per entrare in rotazione**, ciò a discapito della traslazione. Come conseguenza, nel caso del puro rotolamento, abbiamo **velocità finali del CM più piccole**.


Kanwarjit Singh Boparai/Shutterstock






# Centro di gravità = Centro di massa

La forza di gravità agisce su un punto di un corpo esteso chiamato centro di gravità (cog) del corpo. Questo coincide con il centro di massa.

Ogni punto del corpo di massa $m_i$ produce un momento della forza peso

$$\tau_i = x_i F_{gi}.$$

Il momento totale è

$$\tau_{\text{net}} = \sum \tau_i = \sum x_i F_{gi}.$$

Se è vero l'asserto, allora considerando tutto il corpo e la definizione di centro di gravità (cog)

$$\tau = x_{\text{cog}} F_g.$$

Sostituendo $F_g$ con la somma della forza peso di tutti i suoi elementi,

$$\tau = x_{\text{cog}} \sum F_{gi}.$$

Ma $\tau$ e $\tau_{\text{net}}$ devono essere uguali per cui

$$x_{\text{cog}} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}.$$

E sostituendo la definizione di forza peso in ambo i membri

$$x_{\text{cog}} \sum m_i g = \sum x_i m_i g$$

Da cui, semplificando g (accelerazione di gravità) in ambo i membri si ottiene $x_{\text{cog}} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i$ che coincide con la definizione del centro di massa.

# L’equilibrio di un corpo rigido

Un corpo rigido fermo rimane in **equilibrio** quando:

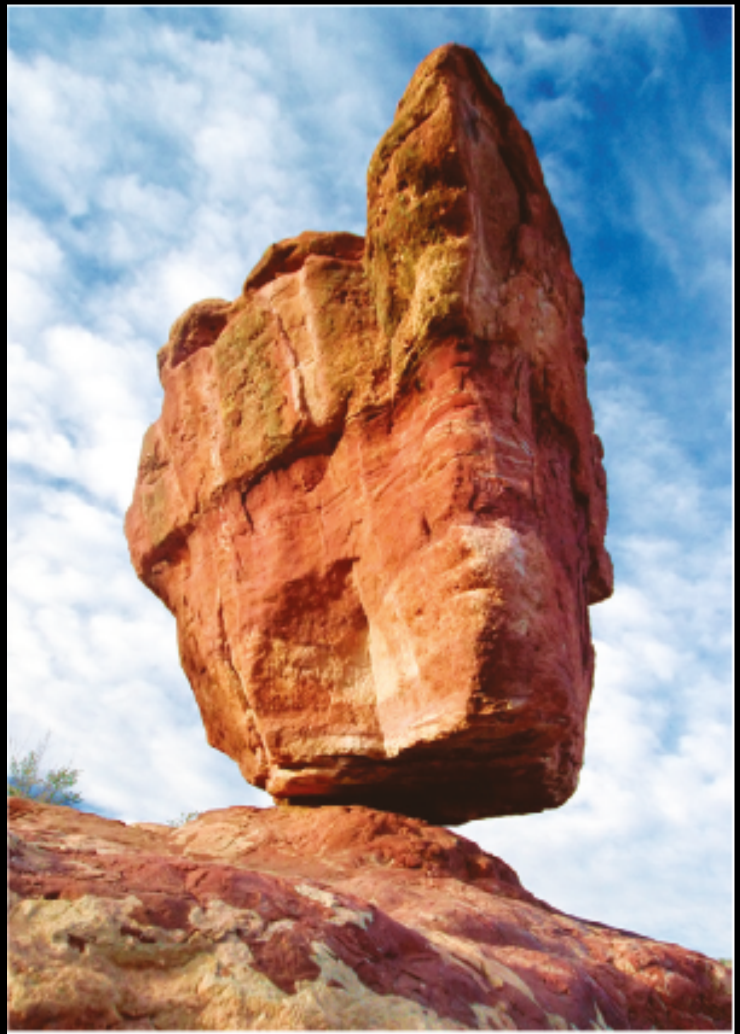
• la somma vettoriale delle *forze* applicate su di esso è uguale a zero;

• la somma vettoriale dei *momenti delle forze*, calcolati rispetto a un punto qualsiasi, è uguale a zero.

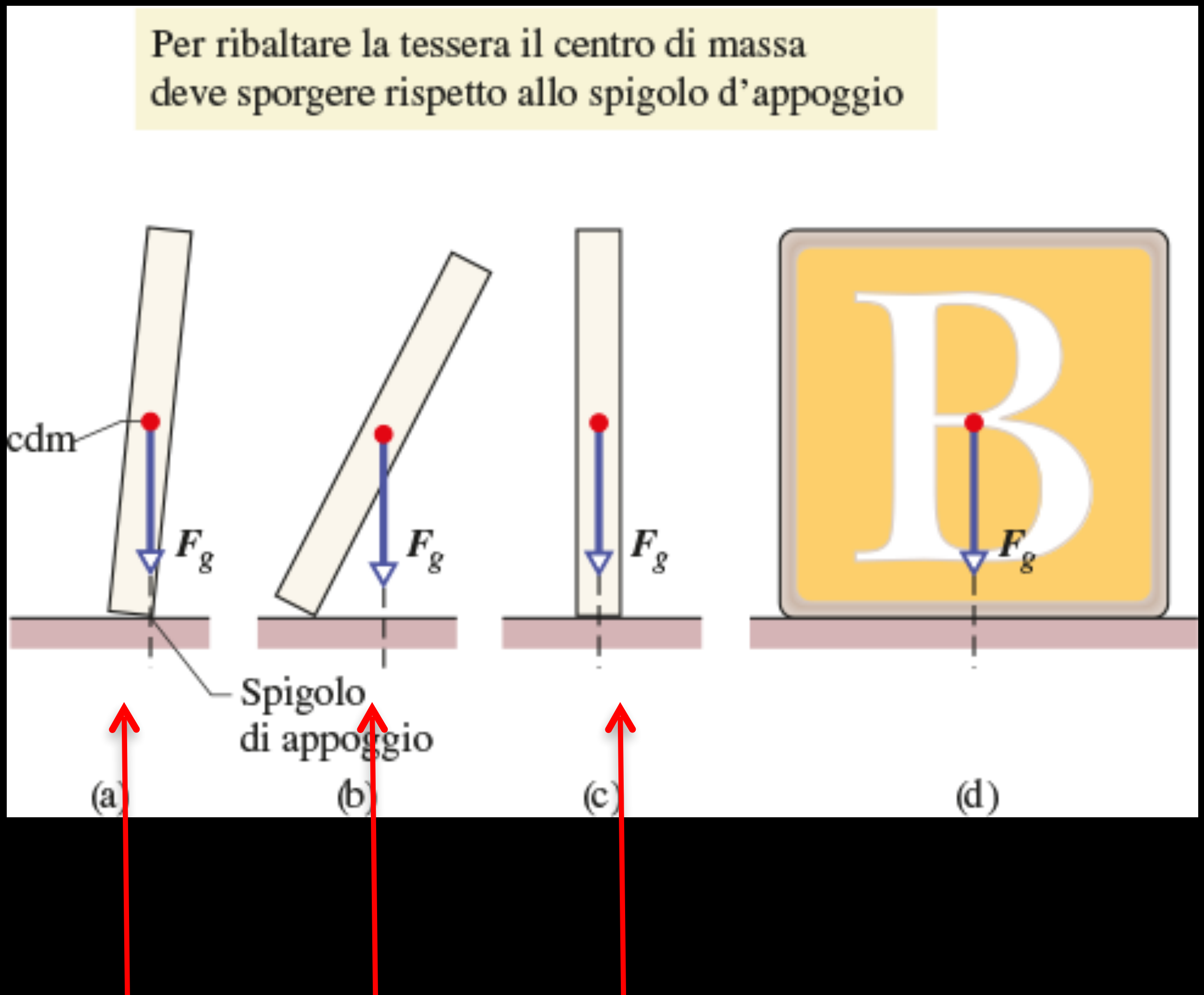
# L'equilibrio di un corpo rigido

| Modello | Proprietà rilevanti | Grandezze | Equilibrio |
|---|---|---|---|
| Punto materiale | Si sposta nello spazio. Non ruota. | Forze | $\vec{F}_{tot} = 0$ |
| Corpo rigido | Si sposta nello spazio. Ruota. | Forze<br>Momenti | $\begin{cases} \vec{F}_{tot} = 0 \\ \vec{M}_{tot} = 0 \end{cases}$ |

Equazioni cardinali



Kanwarjit Singh Boparai/Shutterstock

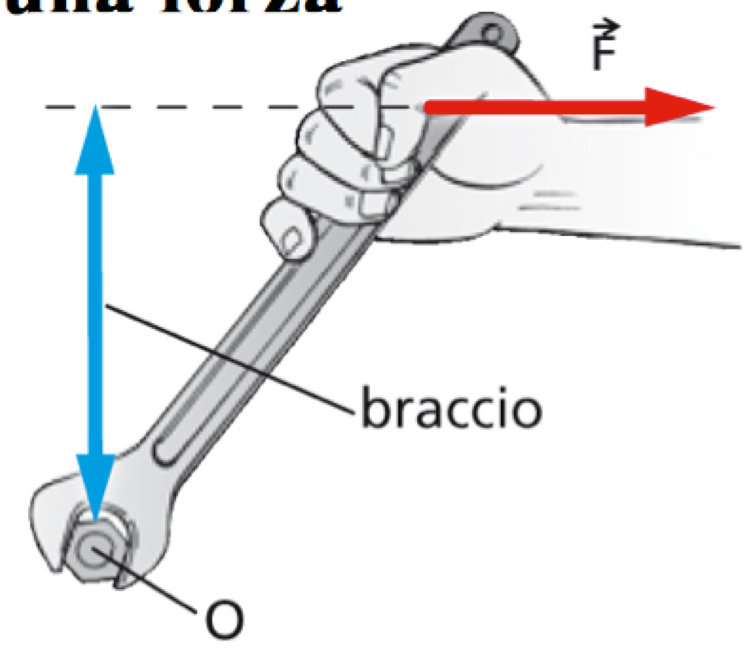



Quanto valgono le risultanti? E i momenti?

# Il braccio di una forza

Il **braccio** di una forza ***F*** rispetto a un punto *O* è dato dalla distanza tra il punto *O* e la retta che contiene F. Perché la rotazione del bullone è più agevole se la chiave inglese è più lunga?

Il momento di una forza F rispetto a un punto O è uguale al prodotto dell'intensità F della forza per il braccio b.




momento della forza (N · m)

$$M = Fb$$

forza (N)

braccio (m)

# Il momento di una coppia di forze

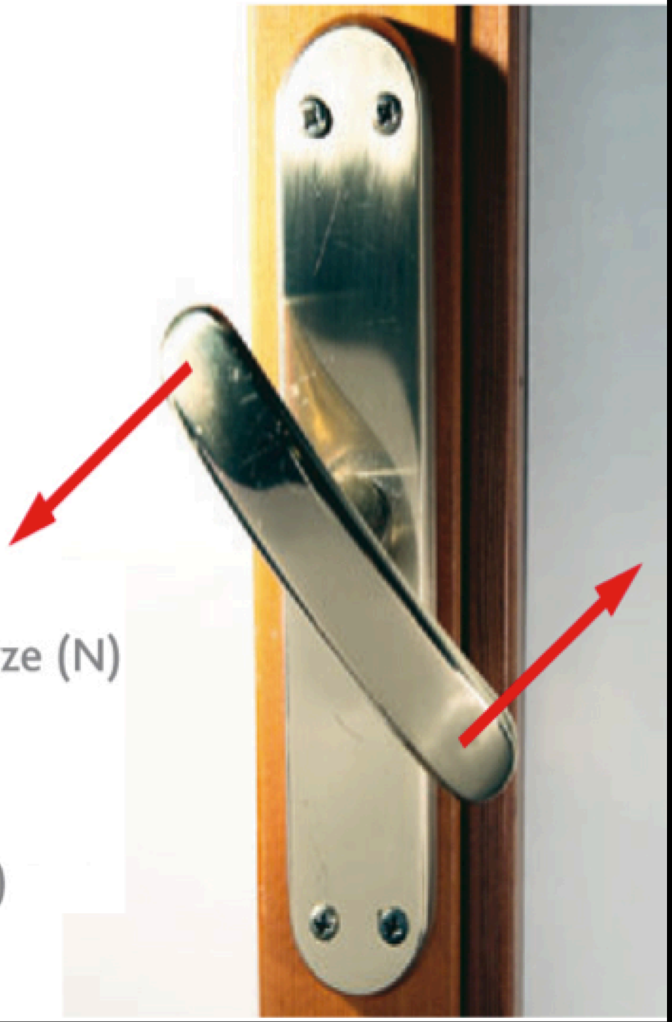
Il **momento di una coppia** è dato dalla somma dei momenti delle forze rispetto al punto medio $O$.
Esso è uguale al prodotto dell'intensità $F$ di una forza per la distanza $d$ tra le rette di azione delle due forze.

$$M = Fd$$

momento della coppia (N · m)

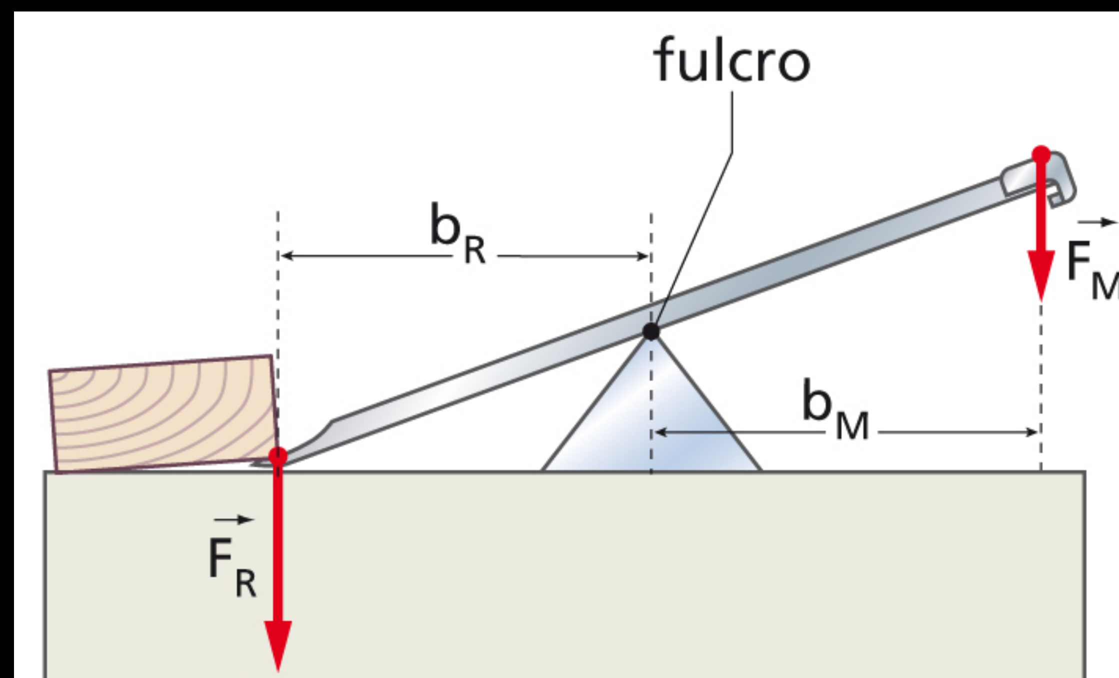
intensità di una delle forze (N)

distanza (m)

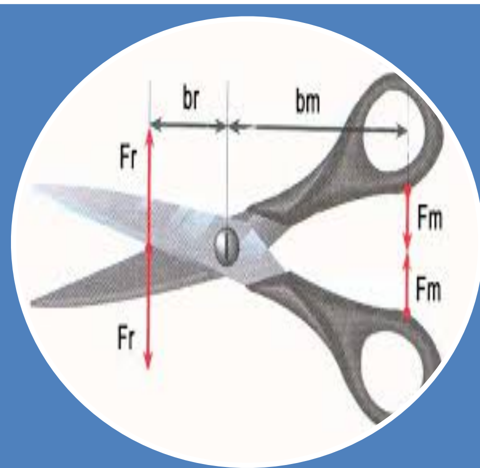


# Le leve

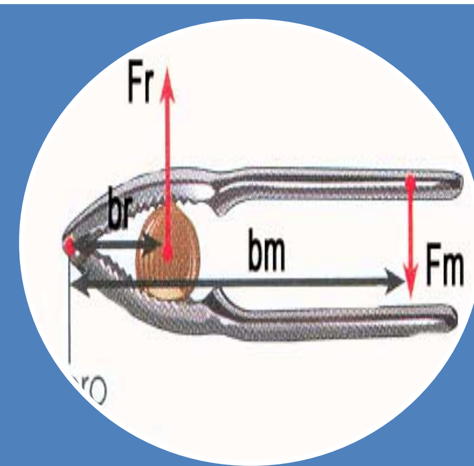
La leva è una macchina semplice, costituita da un'asta rigida capace di muoversi attorno a un punto fisso, chiamato fulcro. Non converte l'energia, ma è in grado di moltiplicare la forza impressa (o forza motrice), garantendo un guadagno meccanico rispetto ad una forza resistente; è un'applicazione del principio di equilibrio dei momenti.



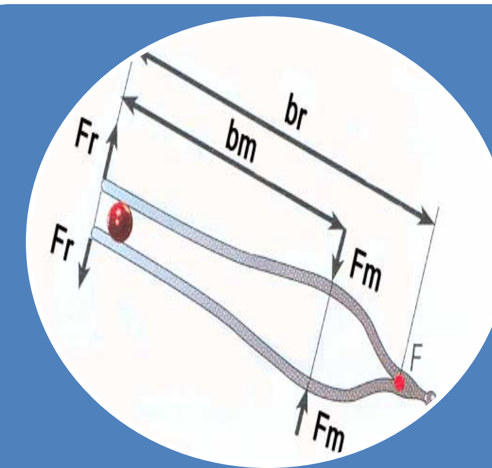

$$\underbrace{F_R b_R}_{\text{momento della forza resistente}} = \underbrace{F_M b_M}_{\text{momento della forza motrice}}$$




**leve di primo genere**: il fulcro è posto tra le due forze (interfulcrate); possono essere vantaggiose, svantaggiose o indifferenti



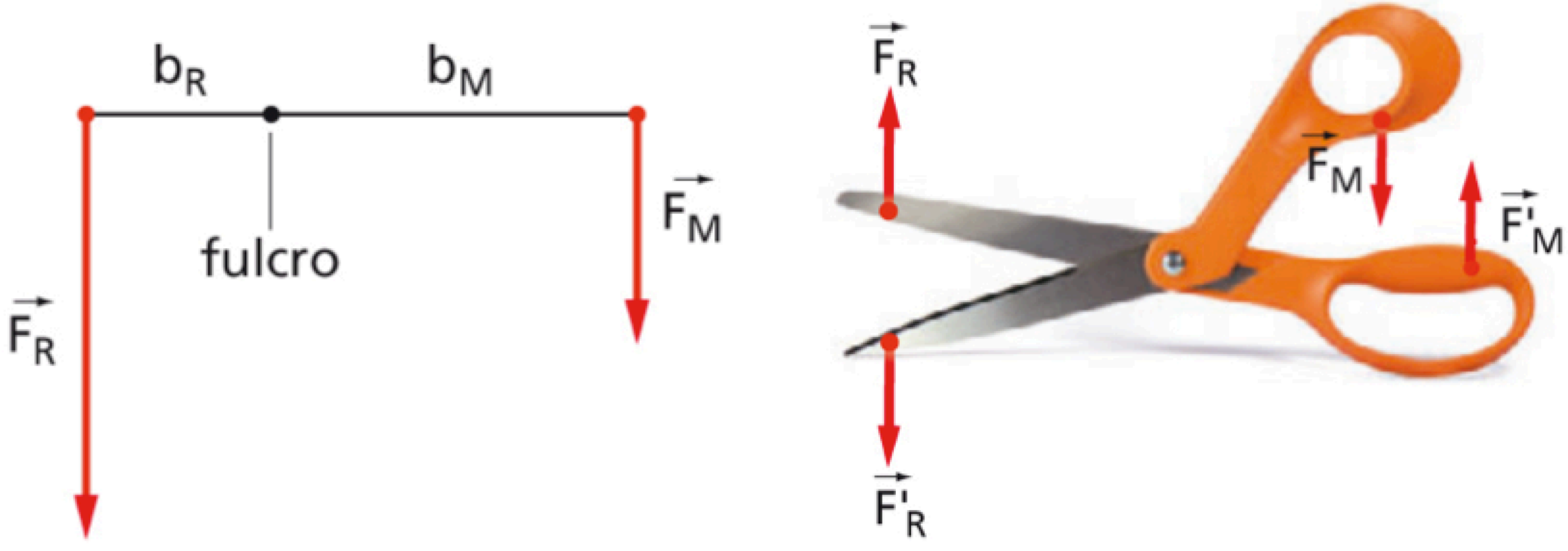

**leve di secondo genere**: la forza resistente è tra il fulcro e la forza motrice (o potenza) (interresistente); sono sempre vantaggiose




**leve di terzo genere**: la forza motrice (potenza) è tra il fulcro e la forza resistente; sono sempre svantaggiose

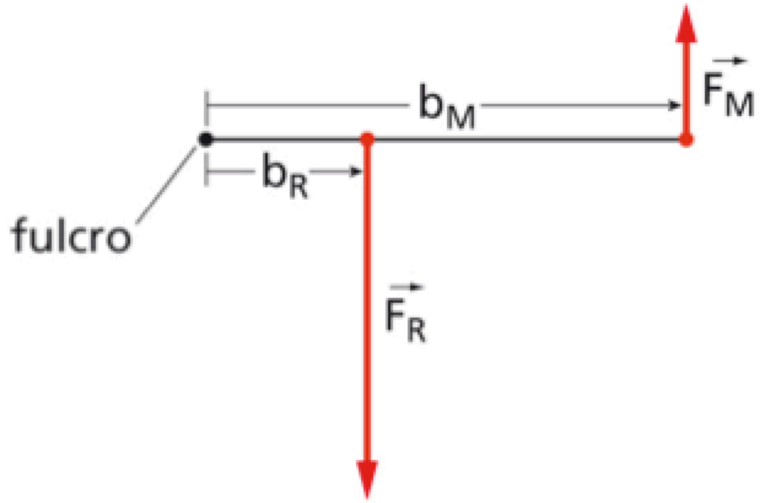
# Le leve di primo genere

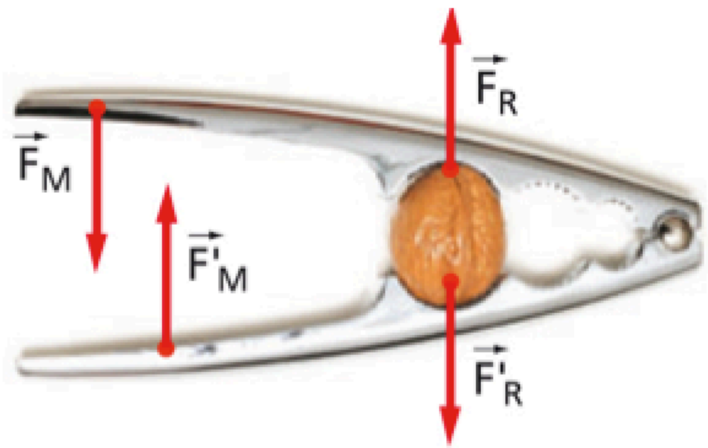
Il fulcro è posto tra le due forze.



# Le leve di secondo genere

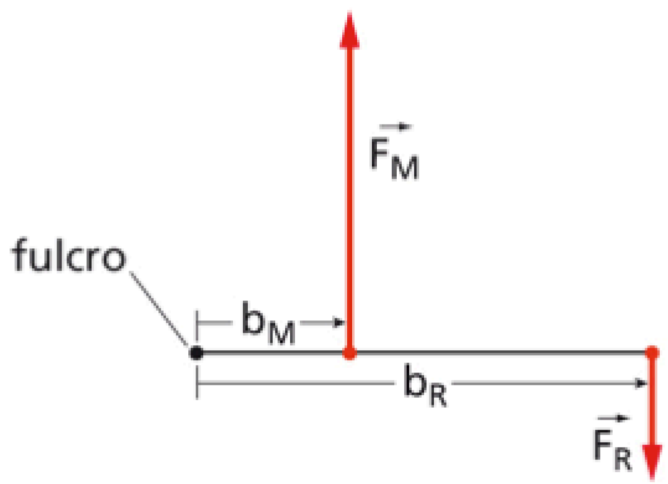
La forza resistente è tra il fulcro e la forza motrice.

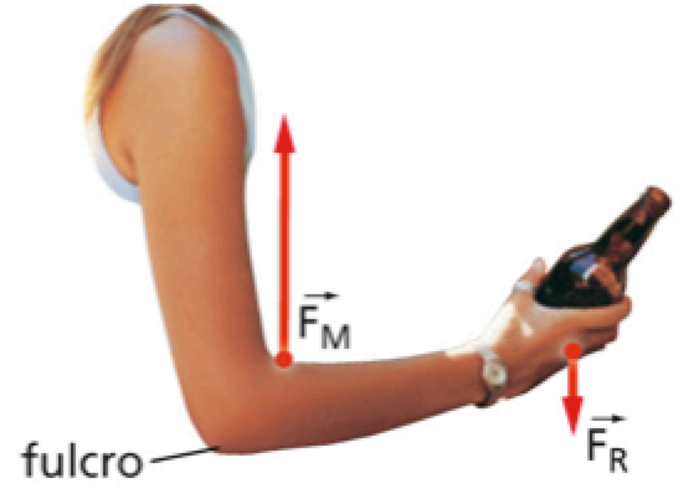


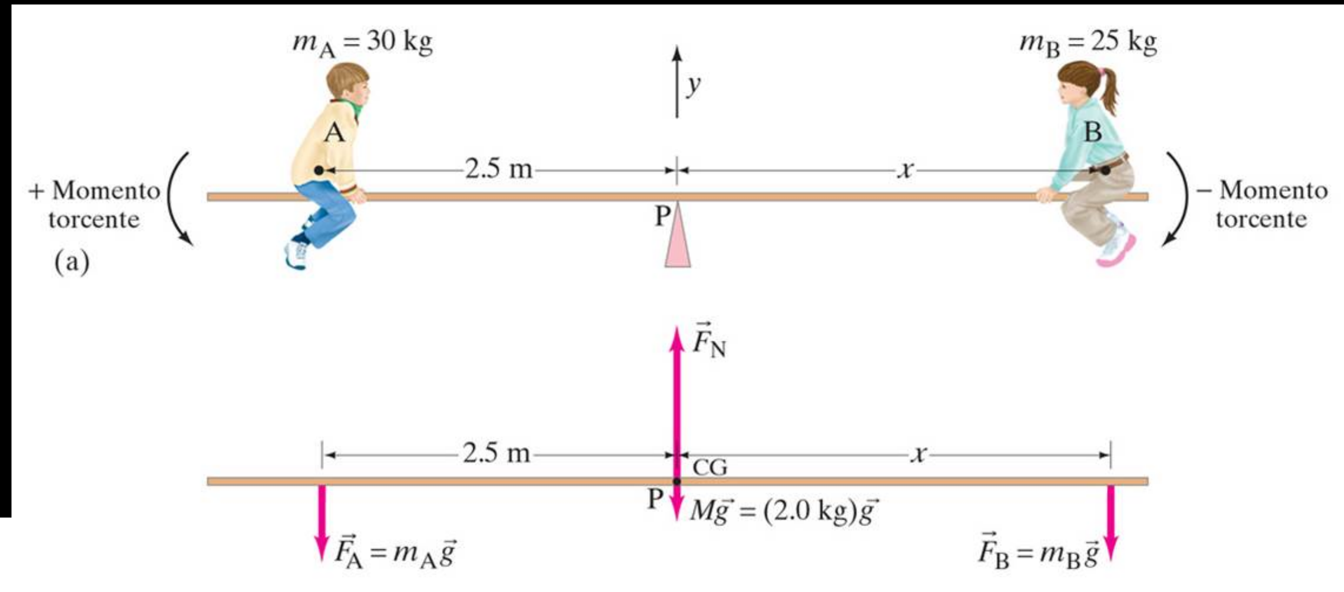
# Le leve di terzo genere

La forza motrice è tra il fulcro e la forza resistente.



Un'asse di massa 2Kg può essere utilizzata come dondolo per due bambini. Un bimbo ha una massa di 30Kg e siede a 2.5m dal punto di appoggio. A quale distanza x dal punto di appoggio deve sedere un bimbo di 25Kg per bilanciare il dondolo?



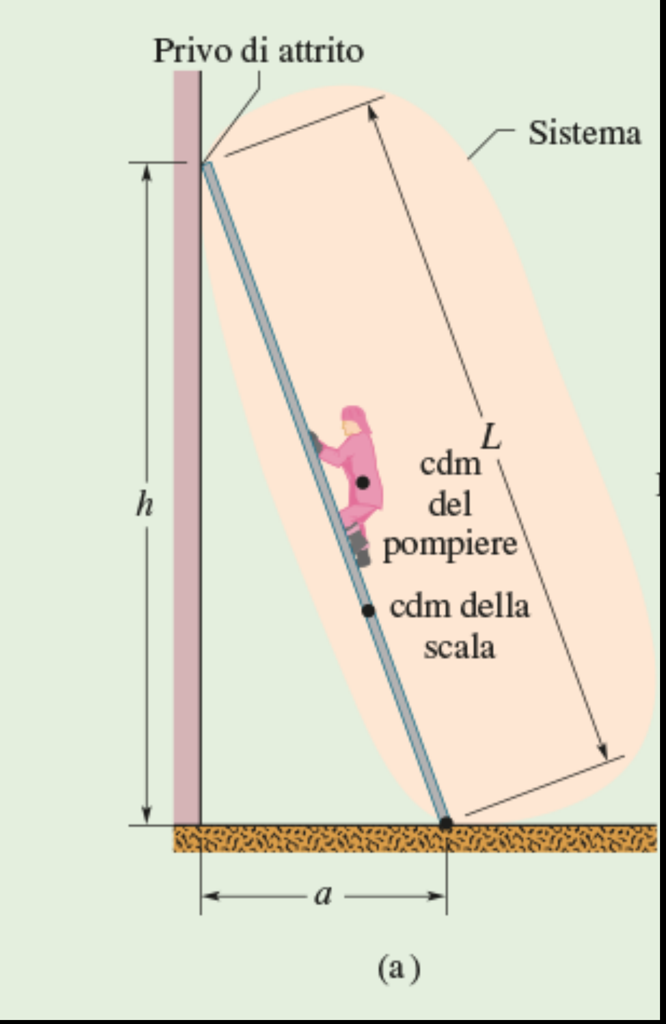

$$\sum M = 0$$

cioè:

$$\sum M = (30Kg) \cdot \left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(2.5m) - (25Kg) \cdot \left(9.8\frac{m}{s^2}\right) \cdot x = 0$$

da cui:

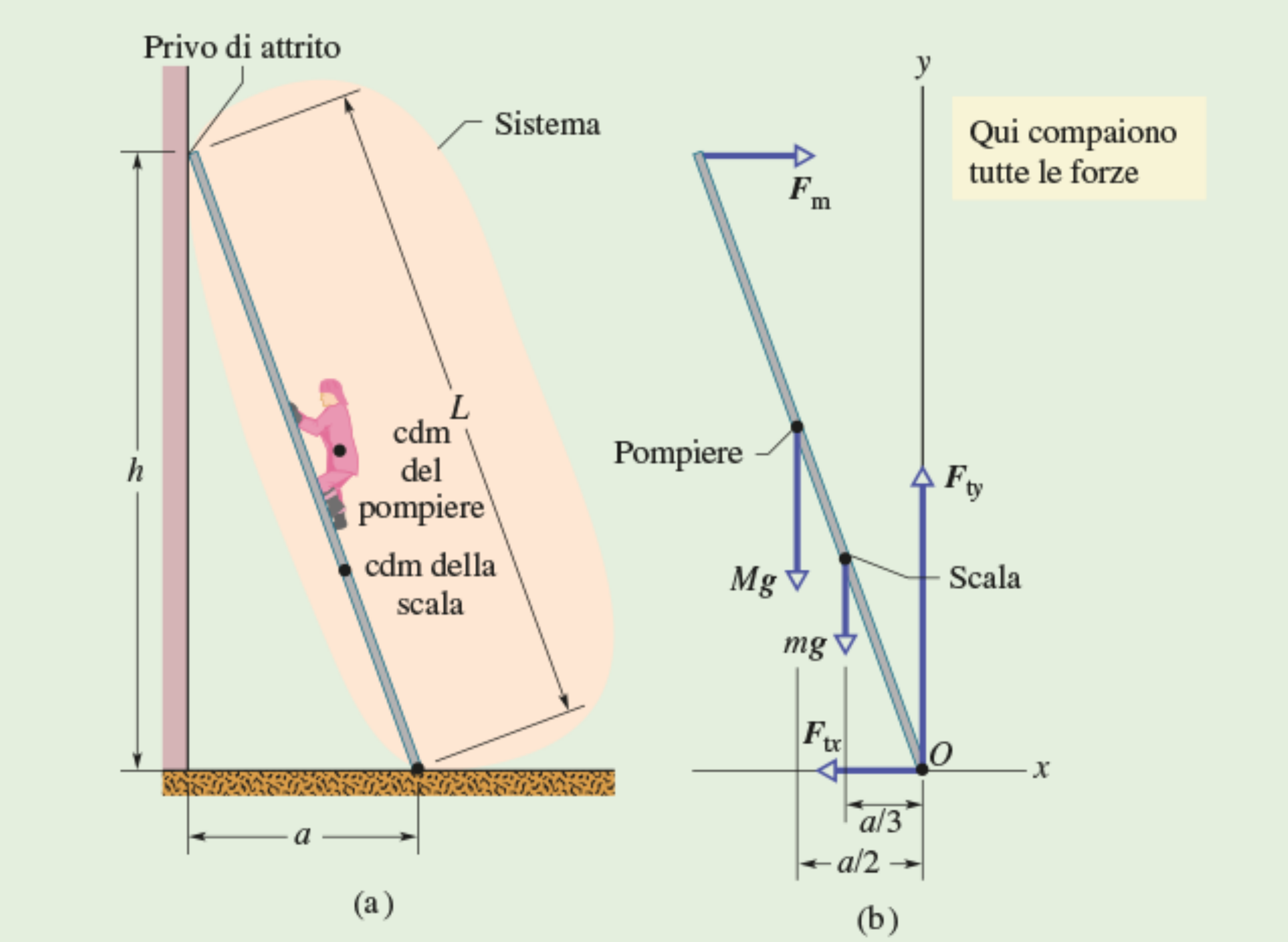
$x = \frac{(30Kg)(2.5m)}{25Kg} = 3m$. Quindi, per bilanciare il dondolo, il secondo bambino deve sedere a 3m dal fulcro.




L=12m
m_scala=45kg
h=9.3m
M_pom=72kg

Un pompiere sale una scala poggiata ad un muro privo di attrito e un pavimento (con attrito). Quando il pompiere raggiunge meta' della scala, qual'è il modulo forze che si esercitano su:
scala
muro
pavimento

sapendo che il CM della scala sta ad 1/3 della sua Lunghezza?



Privo di attrito
Sistema
h
L
cdm
del
pompiere
cdm della
scala
a
(a)
y
Qui compaiono
tutte le forze
$F_m$
Pompiere
$F_{ty}$
$Mg$
Scala
$mg$
$F_{tx}$
O
x
a/3
a/2
(b)

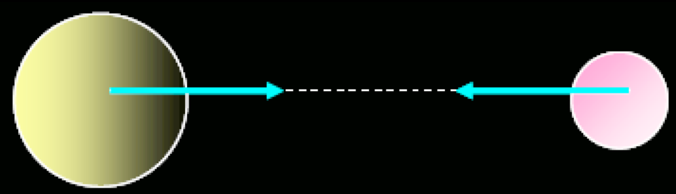
Abbiamo introdotto la definizione di:

1) Forza di attrazione gravitazionale;
2) Conservatività del campo gravitazionale
3) Potenziale Gravitazionale
4) velocità di fuga e velocità d’arrivo

Occorre derivare ancora:

1) Leggi di Keplero
2) teorema di Gauss per il campo gravitazionale

# Forza gravitazionale



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

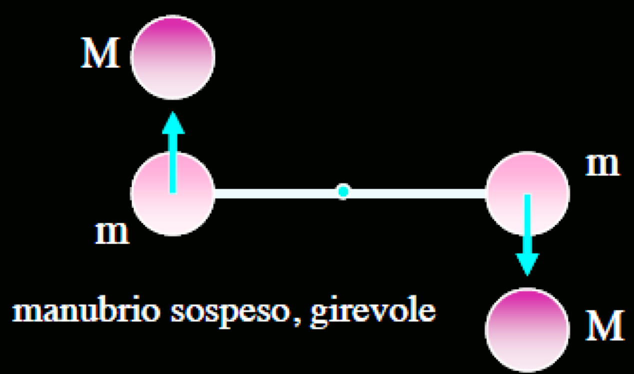
$G = 6.6742.10^{-11}\ m^3/(kg\ s^2)$

- Agisce fra due masse qualsiasi (è universale)
- Forza sempre attrattiva
- Interazione fra 2 corpi + principio di sovrapposizione.
- Rigorosamente vera per corpi puntiformi ma vale anche per corpi sferici se si considera la distanza dal centro (o fra i centri).

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

forza che $m_1$ esercita su $m_2$

dove $\mathbf{r}_{12}$ va da $m_1$ a $m_2$.




La costante G è "piccola".
Misurata in laboratorio da Cavendish (1798)
con una bilancia a torsione

# ✕ potenziale gravitazionale

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \approx -\frac{1}{r^2}}$$

è **conservativa** ⇒ ammette **potenziale**

$$U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)dr = Gm_1m_2\int_{r_i}^{r_f}\frac{1}{r^2}dr = Gm_1m_2\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

se scelgo come riferimento $r_i = \infty$ e quindi $U_i = 0$

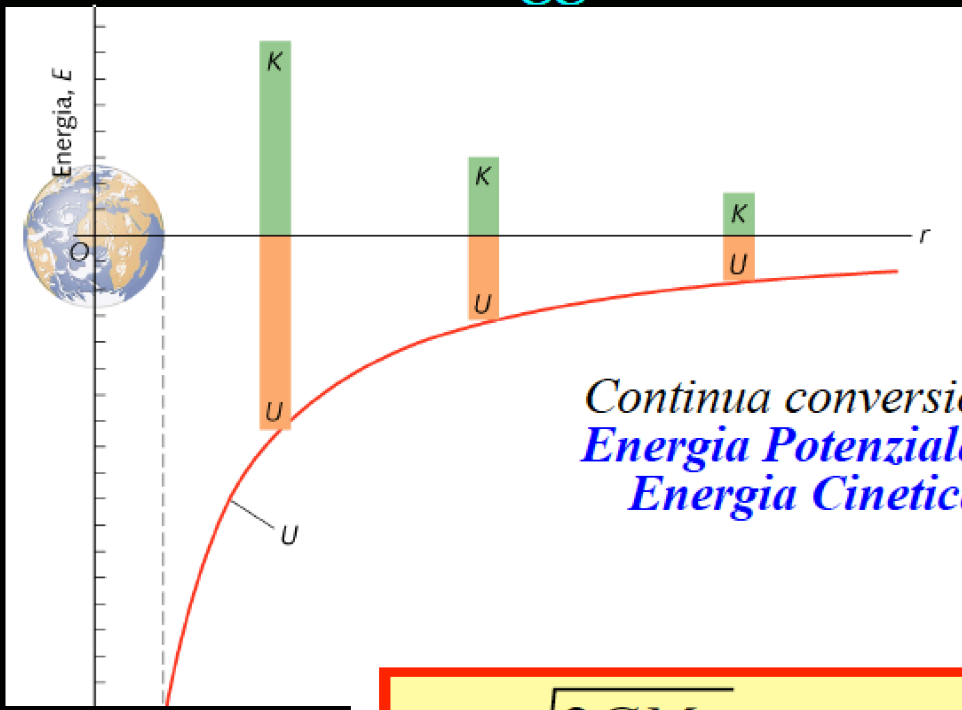
$$\boxed{U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \approx -\frac{1}{r}}$$

è **negativo** (forza attrattiva)

## N.B. in prossimità della superficie terrestre:

$$\Delta U_g = -GM_T m\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right) = GM_T m\left(\frac{r_f - r_i}{r_f r_i}\right) = GM_T m\frac{\Delta y}{R_T^2} = mg\Delta y$$

## Applicazione: Energia Potenziale e Cinetica di oggetto che cade verso la Terra [$v_i = 0$, $r_i$ molto grande]




*Continua conversione* ***Energia Potenziale*** *in* ***Energia Cinetica***

$$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$$

$$-\frac{GM_T m}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

$$0 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11200\,m/s = 11.2\,km/s}$$

Velocità di **caduta** sulla Terra:
- **16** proiettile di fucile
- **NON** dipende da **m** (asteroidi, …)

# applicazioni: velocità di fuga

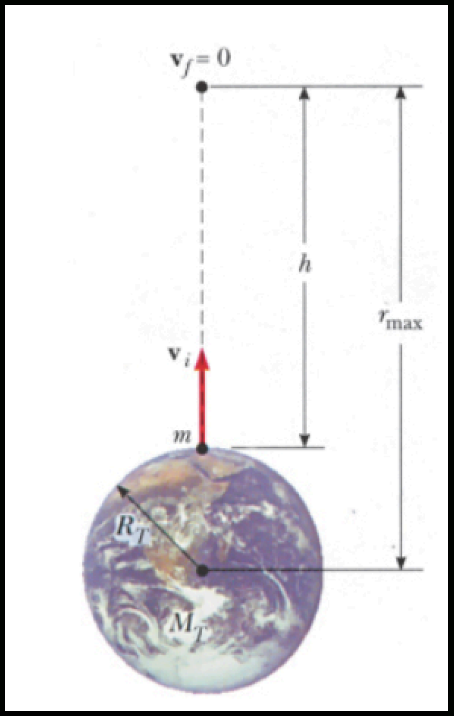
$$E_{mecc} = K + U = costante$$

**in generale** il proiettile:

- **rallenta** (converte $K$ in $U$, $h$ aumenta)
- **si arresta** ($K = 0$, $E_{mecc} = U$)
- **ricade** (converte $U$ in $K$, $h$ diminuisce)

*esiste un valore **minimo** di $\mathbf{v_i}$ per cui il proiettile **non** torna indietro*

proiettile lanciato in aria
massa **m**, velocità $\mathbf{v_i}$




$$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{r_{max}} \Rightarrow v_i^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{max}}\right)$$

$v_{fuga} \underset{def}{=}$ velocità **minima** che il corpo deve avere per continuare a muoversi **allontanandosi sempre**

$$v_i \xrightarrow[r_{max}\to\infty]{} v_{fuga}$$

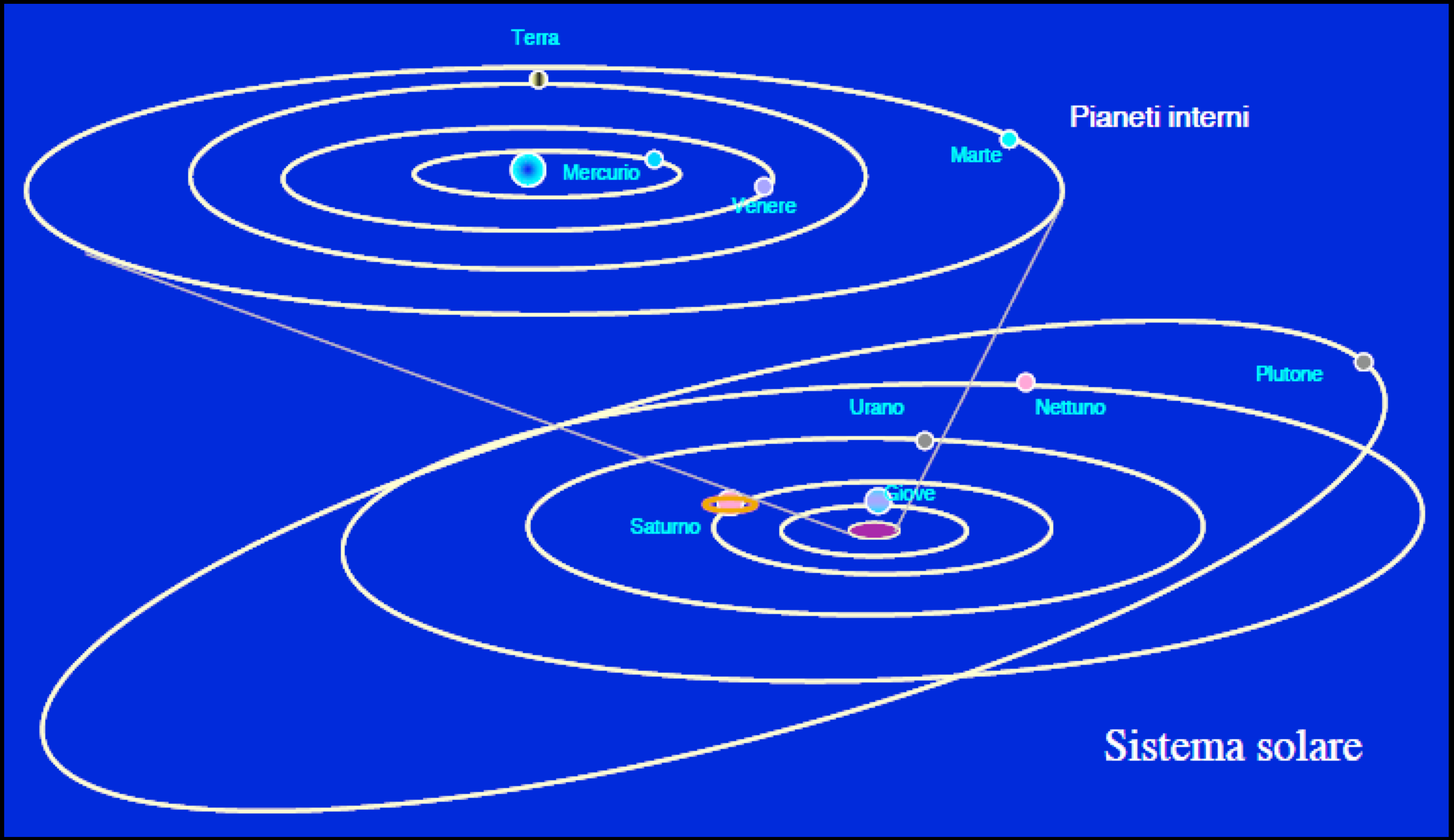
$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

| Pianeta | $v_f$ (km/s) |
|---|---|
| Terra | 11.2 |
| Luna | 2.3 |
| Sole | 618 |
| Marte | 5.0 |
| Giove | 60 |

**NON** dipende da **massa oggetto**!!
[è la stessa per **molecola** o **navicella spaziale**]

**Link:** Teoria cinetica dei gas, composizione atmosfera

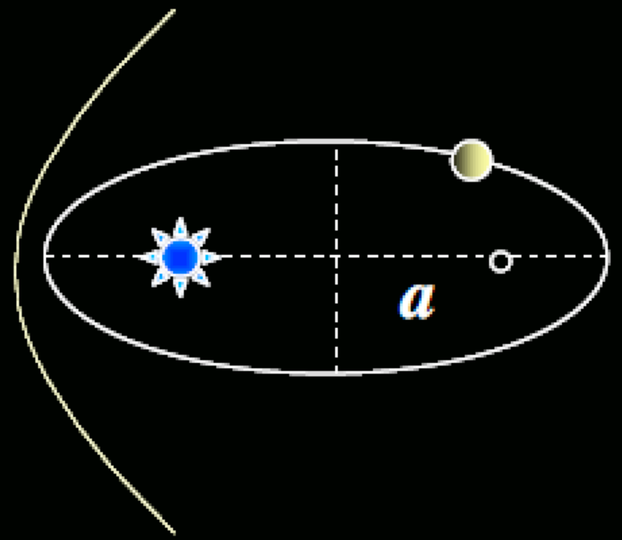
# Leggi di Keplero



## $1^a$ Legge di Keplero

perche' piane?

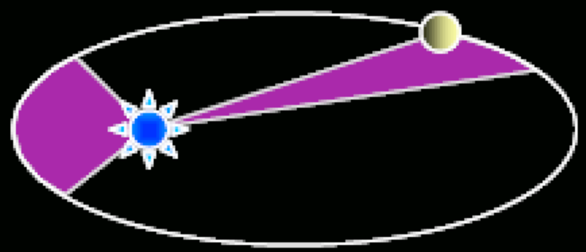
i pianeti si muovono su orbite piane ed ellittiche,
aventi il sole in uno dei fuochi




nel caso più generale, l'orbita è una **conica**
(ellisse, iperbole o parabola)

## 2a Legge di Keplero

la velocità areolare è costante



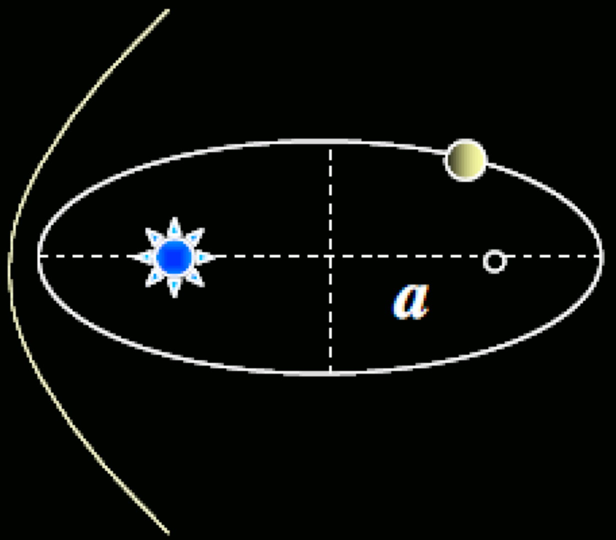
$$\frac{dA}{dt} = \text{cost}$$

Il raggio che congiunge il sole al pianeta
spazza aree uguali in tempi uguali.

## $1^a$ Legge di Keplero

perche' piane?

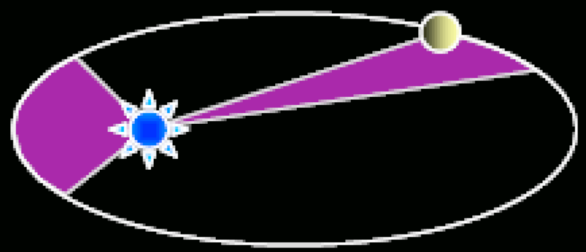
i pianeti si muovono su orbite piane ed ellittiche, aventi il sole in uno dei fuochi




nel caso più generale, l'orbita è una **conica** (ellisse, iperbole o parabola)

## 2a Legge di Keplero

la velocità areolare è costante



$$\frac{dA}{dt} = \text{cost}$$

Il raggio che congiunge il sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

Perche' ricorda che $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{campo\ gravita'} = \vec{r} \times \vec{F}_g = 0$ essendo $\vec{F}_g$ diretta nella direzione opposta ad $\vec{r}$

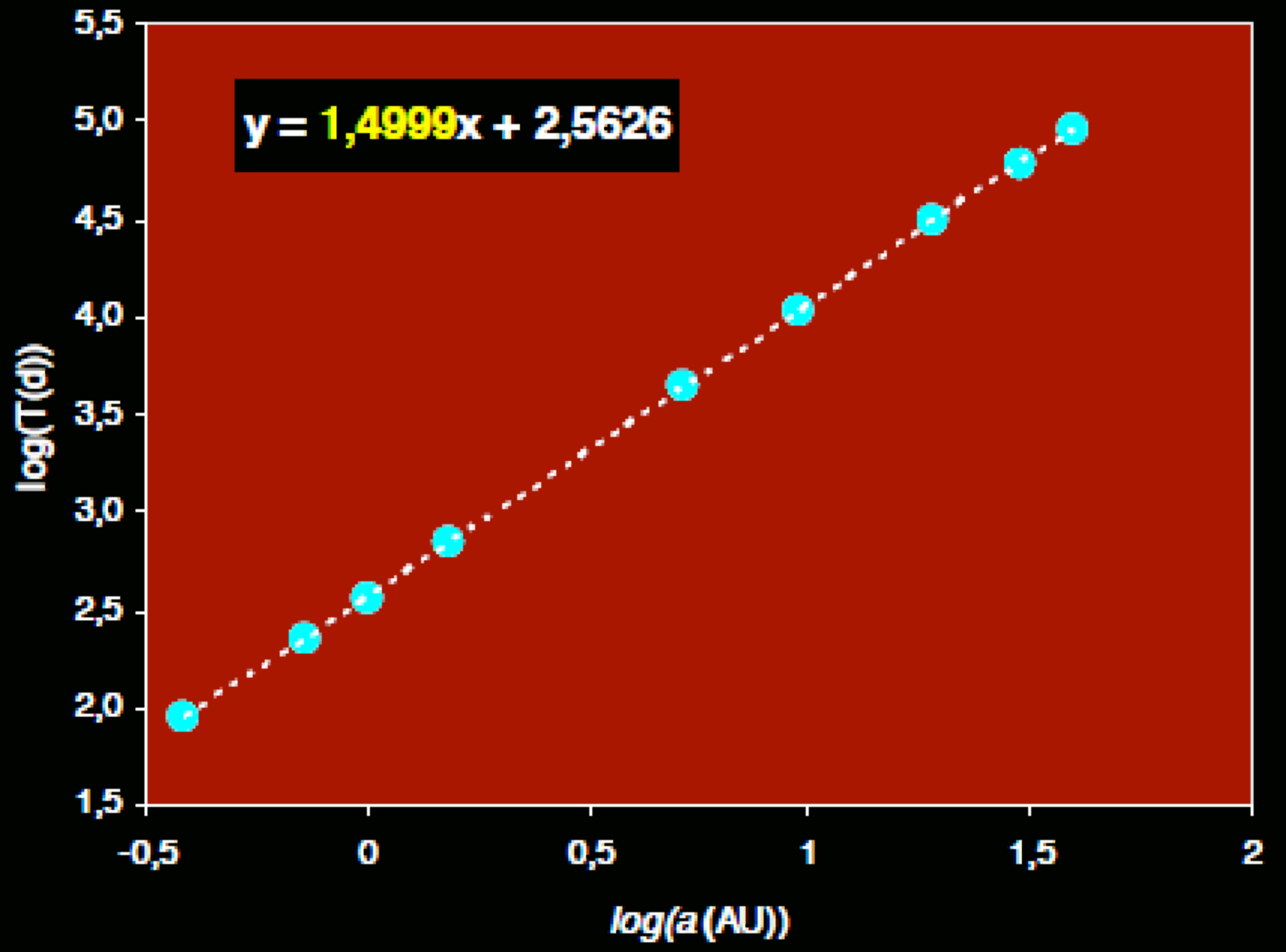
Ma allora essendo $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{costante}$, il vettore posizione e il vettore velocita' restano sullo stesso piano finche' non subentrano forze esterne.

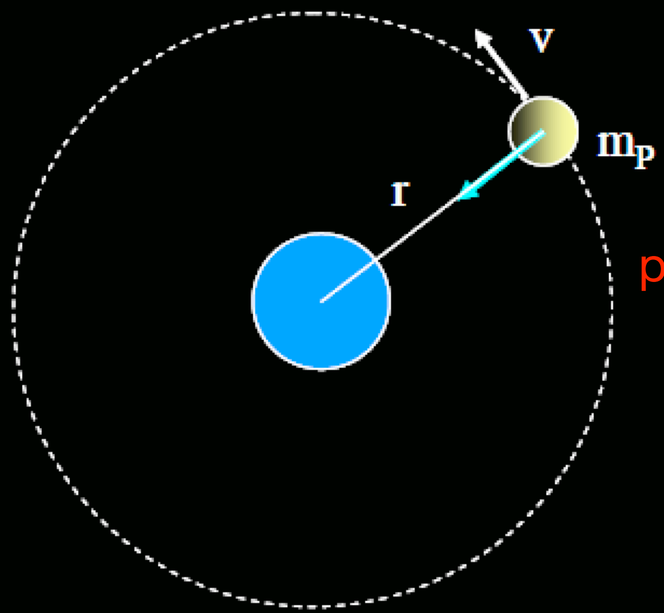
## $3^a$ Legge di Keplero

Il quadrato del tempo di rivoluzione
è proporzionale al cubo
del semiasse maggiore

$$T^2 \propto a^3 \qquad \log T = 1.5 \log a + k$$

se $M_{sole} >> M_{pianeta}$






Es. pianeta in orbita circolare intorno al sole.

$$m_P \frac{v^2}{r} = m_P \omega^2 r = G \frac{m_P m_S}{r^2}$$

perche'?

$$\Rightarrow T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{G m_S} \right) r^3$$

3ª legge di Keplero

trovata la costante
di proporzionalità

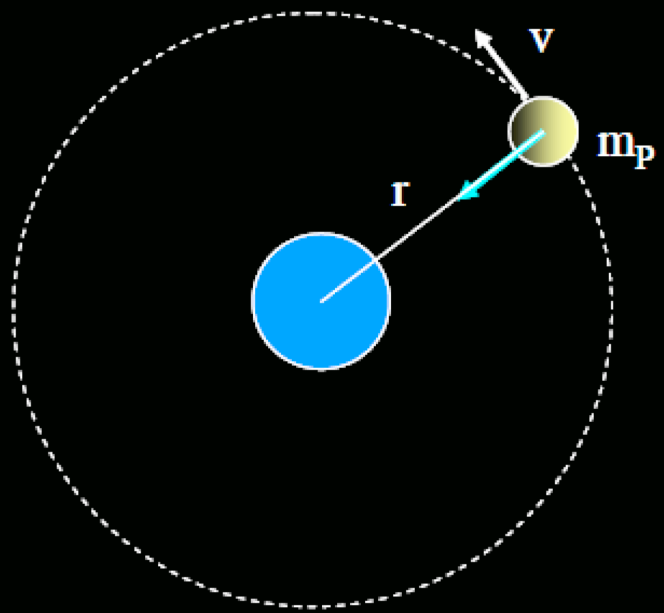
Nota G e i parametri dell'orbita terrestre,
o di altri pianeti, si ricava la massa del sole

$$m_S = 1.99 \cdot 10^{30}\, kg$$

Per un satellite in orbita intorno alla terra, a distanza r dal centro:

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{G m_T} \right) r^3$$

Se l'orbita è geostazionaria:
T=24h => r = 35800 km




Es. pianeta in orbita circolare intorno al sole.

$$m_P \frac{v^2}{r} = m_P \omega^2 r = G \frac{m_P m_S}{r^2}$$

Essendo, per definizione $\omega = 2\pi/T$

$$\Rightarrow T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{G m_S} \right) r^3$$

3ª legge di Keplero

trovata la costante di proporzionalità

prova con
$m_{\text{terra}} = 6 \times 10^{24} \text{kg}$
$T_{\text{terra}} = 365\text{g, } 5\text{h, } 48\text{m, } 46\text{s}$
$r_{\text{medio,T}} = 149\,500\,000 \text{ km}$

Nota G e i parametri dell'orbita terrestre, o di altri pianeti, si ricava la massa del sole

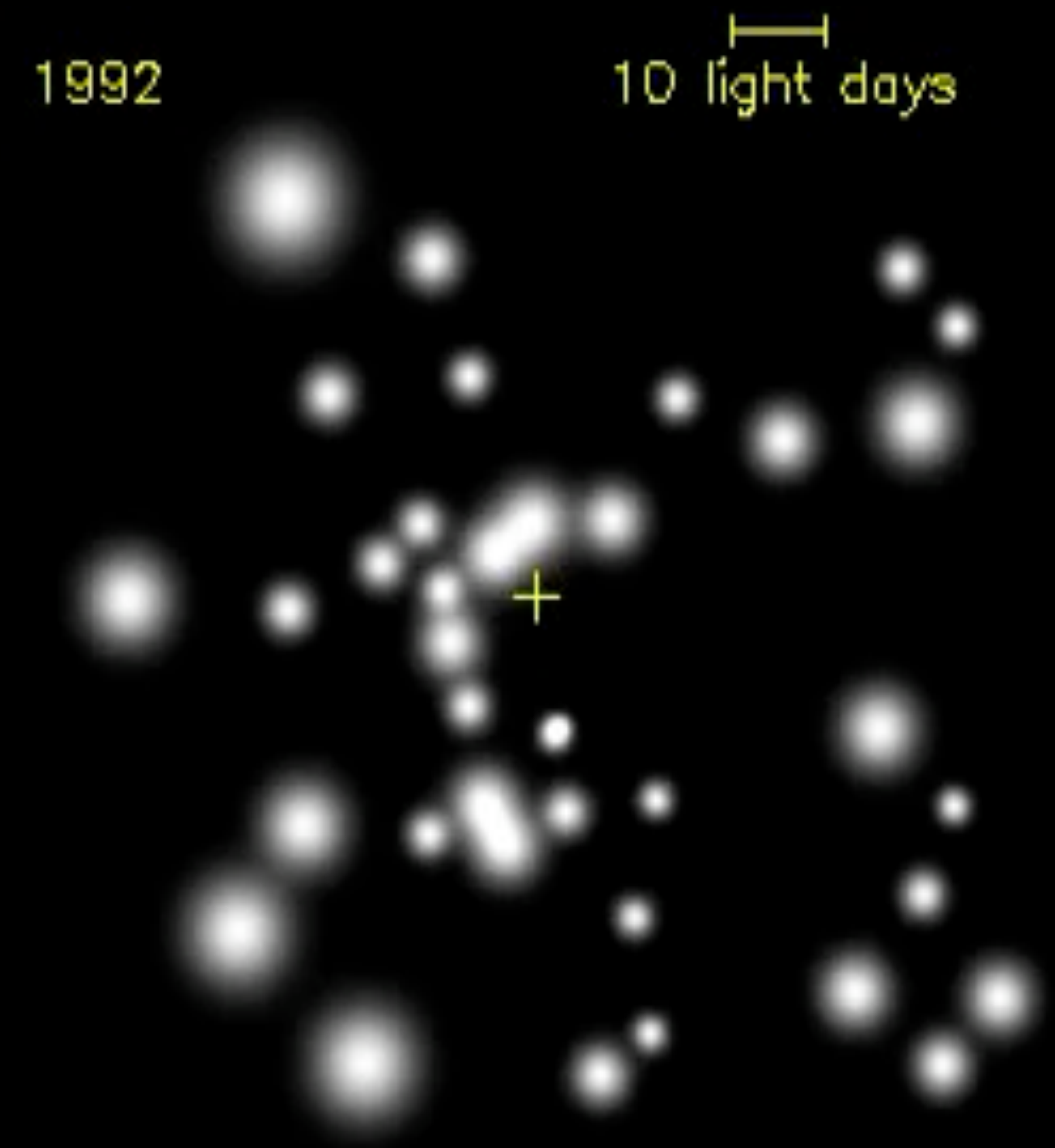
$$m_S = 1.99 \cdot 10^{30}\, kg$$

Per un satellite in orbita intorno alla terra, a distanza r dal centro:

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{G m_T} \right) r^3$$

Se l'orbita è geostazionaria:
T=24h => r = 35800 km

# La gravità è davvero universale

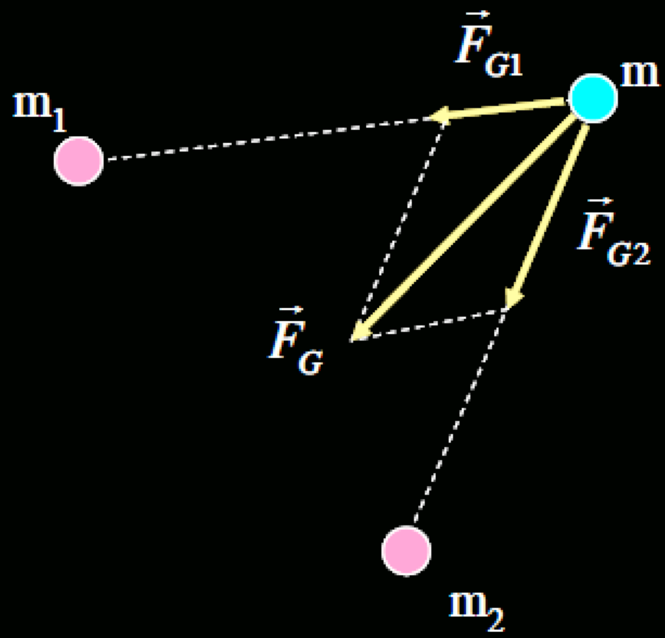


# Il concetto di campo gravitazionale

Dato un corpo "puntiforme" di massa m, si definisce campo gravitazionale, nella posizione di m, la forza gravitazionale agente su m divisa per la massa m.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

**Nota**: il campo gravitazionale è l'accelerazione di gravità



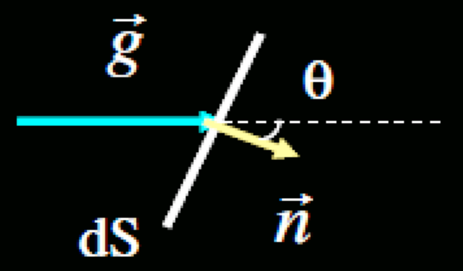

secondo la Relatività generale il campo gravitazionale è dovuto alla curvatura dello spazio-tempo prodotta dalle masse $m_1$ e $m_2$

Ad ogni modo, è una proprietà dello spazio modificato dalla presenza delle masse "sorgenti"

# Il flusso del campo gravitazionale e il teorema di Gauss

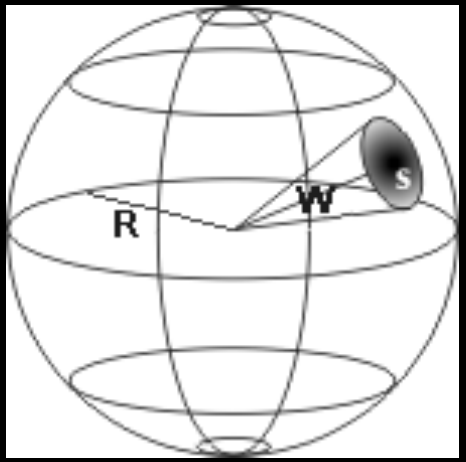
Il flusso di un vettore attraverso una superficie è per definizione il prodotto scalare tra il vettore e il "vettore superficie" avente come modulo la sua area e come direzione la normale, con verso positivo uscente dalla superficie.

flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie (infinitesima)



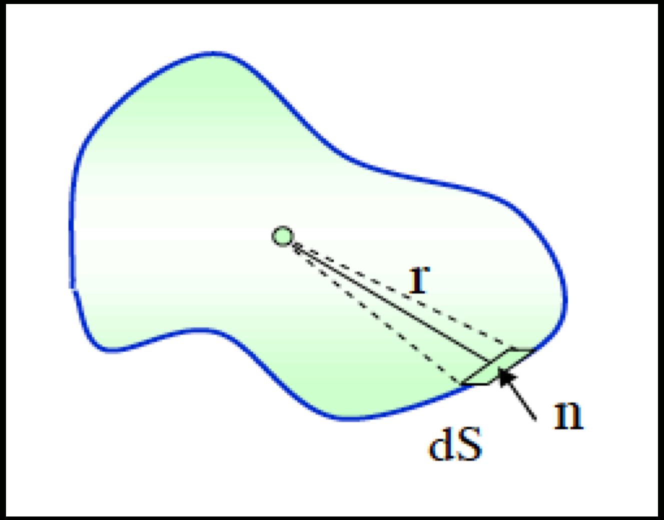

$$d\Phi = g dS \cos\theta = \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS$$

Attenzione: il flusso ha un segno




il flusso attraverso una superficie finita S è $\Phi = \int_S g dS \cos\theta = \int_S \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS$

Si cerca il flusso entrante attraverso una superficie chiusa del campo gravitazionale

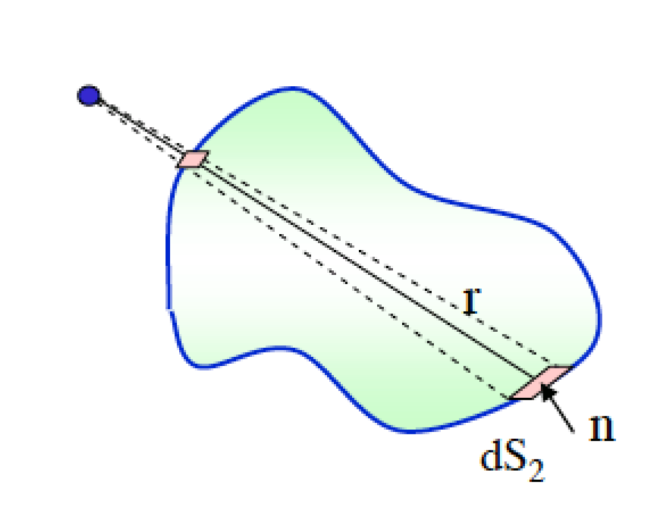



generato da una massa "puntiforme" interna

$$d\Phi = g dS \cos\theta = GM \frac{dS \cos\theta}{r^2}$$ essendo $g = G\frac{M}{r^2}$

angolo solido sotteso da dS $d\Omega$

$$\Phi = GM \int_S \frac{dS \cos\theta}{r^2} = GM \int_S d\Omega$$ ovvero $$\boxed{\Phi = 4\pi GM}$$




Analogamente si dimostra che il flusso entrante del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme esterna è nullo.

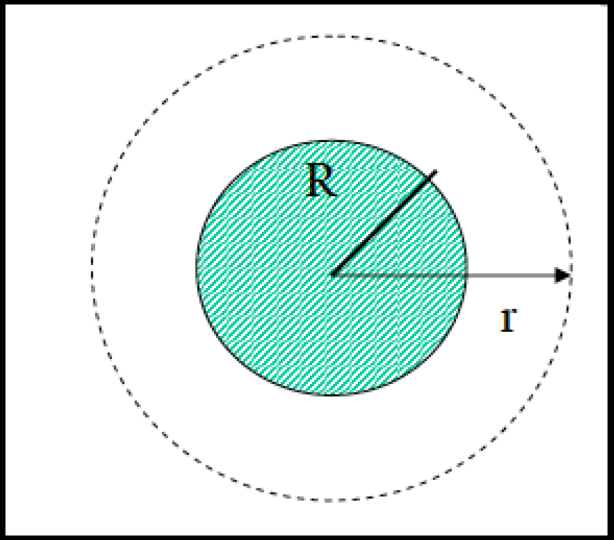
Applicando il teorema di sovrapposizione si ottiene

$$\boxed{\Phi = 4\pi GM_{INT}}$$

è il Teorema di Gauss

per il campo gravitazionale

è la massa totale all'interno della superficie chiusa.




campo gravitazionale generato da una distribuzione di massa sferica, ad una distanza r > R

Prendiamo una superficie sferica concentrica di raggio r.
Per simmetria, il campo g è costante in modulo e ovunque ortogonale alla superficie

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS = g(r)S = 4\pi r^2 g(r)$$

Ma per il Teorema di Gauss: $\Phi = 4\pi GM_{INT} = 4\pi GM$

uguagliando si ottiene: $\boxed{g(r) = G\dfrac{M}{r^2}}$ il campo gravitazionale è uguale a quello generato da una massa M puntiforme, posta nel centro.