

Note del corso

MACHINE LEARNING PER LA FISICA APPLICATA E FISICA DELLE ALTE ENERGIE

Raviola Alessio

25 ottobre 2022

1 Introduzione

A computer program is said to learn from experience E with respect to some class of tasks T and performance measure P , if its performance at tasks in T , as measured by P , improves with experience E .

L'impostazione del corso è di tipo *probabilistico* (statistical learning). Le quantità non note sono trattate come **variabili aleatorie** (RANDOM VARIABLES) a cui viene associata una **distribuzione di probabilità** (PROBABILITY DISTRIBUTION) che descrive il set (pesato) di valori che la variabile può assumere.

Abbiamo tre tipi di machine learning:

- SUPERVISED LEARNING;
- UNSUPERVISED LEARNING;
- REINFORCEMENT LEARNING;

il corso si focalizza sui primi due tipi.

1.1 Supervised learning

Il **compito** T consiste nell'imparare una mappa f dagli input $x \in X$ agli output $y \in Y$. Gli **input** x sono chiamati FEATURES (o COVARIATES o PREDICTORS) e sono in genere costituiti da un vettore reale con dimensione fissata, ovvero abbiamo $X \equiv \mathbb{R}^D$. Gli **output** sono chiamati LABEL (o TARGET o RESPONSE).

L'**esperienza** E consiste in un TRAINING SET \mathcal{D} di N coppie input-output:

$$\mathcal{D} = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^N, \quad (1)$$

dove N è detta SAMPLE SIZE.

La **performance** dipende dal compito T .

1.1.1 Classificazione

Problemi comuni in machine learning sono quelli di **classificazione**. In un problema di questo tipo lo spazio degli output C è un set *non ordinato* di label $y = \{1, 2, \dots, C\}$ dette CLASSES. Quello che chiede il problema è di predire una classe dato un input, problemi di questo tipo sono detti di PATTERN RECOGNITION¹.

Esempio 1.1 (Classificazione specie di iris). In generale in IMAGE CLASSIFICATION gli input X sono immagini, quindi:

$$X = \mathbb{R}^D, \quad D = C \times D_1 \times D_2, \quad (2)$$

¹Se abbiamo solo due classi, i.e. solo due output, allora il problema si dice di CLASSIFICAZIONE BINARIA

Index	sl [cm]	sw [cm]	pl [cm]	pw [cm]	Label
0	5.1	3.5	1.4	0.2	Setosa
1	4.9	3.0	1.4	0.2	Setosa
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
50	7.0	3.2	4.7	1.4	Versicolor
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
150	5.9	3.0	5.1	1.8	Virginica

Tabella 1: Design matrix del training set per classificazione specie di iris.

ove $C = 3$ sono i canali RGB. E cerchiamo una mappa

$$f : X \longrightarrow Y \quad (3)$$

che ci dica a quale delle classi appartenenti a Y l'immagine appartiene. Per le specie di iris però i botanisti hanno individuato 4 caratteristiche numeriche: lunghezza e larghezza del sepal e del petalo; dunque abbiamo $X = \mathbb{R}^4$. Supponiamo che il training set sia una collezione di 150 esempi delle 3 specie, 50 per ognuna. I dati possono essere raccolti in una matrice detta DESIGN MATRIX come TABULAR DATA - come in Tabella 1.

Se abbiamo N elementi nel training set, ognuno con dimensione $D = \dim X + \dim Y$, allora abbiamo:

- BIG DATA se $N \gg D$, ovvero se il numero di elementi è molto superiore alla loro dimensione;
- WIDE DATA se $D \gg N$, ovvero se la dimensione degli elementi è molto superiore al loro numero.

Una buona idea è fare una *esplorazione dei dati* (EXPLOATORY DATA ANALYSIS) per vedere se ci sono dei pattern ovvi, ad esempio tramite grafici. Per grandi basi dati (big data) possiamo procedere mediante DIMENSIONALITY REDUCTION:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \left\{ \begin{array}{ll} p_l < 2.45 \text{ cm} & \text{Setosa} \\ \text{Altrimenti} & \left\{ \begin{array}{ll} p_w < 1.75 \text{ cm} & \text{Versicolor} \\ \text{Altrimenti} & \text{Virginica} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \text{DECISION TREE}, \quad (4)$$

ove $\boldsymbol{\theta}$ è detto THRESHOLD PARAMETER. Questo decision tree è visualizzato in Figura 1. La performance può essere quindi misurata con il MISCLASSIFICATION RATE:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{I}(y_n \neq f(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta})), \quad (5)$$

dove $\mathbb{I}(e)$ è l'**indicatore binario**

$$\mathbb{I}(e) = \begin{cases} 1 & \text{se } e \text{ è vero} \\ 0 & \text{se } e \text{ è falso} \end{cases}. \quad (6)$$

Nel caso in cui alcuni errori di classificazione siano più dannosi di altri posso definire una loss function $l(y, \hat{y})$ e ridefinire il misclassification rate come l'EMPIRICAL RISK:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N l(y_n, f(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta})). \quad (7)$$

Un modo che abbiamo per definire il TRAINING (o MODEL FITTING) è modificare questo rischio empirico, ovvero trovare $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tale che

$$\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \min[\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})]. \quad (8)$$

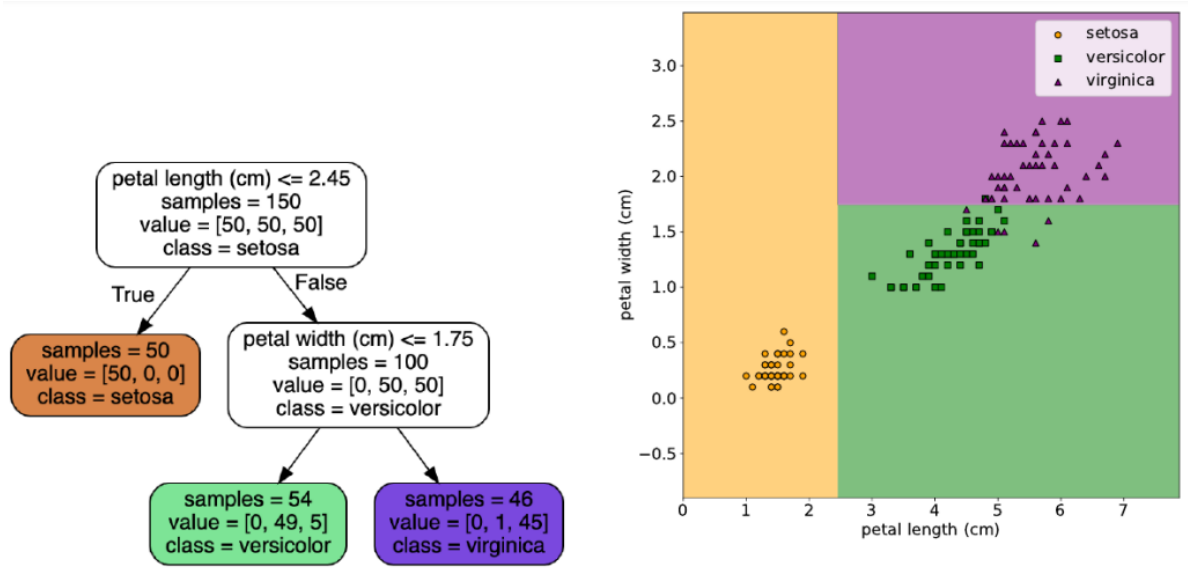


Figura 1: Decision tree per problema di classificazione specie di iris.

2 Richiami di probabilità

Abbiamo diverse definizioni di probabilità.

Definizione Frequentistica La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili.

Definizione Soggettiva La probabilità di un evento è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 altrimenti.

Definizione Bayesiana La probabilità di un evento è l'*incertezza* con cui l'evento si verifica.

Definizione Assiomatica Kolmogorov nel 1933 costruisce la teoria della probabilità a partire da degli assiomi.

L'incertezza può essere di due tipi:

aleatoria ovvero è una DATA UNCERTANTY;

epistemica ovvero è una MODEL UNCERTANTY;

2.1 Proprietà della probabilità

Chiamiamo $\Pr(A)$ la probabilità dell'evento A , allora abbiamo le seguenti proprietà.

Proprietà 2.1.1 (Joint probability). Se A e B sono due eventi indipendenti, allora:

$$\Pr(A \wedge B) \equiv \Pr(A, B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B). \quad (9)$$

Proprietà 2.1.2 (Union probability). Anche detta regola di unione esclusione. Se A e B sono due eventi indipendenti, allora:

$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \wedge B). \quad (10)$$

Proprietà 2.1.3 (Conditional probability).

$$\Pr(A | B) = \frac{\Pr(A, B)}{\Pr(B)}. \quad (11)$$

Se i due eventi sono indipendenti questa si riduce a $\Pr(A | B) = \Pr(A)$.

Proprietà 2.1.4 (Conditional independence).

$$\Pr(A, B \mid C) = \Pr(A \mid C) \cdot \Pr(B \mid C) \quad (12)$$

2.2 Random variables

Rappresentiamo con X una variabile di cui non conosciamo il valore e la chiamiamo *variabile casuale* (RANDOM VARIABLE). Il set dei valori che X può assumere è detto *spazio di sampling* (SAMPLING SPACE). Un evento è dunque un set di risultati dato un sampling space definito.

Se la variabile è **discreta** abbiamo un sampling space numerabile e la PMF (PROBABILITY MASS FUNCTION):

$$p(x) \equiv \Pr(X = x). \quad (13)$$

Se invece la variabile è **continua** abbiamo un sampling space non numerabile e la CDF (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION):

$$P(x) \equiv \Pr(X \leq x), \quad (14)$$

da cui possiamo definire la PDF (PROBABILITY DENSITY FUNCTION):

$$p(x) \equiv \frac{d}{dx} P(x), \quad (15)$$

da cui segue:

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) = P(b) - P(a) \quad (16)$$

$$\implies \Pr(x \leq X \leq x + dx) \approx p(x). \quad (17)$$

Se la CDF $P(x)$ è monotona crescente allora la sua inversa $P^{-1}(q)$ è detta *quantile*. Il valore $x_q = P^{-1}(q)$ è il valore per cui $\Pr(X \leq x_q) < q$, ovvero il quantile q della distribuzione P .

Se abbiamo due variabili casuali X e Y allora possiamo definire la JOINT DISTRIBUTION:

$$p(x, y) = p(X = x, Y = y) \equiv p(X = x \wedge Y = y). \quad (18)$$

Se le due variabili sono indipendenti e con cardinalità finita possiamo definire la *distribuzione marginale* (MARGINAL DISTRIBUTION) come:

$$p(X = x) = \sum_y p(X = x, Y = y), \quad (19)$$

altrimenti se sono dipendenti la *distribuzione condizionale* (CONDITIONAL DISTRIBUTION) come:

$$p(Y = y \mid X = x) = \frac{p(X = x, Y = y)}{p(X = x)} \quad (20)$$

$$\implies p(x, y) = p(y \mid x) \cdot p(x),$$

da cui segue la **chain rule**:

$$p(\mathbf{x}_{1:D}) = p(x_1) p(x_2 \mid x_1) p(x_3 \mid x_1, x_2) \cdots p(x_D \mid p_{1:D-1}). \quad (21)$$

Due variabili si dicono MARGINALMENTE INDIPENDENTI se

$$X \perp Y \iff p(X, Y) = p(X) p(Y), \quad (22)$$

mentre si dicono **condizionalmente indipendenti** se

$$X \perp Y \iff p(X, Y \mid Z) = p(X \mid Z) p(Y \mid Z). \quad (23)$$

2.3 Momenti di una distribuzione

Definizione 2.1 (Media). Definiamo MEDIA di una distribuzione come

$$\mathbb{E}[X] \equiv \int_X x p(x) dx \quad \left(\mathbb{E}[X_{\text{discreta}}] = \sum_{x \in X} x p(x) \right). \quad (24)$$

La media è lineare, ovvero $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$.

Definizione 2.2 (Varianza). Definiamo VARIANZA di una distribuzione come

$$\mathbb{V}[X] \equiv \mathbb{E}[(X - \mu)^2], \quad (25)$$

che con la definizione di prima possiamo anche scrivere come:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X] &= \int_X (x - \mu)^2 p(x) dx \\ &= \int x^2 p(x) dx + \underbrace{\mu^2 \int p(x) dx}_{=1} - 2\mu \underbrace{\int x p(x) dx}_{=\mu} \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mu^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Con questa definizione è facile dimostrare l'identità

$$\mathbb{V}[aX + b] = a^2 \mathbb{V}[X], \quad (27)$$

inoltre anche la varianza è lineare, ma solo se le variabili sono indipendenti.

Definizione 2.3 (Moda). Definiamo MEDIA di una distribuzione il valore (o i valori) più probabile, ovvero

$$x^* \text{ t.c. } p(x^*) = \max p(x), \quad (28)$$

Questi stimatori non danno tutta l'informazione contenuta nella distribuzione.

2.4 Teorema di Bayes

Teorema 2.1. Data una quantità non nota H (hypotesis) e dei dati noti $Y = y$ abbiamo che

$$p(H = h | Y = y) = \frac{p(H = h) p(Y = y | H = h)}{p(Y = y)}. \quad (29)$$

Il teorema segue dall'identità $p(h | y) p(y) = p(h) p(y | h)$.

- $p(h)$ viene detta PRIOR ovvero ciò che conosciamo o assumiamo per H prima di fare qualunque misura;
- $p(y | h)$ è la *distribuzione osservata* detta LIKELIHOOD, è una funzione di y ad h fisso, ma non è un distribuzione di probabilità;
- $p(y)$ è detta MARGINAL LIKELIHOOD, indipendente da h , funge da costante di normalizzazione

$$p(Y = y) = \sum_{h' \in H} p(Y = y | H = h') = \sum_{h' \in H} p(H = h', Y = y);$$

- $p(h | y)$ è detta POSTERIOR DISTRIBUTION.

Esempio 2.1 (Monty Hall problem). Posso scegliere una di tre porte. Dietro una delle porte c'è un premio. Inizio con il scegliere la porta 1. Ho che la probabilità degli eventi $H_{1,2,3}$ che il premio sia dietro la porta 1, 2 o 3 è

$$p(H_1) = p(H = 1) = \frac{1}{3}.$$

Ora una delle porte non scelte da me si apre rivelando che dietro quella non c'è il premio, in base a dove si trova il premio la probabilità degli eventi $Y_{2,3}$ che si apra una porta o l'altra è data da $p(Y = y, H = h)$:

$$\begin{aligned} p(Y = 2, H_1) &= \frac{1}{2}, & p(Y = 2, H_2) &= 0, & p(Y = 2, H_3) &= 1, \\ p(Y = 3, H_1) &= \frac{1}{2}, & p(Y = 3, H_2) &= 1, & p(Y = 3, H_3) &= 1. \end{aligned}$$

Si apre la porta 3. Mi viene data la scelta di cambiare porta prima che venga rivelato dove si trova il premio, per massimizzare la probabilità di vittoria posso calcolare le probabilità condizionate con Bayes. Dai calcoli di prima ho che $p(Y = 3) = 1/6 + 1/3 = 1/3$ dunque:

$$\begin{aligned} p(H_1 | Y = 3) &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \\ p(H_2 | Y = 3) &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \\ p(H_3 | Y = 3) &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

dunque mi conviene cambiare porta.

2.5 Distribuzione di Gauss

La distribuzione di Gauss (o gaussiana) è una tra le più usate in Machine Learning ed è definita come

$$\begin{aligned} P(y) &\equiv \Pr(Y \leq y), & \Pr(a \leq Y \leq b) &= P(b) - P(a) \\ \Phi(y; \mu, \sigma^2) &\equiv \int_{-\infty}^y \mathcal{N}(\xi/\mu, \sigma^2) d\xi = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right], & \xi &= \frac{y - \mu}{\sigma}, \end{aligned} \tag{31}$$

ove erf è la GAUSS ERROR FUNCTION definita come

$$\operatorname{erf}(u) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt, \tag{32}$$

mentre \mathcal{N} è la PDF (probability density function) definita come

$$\mathcal{N}(y | \mu, \sigma^2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (y - \mu)^2 \right]. \tag{33}$$

Questa distribuzione è popolare per diversi motivi:

- dipende da soli due parametri ed entrambi sono di facile interpretazione;
- per il teorema del limite centrale, nel limite $N \rightarrow \infty$ ogni distribuzione può essere approssimata da una gaussiana;
- rappresenta la somma di variabili causali indipendenti;
- il numero di assunzioni è minimo.

2.6 Altre distribuzioni notevoli

Abbiamo:

- T-STUDENT

$$\tau(y | \mu, \sigma^2, \nu) \propto \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad \begin{cases} \mu & \text{mean} \\ \sigma & \text{mode} \\ \nu & \text{degree of formality} \end{cases} ; \quad (34)$$

- LORENTZ (CAUCHY)

$$C(x | \mu, \gamma) = \frac{1}{\gamma\pi} \left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\gamma} \right)^2 \right]^{-1} ; \quad (35)$$

- LAPLACE

$$L(y | \mu, b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|y - \mu|}{b}\right) \quad \begin{cases} \mu & \text{mean} \\ \mu & \text{mode} \\ 2b^2 & \text{variance} \end{cases} ; \quad (36)$$

- BETA

$$\text{Beta}(x | a, b) = \frac{1}{\beta(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \quad \begin{cases} \frac{a}{a+b} & \text{mean} \\ (a-1)(a+b-2) & \text{mode} \\ \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} & \text{variance} \end{cases} ; \quad (37)$$

- GAMMA

$$\text{Ga}(x | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-xb}; \quad (38)$$

- EXPERIMENTAL

$$\text{Exp}(x | \lambda) = \text{Ga}(x | a = 1, b = \lambda) \quad (39)$$

- CHI QUADRO

$$\chi_\nu^2(x) = \text{Ga}\left(x | a = \frac{\nu}{2}, b = \frac{1}{2}\right) \quad (40)$$

Alcune distribuzioni sono mostrate in fig. 2.

2.7 Osservazioni

Supponiamo di avere due variabili causali descritte da distribuzioni gaussiane:

$$x_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \quad x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), \quad (41)$$

e di voler calcolare la PDF della loro somma $y = x_1 + x_2$, allora:

$$p(y) = \mathcal{N}(x_1 | \mu_1, \sigma_1^2) \otimes \mathcal{N}(x_2 | \mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(y | \mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2), \quad (42)$$

ovvero la *convoluzione di due gaussiane è una gaussiana*.

Supponiamo ora che x sia una variabile casuale e $y = f(x)$ una funzione di essa. Talora è difficile calcolare $p(y)$ analiticamente. Supponiamo ad esempio che $x \sim \text{Unif}(-1, +1)$ e $y = x^2$, possiamo approssimare $p(y)$ con un generatore (uniforme) di numeri casuali e facendone il quadrato per poi prendere la DISTRIBUZIONE EMPIRICA

$$p_S(y) = \frac{1}{N_S} \sum_{x=1}^{N_S} \delta(y - y_s). \quad (43)$$

Questo è detto METODO MONTE CARLO.

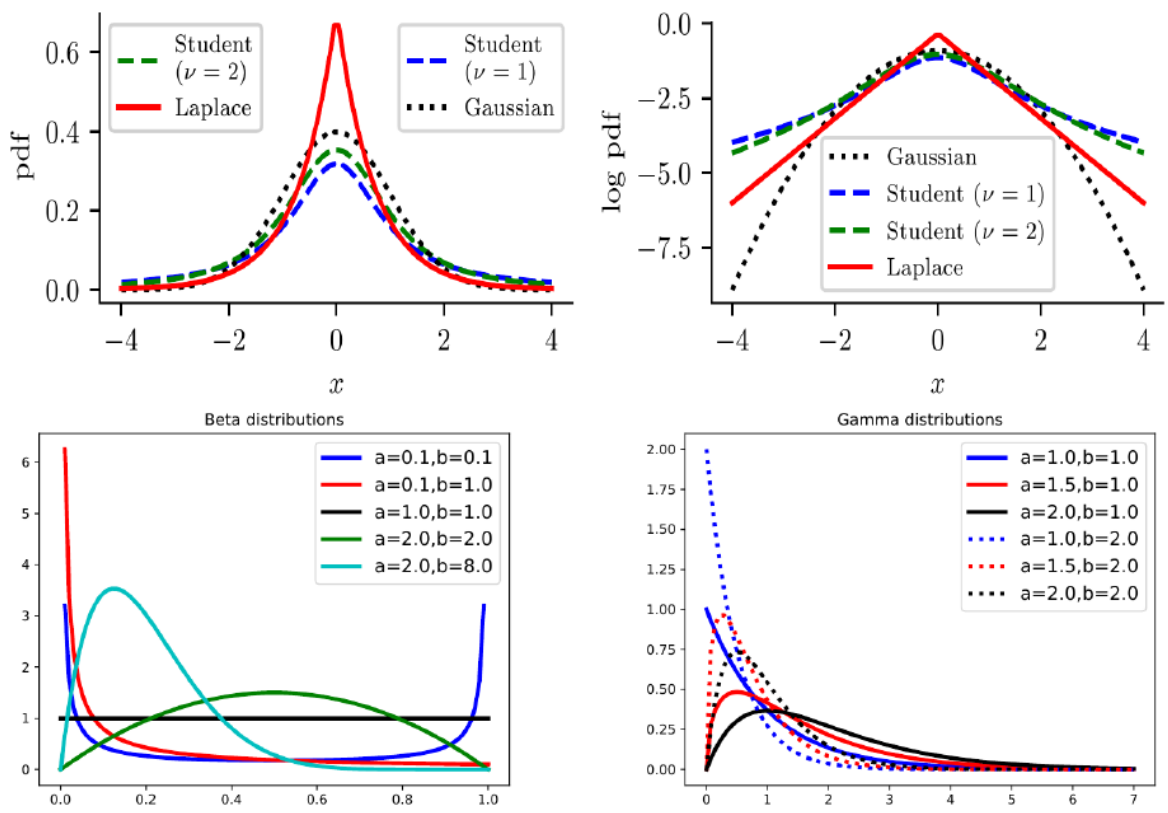


Figura 2: Alcune distribuzioni notevoli.

2.8 Modelli multivariati

Definizione 2.4 (Covarianza). Siano X e Y due variabili. La COVARIANZA è

$$\text{Cov}[X, Y] \equiv \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y], \quad (44)$$

ovvero una matrice D -dimensionale, con $D = \dim(\mathbf{x})$, che contiene le varianze sulla diagonale.

Definizione 2.5. (Correlazione di Pearson) La CORRELAZIONE DI PEARSON tra le due variabili X e Y si definisce come

$$\rho \equiv \text{corr}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}}. \quad (45)$$

Possiamo scrivere

$$\text{Cov}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2] & \cdots & \text{Cov}[X_1, X_D] \\ \text{Cov}[X_2, X_1] & \mathbb{V}[X_2] & \cdots & \text{Cov}[X_2, X_D] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[X_D, X_1] & \text{Cov}[X_D, X_2] & \cdots & \mathbb{V}[X_D] \end{pmatrix} \quad (46)$$

e

$$\text{corr}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mathbb{E}[(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)]}{\sigma_1 \sigma_2} & \cdots & \frac{\mathbb{E}[(x_1 - \mu_1)(x_D - \mu_D)]}{\sigma_1 \sigma_D} \\ \frac{\mathbb{E}[(x_2 - \mu_2)(x_1 - \mu_1)]}{\sigma_2 \sigma_1} & 1 & \cdots & \frac{\mathbb{E}[(x_2 - \mu_2)(x_D - \mu_D)]}{\sigma_2 \sigma_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathbb{E}[(x_D - \mu_D)(x_1 - \mu_1)]}{\sigma_D \sigma_1} & \frac{\mathbb{E}[(x_D - \mu_D)(x_2 - \mu_2)]}{\sigma_D \sigma_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

2.8.1 Osservazioni

- Il fatto che due variabili non siano correlate non vuol dire che siano indipendenti, tuttavia due variabili indipendenti sono necessariamente non correlate;
- correlazione non implica causalità;
- una correlazione che appare simile in diversi set di dati può sparire (o divenire opposta) se i dati sono combinati, questo è noto come *Simpson's paradox*.

2.9 Distribuzione gaussiana multivariata

La definizione che abbiamo dato di distribuzione gaussiana si estende a più variabili. Innanzitutto definiamo la PDF

$$\mathcal{N}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}, \Sigma) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{D/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right\}, \quad (48)$$

dove $\Sigma = \text{Cov}[\mathbf{y}]$.

Supponiamo di avere due variabili aleatorie \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 . Si può definire la distribuzione JOINTLY GAUSSIAN. Con

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \Sigma^{-1}$$

le distribuzioni marginali sono

$$p(\mathbf{y}_1) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_1 | \boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11}), \quad p(\mathbf{y}_2) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_2 | \boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{22}) \quad (49)$$

e la probabilità condizionata

$$p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_1 | \boldsymbol{\mu}_{1|2}, \Sigma_{1|2}), \quad (50)$$

con

$$\boldsymbol{\mu}_{1|2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \quad \Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} = \Lambda_{11}^{-1},$$

queste sono tutte gaussiane.

3 Richiami di statistica

Nella sezione precedente abbiamo assunto come noti i parametri θ , in questa sezione impariamo come è possibile imparare questi parametri a partire dai dati (training set) \mathcal{D} . Come abbiamo visto nell'Esempio 1.1, il problema si riduce a trovare $\hat{\theta}$ tale che minimizzi il misclassification rate, Equazione (7), ovvero:

$$\hat{\theta} \quad \text{t.c.} \quad \mathcal{L}(\hat{\theta}) = \min [\mathcal{L}(\theta)] \equiv \min \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N l(y_n, f(\mathbf{x}_n, \theta)) \right].$$

3.1 Maximum likelihood estimation (MLE)

Definizione 3.1 (Maximum likelihood estimation). Definiamo la MLE, MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION, come il valore di θ che massimizza la probabilità condizionata di aver ottenuto il set di dati \mathcal{D} , ovvero:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} \equiv \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(\mathcal{D} | \theta). \quad (51)$$

Se i dati sono campioni indipendenti della stessa distribuzione, allora possiamo anche scrivere

$$p(\mathcal{D} | \theta) = \prod_{n=1}^N p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n, \theta). \quad (52)$$

Definiamo inoltre la NLL, NEGATIVE LOG-LIKELIHOOD, da usare come loss function come:

$$l(\theta) \equiv -\log p(\mathcal{D} | \theta) = -\sum_{n=1}^N \log p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n, \theta). \quad (53)$$

Con queste definizioni abbiamo che la MLE è data

- per supervised learning da:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} -\sum_{n=1}^N \log p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n, \theta); \quad (54)$$

- per unsupervised learning da:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} -\sum_{n=1}^N \log p(\mathbf{y}_n | \theta). \quad (55)$$

Possiamo giustificare l'uso della MLE pensandola come un'approssimazione del *posterior* Bayesiano dato un *prior* uniforme.

Esempio 3.1. Se abbiamo

$$p(\theta | \mathcal{D}) = \delta(\theta - \hat{\theta}_{\text{MAP}})$$

con $\hat{\theta}$ il posterior, allora

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} -\log p(\theta | \mathcal{D}) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} -\log p(\mathcal{D} | \theta) - \log p(\theta),$$

ed essendo $p(\theta) = 1$ abbiamo

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} -\log p(\mathcal{D} | \theta) = \hat{\theta}_{\text{MLE}}. \quad \square$$

3.1.1 Distribuzione normale

Supponiamo ora di avere una variabile casuale Y distribuita normalmente, i.e. $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, e sia $\mathcal{D} = \{y_n \text{ t.c. } n = 1, \dots, N\}$ un dataset con punti campionati indipendentemente, allora:

$$\begin{aligned} \text{NLL}(\mu, \sigma^2) &= - \sum_{n=1}^{N_D} \log \left[\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y_n - \mu)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{n=1}^{N_D} (y_n - \mu)^2 + \frac{N_D}{2} \log(2\pi\sigma^2). \end{aligned} \quad (56)$$

Ora estremizzando otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \text{NLL}(\mu, \sigma^2) = 0 \iff \hat{\mu}_{\text{MLE}} = \frac{1}{N_D} \sum_{n=1}^{N_D} y_n = \bar{y} \quad (57)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \text{NLL}(\mu, \sigma^2) = 0 \iff \hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2 = \frac{1}{N_D} \sum_{n=1}^{N_D} (y_n - \hat{\mu}_{\text{MLE}})^2 = \frac{1}{N_D} \sum_{n=1}^{N_D} y_n^2 - \bar{y}^2 = s^2 - \bar{y}^2. \quad (58)$$

3.1.2 Distribuzione normale multivariata

Per una distribuzione multivariata i risultati sono analoghi. Abbiamo

$$l(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \log p(\mathcal{D} \mid \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{N_D}{2} \log |\Lambda| = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_D} (\mathbf{y}_n - \boldsymbol{\mu})^T \Lambda (\mathbf{y}_n - \boldsymbol{\mu}) \quad (59)$$

dove $\Lambda = \Sigma^{-1}$ è la PRECISION MATRIX. Dall'estremizzazione segue, come prima, l'empirical mean $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ e l'empirical covariance matrix $\hat{\Sigma}$:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N_D} \sum_{n=1}^{N_D} \mathbf{y}_n = \bar{\mathbf{y}} \quad (60)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N_D} \sum_{n=1}^{N_D} (\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}})(\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (61)$$

3.2 Empirical risk minimization (ERM)

La MLE può essere generalizzata sostituendo la loss function logaritmica NLL con qualunque altra funzione l :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N l(\mathbf{y}_n, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}_n). \quad (62)$$

Questo processo di cambiare loss function è noto come ERM, EMPIRICAL RISK MINIMIZATION.

Esempio 3.2 (ERM per problema di classificazione). In un problema di classificazione avremo una loss function

$$l_{01}(\mathbf{y}_n, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{y}_n = f(\mathbf{x}_n; \boldsymbol{\theta}) \\ 0 & \text{se } \mathbf{y}_n \neq f(\mathbf{x}_n; \boldsymbol{\theta}) \end{cases} \quad (63)$$

dove $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ è un predittore.