UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

Dipartimento di Matematica

Anno Accademico 2012/2013

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Le σ-algebre di Borel e di Lebesgue

Relatore
Prof. Giancarlo Mauceri

Candidato: Alessio Santamaria

Indice

Introduzione

In diverse costruzioni della misura di Lebesgue la classe degli insiemi Lebesgue-misurabili si presenta in modo naturale come la famiglia degli insiemi su cui è definita la misura. Ad esempio, questo accade nell'approccio in cui gli insiemi misurabili sono definiti come quegli insiemi per cui le misure interna ed esterna coincidono, oppure nella costruzione di Carathéodory (che è quella esposta in questa tesi), che utilizza la sola misura esterna. Inoltre, la misura di Lebesgue sulla classe degli insiemi Lebesgue-misurabili gode della proprietà di completezza: ogni sottoinsieme di un insieme di Lebesgue di misura nulla è Lebesgue-misurabile. Tuttavia, in diverse dimostrazioni delle proprietà della misura o dell'integrale è conveniente lavorare con una classe di insiemi misurabili più piccola, che gode di una proprietà di minimalità che, per così dire, la lega più intimamente ai rettangoli e alla loro misura elementare. Questa classe è la classe degli insiemi di Borel, che è caratterizzata come la più piccola σ-algebra che contiene i rettangoli. Sorge allora naturalmente il problema di stabilire se le due classi di insiemi, i Boreliani e i Lebesguiani, siano effettivamente diverse. In questa tesi presentiamo due diverse dimostrazioni del fatto che la classe degli insiemi di Lebesgue contiene strettamente la classe degli insiemi di Borel.

Nella prima esponiamo un esempio di un insieme E Lebesgue-misurabile ma non Boreliano, ottenuto mediante due insiemi che costituiscono casi limite per la misura di Lebesgue: l'insieme di Cantor (esempio di insieme nullo non numerabile) e l'insieme di Vitali (che non è misurabile). L'insieme E è costruito come immagine, mediante una funzione misurabile e iniettiva Ψ, dell'insieme di Vitali, ed è contenuto nell'insieme di Cantor. Pertanto E è Lebesgue-misurabile, ma non è Boreliano, perché la sua controimmagine è l'insieme di Vitali. La seconda dimostrazione prova di fatto molto di più: le due classi di insiemi hanno *diversa cardinalità*. Mostreremo come la σ-algebra di Borel abbia la cardinalità del continuo approfondendo il concetto di "σ-algebra generata" da una famiglia di sottoinsiemi di un insieme dato, aggiungendo a tale famiglia tutti i complementari dei suoi elementi e tutte le unioni numerabili di suoi elementi, ottenendo così una famiglia più estesa; iterando il procedimento non solo sui naturali, ma su tutti gli *ordinali numerabili*, otterremo la σ-algebra generata dalla famiglia di partenza. Infine proveremo che la σ-algebra di Lebesgue ha invece la cardinalità delle parti di $\mathbb{R}$: per il Teorema di Cantor, abbiamo la disuguaglianza stretta.

È interessante notare come nessuna delle due dimostrazioni è costruttiva, perché entrambe usano in misura importante l'Assioma di Scelta (la prima nella costruzione dell'insieme di Vitali, la seconda, in particolare, nelle proprietà di Ω, l'insieme degli ordinali numerabili). Una costruzione esplicita di un insieme Lebesgue-misurabile ma non Boreliano è stata data da Kolmogorov, utilizzando le frazioni continue, ma non sarà esposta in questa tesi.

Il primo capitolo enuncia e dimostra tutti i principi di Teoria degli Insiemi necessari alle due dimostrazioni che sono l'oggetto della tesi, passando per il Lemma di Zorn e il Teorema del Buon Ordinamento, propedeutici entrambi allo studio delle proprietà degli insiemi di numeri ordinali, e analizzando diversi teoremi sulla cardinalità. Nel secondo capitolo, invece, esporremo la costruzione di Carathéodory della σ-algebra di Lebesgue quale dominio della misura di Lebesgue-Stieltjes associata all'identità, definendo quindi le misure, le misure esterne e le premisure, queste ultime definite su algebre; proveremo come è possibile estendere una premisura su un'algebra ad una misura sulla σ-algebra generata da tale algebra. Metteremo quindi in pratica tutto ciò per dimostrare che ad ogni funzione a valori reali di variabile reale che sia continua a destra e crescente corrisponde un'unica misura, definita sui Boreliani, che ad ogni intervallo $(a, b]$ associ il valore $F(b) - F(a)$; il suo completamento è la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a tale funzione. Infine, ci dedicheremo alla costruzione formale degli insiemi di Cantor e di Vitali, per poi esporre le due dimostrazioni.

Capitolo 1

Principi di Teoria degli Insiemi

1.1 I numeri naturali

Il concetto di "numero naturale" ci è stato spiegato a scuola come un concetto intuitivo legato alla quantità. Nell'intento di definirlo in maniera rigorosa, potremmo cercare di tradurlo in termini matematici mediante il numero di elementi che conta un certo insieme. Ad esempio, potremmo definire il numero 2 come un particolare insieme consistente di esattamente due elementi, ma come facciamo a "scegliere" questo insieme?

Per motivare la scelta particolare che si fa solitamente, supponiamo che un numero, ad esempio 7, sia già stato definito come un insieme (di sette elementi): come dovremmo definire 8? In altre parole, come troviamo un insieme che consiste di esattamente otto elementi? Possiamo trovare sette elementi nell'insieme 7, cosa dovremmo usare come ottavo elemento da aggiungere? Una risposta ragionevole all'ultima domanda è il numero (l'insieme) 7 stesso; definiamo cioè 8 come l'insieme consistente dei sette elementi di 7, con anche 7.

Nota. Con questa definizione, ogni numero è uguale all'insieme dei suoi predecessori.

Definizione. Per ogni insieme x definiamo il *successore* x^+ di x l'insieme ottenuto aggiungendo x agli elementi di x; in altre parole

$$x^+ = x \cup \{ x \} .$$

Siamo ora pronti per definire i numeri naturali. Nel definire 0 come un insieme con zero elementi, non abbiamo scelta: dobbiamo scrivere

$$0 = \varnothing.$$

Se ogni numero naturale dev'essere uguale all'insieme dei suoi predecessori, non abbiamo scelta nel definire 1, o 2, o 3: dobbiamo scrivere

$$\begin{aligned} 1 &= 0^+ = \{ 0 \} \\ 2 &= 1^+ = \{ 0, 1 \} \\ 3 &= 2^+ = \{ 0, 1, 2 \} , \end{aligned}$$

e così via. Per costruire l'insieme dei numeri naturali, abbiamo bisogno del seguente principio di Teoria degli Insiemi:

Assioma (Infinito)**.** *Esiste un insieme contenente 0 e contenente il successore di ciascuno dei suoi elementi.*

Questo assioma sostanzialmente afferma l'esistenza di un insieme "infinito", nel senso intuitivo del termine.

Diremo, temporaneamente, che un insieme A è un *insieme successore* se

- $0 \in A$;
- se $x \in A$, allora $x^+ \in A$.

A questo punto, l'Assioma di Infinito dice semplicemente che esiste un insieme successore A. Dato che l'intersezione di ogni famiglia (non vuota) di insiemi successori è un insieme successore (se $\{ A_i \}_{i \in I}$ è una tale famiglia indiciata su un insieme $I \neq \varnothing$, allora $0 \in A_i$ per ogni i e se $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, allora $x \in A_i$ per ogni i, e quindi $x^+ \in A_i$ per ogni i), l'intersezione di tutti gli insiemi successori contenuti in A è un insieme successore ω.

Proposizione 1. *L'insieme ω è un sottoinsieme di ogni insieme successore.*

Dimostrazione. Sia B un arbitrario insieme successore: allora anche $A \cap B$ è un insieme successore. Siccome $A \cap B \subset A$, allora $\omega \subset A \cap B$ per definizione di ω; in particolare $\omega \subset B$. □

La proprietà di minimalità caraterizza univocamente l'insieme ω.

Definizione. Un *numero naturale* è un elemento dell'insieme successore minimale ω.

1.2 Ordini

Definizione. Dato un insieme X, un *ordine parziale* (o semplicemente un *ordine*) "$\leq$" in X è una relazione in X riflessiva, antisimmetrica e transitiva; in simboli:

- per ogni $x \in X$, $x \leq x$;
- per ogni $x, y \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$;
- per ogni $x, y, z \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$.

Se per ogni $x, y \in X$ si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$, allora $\leq$ è detta *ordine totale*.

Un *insieme parzialmente (totalmente) ordinato* è una coppia ordinata $(X, \leq)$ dove X è un insieme e $\leq$ è un ordine parziale (totale) in X. Un insieme totalmente ordinato è detto anche *catena*.

Come notazione, scriveremo $y \geq x$ se $x \leq y$; inoltre se si ha che $x \leq y$ ma $x \neq y$, scriveremo $x < y$ e diremo che x è *strettamente minore* di y.

Definizione. Sia X un insieme parzialmente ordinato, e sia $a \in X$. L'insieme $\{ x \in X \mid x < a \}$ è il *segmento iniziale* determinato da a, lo denoteremo con $s(a)$. L'insieme $\{ x \in X \mid x \leq a \}$ è il *segmento iniziale debole* determinato da a, e lo denoteremo con $\bar{s}(a)$.

Definizione. Sia X un insieme parzialmente ordinato, e sia $a \in X$. Diciamo che:

- a è il *minimo* elemento di X se $a \leq x$ per ogni $x \in X$;
- a è il *massimo* elemento di X se $x \leq a$ per ogni $x \in X$;
- a è *minimale* se non esiste alcun elemento in X strettamente minore di a, cioè se $x \leq a$ implica che $x = a$;

- a è *massimale* se non esiste alcun elemento in X strettamente maggiore di a, cioè se $a \leq x$ implica $a = x$.

Nota. La proprietà antisimmetrica implica che se X ha un minimo, allora ne ha uno solo. Lo stesso vale per il massimo.

Esempi.

1. L'insieme ω dei numeri naturali, ordinato nel modo canonico (cioè $0 < 1 < 2 \dots$), è un esempio di insieme ordinato che ha minimo (0), ma non massimo. Lo stesso insieme, ma con l'ordine opposto, ha massimo ma non minimo.

2. Sia $\mathscr{C}$ la collezione dei sottoinsiemi non vuoti di un insieme X non vuoto, ordinata dall'inclusione. Ogni singoletto è un elemento minimale di $\mathscr{C}$, ma $\mathscr{C}$ non ha minimo (a meno che X stesso non sia un singoletto).

Definizione. Sia X un insieme parzialmente ordinato, sia $a \in X$ e sia $E \subset X$. Diciamo che

- a è un *minorante* di E se $a \leq x$ per ogni $x \in E$;
- a è un *maggiorante* di E se $a \geq x$ per ogni $x \in E$.

Sia E_* l'insieme dei minoranti di E, e sia E^* l'insieme dei maggioranti di E.

- se E_* ha massimo a (necessariamente unico), allora a è detto *estremo inferiore* (*inf*) di E;
- se E^* ha minimo a (necessariamente unico), allora a è detto *estremo superiore* (*sup*) di E.

Definizione. Due insiemi parzialmente ordinati X e Y sono detti *simili*, in simboli $X \cong Y$, se esiste una corrispondenza biunivoca (detta *similitudine*) che preserva l'ordine tra essi. Più esplicitamente, se $f\colon X \to Y$ è una similitudine, allora per ogni $a, b \in X$ si ha che $f(a) \leq f(b)$ (in Y) se e solo se $a \leq b$ (in X).

1.3 L'Assioma di Scelta

Un insieme è vuoto oppure non lo è e, se non lo è, per definizione di insieme vuoto, esiste almeno un elemento contenuto in esso. Questa osservazione può essere generalizzata: se X e Y sono insiemi, e se uno di essi è vuoto, allora il prodotto cartesiano $X \times Y$ è vuoto. Se né X né Y è vuoto, allora esiste un elemento x in X e un elemento y in Y; ne segue che la coppia ordinata (x, y) appartiene a $X \times Y$ e quindi $X \times Y$ è non vuoto. Si procede per induzione per dimostrare che il prodotto cartesiano di ogni famiglia finita (non vuota) di insiemi non vuoti è non vuota. Per il caso di famiglie infinite, invece, è necessario il seguente principio di Teoria degli Insiemi:

Assioma (Scelta)**.** *Il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto.*

Supponiamo che $\mathscr{C}$ sia una collezione non vuota di insiemi non vuoti. Possiamo vedere $\mathscr{C}$ come una famiglia o, per dirla meglio, possiamo convertire $\mathscr{C}$ in un insieme indiciato, usando la collezione $\mathscr{C}$ stessa come insieme di indici e usando la mappa identica su $\mathscr{C}$ nel ruolo di indiciamento. L'Assioma di Scelta dunque dice che il prodotto cartesiano degli insiemi in $\mathscr{C}$ ha almeno un elemento. Un elemento di un tale prodotto cartesiano è, per definizione, una funzione (una famiglia) il cui dominio è l'insieme di indici (in questo caso $\mathscr{C}$) e il valore che associa ad ogni indice appartiene all'insieme che possiede quell'indice. In conclusione, abbiamo che esiste una funzione f con dominio $\mathscr{C}$ tale che se $A \in \mathscr{C}$, allora $f(A) \in A$.

Questa affermazione vale, in particolare, nel caso in cui $\mathscr{C}$ sia la collezione di tutti i sottoinsiemi non vuoti di un insieme non vuoto X. L'asserzione in questo caso è che esiste una funzione f con dominio $\mathscr{P}(X) \setminus \{ \varnothing \}$ tale che se A è un elemento del dominio di f, allora $f(A) \in A$. Intuitivamente, la funzione f può essere descritta come una scelta simultanea di un elemento da ciascuno dei sottoinsiemi di X, da cui il nome dell'Assioma. Una funzione che in questo senso "sceglie" un elemento da ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme X è detta *funzione di scelta* per X.

Lemma 2 (Zorn)**.** *Se X è un insieme parzialmente ordinato tale che ogni catena in X ha un maggiorante, allora X contiene un elemento massimale.*

Prima di incominciare la dimostrazione, analizziamo l'enunciato. Ricordiamo innanzitutto che una catena è un insieme totalmente ordinato; per "catena in X" intendiamo un sottoinsieme di X tale che, considerato a sua volta come un insieme parzialmente ordinato, risulta in realtà essere *totalmente* ordinato. Se A è una catena nell'insieme X, le ipotesi del Lemma di Zorn garantiscono l'esistenza di un maggiorante di A in X, ma non assicurano l'esistenza di un maggiorante di A in A. La tesi del Lemma di Zorn è l'esistenza di un elemento a in X con la proprietà che se $a \leq x$ per qualche $x \in X$, allora necessariamente $a = x$.

Dimostrazione. Il primo passo è rimpiazzare l'ordine parziale astratto con l'ordine di inclusione in un'opportuna collezione di insiemi. Più precisamente, consideriamo per ogni elemento $x \in X$ il segmento iniziale debole $\bar{s}(x)$ consistente di x e di tutti i suoi predecessori. L'immagine $\mathscr{S}$ della funzione $\bar{s}$ (da X a $\mathscr{P}(X)$) è una collezione di sottoinsiemi di X, che possiamo ordinare (parzialmente) tramite l'inclusione. La funzione $\bar{s}$ è iniettiva, e una condizione necessaria e sufficiente perché $\bar{s}(x) \subset \bar{s}(y)$ è che $x \leq y$. Di conseguenza, trovare un elemento massimale in X equivale a trovare un insieme massimale in $\mathscr{S}$.

Sia $\mathscr{X}$ l'insieme di tutte le catene in X; ogni elemento di $\mathscr{X}$ è contenuto in $\bar{s}(x)$ per qualche x in X. La collezione $\mathscr{X}$ è una collezione non vuota di insiemi, parzialmente ordinata dall'inclusione, e tale che se $\mathscr{C}$ è una catena in $\mathscr{X}$ (cioè una catena di catene in X), allora l'unione degli insiemi in $\mathscr{C}$, cioè $\bigcup_{A\in\mathscr{C}} A$, appartiene a $\mathscr{X}$, ovvero è ancora una catena in X. Dal momento che ogni insieme in $\mathscr{X}$ è dominato da qualche insieme in $\mathscr{S}$, ogni elemento massimale di $\mathscr{X}$ (posto che ce ne siano) è anche elemento massimale di $\mathscr{S}$. Un vantaggio di tale collezione $\mathscr{X}$ è la forma leggermente più specifica che l'ipotesi riguardo alle catene assume: invece di dire che ogni catena $\mathscr{C}$ in $\mathscr{X}$ ha qualche maggiorante in $\mathscr{S}$, possiamo affermare esplicitamente che l'unione degli insiemi di $\mathscr{C}$, la quale è chiaramente un maggiorante di $\mathscr{C}$, è un elemento della collezione $\mathscr{X}$. Un altro vantaggio tecnico di $\mathscr{X}$ è che contiene ogni sottoinsieme di ciascuno dei suoi insiemi; questo rende possibile "allargare" gli insiemi non massimali in $\mathscr{X}$ lentamente, aggiungengo un elemento alla volta.

Ora possiamo dimenticarci del dato ordine parziale in X. Da questo momento, consideriamo una collezione $\mathscr{X}$ non vuota di sottoinsiemi di un insieme X non vuoto, soggetta a due condizioni:

- ogni sottoinsieme di ciascun insieme in $\mathscr{X}$ è un elemento di $\mathscr{X}$;
- l'unione di ogni catena di insiemi in $\mathscr{X}$ è un elemento di $\mathscr{X}$.

Da notare che la prima condizione implica che $\varnothing \in \mathscr{X}$. Il nostro obiettivo è provare che esiste in $\mathscr{X}$ un insieme massimale.

Sia f una funzione di scelta per X: f è una funzione dalla collezione di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X a X tale che $f(A) \in A$ per ogni A nel dominio di f. Per ogni insieme A in $\mathscr{X}$, sia $\hat{A}$ l'insieme di tutti quegli elementi x di X che, una volta aggiunti ad A, producono un insieme in $\mathscr{X}$; in altre parole, $\hat{A} = \{ x \in X \mid A \cup \{ x \} \in \mathscr{X} \}$. Definiamo una funzione

$$\begin{aligned} g\colon \mathscr{X} &\to \mathscr{X} \\ A &\mapsto \begin{cases} A \cup \left\{ f(\hat{A} \setminus A) \right\} & \text{se } \hat{A} \setminus A \neq \varnothing; \\ A & \text{se } \hat{A} \setminus A = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

Segue dalla definizione di $\hat{A}$ che $\hat{A} \setminus A = \varnothing$ se e solo se A è massimale. In questi termini, perciò, ciò che dobbiamo provare è che esiste in $\mathscr{X}$ un insieme A tale che $g(A) = A$. Da notare la proprietà cruciale di g: $g(A)$, che include sempre A, contiene al massimo un solo elemento in più di A.

Introduciamo una definizione temporanea. Diciamo che una sottocollezione $\mathscr{I}$ di $\mathscr{X}$ è una *torre* se valgono le seguenti condizioni:

(i) $\varnothing \in \mathscr{I}$;

(ii) se $A \in \mathscr{I}$, allora $g(A) \in \mathscr{I}$;

(iii) se $\mathscr{C}$ è una catena in $\mathscr{I}$, allora $\bigcup_{A \in \mathscr{C}} A \in \mathscr{I}$.

Le torri esistono sicuramente, dato che la stessa collezione $\mathscr{X}$ è una torre. Siccome l'intersezione di una collezione di torri è ancora una torre, segue, in particolare, che se $\mathscr{I}_0$ è l'intersezione di tutte le torri, allora $\mathscr{I}_0$ è la torre più piccola possibile. Ci proponiamo ora di provare che la torre $\mathscr{I}_0$ è una catena.

Diciamo che un insieme C in $\mathscr{I}_0$ è *comparabile* se è comparabile con ogni insieme in $\mathscr{I}_0$, nel senso che se $A \in \mathscr{I}_0$, allora necessariamente $A \subset C$ oppure $C \subset A$. Dire che $\mathscr{I}_0$ è una catena equivale a dire che ogni insieme in $\mathscr{I}_0$ è comparabile. Insiemi comparabili esistono, $\varnothing$ è uno di quelli. Nei prossimi due capoversi concentriamo la nostra attenzione su un arbitrario ma temporaneamente fissato insieme comparabile C.

Supponiamo che $A \in \mathscr{I}_0$ e A sia un sottoinsieme proprio di C: allora $g(A) \subset C$. Il motivo è che siccome C è comparabile, allora necessariamente $g(A) \subset C$ oppure C è un sottoinsieme proprio di $g(A)$. In quest'ultimo caso risulta che A è un sottoinsieme proprio di un sottoinsieme proprio (C) di $g(A)$, e questo contraddice il fatto che $g(A) \setminus A$ non può essere più grande di un singoletto.

Consideriamo ora la collezione $\mathscr{U}$ di tutti quegli insiemi A in $\mathscr{I}_0$ per cui $A \subset C$ oppure $g(C) \subset A$. La collezione $\mathscr{U}$ è contenuta nella collezione degli insiemi in $\mathscr{I}_0$ comparabili con $g(C)$; infatti se $A \in \mathscr{U}$, allora, siccome $C \subset g(C)$, si ha che $A \subset g(C)$ oppure $g(C) \subset A$. Proviamo che $\mathscr{U}$ è una torre.
Siccome $\varnothing \in C$, la prima condizione per le torri è soddisfatta. Per provare la seconda condizione, cioè che se $A \in \mathscr{U}$, allora $g(A) \in \mathscr{U}$, consideriamo tre casi.

1: A è un sottoinsieme proprio di C. Allora $g(A) \subset C$ per ciò che abbiamo visto, e quindi $g(A) \in \mathscr{U}$.

2: $A = C$. Allora $g(A) = g(C)$, cosicché $g(C) \subset g(A)$, dunque $g(A) \in \mathscr{U}$.

3: $g(C) \subset A$. Allora $g(C) \subset g(A)$, e perciò $g(A) \in \mathscr{U}$.

La terza condizione per le torri, cioè che l'unione di una catena in $\mathscr{U}$ appartenga ad $\mathscr{U}$, è immediata dalla definizione di $\mathscr{U}$. In conclusione, $\mathscr{U}$ è una torre inclusa in $\mathscr{I}_0$, e perciò, siccome $\mathscr{I}_0$ è la torre più piccola possibile, si ha $\mathscr{U} = \mathscr{I}_0$.

Le considerazioni precedenti implicano che per ogni insieme comparabile C, anche l'insieme $g(C)$ è comparabile. Infatti, dato C basta formare $\mathscr{U}$ come sopra, il fatto che $U = \mathscr{I}_0$ significa che se $A \in \mathscr{I}_0$, allora $A \subset C$ (in qual caso $A \subset g(C)$) oppure $g(C) \subset A$.

Ora noi sappiamo che $\varnothing$ è comparabile e che g mappa insiemi comparabili in insiemi comparabili. Siccome l'unione di una catena di insiemi comparabili è comparabile, segue che gli insiemi comparabili (in $\mathscr{I}_0$) formano una torre, e perciò ogni insieme in $\mathscr{I}_0$ è un insieme comparabile (per la proprietà di minimalità di $\mathscr{I}_0$ quale torre); questo è ciò che volevamo dimostrare riguardo $\mathscr{I}_0$.

Poiché$\mathscr{I}_0$ è una catena, l'unione A di tutti gli insiemi in $\mathscr{I}_0$ è ancora un elemento di $\mathscr{I}_0$. Siccome l'unione include tutti gli insiemi in $\mathscr{I}_0$, segue che $g(A) \subset A$, ma dato che $A \subset g(A)$ per definizione di g, si ha che $A = g(A)$, e la dimostrazione del Lemma di Zorn è completa. □

1.4 Il buon ordinamento

Definizione. Un insieme parzialmente ordinato è detto *ben ordinato* (e il suo ordine *buon ordinamento*) se ogni suo sottoinsieme non vuoto ammette minimo.

Proposizione 3. *Sia X un insieme ben ordinato. Allora X è totalmente ordinato.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$: allora $\{ x, y \} \subset X$ e perciò ammette minimo; a seconda che tale minimo sia x oppure y, avremo $x \leq y$ oppure $y \leq x$. □

Teorema 4 (Principio di Induzione Transfinita)**.** *Sia X un insieme ben ordinato, e sia S un suo sottoinsieme. Se $x \in S$ ogniqualvolta $s(x)$ (segmento iniziale di $x \in X$) è contenuto in S, allora $X = S$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $X \setminus S$ sia non vuoto, allora – in quanto sottoinsieme di X ben ordinato – ammette un elemento minimo, diciamo x. Dunque ogni elemento del segmento iniziale $s(x)$ appartiene ad S, perciò, per ipotesi, si ha che $x \in S$. Questo è assurdo, perché $x \in X \setminus S$; segue che $X \setminus S = \varnothing$. □

Definizione. Diciamo che un insieme ben ordinato A è una *continuazione* di un insieme ben ordinato B se valgono le seguenti condizioni:

- $B \subset A$;
- B è un segmento iniziale in A;
- l'ordinamento degli elementi in B è lo stesso del loro ordinamento in A.

Ad esempio, se X è un insieme ben ordinato e se $a, b \in X$ sono tali che $b < a$, allora $s(a)$ è una continuazione di $s(b)$, e X è una continuazione di entrambi $s(a)$ e $s(b)$.

Proposizione 5. *Se una collezione $\mathscr{C}$ di insiemi ben ordinati è una catena rispetto alla continuazione, e se U è l'unione degli insiemi di $\mathscr{C}$, allora esiste un unico buon ordinamento di U tale che U è una continuazione di ogni insieme nella collezione $\mathscr{C}$.*

Dimostrazione. Se a e b sono in U, allora esistono due insiemi A e B in $\mathscr{C}$ con $a \in A$ e $b \in B$. Siccome si ha che $A = B$ oppure uno tra A e B è la continuazione dell'altro, in ogni caso entrambi a e b appartengono ad uno stesso insieme in $\mathscr{C}$; l'ordine di U è definito ordinando ciascuna coppia $\{a, b\}$ nel modo in cui è ordinata in un qualunque insieme di $\mathscr{C}$ che contiene entrambi a e b. Siccome $\mathscr{C}$ è una catena rispetto alla continuazione, tale ordine è determinato senza ambiguità ed è l'unico che possa soddisfare la tesi (si tratta infatti di una condizione necessaria). Il risultato ottenuto è un buon ordinamento, infatti sia $X \subset U$ un sottoinsieme non vuoto di U: allora deve esistere un insieme $A_0 \in \mathscr{C}$ tale che $X \cap A_0 \neq \varnothing$. In quanto sottoinsieme di A_0 ben ordinato, $X \cap A_0$ ammette un minimo elemento, sia x_0 tale minimo. Sia ora $x \in X$: se $x \in A_0$, allora si ha che $x_0 \leq x$. Se $x \in X \setminus A_0$, allora consideriamo $A_1 \in \mathscr{C}$ tale che $x_0, x \in A_1$. Poiché $\mathscr{C}$ è una catena per continuazione, si ha che $A_0 \subset A_1$ e A_0 è un segmento iniziale di A_1: dunque $x_0 \leq x$. Segue che $x_0 \leq x$ per ogni $x \in X$, e quindi x_0 è il minimo elemento di X. $\square$

Proposizione 6. *Se X e Y sono insiemi ben ordinati, allora o X è simile a Y, o X è simile ad un segmento iniziale di Y, o Y è simile ad un segmento iniziale di X.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\mathscr{F}$ di tutte le similitudini i cui domini sono segmenti iniziali di X o X stesso e le cui immagini sono segmenti iniziali di Y o Y stesso. $\mathscr{F}$ è non vuoto perché $f\colon \{\inf X\} \to \{\inf Y\}$ appartiene ad $\mathscr{F}$; ordiniamo $\mathscr{F}$ per inclusione. Se $\mathscr{C}$ è una catena di funzioni di $\mathscr{F}$, allora l'unione dei suoi elementi è ancora una funzione definita sull'unione dei domini (che è un segmento iniziale in X oppure X stesso) la cui immagine è un segmento iniziale di Y oppure Y stesso. Tale unione è un maggiorante in $\mathscr{F}$ per la catena $\mathscr{C}$: per il Lemma di Zorn, esiste in $\mathscr{F}$ un elemento massimale, diciamo $F\colon A \to B$. Se $A = s(x)$ per un certo $x \in X$ e $B = s(y)$ per un certo $y \in Y$, allora $A \cup \{x\}$ e $Y \cup \{y\}$ sono ancora segmenti iniziali oppure tutto X o Y, e F potrebbe essere estesa ponendo $F(x) = y$, contraddicendo la sua massimalità. Perciò o $A = X$ o $B = Y$ (o entrambi). $\square$

Teorema 7 (Buon Ordinamento)**.** *Ogni insieme può essere ben ordinato.*

Dimostrazione. Utilizziamo il Lemma di Zorn. Dato un insieme X, consideriamo la collezione $\mathscr{W}$ di tutti i sottoinsiemi ben ordinati di X. Ordiniamo parzialmente $\mathscr{W}$ per continuazione.

La collezione $\mathscr{W}$ è non vuota, perché, ad esempio, $\varnothing \in \mathscr{W}$. Se $\mathscr{C}$ è una catena in $\mathscr{W}$, allora l'unione U degli insiemi in $\mathscr{C}$ ha un unico buon ordinamento che rende U una continuazione di ciascun insieme di $\mathscr{C}$. Ciò significa che le ipotesi del Lemma di Zorn sono soddisfatte, dunque esiste un insieme ben ordinato massimale, diciamo M, in $\mathscr{W}$. Dimostriamo che in realtà $M = X$.

Supponiamo che $X \setminus M$ sia non vuoto, e sia x un suo elemento. Chiamiamo "$\leq$" l'ordine di M, e consideriamo $M' = M \cup \{x\}$ sottoinsieme di X. Definiamo su M' una relazione d'ordine "$\prec$" ponendo $m \prec x$ per ogni $m \in M$ e $a \prec b$ se e solo se $a \leq b$. $(M', \prec)$ è un insieme ben ordinato: "$\prec$" è infatti un buon ordinamento perché lo è "$\leq$". M' è perciò una continuazione di M ed è un elemento di $\mathscr{W}$: questo è assurdo perché M è massimale in $\mathscr{W}$. Dunque X risulta essere un insieme ben ordinato. $\square$

1.5 I numeri ordinali

Il successore x^+ di un insieme x è stato definito come $x \cup \{x\}$, e poi abbiamo costruito ω come l'insieme più piccolo possibile contenente 0 e contenente x^+ ogniqualvolta contiene x. Cosa succede se partiamo da ω, formiamo il suo successore ω^+, poi formiamo il successore di questi, e procediamo all'infinito?

La proprietà cruciale di un numero naturale è l'essere un insieme ben ordinato (ordinando i suoi elementi dal più piccolo al più grande) tale che il segmento iniziale (in ω) determinato da ciascun elemento (di ω) è uguale all'elemento stesso. Infatti se m e n sono numeri naturali, allora $m < n$ significa $m \in n$; questo implica che $\{\, m \in \omega \mid m < n \,\} = n$. Questa è la proprietà sulla quale il processo di "estensione" dei numeri naturali è basato.

Definizione. Un *numero ordinale* è un insieme ben ordinato α tale che $s(\xi) = \xi$ per ogni ξ in α, dove $s(\xi)$ è il segmento iniziale $\{\, \eta \in \alpha \mid \eta < \xi \,\}$.

Un esempio di numero ordinale che non sia un numero naturale è l'insieme ω di tutti i numeri naturali. Ciò significa che possiamo "contare oltre l'infinito": se prima gli unici numeri a disposizione erano gli elementi di ω, ora abbiamo anche ω stesso. Abbiamo anche il successore ω^+ di ω; questo insieme è ordinato nel modo ovvio (estendendo l'ordine di ω ponendo $n < \omega$ per ogni $n \in \omega$) e, in più, tale ordine è un buon ordinamento che soddisfa la condizione imposta sui numeri ordinali. Infatti, se $\xi \in \omega^+$, allora, per definizione di successore, o si ha che $\xi \in \omega$, in qual caso sappiamo già che $s(\xi) = \xi$, oppure $\xi = \omega$: allora $s(\xi) = \omega$ per definizione dell'ordine, cosicché ancora $s(\xi) = \xi$. Quest'argomentazione può essere generalizzata: essa prova infatti che se α è un numero ordinale, allora lo è anche α^+. Quindi abbiamo ω, $\omega^+ = \omega + 1$, $\omega + 2 \dots$ Consideriamo l'insieme che ha lo stesso ruolo di ω nei confronti dei numeri naturali:

$$\omega 2 = \omega \cup \{\, \omega + n \mid n \in \omega \,\},$$

cioè l'insieme costituito da tutti i numeri naturali e da tutti gli ordinali del tipo $\omega + n$, con n naturale. $\omega 2$ "dista" da ω proprio come ω dista da 0: abbiamo aggiunto un'infinità numerabile di numeri *dopo* i naturali! Ordiniamo $\omega 2$ nel modo seguente: imponiamo $n < \omega$ per ogni $n \in \omega$, e anche $\omega + n < \omega + m$ se e solo se $n < m$, con $n, m \in \omega$. Con tale ordinamento, anche $\omega 2$ risulta essere un numero ordinale.

Dopo $\omega 2 + 1$ vengono $\omega 2 + 2, \omega 2 + 3 \dots$ e dopo tutti i termini di questa successione avremo $\omega 3$. Poi di nuovo $\omega 3 + 1, \omega 3 + 2 \dots$ fino a $\omega 4$. In questo modo otteniamo $\omega, \omega 2, \omega 3, \omega 4 \dots$, fino ad ottenere qualcosa che li segue nello stesso senso in cui ω segue i numeri naturali; quel qualcosa è ω^2. A questo punto si ricomincia: $\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \dots, \omega^2 + \omega 2, \dots, \omega^2 + \omega 3, \dots, \omega^2 2, \dots, \omega^2 3, \dots, \omega^3, \dots, \omega^4, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{(\omega^\omega)}, \dots, \omega^{(\omega^{(\omega^\omega)})}, \dots$

1.6 Insiemi di numeri ordinali

Un numero ordinale è, per definizione, un tipo speciale di insieme ben ordinato; esaminiamo ora alcune proprietà cruciali dei numeri ordinali.

Il fatto più elementare è che ogni elemento di un numero ordinale α è al tempo stesso un sottoinsieme di α. Infatti, se $\xi \in \alpha$, allora il fatto che $s(\xi) = \xi$ implica che ogni elemento di ξ è un predecessore di ξ in α e perciò, in particolare, un elemento di α.

Proposizione 8. *Ogni elemento di un numero ordinale è un numero ordinale.*

Dimostrazione. Sia ξ un elemento di un numero ordinale α. Sappiamo che ξ è un sottoinsieme di α e, di conseguenza, è un insieme ben ordinato (con l'ordine che eredita da α). Sia ora $\eta \in \xi$: allora il segmento iniziale determinato da η in ξ è lo stesso di quello determinato in α. Siccome quest'ultimo è uguale a η, così dev'essere il primo, e quindi ξ è un numero ordinale. □

Proposizione 9. *Se due numeri ordinali sono simili, allora sono uguali.*

Dimostrazione. Sia $f\colon \alpha \to \beta$ una similitudine da α in β numeri ordinali; dimostriamo che $f(\xi) = \xi$ per ogni $\xi \in \alpha$, e per farlo utilizziamo l'Induzione Transfinita. Sia

$$S = \{\, \xi \in \alpha \mid f(\xi) = \xi \,\}.$$

Per ogni ξ in α, il più piccolo elemento di α che non appartiene a $s(\xi)$ è ξ stesso. Siccome f è una similitudine, segue che il più piccolo elemento di β che non appartiene all'immagine di $s(\xi)$ lungo f è $f(\xi)$. Perciò se supponiamo che $s(\xi) \subset S$, allora $f(\xi)$ e ξ sono numeri ordinali con gli stessi segmenti iniziali, e quindi $f(\xi) = \xi$. Abbiamo dunque provato che $\xi \in S$ ogniqualvolta $s(\xi) \subset S$: il Principio di Induzione Transfinita implica che $S = \alpha$, da cui $\alpha = \beta$. □

Se α e β son numeri ordinali, allora, in particolare, sono insiemi ben ordinati e, di conseguenza, o sono simili o uno dei due è simile ad un segmento iniziale dell'altro. Se, poniamo, β è simile ad un segmento iniziale di α, allora β è simle ad un elemento di α. Siccome ogni elemento di α è un numero ordinale, segue che β è un elemento di α, o, in altre parole, che α è una continuazione di β. Abbiamo quindi provato che se α e β sono numeri ordinali distinti, allora le seguenti condizioni:

- $\beta \in \alpha$;
- $\beta \subset \alpha$;
- α è una continuazione di β,

sono tutte tra loro equivalenti; se esse valgono, allora possiamo scrivere $\beta < \alpha$.

Ciò che abbiamo appena provato è che due numeri ordinali sono sempre comparabili; cioè, se α e β sono ordinali, allora o $\beta = \alpha$, o $\beta < \alpha$, oppure $\alpha < \beta$.

Teorema 10. *Ogni insieme di numeri ordinali è ben ordinato.*

Dimostrazione. Sia E un insieme non vuoto di numeri ordinali, e sia α un elemento di E. Da ciò che abbiamo appena visto, E è totalmente ordinato. Se $\alpha \leq \beta$ per ogni β in E, allora α è il minimo di E, e tutto funziona. Se non è questo il caso, allora esiste un elemento β in E tale che $\beta < \alpha$, cioè, $\beta \in \alpha$; in altre parole, $\alpha \cap E$ è non vuoto. Siccome α è un insieme ben ordinato, $\alpha \cap E$ ha un minimo, diciamo α_0. Se $\gamma \in E$, allora $\alpha \leq \gamma$ (per cui $\alpha_0 < \gamma$), oppure $\gamma < \alpha$ (per cui $\gamma \in \alpha \cap E$ e quindi $\alpha_0 \leq \gamma$), e questo prova che E ha un minimo, e cioè α_0. Poiché ogni sottoinsieme di E continua ad essere un insieme di numeri ordinali, avrà un minimo: dunque E è ben ordinato. $\square$

Alcuni numeri ordinali sono finiti; essi sono semplicemente i numeri naturali (cioè, gli elementi di ω). Gli altri ordinali sono detti *transfiniti*; l'insieme ω di tutti i numeri naturali è il più piccolo numero ordinale transfinito. Ogni numero ordinale finito (a parte 0) ha un immediato predecessore. Se un ordinale transfinito α ha un immediato predecessore β, allora, come per i naturali, $\alpha = \beta^+$. Non ogni ordinale transfinito ha un immediato predecessore; quelli che non lo hanno sono chiamati *ordinali limite.*

1.7 Cardinalità

Se X e Y sono insiemi non vuoti, definiamo le formule

$$\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y), \quad \mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y), \quad \mathrm{Card}(X) \geq \mathrm{Card}(Y)$$

per dire che esiste $f\colon X \to Y$ che sia rispettivamente iniettiva, bigettiva o surgettiva. Definiamo anche

$$\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(Y), \quad \mathrm{Card}(X) > \mathrm{Card}(Y)$$

per dire che esiste un iniezione ma non una bigezione, o una surgezione ma non una bigezione, da X a Y.

Nota. Non diamo alcun significato all'espressione "Card(X)" di per sé.

Queste relazioni possono essere estese all'insieme vuoto dichiarando che

$$\mathrm{Card}(\varnothing) < \mathrm{Card}(X) \quad \text{e} \quad \mathrm{Card}(X) > \mathrm{Card}(\varnothing) \quad \text{per ogni } X \neq \varnothing.$$

Per l'intero paragrafo considereremo sempre insiemi non vuoti.

Proposizione 11. $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ *se e solo se* $\mathrm{Card}(Y) \geq \mathrm{Card}(X)$.

Dimostrazione. Se $f\colon X \to Y$ è iniettiva, fissiamo $x_0 \in X$ e definiamo $g\colon Y \to X$ ponendo $g(y) = f^{-1}(y)$ se $y \in f(X)$, $g(y) = x_0$ altrimenti: g è surgettiva. Viceversa, se $g\colon Y \to X$ è surgettiva, gli insiemi $g^{-1}(\{x\})$ $(x \in X)$ sono non vuoti e disgiunti, perciò se f è una qualunque funzione che mappa ogni $x \in X$ in un elemento di $g^{-1}(x)$ (una tale f esiste per l'Assioma di Scelta), allora f è iniettiva. $\square$

Proposizione 12. *Dati X e Y insiemi, si ha* $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ *oppure* $\mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}(X)$.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\mathscr{I}$ di tutte le iniezioni da sottoinsiemi di X a Y. Gli elementi di $\mathscr{I}$ possono essere visti come sottoinsiemi di $X \times Y$, quindi $\mathscr{I}$ è parzialmente ordinato dall'inclusione. Se $\mathscr{C}$ è una catena di funzioni di $\mathscr{I}$, allora l'unione degli elementi di $\mathscr{C}$ è ancora una funzione definita sull'unione dei domini in Y: è cioè un elemento di $\mathscr{I}$, ed è un maggiorante per $\mathscr{C}$. Allora, per il Lemma di Zorn, $\mathscr{I}$ ha un elemento massimale, diciamo $f\colon A \to B$. Se $x_0 \in X \setminus A$ e $y_0 \in Y \setminus B$, allora f può essere estesa ad un'iniezione da $A \cup \{x_0\}$ a $B \cup \{y_0\}$ ponendo $f(x_0) = y_0$, contraddicendo la massimalità. Dunque o $A = X$, e quindi $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$, oppure $B = Y$, nel qual caso f^{-1} è un'iniezione da Y a X e $\mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}(X)$. $\square$

Teorema 13 (Schöder-Bernstein)**.** *Se* $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ *e* $\mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}(X)$*, allora* $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$.

Dimostrazione. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ due iniezioni. Non è restrittivo supporre che X e Y non abbiano elementi in comune, se non è così, basta sostiuirli con $X \times \{0\}$ e $Y \times \{1\}$ rispettivamente rendendoli così disgiunti.

Diremo che un elemento x in X è il *genitore* dell'elemento $f(x)$ in Y e, allo stesso modo, che un elemento y in Y è il genitore di $g(y)$ in X. Ciascun elemento x in X ha una successione infinita di *discendenti*, cioè $f(x)$, $g(f(x))$, $f(g(f(x))), \ldots$, lo stesso vale per i discendenti di y in Y. Questa definizione implica che ogni termine nella successione è un discendente di tutti i termini precedenti; diremo anche che ogni termine nella successione è un *antenato* di tutti i termini successivi.

Per ogni elemento, in X o in Y, deve succedere una di tre cose. Se andiamo tracciando la genealogia di un elemento il più indietro possibile, allora o giungiamo ad un elemento di X che non ha genitore (questi orfani sono esattamente gli elementi di $X \setminus g(Y)$), o giungiamo ad un elemento di Y che non ha genitore $(Y \setminus f(X))$, o proseguiamo all'infinito. Sia X_X l'insieme di quegli elementi di X che hanno origine in X (cioè, X_X consiste degli elementi di $X \setminus g(Y)$ e di tutti i loro discendenti in X), sia X_Y l'insieme di tutti quegli elementi di X che hanno origine in Y (cioè, X_Y consiste di tutti i discendenti in X degli elementi di $Y \setminus f(X)$), e sia X_∞ l'insieme di tutti gli elementi di X che non hanno antenati orfani. X risulta essere l'unione disgiunta di questi tre insiemi. Partizioniamo Y allo stesso modo in Y_X, Y_Y e Y_∞.

Se $x \in X_X$, allora $f(x) \in Y_X$ e, di fatto, la restrizione di f a X_X è una bigezione tra X_X e Y_X. Se $x \in X_Y$, allora x appartiene al dominio della funzione inversa g^{-1} e $g^{-1}(x) \in Y_Y$; di fatto la restrizione di g^{-1} a X_Y è una bigezione tra X_Y e Y_Y. Se, infine, $x \in X_\infty$, allora $f(x) \in Y_\infty$, e la restrizione di f a X_∞ è una bigezione tra X_∞ e Y_∞. Combinando queste tre bigezioni, otteniamo una bigezione tra X e Y. $\square$

Teorema 14 (Cantor)**.** *Per ogni X insieme,* $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathscr{P}(X))$.

Dimostrazione. Esiste una iniezione naturale tra X e $\mathscr{P}(X)$, e cioè quella che ad ogni elemento x di X associa il singoletto $\{x\}$. L'esistenza di questa mappa prova che $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{P}(X))$; rimane da dimostrare che non esiste una bigezione tra X e $\mathscr{P}(X)$.

Assumiamo che f sia una bigezione da X a $\mathscr{P}(X)$, e consideriamo

$$A = \{ \, x \in X \mid x \notin f(x) \, \} .$$

Siccome $A \in \mathscr{P}(X)$ e siccome f mappa bigettivamente X in $\mathscr{P}(X)$, deve esistere un elemento a in X tale che $f(a) = A$. L'elemento a o appartiene all'insieme A oppure no. Se $a \in A$, allora, per definizione di A, dobbiamo avere che $a \notin f(a)$, e dal momento che $f(a) = A$, questo è impossibile. Se $a \notin A$, allora, ancora per definizione di A, dobbiamo avere $a \in f(a)$, e anche questo è impossiile. Dunque è assurdo supporre che esista una bigezione f da X a $\mathscr{P}(X)$, e la dimostrazione del Teorema di Cantor è completa. $\square$

Definizione. Un insieme X è detto *numerabile* se $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(\omega)$, e *numerabilmente infinito* se $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\omega)$.

In particolare, ogni insieme finito è numerabile, e per questi insiemi è conveniente interpretare "$\mathrm{Card}(X)$" come il numero degli elementi in X:

$$\mathrm{Card}(X) = n \text{ se e solo se } \mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\{ \, 1, \ldots, n \, \}).$$

Proposizione 15. *(a) Se X e Y sono numerabili, allora lo è anche $X \times Y$.*

(b) Se A è numerabile e X_α è numerabile per ogni $\alpha \in A$, allora $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ è numerabile.

Dimostrazione. (a) Osserviamo subito che se $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(\omega)$ e $\mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}(\omega)$, allora $\mathrm{Card}(X \times Y) \leq \mathrm{Card}(\omega \times \omega)$. Infatti se $f \colon X \to \omega$ e $g \colon Y \to \omega$ sono due iniezioni, allora la mappa $f \times g \colon X \times Y \to \omega \times \omega$ tale che $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ è un'iniezione. Quindi è sufficiente dimostrare che $\omega \times \omega$ è numerabile, per provare (a). Definiamo dunque la seguente bigezione da ω a $\omega \times \omega$ elencando quegli elementi $(j, k) \in \omega \times \omega$ tali che $j + k = n$, per n uguale a 2,3,4, ..., in questo modo:

$$(1{,}1),\ (2{,}1),\ (1{,}2),\ (3{,}1),\ (2{,}2),\ (1{,}3),\ (4{,}1),\ (3{,}2),\ (2{,}3),\ (1{,}4), \ldots .$$

(b) Per ogni α sia $f_\alpha \colon \omega \to X_\alpha$ una surgezione, e sia

$$\begin{aligned} f \colon \omega \times A &\to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \\ (n, \alpha) &\mapsto f_\alpha(n) \end{aligned}$$

f è surgettiva: se $x \in \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ allora esiste $\alpha_x \in A$ tale che $x \in X_{\alpha_x}$, e dunque esiste n_x tale che $f_{\alpha_x}(n_x) = x$, perciò si ha che $f(n_x, \alpha_x) = x$. Segue quindi per (a) che $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ è numerabile, se A è numerabile. $\square$

Corollario 16. *$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili.*

Dimostrazione. Poiché $\mathbb{Z} = \omega \cup \{ \, -n \mid n \in \omega \, \}$, è unione finita di insiemi numerabili e dunque è numerabile. Inoltre, la mappa $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(m, n) = m/n$ se $n \neq 0$ e $f(m{,}0) = 0$ è surgettiva. $\square$

Definizione. Un insieme X è detto avere la *cardinalità del continuo* se $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Useremo la lettera $\mathfrak{c}$ come abbreviazione per $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Card}(X) = \mathfrak{c} \text{ se e solo se } \mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}).$$

Proposizione 17. $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\omega)) = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Se $A \subset \omega$, definiamo $f(A) \in \mathbb{R}$ in questo modo:

$$f(A) = \begin{cases} \sum_{n\in A} 2^{-n} & \text{se } \omega \setminus A \text{ è infinito,} \\ 1 + \sum_{n\in A} 2^{-n} & \text{se } \omega \setminus A \text{ è finito.} \end{cases}$$

Allora f è iniettiva: infatti, se $\omega \setminus A$ è infinito, $f(A)$ è il numero la cui espansione decimale in base 2 è $0.a_1a_2\cdots$, dove $a_n = 1$ se $n \in A$ e $a_n = 0$ altrimenti. Definiamo poi $g\colon \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ come

$$g(A) = \begin{cases} \log\Bigl(\sum_{n\in A} 2^{-n}\Bigr) & \text{se } A \text{ è limitato inferiormente,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora g è surgettiva, perché lo è la funzione logaritmo e ogni numero reale si può scrivere in base 2. Dal momento che $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\omega)) = \mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{Z}))$, la tesi segue dal teorema di Schröder-Bernstein. □

Corollario 18. *Se* $\mathrm{Card}(X) \geq \mathfrak{c}$*, allora* X *non è numerabile.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Cantor, $\mathrm{Card}(\omega) < \mathfrak{c} \leq \mathrm{Card}(X)$, per cui X non è numerabile. □

Proposizione 19. *(a) Se* $\mathrm{Card}(X) \leq \mathfrak{c}$ *e* $\mathrm{Card}(Y) \leq \mathfrak{c}$*, allora* $\mathrm{Card}(X \times Y) \leq \mathfrak{c}$.

(b) Se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathfrak{c}$ *e* $\mathrm{Card}(X_\alpha) \leq \mathfrak{c}$ *per ogni* $\alpha \in A$*, allora* $\mathrm{Card}(\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha) \leq \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. (a) È sufficiente considerare $X = Y = \mathscr{P}(\omega)$. Definiamo $\varphi, \psi\colon \omega \to \omega$ ponendo $\varphi(n) = 2n$ e $\psi(n) = 2n - 1$, e sia $f\colon \mathscr{P}(\omega) \times \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ tale che $f(A, B) = \varphi(A) \cup \psi(B)$. f è iniettiva: se $A, B, C, D \subset \omega$ sono tali che $f(A, B) = f(C, D)$, allora $\varphi(A) \cup \psi(B)$ e $\varphi(C) \cup \psi(D)$ hanno gli stessi elementi; in particolare, gli insiemi dei rispettivi numeri pari e dispari devono coincidere, il che vuol dire che $\varphi(A) = \varphi(C)$ e $\psi(B) = \psi(D)$. Poiché φ, ψ sono iniettive, $A = C$ e $B = D$. f è anche surgettiva: infatti se $C \subset \omega$, siano $A, B \subset C$ i sottoinsiemi costituiti dai numeri pari e dai numeri dispari rispettivamente contenuti in C. Se ora consideriamo $A_C = \{\, n/2 \mid n \in A \,\}$ e $B_C = \{\, (n+1)/2 \mid n \in B \,\}$, abbiamo che $f(A_C, B_C) = C$, e dunque f è surgettiva. Segue che $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\omega) \times \mathscr{P}(\omega)) = \mathrm{Card}(\mathscr{P}(\omega))$, quindi la tesi.

(b) Si dimostra come conseguenza di (a) come fatto nella Proposizione 15.

□

Capitolo 2

Le σ-algebre di Borel e di Lebesgue

2.1 σ-algebre

Definizione. Sia X un insieme non vuoto. Un'*algebra* di insiemi su X è una collezione non vuota $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ tale che:

1. sia chiusa rispetto alle unioni finite: se $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{A}$, allora $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathscr{A}$;
2. sia chiusa rispetto al complementare: se $E \in \mathscr{A}$, allora $E^c \in \mathscr{A}$.

Una *σ-algebra* è un'algebra chiusa rispetto alle unioni *numerabili.*

Osserviamo che, siccome $\bigcap_j E_j = \left(\bigcup_j E_j^c\right)^c$, le algebre (rispettivamente, le σ-algebre) sono anche chiuse rispetto alle intersezioni finite (rispettivamente, numerabili). Segue che se $\mathscr{A}$ è un'algebra, allora $\varnothing \in \mathscr{A}$ e $X \in \mathscr{A}$, perchè dato un qualunque $E \in \mathscr{A}$, si ha che $\varnothing = E \cap E^c$ e $X = E \cup E^c$.

Proposizione 20. *Sia $\mathscr{A}$ un'algebra: se $\mathscr{A}$ è chiusa rispetto alle unioni numerabili disgiunte, allora $\mathscr{A}$ è una σ-algebra.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\{ E_j \}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$. Poniamo

$$F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right) = E_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right)^c.$$

Allora gli F_k appartengono ad $\mathscr{A}$ e sono disgiunti, inoltre $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. □

È immediato verificare che l'intersezione di una qualunque famiglia di σ-algebre su X è ancora una σ-algebra. Ne segue che se $\mathscr{E}$ è un sottoinsieme di $\mathscr{P}(X)$, esiste un'unica σ-algebra $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ contenente $\mathscr{E}$ che sia la più piccola possibile: cioè l'intersezione di tutte le σ-algebre che contengono $\mathscr{E}$ (ne esiste sempre almeno una, ad esempio $\mathscr{P}(X)$ - che è banalmente una σ-algebra). $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ è detta σ-algebra *generata* da $\mathscr{E}$.

Lemma 21. *Se $\mathscr{E} \subset \mathscr{M}(\mathscr{E})$, allora $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{F})$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathscr{M}(\mathscr{F})$ è una σ-algebra contenente $\mathscr{E}$, deve contenere anche $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ perché questa è la σ-algebra generata da $\mathscr{E}$. □

Se X è uno spazio topologico, la σ-algebra generata dalla famiglia degli aperti (o, equivalentemente, dai chiusi) è chiamata *σ-algebra di Borel* su X e si denota con $\mathscr{B}_X$; i suoi elementi si dicono *Boreliani.* $\mathscr{B}_X$ contiene quindi aperti, chiusi, intersezioni numerabili di aperti, unioni numerabili di chiusi, e così via. Fissiamo una notazione, indicando:

- una intersezione numerabile di aperti con G_δ;
- un'unione numerabile di chiusi con F_σ;
- un'unione numerabile di G_δ con $G_{\delta\sigma}$;
- una intersezione numerabile di F_σ con $F_{\sigma\delta}$; etc.

Noi ci occuperemo di studiare la σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$, che gode della seguente proprietà:

Proposizione 22. *La σ-algebra di Borel $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ è generata da ciascuna delle seguenti famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:*

(a) gli intervalli aperti: $\mathscr{E}_1 = \{\, (a,b) \mid a < b \,\}$;

(b) gli intervalli chiusi: $\mathscr{E}_2 = \{\, [a,b] \mid a < b \,\}$;

(c) gli intervalli semiaperti: $\mathscr{E}_3 = \{\, (a,b] \mid a < b \,\}$ oppure $\mathscr{E}_4 = \{\, [a,b) \mid a < b \,\}$;

(d) le semirette aperte: $\mathscr{E}_5 = \{\, (a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R} \,\}$ oppure $\mathscr{E}_6 = \{\, (-\infty,a) \mid a \in \mathbb{R} \,\}$;

(e) le semirette chiuse: $\mathscr{E}_7 = \{\, [a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R} \,\}$ oppure $\mathscr{E}_8 = \{\, (-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R} \,\}$.

Dimostrazione. Gli elementi delle famiglie $\mathscr{E}_j$ per $j \neq 3{,}4$ sono aperti oppure chiusi, e gli elementi di $\mathscr{E}_3$ e $\mathscr{E}_4$ sono dei G_δ (ad esempio $(a,b] = \bigcap_{n=1}^\infty (a,\, b+n^{-1})$). Sono quindi tutti Boreliani, perciò per il Lemma 21, $\mathscr{M}(\mathscr{E}_j) \subset \mathscr{B}_\mathbb{R}$ per ogni j. Proviamo l'altra inclusione, osservando che:

(a) ogni aperto in $\mathbb{R}$ è unione numerabile di intervalli aperti;

(b) per ogni $a,b \in \mathbb{R}$, $(a,b) = \bigcup_{n=1}^\infty [a+n^{-1},\, b-n^{-1}\,] \in \mathscr{M}(\mathscr{E}_2)$;

(c) per ogni $a,b \in \mathbb{R}$, $(a,b) = \bigcup_{n=1}^\infty (a,\, b-n^{-1}\,] \in \mathscr{M}(\mathscr{E}_3)$, analogamente $(a,b) \in \mathscr{M}(\mathscr{E}_4)$;

(d) per ogni $a,b \in \mathbb{R}$, $(a,b) = (a,+\infty) \cap \big(\bigcap_{n=1}^\infty (b-n^{-1},+\infty)\big)^c \in \mathscr{M}(\mathscr{E}_5)$, analogamente $(a,b) \in \mathscr{M}(\mathscr{E}_6)$;

(e) per ogni $a,b \in \mathbb{R}$, $(a,b) = \big(\bigcup_{n=1}^\infty [a+n^{-1},+\infty)\big) \cap \big([b,+\infty)\big)^c \in \mathscr{M}(\mathscr{E}_7)$, analogamente $(a,b) \in \mathscr{M}(\mathscr{E}_8)$.

Applicando dunque il Lemma 21, si ha $\mathscr{B}_\mathbb{R} \subset \mathscr{M}(\mathscr{E}_j)$ per ogni j. □

2.2 Misure

Definizione. Sia X un insieme e $\mathscr{M}$ una σ-algebra su X. Una *misura* su $\mathscr{M}$ (o su $(X,\mathscr{M})$, o semplicemente su X se $\mathscr{M}$ è intesa) è una funzione $\mu\colon \mathscr{M} \to [0,+\infty]$ tale che

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) se $\{\, E_j \,\}_{j=1}^\infty$ è una successione di insiemi disgiunti in $\mathscr{M}$, allora $\mu\big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\big) = \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$.

La proprietà (ii) è detta *numerabile additività.* Essa implica la *finita additività*:

(ii') se $E_1, \dots, E_n$ sono insiemi disgiunti in $\mathscr{M}$, allora $\mu\big(\bigcup_{j=1}^n E_j\big) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j)$,

perché basta prendere $E_j = \varnothing$ per ogni $j > n$. Una funzione μ che soddisfa (i) e (ii') ma non necessariamente (ii) è detta *misura finitamente additiva.*

Useremo la terminologia standard:

- Se X è un insieme e $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(X)$ è una σ-algebra, la coppia $(X, \mathscr{M})$ è detta *spazio misurabile* e gli insiemi in $\mathscr{M}$ sono detti *insiemi misurabili.*
- Se μ è una misura su $(X, \mathscr{M})$, allora la terna $(X, \mathscr{M}, \mu)$ è detta *spazio di misura.*
- Se $\mu(X) < \infty$ (e quindi $\mu(E) < \infty$ per ogni $E \in \mathscr{M}$), μ è detta *finita.*
- Se $X = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ dove $E_j \in \mathscr{M}$ e $\mu(E_j) < \infty$ per ogni j, μ è detta *σ-finita.*
- Più in generale, se $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ dove $E_j \in \mathscr{M}$ e $\mu(E_j) < \infty$ per ogni j, l'insieme E è detto *σ-finito* (per μ).
- Se per ogni $E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(E) = \infty$ esiste $F \in \mathscr{M}$ dove $F \subset E$ e $0 < \mu(F) < \infty$, μ è detta *semifinita.*

Definizione. Se $(X, \mathscr{M})$ e $(X, \mathscr{N})$ sono spazi misurabili, una funzione $f\colon X \to Y$ è detta *$(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-misurabile* (o semplicemente *misurabile* se $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ sono sottointesi) se $f^{-1}(E) \in \mathscr{M}$ per ogni $E \in \mathscr{N}$.

Teorema 23. *Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Valgono le seguenti proprietà:*

(a) (monotonia) se $E, F \in \mathscr{M}$ e $E \subset F$, allora $\mu(E) \leq \mu(F)$;

(b) (subadditività) se $\{ E_j \}_{j=1}^\infty \subset \mathscr{M}$, allora $\mu\big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\big) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$;

(c) (continuità da sotto) se $\{ E_j \}_{j=1}^\infty \subset \mathscr{M}$ e $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, allora $\mu\big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\big) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$;

(d) (continuità da sopra) se $\{ E_j \}_{j=1}^\infty \subset \mathscr{M}$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, e $\mu(E_n) < \infty$ per qualche n, allora $\mu\big(\bigcap_{j=1}^\infty E_j\big) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.

Dimostrazione. (a) Se $E \subset F$, allora $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

(b) Sia $F_1 = E_1$ e $F_k = E_k \setminus \big(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\big)$ per $k > 1$. Allora gli F_k sono disgiunti e $\bigcup_{j=1}^n F_j = \bigcup_{j=1}^n E_j$ per ogni n. Perciò, da (a),

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty F_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(F_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$$

.

(c) Posto $E_0 = \varnothing$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j \backslash E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \mu(E_j \backslash E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n (E_j \backslash E_{j-1})\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(d) Sia $F_j = E_n \setminus E_j$ per j>n: allora $F_{n+1} \subset F_{n+2} \subset \dots$, $\mu(E_n) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$ per j>n, e $\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j = E_n \setminus \big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\big)$. Dalla (c), dunque,

$$\mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j\to\infty} \big(\mu(E_n) - \mu(E_j)\big).$$

Siccome $\mu(E_n) < \infty$, possiamo sottrarla ad ambo i membri per ottenere

$$0 = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) - \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$$

da cui la tesi. $\square$

Nota. La condizione $\mu(E_n)$ in (d) è necessaria. Consideriamo infatti $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}), \mu)$ spazio di misura, dove $\mu(E) = \infty$ per ogni $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, e sia $\{ E_j \}_{j=1}^{\infty}$ con $E_j = (j, +\infty)$. Allora $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, ma $\mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\big) = \mu(\varnothing) = 0$ mentre $\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = +\infty$.

Definizione. Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Un insieme $E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(E) = 0$ è detto *insieme nullo*. Se una proprietà $\mathscr{P}$ riguardo gli elementi di X è vera eccetto che su un qualche insieme nullo, diremo che $\mathscr{P}$ è vera *quasi ovunque* o *per quasi ogni* x.

Nota. Per la subadditività delle misure, ogni unione numerabile di insiemi nulli è nulla.

Se $\mu(E) = 0$ e $F \subset E$, allora $\mu(F) = 0$ per monotonia – a patto che $F \in \mathscr{M}$, cosa che in generale non è vero: basta considerare la misura nulla sulla σ-algebra $\{ \varnothing, X \}$.

Definizione. Una misura il cui dominio contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi nulli è detta *completa*.

La completezza è una proprietà che può essere sempre acquisita allargando il dominio della misura, infatti vale il seguente:

Teorema 24. *Supponiamo $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\mathscr{N} = \{ N \in \mathscr{M} \mid \mu(N) = 0 \}$ e $\overline{\mathscr{M}} = \{ E \cup F \mid E \in \mathscr{M}$ e $F \subset N$ per qualche $N \in \mathscr{N} \}$. Allora $\overline{\mathscr{M}}$ è una σ-algebra, ed esiste un'unica estensione $\overline{\mu}$ di μ a misura completa su $\overline{\mathscr{M}}$.*

Dimostrazione. Siccome $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ sono chiusi rispetto alle unioni numerabili, lo è anche $\overline{\mathscr{M}}$. Se $E \cup F \in \overline{\mathscr{M}}$ dove $F \subset N \in \mathscr{N}$, possiamo assumere che $E \cap N = \varnothing$ (altrimenti, possiamo sostituire F, N con $F \setminus E$, $N \setminus E$). Allora $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$, infatti:

$$(E\cup N)\cap(N^c\cup F) = \big[(E\cup N)\cap N^c\big]\cup\big[(E\cup N)\cap F\big] = \big[(E\cap N^c)\cup(N\cap N^c)\big]\cup\big[(E\cap F)\cup(N\cap F)\big] = E\cup F,$$

dato che $E \subset N^c$ e $F \subset N$. Segue, per le leggi di De Morgan, che

$$(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F).$$

Ma $(E \cup N)^c \in \mathscr{M}$ e $(N \setminus F) \subset N$, cosicché $(E \cup F)^c \in \overline{\mathscr{M}}$: dunque $\overline{\mathscr{M}}$ è una σ-algebra.

Se $E\cup F \in \overline{\mathscr{M}}$ ($F \subset N \in \mathscr{N}$), poniamo $\overline{\mu}(E\cup F) = \mu(E)$. $\overline{\mu}$ è ben definita: se $E_1\cup F_1 = E_2\cup F_2$ ($F_j \subset N_j \in \mathscr{N}$), allora $E_1 \subset E_2 \cup N_2$ e perciò $\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$, analogamente $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$.

Sia ora $E \cup F \in \overline{\mathscr{M}}$ ($F \subset N \in \mathscr{N}$) tale che $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E) = 0$, e sia $A \subset (E \cup F)$: proviamo che $A \in \overline{\mathscr{M}}$, cioè che esistono E_1, F_1 con $E_1 \in \mathscr{M}$ e $F_1 \subset N_1 \in \mathscr{N}$, tali che $A = E_1 \cup F_1$.

È sufficiente considerare $E_1 = \varnothing$ e $F_1 = A$: infatti $A \subset (E \cup F) \subset (E \cup N) \in \mathscr{N}$, dato che $\mu(E) = \mu(N) = 0$. Segue che $\overline{\mu}$ è una misura completa.

Infine, proviamo che è l'unica misura completa su $\overline{\mathscr{M}}$ che estende μ: sia η un'altra estensione completa di μ su $\overline{\mathscr{M}}$, allora si ha che per ogni $E \cup F \in \overline{\mathscr{M}}$ ($F \subset N \in \mathscr{N}$),

$$\overline{\mu}(E\cup F) = \mu(E) = \eta(E) \leq \eta(E\cup F) \leq \eta(E)+\eta(F) \leq \mu(E)+\eta(N) = \mu(E)+\mu(N) = \overline{\mu}(E\cup F).$$

Segue quindi che $\overline{\mu} = \eta$, da cui la tesi. $\square$

La misura $\overline{\mu}$ del teorema 24 è chiamata *completamento* di μ, e $\overline{\mathscr{M}}$ è detto il completamento di $\mathscr{M}$ rispetto a μ.

2.3 Misure esterne

Definizione. Sia X un insieme non vuoto. Una funzione $\mu^*\colon \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ è detta *misura esterna* se valgono le seguenti condizioni:

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

(ii) se $A \subset B$, allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) se $\{ A_j \}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(X)$, allora $\mu^*\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Proposizione 25. *Sia X un insieme non vuoto, $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ e $\rho\colon \mathscr{E} \to [0, +\infty]$ tale che $\varnothing \in \mathscr{E}$, $X \in \mathscr{E}$ e $\rho(\varnothing) = 0$. Per ogni $A \subset X$, sia*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \;\middle|\; E_j \in \mathscr{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Allora μ^* è una misura esterna.

Dimostrazione. Dal momento che $X \in \mathscr{E}$, per ogni $A \subset X$ esiste $\{ E_j \}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}$ tale che $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ (basta prendere $E_j = X$ per ogni j), perciò la definizione di μ^* ha senso. Abbiamo che $\mu^*(\varnothing) = 0$ (si consideri $E_j = \varnothing$ per ogni j) e che $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ per $A \subset B$, perché l'insieme su cui si calcola l'estremo inferiore nella definizione di $\mu^*(A)$ contiene l'insieme corrispondente nella definizione di $\mu^*(B)$. Se $\{ A_j \} \subset \mathscr{P}(X)$ e $\varepsilon > 0$, per ogni j esiste una famiglia $\{ E_j^k \}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}$ tale che $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \varepsilon 2^{-j}$ (per caratterizzazione di estremo inferiore). Ma allora, posto $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, abbiamo che $A \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ e

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

Passando al limite per ε tendente a 0, si ha la tesi. $\square$

Il nome di "misura esterna" deriva da come si costruisce un tale oggetto nella Proposizione 25: si parte da una "proto-misura" su una famiglia $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ e poi si approssima ogni sottoinsieme arbitrario di X "dall'esterno" tramite unioni numerabili di elementi di $\mathscr{E}$.

Definizione. Se μ^* è una misura esterna su X, un insieme $A \subset X$ è detto μ^*-*misurabile* se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \text{per ogni } E \subset X.$$

Proposizione 26. *Sia μ^* una misura esterna su X. Allora un insieme $A \subset X$ è μ^*-misurabile se e solo se*

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \textit{per ogni } E \subset X \textit{ tale che } \mu^*(E) < \infty.$$

Dimostrazione. Poiché $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ per ogni A ed E, la disuguaglianza $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ vale sempre. Ne segue che A è μ^*-misurabile se e solo se vale la disuguaglianza opposta, che è sempre verificata se $\mu^*(E) = \infty$. □

Teorema 27 (Carathéodory)**.** *Se μ^* è una misura esterna su X, la collezione $\mathscr{M}$ degli insiemi μ^*-misurabili è una σ-algebra, e la restrizione di μ^* su $\mathscr{M}$ è una misura completa.*

Dimostrazione. Siccome la definizione di μ^*-misurabilità di A è simmetrica in A e A^c, abbiamo che $\mathscr{M}$ è chiusa rispetto al complementare. Inoltre, se $A, B \in \mathscr{M}$ e $E \subset X$, per la subadditività abbiamo

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq \mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*\big(E \cap (A \cup B)^c\big).\end{aligned}$$

Ne segue che $A \cup B \in \mathscr{M}$, quindi $\mathscr{M}$ è un'algebra. Non solo: se $A, B \in \mathscr{M}$ e $A \cap B = \varnothing$, allora

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*\big((A \cup B) \cap A\big) + \mu^*\big((A \cup B) \cap A^c\big) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

perciò μ^* è finitamente additiva su $\mathscr{M}$. Per dimostrare che $\mathscr{M}$ è una σ-algebra sarà sufficiente mostrare che $\mathscr{M}$ è chiusa rispetto alle unioni numerabili disgiunte (vedi la Proposizione 20). Se $\{ A_j \}_{j=1}^\infty$ è una successione di insiemi disgiunti in $\mathscr{M}$, sia $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ e $B = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Allora per ogni $E \subset X$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ abbiamo che $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$, infatti:

- $\mu^*(E \cap B_1) = \mu^*(E \cap A_1)$ per definizione di B_1,
- se è vero che $\mu^*(E \cap B_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \mu^*(E \cap A_j)$, allora

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j).\end{aligned}$$

Perciò,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c),$$

e passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \sum_{j=1}^\infty \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty (E \cap A_j)\right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E).\end{aligned}$$

Tutte le disuguaglianze in questi ultimi conti sono dunque uguaglianze. Ne segue che $B \in \mathscr{M}$ – per cui $\mathscr{M}$ è una σ-algebra – e, prendendo $E = B$, si ha che $\mu^*(B) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j)$, perciò μ^*

è numerabilmente additiva su $\mathscr{M}$ – e quindi la restrizione di μ^* su $\mathscr{M}$ è una misura. Infine, se $\mu^*(A)=0$, allora per ogni $E \subset X$ abbiamo

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$$

cosicché $A \in \mathscr{M}$. Ne segue che tutti i sottoinsiemi di X la cui misura è nulla sono μ^*-misurabili: dato che qualunque sottoinsieme di un insieme nullo è nullo, si ha che $\mu^*|\mathscr{M}$ è una misura completa. □

Applicheremo ora il teorema di Carathéodory al problema di estendere misure da algebre a σ-algebre.

Definizione. Sia X un insieme e $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ un'algebra su X. Una funzione $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ si dice *premisura* se valgono le seguenti condizioni:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) se $\{ A_j \}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ è una successione di insiemi disgiunti tale che $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{A}$, allora $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Le nozioni di *premisura finita* e *σ-finita* sono definite come per le misure.

Nota. In particolare, una premisura è finitamente additiva, perché si può prendere $A_j = \varnothing$ per j opportunamente grande.

Per la Proposizione 25, se μ è una premisura su $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, questa induce una misura esterna su X μ^*, dove

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;\middle|\; A_j \in \mathscr{A},\, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}. \tag{2.1}$$

Proposizione 28. *Se μ è una premisura su $\mathscr{A}$ e μ^* è definita come in (2.1), allora*

(a) $\mu^*|\mathscr{A} = \mu$;

(b) ogni insieme in $\mathscr{A}$ è μ^*-misurabile.

Dimostrazione. (a) Se $E \in \mathscr{A}$ e $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ con $A_j \in \mathscr{A}$, sia $B_n = E \cap \big(A_n \setminus (\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)\big)$. Allora i B_n sono elementi disgiunti di A la cui unione è E, perciò $\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. Ne segue che $\mu(E) \leq \mu^*(E)$, e la disuguaglianza inversa è dovuta al fatto che $\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ con $A_1 = E$ e $A_j = \varnothing$ per $j > 1$.

(b) Se $A \in \mathscr{A}$, $E \subset X$, e $\varepsilon > 0$, esiste una successione $\{ B_j \}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ con $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Siccome μ è additiva su $\mathscr{A}$,

$$\begin{aligned}\mu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).\end{aligned}$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene che A è μ^*-misurabile. □

Teorema 29. *Sia $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ un'algebra, μ una premisura su $\mathscr{A}$, e $\mathscr{M}$ la σ-algebra generata da $\mathscr{A}$. Allora esiste una misura $\overline{\mu}$ su $\mathscr{M}$ la cui restrizione ad $\mathscr{A}$ è μ – precisamente, $\overline{\mu} = \mu^*|\mathscr{M}$ dove μ^* è data da (2.1). Se ν è un'altra misura su $\mathscr{M}$ la cui restrizione su $\mathscr{A}$ è μ, allora $\nu(E) \leq \overline{\mu}(E)$ per ogni $E \in \mathscr{M}$, in particolare $\nu(E) = \overline{\mu}(E)$ se $\overline{\mu}(E) < \infty$. Se μ è σ-finita, allora $\overline{\mu}$ è l'unica estensione di μ a misura su $\mathscr{M}$.*

Dimostrazione. La prima asserzione segue dal Teorema di Carathéodory e dalla Proposizione 28, dato che la σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili include $\mathscr{A}$ e di conseguenza $\mathscr{M}$. Se $E \in \mathscr{M}$ e $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ dove $A_j \in \mathscr{A}$ (fatto sempre possibile perché $X \in \mathscr{A}$), allora $\nu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$, da cui $\nu(E) \leq \overline{\mu}(E)$ (per definizione di $\overline{\mu} = \mu^*|\mathscr{M}$ nella (2.1)). Inoltre, osserviamo che se $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, allora per il Teorema 23

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \overline{\mu}(A).$$

Ora, se $\overline{\mu}(E) < \infty$, abbiamo che esiste una successione $\{\, A_j \,\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ con $E \subset A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e $\overline{\mu}(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \overline{\mu}(E) + \varepsilon$, per cui $\overline{\mu}(A \setminus E) < \varepsilon$, e

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(E) &\leq \overline{\mu}(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \\ &\leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ha $\overline{\mu}(E) \leq \nu(E)$, e quindi vale l'uguaglianza. Infine, se $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ con $\mu(A_j) < \infty$, possiamo assumere che gli A_j siano disgiunti: allora per ogni $E \in \mathscr{M}$,

$$\overline{\mu}(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(E \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap A_j)\nu(E),$$

perciò $\overline{\mu} = \nu$. □

2.4 La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$

Definizione. Sia X un insieme e sia $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$. $\mathscr{E}$ si dice *famiglia elementare* di sottoinsiemi di X se valgono le seguenti condizioni:

(i) $\varnothing \in \mathscr{E}$;

(ii) se $E, F \in \mathscr{E}$, allora $E \cap F \in \mathscr{E}$;

(iii) se $E \in \mathscr{E}$, allora E^c è unione disgiunta finita di elementi di $\mathscr{E}$.

Proposizione 30. *Se $\mathscr{E}$ è una famiglia elementare, la collezione $\mathscr{A}$ delle unioni disgiunte finite di elementi di $\mathscr{E}$ è un'algebra.*

Dimostrazione. Per semplicità supporremo che se $E \in \mathscr{E}$ allora E^c è unione disgiunta di due elementi di $\mathscr{E}$ (il che include il caso in cui $E^c \in \mathscr{E}$, visto che $E^c = E^c \cup \varnothing$); la dimostrazione nel caso generale è essenzialmente la stessa. Se $A, B \in \mathscr{E}$ e $B^c = C_1 \cup C_2$ (con $C_1, C_2 \in \mathscr{E}$, disgiunti), allora $A \setminus B = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2)$ e $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, dove tali unioni sono disgiunte, perciò $A \cup B \in \mathscr{A}$. Ne segue per induzione che se $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{E}$ allora $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathscr{A}$: infatti, per ipotesi induttiva possiamo assumere che $A_1, \ldots, A_{n-1}$ siano disgiunti, e quindi $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} (A_j \setminus A_n)\right) \cup A_n$, che è un'unione disgiunta: $\mathscr{A}$ è perciò chiusa rispetto alle unioni finite. Per mostrare che $\mathscr{A}$ è chiusa rispetto al complementare, supponiamo che $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{E}$ e che $A_j^c = B_j^1 \cup B_j^2$ (con $B_j^1, B_j^2 \in \mathscr{E}$, disgiunti). Allora

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} \Big(B_j^1 \cup B_j^2\Big) = \bigcup_{=1} \left\{ B_1^{k_1} \cap \cdots \cap B_n^{k_n} \;\middle|\; k_1, \ldots, k_n = 1, 2 \right\} \in \mathscr{A}. \qquad \square$$

Parliamo di *h-intervalli* riferendoci ad intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra in $\mathbb{R}$, cioè insiemi della forma $(a, b]$, oppure $(a, +\infty)$ oppure $\varnothing$ (h per "half-open"). Siccome l'intersezione di due h-intervalli è un h-intervallo, e il complementare di un h-intervallo è un h-intervallo o unione disgiunta di due h-intervalli, per la Proposizione 30 la collezione $\mathscr{A}$ delle unione disgiunte finite di h-intervalli è un'algebra, e per la Proposizione 22 la σ-algebra generata da $\mathscr{A}$ è la σ-algebra di Borel $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Se $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione crescente, allora F ha limiti destro e sinistro in ogni punto:

$$\begin{aligned} F(a^+) &= \lim_{x \to a^+} F(x) = \inf_{x > a} F(x), \\ F(a^-) &= \lim_{x \to a^-} F(x) = \sup_{x < a} F(x). \end{aligned}$$

Inoltre, i valori limite $F(+\infty) = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x)$ e $F(-\infty) = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x)$ esistono (possibilmente uguali a $\pm\infty$). Diciamo che F è *continua a destra* se $F(a) = F(a^+)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Proposizione 31. *Sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a destra. Se $(a_j, b_j]$ ($j = 1, \ldots, n$) sono h-intervalli disgiunti, sia*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]\right) = \sum_{j=1}^{n} \Big(F(b_j) - F(a_j)\Big),$$

e sia $\mu(\varnothing) = 0$. Allora μ è una premisura sull'algebra $\mathscr{A}$.

Dimostrazione. Per prima cosa dobbiamo controllare che μ sia ben definita, dato che gli elementi di $\mathscr{A}$ possono essere rappresentati in più di una maniera come unioni disgiunte di h-intervalli. Se $\{ (a_j, b_j] \}_{j=1}^n$ sono disgiunti e $\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j] = (a, b]$, allora a meno di un riordinamento degli indici j abbiamo $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \cdots < b_n = b$, perciò

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(F(b_j) - F(a_j)\Big) = F(b) - F(a).$$

Più in generale, se $\{ I_i \}_{i=1}^n$ e $\{ J_j \}_{j=1}^m$ sono famiglie finite di h-intervalli disgiunti tali che $\bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{j=1}^n J_j$, questo ragionamento mostra che

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(J_j).$$

Perciò μ è ben definita, ed è finitamente additiva per definizione.

Rimane da dimostrare che se $\{ I_j \}_{j=1}^\infty$ è una successione di h-intervalli disgiunti con $\bigcup_{j=1}^\infty I_j \in \mathscr{A}$ allora $\mu(\bigcup_{j=1}^\infty I_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu(I_j)$. Per la finita additività possiamo assumere che $\bigcup_{j=1}^\infty I_j$ è un h-intervallo $I = (a, b]$, e abbiamo

$$\mu(I) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) + \mu\left(I \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(I_j).$$

Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo $\mu(I) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j)$. Per dimostrare la disuguaglianza inversa, supponiamo dapprima che $-\infty < a < b < +\infty$, e fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome F è continua a destra, esiste $\delta > 0$ tale che $F(a+\delta) - F(a) < \varepsilon$, e se $I_j = (a_j, b_j]$, per ogni j esiste $\delta_j > 0$ tale che $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \varepsilon 2^{-j}$. Gli intervalli aperti $(a_j, b_j + \delta_j)$ ricoprono il compatto $[a+\delta, b]$, perciò esiste un sottoricoprimento *finito*. Scartando tutti gli intervalli $(a_j, b_j + \delta)$ che sono contenuti dentro ad altri più grandi e riordinando gli indici j, possiamo assumere che

(i) gli intervalli $(a_1, b_1 + \delta_1), \dots, (a_N, b_N + \delta_N)$ ricoprono $[a + \delta, b]$,

(ii) $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$,

(iii) $b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1})$ per $j = 1, \dots, N-1$.

Ma allora

$$\begin{aligned}
\mu(I) &\leq F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \\
&= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1} \Big(F(a_{j+1} - F(a_j) \Big) + \varepsilon \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1} \Big(F(b_j + \delta_j) - F(a_j) \Big) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo concluso il caso $-\infty < a < b < +\infty$. Se $a = -\infty$, lo stesso ragionamento porta a $F(b) - F(-M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) + 2\varepsilon$ per ogni $M < +\infty$, mentre se $b = +\infty$ otteniamo similmente $F(M) - F(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) + 2\varepsilon$. La tesi segue dunque passando al limite per $\varepsilon \to 0$ e per $M \to \infty$. □

Teorema 32. *Se $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione crescente e continua a destra, allora esiste un'unica misura μ_F su $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ tale che $\mu_F\big((a,b]\big) = F(b) - F(a)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Se $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un'altra funzione crescente e continua a destra, si ha $\mu_F = \mu_G$ se e solo se $F - G$ è costante. Viceversa, se μ è una misura su $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ che è finita su tutti i Boreliani limitati, e se $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che*

$$F(x) = \begin{cases} \mu\big((0,x]\big) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\mu\big((x,0]\big) & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

allora F è una funzione crescente e continua a destra, e $\mu = \mu_F$.

Dimostrazione. Ogni funzione F come nelle ipotesi induce una premisura su $\mathscr{A}$ per la Proposizione 31. Supponiamo che $F(x) - G(x) = c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: allora per ogni $(a_j, b_j]$ $(j = 1, \dots, n)$ h-intervalli disgiunti si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(F(b_j) - F(a_j) \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{F(b_j) - G(b_j)}_{=c} + G(b_j) + \underbrace{G(a_j) - F(a_j)}_{=-c} - G(a_j) \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(G(b_j) - G(a_j) \Big);$$

se invece $\mu_F = \mu_G$, allora per ogni $(a, b] \subset \mathbb{R}$ si ha

$$0 = F(b) - G(b) + G(a) - F(a)$$

e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $F(x) - G(x) = F(0) - G(0)$, cioè $F - G$ è costante. Inoltre tali premisure sono σ-finite, perché $\mathbb{R} = \bigcup_{-\infty}^{+\infty}(j, j+1]$. Le prime due asserzioni perciò seguono dal Teorema 29. Per quanto riguarda l'ultima (il viceversa), la monotonia di μ implica quella di F, e la continuità di μ da sotto e da sopra implica la continuità a destra di F per $x \geq 0$ e per $x < 0$. Infine, se $(a_j, b_j]$ $(j = 1, \dots, n)$ sono h-intervalli disgiunti e $0 < a_j < b_j$, allora

$$\begin{aligned}
\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]\right) &= \sum_{j=1}^n \Big(F(b_j) - F(a_j)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^n \Big(\mu\big((0, b_j]\big) - \mu\big((0, a_j]\big)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^n \Big(\mu\big((a_j, b_j]\big)\Big) \\
&= \mu\left(\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]\right),
\end{aligned}$$

analogamente con gli altri casi. Segue che $\mu = \mu_F$ su $\mathscr{A}$, e perciò $\mu = \mu_F$ su $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ per l'unicità garantita dal Teorema 29. $\square$

Dal Teorema 32 segue che per ogni $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e continua a destra esiste una misura completa $\overline{\mu}_F$ il cui dominio è quasi sempre più esteso di $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$: basta considerare il completamento di μ_F. Tale misura completa è chiamata *misura di Lebesgue-Stieltjes* associata a F.

Noi considereremo la più importante misura su $\mathbb{R}$, e cioè la *misura di Lebesgue*: si tratta della misura di Lebesgue-Stieltjes associata alla funzione $F(x) = x$ (per cui la misura di un intervallo è semplicemente la sua lunghezza). La denoteremo con m; il suo dominio $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ è detto *σ-algebra di Lebesgue* e i suoi elementi *insiemi Lebesgue-misurabili*. Siccome m è il completamento di μ_F, dove $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, per il Teorema 24 si ha che

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}} = \{\, E \cup G \mid E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}},\ G \subset \mathbb{R} \text{ e } m(G) = 0 \,\}.$$

Teorema 33. *Se $E \subset \mathbb{R}$ e $s, r \in \mathbb{R}$, sia $E + s = \{\, x + s \mid x \in E \,\}$ e $rE = \{\, rx \mid x \in E \,\}$. Se $E \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}$, allora per ogni s e r*

1. *$E + s \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ e $rE \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}$;*

2. *$m(E + s) = m(E)$ e $m(rE) = |r|m(E)$.*

Dimostrazione. Siccome la collezione degli h-intervalli è invariante rispetto alle traslazioni e dilatazioni, lo stesso è vero per $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Per $E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ siano $m_s(E) = m(E + s)$ e $m^r(E) = m(rE)$. Allora m_s e m^r coincidono con m e $|r|m$ sulle unioni finite di h-intervalli, e perciò su $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ per il Teorema 29 (visto che la collezione $\mathscr{A}$ delle unioni finite e disgiunte di h-intervalli forma un'algebra per la Proposizione 30 e $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ è la σ-algebra generata da $\mathscr{A}$). In particolare, se $E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ è tale che $m(E) = 0$, allora $m(E + s) = m(rE) = 0$. Segue che $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ è preservata dalle traslazioni e dilatazioni (dal momento che ogni elemento di $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ si scrive come unione di un Boreliano e di un insieme nullo) e che $m(E + s) = m(E)$ e $m(rE) = |r|m(E)$ per ogni $E \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}$. $\square$

2.5 L'insieme di Cantor

Ogni singoletto in $\mathbb{R}$ ha misura di Lebesgue zero, e perciò ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ è nullo (in particolare, $m(\mathbb{Q}) = 0$). Tuttavia, esistono anche insiemi nulli aventi la cardinalità del continuo: l'esempio classico è l'*insieme di Cantor*.

Ogni $x \in [0,1]$ ha un'espansione decimale in base 3 del tipo $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ dove $a_j = 0$, 1 o 2. Tale espansione è unica a meno che x non sia della forma $p3^{-k}$ per qualche intero p, k, nel qual caso x ha due espansioni: una con $a_j = 0$ per $j > k$ e una con $a_j = 2$ per $j > k$. Ad esempio,

$$\sum_{j=2}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} - 2 - \frac{2}{3} = 3 - 2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 1 \cdot 3^{-1}.$$

Usando sempre la seconda espansione, abbiamo che $a_1 = 1$ se e solo se $1/3 < x < 2/3$, $a_1 \neq 1$ e $a_2 = 1$ se e solo se $1/9 < x < 2/9$ oppure $7/9 < x < 8/9$, e così via. Definiamo quindi l'insieme di Cantor

$$C = \left\{ x \in [0,1] \;\middle|\; x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \text{ con } a_j \in \{\, 0,\, 2 \,\} \text{ per ogni j} \right\}.$$

Teorema 34. *Sia C l'insieme di Cantor.*

(a) $m(C) = 0$;

(b) $\operatorname{Card}(C) = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. (a) C è ottenuto da [0,1] togliendo un intervallo di lunghezza $1/3$, due intervalli di lunghezza $1/9$, e così via. Perciò

$$m(C) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 0.$$

(b) Se $x \in C$, allora $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ dove $a_j = 0$ oppure 2 per ogni j. Sia $b_j = a_j/2$ e $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 2^{-j}$. Quest'ultima serie è l'espansione in base 2 di un numero in [0,1], e siccome ogni elemento di [0,1] può essere ottenuto in questo modo, f è surgettiva: allora $\operatorname{Card}(C) \geq \operatorname{Card}\big([0,1]\big) = \mathfrak{c}$. Dato che $C \subset [0,1]$, si ha la tesi. □

2.6 L'insieme di Vitali

È interessante chiedersi se $\mathscr{L}_{\mathbb{R}} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$. La risposta è no: esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che non è Lebesgue-misurabile. Lo "scoprì" Giuseppe Vitali, un matematico italiano, nel 1905.

Vitali definì una relazione d'equivalenza su [0,1] ponendo $x \sim y$ se e solo se $x - y$ è razionale. Sia $[0,1] = \bigcup_\alpha E_\alpha$ la partizione di [0,1] in classi di $\sim$-equivalenza: abbiamo che $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$ se $\alpha \neq \beta$. In ciascuna delle classi d'equivalenza E_α scegliamo un rappresentante v_α, sfruttando l'Assioma della Scelta, e definiamo l'*insieme di Vitali* V l'insieme di tutti i v_α.

Teorema 35. $V \notin \mathscr{L}_{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. Sia $\{\, r_k \mid k \in \omega \,\}$ una lista di tutti i razionali in $[-1,1]$. Allora abbiamo che

(1) $(V + r_i) \cap (V + r_k) = \varnothing$ se $i \neq k$;

(2) $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(V + r_k) \subset [-1,2]$.

Per provare la (1) si ragiona per assurdo: se esistesse $x \in (V + r_i) \cap (V + r_k)$ con $i \neq k$, allora $x = y + r_i = z + r_k$ per qualche $y, z \in V$. Quindi $y - z = r_k - r_i \in \mathbb{Q}$, il che equivale a dire che $y \sim z$ e quindi $y, z \in E_\alpha$ per un certo α. Dato che V è costruito scegliendo *un solo* elemento di ogni classe di equivalenza, si ha che $y = z$, e perciò $r_i = r_k$, da cui l'assurdo. Per quanto riguarda (2), invece, consideriamo $x \in [0,1]$: abbiamo che $x \in E_\alpha$ per un certo α. Allora $r = x - v_\alpha \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, e quindi $x = v_\alpha + r \in V + r$, da cui la prima inclusione; la seconda è immediata dato che $V \subset [0,1]$ e $r_k \in [-1,1]$.

Supponiamo ora che V sia Lebesgue-misurabile e sia $m(V)$ la sua misura. Allora

$$[1,3] \ni m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(V + r_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(V + r_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(V).$$

(La prima uguaglianza vale perché, per (1), si sta calcolando la misura di un'unione disgiunta; la seconda per la proprietà di invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue). Si hanno dunque due possibilità:

(a) $m(V) = 0$: allora $\sum_{k=1}^{\infty} m(V) = 0$, e cio è assurdo;

(b) $m(V) > 0$: allora $\sum_{k=1}^{\infty} m(V) = +\infty$, il che è altrettanto assurdo.

Ne segue che V non può essere Lebesgue-misurabile. □

Nota. Solovay, nel suo *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, ha provato un teorema che afferma in sostanza che è impossibile costruire insiemi non Lebesgue-misurabili senza usare l'Assioma di Scelta per collezioni più che numerabili di insiemi, come ha fatto Vitali.

2.7 Un insieme Lebesgue-misurabile ma non Boreliano

Esiste un insieme Lebesgue-misurabile ma non Borel-misurabile? La risposta è si: in questo paragrafo ci preoccuperemo di costruirlo esplicitamente.

Ricordiamo innanzitutto che ogni $x \in (0,1]$ ammette un'unica espressione binaria $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$, dove $a_n = 0$ oppure 1 per ogni n e $a_n = 1$ per infiniti n.

Sia ora $\Psi\colon [0,1] \to C$, dove C è l'insieme di Cantor, tale che

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n)3^{-n} & \text{se } x \in (0,1], \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Lemma 36. *Ψ è strettamente crescente su* $[0,1]$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in (0,1]$, con $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ e $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$. Se $x < y$, allora esiste $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $\forall n \in \{1, \dots, k-1\}$ $a_n = b_n$ e $a_k = 0$, $b_k = 1$. Consideriamo infatti l'insieme

$$A = \{n \in \omega \setminus \{0\} \mid a_n \neq b_n\}.$$

Si ha che $A \neq \varnothing$ (altrimenti avremmo che $x = y$), perciò ammette minimo: sia $k = \min A$.

Se $a_k = 1$ e $b_k = 0$, allora

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)2^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty}(b_n - a_n)2^{-n} = -\frac{1}{2^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty}(b_n - a_n),$$

ma
$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}(b_n-a_n)\right| \le \frac{1}{2^k},$$
infatti
$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}(b_n-a_n)\right| \le \sum_{n=k+1}^{\infty}|b_n-a_n|2^{-n} \le \sum_{n=k+1}^{\infty}2^{-n}=2-\sum_{n=0}^{k}2^{-n}=2+\frac{2^{-k-1}-1}{\frac{1}{2}}=2+2^{-k}-2=2^{-k}$$
il che è assurdo.

Allora si ha:
$$\Psi(y)-\Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2\,(b_n-a_n)3^{-n}=2\cdot 3^{-k}+\sum_{n=k+1}^{\infty}2\,(b_n-a_n)3^{-n}>0$$
in quanto
$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}2\,(b_n-a_n)3^{-n}\right| \le 2\sum_{n=k+1}^{\infty}3^{-n}=2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\sum_{n=0}^{k}3^{-n}\right)=2\left(\frac{3}{2}+\frac{3^{-k-1}-1}{\frac{2}{3}}\right)=3^{-k}<2\cdot 3^{-k}.$$
□

Teorema 37. *Sia V l'insieme di Vitali. Allora $\Psi(V)\in\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ e $\Psi(V)\notin\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.*

Dimostrazione. Poiché $\Psi(V)\subseteq C$, $\Psi(V)$ è Lebesgue-misurabile e ha misura nulla. Inoltre, Ψ è strettamente crescente e perciò misurabile. Infine
$$\Psi^{-1}(\Psi(V))=V,$$
perché Ψ è iniettiva (in quanto strettamente crescente).

Supponiamo per assurdo che $\Psi(V)\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Allora
$$V=\Psi^{-1}(\Psi(V))\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$$
perché controimmagine lungo una funzione misurabile di un insieme misurabile, in particolare
$$V\in\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$$
da cui l'assurdo. □

2.8 La cardinalità delle σ-algebre di Borel e di Lebesgue

Il Teorema 35 prova che $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}\subsetneq\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$, ma in realtà vale molto di più: in questo paragrafo dimostreremo che il secondo insieme è di cardinalità *strettamente maggiore* del primo.

Cominciamo considerando un insieme di numeri ordinali molto importante, e cioè Ω, *l'insieme dei numeri ordinali numerabili*, e studiamone alcune proprietà.

Teorema 38. *Sia Ω l'insieme degli ordinali numerabili. Allora:*

(a) Ω è un numero ordinale;

(b) ogni segmento iniziale di Ω è numerabile;

(c) Ω *è non-numerabile;*

(d) $\mathrm{Card}(\Omega) \leq \mathfrak{c} = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$*;*

(e) ogni sottoinsieme numerabile di Ω *ha un maggiorante.*

Dimostrazione. (a) In quanto insieme di numeri ordinali, Ω risulta essere ben ordinato per il Teorema 10. Se $\xi \in \Omega$, allora $\xi \in \xi + 1$ dove $\xi + 1 \in \Omega$ perché se ξ è un ordinale numerabile, lo è anche il suo successore (avendogli aggiunto solo un elemento). Quindi, in quanto elemento di un numero ordinale, $s(\xi) = \xi$ in $\xi + 1$ e quindi anche in Ω. Segue che Ω è un numero ordinale.

(b) Dato che Ω è un numero ordinale, ogni suo segmento iniziale è un suo elemento, e dunque è numerabile.

(c) Poiché Ω è l'insieme di tutti i numeri ordinali numerabili, e poiché esso stesso è un numero ordinale, allora non può essere numerabile: se lo fosse, apparterrebbe a se stesso, e questo è impossibile.

(d) Per il Teorema del buon ordinamento, possiamo assumere che $\mathbb{R}$ sia ben ordinato. Allora $\mathbb{R}$ non può essere simile ad alcun segmento iniziale di Ω, perché $\mathbb{R}$ è non numerabile e ogni segmento iniziale di Ω è numerabile. Perciò Ω è simile o a $\mathbb{R}$ stesso o ad un segmento iniziale di $\mathbb{R}$. In ogni caso, $\mathrm{Card}(\Omega) \leq \mathfrak{c}$.

(e) Se $A \subset \Omega$ è numerabile, allora $J = \bigcup_{x \in A} s(x)$ è numerabile (perché unione numerabile di insiemi numerabili) e quindi $\Omega \setminus J \neq \varnothing$. Dimostriamo che J è un segmento iniziale di Ω.

Sia $\alpha = \inf(\Omega \setminus J)$, il nostro obiettivo è provare che $J = s(\alpha)$. Se esistesse $\beta \in J$ tale che $\beta > \alpha$, avremmo $\beta \in s(x)$ per qualche x in A in quanto elemento di J e anche $\alpha \in s(x)$, per cui $\alpha \in J$ contrariamente a quanto supposto. Dunque $J \subset s(\alpha)$ e, per definizione di α, $s(\alpha) \subset J$. Quindi $J = s(\alpha)$, e α è un maggiorante di A in Ω. □

Sia X un insieme non vuoto, e sia $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$: esplicitiamo la costruzione della σ-algebra $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ generata dalla famiglia $\mathscr{E}$. Applicando poi il risultato nel caso in cui $\mathscr{E}$ sia la famiglia degli intervalli aperti, otterremo la σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$.

Per convenienza, assumiamo che $\varnothing \in \mathscr{E}$. Siano

$$\mathscr{E}^c = \{\, E^c \mid E \in \mathscr{E} \,\} \quad \text{e} \quad \mathscr{E}_\sigma = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \;\middle|\; E_i \in \mathscr{E} \right\}.$$

$\mathscr{E}_\sigma$ è l'insieme degli insiemi che sono unione numerabile di elementi di $\mathscr{E}$. Siccome $\varnothing \in \mathscr{E}$, $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}_\sigma$.

Definiamo $\mathscr{F}_1 = \mathscr{E} \cup \mathscr{E}^c$, e per $j > 1$ definiamo

$$\mathscr{F}_j = (\mathscr{F}_{j-1})_\sigma \cup \big((\mathscr{F}_{j-1})_\sigma\big)^c.$$

Sia ora $\mathscr{F}_\omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}_j$; è vero che $\mathscr{F}_\omega = \mathscr{M}(\mathscr{E})$? In generale, no. Infatti $\mathscr{F}_\omega$ non è una σ-algebra: è chiuso rispetto al passaggio al complementare, ma se $\{\, F_j \,\}_{j=2}^{\infty}$ è tale che $F_j \in \mathscr{F}_j \setminus \mathscr{F}_{j-1}$ per ogni j, allora non è detto che $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \subset \mathscr{F}_\omega$.

Dobbiamo dunque ricorrere all'uso dei numeri ordinali transfiniti: più precisamente, se $x \in \Omega$, e se x ha un immediato predecessore y, allora definiamo

$$\mathscr{F}_x = (\mathscr{F}_y)_\sigma \cup \big((\mathscr{F}_y)_\sigma\big)^c;$$

se invece x è un ordinale limite, sia
$$\mathscr{F}_x = \bigcup_{y<x} \mathscr{F}_y.$$

Proposizione 39. $\mathscr{M}(\mathscr{E}) = \bigcup_{x\in\Omega} \mathscr{F}_x$.

Dimostrazione. Usiamo l'induzione transfinita. Siccome $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ è una σ-algebra – e in quanto tale è chiusa rispetto alle unioni numerabili e al passaggio al complementare – abbiamo che $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{M}(\mathscr{E})$. Perciò se
$$A = \{\, x \in \Omega \mid \mathscr{F}_x \subset \mathscr{M}(\mathscr{E}) \,\},$$
certamente $1 \in A$.

Ora supponiamo che $y \in A$ per ogni $y < x$. Se $x = z + 1$, si ha
$$\mathscr{F}_x = (\mathscr{F}_z)_\sigma \cup ((\mathscr{F}_z)_\sigma)^c \subset \mathscr{M}(\mathscr{E}),$$
infatti $\mathscr{F}_z \subset \mathscr{M}(\mathscr{E})$ per ipotesi induttiva e poiché $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ è una σ-algebra, anche $(\mathscr{F}_z)_\sigma$ e $((\mathscr{F}_z)_\sigma)^c$ sono contenuti in $\mathscr{M}(\mathscr{E})$; se invece x è un ordinale limite, allora
$$\mathscr{F}_x = \bigcup_{y<x} \mathscr{F}_y \subset \mathscr{M}(\mathscr{E})$$
in quanto $\mathscr{F}_y \subset \mathscr{M}(\mathscr{E})$ se $y < x$. Segue dal Principio di Induzione Transfinita che $A = \Omega$, perciò
$$\bigcup_{x\in\Omega} \mathscr{F}_x \subset \mathscr{M}(\mathscr{E}).$$

Dimostriamo ora che $\bigcup_{x\in\Omega} \mathscr{F}_x$ è una σ-algebra. Siccome contiene certamente $\varnothing$ ed è chiusa rispetto al passaggio al complementare (per costruzione), è sufficiente mostrare che è chiusa rispetto alle unioni numerabili. Perciò, sia
$$\{\, E_j \,\}_{j=1}^\infty \subset \bigcup_{x\in\Omega} \mathscr{F}_x,$$
dove $E_j \in \mathscr{F}_{x_j}$. Siccome la famiglia $\{\, x_j \,\}_{j=1}^\infty$ è numerabile, esiste $x \in \Omega$ tale che $x_j < x$ per ogni j per il Teorema 38. Poiché, però, anche $x+1 \in \Omega$ (perché $x+1$ è un ordinale numerabile al pari di x), si ha
$$\bigcup_{j=1}^\infty E_j \in (\mathscr{F}_x)_\sigma \subset \mathscr{F}_{x+1} \subset \bigcup_{x\in\Omega} \mathscr{F}_x.$$
Questo prova che $\bigcup_{x\in\Omega} \mathscr{F}_x$ è una σ-algebra contenente $\mathscr{E}$: perciò
$$\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subset \bigcup_{x\in\Omega} \mathscr{F}_x \subset \mathscr{M}(\mathscr{E}),$$
da cui la tesi. □

Ricordiamo che se A e B sono insiemi, allora $\prod_{a\in A} B$ è l'insieme delle funzioni da A a B. Segue che $\prod_{i=1}^\infty B = \prod_{i\in\omega} B$ è la collezione delle successioni in B.

Osserviamo innanzitutto che
$$\prod_{i\in\omega}\Bigl(\prod_{j\in\omega} B\Bigr) \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} \prod_{(i,j)\in\omega\times\omega} B, \tag{2.2}$$
e poiché $\mathrm{Card}(\omega\times\omega) = \mathrm{Card}(\omega)$ (vedi Proposizione 15), la cardinalità di entrambi gli insiemi di (2.2) è pari a quella di $\prod_{i\in\omega} B$.

Proposizione 40. $\operatorname{Card}(\prod_{i\in\omega}\{\,0,\,1\,\}) = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Sia $\chi\colon \mathscr{P}(\omega) \to \prod_{i\in\omega}\{\,0,\,1\,\}$ la funzione che ad ogni $A \subset \omega$ associa la sua funzione caratteristica $\chi_A\colon \omega \to \{\,0,\,1\,\}$, tale che cioè $\chi_A(n) = 1$ se $n \in A$, $\chi_A(n) = 0$ altrimenti. Allora χ è iniettiva, perché ad insiemi distinti corrispondono necessariamente funzioni caratteristiche distinte.

Sia ora $f\colon \prod_{i\in\omega}\{\,0,\,1\,\} \to \mathscr{P}(\omega)$ tale che per ogni $\varphi\colon \omega \to \{\,0,\,1\,\}$, $f(\varphi) = \varphi^{-1}(\{1\})$. Allora f è iniettiva, perché se φ, ψ sono tali che $\varphi^{-1}(\{1\}) = \psi^{-1}(\{1\})$, allora anche $\varphi^{-1}(\{0\}) = \psi^{-1}(\{0\})$, per cui $\varphi = \psi$. Dunque, per il Teorema di Schröder-Bernstein, si ha la tesi. $\square$

Proposizione 41. $\operatorname{Card}\Big(\prod_{i\in\omega}\mathbb{R}\Big) = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\operatorname{Card}\big(\prod_{i\in\omega}\{\,0\,,\,1\,\}\big) = \mathfrak{c} = \operatorname{Card}(\mathbb{R})$ e quindi

$$\operatorname{Card}\Big(\prod_{i\in\omega}\mathbb{R}\Big) = \operatorname{Card}\bigg(\prod_{i\in\omega}\Big(\prod_{j\in\omega}\{\,0\,,\,1\,\}\Big)\bigg) = \operatorname{Card}\Big(\prod_{i\in\omega}\{\,0\,,\,1\,\}\Big) = \mathfrak{c}. \qquad \square$$

Proposizione 42. *Sia $\mathscr{E}$ la collezione degli intervalli aperti, incluso l'insieme vuoto, di $\mathbb{R}$. Allora* $\operatorname{Card}(\mathscr{E}) = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Definiamo i seguenti insiemi:

$$T = \{\,\varnothing\,,\,(-\infty,+\infty)\,\}\,, \qquad L = \{\,(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\,\}\,,$$
$$I_- = \{\,(-\infty,b) \mid b \in \mathbb{R}\,\}\,, \qquad I^+ = \{\,(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

Abbiamo che $\mathscr{E}$ è l'unione di essi: dimostriamo che, a parte T, hanno tutti cardinalità del continuo, da cui segue la tesi.

I_- si mappa bigettivamente in $\mathbb{R}$ semplicemente mandando ogni intervallo illimitato inferiormente nel suo estremo superiore, similmente per I^+ utilizzando l'estremo inferiore. Per quanto riguarda L, basta ricordare che $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ è in bigezione con $\mathbb{R}$ (Proposizione 19) e dunque mandare l'intervallo (a,b) nel numero reale associato ai due estremi in maniera biunivoca. $\square$

Lemma 43. *Sia X un insieme e sia $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$: se* $\operatorname{Card}(\mathscr{E}) = \mathfrak{c}$, *allora* $\operatorname{Card}(\mathscr{E}_\sigma) = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Poiché $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}_\sigma$, $\operatorname{Card}(\mathscr{E}) \le \operatorname{Card}(\mathscr{E}_\sigma)$. Consideriamo la mappa $\varphi\colon \prod_{i\in\omega}\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}_\sigma$ tale che

$$\varphi(\{\,E_i\,\}_{i\in\omega}) = \bigcup_{i\in\omega} E_i.$$

φ è surgettiva: allora

$$\mathfrak{c} \le \operatorname{Card}(\mathscr{E}_\sigma) \le \operatorname{Card}\Big(\prod_{i\in\omega}\mathscr{E}\Big) = \operatorname{Card}\Big(\prod_{i\in\omega}\mathbb{R}\Big) = \mathfrak{c}. \qquad \square$$

Teorema 44. $\operatorname{Card}(\mathscr{B}_\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{E}$ la famiglia degli intervalli aperti di $\mathbb{R}$, compreso l'insieme vuoto. Allora la σ-algebra di Borel $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ coincide con $\mathscr{M}(\mathscr{E})$.

Definiamo, per ogni $x \in \Omega$, la famiglia $\mathscr{F}_x$ come abbiamo fatto per la Proposizione 39, per cui $\mathscr{B}_\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\Omega}\mathscr{F}_x$. Per prima cosa, dimostriamo che

$$\operatorname{Card}(\mathscr{F}_x) = \mathfrak{c} \quad \text{per ogni } x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Sia
$$A = \{ x \in \Omega \mid \mathrm{Card}(\mathscr{F}_x) = \mathfrak{c} \}.$$
Poiché $\mathscr{F}_1 = \mathscr{E} \cup \mathscr{E}^c$, per la Proposizione precedente si ha che $1 \in A$ (la bigezione tra $\mathscr{E}$ e $\mathscr{E}^c$ si ottiene mandando ogni insieme in $\mathscr{E}$ semplicemente nel suo complementare). Inoltre, da questo possiamo dedurre che $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}}) \geq \mathfrak{c}$.
Supponiamo ora che $y \in A$ per ogni $y < x$. Se $x = z + 1$, allora $\mathrm{Card}(\mathscr{F}_z) = \mathfrak{c}$ e perciò

$$\mathrm{Card}\big((\mathscr{F}_z)_\sigma\big) = \mathrm{Card}\big(((\mathscr{F}_z)_\sigma)^c\big) = \mathfrak{c}$$

per il Lemma 43, da cui $x \in A$; se invece x è un ordinale limite, allora $x \in A$ perché unione numerabile di insiemi di cardinalità del continuo. Perciò $A = \Omega$ per il Principio di Induzione Transfinita, e questo prova (2.3). Allora, per ogni $x \in \Omega$, esiste una bigezione $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathscr{F}_x$ e quindi la mappa

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} \times \Omega &\to \bigcup_{x \in \Omega} \mathscr{F}_x \\ (t, x) &\mapsto f_x(t) \end{aligned}$$

è surgettiva: sia infatti $B \in \bigcup_{x \in \Omega} \mathscr{F}_x$, allora esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $B \in \mathscr{F}_{x_0}$, perciò esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f_{x_0}(t_0) = B$, per cui $f(t_0, x_0) = B$. Segue quindi che

$$\mathrm{Card}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}}) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{x \in \Omega} \mathscr{F}_x\right) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{R} \times \Omega) \leq \mathfrak{c}$$

poiché $\mathrm{Card}(\Omega) \leq \mathfrak{c}$ per il Teorema 38. Siccome $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}}) \geq \mathfrak{c}$, si ha la tesi. □

Teorema 45. $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}}) < \mathrm{Card}(\mathscr{L}_{\mathbb{R}})$.

Dimostrazione. Sia C l'insieme di Cantor: C è nullo e lo è ogni suo sottoinsieme (per la completezza della misura di Lebesgue); in particolare, ogni suo sottoinsieme è misurabile, cioè $\mathscr{P}(C) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}}$. Sappiamo che $\mathrm{Card}(C) = \mathfrak{c}$ (Proposizione 34): ne segue che

$$\mathrm{Card}(\mathscr{L}_{\mathbb{R}}) \geq \mathrm{Card}(\mathscr{P}(C)) = 2^{\mathfrak{c}},$$

perciò, visto che $\mathrm{Card}(\mathscr{L}_{\mathbb{R}}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{R})) = 2^{\mathfrak{c}}$, si ha che $\mathrm{Card}(\mathscr{L}_{\mathbb{R}}) = 2^{\mathfrak{c}}$. Per il teorema precedente $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{c}$: allora dal teorema di Cantor segue la tesi. □

Bibliografia

[1] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Wiley-Interscience, New York, 1984.
[2] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.