ALGORITMI DI ASCESA DUALE PER PROBLEMI DI FACILITY LOCATION

Alessio Di Luzio

PROBLEMI DI FACILITY LOCATION

- Un insieme di Facility U offre un servizio, ogni facility ha un costo di apertura f_u.
- I clienti dell'insieme V devono scegliere a quale facility, tra quelle aperte, connettersi; la connessione di un cliente comporta un costo c_{uv}.
- Siamo interessati a minimizzare i costi totali di erogazione del servizio.
- $y_{uv} = \begin{cases} 1\ se\ il\ cliente\ v\ \text{è}\ connesso\ alla\ facility\ u \\ 0\ altrimenti \end{cases}$
- $x_u = \begin{cases} 1\ se\ la\ facility\ u\ \text{è}\ aperta \\ 0\ altrimenti \end{cases}$

UNCAPACITATED FACILITY LOCATION

Formulazione intera

- min $\left(\sum_{u \in U} \sum_{v \in V} c_{uv} y_{uv} + \sum_{u \in U} f_u x y_u\right)$
- s.t $\sum_{u \in U} y x_{uv} = 1 \quad \forall\, v \in V$
- $y_{uv} \leq x_u \qquad \forall u \in U, v \in V$
- $y_{uv} \in \{0,1\} \qquad \forall u \in U, v \in V$
- $x_u \in \{0,1\} \qquad \forall u \in U$

- E' un problema NP-Hard
- E' essenziale calcolare un Lower Bound di qualità per eseguire in modo efficiente algoritmi di Branch and Bound

Formulazione rilassata

- min $\left(\sum_{u \in U} \sum_{v \in V} c_{uv} y_{uv} + \sum_{u \in U} f_u x_u\right)$
- s.t $\sum_{u \in U} y_{uv} \geq 1 \qquad \forall\, v \in V$
- $y_{uv} \leq x_u \qquad \forall u \in U, v \in V$
- $(x_u \leq 1 \qquad \forall u \in U)$
- $y_{uv} \geq 0, x_u \geq 0 \quad \forall u \in U, v \in V$

- Ci consente sicuramente di calcolare un Lower Bound per il problema intero ….
- Ma nemmeno in questo caso è possibile farlo in modo efficiente

UNCAPACITATED FACILITY LOCATION

Duale del rilassamento lineare

- max $\left(\sum_{v \in V} z_v - \sum_{u \in U} t_u\right)$
- s.t. $z_v - w_{uv} \le c_{uv} \quad \forall u \in U, v \in V$
- $\sum_{v \in V} w_{uv} - t_u \le f_u \quad \forall u \in U$
- $z_v \ge 0, t_u \ge 0, w_{uv} \ge 0 \; \forall u \in U, v \in V$

- Il Lower Bound sul problema Duale è altrettanto difficile da calcolare rispetto al corrispondente rilassamento lineare
- Tuttavia la struttura del Duale ci consente di definire algoritmi euristici efficienti che individuano un ‘buon’ valore della funzione obiettivo

Algoritmi di Ascesa Duale considerati

- DUALOC ‘semplice’ e versione di Erlenkotter [1]
- Primale – Duale (Gupta) [2]

UNCAPACITATED FACILITY LOCATION

DUALOC ‘semplice’ [1]

Inizializzazione: $\bar{z}_v = \min_{u \in U}\{c_{uv}\}\ \forall\, v \in V$

Ripeti $\forall\, \bar{v} \in V$

$\quad \tau_{\bar{v}u} = f_u - \sum_{v \in V - \{\bar{v}\}} \max\{0, \bar{z}_v - c_{uv}\};$

$\quad b_{\bar{v}} = \min_{u \in U}\{c_{u\bar{v}} + \tau_{\bar{v}u} - \bar{z}_{\bar{v}}\};$

$\quad \bar{z}_{\bar{v}} := \bar{z}_{\bar{v}} + b_{\bar{v}};$

end;

- Calcola un buon Lower Bound
- Tuttavia è evidente la dipendenza della soluzione dall’ordinamento dell’insieme dei clienti

UNCAPACITATED FACILITY LOCATION

Inizializzazione: $\bar{z}_v = \min_{u \in U}\{c_{uv}\}\ \forall\, v \in V,\ i := 1;$

Passo (i)

$\bar{V} = V;$

Ripeti

$\quad \bar{v} = \operatorname{argmin}_{v \in \bar{V}}\{h(v)\};$

$\quad \bar{V} := \bar{V} - \{\bar{v}\};$

$\quad \tau_{\bar{v}u} = f_u - \sum_{v \in V - \{\bar{v}\}} \max\{0, \bar{z}_v - c_{uv}\};$

$\quad b_{\bar{v}} = \min_{u \in U}\{c_{u\bar{v}} + \tau_{\bar{v}u} - \bar{z}_{\bar{v}}\};$

$\quad b'_{\bar{v}} = \min\left\{b_{\bar{v}}, \min_{\substack{u \in U \\ c_{u\bar{v}} - \bar{z}_{\bar{v}} > 0}} \{c_{u\bar{v}} - \bar{z}_{\bar{v}}\} \right\};$

fino a che $b'_{\bar{v}} > 0$ **oppure** $\bar{V} = \emptyset$

Se $\boldsymbol{b'_{\bar{v}} = 0} \Rightarrow STOP.$

Altrimenti

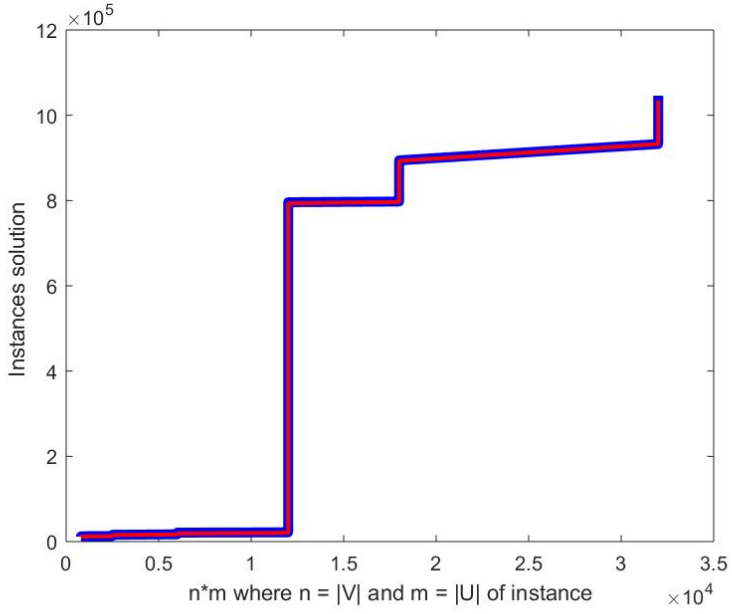
$\quad \bar{z}_{\bar{v}} := \bar{z}_{\bar{v}} + b'_{\bar{v}};$

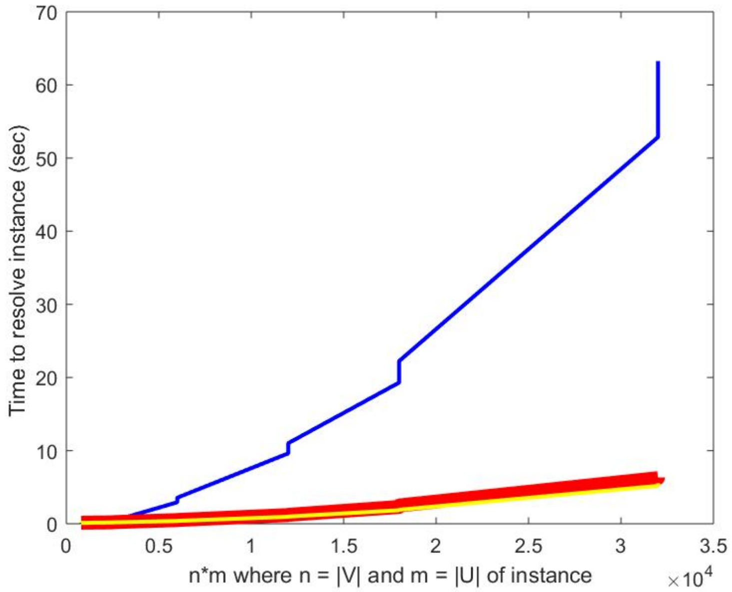
$\quad i := i + 1;$

Vai al Passo (i);

DUALOC di Erlenkotter [1]

- Rispetto alla versione semplificata riduce la dipendenza dall'ordinamento dell'insieme dei clienti
  $h(v) = |\{u : \bar{z}_v \geq c_{uv}\}|$
- 'Addolcisce' l'incremento calcolato in ogni iterazione amumentando la precisione della soluzione
- Uno dei metodi più efficaci per calcolare LB per UFL

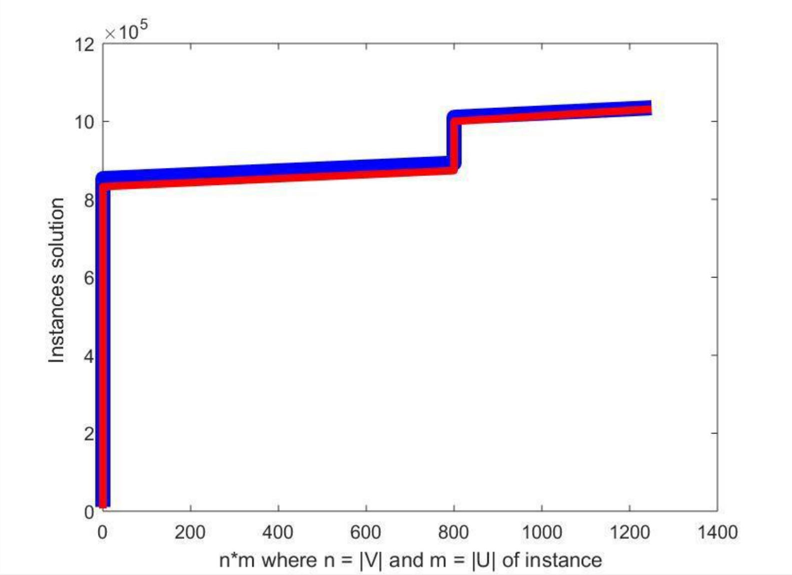


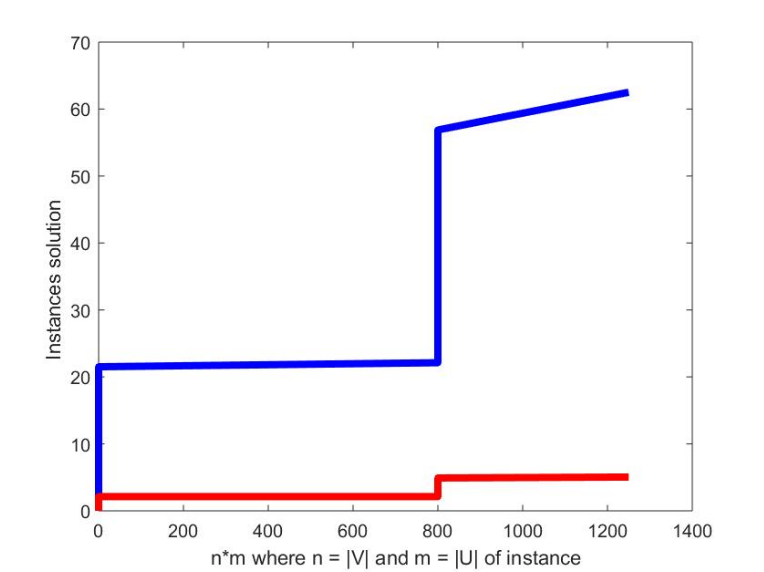


UNCAPACITATED FACILITY LOCATION

DUALOC vs AMPL & Cplex

- Il Lower Bound calcolato sulle istanze di test conferma l'ipotesi di efficienza e bontà del DUALOC
- Nel grafico in alto in rosso la soluzione ottima calcolata con il solver Cplex e in blu quella ottenuta a seguito dell'esecuzione dell'algoritmo DUALOC
- Tuttavia per istanze di dimensioni grandi le prestazioni del DUALOC sembrerebbero nettamente peggiori di quelle di AMPL (grafico in basso)

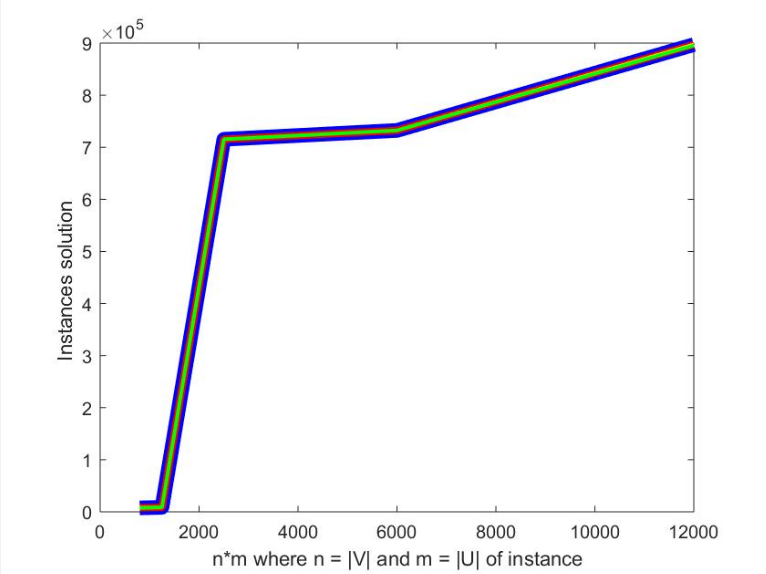


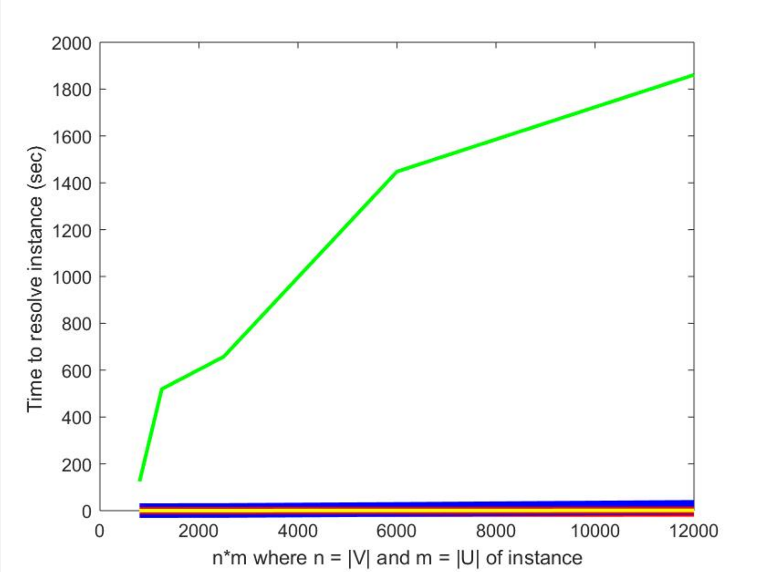


UNCAPACITATED FACILITY LOCATION

DUALOC di Erlenkotter vs DUALOC 'semplice'

- La soluzione calcolata dalla versione 'semplificata' del DUALOC è effettivamente peggiore rimanendo pure sempre di ottima qualità come si vede nel primo grafico in cui la linea BLU è il valore della soluzione calcolato dalla versione di Erlenkotter mentre quella rossa è il valore della soluzione calcolato dalla versione 'semplice'.
- Tuttavia il tempo di esecuzione della versione semplificata è nettamente inferiore infatti l'algoritmo di Erlenkotter ha un'esecuzione volutamente 'rallentata' per favorire il calcolo di un Bound preciso





UNCAPACITATED FACILITY LOCATION

DUALOC vs Algoritmo Primale-Duale ([2])

L’algoritmo primale duale in ogni iterazione incrementa tutte le variabili duali, traendo conclusioni rispetto al Primale.

Infatti durante l’esecuzione si blocca la crescita delle variabili legate a clienti assegnati a facility definite temporaneamente aperte

Ad ogni iterazione quindi il valore di incremento Δ viene calcolato tenendo conto di tutti i vincoli duali (esclusi quelli relativi a clienti già assegnati e/o facility già aperte).

Il risultato è un notevole rallentamento dell’esecuzione dell’algoritmo, come testimoniato dal grafico in alto in cui la linea Verde rappresenta il tempo di esecuzione dell’algoritmo Primale-Duale mentre quella blu il tempo di esecuzione del DUALOC (Le linea Rossa e Gialla sono per rispettivamente il solver AMPL sul problema intero e sul problema rilassato).

Tutta via nel grafico in basso si mostra la notevole precisione dell’algoritmo Primale-Duale che per istanze metriche garantisce una soluzione 3-approssimata.

SINGLE SOURCE CAPACITATED FACILITY LOCATION

Estensione dell'UFL in cui ogni cliente ha una domanda d_v da soddisfare e ogni facility una capacità K_u.

Formulazione intera

$$
\begin{array}{lll}
\min & \left(\sum_{u\in U}\sum_{v\in V} c_{uv}y_{uv} + \sum_{u\in U} f_u x_u\right) & \\
\text{s.t} & \sum_{u\in U} y_{uv} = 1 & \forall\, v\in V \\
 & \sum_{v\in V} d_v\, y_{uv} \le K_u x_u & \forall u\in U, v\in V \\
 & y_{uv} \in \{0,1\} & \forall u\in U, v\in V \\
 & x_u \in \{0,1\} & \forall u\in U
\end{array}
$$

Duale del rilassamento lineare

$$
\begin{array}{lll}
\max & \left(\sum_{v\in V} z_v - \sum_{u\in U} t_u\right) & \\
\text{s.t.} & z_v - w_u d_v \le c_{uv} & \forall u\in U, v\in V \\
 & q_u w_u - t_u \le f_u & \forall u\in U \\
 & z_v \ge 0, t_u \ge 0, w_u \ge 0 & \forall u\in U, v\in V
\end{array}
$$

- Possiamo seguire il ragionamento che ha portato al DUALOC e cercare di adattare l'algoritmo per fornirci nuovamente un buon LB

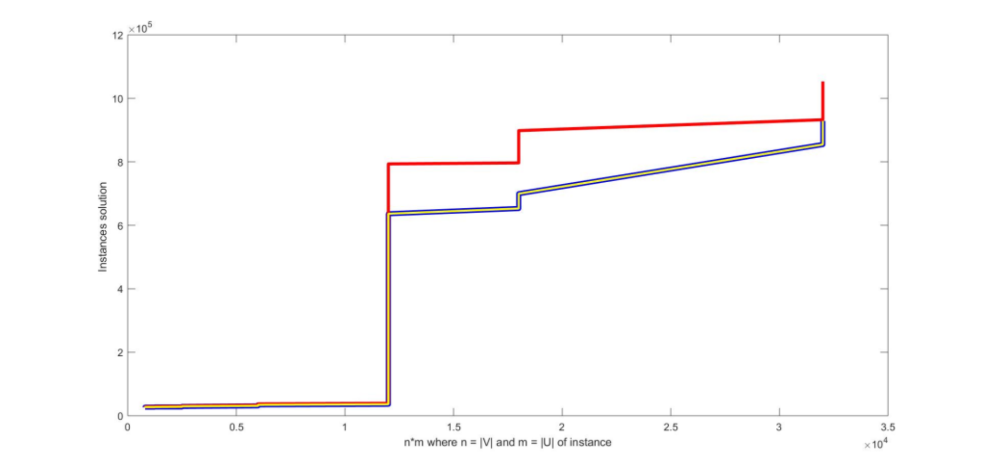
SINGLE SOURCE CAPACITATED FACILITY LOCATION

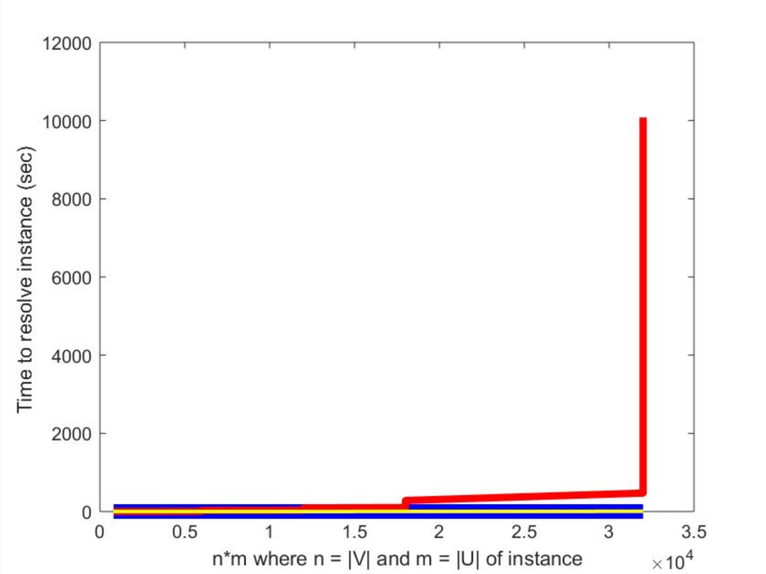
1 *Inizializzazione:* $\bar{z}_v = min_{u \in U}\{c_{uv}\} \; \forall \, v \in V$
2 $\bar{V} = V;$
3 ***Ripeti***
4 $\quad \bar{v} = argmin_{v \in \bar{V}}\{h(v)\};$
5 $\quad \bar{V} := \bar{V} - \{\bar{v}\};$
6 $\quad b_{\bar{v}} = min_{u \in U}\left\{\frac{q_u}{d_v} * f_u - z_v + c_{uv}\right\};$
7 $\quad \overline{z_{\bar{v}}} := \overline{z_{\bar{v}}} + b_{\bar{v}}\,;$
8 **fino a che** $\bar{V} = \emptyset$

Sono stati apportati due cambiamenti principali

- Il valore di blocco è calcolato in modo differente (linea 6) per venire incontro alla nuova formulazione dei vincoli duali.
- A differenza del DUALOC di Erlenkotter si è scelto di incrementare ad ogni iterazione la variabile corrente del massimo Δ onde evitare un eccessivo rallentamento dell’algoritmo.

SINGLE SOURCE CAPACITATED FACILITY LOCATION





DUALOC adattato a SSCFL vs AMPL & Cplex

- **Come è evidente dal grafico in alto , la soluzione calcolata dal DUALOC adattato (linea BLU) è sensibilmente peggiore di quella del solver AMPL sul problema intero (linea ROSSA) ma del tutto aderente a quella del problema rilassato (linea GIALLA)**
- **Le prestazione del DUALOC adattato sono significativamente migliori di quelle del solver AMPL sul problema intero (grafico inferiore)**

RIFERIMENTI

- [1] A. Sassano, Modelli e algoritmi della ricerca operativa, FrancoAngeli, 1999, Milano, pp. 267 – 308.
- [2] A. Gupta, V. Gupta , "Lecture 5: Primal-Dual Algorithms and Facility Location", 2008, pp. 1 - 7.