Linguaggi

Alessio Gjergji

Anno accademico 2022 - 2023

Indice

Capitolo 1

Introduzione al corso

1.1 Come nascono i linguaggi

Per arrivare a comprendere l'importanza dello studio dei linguaggi di programmazione da un punto di vista generale, è importante capire quali necessità hanno portato alla nascita e all'evoluzione dei linguaggi di programmazione.

Il principale problema dell'informatica consiste nel voler far eseguire ad una macchina **algoritmi** che manipolano **dati**:

Ma cosa è una macchina su cui possiamo eseguire programmi che manipolano dati? In generale è una macchina **programmabile**, ovvero un calcolatore che può eseguire insiemi di istruzioni (*passi di calcolo dell'algoritmo*) che chiamiamo programmi, ricevuti come input (**macchine universali**.)

In particolare i computer moderni hanno un'architettura che nasce dall'architettura di Von Neumann. Questa è una tipologia di architettura hardware per macchine programmabili, con programma memorizzato, dove i dati ed istruzioni condividono la stessa area di memoria.

Quindi per operare su questa architettura di che linguaggi abbiamo bisogno? Essenzialmente dobbiamo istruire la CPU (*eseguire algoritmi*) per operare sui dati in memoria. È proprio la struttura essenziale di questa architettura che ha messo al centro il concetto di linguaggio di programmazione la cella di memoria. Comunemente ad esempio, anche a livello formale, lo stato di esecuzione di una macchina è descritto attraverso i valori contenuti nelle sue celle di memoria.

Il primo linguaggio che permette di programmare tale architettura è quello che si basa sull'implementazione stessa dell'architettura, ovvero solo sulla base del funzionamento degli elementi hardware che la costituiscono e che, comportandosi come interruttori possono trovarsi solo in due stati: acceso e spento. La programmazione con schede perforare si basa esattamente su questo linguaggio a due valori, ovvero il linguaggio binario.

Di fatto la macchina hardware è in grado di interpretare solo il linguaggio **binario**, ovvero un linguaggio costituito esclusivamente da stringhe di bit.

1.1.1 Dal linguaggio binario ai linguaggio ad alto livello

Abbiamo osservato che nell'architettura hardware dari e programmi condividono la stessa area di memoria, questo significa anche che a basso livello sono rappresentati nello stesso modo, con lo stesso linguaggio binario. In altre parole **dati e istruzioni hanno lo stesso formato**: una stringa di bit può essere sia un dato che una o più istruzioni.

Quindi il linguaggio binario è un linguaggio di programmazione perché permette di programmare una macchina, ma chi lo implementa deve essere in grado di distinguere stringhe che rappresentano dati da stringhe che rappresentano istruzioni che manipolano dati.

La possibilità di vedere i programmi come dati passati in input ad una macchina (*universale*) è stato un passaggio fondamentale nella storia dell'informatica per avviare al concetto di macchina programmabile, ma allo stesso tempo ha comportato la difficoltà intrinseca di riuscire a distinguere dati e istruzioni, in un linguaggio fatto di soli due simboli. Difficoltà che ad esempio rende molto difficile il processo di *disassembly* e di *decompilazione*. Infatti, dati e istruzioni, pur avendo la stessa rappresentazione a livello macchina, vanno trattati in modo sostanzialmente diverso: il dato viene manipolato, l'istruzione viene interpretata.

Per queste ragioni abbiamo bisogno di linguaggi diversi da quello binario, linguaggi che un essere umano possa capire e manipolare, ma allo stesso tempo che siano interpretabili dalla macchina. Questi saranno i linguaggi ad alto livello che in modo poi automatico, mediante compilazione o interpretazione vengono eseguiti a livello macchina.

1.1.2 Cosa significa programmare

Per quanto detto, un linguaggio di programmazione deve permettermi di **agire** sulla macchina per manipolare **dati**, quindi un linguaggio di programmazione deve essere uno **strumento che permette di descrivere algoritmi e rappresentare dati**.

Un linguaggio di programmazione deve per prima cosa permettere di superare la difficoltà di distinguere dati da istruzioni, fornendo una chiara distinzione tra dato e istruzione.

Algoritmi

Un algoritmo è una sequenza di passi elementari il cui significato è il calcolo di una funzione. In altre parole, un algoritmo scompone un calcolo complesso in passi elementari di computazione. Un algoritmo è quindi un concetto astratto, e la sua forma concreta è la definizione di un programma, ovvero una sequenza finita di istruzioni.

Ci servono quindi strumenti per scrivere precisamente programmi che descrivono/implementano algoritmi. I **linguaggi di programmazione** nascono quindi proprio per questo: sono **linguaggi formali le cui frasi sono programmi, ovvero forme concrete di algoritmi eseguibili/interpretabili da una macchina**.

Algoritmo

Un algoritmo è quindi una sequenza finita di passi primitivi di calcolo descritti mediante una frase ben formata (*programma*) in un linguaggio di programmazione.

Quindi per specificare ed eseguire un algoritmo abbiamo bisogno di scrivere programmi e per scrivere programmi abbiamo bisogno di strumenti che di permettono di farlo, ovvero di linguaggi di programmazione.

Va osservato che non esiste una corrispondenza precisa tra programmi e algoritmi:

- Un programma non è necessariamente un algoritmo, in quanto una frase grammaticalmente corretta può non avere significato.
- Lo stesso algoritmo può avere concretizzazioni diverse, ovvero lo stesso algoritmo può essere implementato da infiniti programmi.

A questo punto si aprono diverse questioni che verranno viste in seguito:

- Dobbiamo stabilire le regole che permettono di costruire frasi grammaticalmente corrette in un linguaggio: **Grammatiche Context-free**.
- Dobbiamo stabilire gli elementi base (*terminali della grammatica*) di cui abbiamo bisogno per definire i programmi in un linguaggio di programmazione: **Categorie sintattiche**.
- Il significato di quale categoria sintattica descrive l'insieme dei passi elementari di computazione **Comandi**.

Dati

I dati sono informazioni memorizzate concretamente in celle di memoria e astratte in elementi che il linguaggio di programmazione può manipolare: le **variabili**.

1.1.3 Cosa sono i linguaggi di programmazione

Il programma è la concretizzazione di un algoritmo che manipola dati, manca però un altro ingrediente, ovvero la **trasformazione** di dati che l'algoritmo vuole eseguire, questa trasformazione è il significato dell'algoritmo, la semantica del programma. Quindi, dare semantica ad un programma significa descrivere matematicamente l'effetto dell'esecuzione del programma sui dati.

Il programma costituisce ciò che chiameremo **sintassi**, mentre l'effetto dell'esecuzione del programma, la trasformazione dei dati eseguita, costituisce ciò che chiameremo **semantica**.

Le trasformazioni di dati sono funzioni sui dati e, in quanto tali, sono notoriamente descrivibili mediante linguaggio matematico, il quale è sicuramente rigoroso e formale. Questo significa che il linguaggio della matematica può essere considerato linguaggio di programmazione (*di fatto esiste un paradigma detto funzionale che una le funzioni come strumento di computazione*), ma ha tre importanti mancanze collegate tra loro:

1. non sempre permette rappresentazioni finite di oggetti infiniti;
2. non sempre fornisce direttamente un metodo di calcolo di ciò che si vuole rappresentare;
3. non permette di rappresentare titti i problemi calcolabili.

Consideriamo il punto (1), questo è importante perché il programma è necessariamente un oggetto finito, mentre il calcolo di funzione richiede l'esecuzione di un insieme di passi primitivi, che però possono essere infiniti. Alla base della teoria della calcolabilità troviamo proprio la necessità di ammettere computazioni divergenti per poter catturare tutto ciò che effettivamente può calcolare.

Questo significa che dobbiamo pensare al programma come ad una rappresentazione finita di un insieme, potenzialmente infinito, di passi primitivi di computazione.

> I linguaggi di programmazione devono dare specifica di oggetti potenzialmente infiniti dove la componente finita è la sintassi, mentre la componente infinita è la semantica.

Purtroppo però, senza la logica proposizionale, la matematica non rappresenta lo strumento migliore perché può fallire nel rappresentare entità infinite.

Purtroppo, anche la logica proposizionale non basta a descrivere un algoritmo. Consideriamo infatti il punto (2). Quando si parla di algoritmi per calcolare funzioni/trasformazioni, è chiaro che intendiamo definire i passi di computazione primitivi necessari per calcolare la trasformazione la trasformazione.

Infatti il linguaggio logico in generale è costruito da regole di inferenza e assiomi. Quando forniamo una frase in un linguaggio logico, implicitamente intendiamo dire che possiamo dimostrare se la frase è vera o falsa. Quindi la validità di un teorema nella logica è definibile mediante un algoritmo che utilizza come passo primitivo di computazione l'applicazione di regole di inferenza, tipo modus ponens. Ovvero programmare, in tal caso, vuol dire fornire logica nel quale il calcolo da eseguire consiste nella dimostrazione/confutazione di un teorema nella logica data.

> I linguaggi di programmazione devono descrivere i passi di un calcolo.

Arriviamo quindi al punto (3), infatti è stata dimostrata l'incompletezza del linguaggio logico formale (*Teorema di incompletezza di Godel*), perché esistono sempre oggetti infiniti che non hanno rappresentazione finita e che quindi non possono essere il risultato di una dimostrazione logica (*problemi semi-decidibili e non decidibili*). Il problema è che la logica non è in grado di rappresentare in modo finito dimostrazioni infinite, ovvero computazioni che richiedono un numero infinito di passi di esecuzione, ovvero di catturare il concetto di Turing-Calcolabile.

> I linguaggi di programmazione devono descrivere calcoli potenzialmente infiniti.

Ecco quindi che abbiamo bisogno di un modello di calcolo basato su linguaggi formali/artificiali che permetta di rappresentare in modo finito un numero potenzialmente infinito di passi di computazione, e questi sono tutti i modelli Turing completi, tra i quali ci sono i linguaggi di programmazione che conosciamo.

Quindi sappiamo che esistono calcoli non rappresentabili neanche dalla logica, e che comunque anche la logica, seppur permettendo la rappresentazione finita di oggetti infiniti, e seppur permettendo la descrizione di passi di calcolo, non ha strumenti adeguati per specificare rigorosamente un qualunque processo di computazione.

Linguaggio Matematico

Notazione rigorosa per rappresentare funzioni, ma non oggetti infiniti e computazioni, ovvero passi di calcolo.

Linguaggio Logico

Regole e assiomi rendono possibile specificare il processo di computazione, e permettere di rappresentare formalmente oggetti infiniti in modo finito, ma non computazioni infinite.

1.2 Linguaggi di programmazione

Linguaggio di programmazione

Permette di specificare in modo accurato esattamente le primitive del processo di computazione, con rigorosità e la potenza della logica.

A partire dagli anni '30, ovvero da quando Hilbert pose il problema dell'espressività dei linguaggi formali, i matematici hanno affrontato il problema di formalizzare il concetto di algoritmo cercando di caratterizzare cosa è possibile specificare in modo algoritmico e cosa no. Questo ha portato alla costruzione di vari modelli di computazione sviluppati con strumenti diversi si sono dimostrati essere equivalenti tra loro, nonché equivalenti a ciò che oggi chiamiamo linguaggi di programmazione (*tesi di Church*).

Questo ci dice, almeno ciò che ad oggi consideriamo essere un processo di calcolo, i linguaggi di programmazione sono lo strumento più potente che possiamo avere a disposizione per implementare algoritmi, ovvero per far eseguire processi di calcolo ad una macchina programmabile.

Se da un lato non esiste una definizione formale di cosa rende un linguaggio formale un linguaggio di programmazione, dall'altro lato chiunque abbia programmato è in grado di capire se un linguaggio è o meno un linguaggio di programmazione. Tale vuoto può solo essere colmato comprendendo a fondo quali elementi costituiscono in generale un linguaggio di programmazione (*quelle che chiameremo categorie sintattiche*) e quale ruolo ha nel linguaggio ognuno di questi elementi.

Quindi, per prima cosa dobbiamo comprendere cosa ha determinato la struttura dei linguaggi di programmazione moderni, e quindi quali strumenti di deve offrire un linguaggio per essere un linguaggio di programmazione.

1.2.1 Progettare linguaggi

L'architettura base dei computer ha avuto un effetto determinante nella progettazione dei linguaggi moderni di programmazione. La maggior parte dei linguaggi sviluppati negli ultimi 50 anni sono stati sviluppati attorno all'architettura della macchina di Von Neumann: nascono così i linguaggi imperativi.

Il contesto in cui il linguaggio deve operare determina le funzionalità che il linguaggio deve gestire efficacemente:

- Applicazioni scientifiche (*grande numero di computazioni floating-point; uso di array*: **Fortran**).
- Applicazioni economiche (*produrre report, usare numeri decimali e caratteri*: **COBOL**).
- Intelligenza artificiale (*manipolazione di simboli invece che di caratteri; uso di liste linkate*: **LISP**).
- Programmazione di sistemi (*necessita efficienza per l'uso continuo*: **C**).
- Web Software (*collezione eclettica di linguaggi:*):
  - markup: **HTML**;
  - scripting **PHP**;
  - general-purpose: **PHP, JAVA**.

Nuove metodologie e nuove esigenze hanno portato all'estensione di linguaggi esistenti ma anche allo sviluppo di nuovi paradigmi e nuovi linguaggi di programmazione. Si pensi ad esempio all'evoluzione della programmazione orientata agli oggetti.

Aspetti di progettazione: Leggibilità

> Leggibilità (*Readabilitiy*): sintassi chiara, nessuna ambiguità, facilità di lettura e comprensione dei programmi.

É importante poter leggere il codice come un libro, sappiamo che il codice contiene sempre errori, che possono essere scoperti anche successivamente e da altri rispetto a chi ha scritto il codice, quindi altri devono poter leggere e comprendere il codice. Inoltre, altri potrebbero estendere il software per riutilizzare, per aggiungere nuove caratteristiche o semplicemente mantenerlo. In questi casi la leggibilità è fondamentale.

Contribuiscono alla leggibilità:

- La generale semplicità di un linguaggio. Complicano i linguaggi la possibilità di poter fare la stessa cosa in più modi diversi.
- Il significato di un elemento di un linguaggio è ortogonale se è indipendente dal contesto di utilizzo all'interno del programma.
- La presenza di strumenti per la definizione di tipi di dati e strutture dati.
- La struttura della sintassi ha effetto sulla leggibilità.

Aspetti di progettazione: Scrivibilità

Scrivibilità (*Writability*): facilità di utilizzo di un linguaggio per creare programmi, facilità di analisi e verifica dei programmi.

É una misura della facilità di utilizzo di un linguaggio per creare programmi per una specifica classe di problemi. Ciò che solitamente ha effetto sulla leggibilità ha anche effetto sulla scrivibilità.

- Semplicità e ortogonalità: la presenza di tanti costrutti fa si che il programmatore possa non conoscerli tutti e quindi non usarli adeguatamente, quindi pochi costrutti, un piccolo numero di primitive, un piccolo insieme di regole per combinarle.
- Supporto all'astrazione: astrazione è un concetto chiave nei moderni linguaggi. Consiste nell'abilità di definire e usare strutture o operazioni complesse in modi che permettono di ignorare i dettagli. Fondamentalmente esistono due tipi di astrazione: processi (*uso di sottoprogrammi*) e dati.
- Espressività: può riferirsi a diverse caratteristiche, ad esempio mettere a disposizione un insieme di modi relativamente convenienti per specificare operazioni, oppure applicabilità e numero di operazioni e di funzioni predefinite.

Aspetti di progettazione: Affidabilità e costo

Affidabilità (*Reliability*): conformità alle sue specifiche.

Costo: costo complessivo di utilizzo.

Un programma è affidabile se soddisfa le specifiche il tutte le condizioni.

- Il type checking (*controllo degli errori di tipo*) è importante per l'affidabilità. Spesso eseguito a tempo di compilazione, essendo un procedimento costoso. Inoltre prima gli errori vengono rilevati e meno costoso è ripararli.
- Gestione delle eccezioni.
- La presenza di potenziali aliasing è sicuramente un potenziale problema.

1.2.2 Classificazione dei linguaggi

I linguaggi possono essere classificati per: metodo di computazione e per caratteristiche.

Per metodo di computazione:

- Basso livello: i linguaggi a basso livello hanno caratteristiche specifiche dipendenti dall'architettura che si sta programmando:
  - Il linguaggio binario: già trattato;
  - L'Assembly: linguaggio strutturato.
- Alto livello: i linguaggi ad alto livello permettono una programmazione strutturata in cui dati ed istruzioni hanno rappresentazioni diverse.
  - I **linguaggi imperativi** descrivono come concetto chiave l'elemento fondamentale dell'architettura di Vonn Neumann, ovvero la cella di memoria. In particolare il concetto di variabile è l'astrazione logica della cella, mentre l'assegnamento è l'operazione primitiva di modifica della cella di memoria e quindi dello stato della macchina. Nei linguaggi imperativi si eseguono assegnamenti, che vengono controllati in modo sequenziale, condizionale e ripetuti.
  - I **linguaggi funzionali** sono i più vicini alla matematica, ovvero descrivono i passi di calcolo come funzioni matematiche e quindi compongono e applicano funzioni. Quindi una variabile è come nella matematica, semplicemente un nome per qualcosa. Non può cambiare nel tempo, durante la computazione.
  - I **linguaggi logici** usano la logica, ovvero pattern matching e unificazione/sostituzione come passo di calcolo primitivo.

Per caratteristiche: Per buona parte degli anni '50 e '60 lo sviluppo dei linguaggi di programmazione si è focalizzato sullo studio delle caratteristiche di base: strutture di base di controllo e per i dati efficienza nell'esecuzione. Una volta fissate queste caratteristiche di base, negli anni '70 e '80 la maggior parte della concentrazione si è focalizzata sulle caratteristiche aggiuntive. Estensioni significa che le strutture di base rimangono le stesse, ma ad esse si aggiungono caratteristiche nuove che permettono di migliorare la soluzione di specifici problemi. Small Talk 80 arriva ad aggiungere il concetto di classe/oggetto. Le caratteristiche studiate per estendere le strutture base sono proprio quelle viste.

1.3 Implementare linguaggi

Implementare un linguaggio, significa renderlo comprensibile alla macchina da programmare e che quindi deve eseguire i programmi. Abbiamo detto che fondamentalmente le macchine su cui sono stati progettati i primi linguaggi si basano sull'architettura di Von Neumann, quindi per capire l'implementazione dei linguaggi di programmazione dobbiamo partire dal funzionamento di tali macchine.

Il funzionamento si basa su ripetizione di un ciclo che costituisce **l'interprete** del linguaggio che la macchina riconosce:

- Viene letta l'istruzione dalla memoria.
- Vengono leggi gli operandi.
- Viene memorizzato il risultato.

Quando si opera con un linguaggio di programmazione su una macchina, in realtà usiamo esattamente le primitive che quella macchina ci mette a disposizione, ovvero le primitive che la macchina è in grado di interpretare in termini di operazioni/azioni che si possono eseguire direttamente nella macchina.

Quando usiamo un linguaggio di programmazione ad alto livello lavoriamo su una macchina che interpreta le istruzioni del linguaggio di programmazione ed ignoriamo completamente l'esistenza della macchina fisica e del suo linguaggio binario.

1.3.1 Macchina astratta

Implementare un linguaggio significa quindi realizzare la macchina che interpreta il linguaggio.

> Dato un linguaggio L di programmazione, la macchina astratta M_L per L è un insieme di strutture dati ed algoritmi che permettono di memorizzare ed eseguire i programmi scritti in L.

La collezione di strutture ed algoritmi in particolare serve per: acquisire la prossima istruzione; gestire le chiamate ed i ritorni dai sottoprogrammi; acquisire gli operandi e memorizzare i risultati delle operazioni; mantenere le associazioni fra nomi e valori denotati; gestire dinamicamente la memoria. Quindi la macchina astratta è la combinazione di una memoria che immagazzina i programmi e di un interprete che esegue òe istruzioni dei programmi.

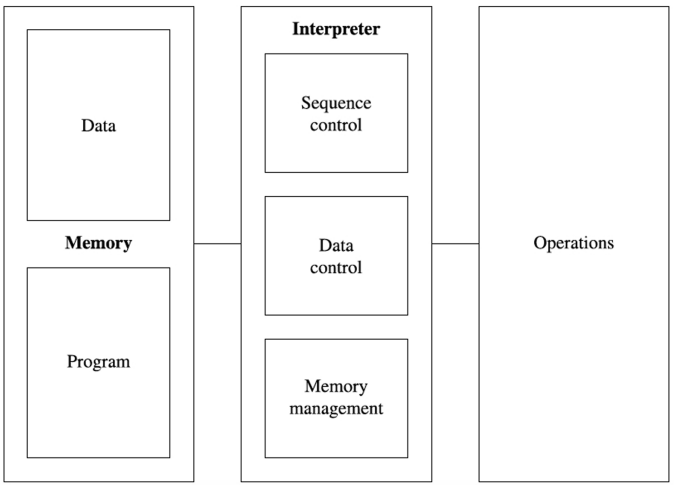


Figura 1.3.1: Macchina astratta

Il linguaggio L, interpretato dalla macchina M_L viene anche chiamato linguaggio macchina. Formalmente è l'insieme di tutte le stringhe interpretabili da M. Ai componenti di M corrispondono opportuni componenti di L_M: tipi di dati primitivi e costrutti di controllo.

I programmi scritti nel linguaggio macchina di M saranno memorizzati nelle strutture dati della memoria della macchina per distinguerli da altri dati primitivi su cui opera la macchina. Un esempio di macchina astratta è la macchina hardware.

1.3.2 Dove realizzare la macchina astratta

Una qualsiasi macchina per L, per essere eseguita, deve prima o poi utilizzare qualche dispositivo fisico che concretamente esegue le istruzioni di L. Questo significa che in qualunque sistema informatico esiste sempre una macchina hardware, ma non significa che tutte le macchine sono realizzate a livello hardware, anzi, per poter controllare la complessità di un sistema informatico, la realizzazione della macchina astratta può avvenire a vari livelli, generalmente sovrapposti, a partire da quello fisico. Quindi le macchine astratte possono essere realizzate a diversi livelli:

1. Hardware: sempre possibile e concettualmente semplice. Si realizza mediante dispositivi fisici, e il linguaggio macchina è il linguaggio binario. L'esecuzione è veloce, ma i programmi ad alto livello sono molto lontani dalle funzionalità elementari a basso livello. Inoltre è difficile da modificare, viene usata per sistemi dedicati.
2. Firmware: Consiste nella simulazione delle strutture dati e degli algoritmi in M mediante microprogrammi. Il linguaggio macchina microprogrammato è a basso livello e consiste ddi microistruzioni che specificano semplici operazioni di trasferimento dati tra registri, da e per la memoria principale ed eventualmente attraverso circuiti logici che realizzano operazioni aritmetiche. I microprogrammi risiedono in speciali aree di memoria di sola lettura. Veloce e più flessibile della realizzazione hardware.
3. Software: realizzare delle strutture dati e degli algoritmi di M mediante programmi scritti in un altro linguaggio L' che possiamo supporre già implementato. Ovvero, avendo la macchina astratta per L', possiamo realizzare quella per L mediante opportuni programmi scritti in L' che interpretano i costrutti di L simulando le funzionalità di M per L. Riduce la velocità, ma aumenta la flessibilità.

1.3.3 Livelli di astrazione

Per permettere l'uso di linguaggi di programmazione ad alto livello, controllando la complessità della macchina fisica e del suo vero linguaggio, quello binario, ai sistemi software è stata data una struttura suddivisa a livelli di astrazione cooperanti ma sequenziali e indipendenti: ciascun livello è definito da un linguaggio L che è l'insieme delle istruzioni che il livello mette a disposizione per i livelli successivi/superiori. Tutte le istruzioni di un linguaggio ad un livello $i - esimo$ sono implementate da programmi a livello $j < i$.

1.3.4 Come realizzare la macchina astratta

Per implementare un linguaggio L dobbiamo realizzare una macchina astratta M_L, in grado di eseguirlo. M_L è quindi un dispositivo che permette di eseguire programmi scritti in L, ma la corrispondenza non è biunivoca: una macchina astratta corrisponde univocamente ad un linguaggio, il suo linguaggio macchina, ma dato un linguaggio L esistono infinite macchine astratte che hanno come linguaggio macchina esattamente L. Tali macchine differiscono nel modo in cui la macchina astratta viene realizzata e nelle strutture dati utilizzate. La realizzazione della macchina astratta dipenderà quindi dalle funzionalità che le sono messa a disposizione dai livelli sottostanti (*tranne il livello hardware*).

Quindi abbiamo un linguaggio L da implementare e una macchina astratta M_{L_0} a disposizione, che è macchina ospite. M_{L_0} è il livello su cui vogliamo implementare L e che mette a disposizione di M_L le sue funzionalità.

Realizzare M_L consiste quindi in realizzare una macchina che "traduce" L in L_0, ovvero che interpreta tutte le istruzioni di L come sequenza di istruzioni di L_0. Possiamo quindi distinguere due modalità radicalmente diverse a seconda del fatto che si abbia una traduzione "implicita" realizzata dalla simulazione dei costrutti di M_L mediante programmi scritti in L_0 (**soluzione interpretativa**), oppure si abbia una traduzione "esplicita" dei programmi di L in corrispondenti programmi di L_0 (**soluzione compilativa**).

1.3.5 Interprete

Un interprete è un programma $int^{L_0,L}$ che esegue, sulla macchina astratta per L_0, programmi P^L, scritti in L, su un fissato input $in \in D$. In altre parole, un interprete è una **macchina universale** che per un programma e un suo input, lo esegue su quell'input, usando solo funzionalità messe a disposizione dal livello sottostante.

Interprete da L a L_0

Dato $P^L \in Pgro^L$ e $in \in D$, un interprete int^{L,L_0} per L su L_0 è un programma tale che $[\![int^{L,L_0}]\!] : (Prog^L x D) \to D$ e

$$[\![int^{L,L^0}]\!](P^L, in) = [\![P^L]\!](in)$$

Si osserva che un problema è di fatto una sequenza di istruzioni rappresentate da simboli. Questo significa che anche ad alto livello può essere assimilato al concetto di dato, e quindi può essere passato come input.

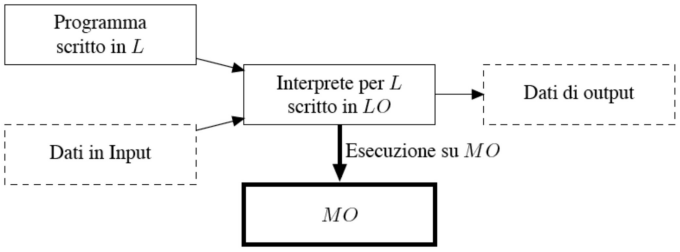


Figura 1.3.2: Soluzione interpretativa

In questo caso non abbiamo una traduzione esplicita, ma solo un percorso di decodifica. L'interprete esegue ogni istruzione di L simulandola usando un certo insieme di istruzioni di L_0. Questa non è una vera traduzione in quanto il codice in L_0 viene direttamente eseguito, e non prodotto in output. Di recente con i linguaggi di scripting, la soluzione puramente interpretativa è ritornata in uso.

Operazioni

Esattamente come abbiamo visto nell'architettura di Von Neumann, un interprete è di fatto un ciclo che attraverso una serie di operazioni e funzionalità esegue per simulazione le istruzioni del linguaggio. Tali operazioni sono:

- **Elaborazione dei dati primitivi**: i dati primitivi sono dati rappresentabili in modo diretto nella memoria, ad esempio un macchina fisica i numeri sono dati primitivi. Le operazioni aritmetiche per elaborare questi dati sono direttamente implementate nella struttura della macchina (*operazioni primitive*).
- **Controllo di sequenza delle esecuzioni**: consiste nella gestione del flusso di esecuzione delle istruzioni, non sempre sequenziale. L'interprete dispone infatti di adeguate strutture dati (*ad esempio per memorizzare l'indirizzo della prossima istruzione da eseguire*) che sono manipolate con operazioni specifiche (*ad esempio aggiornamento dell'indirizzo*).
- **Controllo dei dati**: per eseguire le istruzioni è, in generale, necessario recuperare i dati necessari, mediante l'utilizzo anche di strutture ausiliarie. Servono per controllare gli operandi e, in generale, i dati che devono essere trasferiti dalla memoria all'interprete e viceversa. riguardano le modalità di indirizzamento della memoria o l'ordine con sui recuperare gli operandi. A volte necessitano di strutture ausiliarie.
- **Controllo della memoria**: sia il programma che i dati vanno memorizzati nella macchina, quindi è necessario gestire processi di allocazione della memoria per i dati e programmi. Nel caso di macchine astratte vicino all'hardware la gestione è abbastanza semplice. Nel caso limite della macchina fisica i dati potrebbero restare sempre nelle stesse locazioni. Nelle macchine astratte software, invece, esistono costrutti di allocazione e deallocazione di memoria che richiedono opportune strutture dati (*pile*) e operazioni dinamiche.

Struttura

Stabilite le operazioni di cui un interprete ha bisogno, vediamo come concretamente opera. Il ciclo di esecuzione comune a tutti gli interpreti è:

```
begin
  go := true;
  while go do begin
    FETCH( OPCODE, OPINFO ) at PC
    DECODE( OPCODE, OPINFO )
    if OPCODE needs ARGS then FETCH( ARGS )
    case OPCODE of
      OP1: EXECUTE( OP1, ARGS )
      ...
      OPn: EXECUTE( OPn, ARGS )
      HLT: go := false;
    if OPCODE has result then STORE( RES );
    PC := PC + SIZE( OPCODE );
  end
end
```

1. Acquisizione prossima istruzione da eseguire.
2. Decodifica dell'istruzione per estrarre operazioni e operandi
3. Prelievo dalla memoria degli operandi nel numero richiesto e nelle modalità individuate.
4. Esecuzione dell'operazione.
5. Memorizzazione dell'eventuale risultato in memoria.
6. Ripetizione fino al raggiungimento di una operazione di `halt`, se raggiungibile.

1.3.6 Compilatore

Un compilatore è un programma $comp^{L_0,L}$, che traduce programmi scritti in L in programmi scritti in L_0, e quindi eseguibili direttamente sulla macchina astratta per L_0. Esattamente come per l'interprete, anche per il compilatore, un programma può essere assimilato al concetto di dato, e quindi passato come input.

Compilatore da L a L_0

Dato $P^L \in Prog^L$, un compilatore $comp^{L,L_0}$ da L a L_0 è un programma tale che $[\![comp^{L,L_0}]\!] : Prog^L \to Prog^{L_0}$ e

$$[\![comp^{L,L_0}]\!](P^L) = P^{L_0} \text{ tale che}$$

$$\forall in \in D.[\![P^{L_0}]\!](in) = [\![P^L]\!](in)$$

In questo caso abbiamo una traduzione esplicita, in quanto il codice in L viene prodotto come output e non eseguito. Quindi, per poter eseguire il programma P^L con input *in* dovremmo per prima cosa eseguire $comp^{L,L_0}$ con P^L come input. Questa esecuzione avverrà sulla macchina astratta M_A del linguaggio in cui è scritto il compilatore. Questo produce come risultato un altro programma (*compilato*) P^{L_0}. A questo punto possiamo eseguire P^{L_0} su M_{L_0} con input *in*. Molti linguaggi imperativi ad alto livello sono compilati.

Struttura

La compilazione dove tradurre un programma da un linguaggio ad un altro preservandone la semantica: dobbiamo avere la certezza che il programma compilato faccia esattamente quello che faceva il programma originale/sorgente. Per questo un compilatore è uno strumento più difficile da progettare rispetto all'interprete. L'esecuzione di un compilatore passa attraverso varie fasi:

- **Analisi lessicale (Scanner)**: spezza un programma nei componenti sintattici primitivi, chiamati **token**. I token formano linguaggi regolari.
- **Analisi sintattica (Parser)**: crea una rappresentazione ad albero della sintassi del programma dove ogni foglia è un token e le foglie lette da sinistra a destra costruiscono frasi ben formate del linguaggio. Tale albero costituisce la struttura logica del programma, quando non è possibile costruire l'albero significa che qualche frase è illegale. In tal caso la compilazione si blocca con un errore. Le frasi di token formano linguaggi CF.

Interprete o compilatore?

Entrambe le soluzioni, nella loro forma pura hanno vantaggi e svantaggi:

- implementazione **interpretativa** pura: interpreta al momento dell'esecuzione, permette di interagire in modo diretto con l'esecuzione del programma (*importante nel debugging*). Un interprete è più veloce da sviluppare rispetto ad un compilatore ed usa meno memoria. D'altra parte i tempi di decodifica si sommano a quelli di esecuzione, ogni volta che una certa istruzione viene eseguita.
- implementazione **compilativa** pura: trascurando i tempi di compilazione, l'esecuzione del programma è più efficiente anche perché nella fase di compilazione il codice viene, in generale, ottimizzato. L'interazione è invece più difficile. Un errore a runtime è difficile da associare all'esatto comando del codice sorgente che lo ha generato, per questo il debugging è più difficile.

1.3.7 Soluzione ibrida

Esiste un compromesso tra compilatore e interprete, ovvero una soluzione ibrida dove il linguaggio ad alto livello viene compilato in un linguaggio a più basso livello che poi viene interpretato. In questo caso, consideriamo il linguaggio L, ad alto livello, per il quale dobbiamo realizzare la macchina astratta M_L. L viene quindi tradotto in un linguaggio intermedio L_{M_I} la cui macchina astratta M_I consiste in un interprete del linguaggio L_{M_I} sulla macchina ospite M_O.

Capitolo 2

Descrivere i linguaggi

Un linguaggio di programmazione è un formalismo artificiale mediante il quale esprimono algoritmi. Anche se artificiale, è sempre un linguaggio e quindi deve essere descritto usando noti strumenti della linguistica.

Un linguaggio di programmazione non è altro che un linguaggio naturale, ma semplificato e non ambiguo. La teoria dei linguaggi di programmazione quindi deve parlare di:

- Grammatica (*sintassi*): regole di formazione, la correttezza della frase (*relazioni tra segni*).
- Semantica: attribuzione di significato: associare un significato ad una frase corretta.
- Pragmatica: in quale modo le frasi corrette e sensate sono usate.
- Implementazione: eseguire una frase corretta, rispettando la semantica.

Semantica, pragmatica e implementazione sono elementi da studiare separatamente ma legati dalla sintassi in funzione della quale tutti sono definiti.

2.1 Descrivere i linguaggi di programmazione

La descrizione di un linguaggio di programmazione avviene su tre dimensioni (*Morris, 1939*):

- **Sintassi**: è l'insieme di regole che permettono di costruire frasi corrette. Ogni frase è costruita da componenti che rappresentano le categorie sintattiche. Dopo di che, individuato l'alfabeto, a livello lessicale si individuano le sequenze di simboli legali, ovvero quelle che costruiscono le parole del linguaggio. La fase che determina la corretta struttura delle frasi, ovvero che verifica se una frase rispetta le regole della grammatica, è detta *parsing*.
- **Semantica**: nei linguaggi artificiali l'attribuzione del significato è una fase semplice ed è la definizione di una relazione tra segni e significati. Ad esempio, la semantica di un programma può essere la funzione matematica calcolata dal programma. Solitamente

viene specificata descrivendo gli effetti della sintassi su una rappresentazione astratta della macchina, chiamato *stato*.

- **Pragmatica**: frasi con lo stesso significato possono essere usate in modo diverso in modo dipendente dal contesto linguistico.
- **Implementazione**: questi aspetti riguardano la tecnica di implementazione usata.

2.1.1 Sintassi

Le regole sintattiche del linguaggio specificano quali stringhe di caratteri sono legali nel linguaggio. Nel dettaglio la terminologia nella linguistica è la seguente:

- Una *parola* è una stringa di caratteri su un alfabeto.
- Una *frase* è una sequenza (*ben formata*) di parole.
- Un *linguaggio* è un insieme di frasi.

Nell'ambito dei linguaggi di programmazione gli stessi concetti prendono nomi differenti:

- Le parole diventano *lessemi*. Un lessema è una parola con significato specifico, nella grammatica corrisponde ad un terminale. È l'unità minima sintattica, ovvero quella a più basso livello di un linguaggio di programmazione (*ad esempio:* `*`, `sum`, `begin`,...). La loro specifica sintattica è separata dalla definizione del linguaggio, e come vedremo, solitamente descritta come stringhe di linguaggi regolari.
- Le frasi diventano *token*. I token corrispondono agli elementi delle categorie sintattiche del linguaggio di programmazione, e nella grammatica corrispondono alle sequenze generate dai simboli non terminali.
- Il *programma* è una sequenza/composizione sequenziale di frasi ben formate.
- Il linguaggio dei programmi, e quindi gli strumenti formali che lo definiscono, costituiscono quello che chiamiamo *linguaggio di programmazione*.

Descrivere la sintassi

Abbiamo bisogno di strumenti formali per descrivere parole e frasi legali di un linguaggio, che permettano in modo automatico di verificare l'appartenenza o meno al linguaggio. In particolare, le parole sono stringhe di simboli alfabetici, mentre le frasi sono stringhe di parole.

Nei linguaggi di programmazione, il linguaggio dei lessemi è in generale sempre un linguaggio **regolare**, quindi **riconoscibile** da un automa a stati finiti.

Riconoscitore

Si tratta di uno strumento di riconoscimento che legge in input stringhe sull'alfabeto del linguaggio e decide se la stringa appartiene o meno al linguaggio.

Supponiamo di avere un linguaggio L su un alfabeto Σ, per costruire un metodo di riconoscimento dovremmo avere un meccanismo R in grado di leggere le stringhe di caratteri. R quindi deve essere in grado di dire se una stringa è in L oppure no.

Invece, il linguaggio di token, e quindi dei programmi, è in generale un linguaggio **context-free (CF)**, quindi **generato** da una grammatica CF.

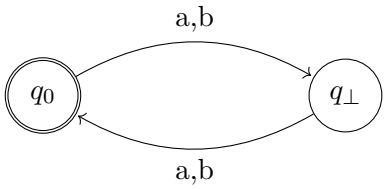
Generatore

Si tratta di uno strumento che genera stringhe di un linguaggio. Si può determinare se la sintassi di una particolare frase è sintatticamente corretta confrontandola con la struttura del generatore (*parser*).

Possiamo comunque osservare che anche i linguaggi regolari possono essere generati (*grammatiche regolari*) e i linguaggi CF possono essere riconosciuti (*automi a pila*).

Esempio

$$\mathcal{L} = \{\sigma \in \Sigma^* \mid |\sigma| \, pari\} \qquad \Sigma = \{a, b\}$$



$$\mathcal{S} \longrightarrow \varepsilon \mid aa\mathcal{S} \mid bb\mathcal{S} \mid ab\mathcal{S} \mid ba\mathcal{S}$$

Ma vediamo quali sono questi strumenti formali, in particolare per descrivere il linguaggio come sequenza di parole/lessemi. Come si descrive quindi la sintassi? Nel linguaggio naturale viene usato il linguaggio naturale stesso, ma il linguaggio naturale introduce ambiguità e non può essere di aiuto all'implementazione di un linguaggio di programmazione. Negli anni '50, Chomsky ha sviluppato un formalismo al fine di descrivere i linguaggi artificiali in modo formale, permettendo di limitare le ambiguità: **grammatiche generative**, molto utilizzate per descrivere la sintassi dei linguaggi di programmazione.

Il vocabolario è alla base per costruire un dizionario completo delle parole del linguaggio. La grammatica descrive i modi per combinare parole e formare frasi, ed è descritta da:

- *Alfabeto.*
- *Descrizione lessicale*: sequenze di simboli corretti che costituiscono **parole/lessemi** del linguaggio.
- Descrizione delle *sequenze di parole* che costituiscono frasi legali del linguaggio.

Esempio

$$\mathcal{L} = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \sigma \, palindrome\}$$

Definizioni:

- ε, a e b sono palindromi.
- se σ è palindrome allora lo sono anche $a\sigma a$ e $b\sigma b$

$$\mathcal{S} \longrightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid a\mathcal{S}a \mid b\mathcal{S}b$$

2.1.2 Grammatiche context-free

Una grammatica libera dal contesto (CF) è un quadrupla $\mathcal{G} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{S} \rangle$, ove:
- $\mathcal{V}$ è un insieme finito di variabili (detta anche simboli *non terminali*),
- $\mathcal{T}$ è un insieme finito di simboli *terminali* ($\mathcal{V} \cap \mathcal{T} = \varnothing$),
- $\mathcal{P}$ è un insieme finito di produzioni; ogni produzione è della forma $\mathcal{A} \to \alpha$, ove:
  - $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ è una variabile, e
  - $\alpha \in (\mathcal{V} \cup \mathcal{T})^*$
- $\mathcal{S} \in \mathcal{V}$ è una variabile speciale, detta *simbolo iniziale*.

Nella grammatica i simboli terminali costituiscono parole/lessemi del nostro linguaggio, ovvero il vocabolario, invece i simboli non terminali sono le categorie sintattiche, quindi rappresentano i diversi tipi di elementi che possono essere usati per comporre frasi. Le produzioni sono le regole di composizione degli elementi in una frase, formalmente sono utilizzate per rimpiazzare un non terminale con una stringa di uno o più simboli terminali e/o non terminali. Il linguaggio è l'insieme di tutte le possibili frasi, ovvero le stringhe di simboli terminali, generate a partire dal simbolo iniziale $\mathcal{S}$, che rappresenta la categoria delle frasi legali nel linguaggio.

Ma cosa significa context free? Significa **libero dal contesto**, questo è un vincolo sulle produzioni, dove a sinistra possiamo trovare un solo non terminale, e questo implica che in una frase, dovunque troviamo quel non terminale, ovvero **qualunque contesto** troviamo quel non terminale, lo possiamo sostituire applicando una delle produzioni per il non terminale. Nei linguaggi di programmazione, questo significa che il modo con cui possiamo sviluppare, per sostituzione, una categoria sintattica è indipendente dal contesto.

Questo è un vantaggio perché dato un programma, abbiamo il problema di capire quale grammatica può averlo generato (*parsing*), e per le grammatiche CF esistono strumenti automatici efficienti di parsing. Dal punto di vista della complessità del parsing, questa dipende dal numero di simboli terminali della grammatica e in grado di non determinismo delle produzioni. Un linguaggio può essere generato da diverse grammatiche, quindi ai fini dell'efficienza del linguaggio è importante come si sceglie la grammatica. Per prima cosa deve essere semplice, il più semplice possibile: CF, basso non determinismo, deve facilitare la definizione semantica del linguaggio (*ad esempio grammatiche lineari destre*).

Purtroppo, la proprietà CF è anche uno svantaggio per i linguaggi di programmazione, infatti tali grammatiche non riescono a catturare i vincoli contestuali, che pure sono necessari: Ad

esempio il poter usare una variabile solo se questa è stata dichiarata precedentemente. Questo, significa che abbiamo bisogno di altri formalismi per descrivere/verificare questa tipologia di vincoli su cui ritorneremo.

Esempio

$$\mathcal{G} = \{\{\mathcal{E}\}, \{or, and, not, (,), 0, 1\}, \mathcal{P}, \mathcal{E}\}$$
$$\mathcal{E} = 0 \mid 1 \mid (\mathcal{E}\ or\ \mathcal{E}) \mid (\mathcal{E}\ and\ \mathcal{E}) \mid (not\ \mathcal{E}).$$

$$\begin{array}{rcc} \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & 1 \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & (\mathcal{E}\ or\ \mathcal{E}) \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & (\mathcal{E}\ and\ \mathcal{E}) \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & (not\ \mathcal{E}) \end{array}$$

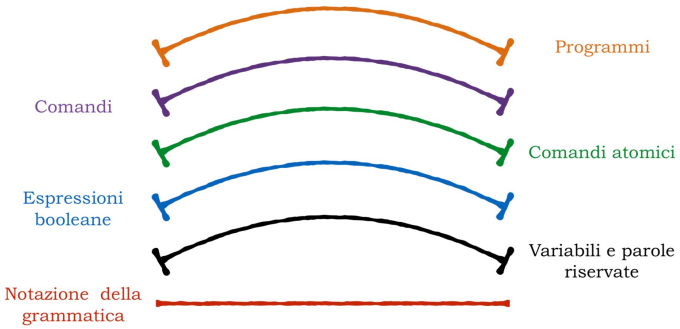
2.1.3 Descrivere un semplice linguaggio

Un linguaggio può essere descritto anche in modo informale, descrivendo quali caratteristiche vogliamo inserire e quale è il loro significato:

- Niente dichiarazioni.
- Solo variabili ed espressioni booleane.
- Assegnamento e composizione sequenziale.
- Comando condizionale.
- Comando iterativo (*loop*).

Questo può essere sufficiente per scrivere un programma corretto che un altro programmatore può leggere, ma non è adeguato per costruire un compilatore o un interprete. Per permettere l'implementazione della macchina astratta abbiamo bisogno di scendere ad un livello più formale.

Ritorna il concetto di astrazione, ed in particolare osserviamo che ogni linguaggio è descritto a più livelli di astrazione, ognuno descritto da una grammatica.



```
<program>      S → C
<com>          C → A | C ; C | if B then C else C
                 | while B do C
<atomic com>   A → v := B
<b-expr>       B → true | false | v | ( not B )
                 | ( B and B ) | ( B or B )
```

Le frasi del linguaggio sono i programmi, niente dichiarazioni e niente preamboli. Un programma è qualunque comando e ogni comando è qualunque programma. Ad ogni livello di specifica della grammatica quanto specificato alle grammatiche sottostanti è trattato da terminale, ma per avere una definizione completa dobbiamo necessariamente definire esplicitamente anche questi livelli. Quindi, ad esempio, nella grammatica dei comandi (C) usiamo la categoria sintattica dei comandi atomici (A), questo significa che ogni frase generata da A è trattata come un terminale della grammatica per C. Analogo per le espressioni di booleane (B).

Nelle espressioni abbiamo una notazione completamente "parentesizzata" per evitare ambiguità, se togliamo le parentesi introduciamo ambiguità. L'ambiguità consiste nell'esistenza di più parse-tree per la stessa espressione.

Chiaramente l'ambiguità è da evitare perché vogliamo che ogni costrutto abbia un significato unico. In ogni caso le grammatiche sono ambigue per semplificare la rappresentazione assumendo implicitamente le convenzioni ereditate dalla matematica. In questo linguaggio ci sono ambiguità anche nei comandi, ad esempio nella composizione sequenziale.

2.1.4 Analisi semantica

Ritornando ai limiti del formalismo che usiamo per descrivere i linguaggi di programmazione, ovvero l'essere CF. Abbiamo già osservato che ci siano vincoli che dipendono dal contesto:

- Il numero di parametri attuali di una chiamata di procedura deve essere uguale al numero dei parametri formali della dichiarazione.
- Un'operazione sintatticamente corretta potrebbe essere illegale in cui si trova ($i := r+3$). Se il linguaggio è fortemente tipato e prima non ci fosse una dichiarazione di r e di i, il comando sarebbe illegale.
- I tipi della variabile e dell'espressione di un assegnamento devono essere compatibili.

Quindi stringhe corrette per una certa grammatica sono legali solo in determinati contesti. Questo è chiaramente un vincolo sintattico, ma lo strumento sintattico scelto non permette di descriverlo.

Possiamo percorrere diverse strade per risolvere la questione:

- Usare strumenti più potenti, per esempio grammatiche contestuali: riscrittura di un non-terminale solo in un determinato contesto.
- Usare controlli ad hoc.

Il problema delle grammatiche contestuali è che non esistono algoritmi lineari per il riconoscimento di stringhe generate, quindi non ci sono algoritmi efficienti per fare il parser delle stringhe di una grammatica dipendente dal contesto. Per questo la scelta ricade su una specifica del linguaggio mediante grammatica CF (*sintassi*) e poi, come parte semantica (*da cui il nome di vincoli semantici o semantica statica*), vengono specificati i vincoli contestuali.

2.1.5 Semantica (dinamica)

La semantica è più complessa della sintassi perché ricerca esattezza e flessibilità.

- **Esattezza**: descrizione precisa e non ambigua di cosa ci si debba aspettare da ogni costrutto sintatticamente corretto, per sapere a priori quello che succederà durante l'esecuzione.
- **Flessibilità**: non deve anticipare scelte che possono essere demandate all'implementazione.

Non esiste un singolo formalismo universalmente accettato per dare significato ai programmi, ma esistono diverse necessità di metodologia per descrivere significati:

- I programmatori devono sapere cosa significano i comandi.
- Gli sviluppatori devono sapere esattamente cosa fanno i costrutti.
- Gli sviluppatori potrebbero rilevare ambiguità e inconsistenze.
- Dimostrazioni di correttezza dovrebbero essere possibili.
- Generatori di compilatori dovrebbero essere possibili.

Quella che dobbiamo formalizzare per rispondere a tutte queste problematiche è la **semantica** del linguaggio di programmazione, a volte anche chiamata semantica dinamica, per distinguerla da quella statica. Perché serve quindi? Dobbiamo specificare gli effetti della sintassi sulla rappresentazione astratta della macchina, chiamata **stato**. Quindi, per ogni costrutto, va descritto il significato della sua esecuzione come trasformazione di stato. L'astrazione della macchina nel concetto di stato permette di dare al costrutto un significato puro, indipendente dalla macchina, quindi senza restrizioni.

Semantica

La semantica attribuisce significato ad ogni frase sintatticamente corretta.

Siginficati

I significati sono entità autonome che esistono indipendentemente dai segni che usiamo per descriverle.

La semantica guarda quindi al linguaggio di programmazione ad un livello ideale, indipendente dalla macchina, con l'unico vincolo che in ogni istante possono essere eseguiti un numero finito

di passi di computazione. Chiaramente, non è facile trovare il giusto equilibrio tra esattezza e flessibilità, in modo da rimuovere ambiguità, ma anche lasciare spazio all'implementazione.

Come possiamo quindi dare significato ad un linguaggio di programmazione? Di certo non possiamo dare un significato esplicito ad ogni frase del linguaggio essendo queste infinite, quindi anche la semantica deve fornire una rappresentazione finita del significato dei programmi a partire dalla sua sintassi. Abbiamo visto che la sintassi è descritta attraverso un vocabolario (*di elementi primitivi*) e un insieme di regole per combinare le parole del vocabolario (*produzioni che combinano categorie sintattiche in una frase e le istanziano nelle parole del vocabolario*). Anche la semantica quindi, per essere descritta in modo finitario, pur dando significato ad un insieme infinito deve basarsi sulla struttura costruttiva della sintassi. Deve dare semantica agli elementi primitivi e deve descrivere il significato di una forma composta in funzione del significato degli elementi composti. Quindi in generale il significato di un programma è la composizione del significato dei costrutti che lo compongono. Il significato di ogni costrutto è dato in termini del significato delle categorie sintattiche e quindi delle parole che lo compongono, e così via fino ad arrivare ad usare il significato di un vocabolario finito e noto. In sintesi, quindi per dare semantica dobbiamo sempre dare significato agli elementi complessi in funzione del significato degli elementi più semplici che lo compongono e del modo con cui questi sono composti.

Esiste quindi un legame forte tra sintassi e semantica: sintassi come metodo finitario per rappresentare un insieme infinito di programmi, la cui sola cosa analizzabile è la struttura; semantica come metodo finitario (*per questo dato seguendo la struttura della sintassi*) per dare significato a tutti gli elementi dell'insieme infinito dei programmi.

2.1.6 Induzione

Quindi la semantica va data seguendo la struttura della sintassi, e la sintassi è definita descrivendo gli elementi base e componendo questi elementi, attraverso regole, in elementi composti. Questa forma di definizione ha una connotazione ben precisa nella matematica, ed è chiamata **induzione**. Si usa sempre un ordine ben fondato perché questo garantisce di trovare sempre un minimo. Ovvero riesco a trovare la base dell'induzione sulla quale la proprietà è definita direttamente. L'induzione strutturale è usata per definire/dimostrare proprietà sui linguaggi di programmazione. L'idea centrale nell'induzione è quella di avere una base su cui definire/dimostrare direttamente (*esplicitamente*) la proprietà, e poi avere regole di costruzione/definizione che, assumendo definitiva/vera la proprietà degli elementi usati, si definisce/dimostra la proprietà per l'elemento del composto. Quindi si opera induttivamente sulle regole di costruzione dell'insieme.

Induzione matematica e strutturale

Dato un insieme A ed una relazione binaria $<\subseteq A \times A$ ben fondata (*senza catene discendenti infinite*). Se $A = \mathbb{N}$ si ha induzione matematica Se $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ linguaggio generato da una grammatica $\mathcal{G}$ si ha induzione strutturale.

Principio di induzione strutturale

Per dimostrare che una proprietà è valida per tutti gli elementi di una categoria sintattica:

1. Si dimostra la proprietà per tutti gli elementi base della categoria, quelli che non hanno nessun elemento come componente (*base induttiva*).
2. Si dimostra la proprietà per tutti gli elementi composti assumendo che la proprietà sia verificata da tutti i loro componenti immediati (*ipotesi induttiva*).

Esempio di induzione matematica

Dimostrazione induttiva. Dimostrare che:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \text{con } n \geq 1$$

La **base induttiva** è con n pari ad 1, quindi sostituendo:

$$n = 1 \qquad \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$

Per il **passo induttivo** si suppone che sia vero per n considerando dunque come passo induttivo l'equazione iniziale. Si dimostra per $n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \triangleq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)}_{\text{per definizione}} = \underbrace{\frac{n\,(n+1)}{2}}_{\text{ip. induttiva}} + n + 1$$

$$= \frac{n\,(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\,n + (n+1)\,2}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

□

2.1.7 Un significato tante rappresentazioni

Abbiamo già parlato del fatto che ogni programma è una funzione matematica tra domini specifici. In particolare, un programma è solo una notazione per rappresentare funzioni. Infatti un algoritmo è una entità astratta concretizzata in un programma, ma una volta che abbiamo il programma non ci interessa se il programma implementa esattamente l'algoritmo,

ma ci interessa che il programma implementi precisamente la funzione descritta dall'algoritmo. Il fatto che la funzione venga descritta mediante un algoritmo significa solamente che abbiamo in mente un modello computazionale che ci permette di suddividere la funzione in passi computazionali primitivi del modello computazionale. Quindi l'algoritmo è solo una dimensione intermedia che riempie il gap tra la funzione e il programma. In questo senso una strada è sicuramente quella di descrivere il significato di un programma caratterizzando la sua funzionalità. Questo è sicuramente quello che interessa al progettista che deve progettare i costrutti del linguaggio per permettere l'implementazione di certe funzionalità e perché la composizione permetta di implementare certe funzionalità. D'altra parte l'implementatore ha sempre bisogno di descrivere funzionalità ma le deve descrivere come trasformazione di stato della macchina, fissati gli stati di input quali sono gli stati di output ottenuti dopo l'esecuzione del costrutto? Dal punto di vista dello sviluppatore invece non interessa l'esatta trasformazione di stato, ma interessa come l'uso e la combinazione dei costrutti permetta di preservare invarianti o garantire proprietà desiderate.

- Comportamento I/O: interessa l'implementatore;
- Funzionalità descritta dall'algoritmo: interessa il progettista;
- Proprietà - Invarianti: interessa lo sviluppatore.

Tutte queste visioni sono necessariamente collegate, nel senso che ogni funzione è una relazione e quindi una collezione di proprietà e viceversa ad ogni collezione di proprietà può essere associata una relazione o una funzione. Di fatto tutte queste rappresentazioni, tutti i punti di vista sono equivalenti, guardano solo al problema di rappresentare il significato da punti di vista diversi. I vari punti di vista hanno dato origine a diversi tipi di semantica che modellano i significati mediante strumenti matematici diversi (*funzioni, transizioni di stato, proprietà*). A seconda di quali strumenti matematici usiamo per descrivere i significati otteniamo tipi di semantiche diverse rendendo più agevoli tipi diversi di ragionamento. Le tipologie di strumenti possono essere raccolte in tre macro classi:

- **Denotazionale** (*descrive funzionalità*): studia gli effetti dell'esecuzione, cerca proprietà del programma studiando proprietà della funzione calcolata.
- **Assiomatica** (*descrive proprietà*): serve per fare deduzioni logiche a partire da assiomi dati, su parti del programma.
- **Operazionale** (*descrive trasformazioni di stato*): si preoccupa di come i risultati finali vengono prodotti.

Esempio

```
z := 2;
y := z;
y := y + 1;
z := y;
```

Denotazionale

Semantica denotazionale

Modello matematico dei programmi basato sulla ricorsione. È la semantica più "astratta" con cui descrivere i programmi.

Il processo di costruzione della semantica denotazionale per un linguaggio consiste nel definire un oggetto matematico per ogni entità del linguaggio e nel definire poi una funzione che mappa istanze delle entità del linguaggio in istanze dei corrispondenti oggetti matematici. Solitamente, il significato dei costrutti del linguaggio è definito solo in funzione del valore delle variabili del programma, ovvero in funzione della rappresentazione dello stato della macchina.

Formalmente, il modello matematico usato per descrivere la semantica denotazionale è quello delle funzioni matematiche (*ricorsive*), ovvero un programma corrisponde ad una funzione tra stati della macchina e l'equivalenza di programmi si dimostra mediante equivalenza tra funzioni.

Quindi la semantica denotazionale è un oggetto puramente matematico che descrive gli effetti semplicemente manipolando oggetti matematici (*si astrae da ogni concetto di esecuzione*). In particolare, guarda agli effetti dell'esecuzione del programma, descrivendo l'effetto dell'esecuzione di una sequenza di comandi separati da ; attraverso la composizione degli effetti dei singoli comandi da sinistra verso destra. L'effetto di ogni comando è la funzione che dato uno stato produce un nuovo stato.

Questa semantica può essere usata per dimostrare la correttezza dei programmi, fornisce un modo formale per ragionare sui programmi, può aiutare della progettazione di linguaggi, viene usata anche in sistemi di generazione di compilatori. Purtroppo però, a causa della sua complessità ha poca utilità per gli utilizzatori dei linguaggi.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}(y := 2; y := z; y := y + 1; z := y) \quad [s_0] \\
&\qquad \mathcal{E}(y := 2) \circ \mathcal{E}(y := y + 1) \circ \mathcal{E}(y := z) \circ \mathcal{E}(z := 2), [z \to \bot, y \to \bot] \quad [s_0] \\
&\qquad \mathcal{E}(y := 2) \circ \mathcal{E}(y := y + 1) \circ \mathcal{E}(y := z) \circ \mathcal{E}(z := 2), [z \to 2, y \to \bot] \quad [s_1] \\
&\qquad \mathcal{E}(y := 2) \circ \mathcal{E}(y := y + 1) \circ \mathcal{E}(y := z) \circ \mathcal{E}(z := 2), [z \to 2, y \to 2] \quad [s_2] \\
&\qquad \mathcal{E}(y := 2) \circ \mathcal{E}(y := y + 1) \circ \mathcal{E}(y := z) \circ \mathcal{E}(z := 2), [z \to 2, y \to 3] \quad [s_3] \\
&\qquad\qquad \mathcal{E}(y := 2) \circ \mathcal{E}(y := y + 1) \circ \mathcal{E}(y := z) \circ \mathcal{E}(z := 2), [z \to 3, y \to 3] \quad [s_4]
\end{aligned}
$$

Assiomatica

Semantica assiomatica

Modello matematico dei programmi basato sulla logica formale (*calcolo dei predicati*).

La semantica assiomatica nasce con l'obiettivo di fare verifica formale di programmi. Essa consiste di assiomi e regole di inferenza, fornite per ogni tipo di costrutto del linguaggio. Le espressioni logiche della semantica sono chiamate asserzioni:

- L'asserzione prima di un comando (*precondizione*) dichiara le relazioni e i vincoli validi prima dell'esecuzione del comando.
- L'asserzione che segue il comando descrive cosa vale dopo l'esecuzione, ovvero è una postcondizione
- Una *weakest* precondition è la precondizione meno restrittiva che garantisce la postcondizione.

Attraverso queste asserzioni, la semantica assiomatica permette di dimostrare proprietà parziali di correttezza: quando lo stato iniziale rispetta la precondizione e il programma termina, allora lo stato finale soddisfa la postcondizione.

È chiaro che questo tipo di semantica considera solo alcuni aspetti dell'esecuzione del programma, ovvero quelli descritti dalle pre e post condizioni considerate. Questo significa che, date delle condizioni, esistono infiniti programmi che soddisfano tali condizioni, ma che hanno potenzialmente comportamenti diversi. D'altra parte, un programma può soddisfare diverse pre e post condizioni. Come ogni sistema logico, la semantica assiomatica deve godere di due importanti proprietà: correttezza (*soundness*), ovvero ogni proprietà derivabile nel sistema vale per il programma; completezza, ovvero ogni proprietà che vale per il programma è derivabile nel sistema di regole.

$$\frac{\{P\}S\{Q\}, P' \Longrightarrow P, Q \Longrightarrow Q'}{\{P'\}S\{Q'\}}$$

$$\frac{\{P1\}S1\{P2\}, \{P2\}S2\{P3\}}{\{P1\}S1; S2\{P3\}}$$

$$\frac{\{B \, and \, P\} \, S1 \, \{Q\}, \{(not \, B) \, and \, P\} \, S2 \, \{Q\}}{\{P\} \, if \, \{B\} \, then \, S1 \, else \, S2 \, \{Q\}}$$

$$\frac{(I \, and \, B) \, S \, \{I\}}{\{I\} \, while \, B \, do \, S \, \{I \, and \, (not \, B)\}}$$

Oprazionale

Semantica operazionale

Modello matematico dei programmi basato sui sistemi di transizione.

La semantica operazionale descrive il significato del programma eseguendo i suoi comandi su una macchina, simulata o reale. La trasformazione di stato della macchina (*memoria, registri, ecc*) definisce il significato del comando. La semantica operazionale di un linguaggio ad alto livello è necessaria per definire una macchina astratta che, induttivamente sulla struttura del programma a cui dare significato, va ad eseguire le sue componenti. La semantica operazionale

descrive il significato dei programmi come trasformazioni di stato e lo può fare a vari livelli di dettaglio/astrazione che comunque devono essere indipendenti dalla macchina/architettura. Lo stato è la rappresentazione astratta della macchina e quindi la sua formalizzazione è ciò che decide il livello di astrazione a cui guardare il comportamento run-time dei costrutti.

Dal punto di vista del modello, la semantica operazionale si preoccupa di come i risultati finali vengono calcolati, in particolare, il modello matematico usato è quello dei sistemi di transizione. Si consideri la funzione memoria $\sigma : Var \to Val$ che associa valori alle variabili. Lo stato è una coppia che consiste nel programma ancora da eseguire e nello stato in cui si deve eseguire il programma:$Stato = \langle P, \sigma \rangle$. Ad ogni passo si esegue un'operazione e si cambia configurazione/stato: applicando una relazione tra configurazioni $\to \subseteq \langle P, \sigma \rangle \times \langle P, \sigma \rangle$ (*relazione di transizione*). La chiusura transitiva descrive l'esecuzione completa. Tale semantica opera eseguendo i comandi separati da ; sequenzialmente e nell'ordine in cui compaiono da sinistra a destra. Anche se è una delle forme più concrete di semantica, essa esegue comunque l'astrazione di come il programma viene eseguito (*architettura, registri, indirizzi*), essa è quindi comunque indipendente dall'architettura.

$$\begin{aligned}
\langle z := 2; y := z; y := y + 1; z := y, [z = \bot, y = \bot] \rangle \\
\langle y := z; y := y + 1; z := y, [z = 2, y = \bot] \rangle \\
\langle y := y + 1; z := y, [z = 2, y = 2] \rangle \\
\langle z := y, [z = 2, y = 3] \rangle \\
\langle \varepsilon, [z = 3, y = 3] \rangle
\end{aligned}$$

2.1.8 Composizionalità

Composizionalità

Il significato di ogni programma deve essere funzione del significato dei costituenti immediati.

La composizionalità è una proprietà della semantica necessaria per caratterizzare i comportamenti e significati di sistemi che possono avere infiniti elementi. Si noti che la semantica denotazionale e la semantica assiomatica rispettano banalmente tale principio. La composizionalità della semantica operazionale è invece meno immediata (*Plotkin*).

La semantica è alla base di ogni analisi che si può fare su un programma. Per analizzare le proprietà di un programma devo capire cosa fa e quindi devo capire la semantica in qualche sua forma. La composizionalità in tal caso diventa essenziale per garantire la modularità all'analisi di programmi, il che garantisce di poter ragionare in maniera modulare anche su software di grandi dimensioni o comunque sviluppato modularmente. Infatti, se la semantica su cui si basa una analisi è composizionale, allora è possibile analizzare il software separatamente nei suoi moduli, per poi ricomporre il risultato dell'analisi componendo i risultati ottenuti sui singoli moduli.

2.1.9 Equivalenza

Equivalenza

Due programmi sono equivalenti quando hanno la stessa semantica.

Sappiamo che la stessa funzione può essere calcolata seguendo algoritmi diversi che possono manipolare anche dati diversi, e poi per ogni algoritmo esistono infiniti programmi che lo implementano, quindi è importante confrontare algoritmi e programmi. Questo significa che la semantica non serve solo a sapere come usare un linguaggio, ma serve anche a confrontare programmi. È chiaro che alla base di ogni confronto c'è la caratterizzazione della funzione calcolata, e quindi i programmi possono essere confrontati quando calcolano la stessa funzione. Questo vuol dire vedere il programma come una scatola nera e guardare esclusivamente alla relazione di input/output (I/O), se tale relazione è la stessa, allora indipendentemente da come (*algoritmo*) la calcolano (*dentro la scatola nera*) la funzionalità è la stessa. Solo sapendo caratterizzare la funzionalità I/O possiamo quindi dimostrare equivalenze di programmi. A questo punto, solo quando sappiamo se due programmi calcolano la stessa funzione li possiamo confrontare rispetto all'efficienza, quando possibile (*potrebbero non essere confrontabili rispetto alla stessa risorsa tempo/spazio*).

L'equivalenza è necessaria in varie fasi di analisi:

- Correttezza;
- Equivalenza di programmi;
- Efficienza.

2.2 Semantica operazionale

2.2.1 Sistemi di transizione

Visto che la semantica deve essere specificata in funzione della sintassi allora il modo migliore per descrivere la semantica è attraverso la manipolazione di simboli.

Possiamo descrivere la manipolazione dei simboli che effettua il compilatore, quindi descriviamo esattamente la manipolazione del linguaggio sorgente effettuata dal compilatore per arrivare poi a generare il codice eseguibile, ma questo è anche troppo specifico se il nostro obiettivo è solo sapere cosa fa un costrutto, non ci interessa esattamente come il compilatore lo riconosce e lo traduce in operazioni primitive della macchina sottostante. Possiamo descrivere la collezione di algoritmi corrispondenti ad ogni costrutto, ma anche questo è troppo specifico, anche se in modo diverso. Ci interessa cosa fa un costrutto non come lo fa, quindi siamo troppo vicino all'implementazione del costrutto. Possiamo descrivere in linguaggio naturale il comportamento dei costrutti, ma questo comporta ovvi problemi di interpretazioni potenzialmente conflittuali, dovute al linguaggio naturale usato.

In generale i primi due metodi spiegano come agiscono e non cosa fanno i costrutti, questo non va bene perché il significato di un oggetto non è il metodo implementato per eseguir-

lo/interpretarlo. Inoltre non sono concisi e neanche abbastanza astratti (*vengono dati dettagli irrilevanti, senza necessariamente specificare ciò che l'utente ha necessità di sapere*). Sono spesso legati all'architettura su cui il linguaggio viene eseguito. Il terzo metodo non è preciso ed è ambiguo a causa del linguaggio naturale, è verboso, non è accurato (*formale*) nella descrizione del significato ma specifica il cosa e non il come. Quindi abbiamo bisogno di uno strumento formale che simula le trasformazioni che vengono eseguite ad un livello sufficientemente astratto da ignorare i dettagli del come descrivendo quindi solo il cosa viene calcolato.

Lo strumento formale utilizzato è quello dei sistemi di transizione. Le loro principali caratteristiche sono:

- Sono matematicamente precisi;
- Sono molto concisi;
- Sono un metodo di specifica generale e che permette astrazione;
- Sono espressi mediante una collezione di regole date in funzione della sintassi (*induttivamente*): **specificano cosa viene calcolato per induzione sulla struttura sintattica del linguaggio**.

I sistemi di transizione sono sufficientemente astratti per specificare senza ambiguità e senza dipendenza dalla macchina, cosa fa un linguaggio. Sfrutta la definizione induttiva del linguaggio, permettendo di definire il significato mediante induzione sull'abstract syntax tree, quindi si usa l'induzione strutturale matematica per ragionare sui programmi. È uno strumento molto generale, infatti qualunque sistema di computazione può essere espresso mediante un sistema di transizione (*sistemi hardware, automi, ecc*), inoltre, come abbiamo detto, astrae dettagli a basso livello, permettendo di modellare l'equivalenza 4 4 denotazionale e di modulare (*adattare al contesto*) la precisione dell'osservazione.

Sistema di transizioni

Un sistema di transizione è una struttura $(\Gamma, \rightarrow)$, dove Γ è un insieme di elementi γ chiamati configurazioni e la relazione binaria $\rightarrow \subseteq \Gamma \times \Gamma$ è chiamata relazione di transizione. Se $\Gamma_T \subseteq \Gamma$ è un insieme di configurazioni terminali, il sistema è detto terminale.

Le configurazioni dipendono dal linguaggio, in particolare dal tipo di linguaggio. Quando due configurazioni sono nella relazione di transizione diciamo che la prima si muove o si può muovere nella seconda. Il sistema di transizione genera un multigrafo diretto infinito, dove le configurazioni sono nodi, mentre le transizioni sono archi diretti. L'esecuzione di un programma, esattamente come la sintassi, può essere rappresentato mediante un grafo, i cui nodi sono le configurazioni.

Una derivazione è una sequenza di transizioni. Il sistema di transizione definisce come le derivazioni avvengono, ovvero come si possono raggiungere le configurazioni finali (stringhe di soli simboli terminali). Quindi il sistema di transizione è il framework di base, il come viene definito dipende da quello che si vuole descrivere. L'evoluzione delle configurazioni

specifica cosa accade e non come questo accade, anche se il livello di dettaglio può includere aspetti anche di metodo. In generale il modello basato su sistema di transizione funziona bene, perché per definire la semantica in modo induttivo sulla struttura sintattica, non ci interessa specificare esecuzioni complete ma specificare regole locali che, combinate tra loro, descrivono esecuzioni complete. Inoltre, le regole dicono cosa si può inferire e non cosa non si può inferire, quello che non si può fare/descrivere si ottiene implicitamente dall'impossibilità di derivarlo a partire dalle regole, dall'impossibilità di dimostrare il fatto mediante l'uso delle regole definite. Inoltre le regole permettono di descrivere ciò che può avvenire e non ciò che deve avvenire, ovvero non si precludono possibilità diverse previste dalle regole. Come esempio vediamo come si può generare un sistema di transizione a partire da una grammatica CF.

Si noti che, la relazione di transizione in un sistema di transizione è una relazione non una funzione, quindi comportamenti non deterministici sono possibili. Il non determinismo deriva dal non poter dare troppi dettagli che permettano di individuare un'unica soluzione. In questo contesto il non-determinismo è intrinseco sia nel problema che nelle possibili soluzioni. Quindi la semantica è in generale non deterministica, anche quando modella sistemi deterministici, in quanto il modello non fornisce (*o meglio non vuole fornire*) sufficienti dettagli per determinare la descrizione della computazione. Al contrario l'implementazione, che ha tutti i dettagli, deve essere deterministica.

2.3 Categorie sintattiche

Categorie sintattiche

classificazione dei costrutti in funzione del loro significato atteso, ovvero della classe di effetti che la loro esecuzione causa.

Le categorie sintattiche quindi sono classi che rappresentano un diverso tipo di significato, di effetto, dell'esecuzione di un programma. In generale possiamo identificare tre fondamentali effetti derivanti dall'esecuzione di un programma:

- Generazione di valori;
- Creazione di legami;
- Trasformazioni di stato.

Ogni diverso significato si associa a un diverso costrutto, quindi per descrivere le categorie sintattiche dobbiamo descrivere il loro significato e per fare questo dobbiamo usare gli elementi che ci permettono di descrivere i significati in funzione dello stato. Le categorie sintattiche necessarie per parlare di linguaggi di programmazione si distinguono in funzione di cosa denotano/producono/ottengono rispetto ad uno stato di computazione. Partendo da questo otteniamo esattamente tre categorie: **Espressioni**, **Comandi** e **Dichiarazioni**. Queste classi di elementi sono disgiunte, nel senso che una dichiarazione tipicamente deve essere ben distinta da un comando e da una espressione e viceversa (*anche se esistono linguaggi con qualche sovrapposizione*), questo comunque non significa che alcune espressioni non possano avere come side-effect l'effetto di un comando, un comando di una dichiarazione, ecc. Dal

punto di vista formale, ovvero dal punto di vista della definizione del linguaggio, le categorie sono i simboli non terminali della grammatica classificati in funzione di cosa modificano dello stato e come lo modificano.

2.3.1 Espressioni

I programmi fondamentalmente manipolano dati, ovvero valori, ma per manipolare valori dobbiamo necessariamente rappresentarli e quindi in un linguaggio di programmazione abbiamo bisogno per prima cosa di una categoria sintattica che permetta di rappresentare/denotare valori. Per questo introduciamo le espressioni. Quindi, il significato di una espressione è essenzialmente un valore, potenzialmente con dei vincoli (*ad esempio il tipo*), ma comunque un valore. Le espressioni devono essere valutate per restituire un valore, e va osservato che il concetto di valore è diverso da quello di locazione di memoria: i valori sono parte dello specifico linguaggio di programmazione (*linguaggi di programmazione diversi possono manipolare valori diversi*), la locazione è parte della struttura dell'architettura, anche se modella il modo con cui il linguaggio di programmazione si relaziona alla macchina sottostante. Denotano valori Due espressioni possono essere diverse ma essere valutate nello stesso valore (*in tutti gli stati*). Ad esempio, not(a *and* b) è logicamente (*semanticamente*) equivalente a (*not* a) *or* (*not* b) (*De Morgan*) ma sono sintatticamente diverse. Quindi usiamo oggetti sintattici ma ragioniamo sempre sul loro significato, che è ciò che a noi interessa, la sintassi è solo lo strumento per ragionare sul significato, come le lingue sono solo lo strumento per comunicare gli stessi significati in paesi diversi. Cosa significa quindi per due espressioni essere equivalenti? Per essere equivalenti non basta denotare lo stesso valore in stati specifici, ma è necessario denotare lo stesso valore in tutti gli stati possibili.

Equivalenza

Due espressioni sono equivalenti se vengono valutate nello stesso valore in tutti gli stati di computazione (*anche eventuali side-effects devono essere gli stessi*).

2.3.2 Dichiarazioni

Ora che sappiamo come rappresentare valori, vogliamo poter memorizzare tali valori per manipolarli successivamente. È chiaro che per memorizzarli e riferirli successivamente, dobbiamo associare dei nomi/ identificatori ai valori, ovvero dobbiamo creare/usare/modificare **legami** tra nomi e valori (*in generale oggetti denotabili*). L'insieme dei da utilizzare costituiscono l'ambiente (*ritorneremo su questi concetti più avanti*).

Le dichiarazioni sono la categoria sintattica che permette la creazione o la modifica dei legami associati agli identificatori, ovvero gli ambienti. Va notato che le modifiche agli ambienti sono trasformazioni **reversibili**, in quanto le trasformazioni valgono esclusivamente all'interno del raggio di azione (*scope*) attuale dell'identificatore. In altre parole, i linguaggi di programmazione permettono di delimitare la validità di un ambiente, quindi tutte le modifiche all'ambiente sono reversibili nel senso che quando termina la sua validità tutte le modifiche vengono annullate automaticamente, scompaiono con la terminazione della validità dell'am-

biente. La creazione di ambiente quindi crea sempre nomi nuovi e locali, anche se sono nomi uguali ad altri usati nel programma.

In questo caso, in cosa consiste l'equivalenza? Sicuramente due dichiarazioni equivalenti devono generare le stesse richieste, ma, più di altre categorie sintattiche, le dichiarazioni possono avere side-effect, in tal caso la dichiarazione potrebbe inizializzare una variabile e quindi modificare la memoria, per questo l'equivalenza deve necessariamente richiedere che due dichiarazioni equivalenti generino le stesse identiche modifiche a tutto lo stato di computazione.

Equivalenza

Due dichiarazioni sono equivalenti se producono lo stesso ambiente (*e la stessa memoria in caso di side effects*) in tutti gli stati di computazione.

2.3.3 Comandi

Ora che sappiamo come rappresentare i valori e sappiamo come associare loro dei nomi che mi permettono di memorizzarli e riferirli in durante la computazione, dobbiamo avere uno strumento per manipolarli: i comandi.

I comandi sono richieste di modifica dello stato di computazione, ed in particolare della memoria. Queste trasformazioni sono **irreversibili**, ovvero definitive nell'esecuzione del programma, per annullarle, se possibile devo eseguire altri comandi, altre trasformazioni che possono riportarmi alla stessa memoria iniziale.

I **comandi** rappresentano quindi funzioni di trasformazione e devono essere **eseguiti** per poter attuare la corrispondente trasformazione (*irreversibile*) della memoria.

Anche i comandi possono essere confrontati, ed in particolare ci chiediamo quindi quando due comandi sono equivalenti. Intuitivamente, poiché un comando esegue una trasformazione dello stato, due comandi sono equivalenti se rappresentano la stessa funzione di trasformazione, quindi se per ogni stato in input restituiscono sempre lo stesso stato in output.

Si noti che anche in questo caso l'equivalenza è una proprietà universale sui possibili input.

Equivalenza

Due comandi sono equivalenti se per ogni stato (*memoria*) in input producono lo stesso stato (*memoria*) in output.

2.4 Esempio PL0

Si tratta di un linguaggio realmente implementato simile al Pascal. Il linguaggio è caratterizzato da un unico tipo di dato `INTEGER`. Le strutture di controllo sono standard, astrazione del controllo e procedure senza parametri.

```
<program>  P → B.
<block>    B → D S
<declar>   D → [const I=N{,I=N};]
             | [var I{,I};]
             | [procedure I;B;]
<stmts>    S → ε | I := E
             | call I
             | if C then S
             | while C do S
             | begin S{;S} end
<Cond>     C → odd E | E > E
             | E >= E | E = E
             | E # E | E < E
             | E <= E
<Expr>     E → I | N | E bop E
             | ( E )
```

```
<Expr>     E → [+,-] T [A T]
<Add op>   A → + | -
<Terms>    T → F [M F]
           M → * | /
<Factor>   F → I | N | ( E )

<Numbers>  N → [+,-] d{d}
<Digit>    d → 0 | … | 9

<Ident>    I → l{l,d}
<Letter>   l → A | … | Z
```

Permette di evitare di scrivere parentesi su tutte le espressioni

Capitolo 3

Espressioni

3.1 Descrivere le espressioni

Espressioni

Categoria sintattica che permette di manipolare e denotare valori.

Vengono denotate per restituire il valore che rappresentano. Due espressioni possono essere diverse sintatticamente, ma rappresentare un unico concetto, in questo caso saranno **equivalenti**.

- $x + 1$ e $2x - x + 1$ sono uguali per ogni valore di x.
- $2x$ e $x + 2$ potrebbero essere uguali prendendo come riferimento la memoria.

Valori esprimibili

Sono valori denotabili mediante una espressione, ovvero che possono essere restituiti dalla valutazione di una espressione.

Quindi sono quelli che nel nostro linguaggio saranno rappresentabili mediante espressioni, per noi `Eval = Bool` $\cup$ `int`.

Gli elementi base che servono per definire le espressioni sono valori, operatori e gli identificatori.

3.1.1 Come si caratterizzano

Entriamo ora nel merito di come possono essere fatte le espressioni e di quali aspetti le caratterizzano. Abbiamo già visto che possiamo descrivere la grammatica delle espressioni in modo che questi aspetti siano almeno in parte risolti dalle regole grammaticali, anche se per dare poi semantica useremo una grammatica potenzialmente più semplice. Vediamo nel dettaglio le caratteristiche più importanti:

- Arietà degli operatori: a quanti operandi si applica l'operatore.
- Notazione dell'operatore: notazione prefissa, postfissa, prefissa.
- Regola di precedenza: stabilisce una gerarchia sugli operatori.
- Regole di associatività: cosa verrà eseguito in precedenza a parità di precedenza.
- Ordine di valutazione.
- Presenza di Side-Effects: espressioni che agiscono su altre modifiche (*ad esempio modifiche di memoria*).
- Overloading degli operatori: a seconda del tipo di operandi hanno effetti diversi.
- Espressioni con tipi misti.

Ogni linguaggio potrebbe portare effetti più sottili rispetto ad altri linguaggi.

3.2 Notazione

Le espressioni aritmetiche sono una rappresentazione familiare, fortemente basata su strumenti matematici elementari, ma anche in casi semplici facciamo assunzioni su vari aspetti che la caratterizzano (*ad esempio sulle precedenze degli operatori*). Tali assunzioni possono dipendere da vari aspetti e tolgono ambiguità alla grammatica specificando un aspetto del controllo relativo alla valutazione delle espressioni. A seconda di come si rappresenta l'espressione varia il modo con cui si determina la semantica e di conseguenza può variare la sua valutazione Le espressioni possono essere denotate in modi diversi:

- Notazione infissa: ha senso sugli operatori binari, $a + b$.
- Notazione postfissa: utilizzata nei linguaggi funzionali $a\,b\,+$.
- Notazione prefissa: notazione polacca $+\,a\,b$.

La scelta della notazione può determinare le regole di associatività e/o precedenza, o incidere su altre caratteristiche delle espressioni.

La più usata nelle espressioni aritmetiche è quella infissa perché di più facile ed intuitiva lettura, però è quella in cui ho bisogno di specificare altre regole (*associatività e precedenza*) o strumenti (*le parentesi*) per eliminare ambiguità. Infatti, nelle altre notazioni, l'arietà dell'operatore (*ovvero il numero di operandi a cui si applica*) è spesso sufficiente ad evitare ambiguità nella valutazione.

3.2.1 Notazione post-fissa

In questa notazione non servono regole di precedenza, regole di associatività e parentesi. Necessita di uno stack e input = sequenza di simboli (*operatori e operandi*).

Algoritmo di valutazione

1. Leggi il prossimo simbolo di input;
2. Se operatore:
   (a) applica l'operatore agli elementi in cima allo stack (*in funzione dell'arietà dell'operatore*).
   (b) eliminiamo gli elementi usati dallo stack;
   (c) salviamo il risultato in cima allo stack.
3. Se operando: salvo il valore in cima allo stack;
4. Se la sequenza non è vuota torna a (1).

3.2.2 Notazione pre-fissa

In questa notazione non servono regole di precedenza, regole di associatività e parentesi. Necessita di uno stack e input = sequenza di simboli (*operatori e operandi*).

Algoritmo di valutazione

1. Leggi il prossimo simbolo di input;
2. Se operatore:
   (a) $C_{op} = n$ (*arietà dell'operatore*).
   (b) Torna a (1).
3. Se operando:
   - se $C_{op} - -$ (*decremento* C_{op}).
   - se $C_{op} = 0$:
     – Estraggo dallo stack gl ultimi operandi e l'operatore successivo.
     – Calcolo il valore dell'operatore applicando gli operandi
     – Salvo il risultato sullo stack;
     – Decremento C_{op} del successivo operatore sullo stack.
     – Torna ad (3).
4. Se la sequenza non è vuota torna a (1).

3.2.3 Notazione infissa

La notazione infissa ha bisogno di regole di precedenza, regole di associatività e parentesi. Per ordine di precedenza abbiamo:

1. Parentesi;

2. Operatori unari;
3. $**$
4. $*$, /
5. $+-$

Per ordine di associatività intendiamo in quale ordine applicare operatori che sono allo stesso livello di precedenza. La classica regola di associatività è da sinistra verso destra.

3.2.4 Ordine di valutazione degli operandi

L'implementazione di un linguaggio di programmazione deve ovviamente rappresentare internamente le espressioni in modo da poterle manipolare. Tipicamente la rappresentazione interna delle espressioni consiste in una rappresentazione ad albero (*abstract syntax tree*), dove i nodi interni sono operatori mentre le foglie sono valori (*ovvero operandi elementari*). Ogni nodo interno, etichettato con un operatore, ha per figli gli alberi che rappresentano le espressioni a cui l'operatore si applica. L'albero fornisce q ui ndi la str utt ura dell'espressione, ovvero elimina eventuali ambiguità legati a precedenze e associatività, ma non può d are informazioni riguardanti l'ordine di valutazione dell'espressione che invece è determinata dalla tipologia di visita che l'implementazione del linguaggio effettua sull'albero. Va notato che il problema dell'ordine di valutazione non è un problema matematico, in quanto le operazioni sono tutte commutative, ma è un problema informatico, in quanto ci sono vari aspetti (*non propriamente matematici*) che possono influire sul risultato:

- Operandi non definiti: La presenza di operandi non definiti può far si che l'espressione risultante possa essere valutata solo con un preciso ordine di valutazione. Si consideri, ad esempio, l'espressione di C `(a == 0 ? b : b/a)`, è chiaro che `b/a` può essere una divisione per 0, quindi non definita. È anche vero che, per come è scritta l'espressione, serve valutare `b/a` solo quando a non è 0. Quindi in realtà, valutando le operandi solo quando necessario (*valutazione lazy*) questa espressione è sempre definita. È chiaro quindi che è importante sapere se un linguaggio usa valutazione lazy o eager (*ovvero se tutti gli operandi vengono comunque valutati*) per poterlo usare correttamente. Nel caso di espressioni booleane, la valutazione lazy è spesso detta corto circuito. Altri esempi sono:

  $$a == 0 \quad || \quad b/a > 2$$

  Dove `b/a` potrebbe essere valutato con a uguale a 0

  ```
  p := lista;
  while (p != nil) and (p.valore != 3)
    do p := p.prossimo;
  ```

  Dove `p.valore` potrebbe essere usato con `p` uguale a `nil`.

- Effetti collaterali: Sono effetti non propriamente legati all'oggetto che si sta manipolando (*ad esempio se la valutazione di una espressione causa anche un cambiamento della memoria*). Si parla di side effect anche quando una funzione modifica i propri parametri

o comunque modifica variabili non locali. Ad esempio, `((a+f(b)) * (c+f(b)))` con `f(b)` definita come `b++`, restituisce valori diversi a seconda dell'ordine di valutazione. Per evitare tali, problemi alcuni linguaggi (*Java*) fissano l'ordine di valutazione, altri non permettono la definizione di funzioni con effetti collaterali.

- Aritmetica finita: Nelle macchine l'aritmetica è limitata dall'architettura, quindi i numeri non sono infiniti ed esiste un massimo numero rappresentabile. Il problema di valutazione si ha in caso di espressioni che coinvolgono tale massimo numero, ad esempio se eseguiamo una somma prima di una differenza può cambiare il risultato se la somma calcola un numero maggiore del massimo numero rappresentabile. Nei linguaggi di programmazione, tipicamente l'ordine di valutazione risolve per prima cosa le variabili, e le costanti poi valuta gli operandi seguendo la struttura data dalle parentesi dell'espressione.

3.3 Semantica

Il significato di una espressione è essenzialmente un valore potenzialmente con dei vincoli (*ad esempio il tipo*) ma comunque un valore.

Le espressioni devono essere valutate per restituire un valore. I valori sono parte dello specifico linguaggio di programmazione.

Due espressioni possono essere diverse, ma essere valutate nello stesso valore: in tal casi sono dette equivalenti. Perché due espressioni siano equivalenti non basta che denotino lo stesso valore in stati specifici, ma lo devono denotare in tutti gli stati possibili.

3.3.1 Semantica nelle espressioni

Introduciamo ora la semantica delle espressioni di un linguaggio imperativo (*basato su architettura di von Neumann*), che chiamiamo `IMP`. Per parlare della semantica non ci interessa la grammatica che include tutte le regole di associatività e di precedenza, ma ci basta quella più semplice anche se ambigua. Di fatto nella semantica si rappresenta, mediante la forma sintattica, il corrispondente albero di valutazione che è invece non ambiguo. Ignoriamo anche le parentesi per semplificare, visto che le regole, essendo induttive, non ne sono influenzate (*il caso $\mathcal{E}$ sarebbe un caso induttivo che toglierebbe solo le parentesi, quindi chiaramente senza rilevanza semantica*). Quindi per parlare di semantica guardiamo alla struttura induttiva e non alla struttura sintattica (*ignoriamo gli aspetti puramente lessicali*). Ad esempio con l'espressione $\mathcal{E} + \mathcal{E}$ stiamo rappresentando un albero sintattico con come radice + ed i cui sottoalberi (*operandi*) sono espressioni, quindi generati a loro volta da $\mathcal{E}$

Ricordiamo che la sintassi che abbiamo introdotto per le espressioni è la seguente:

$$
\begin{array}{lcl|l|l|l|l}
\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \mathcal{B} & & & \\
\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{I} & \mathcal{N} & \mathcal{A}\,op\,\mathcal{A} & & \\
\mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{I} & true & false & not\,\mathcal{B} & \\
 & & & \mathcal{B}\,or\,\mathcal{B} & \mathcal{A} = \mathcal{A} & &
\end{array}
$$

Dove $\mathcal{A}$ sono le espressioni aritmetiche in cui `op` sta nell'insieme $\{+, -, *, =\}$, mentre $\mathcal{B}$ sono le espressioni booleane.

VIsto che gli identificatori hanno un significato che coinvolge anche i comandi oltre che i concetti di ambiente e binding, cerchiamo di capire prima le espressioni ignorando gli identificatori, ovvero assumiamo espressioni senza identificatori. Ovvero partiamo a dare significato alla seguente grammatica delle espressioni:

$$
\begin{array}{llllllll}
< EXP > & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{A} & | & \mathcal{B} & & \\
 & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{N} & | & \mathcal{A}\, op\, \mathcal{A} & & \\
 & \mathcal{B} & \longrightarrow & | & true & | & false & \\
 & & & | & not\, \mathcal{B} & | & \mathcal{B}\, or\, \mathcal{B} \;|\; \mathcal{A} = \mathcal{A} &
\end{array}
$$

Per prima cosa dobbiamo definire l'insieme $\mathcal{E}$ delle espressioni da valutare ad intero o booleano, ovvero quelli che prima abbiamo detto essere alberi di valutazione, con metavariabile e.

Espressioni $\mathcal{E}$

Insieme di (*alberi di valutazione*) di espressioni valutate ad intero o booleano: e.

Dobbiamo anche definire l'insieme dei valori, ovvero dei numeri della macchina sottostante, e dei valori booleani. È da notare che la macchina sottostante non è necessariamente una macchina fisica, può infatti essere una macchina virtuale.

Numeri $\mathcal{N}$

Insieme di numerali nella macchina sottostante: m, n, p.

Booleani $\mathcal{B}$

Insieme di valori booleani {`true`, `false`}: t.

Infine usiamo questi insiemi per definire il sistema di transizione, le cui regole forniranno esattamente la semantica operazionale delle espressioni di cui abbiamo dato la grammatica.

Quindi definiamo l'insieme delle configurazioni Γ co e l'insieme delle espressioni da valutare $\mathcal{E}$. L'insieme delle configurazioni terminali $\mathcal{T}$ sono ovviamente i valori. Come sappiamo, le configurazioni terminali devono essere un sottoinsieme delle configurazioni, ed effettivamente i valori sono espressioni primitive. A partire da questi insiemi possiamo definire il sistema di transizione:

Sistema di transizione

$$\Gamma = \mathcal{E} \quad \mathcal{T} = \mathcal{N} \cup \mathcal{B} \quad op \in \{+, -, *, =\} \quad bop \in \{=, or\}$$

3.4 Regole di transizione

A questo punto introduciamo le regole di transizione.

- La prima regola è un assioma, che semplicemente valuta l'espressione sintattica contenente un operatore aritmetico, nel valore che esso rappresenta. Ad esempio la semplice operazione $3 + 5 = 8$

$$\mathcal{E}_1 : \quad m \quad op \quad n \quad \rightarrow \quad p$$

- La seconda regola è invece una regola induttiva di valutazione. questa regola mi dice che, se gli operandi non sono valori primitivi allora dobbiamo valutarli. In particolare, questa regola mi dice che prima valutiamo l'espressione a sinistra dell'operatore.

$$\frac{e \longrightarrow e'}{e \quad op \quad e_0 \longrightarrow e' \quad op \quad e_0} \ (\varepsilon_2)$$

- La terza regola stabilisce che nel momento in cui l'operando a sinistra è un valore allora posso iniziare a valutare l'operando a destra.

  Chiaro che quando anche l'operatore a destra è un valore allora ricadiamo nell'assioma e possiamo restituire il valore finale.

$$\frac{e \longrightarrow e'}{m \quad op \quad e \longrightarrow m \quad op \quad e'} \ (\varepsilon_3)$$

- Per permettere la derivazione dobbiamo aggiungere una nuova regola, ma questa rende il sistema di transazione non deterministico perché quando abbiamo un operatore applicato a due espressioni non costanti, abbiamo almeno due regole che possiamo applicare e quindi due transazioni possibili. Ci possono essere problemi quando, nel linguaggio, il valore risultato può dipendere dall'ordine di valutazione degli operandi, e questo non va bene, per questo nella semantica si tende a dare un ordine fissato. Quindi le regole $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ permettono solo la valutazione da sinistra verso destra. Mentre $\mathcal{E}_6$ permetterebbe una valutazione indipendente dei due sottoalberi, più coerente con i possibili modi di valutare un'espressione, ma con maggiore possibilità di errore nell'implementazione. Quindi potremmo dare più regole ma non è necessario e può essere controproducente, anche se così perdiamo alcune proprietà matematiche, come la commutatività.

$$\frac{e \longrightarrow e'}{e_0 \quad op \quad e \longrightarrow e_0 \quad op \quad e'} \ (\varepsilon_6)$$

  Osserviamo quindi come nella semantica tutto quello che specifichiamo è possibile, mentre quello che non si può derivare da quanto specificato non è possibile, viceversa tutto quello che è derivabile dalle regole deve essere desiderato (*altrimenti abbiamo sbagliato la specifica*). Non è invece possibile specificare cosa non vogliamo derivare.

- Questa regola è un assioma, che semplicemente valuta l'espressione sintattica contenente un operatore, nel valore che esso rappresenta, chiaro che se l'operatore è booleano i valori coinvolti devono essere entrambi booleani (*di questa verifica si parlerà più avanti*).

$$\begin{gathered} \mathcal{E}_4 : \qquad k_1 \quad bop \quad k_2 \rightarrow t \\ k_1, k_2 \in \mathcal{B} \cup \mathcal{N} \quad t \in \mathcal{B} \quad bop \in \{=, or\} \end{gathered}$$

- La regola successiva è esattamente la regola $\mathcal{E}_3$ dove ammettiamo che l'espressione contenga operatori binari booleani. Anche in questo caso fissiamo l'ordine di valutazione da sinistra verso destra.

$$\frac{e \longrightarrow e'}{e \quad bop \quad e_0 \longrightarrow e' \quad bop \quad e_0} \ (\mathcal{E}_2)$$

- La regola successiva stabilisce invece che, nel momento in cui l'operando a sinistra è un valore booleano allora posso iniziare a valutare l'operando a destra. Chiaro che, nuovamente, quando anche l'operatore a destra è un valore booleano allora ricadiamo nell'assioma $\mathcal{E}_4$ e possiamo restituire il valore finale.

$$\frac{e \longrightarrow e'}{t \quad bop \quad e \longrightarrow t \quad op \quad e'} \ (\mathcal{E}_5)$$

- Nel caso booleano, dobbiamo aggiungere la regola per l'operatore unario. Per prima cosa l'assioma che restituisce il valore corrispondente all'applicazione dell'operatore sul valore rappresentato, e poi la regola di valutazione, analoga alle precedenti.

$$\mathcal{E}_6 : \quad not \quad t_1 \quad \longrightarrow \quad t$$

$$\frac{e \longrightarrow e'}{not \quad e \longrightarrow not \quad e'} \ (\mathcal{E}_7)$$

3.4.1 Valutazione di equivalenza

Come abbiamo più volte sottolineato, le regole della semantica dinamica, ovvero del sistema di transizione, descrivono formalmente come vengono valutate le espressioni del nostro linguaggio. Quindi, possiamo usare queste regole per definire formalmente cosa significa valutare un'espressione.

Sia k una costante (*intero o booleano*). Formalmente k è il significato di un oggetto (*simbolo*) sintattico k dentro $\mathcal{N} \cup \mathcal{B}$. Nel nostro caso quindi k è un valore dentro $\mathbb{N} \cup \mathbb{B}$, ovvero numeri interi e booleani. Allora la valutazione è una funzione che prende una espressione in $\mathcal{E}$ (*configurazione del sistema di transizione*) e gli associa il valore che esso rappresenta.

Valutare delle espressioni

La valutazione è una funzione `Eval`: $\mathcal{E} \to \mathbb{N} \cup \mathbb{B}$ che descrive il comportamento dinamico delle espressioni restituendo il valore in cui esse sono valutate:

$$\texttt{Eval}(e) = k \Longrightarrow e \to^* k$$

dove $\to^*$ è la chiusura transitiva della relazione di transizione $\to$.

A questo punto, il concetto di valutazione può essere usato per definire formalmente quando due espressioni sono equivalenti, ovvero quando due espressioni anche diverse sintatticamente, rappresentano invece lo stesso valore, ovvero hanno lo stesso significato.

Equivalenza di espressioni

L'equivalenza di espressioni è una relazione $\equiv \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ definita come segue:

$$e_0 \equiv e_1 \Longrightarrow \texttt{Eval}(e_0) \equiv \texttt{Eval}(e_1)$$

Grazie a questa definizione, possiamo quindi dimostrare che, ad esempio, l'espressione $(3{+}5){\cdot}2$ è equivalente a $(1 + 3) \cdot 4$, pur essendo due espressioni sintatticamente molto diverse.

Capitolo 4

Dichiarazioni

4.1 Identificatori

Identificatori

Sequenza di caratteri usata per rappresentare o denotare un altro oggetto.

Gli identificatori sono sequenze di caratteri, che hanno lo scopo di denotare qualcos'altro. Gli identificatori sono quindi dei nomi (*definiti da regole specifiche per ogni linguaggio*) usati per riferire altri elementi del linguaggio (*es. procedure*) o della macchina sottostante (*celle di memoria*) durante la computazione, senza necessariamente conoscerne il valore a priori. Quando identificano celle di memoria, gli identificatori sono anche detti variabili, anche se il concetto di variabile è qualcosa di più complesso come vederemo.

L'uso di nomi è fondamentale perché oggetti simbolici sono più facili da ricordare, e perché permettono di attuare un processo di astrazione, sia sui dati che sul controllo. Deve essere chiaro che identificatore e oggetto denotato non sono la stessa cosa: un identificatore può denotare più elementi, un elemento può essere denotato da più identificatori (*aliasing*).

```
1  const pi = 3.14;   //costante
2  int x;             //variabile
3  void f(){...}      //procedura
```

Per ciò che riguarda il processo di astrazione, l'uso degli identificatori ci permette di sostituire gli indirizzi assoluti della memoria con dei nomi, rendendo i programmi più facili da leggere e risolvendo anche il problema dell'indirizzamento assoluto, in quanto il programmatore non deve necessariamente sapere dove e come un valore viene memorizzato per poterlo usare.

Gli identificatori non possono essere stringhe di caratteri qualunque, ma devono seguire delle regole in modo che il parser del linguaggio li possa riconoscere come tali, per non confonderli per parole chiave del linguaggio stesso.

Quindi ogni linguaggio ha le sue regole che normalmente rispondono ad una serie di quesiti che ci dobbiamo porre quando studiamo un linguaggio nuovo:

- Gli identificatori sono o non sono case-sensitive?
- Esistono parole riservate del linguaggio?
- Ci sono vincoli di lunghezza?
- Ci sono caratteri speciali per specificare identificatori?

4.2 Bindings

Il concetto di binding viene ereditato dalla matematica. In matematica i nomi si usano per denotare oggetti complessi. Prima di poterli usare, dobbiamo creare il legame, ovvero **dichiarare** il nome e definire il suo significato. In questo consiste quindi la creazione del legame nelle così dette occorrenze di binding.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\ldots b_{jk}\right)\right)$$

Viene definito il **nome** (*identificatore*) e il suo **significato** (*denotazione*).

In programmazione i binding sono creati dalle dichiarazioni. Successivamente il nome può essere correttamente usato per riferirsi/rappresentare il suo significato. Questi usi sono chiamati occorrenze di applicazione.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\ldots b_{jk}\right)\right)$$

Viene usato il **nome** (*identificatore*) per accedere al suo **significato** (*denotazione*).

4.2.1 Binding e scope

In generale, un nome non dichiarato, di cui non è stato descritto il significato è un nome che può rappresentare qualunque cosa in quel punto. Quindi una sua occorrenza può essere legata a qualunque oggetto, e per questo viene chiamata occorrenza libera.

Dobbiamo osservare che in realtà dal punto di vista del costrutto le occorrenze libere e quello applicate sono identiche, la differenza consiste nell'essere nel raggio di azione (*scope*) di una occorrenza di definizione.

Scope di un binding

Definisce lo spazio in cui si può usare un nome per rappresentare il significato associato ad un binding.

4.2.2 Bindings nei linguaggi di programmazione

Nei linguaggi di programmazione i concetti di bindings e scope prendono una connotazione propria. Quindi ci chiediamo cosa significa definire e usare identificatori nei linguaggi di

programmazione. Partiamo da un esempio: `const x=10; var y=1; y:=x+y`. In questo caso, la prima occorrenza di `x` e la prima di `y` sono occorrenze di definizione perché definiscono `x` e `y` come nomi di oggetti che rappresentano valori interi. Nel caso di `x` abbiamo un nome che avrà sempre un valore costante, nel caso di `y` invece abbiamo un nome il cui valore può cambiare durante la computazione. Tutte le occorrenze nell'assegnamento sono invece applicazione in quanto l'assegnamento non definisce identificatori ma ne aggiorna il valore.

In generale è il PL che definisce (*sintatticamente e semanticamente*) cosa è definizione e cosa è uso di un identificatore, inoltre ci sono PL in cui un programma completo (*incluse librerie*) non sono ammesse occorrenze libere di identificatori. Abbiamo già detto che i binding ci permettono di usare dei nomi per riferirsi a significati (*ovvero gli oggetti denotati).* Ma perché fare questo passaggio? Chiaramente, i nomi sono oggetti simbolici e gli oggetti simbolici sono in generale più facili da ricordare (*un identificatore è più facile da ricordare di un indirizzo fisico*). Ma il motivo più importante è che permettono astrazione, ovvero ci permettono di riferirci ad un oggetto denotato senza conoscere tutti i dettagli: ci possiamo riferire al contenuto di una cella attraverso l'identificatore senza sapere l'effettivo indirizzo fisico. Questo garantisce anche la possibilità di dare significato in modo indipendente dalla macchina su cui poi il programma viene eseguito.

4.2.3 Tipi di bindings nei linguaggi di programmazione

I binding possono legare nomi a diversi tipi di significato, permettendo sia astrazione sui dati che astrazione sul controllo. A seconda dell'oggetto denotato il binding creato è di tipo diverso. Quando il legame non può cambiare allora si lega il nome ad un valore (*sia il valore di una costante, il tipo della variabile, o qualunque altra informazione immutabile dopo la definizione*).

Quando abbiamo una variabile, questa può essere modificata durante il binding alla memoria, ma il valore del suo contenitore, nel senso che l'informazione del contenitore, legata al nome, non cambia, cambia solo il valore associato. Questa situazione viene modellata combinando due binding: Nome-locazione (*legame non modificabile*) e locazione-valore (*legame modificabile*), il primo fissato dalla definizione il secondo modificabile dall'esecuzione.

Tutti i legami sono immutabili dopo la definizione sono detti statici.

Binding statico

Un binding è statico se occorre per la prima volta dall'esecuzione e rimane invariato durante tutta l'esecuzione del programma.

Sono binding statici, ad esempio, i tipi delle variabili nei linguaggi fortemente tipati.

I legami che possono cambiare durante l'esecuzione sono detti legami dinamici:

Binding dinamico

Un binding dinamico se occorre durante l'esecuzione è può variare.

Sono binding dinamici, ad esempio, quelli tra locazioni/celle di memoria e valori contenuti nelle locazioni.

4.2.4 Tempi di binding

È importante anche stabilire quando avviene la creazione dei binding:

Early binding:
- C
- Fortran
- COBOL
- Pascal (in parte)

Late binding:
- Pascal (in parte)
- Snobol4
- LISP
- APL

A sinistra, per ogni nome tutto viene risolto a tempo di compilazione, quindi abbiamo una allocazione statica della memoria, con tutti gli indirizzi assoluti, questo rende l'esecuzione estremamente veloce ma la programmazione poco flessibile.

A destra tutto avviene a tempo di esecuzione, quindi la memoria viene allocata dinamicamente, tutti i binding vengono creati dinamicamente con indirizzi non assoluti. Questo rende l'esecuzione più lenta, ma la programmazione puù flessibile. Altri linguaggi stanno nel mezzo allocando solo quando serve, ad esempio in presenza di ricorsione come in C.

4.3 Identificatori, ambienti e dichiarazioni

Nei linguaggi di programmazione, per riferire valori generati dalle espressioni usiamo il concetto di identificatore. Un identificatore è di fatto un nome che viene associato all'oggetto da identificare/riferire. Un nome è una sequenza di simboli usata per rappresentare qualcosa, permettendo un processo di astrazione (*ad esempio, locazioni e funzioni*): abbiamo un'entità che ricorre più volte o che sarebbe complesso descrivere all'interno di una frase, e quindi le diamo un nome e con il suo identificatore rappresentiamo il suo significato.

Per riferire i valori (*oggetti denotabili*) associati agli identificatori usiamo il concetto di ambiente, definito come insieme di legami (*bindings*) tra identificatori e oggetti denotabili, ovvero tutti quegli oggetti del nostro linguaggio che sono riferibili mediante un identificatore. Solitamente, quando si parla di ambiente ci si riferisce solo alle associazioni che non sono stabilite dalla definizione del linguaggio, ma dal programmatore. Quindi è quella componente della macchina astratta che per ogni nome introdotto dal programmatore, e per ogni punto di programma, permette di determinare quale sia l'associazione corretta. Va osservato che l'ambiente non esiste al livello della macchina fisica, fa parte delle caratteristiche dei linguaggi ad alto livello e quindi deve essere opportunamente simulato nelle implementazioni.

La dichiarazione implementa la creazione dei legami. In generale, le occorrenze in una espressione (*ovvero le occorrenze di uso*), sono **free occurrences**. Se vogliamo dar loro significato dobbiamo rendere tali occorrenze applied occurrences inserendole nello scope di binding occurrences. Quindi le dichiarazioni forniscono le binding occurrences che, dando significato all'identificatore, prima del suo uso, lo rendono legato e non più libero.

Ambiente

L'ambiente è insieme delle associazioni fra nomi e oggetti denotabili esistenti a run-time in uno specifico punto del programma ed in uno specifico momento dell'esecuzione.

Dichiarazione

La dichiarazione è meccanismo (*implicito o esplicito*) col quale si crea un'associazione nell'ambiente.

4.3.1 Termini chiusi e ground

Termine chiuso

In un linguaggio (*con identificatori*), un termine chiuso in cui non ci sono identificatori liberi è detto chiuso.

Il significato delle frasi chiuse è consiste nel poter dare significato alla frase senza richiedere un ambiente esterno. In termini di linguaggi di programmazione, significa che un programma Pascal completo, ad esempio, non ha FI (*identificatori liberi*) e quindi può essere eseguito a partire da un ambiente vuoto, in quanto non ci sono identificatori che richiedono un significato all'esterno.

Ad esempio, non possiamo dare significato ad `a+b+c+x` se non viene dato un significato ad `a`, `b`, `c` e `x`. Abbiamo bisogno quindi di assunzioni sull'ambiente, che consiste sull'insieme di binding per gli identificatori, e i binding non sono altro che uguaglianze del tipo `nome=entità`. Quindi un programma è una frase chiusa se ogni occorrenza d'uso è preceduta da una occorrenza di definizione che stabilisce il significato dell'identificatore.

Termine gound

In un linguaggio (*con identificatori*), un termine in cui non ci sono identificatori è detto ground.

Chiaramente un termine ground non richiede nemmeno un ambiente non avendo identificatori. La prima versione della categoria sintattica delle espressioni che abbiamo dato è costituita solo da termini ground (*non avendo inserito il termine degli identificatore come terminale della sua grammatica*), ed effettivamente abbiamo potuto dare semantica alle espressioni senza parlare di ambienti.

4.4 Ambienti (in IMP)

Nel nostro semplice linguaggio imperativo consideriamo solo interi e booleani, quindi per il momento questi, nel nostro linguaggio sono gli unici oggetti denotabili:

$$\mathcal{N} = \text{Insieme di numerali nella macchina sottostante: } m, n, p$$

$$\mathcal{B} = \{\texttt{true},\texttt{false}\} : t$$

I valori denotabili, nel nostro linguaggio, costituiscono l'insieme `DVal`, che quindi per ora è `Int` $\cup$ `Bool`, ma che poi verrà adeguato ai vari costrutti con cui arricchiremo il linguaggio.

Possiamo ora definire formalmente il concetto di ambiente che associa identificatori agli oggetti denotabili ($\perp$ *va associato all'identificatore non definito, ovvero non associato ad alcun valore*). Quindi un ambiente per un insieme di identificatori finito V (Env_V) è una funzione che ad ogni identificatore associa un valore denotabile, oppure il valore non definito $\perp$. L'ambiente è l'unione (*disgiunta*) di tutte queste funzioni al variare dell'insieme V. Questo ambiente è detto dinamico, per distinguerlo poi da quello che verrà chiamato statico.

Definizione 4.4.1 Ambiente

Un ambiente dinamico è un elemento dinamico dello spazio di funzioni

$$Env = \cup_{V \subseteq Id} Env_V$$

dove $Env_V : V \to DVal \qquad \cup \{\perp\}$ *ha metavariabili* ρ

4.5 Espressioni con identificatori

Riprendiamo ora le espressioni per arricchire la loro semantica con gli identificatori. Quindi la sintassi ora è la grammatica completa delle espressioni:

$$\begin{array}{lllllll} < EXP > & & & & & & \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{A} & | & \mathcal{B} & & \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{I} & | & \mathcal{N} & | & \mathcal{A}\, op\, \mathcal{A} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{I} & | & true & | & false \\ & & & | & not\, \mathcal{B} & | & \mathcal{B}\, or\, \mathcal{B} \quad | \quad \mathcal{A} = \mathcal{A} \end{array}$$

per prima cosa dobbiamo definire $\mathcal{E}^V$ delle espressioni (*con identificatori*) valutate ad intero o booleano, ovvero quelli abbiamo detto essere alberi di valutazione, con metavariabile e. Queste costituiscono l'insieme delle nuove configurazioni del sistema ùdi transizione. Invece, l'insieme dei valori (*ovvero delle configurazioni terminali del sistema di transizione*) e valori rimangono inalterati, in quanto non cambiano con l'uso degli identificatori.

Sistema di transizione

$$\Gamma = \mathcal{E}^V, \mathcal{T} = \mathcal{N} \cup \mathcal{B}, op \in \{+, -, *, =\}\, bop \in \{=, or\}$$

Per prima cosa tutte le regole precedentemente definite per le espressioni devono essere riscritte integrando l'ambiente nella regola, in quanto le espressioni con identificatori devono essere valutate dentro un ambiente. Quindi, tutte le regole $\mathcal{E}_i$ viste diventano:

$$\mathcal{E}_i : \rho \vdash e \to_e e'$$

dove ρ è l'ambiente di valutazione delle espressioni, ovvero la specifica dell'associazione tra identificatori e oggetti denotati. Infine, il pedice della freccia ($\to_e$) denota quale sistema di

transizione si sta usando (*perché ne definiremo uno per ogni categoria sintattica*). Quindi le regole che scriviamo adesso sovrascrivono completamente quelle già viste, per quanto facciano tutte la stessa cosa, semplicemente dentro un ambiente ρ.

4.5.1 Identificatori liberi

Occorrenza libera

Un identificatore è in posizione libera se il suo uso non è nel raggio d'azione di una definizione.

Data una espressione o una frase scritta in un certo linguaggio, gli identificatori liberi sono quelli che non hanno nessuna dichiarazione che li coinvolge. Questo significa che la frase in questione è necessariamente parte di una frase più grande dove gli identificatori liberi sono legati e trovano significato. Quindi sono identificatori liberi in una espressione tutti quelli che hanno solo occorrenze libere e non di applicazione, ovvero occorrenze che non sono nel raggio di azione di una occorrenza di binding (*di definizione*). Dentro un'espressione, la presenza di un identificatore libero richiede l'accesso ad un "ambiente" esterno che gli dia significato. Quindi, ad una espressione con identificatori liberi non possiamo dare significato. Possiamo capire il concetto di libertà guardando alla struttura dell'abstract syntax tree e in funzione di questo possiamo definire gli identificatori liberi per induzione sulla struttura sintattica. Quindi definiamo l'insieme degli identificatori che hanno occorrenze libere all'interno di un'espressione $IMP : (bop \in \{or, =, +, -, *\},\ uop = not)$

Definizione 4.5.1 Identificatori liberi *La funzione $FI : Exp \to Id$, che ad ogni espressione associa l'insieme degli identificatori liberi in essa contenuti, è definita per induzione da:*

$$FI(h) = \varnothing$$
$$FI(id) = \{id\}$$
$$FI(e_0 \,\texttt{bop}\, e_1) = FI(e_0) \cup FI(e_1)$$
$$Fi(\texttt{uop}\, e) = FI(e)$$

Ovviamente così come possiamo definire gli identificatori liberi, possiamo definire anche quelli legati (`DI`). In generale anche questi vanno definiti per induzione sulla struttura sintattica delle espressioni, o di una categoria sintattica. Ovviamente nel nostro caso la definizione è molto semplice in quanto nelle espressioni non abbiamo costrutti che creano legami, occorrenze, ma solo costrutti che utilizzano occorrenze. Quindi l'insieme delle occorrenze legate/definite è vuoto. Si noti che $\texttt{FI}(e) \cup \texttt{DI}(e) = \texttt{id}(e)$. Questo concetto esiste in tutti i PL.

4.5.2 Regole

Ora riportiamo le regole aggiornate con l'ambiente, quelle già descritte non verranno ulteriormente commentate, essendo esattamente le stessa già descritte per le espressioni.

$$\mathcal{E}_1 : \rho \vdash m \,\texttt{op}\, k \to_e p \qquad \text{se } m \,\texttt{op}\, n = k, m, n \in \mathcal{N} \quad k \in \mathcal{N} \cup \mathcal{B}$$

La seconda regola adesso cambia, in quanto ora ci serve l'assioma per gli identificatori:

$$\mathcal{E}_2 \rho \vdash I \to_e n \qquad se \qquad \rho(I) = n$$

In questo assioma quindi diciamo che quando incontriamo un identificatore, questo viene valutato nel valore che l'ambiente associa all'identificatore. È chiaro che questa regola è applicabile solo se I è un identificatore per il quale in ρ esiste una associazione.

$$\frac{\rho \vdash e \to_e e'}{\rho \vdash e\, op\, e_0 \to_e e'\, op\, e_0}\ (\varepsilon_3)$$

$$\frac{\rho \vdash e \to_e e'}{\rho \vdash m\, op\, e \to_e m\, op\, e'}\ (\varepsilon_4)$$

$$\mathcal{E}_5 : \rho \vdash m\, \texttt{bop}\, k \to_e p \qquad \text{se } m\, \texttt{op}\, n = k, m, n \in \mathcal{N} \quad k \in \mathcal{N} \cup \mathcal{B}$$

$$\frac{\rho \vdash e \to_e e'}{\rho \vdash e\, bop\, e_0 \to_e e'\, bop\, e_0}\ (\varepsilon_{3'})$$

$$\frac{\rho \vdash e \to_e e'}{\rho \vdash k\, bop\, e_0 \to_e k\, bop\, e'}\ (\varepsilon_6)$$

$$\mathcal{E}_7 : \rho \vdash \texttt{not}\, t_1 \to_e t \qquad \text{se } \texttt{not}\, t_1 = t, \qquad t_1 \in \mathcal{B}$$

$$\frac{\rho \vdash e \to_e e'}{\rho \vdash not\, e \to_e not\, e'}\ (\varepsilon_8)$$

4.6 Tipo

Ora aggiungiamo un nuovo ingrediente al nostro linguaggio: i tipi. Il tipo determina l'insieme di valori (*che condividono una certa proprietà strutturale*) dotato di un insieme di operazioni definite per i valori di quel tipo. In altre parole, il tipo determina il range di valori che un identificatore può memorizzare/denotare e l'insieme di operazioni definite su quei valori. A volte determina qualche informazione in più, ad esempio per i floating point il tipo determina anche al precisione.+

Esempi di tipo sono: $Integer, String, Int \to Bool, (Int \to Int) \to Bool$. In questo caso, ogni tipo è effettivamente un insieme omogeneo di valori e di operazioni su quei valori.

Esempi di elementi che non sono un tipo: $3, true, x \to x$.

In questo caso, o l'elemento non è un insieme omogeneo, oppure è omogeneo, ma parziale, quindi non raccoglie tutti gli oggetti su cui posso operare allo stesso modo. Anche se non sempre questa distinzione è così netta, e dipende dal linguaggio. I tipi sono utili a vari livelli per molti diversi:

- Livello di progetto: organizzano l'informazione.
- Livello di programma: identificano e prevengono errori, costituiscono un controllo dimensionale.
- Livello di implementazione: permettono alcune ottimizzazioni.

4.6.1 Type binding

Il tipo diventa ora un nuovo oggetto denotabile, e quindi associabile agli identificatori. In generale il tipo non viene associato all'identificatore per essere riferito come oggetto, ma per descriverne proprietà che permettono di descrivere vincoli semantici, non descrivibili mediante la grammatica del linguaggio (*vincoli contestuali*).

Per capire bene il concetto di tipo e di legame di tipo è importante porsi due domande: Come viene specificato il tipo? Quando il avviene il legame?

Quando il legame è statico, può essere specificato con una dichiarazione sia esplicita che implicita: Esplicita: Quando esiste un comando del linguaggio che permette di dichiarare il tipo delle variabili; Implicita: È un meccanismo di default che specifica il tipo delle variabili attraverso convenzioni di default. In tal caso, il vantaggio consiste in una maggiore facilità di scrittura, lo svantaggio principale è la scarsa affidabilità.

Si parla di legame statico quando, una volta creato, il legame rimane inalterato per l'intera esecuzione. Si parla di legame dinamico quando questo può cambiare durante l'esecuzione. Il binding dinamico è presente in linguaggi come JavaScript, Python, Ruby, PHP, etc, e viene specificato attraverso un comando di assegnamento (JavaScript).

```
1   list = [2, 4.33, 6, 8];
2   list = 17.3;
```

Il vantaggio principale è naturalmente la flessibilità, ma ci sono vari svantaggi: I costi alti di implementazione e una difficile rilevazione di errori di tipo. Bisogna notare che il type binding dinamico può avvenire solo nei linguaggi interpretati. I computer non hanno istruzioni i cui tipi degli operandi non sono noti, quindi un compilatore non può costruire un'istruzione macchina per una espressione `A+B` se i tipi di `A` e `B` non sono noti a tempo di compilazione. Un interprete puro per fare questa operazione però impiega 10 volte più tempo, perché deve anche risolvere i binding dei tipi, ma questo tempo viene nascosto dal tempo di interpretazione. Viceversa, raramente i linguaggi con binding statico di tipo sono interpretati, essendo più efficiente la traduzione in linguaggio macchina.

4.6.2 Necessità di una semantica statica

Dobbiamo quindi definire uno strumento formale che permetta di creare legami di tipo, e permetta di verificare che i vincoli contestuali siano verificati.

Questo strumento consiste nella così detta semantica statica che permette di associare il tipo ad ogni identificatore. In funzione di questo, la semantica statica avrà quindi il compito di associare un tipo ad ogni espressione scritta correttamente (*ben formata)*, e avrà anche il compito poi di verificare se dichiarazioni e comandi sono scritti correttamente (*ben formati*).

La necessità di considerare uno strumento diverso da quello definito per valutare le espressioni, consiste nel fatto che sullo stesso identificatore, il legame di tipo non cambia (*consideriamo il caso di linguaggi con tipaggio statico*) mentre i legami con i valori cambiano con l'esecuzione, quindi abbiamo necessariamente bisogno di costruire due sistemi diversi:

- La semantica per la valutazione delle espressioni, l'elaborazione delle dichiarazioni e l'esecuzione dei comandi diventa semantica dinamica. Essa permette di creare e modificare i legami con gli oggetti denotati, siano questi valori, locazioni o altro. Questi legami sono quelli che formano il così detto ambiente dinamico, il quale viene creato e modificato durante l'elaborazione delle dichiarazioni e l'esecuzione dei comandi (*lo abbiamo già introdotto e definito quando abbiamo parlato di identificatori per le espressioni*);
- La semantica per la creazione di legami di tipo e per la verifica della corretta forma degli elementi di un programma viene invece chiamata semantica statica. Nella sua verifica della forma permette anche di controllare quelli che abbiamo chiamato vincoli contestuali. I legami di tipo sono raccolti nel così detto ambiente statico, creato esclusivamente dalla semantica statica delle dichiarazioni e che non può essere modificato (*nel nostro linguaggio*) durante l'esecuzione.

4.6.3 Ambiente statico e semantica statica

Definiamo quindi il concetto di ambiente statico, chiamato così per distinguerlo dal concetto di ambiente già introdotto che ora chiameremo ambiente dinamico. L'ambiente statico associa agli identificatori il tipo degli oggetti che denotano.

Definizione 4.6.1 Ambiente statico
Un ambiente statico (o di tipi) è un elemento dello spazio d funzioni $TEnv$ definito da

$$TEnv = \cup_{V \subseteq_f Id} TEnv_V$$

dove $TEnv_V : V \to DTyp$ ha metavariabile Δ e $DTyp$ è l'insieme dei tipi denotabili.

Usiamo la notazione $\Delta \vdash_V$ quando vogliamo esplicitare il dominio V degli identificatori a cui l'ambiente dinamico associa il tipo in una derivazione.

Nel nostro linguaggio i $DTyp$, che sono i tipi denotabili, sono per il momento solo interi e booleani. Consideriamo inoltre un elemento speciale che rappresenta il tipo di un identificatore non inizializzato.

$$\tau \in DTyp = \{\texttt{int}, \texttt{bool}, \bot\}$$

A questo punto possiamo definire la semantica statica come un insieme di regole che permettono di associare un tipo ad ogni espressione corretta; in tal caso l'espressione è detta **ben formata**.

Le regole della semantica statica hanno seguente forma:

$$\mathcal{E}_{s_i} : \Delta \vdash_V e : \tau$$

Dove Δ è l'ambiente statico nel quale valutare staticamente l'espressione, ovvero l'insieme dei legami statici validi nel contesto di valutazione. Mentre V indica l'insieme degli identificatori per i quali l'ambiente definisce una associazione. Quando questi elementi non ci sono, significa che valutiamo nell'ambiente vuoto. In tal caso diciamo che `e` è di tipo τ nell'ambiente Δ.

4.6.4 Semantica statica delle espressioni

Vediamo allora come sono fatte le regole della semantica statica delle espressioni nel nostro linguaggio. Le prime regole sono due assiomi che dicono che, nell'ambiente vuoto (*e quindi in ogni ambiente possibile*), un numero intero ha tipo intero (`int`), e una costante booleana ha tipo booleano (`bool`):

$$\mathcal{E}_{s_1} :\vdash n : \texttt{int} \qquad\qquad \mathcal{E}_{s_2} :\vdash t : \texttt{bool}$$

L'altro assioma riguarda gli identificatori, in tal caso la regola determina che l'identificatore ha come tipo proprio quello che l'ambiente statico Δ del contesto gli associa:

$$\mathcal{E}_{s_3} : \Delta \vdash_v I : \tau \qquad se\, \Delta(I) = \tau, I \in V$$

Adesso vediamo le regole. Esser riguardano operazioni booleane e aritmetiche ($op \in \{+, -, *\}$), e le definizioni usando delle funzioni che determinano il tipo del risultato di un operatore booleano o aritmetico in funzione del tipo degli operandi. Analogamente diamo la regola per il `not` booleano.

$$\frac{\Delta \vdash_V e_1 : bool \qquad \Delta \vdash_V e_2 : bool}{\Delta \vdash_V e_1\, or\, e_2 : bool}\ (\mathcal{E}_{s_4})$$

$$\frac{\Delta \vdash_V e_1 : int \qquad \Delta \vdash_V e_2 : int}{\Delta \vdash_V e_1\, op\, e_2 : int}\ (\mathcal{E}_{s_5})$$

$$\frac{\Delta \vdash_V e_0 : bool}{\Delta \vdash_V not\, e_0 : bool}\ (\mathcal{E}_{s_6})$$

$$\frac{\Delta \vdash_V e_1 : int \qquad \Delta \vdash_V e_2 : int}{\Delta \vdash_V e_1 = e_2 : bool}\ (\mathcal{E}_{s_7})$$

4.6.5 Compatibilità di ambienti

Ora abbiamo due concetti di ambiente diverso che parlano degli stessi identificatori. È chiaro che possiamo aspettarci che i due ambienti definiti sullo stesso programma parlino in modo coerente degli stessi identificatori.

Definiamo quindi il concetto di compatibilità tra ambienti (*statico e dinamico*).

Definizione 4.6.2 **Compatibilità di ambienti**
Sia ρ: V un ambiente dinamico e Δ: V un ambiente statico con $V \subseteq_f Id$. Gli ambienti ρ e Δ sono compatibili (scritto $\rho : \Delta$) se e soltanto se:

$$\forall\, id \in V.(\Delta(id) = \tau \wedge \rho(id) \in \tau)$$

Ovvero, un ambiente statico e uno dinamico sono compatibili in modo coerente degli stessi identificatori. In particolare, questo significa che se l'ambiente statico stabilisce che una certa espressioni ha tipo τ, allora la semantica dinamica deve arrivare ad associare all'identificatore un valore contenuto nel tipo τ, ovvero nell'insieme dei valori con lo stesso tipo τ.

Nelle regole facciamo un'ultima modifica di forma, ovvero non guardiamo più l'ambiente dinamico specificando l'insieme degli identificatori, ma specificando l'ambiente statico compatibile:

$$\rho \vdash \Delta$$

Vediamo quindi che non specifichiamo più l'insieme degli identificatori V, ma questo rimane implicito dentro l'ambiente statico.

4.6.6 Espressioni con id costanti: le regole

Ora riportiamo le regole aggiornate anche con l'ambiente statico. Le regole non verranno ulteriormente commentate, essendo esattamente già descritte in precedenza. In queste regole $op \in \{x.-, *, =\}$ e $bop \in \{\texttt{or}, =\}$.

$$\mathcal{E}_1 : \rho \vdash_\Delta m \,\texttt{op}\, n \to_e k$$

$$\mathcal{E}_2 : \rho \vdash_\Delta I \to_e n \qquad \rho(I) = n$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta e \to_e e'}{\rho \vdash_\Delta e\, op\, e_0 \to_e e'\, op\, e_0}\ (\varepsilon_3)$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta e \to_e e'}{\rho \vdash_\Delta m\, op\, e \to_e m\, op\, e'}\ (\varepsilon_4)$$

$$\mathcal{E}_5 : \rho \vdash_\Delta m \,\texttt{bop}\, k \to_e p \qquad \text{se } m \,\texttt{op}\, n = k, m, n \in \mathcal{N} \quad k \in \mathcal{N} \cup \mathcal{B}$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta e \to_e e'}{\rho \vdash_\Delta e\, bop\, e_0 \to_e e'\, bop\, e_0}\ (\varepsilon_{3'})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta e \to_e e'}{\rho \vdash_\Delta k\, bop\, e_0 \to_e k\, bop\, e'}\ (\varepsilon_6)$$

$$\mathcal{E}_7 : \rho \vdash_\Delta \texttt{not}\, t_1 \to_e t \qquad \text{se } \texttt{not}\, t_1 = t, \qquad t_1 \in \mathcal{B}$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta e \to_e e'}{\rho \vdash_\Delta not\, e \to_e not\, e'}\ (\varepsilon_8)$$

4.7 Dichiarazione in IMP

Finalmente abbiamo tutti gli elementi per introdurre la semantica delle dichiarazioni del nostro linguaggio. Ricordiamo che le dichiarazioni ci servono come meccanismo sintattico per creare legami tra identificatori e oggetti denotati. Le dichiarazioni quindi devono essere elaborate per ottenere la associazione che descrivono.

Partiamo quindi con introdurre la sintassi delle dichiarazioni, ovvero la loro grammatica:

$$\begin{array}{llcll} \mathcal{D}: & \texttt{<Dec>} & D & \to & \texttt{nil} \quad | \quad \texttt{const I:}\tau = e \\ & & & & D\,\texttt{in}\,D \quad D\,;\,D \quad | \quad \rho \end{array}$$

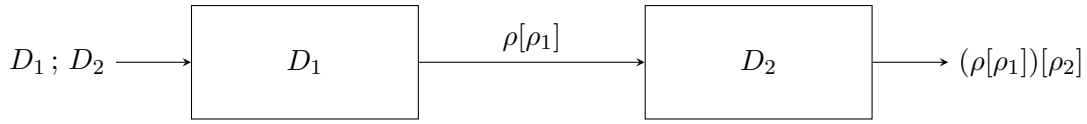
Quindi D è il simbolo non terminale della grammatica che corrisponde (*genera*) tutti i termini della categoria sintattica, ovvero tutte le dichiarazioni nel nostro linguaggio. La dichiarazione

`nil` è la dichiarazione vuota, ovvero quella che crea l'ambiente vuoto. La dichiarazione const `I` : $\tau = e$ di costante serve a definire un identificatore `I` costante (*il cui valore non cambia durante l'esecuzione*) di tipo τ, inizializzato con il valore rappresentato dall'espressione e. Tra i simboli terminali delle dichiarazioni dobbiamo aggiungere anche gli ambienti stessi, questo perché gli ambienti sono le configurazioni finali e quindi devono essere generabili dalla grammatica. Quindi ρ rappresenta la dichiarazione completamente elaborata, il suo valore finale, così come i simboli numerici erano i valori terminali delle espressioni.

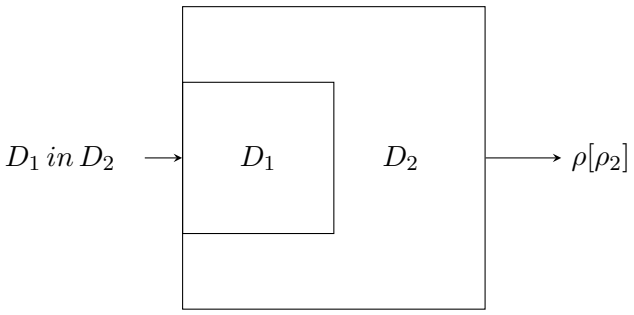
Le altre dichiarazioni sono le dichiarazioni composte, in particolare $D_1 \,;\, D_2$ definisce la composizione sequenziale dove D_1 definisce i legami che si uniscono a quelli di D_2 e che possono anche essere utilizzati da D_2. Invece, D_1 in D_2 definisce la composizione privata, ovvero i legami creati da D1 sono visibili e utilizzabili da D_2 ma non sono visibili all'esterno, dopo l'elaborazione di D_2. In altre parole, D_1 definisce i legami che risolvono le occorrenze libere presenti in D_2.

4.7.1 Comporre dichiarazioni

Abbiamo appena introdotto le dichiarazioni composte, ovvero $D_1 \,;\, D_2$ che definisce la composizione sequenziale e D_1 in D_2 che definisce la composizione privata. Vediamo graficamente come funzionano queste composizioni.



Quindi, nella composizione sequenziale tutto ciò che è definito dalla prima è visibile alla seconda e dopo la dichiarazione (*tranne ciò che la seconda sovrascrive*), mentre in quella privata la prima dichiarazione è appunto privata, esclusiva, per la seconda.



4.8 Identificatori definiti

Prima di fornire le regole della semantica stabiliamo quali identificatori, nelle dichiarazioni, sono liberi (ovvero in posizione libera, non nello scope di nessuna definizione) e quali invece sono in posizione di definizione.

Visto che parliamo di dichiarazioni, partiamo dagli identificatori in posizione di definizione, in quanto l'obiettivo primario delle dichiarazioni è proprio quello di definire identificatori.

Quindi dobbiamo definire la funzione DI che associa ad ogni dichiarazione l'insieme degli identificatori che definisce:

$$DI : Dic \to \wp(Id)$$

La definizione è induttiva sulla struttura delle dichiarazioni:

$$\begin{aligned} DI(\texttt{nil}) &= \varnothing \\ DI(\texttt{const}\, x : \tau\, \texttt{e}) &= \{x\} \\ DI(d_1\, ;\, d_2) &= DI(d_1) \cup DI(d_2) \\ DI(d_1\, \texttt{in}\, d_2) &= DI(d_2) \\ DI(\rho) &= \text{V dove V dominio di } \rho \end{aligned}$$

Vediamo i casi uno alla volta. La dichiarazione nulla ovviamente non definisce identificatori. La dichiarazione di costante definisce precisamente l'identificatore che sta dichiarando, questo significa che dove questa dichiarazione è visibile, l'identificatore x è legato a questa definizione. Nella composizione sequenziale, la composizione definisce tutto ciò che è definito nelle due dichiarazioni. Questo significa che all'esterno della composizione tutte le occorrenze di identificatori qui definiti sono legate. Nella composizione privata le cose sono diverse. Infatti ciò che viene definito nella prima dichiarazione d_1 rimane privato e quindi non risulta legato all'esterno della composizione. Fuori dalla composizione è legato solo ciò che viene definito nella seconda dichiarazione d_2. Infine, il valore terminale, ovvero gli ambienti, definiscono tutti gli identificatori per i quali hanno una associazione.

4.8.1 Identificatori liberi

Ora che abbiamo la caratterizzazione degli identificatori definiti (*ovvero in posizione di definizione*), possiamo stabilire quali sono gli identificatori liberi, quindi fuori dallo scope di una qualche dichiarazione/definizione. Gli identificatori liberi, calcolati dalla funzione `FI`, si possono ottenere anche sulle dichiarazioni, per induzione sulla struttura della grammatica. In questo caso, `FI` applicata ad una dichiarazione restituisce l'insieme degli identificatori liberi nella dichiarazione.

$$FI : Dic \to \wp(Id)$$

In particolare,

$$\begin{aligned} FI(\texttt{nil}) &= \varnothing \\ FI(\texttt{const}\, x : \tau\, \texttt{e}) &= FI(\texttt{e}) \\ FI(d_1\, ;\, d_2) &= FI(d_1) \cup (FI(d_1) \backslash DI(d_2)) \\ FI(d_1\, \texttt{in}\, d_2) &= FI(d_1) \cup (FI(d_1) \backslash DI(d_2)) \\ FI(\rho) &= \varnothing \end{aligned}$$

Ovvero, la dichiarazione nulla, non avendo identificatori, non ne ha liberi. Gli identificatori liberi della dichiarazione di costante sono tutti quelli usati nella espressione che inizializza l'identificatore. Questi identificatori devono essere definiti nell'ambiente di elaborazione perché si possa valutare l'espressione. Nel caso delle due composizioni, sicuramente sono liberi tutti gli identificatori della prima dichiarazione d_1. Sono inoltre liberi tutti gli identificatori che sono liberi nella seconda dichiarazione d_2 ma che non vengono definiti in d_1. Infine un ambiente non ha identificatori liberi, in quanto gli unici identificatori che contiene sono quelli per cui definisce delle associazioni.

4.8.2 Semantica statica delle dichiarazioni

Prima di stabilire come vengono elaborate le dichiarazioni, ovvero prima di fornire la semantica dinamica delle dichiarazioni, vediamo quando una semantica è ben formata, ovvero quando genera un ambiente statico.

Per le dichiarazioni la semantica statica deve associare un l'ambiente statico ad ogni dichiarazione scritta correttamente, in tal caso detta ben formata. Quindi, per le dichiarazioni, le regole avranno la seguente forma, che significa che nel sistema di regole riesco ad associare l'ambiente statico Δ alla dichiarazione d, se questa è ben formata

$$\mathcal{D}_{s_i} : \Delta \vdash_V d : \Delta$$

Vediamo quindi le regole una alla volta. Partiamo dalla dichiarazione vuota che ovviamente genera un ambiente vuoto.

$$\mathcal{D}_{s_1} : \quad \vdash \texttt{nil} : \varnothing$$

Nel caso di un ambiente dinamico, l'ambiente statico associato è quello compatibile, ovvero quello che associa agli identificatori esattamente i tipi dei valori che l'ambiente dinamico associa.

$$\mathcal{D}_{s_2} : \quad \vdash \rho : \Delta \text{ se } \rho \vdash_\Delta$$

Nella dichiarazione di costante, il tipo da associare è stabilito esplicitamente dalla dichiarazione, mentre abbiamo bisogno di valutare il tipo dell'espressione per verificare che la dichiarazione sia ben formata. Quindi, la dichiarazione è ben formata se l'espressione è ben formata ed è esattamente del tipo τ presente nella dichiarazione. In tal caso l'ambiente statico corrispondente è esattamente l'associazione di τ all'identificatore definito x

$$\frac{\Delta \vdash_V e : \tau}{\Delta \vdash_V \texttt{const}\, x : \tau = e : [x \leftarrow \tau]}\ {}^{(\mathcal{D}_{s_3})}$$

4.8.3 Semantica statica delle dichiarazioni composte

Dobbiamo ora fornire le regole della semantica statica per le dichiarazioni composte. Prima di dare queste regole dobbiamo definire il concetto di aggiornamento degli ambienti (*definizione valida anche per gli ambienti dinamici, quando servirà*). Si considerino due ambienti $\beta, \beta' \in Env$ dove $\beta : V, \beta' : V'$ $(V, V' \in Id)$, ovvero β è definito sugli identificatori in V, β' è definito

sull'insieme di identificatori V'. L'aggiornamento dell'ambiente β mediante l'ambiente β' è l'ambiente $\beta'' \in Env$, definito come

$$\beta''(I) = \begin{cases} \beta'(I) & \text{se } I \in V' \\ \beta(I) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In altre parole, l'ambiente che aggiorna ha la precedenza, tutto quello di cui questo ambiente non parla rimane inalterato. A questo punto la regola per la composizione privata è la seguente, dove V' è il dominio dell'ambiente Δ_1

$$\frac{\Delta \vdash_V d_1 : \Delta_1 \qquad \Delta[\Delta_1] \vdash_{V \cup V'} d_2 : \Delta_2}{\Delta \vdash_V d_1 \ \texttt{in} \ d_2 : \Delta_2} \ (\mathcal{D}_{s_4})$$

In tal caso, nelle premesse dobbiamo trovare per prima cosa l'ambiente statico Δ_1 associato alla dichiarazione d_1 se questa è ben formata. Questo ambiente viene usato per aggiornare l'ambiente contestuale con le nuove associazioni create da d_1. L'ambiente statico risultante viene usato per associare l'ambiente Δ_2 alla dichiarazione d_2. A questo punto, l'ambiente associato alla dichiarazione composta è solo l'ambiente associato alla dichiarazione d_2, in quanto d1 (*e quindi* Δ_1) è esclusivamente visibile/utilizzabile per l'elaborazione di d_2.

4.8.4 Semantica statica delle dichiarazioni composte

Infine, dobbiamo dare la semantica statica per la composizione sequenziale. In tal caso la regola è la seguente, dove V' è il dominio dell'ambiente Δ_1

$$\frac{\Delta \vdash_V d_1 : \Delta_1 \qquad \Delta[\Delta_1] \vdash_{V \cup V'} d_2 : \Delta_2}{\Delta \vdash_V d_1; d_2 : \Delta_1[\Delta_2]} \ (\mathcal{D}_{s_4})$$

In tal caso, dobbiamo associare l'ambiente statico Δ_1 corrispondente alla dichiarazione d_1, poi si aggiorna l'ambiente esterno Δ con questo ambiente Δ_1 e quindi nell'ambiente risultante $\Delta[\Delta_1]$ si elabora la dichiarazione d_2 che viene quindi associata all'ambiente Δ_2. Infine, l'ambiente quindi che si associa alla dichiarazione composta sequenzialmente è esattamente Δ_1 aggiornato da Δ_2, ovvero $\Delta_1[\Delta_2]$. Questo significa che tutto quello che viene dichiarati nella dichiarazione composta è visibile all'esterno, tranne ciò che viene definito nella prima dichiarazione d_1 e ridefinito nella seconda dichiarazione d2. Quindi, se ad esempio, in d_1 un identificatore x viene dichiarato booleano, mentre dentro d_2 lo stesso identificatore x viene dichiarato intero, questa seconda definizione riscrive la prima e all'esterno della composizione x è visibile come interno.

4.9 Semantica dinamica delle dichiarazioni

Per prima cosa dobbiamo definire l'insieme $\mathcal{D}$ delle dichiarazioni con identificatori, (*ma non con variabili*) da elaborare in ambienti (dinamici), ovvero in insiemi di associazioni tra identificatori e valori, con metavariabile d.

Dichiarazioni $\mathcal{D}$

Insieme di associazioni tra identificatori e valori (*oggetti denotati*) derivabili nella grammatica: d.

L'insieme dei valori derivabili lo abbiamo già definito quando abbiamo introdotto gli identificatori ed è denotato `DVal`, che per il momento può solo contenere interi, booleani e il tipo degli identificatori non definiti (*questo tipo, viste le nostre dichiarazioni che inizializzano sempre, non sarebbe necessario e non verrà ulteriormente considerato*). Quindi definiamo l'insieme delle configurazioni Γ come l'insieme delle dichiarazioni $\mathcal{D}$ da elaborare in ambienti, l'insieme delle configurazioni terminali T sono ovviamente gli ambienti (dinamici), che non hanno elementi da elaborare/valutare ulteriormente. Come sappiamo le configurazioni terminali devono essere un sottoinsieme delle configurazioni, ed effettivamente gli ambienti sono dichiarazioni elaborate primitive. A partire da questi insiemi possiamo definire il sistema di transizione.

Sistema di transazione

$$\Gamma = \mathcal{D}, \mathcal{T} = \texttt{Env}$$

Le regole del sistema di transizione, come per le espressioni, vanno definite induttivamente sulla struttura sintattica delle dichiarazioni. Le regole avranno la forma

$$\mathcal{D}_i : \ \rho \vdash_\Delta d \to_d d'$$

dove, ρ è l'ambiente nel quale elaboriamo la dichiarazione, compatibile con l'ambiente statico Δ, mentre il pedice d della freccia serve ad indicare che la regola è del sistema di transizione delle dichiarazioni.

4.9.1 Regole

Introduciamo ora le regole per l'elaborazione delle dichiarazioni. La prima regola è una assioma che ci dice che la dichiarazione nulla viene elaborata nell'ambiente dinamico vuoto.

$$\mathcal{D}_1 : \quad \texttt{nil} \to_d \varnothing$$

Anche la seconda regola è una assioma, e ci dice che la dichiarazione di costante (*assumendo che sia ben formata*) viene elaborata nell'ambiente che associa all'identificatore definito dalla dichiarazione, il valore inserito nella dichiarazione per l'inizializzazione:

$$\mathcal{D}_2 : \ \rho \vdash_\Delta \quad \texttt{const}\, x_\tau = k \to_d [x = k]$$

Chiaramente, se nella dichiarazione l'identificatore viene inizializzato con una espressione non valutata, dobbiamo prima valutare l'espressione, in modo da arrivare ad un valore costante e poter applicare l'assioma.

$$\frac{\rho \vdash_\Delta e \to_e e'}{\rho \vdash_\Delta \texttt{const}\, x : \tau = e \to_d \texttt{const}\, x : \tau = e'} \ (\mathcal{D}_3)$$

Vediamo ora le composizioni di dichiarazioni, in entrambi i casi per prima cosa dobbiamo elaborare la dichiarazione a sinistra, e solo quando questa è completamente elaborata possiamo iniziare ad elaborare quella a destra. Si noti che, al contrario di quanto avveniva per le espressioni, qui non possiamo cambiare l'ordine di valutazione, in quanto nessuna delle due composizioni è commutativa, infatti l'ambiente associato alla prima dichiarazione servirà sempre per elaborare la seconda.

Quindi per la composizione sequenziale le regole sono:

$$\frac{\rho \vdash_\Delta d \to_d d'}{\rho \vdash_\Delta d; d_1 \to_d d'; d_1} \ (\mathcal{D}_4)$$

$$\frac{\rho[\rho_0] \vdash_{\Delta[\Delta_0]} d_1 \to_d d_1'}{\rho \vdash_\Delta \rho_0; d_1 \to_d \rho_0; d_1'} \ (\mathcal{D}_5)$$

$$\mathcal{D}_6 : \rho \vdash_\Delta \rho_0; \rho_1 \to_d \rho_0[\rho_1]$$

Quindi, una volta che la dichiarazione a sinistra è stata completamente elaborata in un ambiente ρ_0 possiamo iniziare (*con la regola* $\mathcal{D}_5$) a valutare la dichiarazione a destra. Quando anche questa dichiarazione è stata completamente elaborata (nell'ambiente esterno ρ aggiornato da quello restituito dalla prima dichiarazione ρ_0, ovvero in $\rho[\rho_0]$) in un ambiente ρ_1, allora possiamo applicare l'assioma (*regola* $\mathcal{D}_6$) ottenere come ambiente risultante l'ambiente associato alla prima dichiarazione ρ_0 aggiornato dall'ambiente associato alla seconda dichiarazione ρ_1, ovvero $\rho_0[\rho_1]$.

Per la composizione privata le regole sono analoghe, solo che quando entrambe le dichiarazioni sono tate elaborate, solo l'ambiente associato alla seconda dichiarazione ρ_1 viene restituito come ambiente risultante.

$$\frac{\rho \vdash_\Delta d \to_d d'}{\rho \vdash_\Delta d \ \texttt{in} \ d_1 \to_d d' \ \texttt{in} \ d_1} \ (\mathcal{D}_7)$$

$$\frac{\rho[\rho_0] \vdash_{\Delta[\Delta_0]} d_1 \to_d d_1'}{\rho \vdash_\Delta \rho_0 \ \texttt{in} \ d_1 \to_d \rho_0 \ \texttt{in} \ d_1'} \ (\mathcal{D}_8)$$

$$\mathcal{D}_9 : \rho \vdash_\Delta \rho_0 \ \texttt{in} \ \rho_1 \to_d \rho_1$$

4.10 Valutazione ed equivalenza

Come abbiamo più volte sottolineato, le regole della semantica dinamica, ovvero del sistema di transizione, descrivono formalmente come vengono elaborate le dichiarazioni del nostro linguaggio. Quindi, possiamo usare queste regole ora per definire formalmente cosa significa elaborare una dichiarazione.

Sia ρ un ambiente dinamico. Formalmente ρ è un elemento dentro `Env`. Allora l'elaborazione è una funzione che prende una dichiarazione sintattica, ovvero un elemento in $\mathcal{D}$ (*una configurazione del sistema di transizione*) e gli associa l'ambiente che esso rappresenta (*significato dato da una configurazione finale*).

Elaborazione delle dichiarazioni

La valutazione è una funzione $\texttt{Elab} : \mathcal{D} \to \mathit{Env}$ che descrive il comportamento dinamico delle dichiarazioni restituendo l'ambiente in cui esse sono elaborate:

$$\texttt{Elab}(d) = \rho \iff d \to^* \rho$$

A questo punto, il concetto di elaborazione può essere usato per definire formalmente quando due dichiarazioni sono equivalenti, ovvero quando due dichiarazioni, potenzialmente scritte con diversa sintassi, rappresentano invece lo stesso ambiente, ovvero hanno lo stesso significato.

Equivalenza di dichiarazioni

L'equivalenza di dichiarazioni è una relazione $\equiv \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ definita come segue:

$$d_0 \equiv d_1 \iff \texttt{Elab}(d_0) = \texttt{Elab}(d_1)$$

Grazie a questa definizione, possiamo quindi dimostrare che, ad esempio, la dichiarazione const x : `int` $= (3 + 5) * 2$ è equivalente alla dichiarazione const x : `int` $= (1 + 3) * 4$, pur essendo due dichiarazioni sintatticamente diverse.

4.11 Come si usano le regole

Le regole forniscono un meccanismo di ragionamento, che consiste in un processo di prova ricorsivo di tipo top-down. Ovvero, parto da ciò che devo dimostrare e ricorsivamente determino fatti più semplici da dimostrare che combinati danno la dimostrazione iniziale cercata. Questo processo nasconde l'algoritmo di esecuzione che viene eseguito dalla macchina, ovvero le regole danno il progetto dell'interprete con cui l'algoritmo ricorsivo segue la struttura del linguaggio.

Inoltre questo sistema è deterministico, nel senso che sappiamo in ogni istante quale regola applicare, quindi otteniamo uno stile di prova logico-matematico basato su un sistema di transizione deterministico.

Capitolo 5

Comandi

5.1 Memoria

Ripartiamo da una differenza importante tra azioni reversibili e irreversibili:

Azioni reversibili

Le azioni reversibili sono trasformazioni i cui effetti si annullano per meccanismi automatici (*per esempio variabile che assume altri valori in una funzione, tali valori valgono solamente nello scope di tale funzione*).

Azioni irreversibili

Le azioni irreversibili sono trasformazioni che necessitano di un'azione esplicita per annullarne gli effetti (*ad esempio:* `x = x + 1` $\rightarrow$ `x = x - 1`).

Abbiamo detto che i comandi sono la categoria sintattica che riguarda/denota la richiesta di modifica della memoria, in questo caso si parla di trasformazione irreversibile di stato, anche qui ci potrebbe essere tale side-effect. Per tenere traccia del cambiamento di stato, usiamo la **memoria** che ci permette questa astrazione, per cambiare lo stato, quindi, c'è bisogno di un meccanismo che trasforma la memoria, questo meccanismo è **l'assegnamento**. Bisogna considerare anche chi programma non si riferisce/utilizza alla/la cella con l'indirizzo fisico, bensì si utilizzano **variabili** che sono id che si riferiscono alle locazioni, infine ci sono i **comandi** che contengono costrutti per composizione e controllo dell'esecuzione.

5.1.1 Variabili e locazioni

Per gestire le variabili non ci basta pensarle come una coppia `identificatore, valore`, senza separare il nome dal valore non riusciamo a gestire tutte le situazioni in cui si può incorrere durante l'esecuzione (*variabile usata nel main e in una procedura, si modificherebbe il valore quando dovrebbe rimanere invariato*). Per fare ciò introduciamo la **locazione** come astrazione

della mem. fisica e la variabile come astrazione della locazione, così facendo riusciamo a separare il nome della variabile dal suo valore.

In questo modo la stessa variabile può avere più indirizzi differenti (in momenti diversi o in parti diverse del programma).

Se nello stesso momento due nomi possono essere usati per accedere alla stessa locazione, vengono detti **alias**.

Introducendo la locazione siamo riusciti a distinguere la parte dell'associazione con la variabile (*nome, locazione, ambiente dinamico*) che non cambia durante l'esecuzione se non in maniera reversibile, e la parte dell'associazione che cambia in maniera irreversibile (*locazione, valore, memoria*), l'ambiente statico è formato da `tipo-locazione`.

5.1.2 Memoria e locazioni

La memoria è lo strumento che utilizziamo nella semantica per tenere traccia dell'evoluzione dei valori delle variabili attraverso la descrizione dei valori che stanno nelle locazioni associate, definiamo quindi:

Locazione/indirizzo

La locazione (*o indirizzo*) è il contenitore per i valori che può essere inutilizzata, indefinita o definita.

Memoria

La memoria è una collezione di associazioni con identificatori (*locazioni*), che vengono aggiornate dinamicamente.

La locazione viene creata da una dichiarazione, quindi ha anche uno scope che ne determina il tempo di vita, se il rilascio è implicito i cambiamenti sono reversibili, viceversa se è esplicito.

5.1.3 Costanti e variabili

La categoria delle dichiarazioni va arricchita, si deve aggiungere un costrutto che dichiari variabili, attualmente abbiamo solo le costanti. Andiamo ad aggiungere la possibilità di legare un nome ad una locazione, in modo da associare un valore modificabile a una locazione nella mem, la differenza quindi tra costante e variabile è:

Costanti

Con la costante viene fatto il binding nome-valore, aggiunto all'ambiente dinamico e il valore è immutabile.

Variabili

Con la variabile viene fatto binding del nome alla locazione e successivamente si associa la locazione a una cella in memoria, il binding è salvato in ambiente dinamico, l'associazione in memoria.

5.2 Nuova grammatica per le dichiarazioni

Dobbiamo aggiungere alla grammatica delle dichiarazioni un nuovo elemento per la variabile-

$$\mathcal{D}^v \;:\; \mathcal{D} ::= \;\; \texttt{nil} \;\mid\; \texttt{const}\ \mathcal{I} : \tau = e \;\mid\; \mathcal{D}\ \texttt{in}\ \mathcal{D} \;\mid\; \mathcal{D}\,;\mathcal{D} \mid \quad \rho \in \texttt{Env}$$

La nuova dichiarazione definisce un id x come una variabile di tipo τ ed inizializzata dall'espressione `e`. Bisogna chiaramente aggiornare anche le funzioni definite sulla sintassi, ovvero `DI` e `FI` (*identificatori definiti e liberi*).

$$\begin{aligned}
\texttt{DI}(\texttt{nil}) &= \varnothing \\
\texttt{DI}(\texttt{const}\ x : \tau = \texttt{e}) = \texttt{DI}(\texttt{var}\ x : \tau = \texttt{e}) &= \{x\} \\
\texttt{DI}(d_0\,;\, d_1) &= \texttt{DI}(d_0) \cup \texttt{DI}(d_1) \\
\texttt{DI}(\texttt{const}\ x : \tau = \texttt{e}) = \texttt{DI}(\texttt{var}\ x : \tau = \texttt{e}) &= \{x\} \\
\texttt{DI}(d_0\,\texttt{in}\,d_1) &= \texttt{DI}(d_1) \\
\texttt{DI}(\rho) = \mathcal{I}, \quad \rho : \mathcal{I}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\texttt{FI}(\texttt{nil}) &= \varnothing \\
\texttt{FI}(\texttt{const}\ x : \tau = \texttt{e}) = \texttt{FI}(\texttt{var}\ x : \tau = \texttt{e}) &= \{x\} \\
\texttt{FI}(d_0\,;\, d_1) = \texttt{FI}(d_0\,\texttt{in}\,d_1) &= \texttt{FI}(d_0) \cup (\texttt{FI}(d_1) \backslash \texttt{DI}(d_0)) \\
\texttt{FI}(\rho) &= \varnothing
\end{aligned}$$

5.2.1 Variabili

Le variabili sono caratterizzate da:

- **Nome/id**;
- **Tipo**: insieme di valori riferibili della variabile;
- **Valore**: oggetto memorizzato nella locazione associata all'identificatore (*anche detto r-value*);
- **Indirizzo/Locazione** : astrazione della cella di memoria dove viene memorizzato il valore (*detto l-value*);
- **Scope**: range dei comandi a cui la variabile è visibile;
- **Life time**: tempo in cui il binding con la locazione è attivo.

5.2.2 Semantica statica per le variabili

Bisogna aggiungere la regola di semantica statica per il nuovo costrutto nella dichiarazione, ma prima ancora bisogna aggiungere un nuovo tipo che ci faccia distinguere tra `const` e `var`, lo chiameremo $\tau\, loc$ con $\tau \neq \tau\, loc$

$$\tau \in \texttt{DTyp} = \{\texttt{int}, \texttt{bool}, \bot\}$$
$$\tau\, loc \in \texttt{DTypLoc} = \{\texttt{intloc}, \texttt{boolloc}\}$$
$$\texttt{Typ} = \texttt{DTyp} \cup \texttt{DTypLoc}$$

A questo punto nella semantica statica le regole rimangono le stesse ma dobbiamo aggiungere la regola per la dichiarazione:

$$\frac{\Delta \vdash\ e : \tau}{\Delta \vdash \texttt{var}\, x : \tau = e : [x \leftarrow \tau\, \texttt{loc}]}\ {}^{(\mathcal{D}_{s_6})}$$

la dichiarazione è ben formata se il tipo dichiarato coincide con il tipo dell'espressione usata per inizializzare. Inevitabilmente ciò cambia anche la regola di s_3. per gli id che ora possono essere di tipo variabile:

$$\mathcal{E}_{s_3} : \quad \Delta \vdash_V \mathcal{I} : \tau \quad \text{se } \Delta(\mathcal{I}) \in \{\tau, \tau\,\texttt{loc}\}, \mathcal{I} \in V$$

5.2.3 Memoria e locazioni in IMP

Locazioni

le locazioni sono un insieme finito ma illimitato di elementi che rappresentano celle di memoria: `Loc` collezione illimitata di locazioni, $\mathcal{L} \in \texttt{Loc}$ $\quad$ $\texttt{New}(\mathcal{L}) \in \texttt{Loc}$
`New` è una funzione che prese locazioni giù utilizzate, ne genera di nuove da usare. Se `MVal` sono i valori memorizzabili, in `IMP`, $\texttt{MVal} = (\mathcal{N} \cup \mathcal{B})$.

Memoria

Una memoria è un elemento dello spazio di funzioni Mem definito da:

$$\texttt{Mem} = \bigcup_{\mathcal{L} \subseteq_f \texttt{Loc}} \texttt{Mem}_{\mathcal{L}}$$

dove $\texttt{Mem}_L : \mathcal{L} \to \texttt{MVal}$ ha metavariabile σ e `MVal` sono valori memorizzabili.

Sappiamo che i comandi sono trasformazioni di stato, dobbiamo dire cosa significa aggiornare uno stato:

Aggiornamento di stato

Si considerino due memorie σ, σ', dove $\sigma : \mathcal{L}$ e $\sigma' : \mathcal{L}'$ (*definito su locazioni in* $\mathcal{L}, \dots$), l'aggiornamento della memoria σ tramite la memoria σ', è la memoria $\sigma''(\sigma[\sigma''])$ definita:

$$\sigma''(l) = \begin{cases} \sigma'(l) & \text{se } l \in \mathcal{L}' \\ \sigma(l) & \text{else} \end{cases}$$

La memoria che aggiorna ha la precedenza, tutto ciò che non riguarda questa memoria resta inalterato.

5.3 Semantica con memoria

Introdurre le variabili significa poter scrivere espressioni e dichiarazioni che contengono identificatori variabili, di conseguenza va aggiornato il sistema di transizione. Per le espressioni il sistema di transizione diventa:

$$\mathcal{I}^V = \mathcal{E}^V \times \texttt{Mem},\ \mathcal{T}^V = (\mathcal{N} \cup \mathcal{B}) \times \texttt{Mem}$$

le regole diventano del tipo:

$$\mathcal{I} : \rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e \langle e', \sigma\rangle$$

L'unica che cambia veramente è quella di valutazione degli identificatori, che deve considerare il caso dell'identificatore variabile:

$$\mathcal{E}_2 \rho \vdash_\Delta \langle \mathcal{I}, \sigma\rangle \to_e \langle n, \sigma\rangle \text{ se } \rho(\mathcal{I}) = n \text{ o } (\rho(\mathcal{I}) = l \text{ e } \rho(l) = n)$$

A tutte le altre basta aggiungere la memoria nella regola (*accesso sempre in lettura*).

Per ciò che riguarda le dichiarazioni, il sistema di transizione diventa:

$$\mathcal{I}^V = \mathcal{D}^V \times \texttt{Mem},\ \mathcal{T}^V = \texttt{Env} \times \texttt{Mem}$$

Mentre le regole diventano:

$$\mathcal{D}_i : \rho \vdash_\Delta \langle d, \sigma\rangle \to_d \langle d', \sigma'\rangle$$

5.3.1 Regole definitive delle espressioni con variabili

Riportiamo le regole aggiornate con la memoria:

$$\mathcal{E}_1 : \rho \vdash_\Delta \langle m \,\texttt{op}\, n, \sigma\rangle \to_e \langle k, \sigma\rangle$$

$$\mathcal{E}_2 : \rho \vdash_\Delta \langle \mathcal{I}, \sigma\rangle \to_e \langle n, \sigma\rangle$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle e \,\texttt{op}\, e_0, \sigma\rangle \to_e \langle e' \,\texttt{op}\, e_0, \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_3)$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle m \,\texttt{op}\, e, \sigma\rangle \to_e \langle m \,\texttt{op}\, e', \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_4)$$

$$\mathcal{E}_5 : \rho \vdash_\Delta \langle t_1 \,\texttt{bop}\, t_2, \sigma\rangle \to_e \langle t, \sigma\rangle \qquad \text{se } t \,\texttt{op}\, t_1 = t, t_1, t_2 \qquad t \in \mathcal{B}$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle e \,\texttt{bop}\, e_0, \sigma\rangle \to_e \langle e' \,\texttt{bop}\, e_0, \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_{3'})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle t \,\texttt{bop}\, e, \sigma\rangle \to_e \langle t, \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_6)$$

$$\mathcal{E}_7 : \rho \vdash_\Delta \langle \texttt{not}\, t_1, \sigma\rangle \to_e \langle t, \sigma\rangle \qquad \text{se } \texttt{not}\, t_1 = t, \qquad t_1 \in \mathcal{B}$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \texttt{not}\, e, \sigma\rangle \to_e \langle \texttt{not}\, e', \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_8)$$

5.3.2 Regole definitive delle espressioni con chiusura transitiva

Le regole sono equivalenti, ma con chiusura transitiva:

$$\mathcal{I}^V = \mathcal{D}^V \times \texttt{Mem},\ \mathcal{T}^V = \texttt{Env} \times \texttt{Mem}$$

Mentre le regole diventano:

$$\mathcal{D}_i : \rho \vdash_\Delta \langle d, \sigma\rangle \to_d \langle d', \sigma'\rangle$$

5.3.3 Regole definitive delle espressioni con variabili

Riportiamo le regole aggiornate con la memoria:

$$\mathcal{E}_2 : \rho \vdash_\Delta \langle \mathcal{I}, \sigma\rangle \to_e \langle n, \sigma\rangle$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle e\ \texttt{op}\ e_0, \sigma\rangle \to_e \langle e'\ \texttt{op}\ e_0, \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_{3-4})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle m\ \texttt{op}\ e, \sigma\rangle \to_e \langle m\ \texttt{op}\ e', \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_{4-1})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle e\ \texttt{bop}\ e_0, \sigma\rangle \to_e \langle e'\ \texttt{bop}\ e_0, \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_{3'-6})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle t\ \texttt{bop}\ e, \sigma\rangle \to_e \langle t, \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_{6-5})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \texttt{not}\ e, \sigma\rangle \to_e \langle \texttt{not}\ e', \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_{7-8})$$

Valutazione ed equivalenza con variabili

Bisogna far attenzione alla funzione di valutazione ed equivalenza che vanno aggiornate.

Valutazione delle espressioni con variabili

La valutazione è una funzione $\texttt{Eval} : \mathcal{E}^V \times \texttt{Mem} \to \mathbb{N} \cup \mathbb{B} \times \texttt{Mem}$ che descrive il comportamento dinamico delle espressioni restituendo il valore in cui essere sono valutate (*insieme alla memoria*)

$$\texttt{Eval}(\langle e, \sigma\rangle) = k \iff \langle e, \sigma\rangle \to^* \langle e', \sigma\rangle$$

Equivalenza di espressioni con variabili

L'equivalenza di espressioni con variabili è una relazione $\equiv \mathcal{E}^V \times \mathcal{E}^V$ definita come segue:

$$e_0 \equiv e_1 \longleftrightarrow \forall \sigma.\quad \texttt{Eval}(\langle e_0, \sigma\rangle) = \texttt{Eval}(\langle e_1, \sigma\rangle)$$

La valutazione cambia solo formalmente (*si considerano le memorie*), l'equivalenza si avrà invece solo se il valore risultante è lo stesso per tutte le possibili memorie iniziali.

5.3.4 Semantica dinamica delle variabili

Avendo modificato la grammatica delle dichiarazioni, dobbiamo aggiungere la regola di semantica dinamica per il nuovo costrutto di dichiarazione delle variabili, inoltre bisogna aggiungere la memoria a tutte le nuove regole.

Le regole che in realtà subiscono un cambiamento maggiore sono $\mathcal{D}_{10}$ e $\mathcal{D}_{11}$, alle altre, come per le espressioni, viene solamente aggiunta la memoria.

$$\mathcal{D}_{10} : \rho \vdash_\Delta \langle \texttt{var}\ \ x : \tau = k, \sigma\rangle \leftarrow_d \langle [x \leftarrow l], \sigma[l \leftarrow k]\rangle$$

dove $l \in\ \texttt{Loc}_\tau$ nuova locazione.

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \rightarrow_e \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \texttt{var}\ \ x : \tau = e, \sigma\rangle \rightarrow_e \langle \texttt{var}\ \ x : \tau = e', \sigma\rangle}\ (\varepsilon_{11})$$

Si tratta della regola utilizzata per l'indirizzamento della variabile, una volta che l'espressione è valutata a k, possiamo allocare lo spazio per una nuova variabile, prendiamo una locazione $\mathcal{I}$ di tipo τ. La configurazione generata è una coppia (*ambiente dinamico, memoria iniziale*), dove il primo associa all'identificatore la locazione l e la seconda viene aggiornata con l'associazione tra $\mathcal{I}$ e valore k calcolato.

Regole aggiornate con la memoria

$$\mathcal{E}_1 : \rho \vdash\ \langle \texttt{nil}, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle \varnothing, \sigma\rangle$$

$$\mathcal{E}_2 : \rho \vdash \langle \texttt{const}\ \ x : \tau = e, \sigma\rangle \rightarrow_e \langle [x \leftarrow k], \sigma\rangle$$

$$\frac{\rho \vdash \langle e, \sigma\rangle \rightarrow_e \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash \langle \texttt{const}\ \ x : \tau = e, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle \texttt{const}\ \ x : \tau = e', \sigma\rangle}\ (\varepsilon_3)$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle d, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle d', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle d\,;\, d_1, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle d'\,;\, d_1, \sigma\rangle}\ (\varepsilon_4)$$

$$\frac{\rho[\rho_0] \vdash_{\Delta[\Delta_0]} \langle d, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle d', \sigma'\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle d\,;\, d_1, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle d'\,;\, d_1, \sigma'\rangle}\ (\varepsilon_5)$$

$$\mathcal{D}_6 : \rho \vdash_\Delta \langle \rho_0; \rho_1, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle \rho_0[\rho_1], \sigma\rangle$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle d, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle d', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle d\ \texttt{in}\ d_1, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle d'\ \texttt{in}\ d_1, \sigma\rangle}\ (\varepsilon_7)$$

$$\frac{\rho[\rho_0] \vdash_{\Delta[\Delta_0]} \langle d, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle d', \sigma'\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle d\ \texttt{in}\ d_1, \sigma\rangle \rightarrow_d \langle d'\ \texttt{in}\ d_1, \sigma'\rangle}\ (\varepsilon_8)$$

5.3.5 Regole equivalenti con chiusura transitiva

$$\mathcal{E}_1 : \rho \vdash \langle \texttt{nil}, \sigma\rangle \to_d \langle \varnothing, \sigma\rangle$$

$$\frac{\rho \vdash \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle k, \sigma\rangle}{\rho \vdash \langle \texttt{const}\ \ x : \tau = e, \sigma\rangle \to_d \langle [x \leftarrow k], \sigma\rangle}\ (\mathcal{E}_{3-2})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle d, \sigma\rangle \to_d^* \langle \rho_0, \sigma'\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle d\,;\, d_1, \sigma\rangle \to_d \langle \rho_0\,;\, d_1, \sigma'\rangle}\ (\mathcal{E}_{4-5})$$

$$\frac{\rho[\rho_0] \vdash_{\Delta[\Delta_0]} \langle d_1, \sigma\rangle \to_d^* \langle \rho_1, \sigma'\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \rho_0\,;\, d_1, \sigma\rangle \to_d \langle \rho_0[\rho_1]\,;\, d_1, \sigma'\rangle}\ (\mathcal{E}_{5-6})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle d, \sigma\rangle \to_d^* \langle \rho_0, \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle d\ \texttt{in}\ d_1, \sigma\rangle \to_d \langle \rho_0\ \texttt{in}\ d_1, \sigma'\rangle}\ (\mathcal{E}_{7-8})$$

$$\frac{\rho[\rho_0] \vdash_{\Delta[\Delta_0]} \langle d_1, \sigma\rangle \to_d^* \langle \rho_1, \sigma'\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \rho_0\ \texttt{in}\ d_1, \sigma\rangle \to_d \langle \rho_1, \sigma'\rangle}\ (\mathcal{E}_{8-9})$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle k, \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \texttt{var}\ \ x : \tau = e, \sigma\rangle \to_d \langle [x \leftarrow l], \sigma[l \leftarrow k]\rangle}\ (\mathcal{E}_{10-11})$$

5.4 Comandi

Sappiamo che il significato di un comando è essenzialmente una trasformazione di stato (*ossia di memorie*), se due comandi sono differenti, ma ottengono la stessa trasformazione, di stato a partire da tutti gli stati possibili, si dicono **equivalenti**.

Nel nostro linguaggio i comandi sono $\mathcal{C}^V$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} ::= & \texttt{skip} \mid x := e \mid \mathcal{C}\,;\,\mathcal{C} \mid \texttt{if}\ \mathcal{B}\ \texttt{then}\ \mathcal{C}\ \texttt{else}\ \mathcal{C} \\ & \mid \texttt{while}\ \mathcal{B}\ \texttt{do}\ \mathcal{C} \mid \mathcal{D}\,,\,\mathcal{C} \end{array}$$

Per prima cosa troviamo `skip`, elemento neutro, poiché non esegue trasformazioni di stato. Poi troviamo l'assegnamento di un valore a un identificatore x. Subito dopo troviamo la composizione sequenziale, tutte le trasformazioni eseguite dal primo comando sono il punto di partenza per le trasformazioni del comando successivo. Seguendo, troviamo il controllo `if` $\mathcal{B}$ `then` $\mathcal{C}$ `else` $\mathcal{C}$ che esegue un controllo sulla condizione $\mathcal{B}$ e a seconda del risultato esegue il primo r ramo o il secondo. Spostandoci ulteriormente in avanti incontriamo la condizione `while` $\mathcal{B}$ `do` $\mathcal{C}$ che esegue un controllo sulla condizione $\mathcal{B}$ e fin tanto che la condizione non risulta `false` esegue $\mathcal{C}$. Per ultimo troviamo il **blocco** che crea una ambiente locale al comando.

5.4.1 Semantica dei comandi

Per dare una definizione formale alla semantica dei comandi, dobbiamo in primo luogo introdurre il sistema di transizione. I comandi trasformano memorie, quindi le configurazioni sono coppie contenenti memorie e comandi, il risultato sarà una nuova configurazione con ciò che

resta da eseguire del comando e la memoria trasformata, se non vi è più alcun comando da eseguire, il risultato finale sarà la memoria stessa.

Sistema di transizione

$$\mathcal{I}^V = \mathcal{C}^V \times \texttt{Mem} \cup \texttt{Mem}, \qquad \mathcal{T}^V = \texttt{Mem}$$

Possiamo parlare ora delle semantiche:

Semantica statica

La semantica statica verifica i vincoli contestuali, ossia $\mathcal{C}$ ben formato in $\Delta \to \Delta \vdash \mathcal{C}$.

Semantica dinamica

Nella semantica dinamica $\mathcal{C}$ viene eseguito nell'ambiente dinamico ρ compatibile con l'ambiente statico Δ e a partire da una memoria σ restituisce $\mathcal{C}'$ ancora da eseguire e le memoria σ' potenzialmente cambiata.

$$\mathcal{C}_i : \rho \vdash_\Delta \langle c, \sigma\rangle \to_C \langle c', \sigma'\rangle$$

5.4.2 Regole per lo skip

Per quanto riguarda lo skip, gli identificatori liberi e definiti sono:

$$\texttt{FI}(\texttt{skip}) = \texttt{DI}(\texttt{skip}) = \varnothing$$

5.4.3 Regole per l'assegnamento

Per quanto riguarda l'assegnamento, tutti gli identificatori presenti nel comando sono liberi e quindi non ci sono identificatori definiti, questo perché un comando non può contenere dichiarazioni.

$$\begin{aligned}\texttt{FI}(x := e) &= \texttt{FI}(e) \cup \{x\}\\ \texttt{DI}(x := e) &= \varnothing\end{aligned}$$

Regole di semantica statica per l'assegnamento

Serve per verificare che il comando sia ben formato, ossia che rispetti i vincoli semantici $\Delta \vdash_v \mathcal{C}$. Quindi bisogna verificare che:

- Il tipo di x sia $\tau\, loc$
- Il tipo del valore determinato dell'espressione sia dello stesso tipo dell'identificatore x.

La seguente regola descrive i punti appena citati:

$$\frac{\Delta \vdash_v e : \tau}{\Delta \vdash_v x := e} \ , \Delta(x) = \tau \, loc$$

Regole di semantica dinamica per l'assegnamento

Per la semantica dinamica bisogna valutare l'espressione, quindi:

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e \langle e', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle x := e, \sigma\rangle \to_c \langle x := e', \sigma\rangle} \ \mathcal{C}_1$$

Dopo aver completamente valutato l'espressione, aggiorniamo la memoria associando a x il nuovo valore e restituiamo la memoria come configurazione terminale.

$$\mathcal{C}_2 : \ \rho \vdash_\Delta \langle x := k, \sigma\rangle \to_c \sigma[l \leftarrow k], \quad \rho(x) = l$$

5.4.4 Regole per `If-then-else`

Per quanto riguarda gli identificatori, gli identificatori liberi sono l'unione di tutti gli identificatori nell'espressione e nei due rami condizionali, gli identificatori definiti sono l'unione degli identificatori definiti nei comandi (*che possono contenere dichiarazioni*):

$$\begin{aligned} \texttt{FI}(\texttt{if } \mathcal{B} \texttt{ then } \mathcal{C} \texttt{ else } \mathcal{C}) &= \texttt{FI}(e) \cup \texttt{FI}(c_0) \cup \texttt{FI}(c_1) \\ \texttt{DI}(\texttt{if } \mathcal{B} \texttt{ then } \mathcal{C} \texttt{ else } \mathcal{C}) &= \texttt{DI}(c_0) \cup \texttt{DI}(c_1) \end{aligned}$$

Regole di semantca statica per `if-then-else`

La semantica statica serve per verificare che il comando sia ben formato, ossia che rispetti i vincoli semantici $\Delta \vdash_v \mathcal{C}$. Quindi bisogna verificare che:

$$\frac{\Delta \vdash_v e : \texttt{bool} \qquad \Delta \vdash_v c_0 \qquad \Delta \vdash_v c_1}{\Delta \vdash_v \texttt{if } e \texttt{ then } c_0 \texttt{ else } c_1} \ \mathcal{C}_{s_2}$$

Regole di semantca dinamica per `if-then-else`

Per la semantica dinamica bisogna valutare l'espressione, quindi:

$$\frac{\Delta \vdash_v \langle e, \sigma\rangle \to_e \langle e', \sigma\rangle}{\Delta \vdash_v \langle \texttt{if } e \texttt{ then } c_0 \texttt{ else } c_1, \sigma\rangle \to_c \langle \texttt{if } e' \texttt{ then } c_0 \texttt{ else } c_1, \sigma\rangle} \ \mathcal{C}_3$$

$$\mathcal{C}_4 : \rho \vdash_v \langle \texttt{if } e' \texttt{ then } c_0 \texttt{ else } c_1, \sigma\rangle \to_c \langle c_0, \sigma\rangle$$

$$\mathcal{C}_5 : \rho \vdash_v \langle \texttt{if } e' \texttt{ then } c_0 \texttt{ else } c_1, \sigma\rangle \to_c \langle c_1, \sigma\rangle$$

5.4.5 Regole di composizione

La composizione sequenziale denotata da ; permette di specificare che il comando a destra inizia dopo che il comando a sinistra ha completato l'esecuzione.

La composizione non altera gli identificatori liberi e definiti, quindi saranno entrambi l'unione dei corrispettivi liberi e definiti dei comandi composti.

$$\texttt{FI}(c_0\,;\,c_1) = \texttt{FI}(c_0) \cup \texttt{FI}(c_1)$$
$$\texttt{DI}(c_0\,;\,c_1) = \texttt{DI}(c_0) \cup \texttt{DI}(c_1)$$

Regole di semantica statica per composizione

Si richiede che i comandi siano ben formati, perciò:

$$\frac{\Delta \vdash_v c_0 \qquad \Delta \vdash_v c_1}{\Delta \vdash_v c_0; c_1}\ \mathcal{C}_{s_3}$$

$$\mathcal{C}_{s_4} : \Delta \vdash_v \texttt{skip}$$

Regole di semantica dinamica per composizione

Lo `skip` lascia inalterata la memoria, la composizione esegue c_0, e poi a partire dalla memoria risultante, esegue c_1.

$$\mathcal{C}_6 :\ \rho \vdash_\Delta \langle \texttt{skip}, \sigma\rangle \to_c \sigma$$
$$\frac{\Delta \vdash_v \langle c, \sigma\rangle \to_c \langle c', \sigma'\rangle}{\Delta \vdash_v \langle c; c_0, \sigma\rangle \to_c \langle c'; c_0, \sigma'\rangle}\ \mathcal{C}_7$$
$$\frac{\Delta \vdash_v \langle c, \sigma\rangle \to_c \sigma'}{\Delta \vdash_v \langle c, \sigma\rangle \to_c \langle c_0, \sigma'\rangle}\ \mathcal{C}_8$$

5.4.6 Regole per il `while`

L'iterazione è un costrutto che permette di ripetere condizioni, l'iterazione può essere:

- **Determinata**: se i cicli sono controllati numericamente, con un numero di ripetizioni del ciclo determinate in partenza, solitamente si ha la variabile di ciclo. Degli aspetti da considerare sono:
  - Quali sono tipo e visibilità della variabile di ciclo?
  - È legale la modifica della variabile o dei parametri di ciclo dentro al corpo? Se si si ha effetto sul ciclo?
  - Quando vengono valutati i parametri di ciclo?
- **Indeterminata**: se i cicli sono controllati logicamente, ovvero su un'espressione booleana. Degli aspetti da considerare sono:
  - Il test viene eseguito prima o dopo la prima iterazione?

Il comando iterativo non altera nè gli identificatori liberi (*unione di quelli nell'espressione e nel corpo*) nè gli identificatori definiti (*quelli nel corpo, dove possono essere contenute dichiarazioni*), ricordiamo che le espressioni non possono definire identificatori.

$$\texttt{FI}(\texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ c) = \texttt{FI}(c) \cup \texttt{FI}(e)$$
$$\texttt{DI}(\texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ c) = \texttt{DI}(c)$$

Regole di semantica statica per il `while`

Le regole di semantica statica verificano se il comando è ben formato, i vincoli in questo caso sono sia l'espressione booleana che il comando nel corpo.

$$\frac{\Delta \vdash_v e : \texttt{bool} \qquad \Delta \vdash_v c}{\Delta \vdash_v \texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ c}\ \mathcal{C}_{s_5}$$

Regole di semantica dinamica per il `while`

Le regole di semantica dinamica valutano l'espressione di guardia, se `true` esegue $\mathcal{C}$, altrimenti termina l'esecuzione.

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle \texttt{true}, \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ c, \sigma\rangle \to_c \langle c\,;\ \texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ c, \sigma\rangle}\ \mathcal{C}_9$$

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle e, \sigma\rangle \to_e^* \langle \texttt{false}, \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ c, \sigma\rangle \to_c \sigma}\ \mathcal{C}_{10}$$

5.4.7 I blocchi

Per eseguire un comando che coinvolge variabili, dobbiamo cambiare **ambienti** (*modifiche reversibili*) e **memorie** (*modifiche irreversibili*), il **blocco** è un costrutto che identifica l'ambiente in cui un comando è eseguito, può contenere dichiarazioni locali e comandi. Grazie a questo possiamo avere identificatori che denotano oggetti diversi in regioni di codice differenti.

I blocchi vengono indicati nella seguente maniera:

```
1  { int tmp = x;
2    x = y;
3    y = tmp
4  }
```

I blocchi possono solo essere annidati o disgiunti, mentre le dichiarazioni fatte dentro di esso sono visibili solo in quel blocco e in quelli annidati, a meno che in quelli annidati non venga ridichiarata, così facendo viene mascherata la dichiarazione precedente. Ogni nidificazione genera un buco nello scope precedente.

Scope statico nei blocchi

Lo scope statico di riferisce all'area del codice nel quale tutte le o occorrenze applicate di un binding si riferiscono alla stessa occorrenza di binding dell'identificatore. Quindi, quando si entra in un blocco, si creano binding locali, all'uscita vengono distrutte e ripristinate quelle al livello superiore.

Tipi di ambienti del blocco

Lo scope di una variabile è il range di comandi a cui è visibile.

- **Variabili locali**: dichiarate all'interno del blocco.
- **Variabili non locali**: visibili al blocco ma non dichiarate in esso (*nel blocco che lo contiene*).
- **Variabili globali**: dichiarate nel blocco globale che contiene il programma.

Dato i vati tipi di variabili, in base allo scope, l'ambiente del blocco può essere di vari tipi:

- **Ambiente locale**: contiene associazioni create all'ingresso del blocco.
- **Ambiente non locale**: contiene associazioni ereditate da altri blocchi in cui è contenuto.
- **Ambiente globale**: contiene le associazioni di variabili globali.

Le variabili quindi hanno un tempo di vita che è il tempo in cui la variabile ha più occorrenze di uso che si riferiscono alla stessa cella, dura da quando viene fatta l'allocazione a quando viene deallocata.

Scope e tempo di vita sono diversi, lo scope ci dice quando un identificatore è utilizzabile, lo scope dove è utilizzabile.

5.4.8 Regole per i blocchi

Per quanto riguarda gli identificatori liberi, sono tutti quelli nella dichiarazione uniti a quelli dei comandi, che sono anch'essi liberi se non sono definiti nella dichiarazione. Quelli definiti invece sono l'unione di quelli definiti nella dichiarazione e nel comando.

$$\texttt{FI}(d\,;\,c) = \texttt{FI}(d) \cup (\texttt{FI}(c) - \texttt{DI(d)})$$
$$\texttt{DI}(d\,;\,c) = \texttt{DI}(c) \cup \texttt{DI}(d)$$

Regole di semantica statica per i blocchi

Per quanto riguarda la semantica statica dobbiamo generare l'ambiente Δ' dalla dichiarazione e con $\Delta[\Delta']$ verifichiamo che il comando sia ben formato.

$$\frac{\delta \vdash_v d'_\Delta \qquad \Delta[\Delta'] \vdash_{V \cup V'} c}{\Delta \vdash_v d\,;\,c}\ \mathcal{C}_{s_6} \qquad \Delta' \text{ su } V'$$

Regole di semantica dinamica per i blocchi

Prima viene elaborata la dichiarazione, poi viene eseguito il comando nell'ambiente modificato dalla dichiarazione.

In $\mathcal{C}_{12}$ ρ' è temporaneo (*lo sono anche le modifiche che esegue*).

$$\frac{\rho \vdash_\Delta \langle d, \sigma\rangle \to_d \langle d', \sigma\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle d, \,;\, c, \sigma\rangle \to_c \langle d'\,;\,c, \sigma\rangle}\ \mathcal{C}_{11}$$

$$\frac{\rho[\rho'] \vdash_{\Delta[\Delta']} \langle c, \sigma\rangle \to_c \langle c', \sigma'\rangle}{\rho \vdash_\Delta \langle \rho' \,;\, c, \sigma\rangle \to_c \langle \rho' \,;\, c', \sigma'\rangle}\ \mathcal{C}_{12} \qquad \rho' \vdash_{\Delta'}$$

$$\frac{\rho[\rho'] \vdash_{\Delta[\Delta']} \langle c, \sigma\rangle \to_c \sigma'}{\rho \vdash_\Delta \langle \rho' \,;\, c, \sigma\rangle \to_c \sigma'}\ \mathcal{C}_{13} \qquad \rho' \vdash_{\Delta'}$$