Ipotesi

In questa sezione si considererà sempre un campione $X_1, .., X_n$ la coui distribuzione dipende da un parametro non noto θ. Invece di stimare il parametro, ora vogliamo verificare un'ipotesi che lo riguarda su un campione di dati osservati.
Un'**ipotesi statistica** è un affermazione sul parametro θ, è un assunzione del tipo $\theta = \theta_o, \theta \ \geq \theta_o, \theta < \theta_o$ (con θ valore qualsiasi).

La procedura che consiste nella verifica di un'ipotesi statistica è detta **test di ipotesi**. Si tratta di una procedura decisionale che permette di accettare o rifiutare un'ipotesi statistica. L'approccio consistenel creare una regola di decisione che ci permetta di stabilire se accettare o rifiutare l'ipotesi in base ai dati osservati.

Le ipotesi

- $H_0 \to (\text{Ipotesi Nulla})$: è l'ipotesi che vogliamo verificare, la nostra convinzione iniziale.
- $H_1 \to (\text{Ipotesi Alternativa})$: Ipotesi in contrapposizione con l'ipotesi nulla.

La statistica test e la regione critica

Per **TEST STATISTICO** si intende il procedimento per cui, sulla base del campione ossservato, si decide se **falsificare** o meno l'ipotesi nulla H_0.

L'elemento basilare nella ferifica di ipotesi è la **statistica test**. Si tratta di una funzione

$$ST(X_1, .., X_n)$$

che generalmente è uno stimatore del parametro θ.

Il rifiuto o meno dell'ipotesi nulla si fa tramite una **REGIONE CRITICA** C con la regola:

> $$\text{Se } ST(X_1, .., X_n) \in C \text{ allora si rifiuta } H_0$$
> $$\text{Se } ST(X_1, .., X_n) \notin C \text{ allora si accetta } H_0$$

Intuitivamente possiamo dire che C contiene i valori del parametro *molto distanti* dai valori attesi sotto H_0.

Errori di 1° e 2° specie e Significatività

Nel tentativo di verificare un'ipotesi nulla, si possono commettere due tipi di errori:

- **Errore di I specie**: si commette quando si rifiuta H_0 quando in realtà è vera.
- **Errore di II specie**: si commette quando si accetta H_0 quando in realtà è falsa.

In genere si impone un livello di soglia α e si costruisce un test in modo che la probabilità di commettere un errore di I specie, non superi α.
Questo valore α è detto **Livello di Significatività**, e significa:

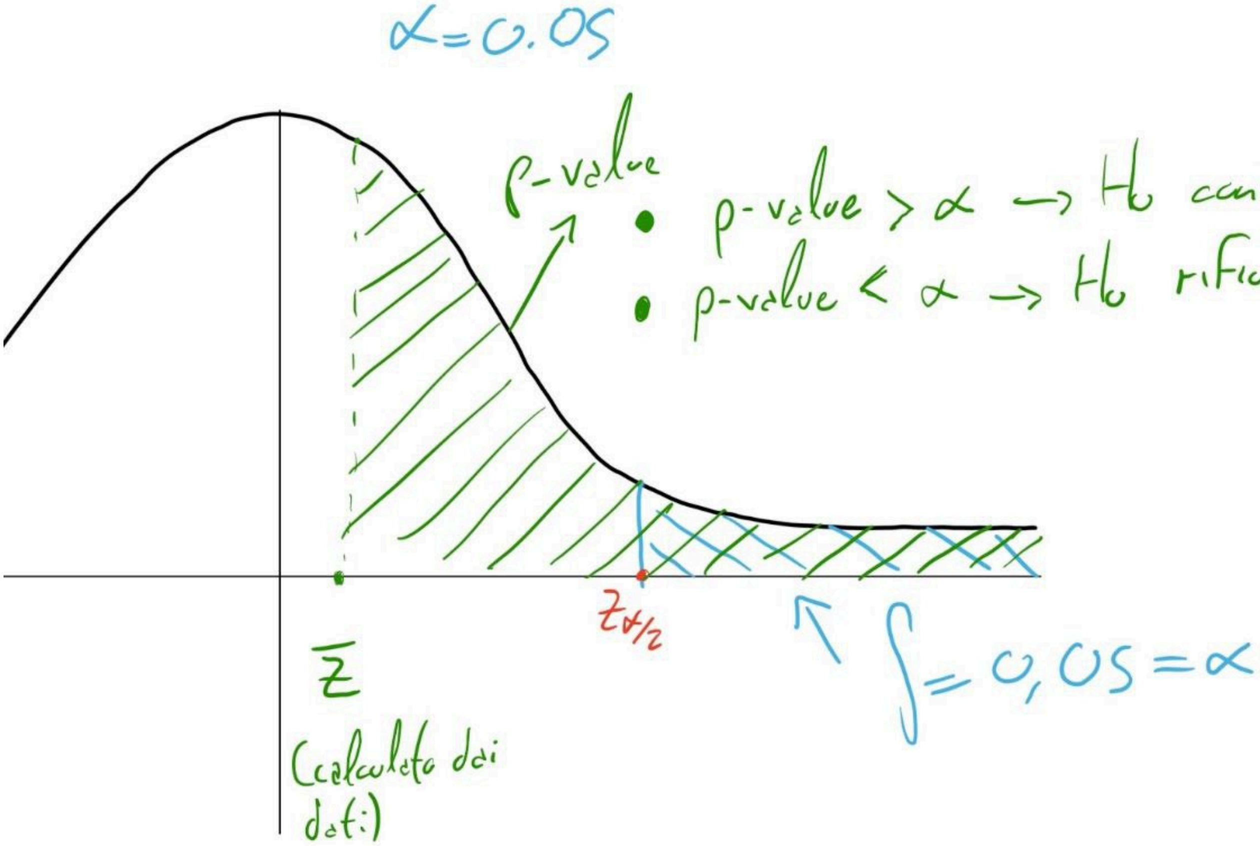
$$\mathbb{P}_{H_0}(ST \in C) \leq \alpha$$

Indica la probabilità di rifiutare H_0 anche quando essa è vera, quindi la probabilità di commettere un errore di 1° specie
Dove $\mathbb{P}_{H_0}$ indica la probabilità calcolata assumendo vera H_0.
w

L'obbiettivo di un test non è stabilire se una data ipotesi sia vera, ma solo se essa sia compatibile con i dati osservati

P-Value

Il **P-Value** è la probabilità di osservare un valore della statistica test almeno estremo quanto quello osservato, assumendo vera l'ipotesi nulla.
Indica a quale livello di significatività corrisponde una regione critica C il cui estremo è pari al valore osservato della *statistica test*, ossia a quale livello di significatività il valore osservato st valica il confine della regione critica.
Fornisce il liveello di significatività minimo per cui si passa al rifiuto dell'ipotesi nulla.
Esempio per un unilaterale destro:



Test per una popoloazione

Test per la media di una popolazione normale con varianza nota

Sia $X_1, .., X_n$ un campione casuale da una popolazione normale con media μ e varianza σ^2 nota.
Tipologia di test, con varianza nota e μ_0 il valore che ci da l'esercizio ad esempio:

H_0	H_1	**Statistica test(st)**	**Rifito H_0 se**
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\lvert st \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$st = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$st > z_\alpha$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$st < -z_\alpha$

esempio: supponiamo che un produttore dichiari che le loro macchine hanno una durata nominale di 10 anni:
L'ipotesi nulla sarà la dichiarazione del fornitore che dobbiamo verificare, quindi $H_0 : \mu = 10$ e $H_1 : \mu \neq 10$. In questo caso quardiamo che sia diversa, quindi può essere maggiore o minore.
Volendo, possiamo anche fare un test unilaterale, ad esempio $H_0 : \mu \leq 10$ e $H_1 : \mu < 10$, per smentire le sue dichiarazioni.

La regione critica in un caso Unilaterale, con $\mu \leq \mu_0$ sarà $st < -z_\alpha$

Come risolverlo usando il p-value

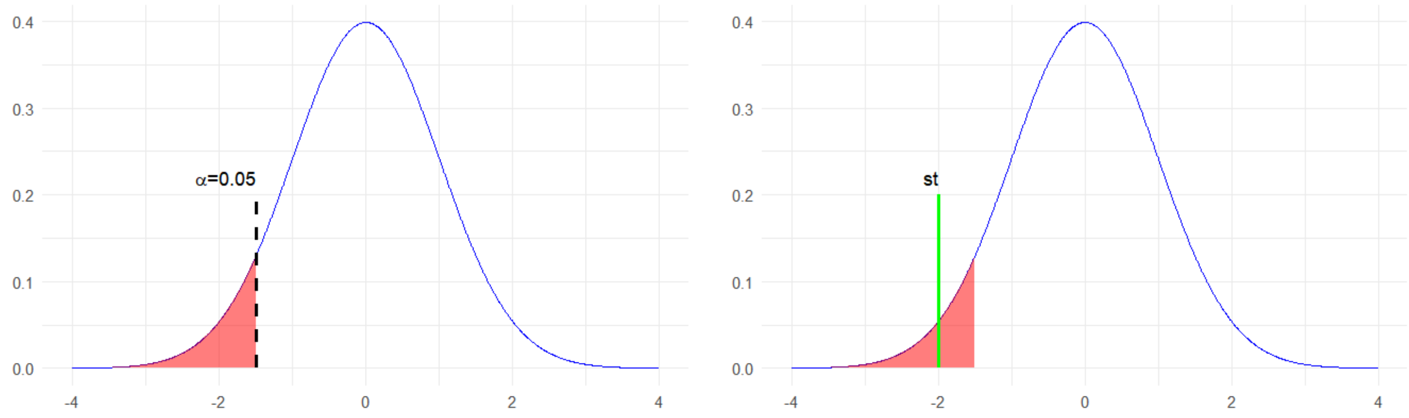
Consideriamo un esempio dove $st = -1.661$:

Il p-value è quel valore **limite** di α del livello di significatività per cui si ha $st = -z_\alpha \iff \alpha = 1.661$ (valore massimo/minimo di α per cui si rifiuta H_0)
Quindi:

$$\mathbb{P}(Z > st) = \alpha \iff 1 - \Phi(1.661) = \alpha \iff \alpha = 0.0485$$

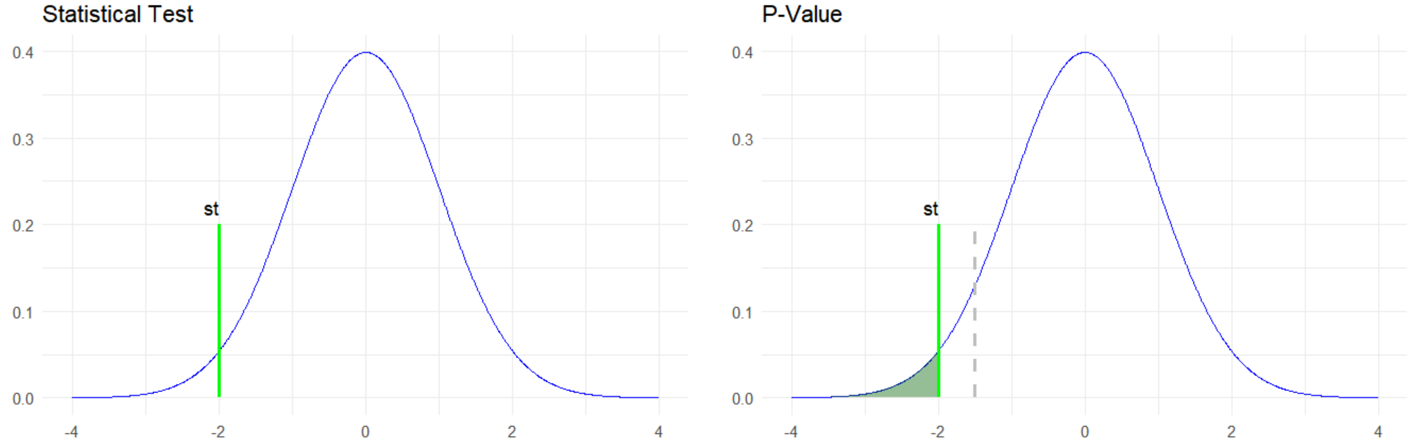
Quindi per tutti i valori superiori a 0.0485 rifiuteremo H_0.

Grafici



In questo grafico si può vedere una casistica di quando rifiutare H_0 in base al valore di st e α. Infatti st in questo caso appartiene alla regione critica, quindi rifiutiamo H_0.

In questo secondo grafico invece vediamo come il valore del p-value viene calcolato. Quindi ci dice il minimo valore di α per cui rifiutiamo H_0.



In questo caso $\alpha = 0.05$ sarebbe un valore troppo grande, infatti, con i calcoli, risulta che il valore di α per cui accettiamo H_0 è 0.0485.

Test per la media di una popolazione normale con varianza incognita

Tipo di test, con varianza incognita e μ_0 il valore che ci da l'esercizio ad esempio:

H_0	H_1	**Statistica test(st)**	**Rifiuto H_0 se**
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\lvert st \rvert > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$st = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$ Dove $\hat{s}$ è la $\underline{deviazione}$ $\underline{standard}$ (sd)	$st > t_{\alpha,n-1}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$st < -t_{\alpha,n-1}$

Test calcolato

I dati sulle pulsazioni di 10 persone sono:

$$67\ 64\ 75\ 80\ 60\ 63\ 78\ 68\ 65\ 68$$

Si sa che la frequenza media è di 72 battiti. Si vuole determinare se i dati raccolti sono il linea con tale valore ad una significatività del 5%.

Dati:

- $H_0 : \mu = 72$
- $H_1 : \mu \neq 72$
- $\alpha = 0.05$

Soluzione 1:
Dobbiamo calcolare:

- Media campionaria $\bar{X}$
- Deviazione standard campionaria $\hat{s}$
- Statistica test st
- Regione critica

1. Media campionaria:

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i = 68.8$$

2. Deviazione standard campionaria:

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2} = 6.67$$

3. Statistica test:

$$st = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = \frac{68.8 - 72}{\frac{6.67}{\sqrt{10}}} = -1.51$$

4. Regione critica:
   La regione critica la calcoliamo con la funzone inversa di densità del t-student, con il valore $\frac{\alpha}{2}$ e $n-1$ gradi di libertà:

```
qt(p=0.025, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE) # 1.81
```

Conclusione
Il valore di st è inferiore al valore calcolato con la funzione inversa di densità del t-student, quindi **accettiamo** H_0.

Soluzione 2:
Dobbiamo calcolare:

- Statistica test st
- P-Value

1. Statistica test:

$$st = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = \frac{68.8 - 72}{\frac{6.67}{\sqrt{10}}} = -1.51$$

2. P-Value:

$$2 \cdot \mathbb{P}(X \geq st) \text{ dove } X \sim t_{n-1}$$

```
2*pt(q=st, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE) # 0.16
```

Conclusione
Il valore del p-value è più grande di α, quindi **accettiamo** H_0.

Test per la varianza di una popolazione normale con media e varianza incognite

Tipo di test, con σ_0 il valore che ci da l'esercizio ad esempio:

H_0	H_1	**Statistica test(st)**	**Rifiuto H_0 se**
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$st > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ o $st < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$st = \frac{(n-1)\bar{S}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ Dove $\bar{S}$ è la $\underline{varianza}$ (var)	$st > t_{\alpha,n-1}$$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$st < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$

Esempio calcolato

Si verifichi l'ipotesi che la varianza della poploazione sia $\sigma^2 = 36$, contro l'alternativa che sia minore di tale valore a livello di significatività $\alpha = 5\%$, sulla base dei dati osservati di un caaampione di 12 uova:

$$61\ 57\ 58\ 65\ 54\ 63\ 56\ 68\ 67\ 53\ 64\ 66$$

Dati:

- $H_0 : \sigma^2 = 36$
- $H_1 : \sigma^2 < 36$
- $\alpha = 0.05$
- Siamo nel caso in cui:
    - $H_0 \to \sigma^2 = \sigma_0^2$
    - $H_1 \to \sigma^2 < \sigma_0^2$

Per confutare H_0 dobbiamo accerrarci che $st < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$, altrimenti la accettiamo.

Soluzione 1:
Dobbiamo calcolare:

- Varianza campionaria $\bar{S}^2$
    - Media campionaria $\bar{X}$
- Statistica test st
- Regione critica

1. Varianza campionaria:
   Media campionaria:

$$\bar{X} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} X_i = 61$$

   Varianza campionaria:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(X_i - \bar{X})^2 = 27.45$$

2. Statistica test:

$$st = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} = \frac{11 \cdot 27.45}{36} = 8.25$$

3. Regione critica:
   La regionr critica la calcoliamo con la funzone inversa di densità del chi-quadro, con il valore $1-\alpha$ e $n-1$ gradi di libertà:

```
qchisq(p=1-0.05, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE) # 4.57
```

NB: dobbiamo usare il parametro lower.tails = FALSE

Conclusione
Il valore di st è inferiore al valore calcolato con la funzione inversa di densità del chi-quadro, quindi **accettiamo** H_0.
Questo perchè $st \notin C$.

Soluzione 2:
Dobbiamo calcolare:

- Statistica test st
- P-Value

1. Statistica test:

$$st = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} = \frac{11 \cdot 27.45}{36} = 8.25$$

2. P-Value:

$$\mathbb{P}(X \leq st) \text{ dove } X \sim \chi^2_{1-\alpha,n-1}$$

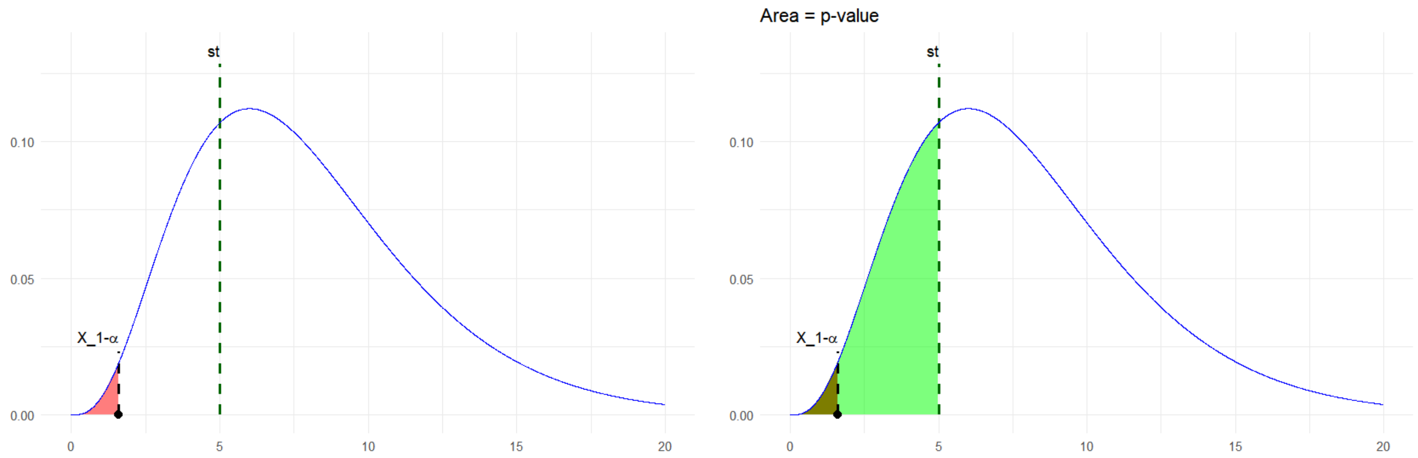
\

```
pchisq(q=st, df=length(vals)-1, lower.tail = TRUE) # 0.309
```

Conclusione
Il valore del p-value è più grande di α, quindi **accettiamo** H_0.

Spiegazione grafica

In questo grafico è riportata la spegazione grafica del p-value.



A sinistra possiamo vedere l'area rossa che equivale a 0.05, il valore che equivale alla linea nera è stato calcolato tramite la funzione inversa di densità del chi-quadro.
Invece st è stato calocato con la formula sopra.
Nel grafico di destra vediamo come viene calcolato il valore del p-value, che è l'area sotto la curva del chi-quadro fino a st. Quindi ora vediamo anche graficamente che l'area formato da st è maggiore di 0.05, quindi **accettiamo** H_0.

Test asintotici per la media di una popolazione di Bernoulli

Sia $X_1, .., X_n$ un campione casuale da una popolazione di Bernoulli con parametro incognito p.
Tipologia di test, con parametro p_0 il valore che ci da l'esercizio ad esempio:

H_0	H_1	**Statistica test(st)**	**Rifiuto H_0 se**
$p = p_0$	$p \neq p_0$		$\lvert st \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$
$p \leq p_0$	$p > p_0$	$st = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$	$st > z_\alpha$
$p \geq p_0$	$p < p_0$		$st < -z_\alpha$

Dove $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ è lo stimatore di massima verosimiglianza di p.

Nota sul calcolo del p-value

Per il calcolo del p-value seguiamo questa tabella:

Bilaterale	Laterale sinistro	Laterale destro
$2 \cdot \mathbb{P}(Z > \|st\|)$	$\mathbb{P}(Z < st)$	$\mathbb{P}(Z > st)$

NB Quindi in R dobbiamo prestare **attenzione** al valore di `lower.tail` :
Se è `TRUE` allora calcoliamo $\mathbb{P}(Z < st)$, altrimenti se è falso $\mathbb{P}(Z > st)$.

Tabella riassuntiva

Casistica		H_0	H_1	Statistica test(st)	Rifiuto H_0 se
Test per la media di una popolazione normale con varianza nota		$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\|st\| > z_{\frac{\alpha}{2}}$
		$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$st = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$	$st > z_\alpha$
		$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$st < -z_\alpha$
Test per la media di una popolazione normale con varianza incognita		$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\|st\| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$
		$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$st = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$	$st > t_{\alpha, n-1}$
		$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	con $\hat{s}$ deviazione standard(*sd*)	$st < -t_{\alpha, n-1}$
Test per la varianza di una popolazione normale con media e varianza incognite		$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$st > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ o $st < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$
		$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$st = \frac{(n-1)\bar{S}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$st > \chi^2_{\alpha, n-1}$
		$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	con $\bar{S}^2$ varianza campionaria(*var*)	$st < \chi^2_{1-\alpha, n-1}$
Test asintotici per la media di una popolazione di Bernoulli		$p = p_0$	$p \neq p_0$		$\|st\| > z_{\frac{\alpha}{2}}$
		$p \leq p_0$	$p > p_0$	$st = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$	$st > z_\alpha$
		$p \geq p_0$	$p < p_0$	con $\hat{p}$ calcolato come $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i)$	$st < -z_\alpha$

Calcolo p-value

Bilaterale	Laterale sinistro	Laterale destro
$2 \cdot \mathbb{P}(Z > \|st\|)$	$\mathbb{P}(Z < st)$	$\mathbb{P}(Z > st)$

Tabella funzioni di R

Funzione	Descrizione	Esempio
`qt(p=0.025, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE)`	Calcola il valore di t per un livello di significatività α	`qt(p=0.025, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE)`

Funzione	Descrizione	Esempio
`pt(q=st, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE)`	Calcola il p-value per un test laterale destro	`pt(q=st, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE)`
`qchisq(p=1-0.05, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE)`	Calcola il valore di χ^2 per un livello di significatività α	`qchisq(p=1-0.05, df=length(vals)-1, lower.tail = FALSE)`
`pchisq(q=st, df=length(vals)-1, lower.tail = TRUE)`	Calcola il p-value per un test laterale sinistro	`pchisq(q=st, df=length(vals)-1, lower.tail = TRUE)`