

Crittografia

Corso tenuto dal Professor Roberto Segala

Università degli Studi di Verona

Alessio Gjergji

Indice

1	Tecniche crittografiche classiche	4
1.1	La differenza tra crittografia e steganografia	4
1.2	Cifrario di cesare	4
1.3	Cifrario monoalfabetico	6
1.4	Cifrario di Playfair	7
1.5	Cifrario di Vigenère	8
1.6	Cifrario di Vernam	9
1.6.1	Proprietà di One-Time Pad	9
1.7	Concatenazione di crittosistemi	10
1.8	Macchina a Rotori	10
1.9	Classificazione dei livelli di sicurezza	12
1.10	Cifrari a flusso e a blocchi	12
1.10.1	Electronic Code Book	13
1.10.2	Cipher Block Chaining	13
1.10.3	Cipher Feedback	14
1.10.4	Output Feedback	15
1.11	Rete di Feistel	17
1.12	Data Encryption Standard - DES	18
1.12.1	Funzione di round	19
2	Teoria dei numeri	20
2.1	Proprietà dei numeri	20
2.2	Classe di equivalenza \mathbb{Z}_n	21
2.2.1	Somma	22
2.2.2	Moltiplicazione	23
2.3	Gruppi e generatori	24
2.3.1	Generatori primi	25
2.3.2	Probabilità dei numeri primi	25
2.4	Logaritmo discreto	26
2.5	Numero quadrato	26
2.6	Simbolo di Legendre	27
2.6.1	Iterative Squaring	28
2.6.2	Il gruppo \mathbb{Z}_n^* con $n = p \cdot q$	29

2.7	Simbolo di Jacobi	30
2.8	Generazione di numeri casuali con la stessa quadraticità di a	30
2.9	Fattorizzazione di n	30
3	Crittografia a chiave pubblica	32
3.1	Crittografia a chiave pubblica	32
3.2	Diffie-Hellman	33
3.2.1	Ipotesi di Diffie-Hellman	33
3.3	Rivest Shamir Adleman - RSA	34
3.3.1	Funzionamento	35
3.3.2	Attacchi a RSA	35
3.4	Sicurezza di un crittosistema	36
3.4.1	Utilizzo pratico di RSA	38
3.5	Crittosistema di Micali per la codifica di un singolo bit	38
3.5.1	Rompere il crittosistema di Micali	39
3.6	Codifica di bit multipli	43
4	Costruzione della casualità	46
4.1	Lancio della moneta	46
4.1.1	Lancio della moneta con il residuo quadratico	47
4.1.2	Lancio della moneta con il logaritmo discreto	50
4.2	Hardcore predicate del logaritmo discreto	52
4.2.1	Calcolare il logaritmo discreto avendo a disposizione l'algoritmo per il calcolo della radice quadrata principale (PSQR)	53
4.2.2	Costruzione dell'esperimento indipendente y' tale per cui dalla risposta y' otteniamo la risposta a y	54
4.3	Bit Pseudocasuali	56
4.3.1	Generare bit pseudocasuali	56
4.3.2	Generazione di bit pseudocasuali basati sul problema del logaritmo discreto	57
4.3.3	Distinguere equivale a prevedere	59
4.4	Blum Blum Shub	61
4.5	Crittosistema di Blum Goldwasser	62
4.6	Funzioni pseudo-casuali	63
4.6.1	Costruzione delle funzioni pseudo-casuali	63
5	Autenticazione	70
5.1	Autenticazione	70
5.1.1	Forger	70
5.1.2	Autenticare messaggi lunghi	71
5.1.3	Problema della non ripudiabilità	72
5.1.4	Definizione di sistema di firma digitale	73
5.2	Funzioni Hash	74
5.2.1	Funzioni hash one way	74
5.3	Blind signature	75

5.4	Bit commitment	76
5.4.1	Primo protocollo	76
5.4.2	Secondo protocollo	77
5.4.3	Terzo protocollo	78
5.5	Schemi a barriera	79
5.5.1	Schema XOR	80
5.5.2	Schema di Shamir	80
6	Zero knowledge	82
6.1	Crittografi mangiatori	82
6.1.1	Generalizzazione del protocollo	83
6.2	La caverna di Ali Baba	84
6.3	Classe P e NP	85
6.4	Interactive proof system	85
6.4.1	Quadratic non-residuosity	86
6.4.2	Graph non-isomorphism	87
6.4.3	Ciclo hamiltoniano	88
6.4.4	Costruzione del simulatore M	89
6.4.5	Tre colorabilità di un grafo	91
6.5	Ripetizione parallela della zero knowledge	92
6.6	Non interactive zero knowledge	93

Capitolo 1

Tecniche crittografiche classiche

1.1 La differenza tra crittografia e steganografia

La crittografia e la steganografia sono due tecniche per proteggere la confidenzialità dei dati. La crittografia si basa sulla trasformazione dei dati in modo che non siano leggibili, mentre la steganografia si basa sulla segretezza dell'esistenza dei dati.

La crittografia ha come obiettivo quello di rendere illeggibili i dati, non nasconde l'esistenza dei dati. La steganografia invece nasconde l'esistenza dei dati, ma non li rende illeggibili.

Il problema della steganografia è che se si scopre l'esistenza dei dati, si può facilmente decifrare il messaggio, compromettendo quindi l'intera comunicazione. La crittografia invece sfrutta algoritmi matematici conosciuti per rendere illeggibili i dati, quindi anche se si conosce l'algoritmo di codifica, non è possibile decifrare il messaggio senza la chiave.

L'obiettivo è costruire un algoritmo crittografico dove la sicurezza dipenda solo dalla segretezza della chiave e non dall'algoritmo sottostante.

Possiamo dire quindi che un sistema è sicuro nel momento in cui il costo economico per decifrarlo è maggiore del valore dell'informazione che contiene.

1.2 Cifrario di cesare

Il cifrario di Cesare è noto come il primo e più semplice esempio di cifrario a sostituzione. Fu utilizzato da Giulio Cesare e coinvolge la sostituzione di ogni lettera dell'alfabeto con la lettera situata tre posizioni più in basso nell'alfabeto. Ad esempio:

Plain	Ciphertext
a	d
b	e
c	f
d	g
e	h
f	i
g	j
h	k
i	l
j	m
k	n
l	o
m	p

Plain	Ciphertext
n	q
o	r
p	s
q	t
r	u
s	v
t	w
u	x
v	y
w	z
x	a
y	b
z	c

È importante notare che l'alfabeto è avvolto in modo che la lettera successiva a Z sia A. Ogni lettera dell'alfabeto viene quindi sostituita dalla lettera che si trova a tre posizioni più in basso.

Il cifrario di Cesare è un esempio semplice ma storico di crittografia a sostituzione. Può essere utilizzato per crittografare un messaggio spostando ogni lettera di tre posizioni nell'alfabeto.

L'algoritmo utilizzato è il seguente:

$$C = E(3, p) = (p + 3) \mod 26$$

Lo shift potrebbe essere un valore generico k , quindi l'algoritmo generalizzato è:

$$C = D(k, p) = (p + k) \mod 26$$

ove k prende un valore nel compreso tra 1 e 25. L'algoritmo di decifrazione è simile:

$$p = D(k, C) = (C - k) \mod 26$$

Il problema di questo algorithm è che ci sono solo 26 chiavi possibili, quindi è molto semplice decifrarlo con un attacco a **forza bruta**. L'attacco avviene provando tutte le 26 chiavi possibili e verificando se il testo decifrato ha senso. Se il testo decifrato non ha senso, si prova con la chiave successiva. Se il testo decifrato ha senso, si è trovata la chiave.

Questa tipologia di attacco sfrutta solamente la conoscenza del testo cifrato e non del testo in chiaro, e questa tipologia di attacco è detta **known ciphertext attack**.

Se la decodifica viene fatta da noi essere umani, è possibile verificare che la codifica abbia senso conoscendo il significato del testo in chiaro, ovvero conoscendo la lingua in cui è scritto il testo. Se invece la decodifica viene fatta da un computer, è necessario utilizzare un altro metodo per verificare che il testo decifrato abbia senso. Un computer per verificare che un testo abbia senso, può utilizzare un **dizionario** e verificare che le parole del testo decifrato siano presenti nel dizionario, o eseguire un'analisi statistica delle parole del testo decifrato attraverso l'analisi delle frequenze della lingua in questione.

1.3 Cifrario monoalfabetico

Per rendere più difficile l'attacco a forza bruta, bisogna ragionare sul fatto che l'obiettivo è quello di rendere la combinazioni di chiavi possibili molto grande.

Con solo 25 chiavi possibili, il cifrario di Cesare è molto lontano dall'essere sicuro. Un aumento drammatico dello spazio delle chiavi può essere ottenuto consentendo una sostituzione arbitraria. Prima di procedere, definiamo il termine **permutazione**.

Permutazione

Una permutazione di un insieme finito di elementi S è una sequenza ordinata di tutti gli elementi di S , con ciascun elemento che appare esattamente una volta. Ad esempio, se $S = \{a, b, c\}$, ci sono sei permutazioni di S :

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

In generale, ci sono $n!$ permutazioni di un insieme di n elementi, poiché il primo elemento può essere scelto in uno dei modi n possibili, il secondo in $n - 1$ modi, il terzo in $n - 2$ modi e così via.

Plain	Ciphertext
a	p
b	o
c	l
d	k
e	r
f	s
g	t
h	a
i	h
j	b
k	d
l	c
m	v

Plain	Ciphertext
n	g
o	e
p	f
q	z
r	x
s	w
t	y
u	i
v	m
w	n
x	q
y	j
z	u

Se invece la linea ciphertext può essere qualsiasi permutazione dei 26 caratteri alfabetici, allora ci sono $26!$ o più di 4×10^{26} possibili chiavi. Questo è 10 ordini di grandezza superiore allo spazio delle chiavi per DES e sembrerebbe eliminare le tecniche di crittoanalisi a forza bruta. Un approccio del genere è chiamato cifrario di sostituzione monoalfabetica, perché viene utilizzato un singolo alfabeto cifrato (*mappatura dall'alfabeto in chiaro all'alfabeto cifrato*) per ogni messaggio.

Purtroppo, questo schema è ancora vulnerabile ad altri tipi di attacchi, come per esempio l'**analisi delle frequenze**. Come primo passo, può essere determinata la frequenza relativa delle lettere e confrontata con una distribuzione di frequenza standard per la lingua in questio-

ne. Se il messaggio fosse abbastanza lungo, questa tecnica da sola potrebbe essere sufficiente, ma in caso di messaggi più corti, non possiamo aspettarci una corrispondenza esatta.

Ci sono diverse modalità per procedere in questo punto. Potremmo fare alcune assegnazioni provvisorie e iniziare a completare il testo in chiaro per vedere se assomiglia a uno scheletro ragionevole di un messaggio.

Un approccio più sistematico è cercare altre regolarità. Ad esempio, potrebbero essere noti alcuni termini nel testo. Oppure potremmo cercare sequenze ripetute di lettere cifrate e cercare di dedurne le corrispondenti lettere in chiaro.

Un potente strumento è rappresentato dalla frequenza delle combinazioni di due lettere, chiamate **bigrammi**. Per esempio, in inglese, le lettere **th** sono molto più comuni di **tx**, quindi se vediamo una combinazione di lettere che è molto più comune di altre, possiamo dedurre che probabilmente corrisponde a **th**.

Concludiamo che i cifrari monoalfabetici sono facili da decifrare perché riflettono i dati di frequenza dell'alfabeto originale.

1.4 Cifrario di Playfair

Il cifrario di crittografia a più lettere più conosciuto è il cifrario di *Playfair*, che tratta i digrammi nel testo in chiaro come unità singole e li traduce in digrammi nel testo cifrato. L'algoritmo di *Playfair* si basa sull'uso di una matrice 5×5 di lettere costruita utilizzando una parola chiave. Ecco un esempio, risolto da Lord Peter Wimsey nel romanzo "Have His Carcase" di *Dorothy Sayers*:

M	O	N	A	R
H	Y	B	C	D
E	F	G	I	K
L	P	Q	S	T
U	V	W	X	Z

In questo caso, la parola chiave è *monarchia*. La matrice viene costruita riempiendo le lettere della parola chiave (*senza duplicati*) da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, e poi riempiendo il resto della matrice con le lettere rimanenti in ordine alfabetico. Le lettere I e J contano come una sola lettera. Il testo in chiaro viene crittografato due lettere alla volta, secondo le seguenti regole:

1. Le lettere ripetute nel testo in chiaro che si trovano nella stessa coppia vengono separate da una lettera di riempimento, come ad esempio *x*, quindi *balloon* verrebbe trattato come BA LX LO ON.
2. Due lettere nel testo in chiaro che si trovano nella stessa riga della matrice vengono ciascuna sostituite dalla lettera a destra, con il primo elemento della riga che segue ciclicamente l'ultimo. Ad esempio, AR viene crittografato come RM.
3. Due lettere nel testo in chiaro che si trovano nella stessa colonna vengono ciascuna sostituite dalla lettera sottostante, con l'elemento superiore della colonna che segue ciclicamente l'ultimo. Ad esempio, MU viene crittografato come CM.
4. In caso contrario, ogni lettera nel testo in chiaro nella coppia viene sostituita dalla lettera che si trova nella stessa riga e nella colonna occupata dall'altra lettera nel testo in chiaro. Quindi, HS diventa BP e EA diventa IM (o JM).

Il cifrario Playfair rappresenta un grande passo avanti rispetto ai semplici cifrari monoalfabetici. Per una cosa, mentre ci sono solo 26 lettere, ci sono $26 \cdot 26 = 676$ digrammi, rendendo più difficile l'identificazione dei digrammi individuali. Inoltre, le frequenze relative delle singole lettere mostrano una gamma molto più ampia rispetto a quella dei digrammi, rendendo l'analisi delle frequenze molto più difficile. Per queste ragioni, il cifrario Playfair è stato a lungo considerato indistruttibile. È stato utilizzato come sistema standard sul campo dall'Esercito Britannico durante la Prima Guerra Mondiale e ha ancora goduto di un notevole utilizzo da parte dell'Esercito degli Stati Uniti e altre forze alleate durante la Seconda Guerra Mondiale. Nonostante questo livello di fiducia nella sua sicurezza, il cifrario Playfair è relativamente facile da decifrare, perché lascia la maggior parte delle caratteristiche statistiche del testo in chiaro intatte.

1.5 Cifrario di Vigenère

Il cifrario di *Vigenère* è un cifrario a sostituzione polialfabetica che utilizza una serie di cifrari monoalfabetici differenti basati su lettere di una parola chiave. Per esempio, se il testo che vogliamo cifrare è *provadiv*, e la parola chiave è *passwd*, allora il testo cifrato sarà l'applicazione di quattro cifrari monoalfabetici differenti, come mostrato nella seguente tabella:

Testo in chiaro	p	r	o	v	a	d	i	v
Parola chiave	p	a	s	w	d	p	a	s
Testo cifrato	e	r	g	r	s	i	u	k

In questo crittosistema l'analisi delle frequenze non è più efficace, in quanto le lettere del testo cifrato non sono più distribuite secondo la distribuzione delle lettere del testo in chiaro. Andando però a vedere le lettere ad una distanza pari alla lunghezza della parola chiave, si può notare che le lettere sono distribuite secondo la distribuzione delle lettere del testo in chiaro.

Il problema è che la lunghezza della parola chiave è sconosciuta, ma è possibile risolvere questo tentando di individuare la lunghezza della parola chiave. Una volta che la lunghezza della

parola chiave è stata individuata, è possibile risolvere il cifrario di Vigenère come se fosse un cifrario monoalfabetico.

1.6 Cifraro di Vernam

Il cifrario di *Vernam* è un cifrario a blocchi che utilizza una chiave casuale della stessa lunghezza del messaggio da cifrare. La chiave casuale è combinata con il messaggio da cifrare utilizzando l'operazione di **XOR** (*OR esclusivo*). L'operazione di **XOR** è una funzione logica binaria che restituisce 1 se e solo se i due bit di input sono diversi. L'operazione di **XOR** è associativa, commutativa e invertibile. Questo significa che se a , b e c sono bit, allora $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, $a \oplus b = b \oplus a$ e $a \oplus a = 0$.

Per esempio, se il messaggio da cifrare è 10101010 e la chiave casuale è 11001100, allora il testo cifrato sarà 01100110. Per decifrare il messaggio, è sufficiente applicare l'operazione di **XOR** tra il testo cifrato e la chiave casuale. Per esempio, se il testo cifrato è 01100110 e la chiave casuale è 11001100, allora il testo in chiaro sarà 10101010.

Si tratta quindi di un cifrario crittografico basato sul cifrario di Vigenère, in cui la chiave di cifratura è lunga tanto quanto il testo in chiaro e viene utilizzata una sola volta, chiamato *one-time pad*.

1.6.1 Proprietà di One-Time Pad

Il cifrario di Vernam è un sistema crittografico perfetto, nel senso che il messaggio può essere decifrato solamente conoscendo la chiave di codifica. *One-Time Pad* ha le seguenti proprietà:

- **Chiave Casuale:** La chiave utilizzata nel cifrario monouso è una sequenza casuale di bit o caratteri, lunga quanto il messaggio da crittografare. Essendo completamente casuale, non contiene alcuna struttura o pattern riconoscibile.
- **Lunghezza della Chiave:** La chiave deve essere della stessa lunghezza del messaggio in chiaro. Questo significa che ogni messaggio richiede una chiave diversa e della stessa lunghezza.
- **Unicità:** Ogni chiave è utilizzata una sola volta. Dopo essere stata usata per crittografare o decifrare un messaggio, la chiave viene scartata e non viene mai riutilizzata.
- **Sicurezza Statistica:** La sicurezza del cifrario monouso deriva dalla sua totale casualità. Poiché la chiave è una sequenza casuale e unica per ogni messaggio, non esiste alcuna relazione statistica tra il testo cifrato e il testo in chiaro. Questo significa che il testo cifrato non fornisce alcuna informazione utile per violare il cifrario, rendendolo teoricamente indistruttibile.

Il cifrario monouso, noto come *one-time pad* è considerato perfetto dal punto di vista statistico e crittografico per due ragioni principali:

1. **Casualità della Chiave:** La chiave nel cifrario monouso è una sequenza casuale di bit o caratteri. La casualità è fondamentale dal punto di vista statistico. In termini di probabilità, ogni bit o carattere nella chiave ha una probabilità del 50% di essere 0

o 1 (*in caso di bit*) o di essere una qualsiasi lettera nell'alfabeto (*in caso di caratteri*). Questo fatto è rappresentato dalla distribuzione di probabilità uniforme.

Formula della distribuzione uniforme per bit:

$$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Formula della distribuzione uniforme per caratteri:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \text{ per ogni } x_i \text{ nell'alfabeto di lunghezza } n$$

Ad esempio, in un alfabeto di 26 lettere, la probabilità di ciascuna lettera è $1/26$.

Nel caso di una chiave di lunghezza n , la probabilità di una particolare sequenza di n bit o caratteri è $1/2^n$ o $1/n^n$ rispettivamente. Poiché non vi è alcuna relazione nei bit o caratteri della chiave.

2. **Unicità della Chiave:** Ogni chiave viene utilizzata una sola volta per crittografare o decrittografare un messaggio specifico e viene scartata dopo l'uso. Questo significa che non c'è alcuna relazione statistica tra il testo cifrato e il testo in chiaro. L'assenza di qualsiasi pattern o relazione è fondamentale dal punto di vista della teoria della probabilità.

1.7 Concatenazione di crittosistemi

Una permutazione è un mapping iniettivo e suriettivo di un insieme in se stesso. Una permutazione è una sostituzione che mappa ogni lettera dell'alfabeto in un'altra lettera. Quindi:

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

sappiamo che è vulnerabile all'analisi delle frequenze, quindi possiamo applicare un sistema di concatenazione:

$$\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 \circ \pi_5$$

il problema è che la composizione di permutazioni è ancora una permutazione, quindi è la stessa cosa che l'eseguire un'unica permutazione π . Varia quindi solo la rappresentazione della permutazione. Per risolvere il problema serve un elemento aggiuntivo che non sia una permutazione, ad esempio una trasposizione.

1.8 Macchina a Rotori

Una macchina a rotor è una macchina crittografica che sfrutta la crittografia a sostituzione **polialfabetica**. La macchina è composta da cilindri rotanti, ognuno con 26 pin di input e 26 pin di output, ciascuno con connessioni interne che collegano input e output in modo univoco. Un singolo cilindro crea una sostituzione monoalfabetica, ruotando dopo ogni input, il che crea una sostituzione polialfabetica con un periodo di 26 caratteri.

La vera forza delle macchine a rotori emerge quando vengono utilizzati più cilindri collegati in serie. Quando si preme un tasto, il cilindro più vicino all'input ruota di una posizione, influenzando il successivo e così via. Questa configurazione crea una vasta varietà di sostituzioni alfabetiche, con un'enorme quantità di possibilità quando si utilizzano più cilindri.

Questo schema crittografico rappresenta una sfida significativa per i crittoanalisti poiché richiede un'enorme quantità di dati cifrati per essere decifrato in modo significativo, rendendo molto difficile l'analisi crittografica basata sulla frequenza delle lettere.

Tale sistema protegge dall'analisi delle frequenze poiché per 26^3 permutazioni non è possibile fare un'analisi delle frequenze.

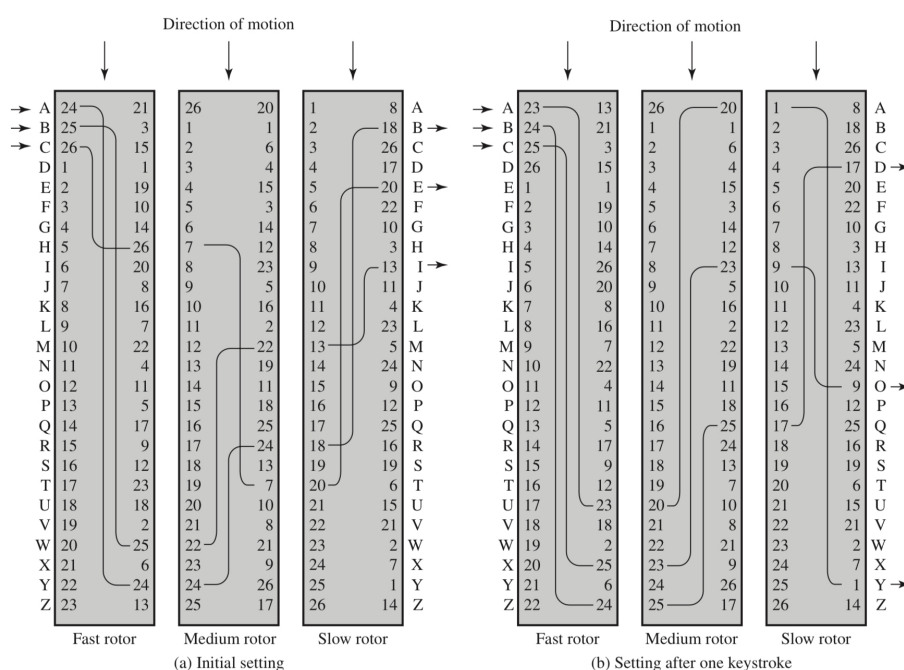


Figura 1.8.1: Macchina a rotori

Enigma

La macchina Enigma è una macchina elettromeccanica portatile utilizzata per cifrare e decifrare messaggi segreti. È stata utilizzata in Germania durante la seconda guerra mondiale. La decodifica dei messaggi è molto complessa, vista la grande quantità di combinazioni possibili.

Se ho a una macchina che per essere decifrata ha bisogno di un tempo più alto della validità dei dati, allora posso dire che è sicura.

Il modo per decodificare i messaggi è stato fondamentale sapere che il messaggio iniziava con una parola chiave, che era sempre la stessa. Sapendo questo, si poteva decodificare il messaggio riducendo notevolmente l'insieme delle chiavi disponibili per la decodifica. Conoscevano quindi il **plaintext**.

La concatenazione di crittosistemi è molto sicura, ma non è sicura contro gli attacchi dove si conosce il plaintext.

1.9 Classificazione dei livelli di sicurezza

La classificazione si basa sulla difficoltà di violare il sistema, quindi sul tipo di attacchi a cui resiste.

- **Known Cipher Text Attack:** l'attaccante conosce il testo cifrato.
- **Known Plaintext Attack:** l'attaccante vede il testo in chiaro e il corrispondente testo cifrato.
- **Chosen Plaintext Attack:** l'attaccante sceglie il testo in chiaro e conosce il corrispondente testo cifrato.
- **Adaptive Chosen Ciphertext Attack:** l'attaccante può continuamente scegliere il testo in chiaro e vedere il corrispondente testo cifrato.

La classifica è in base alla potenza che gli do nell'attaccarmi. L'obiettivo è costruire un sistema che sia sicuro contro gli attacchi Adaptive Chosen Ciphertext Attack.

1.10 Cifrari a flusso e a blocchi

Un **cifrario a flusso** crittografa un flusso di dati digitali un bit o un byte alla volta. Esempi di cifrari a flusso classici sono il cifrario di Vigenère con autochiave e il cifrario di Vernam. Nell'ideale, si utilizzerebbe una versione del cifrario di Vernam con one-time pad, in cui lo stream di chiavi ha la stessa lunghezza dello stream di bit in chiaro. Tuttavia, perché questo sia praticamente realizzabile, lo stream di chiavi deve essere fornito in anticipo ad entrambi gli utenti attraverso un canale indipendente e sicuro, il che può rappresentare una sfida logistica se il traffico dati previsto è di grandi dimensioni.

Di conseguenza, per ragioni pratiche, il generatore di stream di bit deve essere implementato come una procedura algoritmica, in modo che lo stream di bit crittografico possa essere prodotto da entrambi gli utenti. In questo approccio, il generatore di stream di bit è un algoritmo controllato dalla chiave e deve produrre uno stream di bit crittograficamente robusto. I due utenti devono condividere solo la chiave di generazione, e ognuno può generare lo stream di chiavi.

Un **cifrario a blocchi** tratta un blocco di testo in chiaro come un'entità unica e produce un blocco di testo cifrato della stessa lunghezza. Di solito, si utilizza una dimensione di blocco di 64 o 128 bit. Allo stesso modo del cifrario a flusso, i due utenti condividono una chiave di crittografia simmetrica. Utilizzando alcune delle modalità di funzionamento spiegate in precedenza, un cifrario a blocchi può essere usato per ottenere lo stesso effetto di un cifrario a flusso.

Molto più sforzo è stato dedicato all'analisi dei cifrari a blocchi, poiché sembrano essere applicabili a una gamma più ampia di applicazioni rispetto ai cifrari a flusso. La maggior

parte delle applicazioni crittografiche simmetriche basate su rete fa uso di cifrari a blocchi. Pertanto, le discussioni in questo contesto si concentreranno principalmente su di essi.

1.10.1 Electronic Code Book

Il “Electronic Code Book” (ECB) è una delle modalità di funzionamento di un cifrario a blocchi, utilizzato per crittografare un blocco di testo di lunghezza fissa. In questa modalità, ogni blocco di testo in chiaro viene crittografato separatamente utilizzando la stessa chiave. Non c’è alcuna dipendenza tra i blocchi di testo in chiaro durante il processo di crittografia. Pertanto, gli stessi blocchi di testo in chiaro generano gli stessi blocchi di testo cifrato. Tuttavia, questo comporta il rischio di sicurezza in quanto pattern di testo in chiaro simili generano pattern di testo cifrato simili, rendendo il sistema vulnerabile a un’analisi statistica. Nonostante questa debolezza, l’ECB è ancora utilizzato in alcuni scenari in cui la semplicità e la velocità sono prioritarie rispetto alla sicurezza, come per la crittografia di dati non sensibili o per applicazioni specifiche in cui la perdita di alcuni blocchi non compromette la sicurezza complessiva del sistema.

La modalità più semplice è la modalità di codifica elettronica (ECB), in cui il testo in chiaro viene gestito un blocco alla volta e ogni blocco di testo in chiaro viene crittografato utilizzando la stessa chiave. Il termine “codice” è utilizzato perché, per una data chiave, esiste un testo cifrato univoco per ogni blocco di testo in chiaro di b bit. Pertanto, possiamo immaginare un’enorme tabella di corrispondenza in cui vi è una voce per ogni possibile modello di testo in chiaro di b bit che mostra il relativo testo cifrato corrispondente.

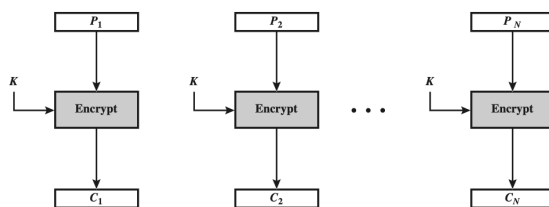


Figura 1.10.1: Electronic Code Book

1.10.2 Cipher Block Chaining

La modalità di funzionamento “Cipher Block Chaining” (CBC) è un metodo di crittografia a blocchi che introduce un certo grado di indipendenza tra i blocchi di testo in chiaro durante il processo di crittografia. Funziona come segue:

1. Prima di crittografare, viene generato un vettore di inizializzazione casuale noto come vettore di inizializzazione (IV). Questo vettore è combinato con il primo blocco di testo in chiaro tramite un’operazione di XOR.
2. Il risultato di questa operazione XOR viene quindi crittografato utilizzando l’algoritmo di cifratura a blocchi insieme alla chiave.

3. Il blocco di testo cifrato risultante viene poi combinato con il blocco di testo successivo prima della crittografia. Questo collegamento tra i blocchi di testo in chiaro aiuta a rompere la correlazione tra i blocchi di testo in chiaro, migliorando la sicurezza rispetto alla modalità di Electronic Code Book (ECB).
4. Questo processo continua per tutti i blocchi di testo in chiaro successivi, garantendo che ciascun blocco di testo cifrato dipenda dal blocco di testo in chiaro precedente, oltre che dalla chiave.

La decodifica avviene seguendo lo stesso processo in ordine inverso, utilizzando il vettore di inizializzazione e la chiave per ottenere il testo in chiaro originale.

La modalità CBC è considerata più sicura dell'ECB poiché introduce una dipendenza tra i blocchi di testo in chiaro, rendendo più complessa l'analisi statistica e aumentando la resistenza agli attacchi crittoanalitici. Tuttavia, è importante gestire correttamente il vettore di inizializzazione per garantire la sicurezza e l'integrità del sistema di crittografia.

$$C_j = E(K, [C_{j-1} \oplus P_j])$$

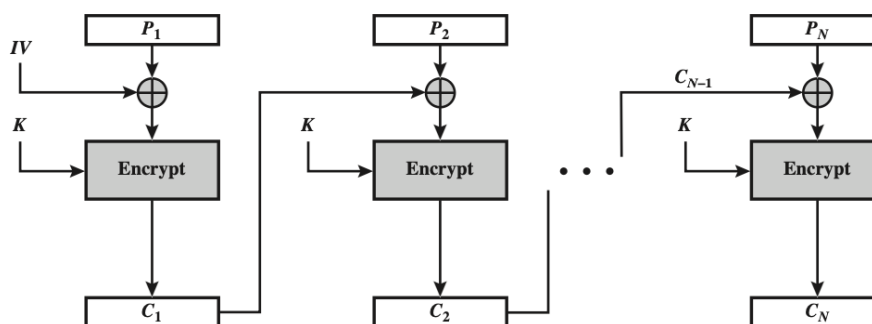


Figura 1.10.2: Cipher Block Chaining

1.10.3 Cipher Feedback

Per AES, DES o qualsiasi altro cifrario a blocchi, la crittografia viene eseguita su un blocco di b bit. Nel caso di DES, $b = 64$, e nel caso di AES, $b = 128$. Tuttavia, è possibile convertire un cifrario a blocchi in un cifrario a flusso utilizzando una delle modalità di funzionamento: la modalità di Feedback di Cifratura (CFB) e la modalità di Feedback di Output (OFB).

Un cifrario a flusso elimina la necessità di aggiungere padding a un messaggio per renderlo un numero intero di blocchi. Inoltre, può funzionare in tempo reale. Pertanto, se viene trasmesso uno stream di caratteri, ogni carattere può essere cifrato e trasmesso immediatamente utilizzando un cifrario a flusso orientato ai caratteri.

Una proprietà desiderabile di un cifrario a flusso è che il testo cifrato abbia la stessa lunghezza del testo in chiaro. Pertanto, se vengono trasmessi caratteri di 8 bit, ogni carattere dovrebbe

essere cifrato per produrre un output di testo cifrato di 8 bit. Se vengono prodotti più di 8 bit, la capacità di trasmissione viene sprecata.

La modalità CFB è illustrata nello schema. In questa modalità, il testo in chiaro è diviso in segmenti di s bit, dove s è la dimensione dell'unità di trasmissione. Durante la crittografia, viene utilizzato un registro a scorrimento di b bit inizializzato con un vettore di inizializzazione (IV). I primi s bit più significativi dell'output della funzione di crittografia vengono combinati con il primo segmento di testo in chiaro P_1 tramite l'operazione XOR per produrre l'unità di testo cifrato C_1 , che viene quindi trasmessa. Il contenuto del registro a scorrimento viene spostato a sinistra di s bit e C_1 viene inserito nei s bit meno significativi del registro a scorrimento. Questo processo continua fino a quando tutti i segmenti di testo in chiaro sono stati crittografati.

Per la decodifica, viene utilizzato lo stesso schema, ad eccezione che l'unità di testo cifrato ricevuta viene combinata tramite XOR con l'output della funzione di crittografia per produrre l'unità di testo in chiaro. È importante notare che viene utilizzata la funzione di crittografia e non quella di decodifica. Questo è facilmente spiegabile. Sia $\text{MSBs}(X)$ definita come i s bit più significativi di X . Quindi

$$C_1 = P_1 \oplus \text{MSBs}[E(K, IV)]$$

Di conseguenza, riarrangiando i termini:

$$P_1 = C_1 \oplus \text{MSBs}[E(K, IV)]$$

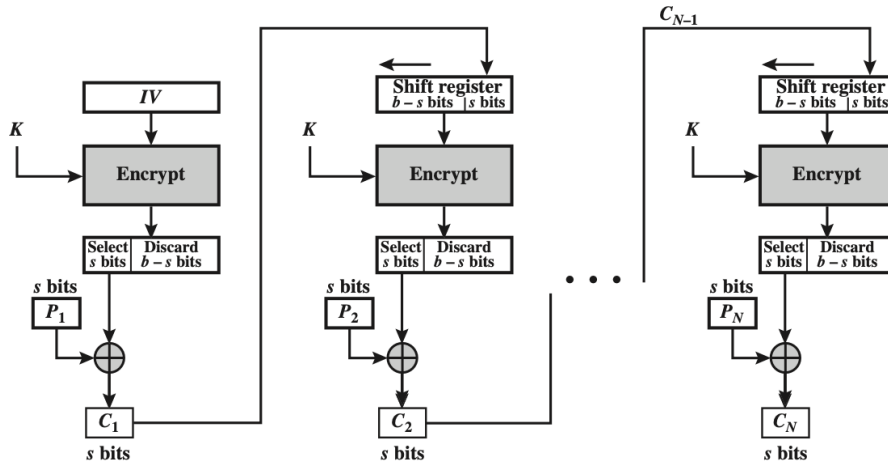


Figura 1.10.3: Cipher Feedback

1.10.4 Output Feedback

La modalità di Feedback di Output (OFB) ha una struttura simile a quella di CFB. Per OFB, l'output della funzione di crittografia viene retroalimentato e diventa l'input per crittografare

il blocco successivo di testo in chiaro. In CFB, l'output dell'unità XOR viene retroalimentato e diventa l'input per crittografare il blocco successivo. L'altra differenza è che la modalità OFB opera su blocchi completi di testo in chiaro e testo cifrato, mentre CFB opera su un sottoinsieme di s bit. La crittografia OFB può essere espressa come:

$$C_j = P_j \oplus E(K, O_{j-1})$$

$$O_{j-1} = E(K, O_{j-2})$$

Un po' di riflessione dovrebbe convincerti che possiamo riscrivere l'espressione di crittografia come:

$$C_j = P_j \oplus E(K, [C_{j-1} \oplus P_{j-1}])$$

Riarrangiando i termini, possiamo dimostrare che la decodifica funziona:

$$P_j = C_j \oplus E(K, [C_{j-1} \oplus P_{j-1}])$$

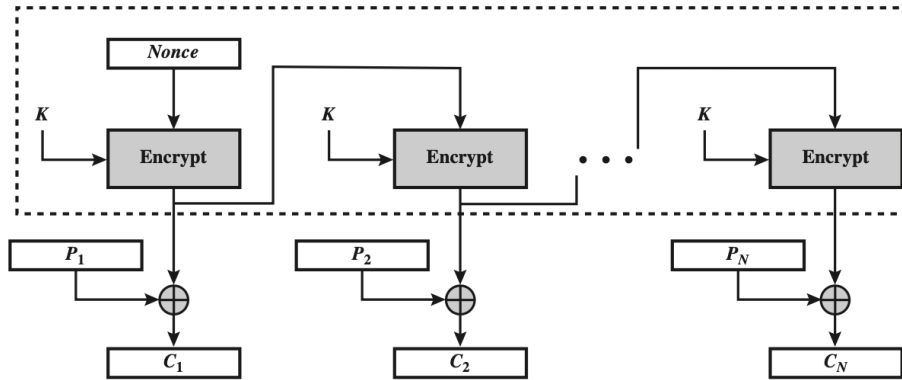


Figura 1.10.4: Output Feedback

I blocchi di output della cifratura, O_i , dipendono solo dalla chiave e dal vettore di inizializzazione (IV) e non dipendono dal testo in chiaro. Pertanto, per una data chiave e IV, lo stream di bit di output utilizzato per l'operazione XOR con lo stream di bit in chiaro è fisso. Se due messaggi diversi avessero un blocco identico di testo in chiaro nella stessa posizione, un attaccante sarebbe in grado di determinare quella parte dello stream O_i .

Un vantaggio del metodo OFB è che gli errori di bit nella trasmissione non si propagano. Ad esempio, se si verifica un errore di bit in C_1 , solo il valore ripristinato di P_1 viene influenzato; i blocchi di testo in chiaro successivi non vengono corrotti. Con CFB, C_1 serve anche come input al registro a scorrimento e quindi causa corruzioni aggiuntive a valle.

Lo svantaggio di OFB è che è più vulnerabile a un attacco di modifica dello stream di messaggi rispetto a CFB. Considera che complementare un bit nel testo cifrato complementa il bit corrispondente nel testo in chiaro ripristinato. Pertanto, possono essere effettuate modifiche controllate al testo in chiaro ripristinato. Questo potrebbe rendere possibile per un avversario, apportando le modifiche necessarie alla parte di checksum del messaggio e alla parte di dati, modificare il testo cifrato in modo che non sia rilevato da un codice di correzione degli errori.

OFB ha la struttura di un tipico cifrario a flusso, poiché il cifrario genera uno stream di bit come funzione di un valore iniziale e di una chiave, e questo stream di bit viene operato con XOR con i bit del testo in chiaro. Lo stream generato che viene operato con XOR con il testo in chiaro è indipendente dal testo in chiaro stesso; questo è evidenziato da riquadri tratteggiati in Figura (1.10.4). Una differenza rispetto ai cifrari a flusso è che OFB crittografa il testo in chiaro un blocco intero alla volta, dove tipicamente un blocco è di 64 o 128 bit. Molti cifrari a flusso crittografano un byte alla volta.

1.11 Rete di Feistel

Moltissimi algoritmi di cifratura a blocchi utilizzano tale struttura. La struttura di Feistel è una struttura di rete iterativa che è stata progettata per essere utilizzata in cifrari a blocchi. Tale struttura ha delle caratteristiche distintive:

- L'input viene diviso in due metà.
- Esegue molteplici *round* di cifratura, dove in ogni round le due metà vengono elaborate in modo come segue:
 - La metà sinistra diventa la metà destra del round precedente.

$$L_i = R_{i-1}$$

- La metà destra diventa l'applicazione della funzione di XOR tra la metà sinistra del round precedente e l'output della funzione f che prende in input la metà destra del round precedente e la chiave del round precedente.

$$R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_{i-1})$$

- La struttura è simmetrica, il che significa che la decodifica avviene semplicemente invertendo l'ordine delle chiavi usate per la cifratura.

–

$$R_{i-1} = L_i$$

–

$$L_{i-1} = R_i \oplus f(L_i, K_i)$$

Il vantaggio è che le funzioni f usate sono **one-way**.

One-way function

Una funzione $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ è **one-way** se esiste un algoritmo che in tempo polinomiale mappa x in $f(x)$ per ogni $x \in \{0, 1\}^*$ e per ogni algoritmo probabilistico polinomiale \mathcal{A} , ogni polinomio $p(\cdot)$ e ogni intero n sufficientemente grande, si ha che la probabilità che \mathcal{A} trovi un x tale che $f(\mathcal{A}(f(x))) = f(x)$ è minore di $1/p(n)$.

Anche se un algoritmo ha accesso a un metodo efficiente per generare valori che, una volta processati dalla funzione f , producono un output, è estremamente improbabile che tale algoritmo possa invertire la funzione e trovare l'input originale dato l'output, almeno senza una quantità impraticabile di tempo e risorse.

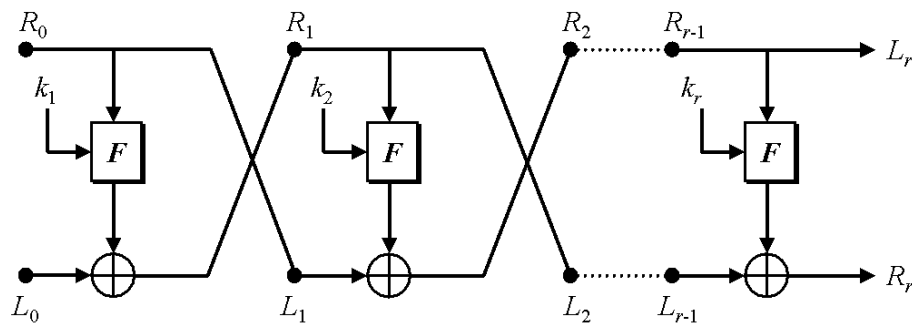


Figura 1.11.1: Rete di Feistel

1.12 Data Encryption Standard - DES

DES è un cifrario a blocchi a chiave simmetrica che utilizza una struttura di Feistel.

La chiave è di 56 bit, ma in realtà sono 64 bit, di cui 8 sono di parità, ed opera su blocchi di 64 bit. L'algoritmo esegue una permutazione iniziale dei bit del blocco di testo in chiaro, nota come *Initial Permutation (IP)*, che riordina i bit secondo uno schema fisso predefinito. Questo è seguito da 16 round di cifratura che consistono in espansione, mescolamento con una chiave di round derivata dalla chiave principale, sostituzione tramite S-Box e una permutazione finale. La funzione di round prende input dalla metà destra del blocco di dati e la chiave di round, producendo un output che è poi combinato con la metà sinistra attraverso un'operazione XOR.

Dopo l'ultimo round, le due metà del blocco vengono scambiate, e questo è seguito da una *Final Permutation (FP)*, che è l'inverso della permutazione iniziale. Il risultato è il blocco di testo cifrato. La decodifica con DES segue lo stesso processo ma in ordine inverso, utilizzando le chiavi di round in ordine inverso.

Nonostante la sua ampiamente testata sicurezza, la principale vulnerabilità di DES risiede nella lunghezza della chiave. Tecniche come l'attacco a forza bruta, che era teoricamente possibile ma non praticabile al tempo della sua creazione, sono divenute fattibili con l'avanzamento della

potenza di calcolo. Per questo motivo, DES è stato sostituito da AES come standard approvato dal NIST (*National Institute of Standards and Technology*) per la cifratura di informazioni sensibili.

1.12.1 Funzione di round

La funzione di round prende in input 32 bit e una chiave di round di 48 bit e produce un output di 32 bit. La funzione di round è composta da quattro passaggi:

1. **Espansione:** i 32 bit di input vengono espansi a 48 bit tramite una permutazione fissa.
2. **Mescolamento:** i 48 bit vengono combinati con la chiave di round tramite un'operazione di XOR.
3. **Sostituzione:** Dopo il mescolamento con la chiave di round, i 48 bit vengono passati attraverso 8 S-BOX, ciascuno dei quali sostituisce 6 bit con 4 bit. Sono lineari e complesse per aggiungere sicurezza alla cifratura.
4. **Permutazione:** i 32 bit vengono permutati tramite una permutazione fissa.

L'alternanza di sostituzioni mediante S-BOX, permutazioni mediante permutazioni fisse e espansioni forniscono la **confusione** e la **diffusione**, concetti introdotti da Shannon e che sono alla base di molti cifrari moderni.

Confusione

Si tratta della relazione tra il testo in chiaro e la chiave. Deve essere difficile dedurre la chiave a partire dal testo cifrato. Ogni bit del testo cifrato deve dipendere da molti bit della chiave.

Diffusione

Si tratta della capacità di un algoritmo di distribuire le correlazioni statistiche del testo lungo tutto l'alfabeto utilizzato dall'algoritmo di cifratura, rendendo quanto più difficile un attacco statistico.

Capitolo 2

Teoria dei numeri

2.1 Proprietà dei numeri

La teoria dei numeri è una branca fondamentale della matematica che studia le proprietà degli interi e delle loro relazioni. Nel contesto della teoria dei numeri, diversi concetti chiave emergono dall'analisi delle operazioni e degli insiemi numerici.

Operazioni chiuse

Un'operazione si dice chiusa se l'operazione applicata a due numeri naturali restituisce un numero naturale.

$$\mathbb{N} \text{ op } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

Ad esempio, l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni chiuse sugli interi.

Quando un'operazione non è chiusa? La divisione, non produce sempre un numero naturale. Gli insiemi sono inoltre caratterizzati da proprietà che li rendono unici.

Proprietà commutativa

$$a \text{ op } b = b \text{ op } a$$

L'addizione e la moltiplicazione sono esempi di operazioni che soddisfano la proprietà commutativa.

Proprietà associativa

$$\forall a, b, c \in A \quad a \text{ op } (b \text{ op } c) = (a \text{ op } b) \text{ op } c$$

La proprietà associativa è verificata dall'addizione e dalla moltiplicazione su diversi insiemi numerici.

Elemento neutro

$$a \text{ op } e = a$$

quindi

$$\exists e \in A \text{ t.c. } \forall a \in A \ a \text{ op } e = e \text{ op } a = a$$

L'elemento neutro per l'addizione è lo zero, mentre per la moltiplicazione è l'unità.

Elemento inverso

$$\forall a \in A \exists a^{-1} \in A \text{ t.c. } a \text{ op } a^{-1} = a^{-1} \text{ op } a = e$$

Alcuni esempi di elementi inversi includono l'opposto di un numero per l'addizione e il reciproco di un numero non nullo per la moltiplicazione.

Ogni volta che definiamo delle strutture matematiche che soddisfano tali proprietà, si parla di gruppi. Un **gruppo** è una struttura algebrica che rispetta determinate regole, tra cui chiusura, associatività, presenza di un elemento neutro e di un elemento inverso.

Prendiamo in considerazione i numeri naturali rispetto all'operazione di somma. Hanno l'inverso? No, quindi non è un gruppo. Tuttavia, se aggiungessimo altri elementi e arrivassimo ai numeri interi, allora avremmo un gruppo rispetto alla somma. Allo stesso modo, se considerassimo i numeri interi rispetto alla moltiplicazione (*senza lo zero*), non avremmo l'inverso. In questo caso, dovremmo aggiungere gli inversi e arrivare ai numeri razionali, che costituiscono un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

Capita spesso di avere strutture che non sono gruppi. In questi casi, si possono seguire due approcci: ridurre la struttura eliminando gli elementi che non soddisfano le proprietà del gruppo o espandere la struttura aggiungendo elementi in modo da soddisfare tali proprietà.

Vorremmo lavorare su un'algebra diversa, possibilmente con gruppi finiti. In particolare, ci concentreremo su gruppi che costituiscono l'algebra alla base dei nostri algoritmi crittografici. Utilizzeremo funzioni che sono facili da calcolare ma difficili da invertire, comunemente conosciute come **one-way function**. Queste funzioni si basano sull'algebra moltiplicativa.

Successivamente, esamineremo anche la crittografia ellittica, che si basa su un'algebra diversa, operando su curve ellittiche. Tuttavia, gli algoritmi fondamentali rimarranno gli stessi, utilizzando però un'algebra additiva.

2.2 Classe di equivalenza \mathbb{Z}_n

Possiamo dire che:

$$\mathbb{Z}_n \equiv \mathbb{Z}_n \quad a \equiv b \pmod{n} \iff (a \bmod n) = (b \bmod n)$$

Quindi due numeri sono equivalenti se hanno lo stesso resto nella divisione per n . Ad esempio, $5 \equiv 11 \pmod{3}$, perché entrambi hanno resto 2 nella divisione per 3.

Quando abbiamo una relazione di equivalenza possiamo costruire l'insieme degli oggetti equivalenti tra loro. L'insieme degli insiemi di oggetti equivalenti forma una **partizione**, gli elementi di tale partizione sono detti **classi di equivalenza** e si denotano mediante parentesi quadre di un elemento di tale classe. Ogni singola classe di equivalenza può essere rappresentata da un qualsiasi elemento della classe stessa.

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

Un'analogia può essere fatta con le ore. Se sono le 10:00, allora sono anche le 22:00, perché entrambe sono equivalenti a 10:00 (mod 12), o con le frazioni. È l'insieme delle classi di equivalenza tra numeri naturali dove due coppie sono equivalenti se hanno lo stesso prodotto incrociato, quindi il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi. Ad esempio, $2 \times 3 = 1 \times 6$.

$$\frac{1}{2} \equiv \frac{3}{6}$$

La rappresentazione canonica di una classe di equivalenza in \mathbb{Z}_n è il suo rappresentante minimo, ovvero un numero naturale compreso tra 0 e $n-1$.

Su tale insieme voglio definire delle operazioni.

2.2.1 Somma

La somma di due classi di equivalenza è definita come la classe di equivalenza della somma dei rappresentanti. Ad esempio, se voglio calcolare $[2] + [3]$, allora calcolo $2 + 3 = 5$ e la classe di equivalenza di 5 è $[5]$. In generale, la somma di due classi di equivalenza è la classe di equivalenza della somma dei rappresentanti.

$$[a] + [b] \triangleq [a + b]$$

Tale rappresentazione è buona solo se il risultato è indipendente dagli elementi delle due classi originali.

Proprietà

- **Commutativa:** $\forall a, b \ [a] + [b] = [b] + [a]$.
- **Associativa:** $\forall a, b, c \ [a] + ([b] + [c]) = ([a] + [b]) + [c]$.
- **Elemento neutro:** $\exists e \in \mathbb{Z}_n \ \forall a \ [a] + [e] = [a] + [a] = [a] \quad e = 0$.
- **Elemento inverso:** $\forall a \ \exists a^{-1} \in \mathbb{Z}_n \text{ t.c. } [a] + [a^{-1}] = [a^{-1}] + [a] = [e] \quad a^{-1} = -a$.

L'insieme \mathbb{Z}_n con l'operazione di somma forma un **gruppo abeliano**, (*abeliano* perché commutativo).

2.2.2 Moltiplicazione

La moltiplicazione di due classi di equivalenza è definita come la classe di equivalenza del prodotto dei rappresentanti. Ad esempio, se voglio calcolare $[2] \cdot [3]$, allora calcolo $2 \cdot 3 = 6$ e la classe di equivalenza di 6 è $[6]$. In generale, la moltiplicazione di due classi di equivalenza è la classe di equivalenza del prodotto dei rappresentanti.

$$[a] \cdot [b] \triangleq [a \cdot b]$$

Tale rappresentazione è buona solo se il risultato è indipendente dagli elementi delle due classi originali.

Proprietà

- **Commutativa:** $\forall a, b [a] \cdot [b] = [b] \cdot [a]$.
- **Associativa:** $\forall a, b, c [a] \cdot ([b] \cdot [c]) = ([a] \cdot [b]) \cdot [c]$.
- **Elemento neutro:** $\exists e \in \mathbb{Z}_n \forall a [a] \cdot [e] = [a] \cdot [a] = [a] \quad e = 1$.

L'insieme \mathbb{Z}_n con l'operazione di moltiplicazione forma un **semigrupp**, ovvero un gruppo senza l'elemento inverso. Per ottenere un gruppo, devo aggiungere l'elemento inverso. Per ottenere tale elemento, quindi passare da un semigrupp ad un gruppo, posso seguire diverse strade; arricchire l'insieme con nuovi elementi, oppure eliminare elementi.

Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}_n - \{0\}$ con l'operazione di moltiplicazione e consideriamo un esempio con $n = 15$.

$$\mathbb{Z}_{15} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

- L'inverso moltiplicativo di 1 è 1.
- L'inverso moltiplicativo di 2 è 8 ($2 \cdot 8 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$).
- L'inverso moltiplicativo di 3 non c'è.
- ...

Notiamo che non tutti gli elementi hanno un inverso moltiplicativo, quindi non posso costruire un gruppo. Per ottenere un gruppo, devo eliminare gli elementi che non hanno un inverso moltiplicativo. L'insieme $\mathbb{Z}_{15} - \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12\}$ che sarà quindi:

$$\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$$

Abbiamo quindi definito l'insieme \mathbb{Z}_n^* :

$$\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid \text{mcd}(a, n) = 1\}$$

Ovvero l'insieme dei numeri che sono relativi primi con n . Moltiplicando due numeri relativamente primi con n , ottengo un numero relativamente primo con n . L'operazione di moltiplicazione è chiusa in \mathbb{Z}_n^* .

Teorema Teorema di Eulero**2.2.1** Per ogni $a, b \exists x, y \ ax + by = \text{mcd}(a, b)$ Se $a \in \mathbb{Z}_n^*$ allora $\text{mcd}(a, n) = 1$ per definizione e quindi

$$ax + ny = 1$$

$$ax = 1 - ny$$

$$ax \equiv 1 \pmod{n}$$

Quindi la classe di equivalenza di x è l'inverso moltiplicativo di a . La necessità di lavorare con gruppi nasce dal fatto che in informatica è necessario lavorare con insiemi finiti, in questo caso algebre su insiemi finiti, in particolare sui gruppi, in modo da manipolare gli elementi in base alle proprietà.

2.3 Gruppi e generatoriSia \mathcal{G} un gruppo, un operatore \otimes . Sia g un elemento di \mathcal{G} .

$$g = g^1 \quad g \otimes g = g^2 \quad g \otimes g \otimes g = g^3 \quad \dots \quad g \otimes g \otimes g \otimes \dots \otimes g = g^n$$

Continuando a moltiplicare g per se stesso, non arriverò ad un qualsiasi n generico, poiché il gruppo è finito. Quindi, supponiamo che arrivi a $g \otimes g \otimes g \otimes \dots \otimes g = g^{|\mathcal{G}|}$ e che l'esponente successivo sia $g^{|\mathcal{G}|+1}$. Per il **pumping lemma** avrò sicuramente almeno un elemento ripetuto.

Teorema Per ogni gruppo \mathcal{G} finito, per ogni $a \in \mathcal{G}$,**2.3.1**

$$a^{|\mathcal{G}|} = 1$$

Da questo teorema segue che se sicuramente $a^{|\mathcal{G}|} = 1$ ovvero l'elemento neutro, ma per un gruppo \mathcal{G} finito, potrei avere anche che per un qualche $a^i = 1$.

Se prendo tutte le potenze di g ottengo un sottogruppo dell'insieme \mathcal{G} , un sottogruppo continua ad essere un gruppo. Se quello che ottengo è un sottogruppo proprio, ovvero un sottogruppo che è tutto l'insieme \mathcal{G} , allora G è ciclico e g è un **generatore** di \mathcal{G} .

Teorema Sia \mathcal{G}' un sottogruppo di \mathcal{G} , se $|\mathcal{G}'| = |\mathcal{G}|$ allora \mathcal{G}' è un sottogruppo proprio.**2.3.2****Esempio**

$$\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$$

- 1
- $2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$ quindi $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$
- $4 \cdot 4 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$
- $7 \cdot 7 = 49 \equiv 4, 4 \cdot 7 = 28 \equiv 13, 13 \cdot 7 = 91 \equiv 1 \pmod{15}$

- $8 \cdot 8 = 64 \equiv 4, 4 \cdot 8 = 32 \equiv 2, 2 \cdot 8 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$
- $11 \cdot 11 = 121 \equiv 1 \pmod{15}$
- $13 \cdot 13 = 169 \equiv 4, 4 \cdot 13 = 52 \equiv 7, 7 \cdot 13 = 91 \equiv 1 \pmod{15}$
- $14 \cdot 14 = 196 \equiv 1 \pmod{15}$

La cardinalità di \mathbb{Z}_{15}^* è 8, ma questo gruppo non è ciclico, poiché non esiste un elemento generatore che generi tutto il gruppo.

2.3.1 Generatori primi

Se prendo \mathbb{Z}_n^* con n primo, allora \mathbb{Z}_n^* è ciclico, poiché ogni elemento di \mathbb{Z}_n^* è un generatore di \mathbb{Z}_n^* . In generale un numero primo non può essere scomposto in fattori, quindi:

$$\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$$

Esempio

$$\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- 1
- $2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$
- $3 \cdot 3 = 9 \equiv 2, 2 \cdot 3 = 6, 6 \cdot 3 = 18 \equiv 4, 4 \cdot 3 = 12 \equiv 5, 5 \cdot 3 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$
- $4 \cdot 4 = 16 \equiv 2, 2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$
- $5 \cdot 5 = 25 \equiv 4, 4 \cdot 5 = 20 \equiv 6, 6 \cdot 5 = 30 \equiv 2, 2 \cdot 5 = 10 \equiv 3, 3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$
- $6 \cdot 6 = 36 \equiv 1 \pmod{7}$

Abbiamo che \mathbb{Z}_7^* è ciclico, poiché esiste un generatore che genera tutto il gruppo, in questo caso 3 e 5.

2.3.2 Probabilità dei numeri primi

Teorema Densità dei numeri primi

2.3.3 La densità dei numeri primi è proporzionale al numero di bit che compongono il numero.

Suppongo di avere un numero casuale n di k bit, allora la probabilità che n sia primo è $\frac{1}{k}$. Supponiamo di voler comporre un numero n di k bit, utilizzo un algoritmo che mi generi tale numero.

Per verificare che tale numero sia primo, utilizzo un algoritmo casuale che sceglie casualmente un numero a tra 1 e $n-1$ e verifica che il numero scelto sia primo. Statisticamente circa la metà dei numeri scelti sono testimoni del fatto che un numero non sia primo. Se il test fallisce e mi dice che il numero non è primo, allora termino. Se il test ha esito positivo allora scelgo un altro numero a e ripeto il test di primalità. Se tutte le volte che scelgo un numero a il test ha esito positivo, allora la probabilità di accettare la primalità di n è $\frac{1}{2^t}$, dove t è

il numero di volte che ho ripetuto il test (*eventi indipendenti*), abbassando la probabilità di errore notevolmente.

Sulla base di questo ragionamento, siamo in grado di generare numeri primi molto grandi.

2.4 Logaritmo discreto

Supponiamo di avere a disposizione un gruppo \mathbb{Z}_p^* un generatore g e un elemento di tale gruppo $a \in \mathbb{Z}_p^*$, visto che le potenze del generatore enumerano l'intero gruppo, ci sarà una potenza x che mi permette di ottenere a :

$$g^x = a = g^{x+k(p-1)}$$

L'oggetto x è detto **logaritmo discreto** di a in base g . Trovare il logaritmo discreto di un numero è un problema difficile, non possiamo dire che non esistano algoritmi efficienti, ma non ne conosciamo nessuno. Visto che non conosciamo algoritmi efficienti, possiamo utilizzare il logaritmo discreto come funzione di *one-way*. Al crescere della dimensione del gruppo, il problema diventa sempre più difficile, in maniera più che polinomiale.

2.5 Numero quadrato

Se ho un gruppo \mathcal{G} con un'operazione binaria \otimes , un elemento $a \in \mathcal{G}$ è detto **quadrato** se e solo se esiste un $x \in \mathcal{G}$ tale che:

$$x \otimes x = a$$

Quindi esiste una radice quadrata di a in \mathcal{G} . Gli elementi in \mathbb{Z}_p^* sono $p-1$, ma solo la metà di questi sono quadrati $\frac{p-1}{2}$. Perché un numero sia un quadrato devo trovare un numero del gruppo che elevato al quadrato mi dia il numero dell'insieme, il numero risultante sarà un quadrato.

Esempio

$$\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- $1 \cdot 1 = 1$ quindi 1 è un quadrato;
- $2 \cdot 2 = 4$ quindi 4 è un quadrato;
- $3 \cdot 3 = 9 \equiv 2$ quindi 2 è un quadrato;
- $4 \cdot 4 = 16 \equiv 2$ quindi 2 è un quadrato;
- $5 \cdot 5 = 25 \equiv 4$ quindi 4 è un quadrato;
- $6 \cdot 6 = 36 \equiv 1$ quindi 1 è un quadrato;

Gli elementi che non sono quadrati sono quindi $\{3, 5, 6\}$. Quindi esattamente la metà degli elementi del gruppo sono quadrati.

Teorema Tutti e soli gli elementi g^{2i} sono quadrati in \mathbb{Z}_p^* .

2.5.1

Se consideriamo un generatore g di \mathbb{Z}_p^* e generiamo l'intero gruppo, è chiaro che tutti gli elementi che sono potenze pari di g sono quadrati. Di conseguenza tutti gli elementi che sono potenze dispari di g non sono quadrati.

L'elemento g^{2i} ha due radici quadrate, g^i e $g^{i+\frac{p-1}{2}}$.

$$g^{2i} = \begin{cases} g^i \\ g^{i+\frac{p-1}{2}} \end{cases}$$

Infatti

$$\left(g^{i+\frac{p-1}{2}}\right)^2 = g^{2i} \cdot g^{p-1} = g^{2i} \cdot 1 = g^{2i}$$

Sapendo che $g^{\frac{p-1}{2}} = -1$ perché p è un numero primo, posso riscrivere la formula come:

$$g^{2i} = \begin{cases} g^i \\ g^{-i} \end{cases}$$

Quindi elevare un generatore alla cardinalità del gruppo mi dà 1, ma elevarlo alla metà della cardinalità del gruppo mi dà -1 .

Con questa osservazione possiamo costruire un algoritmo che mi permette di distinguere gli elementi che sono quadrati da quelli che non lo sono.

2.6 Simbolo di Legendre

Il simbolo di Legendre

$$\left(\frac{a}{p}\right) \triangleq a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

Sia $a = g^{2i}$ ovvero un quadrato, allora

$$a^{\frac{p-1}{2}} = (g^{2i})^{\frac{p-1}{2}} = (g^i)^{p-1} = 1^{p-1} = 1 \pmod{p}$$

Sia $a = g^{2i+1}$ ovvero un non quadrato, allora

$$a^{\frac{p-1}{2}} = (g^{2i+1})^{\frac{p-1}{2}} = (g^{2i})^{\frac{p-1}{2}} \cdot g^{\frac{p-1}{2}} = (g^i)^{p-1} \cdot g^{\frac{p-1}{2}} = 1 \cdot (-1) = -1 \pmod{p}$$

Quindi applicando il simbolo di Legendre ad un numero a in base g otteniamo

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ è un quadrato} \\ -1 & \text{se } a \text{ non è un quadrato} \end{cases}$$

Quindi il simbolo di Legendre mi permette di distinguere gli elementi che sono quadrati da quelli che non lo sono.

Sappiamo che nessuno conosce algoritmi efficienti per calcolare il logaritmo discreto, so però dire che un numero è un quadrato o meno osservando l'ultimo bit del numero.

Con il simbolo di Legendre posso calcolare il bit meno significativo di un numero in maniera efficiente, nonostante non siamo capaci di calcolare il logaritmo discreto.

Il fatto che non siamo capaci di calcolare invertire una funzione non implica che non siamo capaci di calcolare qualche bit della funzione. Il nostro obiettivo però è quello di non ricavare informazioni da nulla, neanche un bit. Quindi l'elevamento a potenza in \mathbb{Z}_p^* non potrà essere usato per codificare.

2.6.1 Iterative Squaring

Il simbolo di Legendre possiamo calcolarle in maniera polinomiale, ma non in maniera efficiente. Se eleviamo un numero a per b non operiamo con un algoritmo efficiente. In \mathbb{Z}_p^* è possibile calcolare in tempo polinomiale un'esponenziazione a^b con $a, b \in \mathbb{Z}_p^*$.

Rappresentiamo b in base 2:

$$b = \sum_{i=0}^k b_i \cdot 2^i$$

Quindi

$$a^b = a^{\sum_{i=0}^k b_i \cdot 2^i} = \prod_{i=0}^k a^{b_i \cdot 2^i}$$

Con il sistema di numerazione binario possiamo calcolare in maniera efficiente l'esponenziazione, in un numero di moltiplicazioni pari al numero di bit di b .

```

1: procedure ITERATIVE SQUARING( $a, b$ )
2:    $y \leftarrow 1$ 
3:    $t \leftarrow a$ 
4:   while  $b \neq 0$  do
5:     if  $b$  is odd then
6:        $y \leftarrow y \cdot t$ 
7:     end if
8:      $b \leftarrow b/2$ 
9:      $t \leftarrow t \cdot t$ 
10:  end while
11:  return  $r$ 
12: end procedure
```

Se prendiamo però due numeri a 10 cifre e li moltiplichiamo, il risultato sarà un numero nel caso pessimo un numero a 20 cifre. Nel caso pessimo nella moltiplicazione iterativa il risultato finale sarà un numero a 2^k cifre, dove k è il numero di bit di b .

Per contrastare tale problema modifico tale algoritmo in questo modo:

```

1: procedure ITERATIVE SQUARING( $a, b, n$ )
2:    $y \leftarrow 1$ 
3:    $t \leftarrow a$ 
4:   while  $b \neq 0$  do
5:     if  $b$  is odd then
```

```

6:       $y \leftarrow y \cdot t \pmod{n}$ 
7:      end if
8:       $b \leftarrow b/2$ 
9:       $t \leftarrow t \cdot t \pmod{n}$ 
10:    end while
11:    return  $r$ 
12: end procedure

```

A questo punto non ho più il problema di avere numeri con crescita esponenziale del risultato, i risultati parziali rimangono sempre nella stessa quantità di bit.

2.6.2 Il gruppo \mathbb{Z}_n^* con $n = p \cdot q$

In questo gruppo è possibile il numero di elementi saranno pari a

$$|\mathbb{Z}_n^*| = |\mathbb{Z}_p^*| \cdot |\mathbb{Z}_q^*| = (p-1) \cdot (q-1)$$

Calcolando quindi gli elementi co-primi con n .

Esiste una funzione $\varphi(n)$ che mi fornisce la cardinalità di \mathbb{Z}_n^* , chiama **funzione di Eulero**.

$$\varphi(n) \triangleq |\mathbb{Z}_n^*|$$

Sia x un numero casuale minore di n :

$$\mathcal{P}[x \in \mathbb{Z}_n^*] = \frac{(p-1)(q-1)}{p \cdot q} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{q-1}{q} > \frac{1}{4}$$

Ma se p e q sono grandi, allora $\mathcal{P}[x \in \mathbb{Z}_n^*] \approx 1$.

Ma quanti elementi di \mathbb{Z}_n^* sono quadrati?

$$\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} = \frac{\varphi(n)}{4}$$

Un elemento di \mathbb{Z}_n^* è un elemento di \mathbb{Z}_p^* e di \mathbb{Z}_q^* , quindi se è un quadrato in \mathbb{Z}_n^* è un quadrato in \mathbb{Z}_p^* e in \mathbb{Z}_q^* . Quindi:

- $\frac{1}{4}$ degli elementi di \mathbb{Z}_n^* sono quadrati in \mathbb{Z}_p^* e in \mathbb{Z}_q^* .
- $\frac{1}{4}$ degli elementi di \mathbb{Z}_n^* sono quadrati in \mathbb{Z}_p^* e non in \mathbb{Z}_q^* .
- $\frac{1}{4}$ degli elementi di \mathbb{Z}_n^* non sono quadrati in \mathbb{Z}_p^* e sono quadrati in \mathbb{Z}_q^* .
- $\frac{1}{4}$ degli elementi di \mathbb{Z}_n^* non sono quadrati in \mathbb{Z}_p^* e in \mathbb{Z}_q^* .

Per capire se un numero è un quadrato in \mathbb{Z}_n^* in maniera semplice è necessario conoscere la fattorizzazione di n . Basta calcolare il simbolo di Legendre rispetto a p e q e so il risultato. Se non conosco la fattorizzazione di n non conosciamo algoritmi efficienti per stabilire se un numero è un quadrato in \mathbb{Z}_n^* non disponendo della fattorizzazione di n .

Quindi anche la quadraticità di un numero è un problema difficile.

2.7 Simbolo di Jacobi

Il simbolo di Jacobi è una generalizzazione del simbolo di Legendre.

$$\left(\frac{a}{n_1 \cdot n_2}\right) = \left(\frac{a}{n_1}\right) \cdot \left(\frac{a}{n_2}\right)$$

$$\left(\frac{a_1 \cdot a_2}{n}\right) = \left(\frac{a_1}{n}\right) \cdot \left(\frac{a_2}{n}\right)$$

Tale simbolo potrà avere valore -1 o 1 .

Ad oggi stabilire se un numero è un quadrato in \mathbb{Z}_n^* quando il simbolo di Jacobi è 1 è un problema difficile. Se il simbolo di Jacobi è -1 allora il numero non è un quadrato in \mathbb{Z}_n^* per definizione.

Sia a un elemento di \mathbb{Z}_n^* con $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$, vorrei ottenere un oggetto con la stessa quadraticità di a distribuito uniformemente ad oggetti con la stessa quadraticità di a .

2.8 Generazione di numeri casuali con la stessa quadraticità di a

Sia x un elemento casuale di \mathbb{Z}_n^* , allora:

$$x \in_R \mathbb{Z}_n^* \Rightarrow x^2 \cdot a$$

ha la stessa quadraticità di a e sarà distribuito uniformemente ad oggetti con la stessa quadraticità di a .

Quadrati diversi vengono mappati con la moltiplicazione di a in quadrati diversi e quindi la distribuzione è uniforme. Perché ho una funzione iniettiva e suriettiva (una biezione), quindi la distribuzione del risultato sarà la stessa della sorgente.

In questo modo se non conosciamo la natura casuale degli oggetti possiamo generare oggetti con la stessa natura, ma casuali (*con quadraticità*).

2.9 Fattorizzazione di n

Lemma *Siano x e y due radici quadrate di uno stesso quadrato di \mathbb{Z}_n^* , tali che $x \not\equiv \pm y$. Allora il mcd*
2.9.1 *tra $x + y$ e n è un fattore di n .*

Dimostrazione. Sia $n = p \cdot q$, visto che x e y sono radici quadrate di uno stesso numero sappiamo che $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$. Quindi:

$$x^2 \equiv y^2 \pmod{n} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y) = k \cdot n \quad \text{per qualche } k$$

Supponiamo che p divida $x + y$, ma è possibile che q divida $x + y$? Se fosse possibile allora n divide $x + y$, ma ciò vorrebbe dire che $x + y \equiv 0 \pmod{n}$, ovvero $x \equiv -y \pmod{n}$ e ciò è assurdo perché $x \not\equiv \pm y$. Quindi $\text{mcd}(x + y, n) = p$.

Supponiamo che q divida $x + y$, ma è possibile che p divida $x + y$? Se fosse possibile allora n divide $x + y$, ma ciò vorrebbe dire che $x + y \equiv 0 \pmod{n}$, ovvero $x \equiv -y \pmod{n}$ e ciò è assurdo perché $x \not\equiv \pm y$. Quindi $\text{mcd}(x + y, n) = q$.

Supponiamo che p non divida $x + y$ e che q non divida $x + y$, ma p e q sono fattori del prodotto $(x - y)(x + y)$, quindi p e q devono essere fattori di almeno uno dei due fattori. Se p non divide $x + y$ allora q deve dividere $x + y$, allora p e q sono fattori di $x - y$, ma allora $x \equiv y \pmod{n}$ e ciò è assurdo.

□

Se abbiamo due radici quadrate distinte allora riusciamo a trovare la fattorizzazione di n . Il problema ora è come faccio a trovare due radici distinte di un numero se mi viene fornito l'algoritmo per il calcolo della radice quadrata? Supponiamo che esista un algoritmo $A \in \text{PPT}$ (*probabilistic polynomial time*) che calcoli la radice quadrata di un numero in \mathbb{Z}_n^* . Allora:

```

1: procedure FACTORIAL( $n$ )
2:    $x \leftarrow_R \mathbb{Z}_n^*$ 
3:    $y \leftarrow A(x^2)$ 
4:    $z \leftarrow \text{mcd}(x + y, n)$ 
5:   if  $z \neq n$  then return  $z$ 
6:   else
7:     return Factorial( $n$ )
8:   end if
9: end procedure

```

Prendo un quadrato a caso, di questo quadrato conosco una radice scelta uniformemente tra le quattro possibili. L'algoritmo A mi restituisce una radice quadrata di x^2 , l'algoritmo sceglierà la radice quadrata in qualche modo, sicuramente indipendente dalla scelta fatta su x . La probabilità che la radice scelta sia x o l'opposto di x è $\frac{1}{2}$, quindi il test che verifica se z è un fattore di n avrà successo con probabilità $\frac{1}{2}$, quindi ripeto l'algoritmo A un numero costante di volte poiché la probabilità di successo è costante. Quindi l'algoritmo è polinomiale.

Il numero di esperimenti da eseguire per aver successo è data dalla distribuzione geometrica, e il valore atteso è il reciproco della ragione di successo, quindi in media devo eseguire due volte l'algoritmo A per avere successo.

Ciò ci porta a dire che calcolare la radice quadrata è verosimilmente difficile, perché se qualcuno ci riuscisse allora potremmo fattorizzare in tempo polinomiale.

L'idea di dimostrare la sicurezza di un crittosistema è quella di dimostrare che esista un algoritmo che utilizzi come sottoprocedura un algoritmo che risolve un problema difficile. I problemi difficili sono quelli che non si riescono a risolvere in tempo polinomiale, quindi il calcolo della radice quadrata, il logaritmo discreto e la fattorizzazione di numeri primi.

Capitolo 3

Crittografia a chiave pubblica

3.1 Crittografia a chiave pubblica

L'idea di crittografia a chiave pubblica è quella di avere due chiavi, una pubblica P_k e una privata S_k . La chiave pubblica è nota a tutti, mentre quella privata è nota solo al proprietario. Con codifica avviene con la chiave pubblica, mentre la decodifica avviene con la chiave privata.

Ovviamente l'idea di fondo è che avendo in mano il testo cifrato non si riesce a risalire al testo in chiaro senza la chiave privata. Chiunque può cifrare un messaggio, ma solo il proprietario della chiave privata può decifrarlo.

In un sistema a chiave pubblica abbiamo i seguenti algoritmi:

- Un algoritmo di generazione delle chiavi:

$$\mathcal{G} : 1^k \rightarrow (P_k, S_k)$$

Dove 1^k è un parametro che indica la lunghezza della chiave, ovvero il *security parameter*.

- Un algoritmo di encryption:

$$\mathcal{E} : m, P_k \rightarrow \mathcal{E}(m, P_k)$$

- Un algoritmo di decryption:

$$\mathcal{D} : C, S_k \rightarrow \mathcal{D}(C, S_k)$$

Ovviamente vale la seguente relazione:

$$\forall m \quad \mathcal{D}(\mathcal{E}(m, P_k), S_k) = m \tag{3.1}$$

Oltre al fatto che decriptare un messaggio a partire dal testo cifrato senza la chiave privata è computazionalmente intrattabile. L'idea è che più la chiave è lunga più è difficile rompere il sistema. L'idea è che il security parameter k è proporzionale alla lunghezza della chiave e al crescere di k cresce la sicurezza del sistema.

Gli algoritmi citati sono algoritmi probabilistici polinomiali. Se voglio affermare che tali algoritmi sono polinomiali, l'input che rappresenta la lunghezza della chiave non può essere rappresentato in binario, perché la lunghezza della chiave sarebbe esponenziale nel numero di bit utilizzati per rappresentare il numero. Sulle macchine di Turing la dimensione del problema è data dal numero di celle del nastro di input. Utilizzando la teoria della complessità basata su tali macchine, o in ogni caso su sistemi dove la dimensione dell'input è lo spazio che occupa nella nostra rappresentazione. Per voler dire che un algoritmo è polinomiale nel **valore del security parameter** e non nel modo in cui è rappresentato, imponiamo che il security parameter sia rappresentato in **unario**, ovvero tanti uni quanti la lunghezza della chiave.

3.2 Diffie-Hellman

Il problema di Diffie-Hellman è il seguente: Alice e Bob vogliono scambiarsi un segreto senza che Eve lo possa intercettare. Lo strumento utilizzato per risolvere il problema è del logaritmo discreto.

Si fissa a priori un numero primo p e un generatore g di \mathbb{Z}_p^* . Un agente A sceglie un numero $x \in_R \{1, \dots, p-1\}$ e calcola $g^x \bmod p$. Un agente B sceglie un numero $y \in_R \{1, \dots, p-1\}$ e calcola $g^y \bmod p$.

	Public	Private
A	$g^x \bmod p$	x
B	$g^y \bmod p$	y

A questo punto A e B possono calcolare $g^{xy} \bmod p$ e $g^{yx} \bmod p$, che coincidono.

Il sistema è sicuro perché calcolare $g^{xy} \bmod p$ è computazionalmente intrattabile. Avendo a disposizione g^x e g^y non è possibile calcolare g^{xy} . Se sappiamo rispondere al problema del logaritmo discreto, allora possiamo risolvere il problema di Diffie-Hellman, tale algoritmo potrebbe esistere, ma non è stato ancora trovato.

Sia $\mathcal{A} \in \text{PPT}$ che calcola $g^{xy} \bmod p$ a partire da $g^x \bmod p$ e $g^y \bmod p$. Usiamo \mathcal{A} per costruire un algoritmo \mathcal{B} che risolve il problema del logaritmo discreto, ma tale dimostrazione non è ancora stata data, perciò non l'algoritmo di Diffie-Hellman non è dimostrabilmente sicuro. Non siamo in grado di dire che rompere Diffie-Hellman è almeno difficile quanto risolvere il problema del logaritmo discreto.

3.2.1 Ipotesi di Diffie-Hellman

Qualcuno potrebbe costruire un algoritmo che si basa sull'ipotesi che l'algoritmo di Diffie-Hellman sia sicuro.

Ipotesi di Diffie-Hellman

Siano x, y, z dei numeri casuali scelti in $\{1, \dots, p-1\}$, allora è difficile distinguere (g^x, g^y, g^{xy}) da (g^x, g^y, g^z) .

Il concetto di distinguibilità è un concetto probabilistico, ovvero che la possibilità di poter distinguere due insiemi di elementi è trascurabile. Ovvero che la probabilità di distinguere sia inferiore a $1/2 + \epsilon$, dove ϵ è trascurabile. Quindi che l'attaccante non abbia alcun vantaggio rispetto ad un attaccante che non ha alcuna informazione. Se un attaccante avesse anche un minimo vantaggio, allora potrebbe utilizzare tale vantaggio per ottenere informazioni sul segreto. Tale vantaggio può essere utilizzato per ottenere l'informazione totale mediante esperimenti ripetuti.

3.3 Rivest Shamir Adleman - RSA

Sappiamo che g^x è una funzione che è facile da calcolare, ma è difficile da invertire, ovvero calcolare x a partire da g^x , una funzione con questa proprietà è detta **one-way function**. Il protocollo di Diffie-Hellman è sicuro se e solo se esiste una one-way function. Vorremmo che la one-way function sia anche **trapdoor**, ovvero che esista un algoritmo efficiente che permetta di invertire la funzione. Tale algoritmo è detto **trapdoor algorithm**. La trapdoor è una informazione aggiuntiva che permette di invertire la funzione.

Funzione di Eulero φ

In matematica, la funzione φ di Eulero, o semplicemente funzione di Eulero o toziente, è una funzione definita, per ogni intero positivo n , come il numero degli interi compresi tra 1 e n che sono coprimi con n . Ad esempio, $\varphi(8) = 4$ poiché i numeri coprimi di 8 sono quattro: 1, 3, 5, 7.

La funzione $\varphi(n)$ è una funzione molto importante nella teoria dei numeri, principalmente perché è la cardinalità del gruppo moltiplicativo degli interi di modulo n , più precisamente è l'ordine del gruppo moltiplicativo dell'anello $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (vedere aritmetica modulare). Questo fatto, unito con il teorema di Lagrange, dimostra il teorema di Eulero: se a è un numero coprimo con n , allora:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Siano p, q due numeri primi molto grandi, $n = pq$. Sia e un numero casuale tale che $\text{mcd}(e, \varphi(n)) = 1$, dove $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$, ovvero il numero di Eulero. Scegliamo un elemento d co-primo con $\varphi(n)$ tale che $de \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. La chiave pubblica è la coppia (n, e) , mentre la chiave privata è la coppia (n, d) .

Algoritmo di cifratura

$$\mathcal{E} : m, (n, e) \mapsto m^e \pmod{n}$$

Algoritmo di decodifica

$$\mathcal{D} : c, (n, d) \mapsto c^d \pmod n$$

3.3.1 Funzionamento

Proviamo a prendere un messaggio m e a cifrarlo con la chiave pubblica (n, e) , e proviamo a decodificarlo con la chiave privata (n, d) .

$$(m^e)^d = m^{ed} = m^{k\varphi(n)+1} = m \cdot (m^{\varphi(n)})^k \equiv m \pmod n$$

Infatti $d \cdot e$ è congruo a 1 modulo $\varphi(n)$, quindi $d \cdot e = k\varphi(n) + 1$. Per il teorema del resto cinese, $m^{k\varphi(n)+1} \equiv m$, e non solo per gli elementi di \mathbb{Z}_n^* .

La funzione one way è la funzione di codifica, quindi m^e , l'inversa di m^e è la radice e -esima, ovvero $m = c^{1/e}$, ma per calcolare la radice e -esima ad oggi non esiste un algoritmo efficiente. L'unico modo per calcolare la radice e -esima è calcolare d e decifrare il messaggio, quindi d è l'informazione trapdoor.

Ci piacerebbe dimostrare che se fossimo in grado di invertire la radice e -esima di un numero allora saremmo in grado di fattorizzare n , o di calcolare il residuo quadratico. Se fosse vero, allora RSA sarebbe sicuro, ma non è stato ancora dimostrato ad oggi. L'unica sicurezza di RSA è l'esistenza dell'ipotesi di RSA.

3.3.2 Attacchi a RSA

Ci sono casi in cui RSA è stato attaccato, il motivo però era legato alla cattiva implementazione dell'algoritmo, e non all'algoritmo in sé. Quando parliamo di un crittosistema in realtà parliamo di un insieme di algoritmi, e non di un singolo algoritmo. L'algoritmo di generazione delle chiavi impone la scelta **casuale** di e in modo uniforme con gli elementi primi con $\varphi(n)$, ma se non fosse casuale, allora potremmo avere dei problemi.

Attacco sulla base di messaggi piccoli

Inoltre, in caso di messaggi piccoli, quindi se $m^e < n$, vuol dire che non applico nemmeno l'operazione di modulo, e vuol dire in particolare che la radice e -esima di m^e è una normale radice e -esima nell'aritmetica dei numeri interi, e quindi è facile da calcolare. Lavorando con messaggi che a livello numerico sono piccoli, allora invertiamo tutto facilmente, più è piccola e , più è facile avere messaggi che elevati a e sono più piccoli di n . Bisogna quindi star attenti a scenari in cui $m^e < n$.

Attacco sulla base di messaggi sparsi

Altri problemi che potrebbe avere RSA sono legati allo spargimento dei messaggi. Immaginiamo di avere un messaggio:

Buongiorno, il suo voto è 30L
 Buongiorno, il suo voto è 30
 Buongiorno, il suo voto è 29

...
Buongiorno, il suo voto è 0

Uno che vuole decifrare il messaggio può prendere i 32 messaggi e cifrarli tutti, per poi distinguerli. Se con RSA devo codificare messaggi che sono presi da un insieme piccolo, devo far attenzione perché potrei venir attaccato da qualcuno che utilizza la stessa chiave pubblica.

Attacco sulla informazione parziale

Siamo sicuri che tutti i bit di questa inversa siano difficili da calcolare? Non è che sulla radice e -esima di m^e ci sono dei bit che sono più facili da calcolare? Ai fini di dire che il sistema è sicuro, non è sufficiente dire che il ciphertext non si sappia ricavare il plaintext, vorremmo dire che dal ciphertext non si riesca a ricavare nessuna informazione binaria sul plaintext. Ma come possiamo definire tale proprietà?

Attacco sulla base di messaggi ripetuti

Per difendersi da tale problema, aggiungo un po' di rumore al messaggio, ovvero aggiungo un po' di bit casuali al messaggio, in modo tale che con alta probabilità il messaggio non sia mai uguale. In questo modo, anche se il messaggio è sempre lo stesso, il ciphertext è sempre diverso, utilizzando quindi la probabilistic encryption.

3.4 Sicurezza di un crittosistema

RSA è sicuro perché non conosciamo un algoritmo probabilistico polinomiale per calcolare la radice e -esima di un numero. Ma cosa vuol dire? Se esistesse un algoritmo probabilistico polinomiale per calcolare la radice e -esima di un numero con probabilità $\frac{1}{k}$, sarebbe un problema, perché reiterando l'algoritmo k volte, avrei una probabilità di successo.

Se fossimo nello scenario in cui con un $a \in_R \mathbb{Z}_n^*$, l'algoritmo mi dia risposta corretta con probabilità $\frac{1}{k}$, potremmo dichiararci tranquilli? No, perché potrebbero attaccare sempre.

Fissando a e scegliendo $r \in_R \mathbb{Z}_n^*$, calcolo $(a \cdot r)^e \bmod n$, se prendo un elemento casuale di \mathbb{Z}_n^* e lo elevo ad e , ottengo l'oggetto che è distribuito uniformemente in \mathbb{Z}_n^* . Sappiamo che l'elevamento di r alla e -esima è distribuito uniformemente in \mathbb{Z}_n^* , perché e è stata scelta in maniera tale che la radice e -esima dia esattamente r . Quindi r^e è una funzione invertibile, di conseguenza la funzione che mappa r in r^e è una funzione biettiva, quindi un elemento scelto uniformemente in \mathbb{Z}_n^* viene mappato da r^e in un elemento scelto uniformemente scelto in \mathbb{Z}_n^* . Ogni volta che prendiamo un elemento e creiamo una suriezione dello stesso insieme, se l'elemento di partenza è scelto uniformemente, il risultato della suriezione, che nella sostanza è una permutazione, è scelto uniformemente.

Se prendiamo r^e e lo moltiplichiamo per a , otteniamo un elemento che è distribuito uniformemente in \mathbb{Z}_n^* , perché a è scelto uniformemente in \mathbb{Z}_n^* , poiché la moltiplicazione per a è una funzione biettiva, perché a ammette inverso.

Siamo partiti da un elemento fissato e abbiamo costruito un elemento distribuito uniformemente e causale, se a quell'elemento applichiamo l'algoritmo della radice e -esima, otteniamo

$\frac{1}{k}$ di probabilità di successo, ma se ripetiamo l'algoritmo k volte, abbiamo una probabilità di successo di 1, rendendo quindi l'algoritmo indipendente dalla a di partenza.

$$ar^e \rightarrow \sqrt[e]{ar^e} = r \sqrt[e]{a}$$

Quindi se prendo il risultato e lo divido per r , ottengo $\sqrt[e]{a}$, che è distribuito uniformemente in \mathbb{Z}_n^* , perché r è distribuito uniformemente.

Ed ecco che abbiamo un algoritmo che a partire da una blackbox che con a causale, calcola correttamente la radice e -esima di a una volta su k , abbiamo una macchina che con a fissato calcola la radice e -esima di a con probabilità 1.

La macchina che calcola la radice e -esima di a darà una sequenza di bit, che potrebbe essere la radice e -esima di a , oppure no. Bisognerebbe riconoscere la risposta corretta, rievando il risultato ad e , se ottengo l'input allora la risposta è corretta, altrimenti no.

Quindi abbiamo trasformato un algoritmo che funziona una volta su k in un algoritmo che funziona in un tempo medio di k .

Definizione di sicurezza

Diciamo che un sistema è attaccabile se il tempo medio per attaccarlo è polinomiale.

Se esistesse un qualsiasi algoritmo in grado di attaccare la radice e -esima di a , con una probabilità polinomiale in k , riusciremmo a costruire un algoritmo che calcola la stessa cosa con un tempo medio polinomiale in k .

Visto che partiamo dall'idea che non esista un algoritmo probabilistico polinomiale in grado di calcolare la radice e -esima di a , allora non esiste un algoritmo che sia in grado di calcolarlo con una probabilità che sia polinomialmente piccola. Quindi la **probabilità di successo è più piccola di qualsiasi polinomio**, dove per polinomio si intende:

$$\mathcal{P}[\text{attacco}] < \frac{1}{k^c} \quad \forall c$$

Fissando un polinomio, con chiavi corte, però, la possibilità di trovare un polinomio esiste, perciò bisogna correggere tale definizione.

$$\forall c \exists \bar{k} \forall k > \bar{k} \quad \mathcal{P}[\text{attacco}] < k^{-c} \quad (3.2)$$

Per attacco non intendiamo solo il fatto di non poter essere in grado di poter calcolare la radice e -esima di a , ma anche il fatto di non essere in grado di capire **informazioni binarie**.

L'algoritmo che calcola la radice e -esima di a è l'algoritmo che calcola la fattorizzazione di n . La fattorizzazione di n è l'informazione binaria che vogliamo proteggere, ovvero la **trapdoor** che permette di risolvere il problema.

Fattorizzazione di n

Si pensa che non esista un algoritmo PPT che dati n , e e a , calcola $\sqrt[e]{a} \in \mathbb{Z}_n^*$ con probabilità polinomiale.

3.4.1 Utilizzo pratico di RSA

Nel caso pratico il costo computazionale di RSA è molto alto, infatti codificare un blocco di k bit con RSA richiede k esponenziazioni modulari, ovvero k^3 , un costo computazionale molto alto. Per questo motivo RSA viene utilizzato per codificare una chiave di sessione, che viene utilizzata per codificare il messaggio con un algoritmo simmetrico, che è molto più veloce di RSA. Tipicamente l'algoritmo utilizzato è l'algoritmo simmetrico AES.

Tra l'altro vi è una notevole differenza con Diffie-Hellman, infatti in Diffie-Hellman riesco a scambiarmi un'unica chiave, a meno che non faccia un nuovo scambio di chiavi, ogni volta.

Se si parte dall'idea che la crittografia simmetrica sia meno sicura della crittografia asimmetrica, allora si può pensare di utilizzare una chiave di sessione diversa dopo un certo periodo. Con RSA è possibile fare questo, perché è possibile scambiarsi chiavi diverse, mentre con Diffie-Hellman non è possibile, perché si dovrebbero scambiare chiavi diverse ogni volta, e questo è molto costoso. La generazione della chiave di sessione per Diffie-Hellman è molto costosa, per via delle Certification Authority, che devono essere coinvolte nel processo di generazione della chiave di sessione per certificare le chiavi pubbliche.

3.5 Crittosistema di Micali per la codifica di un singolo bit

Algoritmo di generazione delle chiavi

Si sceglie un numero primo p_1 e un numero p_2 tale che moltiplicati tra loro diano un numero n tale che $n = p_1 p_2$. I due numeri devono essere scelti in modo casuale con $\frac{k}{2}$ bit ciascuno, dove k è la lunghezza della chiave. Sia $y \in_R$ ai non quadrati con simbolo di Jacobi 1 modulo n . Ricordiamo che per costruire un numero non quadrato casuale con simbolo di Jacobi 1 basta scegliere un numero casuale e verificare che il simbolo di Jacobi sia 1, ovvero che appartenga a \mathbb{Z}_n^* , se non lo è si sceglie un altro numero casuale e si ripete il procedimento. A questo punto verifico che il simbolo di Legendre rispetto a p_1 e q_1 sia -1 .

La chiave pubblica è:

$$P_k = (n, y)$$

La chiave privata è:

$$S_k = (p_1, p_2)$$

L'ipotesi di base è che sia difficile fattorizzare n , ma il problema di riferimento sarà il problema del residuo quadratico, ovvero il problema di calcolare la radice quadrata di un numero modulo n .

Algoritmo di codifica

L'algoritmo di codifica prende un bit b , sia $x \in_R \mathbb{Z}_n^*$, se b è 0 allora $c = x^2 \bmod n$, altrimenti $c = yx^2 \bmod n$. x^2 è un quadrato casuale di \mathbb{Z}_n^* , mentre yx^2 è un non quadrato con simbolo di Jacobi 1. Se prendo un quadrato con simbolo di Jacobi 1 e lo moltiplico per un non quadrato con simbolo di Jacobi 1 ottengo un non quadrato con simbolo di Jacobi 1. Se il

quadrato è casuale, allora ottengo un non quadrato casuale con simbolo di Jacobi 1 distribuito uniformemente tra tutti i non quadrati con simbolo di Jacobi 1.

Il risultato è che la codifica di 0 è un quadrato a caso, mentre la codifica di 1 è un non quadrato a caso con simbolo di Jacobi 1.

$$\mathcal{E} : \{0, 1\} \rightarrow x \in_R \mathbb{Z}_n^*$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mod n & \text{se } b = 0 \\ yx^2 \mod n & \text{se } b = 1 \end{cases}$$

Algoritmo di decodifica

L'algoritmo di verifica prende in input c e verifica se c è un quadrato rispetto a p_1 e p_2 , ovvero se c è un residuo quadratico modulo p_1 e modulo p_2 . Se c è un quadrato rispetto a p_1 e p_2 allora $b = 0$, se entrambe le verifiche falliscono allora $b = 1$, in altri casi non siamo in presenza di un cyphertext valido.

$$\left(\frac{c}{p_1}\right) = \left(\frac{c}{p_2}\right) = 1 \quad \text{allora } b = 0$$

$$\left(\frac{c}{p_1}\right) = \left(\frac{c}{p_2}\right) = -1 \quad \text{allora } b = 1$$

3.5.1 Rompere il crittosistema di Micali

Rompere tale protocollo significherebbe disporre di un algoritmo \mathcal{A} che preso in input in cyphertext c e la chiave pubblica P_k restituisce b con probabilità diversa da $\frac{1}{2}$, poiché siamo in un contesto binario.

Un attaccante quindi dovrebbe essere in grado di ottenere un vantaggio rispetto a qualcuno che non conosce nulla, dove chi non conosce nulla indovina con probabilità $\frac{1}{2}$. Il vantaggio consiste nell'allontanarsi da $\frac{1}{2}$, sia in positivo che in negativo, poiché se si allontana in negativo basta invertire il risultato per ottenere un vantaggio positivo.

Il numero di esperimenti deve essere tale che la differenza delle probabilità sia maggiore di $\frac{1}{2}$, ma il numero di esperimenti deve essere un numero polinomiale, in modo tale da poter osservare tali esperimenti in tempo polinomiale.

Sicurezza

$$\forall c \exists \bar{k} \forall k \geq \bar{k} \quad \left| \mathcal{P}[\text{Successo}] - \frac{1}{2} \right| > k^{-c} \quad (3.3)$$

Supponiamo che la probabilità di successo sia maggiore di $\frac{1}{2} + \epsilon$ e vorrei che la probabilità di successo sia quindi prossima a 1. Per farlo eseguo due tipologie di esperimenti, il primo ripete l'esperimento k volte e mediante l'algoritmo che ha a disposizione il vantaggio è $\frac{1}{2} + \epsilon$, mentre il secondo esperimento ripete l'esperimento k volte e mediante esperimenti casuali, ovvero senza l'algoritmo, ottiene un vantaggio di $\frac{1}{2}$. Ripetendo l'esperimento un numero abbastanza grande di volte si ottiene il risultato desiderato, poiché basterebbe visualizzare le due distribuzioni

per vedere in cosa differiscono. L'algoritmo quindi indovina con probabilità 1. Più ϵ è piccolo, più esperimenti sono necessari per ottenere il risultato desiderato. Servirebbe quindi stimare, dato un ϵ fissato, il numero di esperimenti necessari per ottenere il risultato desiderato.

Limite di Chernoff

Limite di Chernoff

Siano X_1, \dots, X_n variabili casuali e binarie indipendenti con probabilità di successo $\mathcal{P}[X_i = 1] > \frac{1}{2}$ e $\mathcal{P}[X_i = 0] = 1 - \mathcal{P}[X_i = 1]$. La probabilità che più della metà delle variabili casuali siano 1 è:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \binom{n}{i} \mathcal{P}[X_i = 1]^i \mathcal{P}[X_i = 0]^{n-i}$$

$$\mathcal{P} \geq 1 - e^{-2n(p-\frac{1}{2})^2}$$

Tale formula dice che la probabilità che più della metà degli eventi dia 1 è esponenzialmente vicina a 1, dove l'esponenziazione è in funzione di n .

$$\mathcal{P}[\text{errore}] = e^{-2\epsilon^2 n}$$

Dove ϵ è il vantaggio.

Supponiamo di volere $e^{-2\epsilon^2 n} < \frac{1}{2^k}$, quindi:

$$e^{-2\epsilon^2 n} < 2^{-k}$$

$$-2\epsilon^2 n < c' - k$$

$$n > \frac{k - c'}{2\epsilon^2}$$

Se ϵ è polinomiale in k allora n è polinomiale in k . Di conseguenza, se il vantaggio è polinomiale in qualche security parameter, allora si riesce ad ottenere una quantità di errore nel security parameter che è esponenzialmente piccola, scegliendo una quantità di esperimenti polinomiale in esso.

Un sistema è attaccato nel momento in cui esiste un algoritmo polinomiale in grado di romperlo.

Nel momento in cui ϵ è un k^{-c} , allora n (dove n è il numero di esperimenti) è polinomiale in k .

Visto che l'ipotesi di partenza è che non esistano algoritmi probabilistici polinomiali in grado di rompere il sistema (*vero*) e visto che abbiamo dimostrato che esiste tale algoritmo (*falso*), allora l'algoritmo di Micali è sicuro.

Costruzione degli esperimenti indipendenti

Una volta capito che la costruzione di n esperimenti indipendenti funziona, bisogna capire come costruirli. Supponiamo che la probabilità di successo sia $\frac{1}{2} + \epsilon$ e di disporre di un algoritmo \mathcal{A} che prende in input un numero z con $\left(\frac{z}{n}\right) = 1$, in output restituisce che z è quadrato oppure no.

Per farlo si sceglie $r_1, \dots, r_n \in_R \mathbb{Z}_n^*$ e si calcola $w_i = z \cdot r_i^2$. L'algoritmo quindi prende in input w_i e restituisce b_i .

$$b_i = \mathcal{A}(w_i)$$

In sostanza si prende in input un numero (*cyphertext*) e l'algoritmo lo moltiplica per una quadrato a caso, quindi l'algoritmo restituisce 1 se il risultato è un quadrato casuale e 0 altrimenti.

Tale algoritmo però ha un difetto, ovvero che se z è un quadrato, allora w_i è un quadrato sempre, quindi l'algoritmo restituisce sempre 1, se invece z non è un quadrato, allora w_i è sempre un non quadrato, quindi l'algoritmo restituisce sempre 0.

Costruzione di un controesempio

Supponiamo che \mathcal{A} dica correttamente che il 40% dei numeri quadrati sono quadrati e che il 62% dei non quadrati sono non quadrati. Sostanzialmente l'algoritmo \mathcal{A} ha una probabilità di successo a seconda dell'input che gli viene dato.

$$\mathcal{P}[\mathcal{A}(n) \text{ successo}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{62}{100} = \frac{51}{100} = 51\%$$

L'approccio di costruzione degli esperimenti indipendenti non è corretto, perché non fornisce all'algoritmo \mathcal{A} un input secondo la misura di probabilità che \mathcal{A} si aspetta, quando diciamo che ha una certa probabilità di successo. L'esperimento corretto avviene solamente quando ad \mathcal{A} viene dato un input un oggetto che sia distribuito uniformemente tra gli oggetti con simbolo di Jacobi 1.

Costruzione degli esperimenti indipendenti corretta

L'idea di base è quella di lanciare una moneta per decidere se invertire o meno la quadraticità di z in modo da ottenere un input che sia distribuito uniformemente. Siano $r_1, \dots, r_n \in_R \mathbb{Z}_n^*$ e siano $s_1, \dots, s_n \in_R \{0, 1\}$.

$$\forall i \quad w_i = \begin{cases} z \cdot r_i^2 & \text{se } s_i = 0 \\ y \cdot z \cdot r_i^2 & \text{se } s_i = 1 \end{cases}$$

Sia $b_i = \mathcal{A}(w_i)$. In questo modo lasciamo una moneta s_i che decide se mantenere la quadraticità di z oppure no. Quindi $z \cdot r_i^2$ è un oggetto a caso tra gli oggetti con stessa quadraticità di z , mentre $y \cdot z \cdot r_i^2$ è un oggetto a caso tra gli oggetti con quadraticità opposta di z , di conseguenza w_i è un oggetto a caso distribuito uniformemente tra gli oggetti con simbolo di

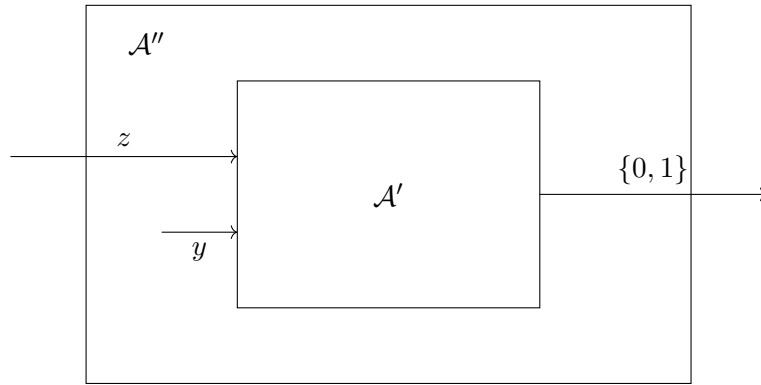
Jacobi 1. In questo caso quindi \mathcal{A} ha una probabilità di successo di $\frac{1}{2} + \epsilon$, ma b_i è la risposta al problema trasformato, ma non è la stessa del problema originale.

$$\forall i \quad b'_i = \begin{cases} b_i & \text{se } s_i = 0 \\ \bar{b}_i & \text{se } s_i = 1 \end{cases}$$

perché se $s_i = 1$ allora nell'input ho invertito la quadraticità di z , di conseguenza la risposta deve essere a sua volta invertita per avere una risposta corretta nei confronti di z .

Tale costruzione funziona, poiché è possibile passare dall'algoritmo \mathcal{A}' all'algoritmo \mathcal{A} , semplicemente invertendo la risposta quando $s_i = 1$, ma non sempre ciò è attuabile, perché non sempre è possibile invertire la risposta.

L'algoritmo che calcola il residuo quadratico prende in input z e restituisce 1 se z è un quadrato e 0 altrimenti, ma a tale algoritmo abbiamo dato in input y , ovvero un non quadrato con simbolo di Jacobi 1. Ma siamo davvero capaci di costruire un algoritmo che calcola un non quadrato con simbolo di Jacobi 1 senza usare la fattorizzazione di n ? La risposta è no, perché se fosse possibile allora sarebbe possibile fattorizzare n .



Sappiamo quindi che la macchina funziona correttamente dato y , ma non disponiamo di tale valore. Perché non prendere un y a caso e verificare se è un quadrato?

Sia $x \in_R \mathbb{Z}_n^*$ e sia $s \in_R \{0, 1\}$, allora

$$w = \begin{cases} x^2 & \text{se } s = 0 \\ y \cdot x^2 & \text{se } s = 1 \end{cases}$$

Sia b la risposta da utilizzare per l'algoritmo. Se per puro caso però y fosse un quadrato, non riuscirei a cambiare la quadraticità di w nel caso $s = 1$. Quindi nel caso in cui s fosse uguale a 1 e y fosse un quadrato, allora w sarebbe un quadrato, quindi la risposta dell'algoritmo sarebbe sempre sbagliata, poiché verrebbe complementata la risposta pensando che w non sia un quadrato. In ogni caso però è possibile sorvolare tale problema, poiché basta vedere come si comporta statisticamente la macchina in presenza di non quadrati e di quadrati. Il comportamento della macchina è per forza diverso di fronte alle due situazioni, perché altrimenti non sarebbe capace di distinguere i due input.

3.6 Codifica di bit multipli

Codificare b_1, \dots, b_l in $E(b_1), \dots, E(b_l)$ può essere fatto facendo sì che dal testo cifrato non si risalga al testo in chiaro. Dimenticandoci del problema della malleabilità, vorremmo che dal cyphertext non si possa risalire ad alcuna informazione binaria sul plaintext, ma dobbiamo capire cosa vuol dire non poter risalire ad alcuna informazione binaria.

Distinguisher

Un **distinguisher** è un algoritmo binario $\mathcal{D} \in \text{PPT}$ che restituisce 0 o 1. Il distinguisher prende in input un evento che soddisfa o meno una certa proprietà e un altro evento che soddisfa o meno la stessa proprietà. Il distinguisher deve essere in grado di distinguere se i due eventi si comportano in modo diverso o meno. Statisticamente il distinguisher verifica che i due eventi si comportino in modo polinomialmente diverso (3.5.1), altrimenti tale differenza non sarebbe distinguibile.

Sia $\mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m}$ la probabilità che il distinguisher \mathcal{D} restituisca 1 su input, una codifica di m quando il security parameter vale k . Un sistema di codifica nasconde m_1 e m_2 a \mathcal{D} quando:

$$\forall c \exists \bar{k} \forall k \geq \bar{k} \quad |\mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m_1} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m_2}| < k^{-c} \quad (3.4)$$

Ovvero:

$$|\mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m_1} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m_2}| < k^{-\omega(1)} \quad (3.5)$$

E nasconde informazioni a \mathcal{D} se per ogni m_1 e m_2 E nasconde m_1 e m_2 a \mathcal{D} . E nasconde se per ogni $\mathcal{D} \in \text{PPT}$ E nasconde m_1 e m_2 a \mathcal{D} .

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists \mathcal{D} \in \text{PPT}$ tale che

$$\exists m_1, m_2, \forall \bar{k} \exists k \geq \bar{k} \quad |\mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m_1} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m_2}| \geq k^{-c}$$

Allora \mathcal{D} può distinguere su due messaggi m_1 e m_2 che differiscono di un solo bit.

$$m_1 = \alpha^1 \alpha^2 \dots \alpha^l \quad m_2 = \beta^1 \beta^2 \dots \beta^l$$

Definisco $\forall i \in \{0, \dots, l\} \quad m(i) = \beta^1 \dots \beta^{i-1} \beta^i \alpha^{i+1} \dots \alpha^l$, ovvero una serie di bit intermedi per poter passare da m_1 a m_2 variando un solo bit per volta. Quindi $m(0) = m_1$, $m(l) = m_2$, di conseguenza $\mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m(i)} = \mathcal{P}(i)$, ovvero la probabilità che il distinguisher restituisca 1 se viene data in input una codifica del messaggio m_i .

$$\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m_1} \quad \mathcal{P}(l) = \mathcal{P}_k^{\mathcal{D},m_2}$$

Scopriamo quindi che l'ipotesi diventa:

$$k^{-c} \leq |\mathcal{P}(0) - \mathcal{P}(l)| = \left| \sum_{i=0}^{l-1} \mathcal{P}(i) - \mathcal{P}(i+1) \right| \leq \sum_{i=0}^{l-1} |\mathcal{P}(i) - \mathcal{P}(i+1)|$$

Poiché sappiamo che $\mathcal{P}(0) - \mathcal{P}(1) + \mathcal{P}(1) - \mathcal{P}(2) + \dots + \mathcal{P}(l-1) - \mathcal{P}(l) = \mathcal{P}(0) - \mathcal{P}(l)$. Quindi:

$$\sum_{i=0}^{l-1} |\mathcal{P}(i) - \mathcal{P}(i+1)| \geq k^{-c}$$

Avendo la somma di numeri non negativi che eccede un determinato valore allora so che esiste almeno un elemento che è maggiore o uguale della media.

$$\exists i \in \{0, \dots, l-1\} \quad t.c. \quad |\mathcal{P}(i) - \mathcal{P}(i+1)| \geq \frac{k^{-c}}{l} \geq k^{-(c+1)} = k^{-c'}$$

Abbiamo quindi trovato un polinomio c' tale per cui il distinguisher è in grado di distinguere due messaggi che differiscono di un solo bit. I due messaggi m_1 e m_2 differiscono di un solo bit, quindi:

$$\begin{array}{cccccccc} m(i) & = & \beta^1 & \dots & \beta^{i-1} & \beta^i & \alpha^{i+1} & \alpha^{i+2} & \dots & \alpha^l \\ m(i+1) & = & \beta^1 & \dots & \beta^{i-1} & \beta^i & \alpha^{i+1} & \alpha^{i+2} & \dots & \alpha^l \end{array}$$

A questo punto supponiamo senza perdita di generalità che $\alpha^{i+1} = 0$ e $\beta^{i+1} = 1$. Sia z un elemento di \mathbb{Z}_n^* con $\left(\frac{z}{n}\right) = 1$, quindi z potrebbe essere la codifica di uno 0 o di un 1.

Dato z viene costruito $E(\beta_1)E(\beta_2) \dots E(\beta_i)zE(\alpha_{i+2}) \dots E(\alpha_l)$ e viene lanciato l'algoritmo \mathcal{D} sul risultato. La probabilità con cui \mathcal{D} restituisce 1 è $\mathcal{P}(i)$ se z codifica 0 e $\mathcal{P}(i+1)$ se z codifica 1 se in input viene data la codifica di $m(i)$ secondo l'algoritmo per codificare il messaggio m_i , ovvero applicando E a tutti i bit del messaggio. Avendo però aggiunto z in mezzo al messaggio non ho codificato secondo l'algoritmo che il distinguisher si aspetta, quindi bisogna codificare il messaggio $m(i)$ in maniera corretta:

$$E(\beta_1)E(\beta_2) \dots E(\beta_i) z \cdot x^2 E(\alpha_{i+2}) \dots E(\alpha_l) \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}_n^*$$

A questo punto il distinguisher restituisce 1 con probabilità $\mathcal{P}(i)$ se z codifica 0 e $\mathcal{P}(i+1)$ se z codifica 1.

Chiamiamo \mathcal{P}_0 la probabilità che il distinguisher restituisca 0 (quindi $\mathcal{P}(i)$) e \mathcal{P}_1 la probabilità che il distinguisher restituisca 1 (ovvero $\mathcal{P}(i+1)$) se in input dato è costruito come sopra.

Se si riceve la codifica di un bit scelto a caso, con quale probabilità si riesce a distinguere se è 0 o 1? Si utilizza il risultato del distinguisher \mathcal{D} come tentativo.

$$\mathcal{P}[\text{indovinare}] = \frac{1}{2} \cdot (1 - \mathcal{P}_0) + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_0)$$

Se sottraiamo $\frac{1}{2}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\text{non indovinare}] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_0) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot |\mathcal{P}(i) - \mathcal{P}(i+1)| \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot k^{-c'} \end{aligned}$$

L'algoritmo ha quindi un vantaggio di almeno $\frac{1}{2} \cdot k^{-c'}$, quindi tale algoritmo è un attaccante. \square

Capitolo 4

Costruzione della casualità

4.1 Lancio della moneta

Il sistema descritto in precedenza ha un problema, infatti sappiamo che la codifica di un singolo bit richiede una quantità molto alta di bit. Infatti implicherebbe un enorme spreco di banda, di risorse. Ci piacerebbe giungere ad uno scenario in cui un singolo bit viene codificato con un solo bit.

Per arrivare a questo punto impareremo a costruire **numeri pseudo-casuali crittograficamente sicuri** da utilizzare come base per simulare un one-time pad, dove la chiave non è realmente casuale, ma è una chiave generata da noi, ma nessuno con potenza di calcolo polinomiale possa realmente notare la differenza.

Il lancio di monete in rete è un problema molto importante, infatti, simulare un reale lancio di monete è molto difficile, in quanto non si può avere la certezza che uno dei due agenti non stia mentendo. Disponiamo dei due agenti A e B che vogliono simulare un lancio di moneta e che comunicano attraverso un canale di comunicazione e vorremmo che il lancio avvenga in modo simile a quello reale, ovvero che entrambi gli agenti non sappiano il risultato del lancio prima che questo avvenga e che il risultato sia frutto del lancio di una moneta.

Il fatto che A lanci la moneta e che comunichi il risultato a B non va bene, poiché il risultato può essere manipolato da A affinché sia di suo gradimento, e l'altro agente non può avere la certezza che il risultato sia reale. Si potrebbe provare a comunicare il risultato in contemporanea, ma anche in questo caso si potrebbe simulare un ritardo di rete in modo da sfruttare il risultato a proprio vantaggio. Ci si potrebbe affidare ad un terzo agente, ma anche in questo caso l'agente esterno deve essere fidato.

Abbiamo quindi dato due risultati al lancio della moneta, ovvero $Coin_a$ e $Coin_b$. $Coin_a$ è una variabile del processo locale dell'agente A e $Coin_b$ è una variabile del processo locale dell'agente B , ed entrambe conterranno il risultato del lancio della moneta. Se A e B seguono il protocollo (*sono onesti*), allora $Coin_a = Coin_b$, con

$$\mathcal{P}[Coin_a = 0] = \frac{1}{2}$$

Potrebbero però non seguire il protocollo e indurre l'altro agente in errore, ottenendo un risultato iniquo, nel nostro caso A segue il protocollo, mentre B no, non possiamo fornire alcuna garanzia su B , possiamo però tutelare A . Per tutelarla, A deve essere in grado di osservare il risultato di un lancio di una moneta.

$$\left| \mathcal{P}[Coin_a = 0] - \frac{1}{2} \right| < k^{-\omega(1)}$$

Ammettiamo che B possa alterare tale probabilità, ma non la può alterare di troppo, quindi la differenza tra la probabilità reale e quella che B può alterare deve essere minore di qualsiasi polinomio. Per ogni esponente esiste un valore minimo della lunghezza della chiave tale per cui con chiavi sufficientemente lunghe, la probabilità si discosta da $\frac{1}{2}$ di un valore minore di $k^{-\omega(1)}$.

4.1.1 Lancio della moneta con il residuo quadratico

Ci basiamo sulla difficoltà di stabilire se un numero è un quadrato o meno in \mathbb{Z}_p^* .



Alice



Bob

Sceglie $p, q \in_R \text{primi}$

Calcola $n = p \cdot q$

Calcola $z \in \mathbb{Z}_n^*$ con $\left(\frac{z}{n}\right) = 1$

$\xrightarrow{n, z}$

Sceglie $b \in_R \{0, 1\}$

\xleftarrow{b}

$\xrightarrow{p, q}$

Il risultato finale sarà $b \oplus \text{isSquare}(z)$. Sostanzialmente A lancia una moneta (sceglie a caso fra un quadrato o un non quadrato, poiché scegliendo uniformemente fra gli elementi di \mathbb{Z}_n^* con simbolo di Jacobi 1, si ottiene un quadrato con probabilità $\frac{1}{2}$) e B sceglie un bit b a caso e lo invia ad A . Quando B riceve z non sa qual è il risultato del lancio della moneta, perché non sa risolvere il problema del residuo quadratico, di conseguenza è vero che A invia prima

il risultato del proprio lancio della moneta, ma nella condizione in cui B non vede il risultato, ma B non invia il bit b in funzione di z .

Se entrambi gli agenti sono onesti, z è stato campionato secondo una misura causale, quindi z è un quadrato con probabilità $\frac{1}{2}$ e un non quadrato con probabilità $\frac{1}{2}$. Anche b è stato campionato secondo una misura causale, quindi b è 0 con probabilità $\frac{1}{2}$ e 1 con probabilità $\frac{1}{2}$. Alla fine del protocollo, tutti sono in grado di calcolare il risultato perché tutti conoscono gli interi parametri dell'algoritmo, che sarà uguale per entrambi seguendo la formula: $b \oplus \text{isSquare}(z)$.

Se B è disonesto, allora può calcolare il bit b non casuale, distribuendolo in maniera differente. Se B calcola b **indipendentemente** da z , allora qualunque sia la regola di calcolo di b , sarà sempre uguale alla quadraticità di z con probabilità $\frac{1}{2}$. Un altro modo per imbrogliare è quello di calcolare b in funzione di z , ma questo richiede la conoscenza dell'algoritmo della quadraticità di z . B ha il vantaggio di allontanarsi da $\frac{1}{2}$, ma è il vantaggio pari a quello della risoluzione del problema del residuo quadratico, quindi più piccolo di qualsiasi polinomio.

Se A è disonesto, può calcolare p e q non primi, ma B , alla fine del protocollo se ne accorgerebbe ricevendo p e q e quindi potrebbe lanciare una propria moneta per decidere il proprio risultato o, se in conoscenza del risultato che gli è favorevole, può decidere come risultato un valore che gli fornirebbe tale vantaggio. A potrebbe non inviare p e q , in questo caso B ha un enorme svantaggio, perché dopo il secondo messaggio A conosce Coin_A , ma B non conosce Coin_B , se A invia il proprio messaggio a B , B è in grado di calcolare Coin_B e quindi il risultato finale, ma se A sa il risultato vincente e il risultato ottenuto è sfavorevole, A non spedisce il terzo messaggio e B lancia la propria moneta che con probabilità $\frac{1}{2}$ è favorevole, ma con probabilità $\frac{1}{2}$ è sfavorevole, ma si crea una situazione sfavorevole a B .

$$\mathcal{P}[\text{Coin}_B = 0] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Il comportamento di A ha alterato la misura di probabilità di successo di B , a favore di A .

Il protocollo appena descritto non soddisfa le proprietà di un protocollo di lancio della moneta. Ci sono casi in cui il protocollo però può essere seguito, ovvero quando chi impersona A non conosce il risultato vincente e B può o non può conoscere il risultato vincente.

Un protocollo per funzionare deve essere tale che gli agenti possano conoscere il risultato anche senza l'ultimo messaggio. Se l'ultimo messaggio è quello significativo, allora il protocollo non è corretto.

Sia n il numero minimo di messaggi di un protocollo che funziona, quindi gli agenti conoscono il risultato del lancio della moneta anche senza l'invio dell'ultimo messaggio. ciò vuol dire che l'ultimo messaggio non serve, ma se non serve allora il penultimo messaggio è quello che permette ad A di conoscere il risultato, ma se B decide di non inviare tale messaggio si innesca una reazione a catena che porta A e B a non inviare nulla.

Non esiste il protocollo per il lancio della moneta che soddisfi le condizioni dettate da noi. Il protocollo funziona solo se, con n agenti, ad imbrogliare sono meno di $\frac{n}{2}$ agenti.

Indeboliamo la soluzione in modo che funzioni.

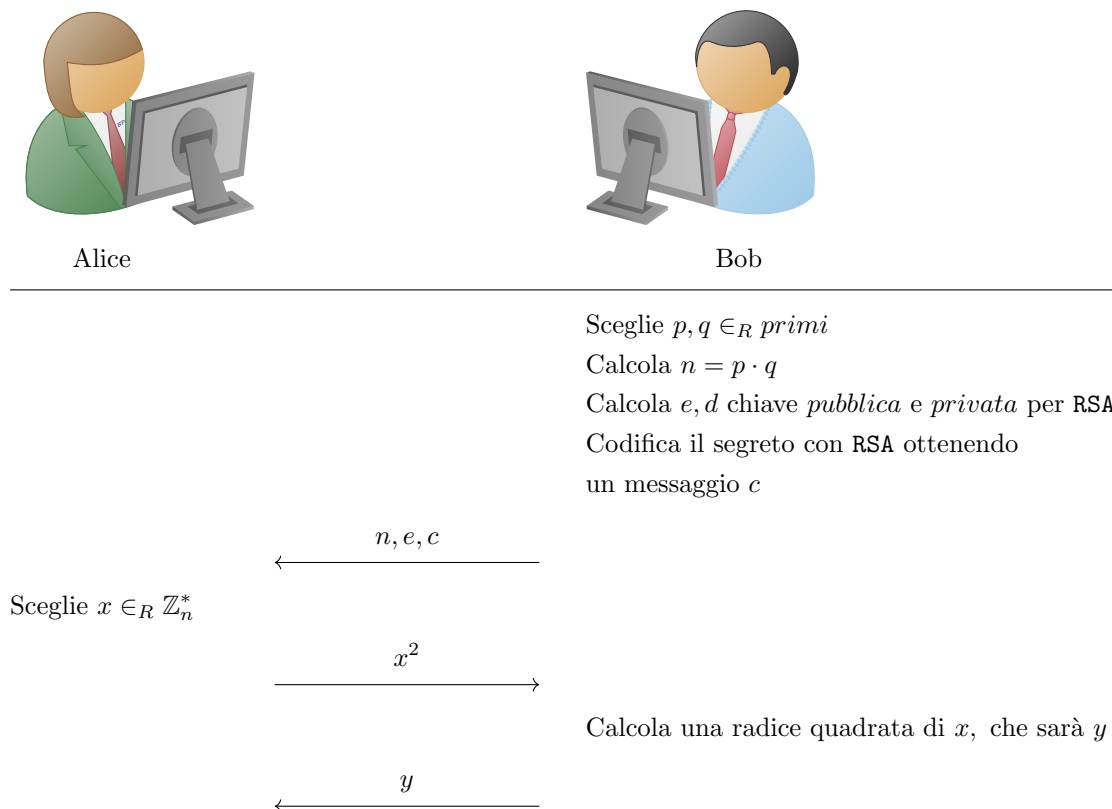
Lancio di moneta nel pozzo

L'idea è quella di utilizzare un pozzo, in cui finirà la moneta. A riesce a vedere il risultato del lancio della moneta, ma B no, perché si trova di intralcio un cane tenuto al guinzaglio da A . A può decidere far sì che B possa vedere il risultato, facendo rientrare il cane che si trova nei pressi del pozzo, ma A può anche decidere di non far rientrare il cane.

A non può variare il risultato del lancio della moneta, ha solamente la facoltà di impedire o meno a B di vedere il risultato. Sa a B decidere se partecipare al processo o meno, non gli interessa il risultato del lancio della moneta, ma interessa solamente che la probabilità del lancio sia di almeno $\frac{1}{2}$.

Oblivious transfer

Supponiamo che B sappia il risultato della borsa del prossimo anno e che chieda a A di avere in cambio del denaro per i risultati della borsa. B non vuole dare tutto il denaro ad A , ma vuole dare solamente una parte del denaro. A questo punto A decide di far il lancio della moneta per decidere se mostrare o meno il risultato della borsa a B . B a questo punto deve trasferire l'informazione ad A , ma **non gli interessa se l'informazione è stata trasferita o meno**, ma solamente che la probabilità che l'informazione sia stata trasferita sia di almeno $\frac{1}{2}$.



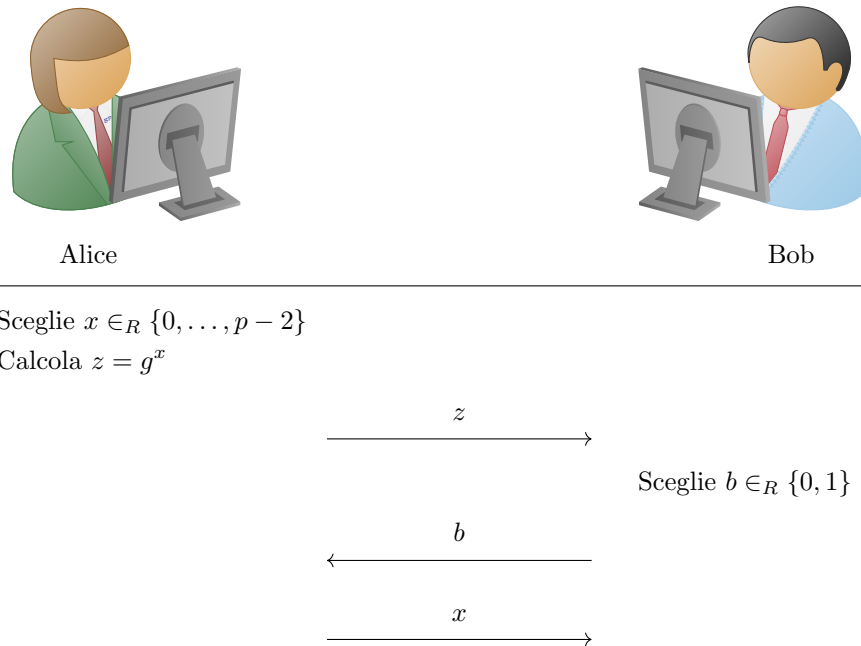
Quindi A invia un quadrato a caso e B invia una delle quattro radici quadrate di x . Con probabilità $\frac{1}{2}$ tale radice sarà diversa da $\pm x$. Quando un agente possiede due radici quadrate di uno stesso numero **che non sono una l'opposta dell'altro**, allora è in grado di fattorizzare n . Con probabilità $\frac{1}{2}$, B invierà ad A una radice diversa da $\pm x$, metterà quindi A nelle condizioni di calcolare p e q e quindi d per decodificare il messaggio c . B non ha alcun interesse nel risultato, che otterrà con probabilità $\frac{1}{2}$, ma interessa che A abbia sia riuscito a decifrare c con probabilità $\frac{1}{2}$.

Il vantaggio di A è implicito nel risultato.

4.1.2 Lancio della moneta con il logaritmo discreto

Il problema è che fino ad ora abbiamo lavorato con la quadraticità di un numero in \mathbb{Z}_n^* , ma vorremmo lavorare con singoli bit. Quindi non con l'inversa di una funzione one way, ma con singoli bit, ovvero con l'informazione **binaria** dell'inversa di una funzione one way.

Disponiamo di un numero p e un generatore g di \mathbb{Z}_p^* , quindi g è un numero che genera tutti gli elementi di \mathbb{Z}_p^* , ovvero $\{g^0, g^1, \dots, g^{p-1}\}$. I due valori p e g sono condivisi tra A e B , prima dell'inizio del protocollo.



Il risultato è quindi $b \oplus \left(x < \frac{p-1}{2}\right)$. L'idea di fondo è che B quando sceglie b non è in grado di dedurre il risultato del lancio della moneta, perché dovrebbe verificare se x è minore o meno di $\frac{p-1}{2}$, facendo quindi un test binario su il **logaritmo discreto** di z . Nel momento in cui A invia x , B è in grado di verificare la correttezza del risultato e a calcolare il risultato.

B non è in grado di calcolare il predicato binario $x < \frac{p-1}{2}$, a meno di un vantaggio più piccolo di qualsiasi polinomio.

Tale algoritmo utilizza un **predicato binario sull'inversa di una funzione one way**. Data una funzione one way f , un predicato binario P sull'inversa di f , non siamo certi che il predicato sia difficile da calcolare.

Per il logaritmo discreto, il predicato binario facile da calcolare è il **bit meno significativo** di x . Tale bit vale zero se e solo se z è un quadrato in \mathbb{Z}_p^* . Ma tale predicato dice qualcosa di differente, ovvero ci chiediamo se il logaritmo discreto di z sta nella prima metà o nella seconda metà dei logaritmi discreti di \mathbb{Z}_p^* o nella seconda, ovvero una sorta di **bit più significativo** di x .

4.2 Hardcore predicate del logaritmo discreto

Hardcore predicate

Si tratta di un predicato binario sull'inversa di una funzione one way, che è difficile da calcolare. Se scegliessimo a caso il valore di tale predicato binario, la probabilità con cui un algoritmo riesce a calcolare il predicato conoscendo z è $\frac{1}{2} + \epsilon$, con ϵ più piccolo di qualsiasi polinomio.

Sia $y = g^x$ e sia il predicato in considerazione $x < \frac{p-1}{2}$. Se y è un quadrato, allora ammette due radici quadrate, z_1 e z_2 , di queste due radici, una ha logaritmo discreto minore di $\frac{p-1}{2}$ e l'altra maggiore o uguale a $\frac{p-1}{2}$. Questo perché le rispettive radici quadrate sono nella forma g^i e $g^{i+\frac{p-1}{2}}$. La radice quadrata nella forma g^i è chiamata **radice quadrata principale**.

Di base se abbiamo due radici quadrate di y , che sappiamo calcolare aritmeticamente, non sappiamo come capire quale sia la radice quadrata principale, ma se avessimo a disposizione l'algoritmo per calcolare se il logaritmo discreto di un numero è minore di $\frac{p-1}{2}$, allora potremmo calcolare la radice quadrata principale di un quadrato.

Supponiamo di avere un algoritmo che date le due radici quadrate di un numero distingue la radice quadrata principale. In questo caso possiamo costruire un algoritmo che calcola il predicato binario $x < \frac{p-1}{2}$.

Teorema Qualunque funzione one-way ammette un hardcore predicate.

4.2.1 Ne deriva quindi che:

Teorema Se esiste un algoritmo per il calcolo della radice principale di un quadrato in \mathbb{Z}_p^* , allora esiste

4.2.2 un algoritmo efficiente per il calcolo del logaritmo discreto in \mathbb{Z}_p^* .

Teorema Se esiste un algoritmo che riesce a calcolare il predicato binario con vantaggio polinomiale rispetto al caso casuale, allora esiste un algoritmo probabilistico polinomiale per il calcolo del logaritmo discreto.

4.2.3

Per dimostrare il teorema dovremmo seguire tre passaggi:

1. Mostrare che siamo in grado di calcolare il logaritmo discreto di un numero avendo in mano un algoritmo per il calcolo della radice quadrata principale di un quadrato.
2. Mostrare che tale algoritmo funziona anche se la radice quadrata principale è calcolata con probabilità esponenzialmente vicina a 1.
3. Mostrare che partendo da un algoritmo che funziona con vantaggio polinomiale rispetto al caso casuale, siamo in grado di costruire un algoritmo che funziona con probabilità esponenzialmente vicina a 1.

4.2.1 Calcolare il logaritmo discreto avendo a disposizione l'algoritmo per il calcolo della radice quadrata principale (PSQR)

Avremo a disposizione l'algoritmo PSQR che calcolerà la radice quadrata principale di un quadrato in \mathbb{Z}_p^* , avendo a disposizione il predicato binario. Per farlo prende in input y ne calcola la radice quadrata, verifica il predicato binario per capire se è la radice quadrata principale, se la verifica fallisce, calcola la radice principale opposta e restituisce il risultato.

```

1: procedure LSB( $y$ )
2:   if  $\frac{y}{p} = 0$  then
3:     return 0
4:   else
5:     return 1
6:   end if
7: end procedure

```

Ricordiamo che la procedura LSB verifica se il bit meno significativo di un numero è pari o dispari. Se è pari restituisce 0, altrimenti restituisce 1.

```

1: procedure DISCRETELOGARITHM( $y$ )
2:   if  $y = 1$  then
3:     return 0
4:   end if
5:    $b \leftarrow \text{LSB}(\text{DiscreteLogarithm}(y))$ 
6:   if  $b = 1$  then
7:     return  $y \leftarrow y \cdot g^{-1}$  ▷ imposta a zero il bit meno significativo
8:   end if
9:    $y \leftarrow \text{PSQR}(y)$  ▷ scorri a destra di un bit
10:  return  $2 \cdot \text{DiscreteLogarithm}(y) + b$ 
11: end procedure

```

Per calcolare la radice quadrata abbiamo necessariamente bisogno del bit meno significativo a zero.

L'algoritmo ricorsivo permette di calcolare il logaritmo discreto di un numero calcolando il bit meno significativo e riconducendo il calcolo dello stesso problema in una situazione in cui si ha un bit in meno.

Se abbiamo un algoritmo che funziona per il calcolo della radice quadrata principale allora possiamo costruire un algoritmo che calcola il logaritmo discreto.

Supponiamo di avere un algoritmo B per PSQR che funziona con probabilità esponenzialmente vicina a 1, ovvero $1 - \epsilon$. La probabilità che l'algoritmo `DiscreteLogarithm` invocato k volte fornisca sempre la risposta corretta è $(1 - \epsilon)^k$. L'algoritmo `DiscreteLogarithm` può non funzionare, ma abbiamo modo di accorgerci:

- Se il numero di passi è maggiore del numero di bit di y , allora siamo sicuri che il PSQR non ha funzionato.

- Sul risultato finale possiamo verificare che $g^x = y$. Se non è così allora PSQR non ha funzionato.

In media se funziona con probabilità $(1 - \epsilon)^k$, allora il numero di volte che funziona in cui si dovrà lanciare l'algoritmo sarà $\frac{1}{(1-\epsilon)^k}$. Se $\epsilon \leq \frac{1}{2}$, allora $(1 - \epsilon)^k \geq \frac{1}{2^k}$.

Se abbiamo un algoritmo che funziona con probabilità esponenzialmente vicina a 1, allora possiamo costruire un algoritmo che calcola il logaritmo discreto con probabilità almeno $\frac{1}{2}$, quindi se reiteriamo in media due volte l'algoritmo otteniamo la risposta corretta. Questo perché possiamo verificare che il risultato sia corretto.

Riusciamo ora a mostrare che se ci viene dato un algoritmo che funziona con vantaggio polinomiale rispetto a $\frac{1}{2}$, allora possiamo costruire un algoritmo che funziona con probabilità esponenzialmente vicina a 1? Assolutamente sì, per farlo dobbiamo costruire tante istanze indipendenti dello stesso problema e prendendo il risultato osservato la maggior parte delle volte. Come costruiamo gli esperimenti indipendenti, tali per cui nel momento in cui conosciamo la risposta al problema costruito, allora troviamo la risposta al problema originale?

4.2.2 Costruzione dell'esperimento indipendente y' tale per cui dalla risposta y' otteniamo la risposta a y

Teorema 4.2.4 Sia y un quadrato in \mathbb{Z}_p^* e sia $r \in_R [0, \dots, \frac{p-1}{2}]$ (esponente a caso per una possibile radice quadrata di un numero, presente nella prima metà). Sia $y' = y \cdot g^{2x}$, dove y' sarà un'altra istanza indipendente del problema dei residui quadratici, distribuita uniformemente in \mathbb{Z}_p^* , di cui conosciamo il logaritmo discreto. Se $2x + 2r < p - 1$ allora $z \cdot g^r$ è PSQR di $y \cdot g^{2r} \iff z$ è PSQR di y .

$$\text{Sappiamo che } \sqrt{g^{2x} g^{2r}} = \begin{cases} g^x g^r \\ g^x g^r g^{\frac{p-1}{2}} \end{cases}$$

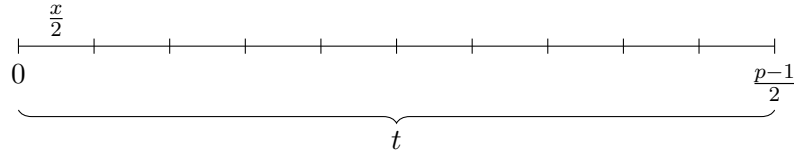
Con l'ipotesi $2x + 2r < p - 1$ allora g^{x+r} è la radice quadrata principale.

Questo perché moltiplicando $y \cdot g^{2r}$ abbiamo un'operazione **aritmetica** poiché gli esponenti sono sommati e non si ricade nella radice quadrata successiva, ovvero quella dopo la prima metà (l'esponente di y è $2x$). Moltiplicare quindi fa sì che non si vada oltre $p - 1$, quindi il logaritmo discreto del prodotto è la somma dei logaritmi discreti; andar oltre $p - 1$ significa tornare indietro, siccome siamo in un gruppo ciclico.

Dalla risposta al problema trasformato, sappiamo quindi calcolare la risposta al problema originale.

Ma come faccio a far sì che r scelta casualmente soddisfi le proprietà del teorema?

Più x è piccolo e più è probabile trovare un r che soddisfa la proprietà del teorema.



Supponiamo che $\frac{x}{2}$ sia nel primo intervallo, la probabilità di trovare un r dove $\frac{x}{2} + r$ non vada oltre $\frac{p-1}{2}$, ovvero $\frac{t-1}{t}$. La probabilità che la risposta sia corretta è la combinazione della probabilità di soddisfaccibilità del teorema, ovvero $\left(\frac{t-1}{t}\right)$ e la probabilità della risposta al problema trasformato, ovvero $\left(\frac{1}{2} + k^{-c}\right)$.

Questo perché qualche volta, dalla risposta al problema trasformato, non si riesce a trovare la risposta al problema originale.

$$\mathcal{P}[\text{Esperimento corretto}] = \left(\frac{t-1}{t}\right) \left(\frac{1}{2} + k^{-c}\right) \geq \frac{1}{2} + k^{-2c} \quad (4.1)$$

Risolvendo la disequazione in t riusciamo a capire qual è il limite inferiore a gli intervalli da utilizzare.

Dalla teoria dell'algebra sappiamo che si tratta di una disequazione polinomiale in t , come tale ha una soluzione polinomiale nelle costanti interne. La soluzione è quindi polinomiale nelle costanti presenti nell'equazione. Il limite inferiore è quindi polinomiale nelle costanti presenti nell'equazione.

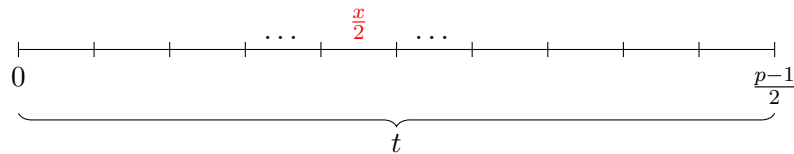
$$\frac{t-1}{t} \geq \frac{1}{2} + k^{-c} \implies t \geq \frac{2}{1 + 2k^{-c}} \quad (4.2)$$

Dividendo in una quantità di intervalli che è polinomiale in k otteniamo un sistema tale per cui, se x è nel primo intervallo, la probabilità di successo, ovvero di fornire una radice quadrata principale è polinomialmente distante da $\frac{1}{2}$, di conseguenza abbiamo un algoritmo che risolve il problema in tempo polinomiale.

Abbiamo quindi costruito un algoritmo che con probabilità $\frac{1}{2}$ calcola il logaritmo discreto di un numero, a patto che la metà di tale logaritmo stia nel primo intervallo.

Generalizzazione dell'intervallo

Supponiamo di sapere che $\frac{x}{2}$ sia nell'intervallo i -esimo.



Sappiamo che $y = g^x$ e che $i \frac{p-1}{2t} \leq \frac{x}{2} < (i+1) \frac{p-1}{2t}$

$$g^{x'} = y \cdot g^{-\frac{p-1}{t}i} \implies g^{x'} = g^x \cdot g^{-\frac{p-1}{t}i} \implies x' = x - \frac{p-1}{t}i$$

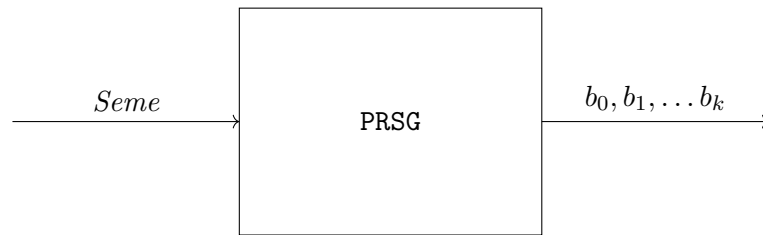
Quindi x' sta nel primo intervallo, infatti da $\frac{x}{2}$ abbiamo tolto il punto d'inizio dell'intervallo i -esimo, togliendo tale quantità abbiamo ottenuto il risultato corrispondente al primo intervallo. Ci siamo quindi ricondotti alla risoluzione di un problema relativo al calcolo della radice quadrata principale, ovvero il problema che abbiamo già risolto. Dopo aver risolto il problema ci riconduciamo nuovamente al problema originale moltiplicando per $g^{\frac{p-1}{t}i}$.

Non conoscendo l'intervallo in cui si trova $\frac{x}{2}$, possiamo provare a risolvere il problema per tutti gli intervalli. Essendo quantità polinomiali in k .

4.3 Bit Pseudocasuali

Vogliamo costruire una sequenza di bit che sia equivalente ad un lancio di moneta. Se volessimo utilizzare all'interno di un programma dei bit che sono casuali, avremmo bisogno di un processo di lancio di moneta all'interno del nostro calcolatore. All'interno del processo di lancio di moneta utilizzato c'è sempre un punto in cui ci sono scelte casuali da dover effettuare e tali scelte possono essere fatte da un processo realmente casuale. All'interno di un calcolatore non abbiamo un processo realmente casuale, poiché i calcoli e le scelte sono deterministiche. Il processo non è casuale, ma deterministico; ma appare come processo casuale agli occhi di chi lo osserva.

L'algoritmo deterministico esegue un'operazione sul **seme** e produce un output. La generazione non può essere tale che la distribuzione di probabilità degli elementi sia uniforme, ma deve essere tale che produca una sequenza di bit tale per cui nessuno con potenza di calcolo probabilistica polinomiale sia in grado di capirne la distribuzione. Chiunque non si deve accorgere del fatto che non stiamo lavorando con sequenze casuali, ma con sequenze pseudocasuali.



Il seme s viene scelto in maniera realmente casuale ed è corto ed ha k bit e l'output ha l bit, normalmente con $l > k$. Il generatore di numeri pseudocasuali possiamo vederlo come un **moltiplicatore di casualità**. Nessun algoritmo probabilistico polinomiale sarà in grado di trovare una regolarità all'interno dell'output generato, nonostante ci sia.

4.3.1 Generare bit pseudocasuali

Avendo a disposizione la sequenza $b_0 b_1 \dots b_l$, facciamo fatica ad indovinare il bit b_{l+1} , lo indoviniamo con un vantaggio $\frac{1}{2} + \epsilon$, dove ϵ è più piccolo di qualsiasi polinomio.

$$\left| \mathcal{P}[s \in_R \{0, 1\}^k; b_0 b_1 \dots b_l \leftarrow \mathcal{G}(s); b \leftarrow \mathcal{A}(b_0 b_1 \dots b_l); b = b_{l+1}] - \frac{1}{2} \right| \leq k^{-\omega(1)} \quad (4.3)$$

La sequenza a disposizione la vedo come sequenza realmente casuale quando ogni singolo bit è risultato di un lancio di moneta.

Una sequenza di bit è pseudocasuale se nessun algoritmo probabilistico polinomiale è in grado di distinguere la sequenza generata da una sequenza realmente casuale.

La definizione è un po' strana, perché dice che non siamo capaci di indovinare il bit successivo. Ci piacerebbe di più una definizione che dicesse che stiamo fornendo bit casuali nel momento in cui dalla sequenza di bit generata non siamo capaci di distinguerle da una sequenza realmente casuale.

Per definire un concetto simile dobbiamo essere in grado di dire che non c'è un algoritmo che data la sequenza veramente casuale e la sequenza pseudocasuale, non è in grado di distinguere le due sequenze. Quindi descriviamo la probabilità che l'algoritmo \mathcal{D} dia come risultato 1, ovvero che abbia riconosciuto la sequenza pseudocasuale come tale:

$$\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{G}} = \mathcal{P}[s \in_R \{0, 1\}^k; b_0 b_1 \dots b_l \leftarrow \mathcal{G}(s); \mathcal{D}(b_0 b_1 \dots b_l) = 1]$$

Descriviamo la probabilità che l'algoritmo \mathcal{D} dia come risultato 1, se prende in input una sequenza di bit realmente casuale:

$$\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{R}} = \mathcal{P}[b_0 b_1 \dots b_l \in_R \{0, 1\}^{l+1}; \mathcal{D}(b_0 b_1 \dots b_l) = 1]$$

Quindi la probabilità che il distinguisher restituisca 1 nei due casi differisce di una quantità più piccola di qualsiasi polinomio.

$$\forall \mathcal{D} \in \text{PPT} \quad \left| \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{G}} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{R}} \right| < k^{-\omega(1)} \quad (4.4)$$

La formula appena descritta potrebbe essere una nuova definizione di generazione di bit pseudocasuali, le due equazioni 4.3 e 4.4 sono quindi equivalenti. Disporre di definizioni equivalenti è utile perché ci permette di scegliere quella che ci è più comoda per il problema che stiamo affrontando.

4.3.2 Generazione di bit pseudocasuali basati sul problema del logaritmo discreto

Fissiamo un numero primo p e un generatore g del gruppo \mathbb{Z}_p^* . Prendiamo il seme $x \in_R \{0, \dots, p-1\}$, e definiamo:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_l \\ x & g^x & g^{g^x} & g^{g^{g^x}} & \dots & g^{g^{g^{\dots g^x}}} \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_l \end{array}$$

In maniera compatta:

$$\begin{cases} a_{i+1} = g^{a_i} \\ a_0 = x \end{cases}$$

Generiamo elementi di \mathbb{Z}_p^* , dove il primo elemento è il seme e gli altri elementi sono ottenuti elevando g all'elemento precedente.

A questo punto definisco i bit pseudocasuali come:

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } a_i < \frac{p-1}{2} \\ 1 & \text{se altrimenti} \end{cases}$$

Quindi l'hardcore predicate è $a_i < \frac{p-1}{2}$. La sequenza pseudocasuale di ritorno sarà:

$$b_l \quad b_{l-1} \quad b_{l-2} \quad b_{l-3} \quad \dots \quad b_0$$

Utilizzando la definizione 4.3, supponiamo per assurdo che esista un algoritmo in grado di predire il bit successivo con un vantaggio più grande di qualche polinomio. I bit presi in input sono b_l, \dots, b_3 , quindi l'algoritmo \mathcal{A} predice il bit b_2 . ma a_3 è l'hardcore predicate di b_2 , quindi non è possibile predire il bit b_2 con un vantaggio maggiore di qualche polinomio.

$$a^3 = g^{g^{g^x}} \quad \text{e} \quad a^2 = g^{g^x}$$

La costruzione della sequenza $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_l$ e della sequenza $b_l, b_{l-1}, b_{l-2}, b_{l-3}, \dots, b_0$ è facilmente costruibile. Se i bit fossero stati restituiti in ordine sequenziale, $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_l$, non saremmo riusciti a far funzionare l'algoritmo perché i bit successivi della sequenza sarebbero stati il risultato di una funzione facilmente calcolabile. La nostra costruzione si è basata sul fatto che la funzione da calcolare sui semi è difficile al fine di dire che non riusciamo a prevedere il bit successivo.

Il fatto che la dimostrazione non funziona non implica che non sia possibile restituire i bit in ordine di enumerazione crescente.

La costruzione di funzionamento con i bit restituiti alla rovescia si basa sul fatto che conoscendo i semi non siamo in grado di calcolare b_2 , se non so calcolare b_2 conoscendo i semi, a maggior ragione non sono in grado di calcolarlo conoscendo i bit, ma tale dimostrazione non mi permette di catturare tale concetto.

Prendendo in considerazione la formula 4.4, se i bit restituiti alla rovescia sono indistinguibili da una sequenza casuale, allora anche i bit restituiti in ordine crescente sono indistinguibili da una sequenza casuale.

Se b_l, \dots, b_0 soddisfa la definizione 4.4, allora soddisfa la definizione 4.3. Quindi b_l, \dots, b_0 è indistinguibile da una sequenza casuale e possiamo concludere che b_0, \dots, b_l è indistinguibile da una sequenza casuale.

Sia un distinguisher \mathcal{D} per b_l, \dots, b_0 , quindi \mathcal{D} prende in input b_l, \dots, b_0 e restituisce 1 se la sequenza è pseudocasuale e 0 se la sequenza è casuale. Sia \mathcal{D}' un distinguisher per b_l, \dots, b_0 ,

quindi \mathcal{D}' prende in input b_0, \dots, b_l e restituisce $\mathcal{D}(b_0, \dots, b_l)$, quindi rovescia la sequenza e restituisce il risultato di \mathcal{D} basata sulla sequenza rovesciata.

Se \mathcal{D} distingue b_l, \dots, b_0 allora \mathcal{D}' distingue b_0, \dots, b_l e viceversa. Quindi distinguere i bit in ordine di enumerazione crescente è equivalente a distinguere i bit in ordine di enumerazione decrescente.

Restituire i bit alla rovescia è svantaggioso perché non è possibile calcolare il bit successivo, mentre restituire i bit in ordine di enumerazione crescente permette di andare avanti con la sequenza.

4.3.3 Distinguere equivale a prevedere

Teorema 1. Sia distinguere equivalente a:

4.3.1

$$\forall \mathcal{D} \in \text{PPT} \quad \left| \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{G}} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{R}} \right| < k^{-\omega(1)} \quad (4.5)$$

2. Sia prevedere equivalente a:

$$\left| \mathcal{P}[s \in_R \{0, 1\}^k; b_0 b_1 \dots b_l \leftarrow \mathcal{G}(s); b \leftarrow \mathcal{A}(b_0 b_1 \dots b_l); b = b_{l+1}] - \frac{1}{2} \right| \leq k^{-\omega(1)} \quad (4.6)$$

Allora:

- $1 \implies 2$
- $2 \implies 1$

Dimostrazione. ($1 \implies 2$) Su input b_0, \dots, b_{l-1} indoviniamo b_l con vantaggio polinomiale, ovvero:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\mathcal{A}(b_0, \dots, b_{l-1}) = b_l] - \frac{1}{2} &\geq k^{-c} \\ \mathcal{P}[\mathcal{A}(b_0, \dots, b_{l-1}) = b_l] &\geq \frac{1}{2} + k^{-c} \end{aligned}$$

e possiamo affermarlo senza perdita di generalità. Se vogliamo dimostrare che la proprietà (2) vale, ovvero che violando la proprietà (1) si viola anche la proprietà (2), allora possiamo costruire un distinguisher.

$$\mathcal{D}(b_0, \dots, b_l) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{A}(b_0, \dots, b_{l-1}) = b_l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sappiamo che la probabilità che l'algoritmo \mathcal{A} indovini un bit scelto in maniera veramente casuale e indipendente da b_0, \dots, b_{l-1} è esattamente $\frac{1}{2}$ (*one-time pad*), ovvero:

$$\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{U}} = \frac{1}{2}$$

Mentre, la probabilità che \mathcal{A} con in input b_0, \dots, b_{l-1} indovini b_l è maggiore di $\frac{1}{2} + k^{-c}$, ovvero:

$$\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{G}} \geq \frac{1}{2} + k^{-c}$$

Di conseguenza:

$$\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{G}} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{U}} \geq \frac{1}{2} + k^{-c} - \frac{1}{2} = k^{-c}$$

Se esiste l'attaccante per la proprietà (1), allora violiamo la proprietà (2).

(2 \implies 1) Disponiamo di una sequenza di bit b_1, \dots, b_l generata da \mathcal{G} e una sequenza di bit r_1, \dots, r_l generata in maniera casuale e indipendente da \mathcal{G} , supponiamo che \mathcal{D} sia un distinguisher per b_1, \dots, b_l e r_1, \dots, r_l .

Sappiamo che:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_0 & = & b^1 \quad \dots \quad b^{i-1} \quad b^i \quad b^{i+1} \quad b^{i+2} \quad \dots \quad b^l \\ \mathcal{S}_l & = & r^1 \quad \dots \quad r^{i-1} \quad r^i \quad r^{i+1} \quad r^{i+2} \quad \dots \quad r^l \end{array}$$

Con la tecnica di interpolazione, supponendo che le sequenze differiscano di un solo bit (*come dimostrato nella sezione 3.6*), siamo in grado di affermare che:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{G}} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{R}} \right| &\geq \frac{1}{2} - k^{-c} \\ \left| \sum_{i=0}^l (\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{i-1}) \right| &\leq \sum_{i=0}^l \left| (\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{i-1}) \right| \end{aligned}$$

Quindi

$$\exists i \in \{0, \dots, l\} \quad \left| \mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{i-1} \right| \geq \frac{k^{-c}}{l} = k^{-c'}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_i & = & b^1 \quad \dots \quad b^{i-1} \quad b^i \quad \textcolor{red}{r^{i+1}} \quad r^{i+2} \quad \dots \quad r^l \\ \mathcal{S}_{i+1} & = & b^1 \quad \dots \quad b^{i-1} \quad b^i \quad \textcolor{red}{b^{i+1}} \quad r^{i+2} \quad \dots \quad b^l \end{array}$$

In qualche modo il distinguisher si comporta diversamente quando i bit differiscono di un solo bit.

Vorremmo cercare di costruire un algoritmo che indovini i bit pseudocasuali. Sia

$$\mathcal{F} = \mathcal{D}(b_0, \dots, b_i, r_{i+1}, \dots, r_l)$$

$$\mathcal{A}(b_1, \dots, b_l) = \begin{cases} r_{i+1} & \text{se } \mathcal{F} = 1 \\ \bar{r}_{i+1} & \text{se } \mathcal{F} = 0 \end{cases}$$

Utilizziamo quindi il distinguisher per indovinare il bit successivo.

Senza perdita di generalità $\mathcal{P}_{i+1} - \mathcal{P}_i \geq k^{-c'}$, supponiamo che la probabilità che \mathcal{D} restituisca 0 su input $b_1, \dots, b_i, \bar{b}_{i+1}, \dots, r_l$ sia x , allora la probabilità che \mathcal{A} indovini il bit successivo è:

$$\mathcal{P}[\mathcal{A}(b_1, \dots, b_l) = b_{i+1}] = \mathcal{P}[r_{i+1} = b_{i+1}] \cdot \mathcal{P}_{i+1} + \mathcal{P}[r_{i+1} = \bar{b}_{i+1}] \cdot x$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{i+1} + \frac{1}{2} \cdot x$$

Proviamo attualmente a cercare una relazione linearmente indipendente con \mathcal{P}_{i+1} . Il valore equivale alla probabilità che il distinguisher restituisca 1 su input $b_1, \dots, b_i, r_{i+1}, \dots, r_l$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= \mathcal{P}[\text{il bit } i\text{-esimo} = b_{i+1}] \cdot \mathcal{P}[\mathcal{D} \text{ dia } 1 \text{ su } b_1, \dots, b_i, b_{i+1}, \dots, r_l] + \\ &\quad + \mathcal{P}[\text{il bit } i\text{-esimo} = \bar{b}_{i+1}] \cdot \mathcal{P}[\mathcal{D} \text{ dia } 0 \text{ su } b_1, \dots, b_i, \bar{b}_{i+1}, \dots, r_l] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{i+1} + \frac{1}{2} \cdot (1 - x) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{i+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \end{aligned}$$

Ricaviamo quindi che:

$$x = \mathcal{P}_{i+1} + 1 - 2 \cdot \mathcal{P}_i$$

Sostituendo x nell'equazione precedente:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{i+1} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{i+1} + \frac{1}{2} - \mathcal{P}_i \\ &= \frac{1}{2} + \mathcal{P}_{i+1} - \mathcal{P}_i \end{aligned}$$

Ma sappiamo che $\mathcal{P}_{i+1} - \mathcal{P}_i \geq k^{-c'}$, quindi:

$$\frac{1}{2} + \mathcal{P}_{i+1} - \mathcal{P}_i \geq \frac{1}{2} + k^{-c'}$$

□

4.4 Blum Blum Shub

Si tratta di un algoritmo di generazione di numeri pseudocasuali basato sulla difficoltà del calcolo di radici quadrate in \mathbb{Z}_n^* .

La funzione di elevamento al quadrato è una funzione *one-way trapdoor* in $\mathbb{Z}_{p \cdot q}^*$, poiché la conoscenza di p e q , ovvero la fattorizzazione di n , permette di calcolare la radice quadrata in tempo polinomiale. Sappiamo inoltre che ogni funzione *one-way* ammette un *hardcore predicate*, infatti:

$$\text{LSB}(\sqrt{x}) \text{ è un hardcore predicate}$$

Il problema è che x ha più di una radice quadrata, che radice bisogna selezionare?

Teorema Primi di Blum

4.4.1 Se p e q sono primi congrui a 3 mod 4 allora per ogni quadrato x esiste una sola radice quadrata y tale che $y \equiv \sqrt{x} \pmod{n}$.

Sia $n = p \cdot q$ con p e q primi di Blum scelti casualmente, sia $x \in_R \mathbb{Z}_n^*$, allora

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_l \\ x^2 & (x^2)^2 & ((x^2)^2)^2 & \dots & x^{(2^l)} \end{array}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = x^2 \\ x_{i+1} = x_i^2 \end{cases}$$

Teorema Un hardcore predicate di un numero x è il bit meno significativo della sua radice quadrata.

4.4.2 Definiamo quindi $b_i = \text{LSB}(a_{i-1})$, quindi:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_l \\ x^2 & (x^2)^2 & ((x^2)^2)^2 & \dots & x^{2^l} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_l \end{array}$$

Dove il valore di ritorno sarà la sequenza b_l, b_{l-1}, \dots, b_1 . Utilizzando il principio spiegato nella sezione precedente (4.3.2) possiamo restituire i bit in ordine di enumerazione crescente, ovvero b_1, b_2, \dots, b_l .

La differenza è che se il numero n è conosciuto da tutti, allora è possibile restituire i bit solamente nell'ordine b_1, b_2, \dots, b_l , altrimenti in qualsiasi ordine.

4.5 Crittosistema di Blum Goldwasser

L'idea è stata di utilizzare un crittosistema dato dai soliti tre algoritmi, quello di generazione della chiave, quello di codifica e quello di decodifica. La chiave è data da p, q primi di Blum con k bit, $n = p \cdot q$, dove la chiave pubblica è data da n e la chiave privata è data da p e q . Chi possiede la chiave segreta riesce a calcolare radici quadrate in modulo n . L'algoritmo di codifica è dato da un $x \in_R \mathbb{Z}_n^*$, e attraverso blum blum shub, generiamo l bit pseudocausali b_1, \dots, b_l . Supponiamo di avere un messaggio m di lunghezza l , allora il messaggio cifrato sarà:

$$c_1, \dots, c_l, x^{2^{l+1}} = m_1 \oplus b_1, \dots, m_l \oplus b_l, x^{2^{l+1}}$$

Dove $x^{2^{l+1}}$ è il primo elemento della sequenza generata da blum blum shub.

Sostanzialmente il messaggio viene cifrato attraverso one time pad, con una chiave non realmente casuale, ma con numeri pseudocasuali mediante un seme.

Se la sequenza b_1, \dots, b_l è casuale, allora il cyphertext non contiene alcuna informazione sul plaintext, quindi il crittosistema è sicuro.

Supponendo per assurdo che dal ciphertext sia possibile ricavare informazioni sul plaintext, allora si riesce a distinguere qualunque coppia di messaggi, ma sappiamo che non lo si riesce a fare in presenza di una chiave realmente casuale. Ma nel caso specifico del nostro crittosistema, si dovrebbe riuscire a distinguere sul generato di bit pseudocausali, ma questo è assurdo poiché non siamo in grado di distinguere una sequenza pseudocasuale da una casuale.

La decodifica ricava x^2 , infatti, data la conoscenza della fattorizzazione di n , è possibile calcolare $\sqrt{x^{2^{l+1}}} = x^{2^l}$, e così via. Si ricava quindi $x^{2^l}, x^{2^{l-1}}, \dots, x^2$ e si calcolano i bit b_1, \dots, b_l . Attraverso questi bit è possibile decifrare il messaggio con l'operazione inversa:

$$m_i = c_i \oplus b_i$$

L'algoritmo in questione effettua il calcolo di l quadrati, con un costo di $\Theta(n^2)$ per ciascuna operazione di elevamento al quadrato. Pertanto, il costo totale dell'algoritmo è $\Theta(l \cdot n^2)$.

Questo algoritmo è uno stream cypher, a differenza di **RSA**, che è invece un block cypher. Nonostante questa differenza nel metodo di cifratura, le complessità computazionali di entrambi gli algoritmi risultano essere simili. La distinzione principale risiede nel fatto che l'algoritmo di Blum Goldwasser gode di una dimostrazione di sicurezza, dimostrabilità che manca invece in **RSA**.

4.6 Funzioni pseudo-casuali

Avendo imparato a generare bit pseudocasuali, siamo in grado di generare funzioni pseudo-casuali, ovvero funzioni che non sono realmente casuali, ma sono generate da un seme, ma agli occhi di un osservatore esterno sono casuali.

Sia \mathcal{U}_k l'insieme delle funzioni da $\{0, 1\}^k$ a $\{0, 1\}^k$, vogliamo scegliere f appartenente a \mathcal{U}_k in maniera casuale.

Possiamo generare una sequenza di bit pseudocasuali per generare l'indice di f in una enumerazione di $\{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}^k$. Dalla teoria del calcolo combinatorio sappiamo che la cardinalità di delle funzioni da A a B è $|B|^{|A|}$, quindi la cardinalità di \mathcal{U}_k è $\{0, 1\}^{k \cdot \{0, 1\}^k} = 2^{k \cdot 2^k}$. Per denotare l'indice della funzione avremmo quindi bisogno di $\log_2(2^{k \cdot 2^k}) = k \cdot 2^k$ bit, ovvero una quantità di bit esponenziale, cosa che non ci possiamo permettere.

Ci farebbe comodo denotare una funzione con k bit, il problema è che con i nostri indici dovremmo denotare un insieme di funzioni minori dell'insieme delle funzioni in \mathcal{U}_k , dobbiamo quindi lavorare con un insieme $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{U}_k$. Vogliamo comunque far in modo che chiunque non sia in grado di accorgersi che sia stata scelta una funzione da un insieme più piccolo.

In un generatore di funzioni pseudocasuali, partiamo dall'idea che:

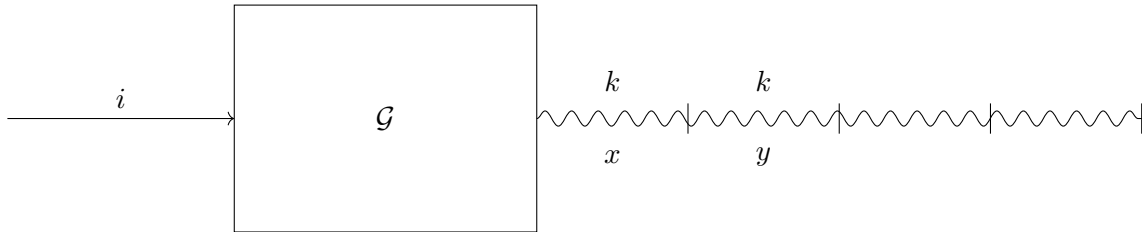
1. Troviamo un insieme di funzioni $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{U}_k$, tale che $|\mathcal{F}_k| = 2^k$; imponendo per definizione tale dimensione, siamo in grado di generare funzioni casuali avendo a disposizione k bit;
2. Esiste un algoritmo probabilistico polinomiale che calcola la funzione $(i, x) \mapsto f_i(x)$;
3. Sia $\mathcal{D} \in \text{PPT}$ un algoritmo che, su input 1^k (*il security parameter rappresentato in unario, nel valore, ovvero nel numero di bit che usiamo per rappresentare le nostre informazioni*), che interroga f arbitrariamente, anche in maniera adattiva (*scegliendo l'argomento su cui interrogare la funzione f anche sulla base dei risultati ottenuti dalle precedenti interrogazioni, ma sempre in tempo polinomiale*). Siano $\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{U}}$ la probabilità che \mathcal{D} restituisca 1 quando $f \in_R \mathcal{U}_k$ e $\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{F}}$ la probabilità che \mathcal{D} restituisca 1 quando $f \in_R \mathcal{F}_k$, allora

$$\left| \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{U}} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{F}} \right| \leq k^{-\omega(1)}$$

4.6.1 Costruzione delle funzioni pseudo-casuali

Primo metodo

Sia \mathcal{G} un pseudo random sequence generator (**PRSG**), ovvero un algoritmo che genera una sequenza di bit pseudocasuali.



Su input x generiamo k bit e li restituiamo. Oltre a restituirli, ci ricordiamo che x è associata ai primi k bit generati dal PRSG. Sul successivo input y se $y = x$ restituiamo il risultato precedente, altrimenti generiamo k bit nuovi e li restituiamo.

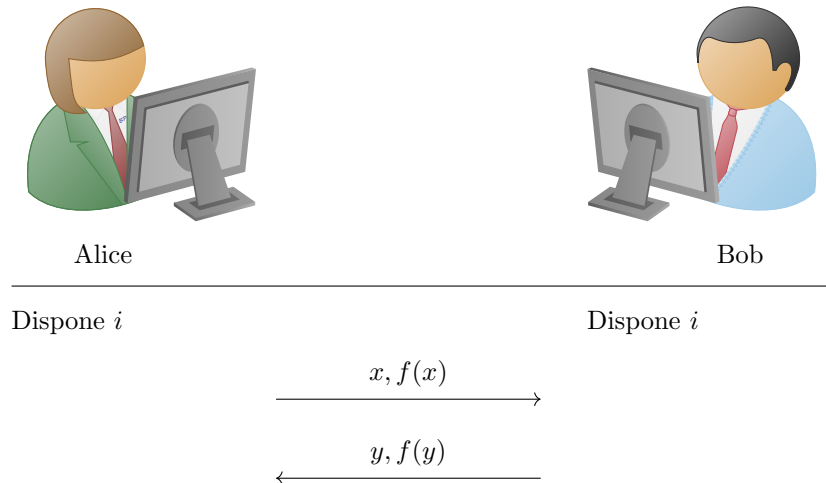
Ogni volta che abbiamo un nuovo input, generiamo k bit nuovi, altrimenti restituiamo il risultato fornito in precedenza. Il problema di fondo abbastanza grosso è che una volta che abbiamo definito il seme i , la funzione è definita in maniera univoca da i ? No, perché la funzione dipende dall'ordine in cui viene interrogata. Quindi passando prima x e poi y oppure prima y e poi x potremmo ottenere risultati diversi.

Ma agli occhi di chi osserva, siamo in presenza di una funzione casuale, se scegliamo un numero nuovo vediamo un risultato scelto uniformemente a caso, se scegliamo un numero già visto, vediamo il risultato che abbiamo visto in precedenza.

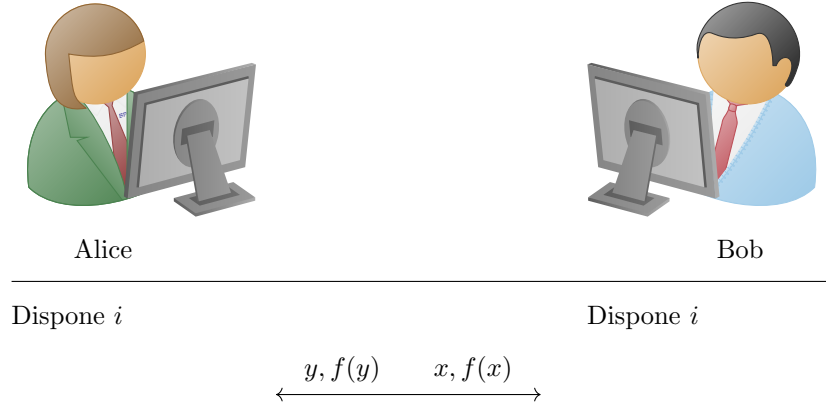
Tuttavia questa costruzione non soddisfa la definizione che abbiamo dato, quindi possiamo far in modo che la definizione ammetta questa costruzione per la generazione di funzioni pseudo-casuali. Ma per la costruzione che abbiamo in mente, ovvero per l'autenticazione di messaggi, questa costruzione non è adatta.

$$m, f(m)$$

Chiunque non conosca f , e veda in $f(m)$ una sequenza casuale, e non sia in grado di calcolare $f(m')$ per $m' \neq m$. L'autenticazione di un messaggio m' è possibile crearla solo con f .



Se le cose vanno esattamente come nel diagramma rappresentato, allora tutto va secondo i piani, poiché ogni agente riesce a verificare l'autenticità di ogni messaggio.

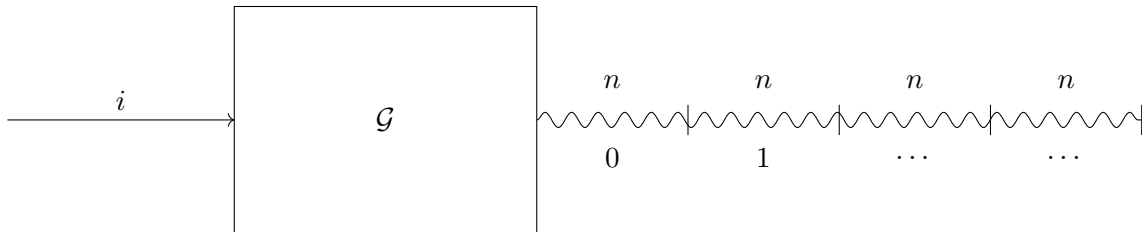


Scambiandosi i messaggi in maniera sincrona, poiché Alice utilizza il generatore e la prima volta che lo invoca, lo invoca su x , mentre Bob lo invoca su y , Alice e Bob si trovano in una situazione in cui non sono in grado di verificare poiché $f(x) = f(y)$.

Nel momento in cui la funzione f dipende dall'ordine di interrogazione, non è possibile distribuire la funzione f a più agenti, e ci vorrebbe un oggetto centralizzato che distribuisce la funzione f a tutti gli agenti.

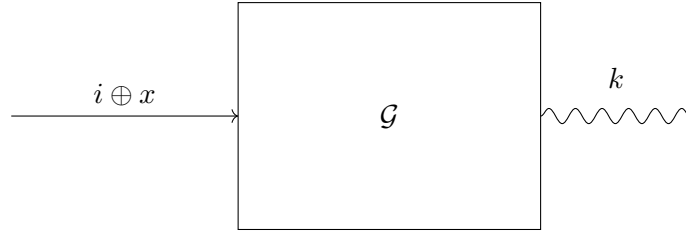
Tale costruzione è utile in caso di generazione di funzioni pseudocasuali in cui l'utilizzo è locale, tuttavia la crescita di richieste fa sì che la dimensione del database cresca e quindi allunghi i tempi di risposta e quindi ci si accorga della pseudocasualità nella generazione.

Secondo metodo



Dove f_i è definita come l' i -esimo gruppo di n bit restituito da \mathcal{G} . In questo caso l'insieme f_i è definito in maniera univoca. Per ogni i c'è una funzione f_i definita in maniera univoca, quindi l'insieme \mathcal{F}_k è l'insieme delle funzioni f_i definite nella maniera appena descritta.

Il problema sorge nella condizione che indica che esiste un algoritmo probabilistico polinomiale tale che $(i, x) \mapsto f_i(x)$. Sia $x = 2^{k-1} - 1$, per come è definito il generatore, per farlo dobbiamo generare tutti i numeri da 0 a $2^{k-1} - 1$, quindi i bit totali da generare sono $k \cdot 2^{k-1}$, quindi il tempo di esecuzione non è polinomiale.

Terzo metodo

Come seme usiamo $i \oplus x$, e prendiamo i primi k bit del risultato. Quindi $f_i(x)$ è definita come i primi k bit di $\mathcal{G}(i \oplus x)$. Sappiamo che ogni indice i determini una funzione f_i definita in maniera univoca. Inoltre l'algoritmo che genera f_i è polinomiale, poiché per generare f_i è sufficiente eseguire lo XOR tra i e x e, che è un'operazione polinomiale, e poi generare con il generatore \mathcal{G} i primi k bit del risultato, e sappiamo che \mathcal{G} sia un algoritmo polinomiale.

Dobbiamo capire se esiste distinguisher in grado di distinguere f_i da una funzione casuale. Supponiamo che esista \mathcal{D} tale per cui $\left| \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{U}} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{F}} \right| > k^{-\omega(1)}$, vorremmo trasformare \mathcal{D} in un algoritmo che viola la correttezza del generatore \mathcal{G} .

Per farlo dobbiamo assicurarci che il distinguisher \mathcal{D} stia facendo implicitamente su \mathcal{G} , tutti esperimenti che siano compatibili con quello che abbiamo detto per definire la correttezza di \mathcal{G} .

Nel caso specifico il distinguisher \mathcal{D} può scegliere valori distinti di x , ma il generatore \mathcal{G} conosce tali valori x_1, x_2, \dots, x_n , prendendo lo XOR di uno dei due valori in input a \mathcal{G} , otteniamo lo XOR del seme usato in \mathcal{G} , allora il distinguisher è in grado di osservare l'output di \mathcal{G} su due semi di cui è nota la differenza.

Se interroghiamo $f(0) = a$ e $f(1^k) = b$, sappiamo che il seme usato per generare a sia esattamente il complemento del seme usato per generare b . In generale se $f(x) = a'$ e $f(y) = a''$, allora sappiamo che XOR dei semi usati per generare a' e a'' è esattamente $x \oplus y$. Gli esperimenti che il distinguisher riesce a fare implicitamente su \mathcal{G} sono esperimenti che il distinguisher che abbiamo usato per definire la correttezza su \mathcal{G} non è in grado di fare. Quindi il distinguisher che sta lavorando sulle funzioni pseudocasuali è più potente del distinguisher ammesso nella definizione di correttezza di \mathcal{G} , quindi abbiamo una contraddizione.

In questo caso i casi possono essere due:

- Abbiamo definito un generatore troppo debole, poiché abbiamo bisogno di una definizione più forte, che ammetta esperimenti di questo tipo;
- Possiamo far vedere che se abbiamo un generatore di bit pseudocasuali, allora tale generatore resiste ad attacchi di questo tipo.

In questo caso è possibile costruire un generatore di bit pseudocasuali \mathcal{G} e che se usato in questo contesto permette di costruire un distinguisher \mathcal{D} .

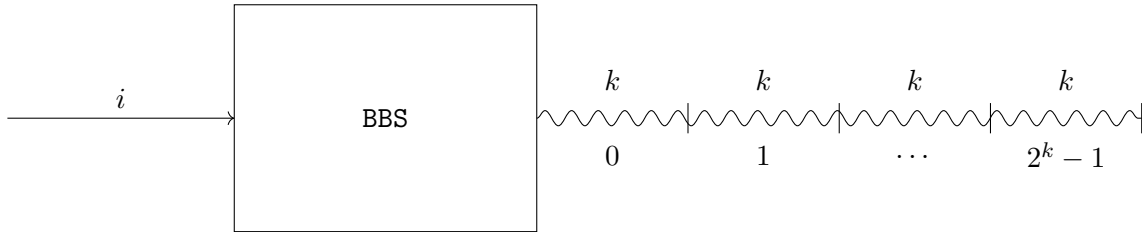
Incapsuliamo il generatore in un generatore più grande \mathcal{G}' , che prende in input i_0, i_1, \dots, i_{k-1} . Se $i_0 = 0$ allora si inviano i_1, i_2, \dots, i_{k-1} al generatore \mathcal{G} , altrimenti si invia $\overline{i_1}, \overline{i_2}, \dots, \overline{i_{k-1}}$ al generatore \mathcal{G} . Scegliendo un seme a caso usiamo \mathcal{G} con un seme a caso, poiché il complemento di una sequenza di bit casuali è sempre una sequenza casuale, quindi stiamo generando una sequenza di bit casuali con security parameter $k - 1$.

Il nuovo generatore \mathcal{G}' è un generatore di bit pseudocasuali che soddisfa la definizione di correttezza. L'output di \mathcal{G}' è effettivamente un seme distribuito uniformemente tra tutti i possibili semi, e quindi si comporta come \mathcal{G} . Tuttavia usando tale oggetto nel contesto riportato sopra, scopriamo che $f(0) = f(1^k)$. Il distinguisher \mathcal{D} in questo caso riusciamo quindi a costruirlo facilmente, poiché basta che controlli se $f(0) = f(1^k)$, e se questo è vero allora \mathcal{D} restituisce 1, altrimenti restituisce 0. Di fronte ad una funzione pseudocasuale risponderà sempre 1, di fronte ad una funzione casuale risponderà 1 solamente quando $f(0) = f(1^k)$, ma tale uguaglianza avviene con probabilità 2^{-k} , perché è la probabilità che due sequenze di k bit siano uguali, la differenza essendo enorme distingue con probabilità 1.

La soluzione alla quale vogliamo ambire è una soluzione che cercherà di evitare il problema.

Quarto metodo

Torniamo al secondo metodo, dove $f_i(x)$ è l' x -esimo gruppo di \mathcal{G} , eravamo rimasti al fatto che non riuscivamo a calcolare $f_i(x)$ in tempo polinomiale. Per poter calcolare $f_i(x)$ in tempo polinomiale, usiamo un generatore di Blum-Blum-Shub, lavorando con il logaritmo discreto non siamo in grado di calcolare elementi molto distanti, ma se dobbiamo calcolare $f_i(2^k - 1)$ servono solamente i bit dalla posizione $k \cdot (2^k - 1) - 1$ a $k \cdot k \cdot 2^k$.



Per calcolare tali bit, avendo a disposizione il seme i , per calcolare il bit $k \cdot (2^k - 1) - 1$ dobbiamo calcolare $i^{k \cdot (2^k - 1) - 1}$, che è abbastanza complicato da calcolare. Tuttavia gli esponenti lavorano in modulo $\varphi(n)$ e una volta calcolato l'esponente possiamo lavorare in modulo n , quindi possiamo calcolare $i^{(k \cdot (2^k - 1) - 1) \bmod \varphi(n)} \bmod n$, in tempo polinomiale k^3 dove k è il numero di bit. Di conseguenza l'oggetto è calcolabile in tempo polinomiale, quindi abbiamo un algoritmo PPT che è in grado di calcolare $f_i(x)$.

Questa operazione non è possibile con tutti i generatori, il generatore di Blum-Blum-Shub lavora in un gruppo di cardinalità finita ed ha una struttura particolare che permette di fare questo tipo di operazioni.

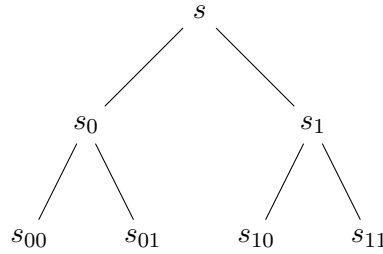
Dobbiamo vedere se tale oggetto soddisfa la terza proprietà di un oggetto pseudocasuale, ovvero che sia indistinguibile da una funzione realmente casuale. Il distinguisher \mathcal{D} interroga

la funzione f e nell'interrogare la funzione f sta implicitamente facendo degli esperimenti su \mathcal{G} , ma gli esperimenti possono essere fatti in tempo polinomiale, quindi un numero esponenziale di bit non può essere vista dal distinguisher. Quindi con il generatore di funzioni pseudocasuali siamo in grado di vedere dei bit che il distinguisher non è in grado di vedere.

In questa situazione però non siamo riusciti a costruire un controesempio.

Quinto metodo

Usiamo l'indice della funzione i di k bit, come seme e di base usiamo un generatore pseudocasuale \mathcal{G} , per generare $2k$ bit, $\mathcal{G}(s)[0, \dots, k-1]$ ovvero s_0 e lo stesso per $\mathcal{G}(s)[k, \dots, 2k-1]$ ovvero s_1 . e ripetiamo ricorsivamente il procedimento generando s_{00}, s_{01}, s_{10} e s_{11} , che sono rispettivamente $\mathcal{G}(s_0)[0, \dots, k-1], \mathcal{G}(s_0)[k, \dots, 2k-1], \mathcal{G}(s_1)[0, \dots, k-1]$ e $\mathcal{G}(s_1)[k, \dots, 2k-1]$.



Scendendo nell'albero, arriviamo al seme indicizzato da x , ovvero s_x , che è un seme di k bit, che è il risultato della funzione $f_i(x)$. Ovviamente questo albero ha 2^k nodi e le foglie rappresentano i valori delle funzioni sui diversi argomenti a partire da s in radice, quindi la funzione $f_s(x)$ ovvero $f_i(x)$ è ben definita.

Per calcolare tale funzione in tempo polinomiale, dobbiamo calcolare solamente un cammino dell'albero, quindi il tempo di calcolo è polinomiale. Infatti per calcolare un nodo dell'albero nel caso pessimo calcoliamo $2k$ bit per k volte a cui si moltiplica il tempo di generazione di $2k$ bit dal generatore di Blum-Blum-Shub, che esegue un elevamento al quadrato per ogni bit, quindi il tempo di calcolo è $\theta(k^4)$.

Dobbiamo verificare che non esista un distinguisher \mathcal{D} che sia in grado di distinguere la funzione $f_s(x)$ da una funzione realmente casuale. Creiamo un distinguisher \mathcal{D} che interroga la funzione $f_s(x)$; implicitamente sta facendo degli esperimenti sul generatore \mathcal{G} , in maniera nidificata. Guardando l'albero a livelli, un generatore pseudocasuale trasforma una certa quantità di casualità in una quantità di casualità diversa.

Definiamo gli alberi:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_0 & = & s^1 \quad \dots \quad s^{i-1} \quad s^i \quad s^{i+1} \quad s^{i+2} \quad \dots \quad s^l \\ \mathcal{T}_l & = & r^1 \quad \dots \quad r^{i-1} \quad r^i \quad r^{i+1} \quad r^{i+2} \quad \dots \quad r^l \end{array}$$

Dove \mathcal{T}_0 è l'albero che rappresenta esattamente l'albero definito per la generazione di funzioni pseudocasuali, mentre \mathcal{T}_l corrispondente ad una funzione casuale campionata uniformemente dall'insieme \mathcal{U}_k .

Il distinguisher secondo la nostra ipotesi vede la differenza tra un albero costruito secondo la prima tecnica e un albero costruito secondo la seconda.

$$|\mathcal{P}_k^{\mathcal{D},\mathcal{G}} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D},\mathcal{U}}| > k^{-c} \quad \text{quindi} \quad |\mathcal{P}(0) - \mathcal{P}(k)| > k^{-c}$$

In questo caso costruiamo tutti gli alberi intermedi dove per ogni livello $i = 0, \dots, k$ definiamo l'albero \mathcal{T}_i tale che:

- I nodi dei livelli $0, \dots, i$ sono tutti casuali;
- I nodi dei livelli $i + 1, \dots, k$ sono tutti pseudocasuali.

Con la solita tecnica di interpolazione, possiamo affermare che se il distinguisher è in grado di rilevare la differenza tra un albero costruito secondo lo schema \mathcal{T}_0 e un albero costruito secondo lo schema \mathcal{T}_k , allora può individuare la differenza tra livelli adiacenti mediante interpolazione. Poiché due livelli adiacenti differiscono solamente per un livello specifico, otteniamo due alberi distinti che si differenziano solo per quel livello particolare. Pertanto, calcolando $f_s(x)$ risulterebbe equivalente a retrocedere al nodo i -esimo dell'albero \mathcal{T} e osservarlo casualmente in un caso e pseudocasualmente nell'altro, con un seme generato al livello precedente in maniera veramente casuale. L'esperimento di calcolare $f_s(x)$ è quindi il classico test su un generatore di bit pseudocasuali.

$$\exists i \in \{0, \dots, k-1\} \quad |\mathcal{P}(i) - \mathcal{P}(i+1)| > k^{-c'}$$

Effettuando un esperimento su $f_s(y)$ che proviene dall'istanza dello stesso nodo i -esimo dell'albero \mathcal{T} , possiamo considerarlo come un'istanza dello stesso esperimento, ossia un esperimento sui bit di livello i casuali o pseudocasuali. Se l'esperimento è condotto su $f_s(z)$ proveniente da una nuova istanza di un nodo i -esimo dell'albero \mathcal{T} , allora può essere considerato un nuovo esperimento indipendente, consentendo la realizzazione di più esperimenti indipendenti.

Se la probabilità di successo con un singolo esperimento è inferiore a qualsiasi polinomio, la probabilità di successo con un numero polinomiale di esperimenti indipendenti è comunque inferiore a qualsiasi polinomio.

Di conseguenza un'esistenza di un attaccante al generatore di funzioni si traduce in un attaccante al generatore di bit pseudocasuali \mathcal{G} , quindi il distinguisher non esiste se assumiamo che il generatore di partenza soddisfi la definizione.

Capitolo 5

Autenticazione

5.1 Autenticazione

Ci sono due o più agenti che si scambiano messaggi, non necessariamente orientati alla segretezza dei messaggi, ma vogliono essere sicuri che i messaggi siano creati solo da loro e non da altri.

Una possibilità è quella di scegliere una funzione pseudocasuale f da condividere tra gli agenti, la funzione può essere generata con un qualsiasi schema, per esempio lo schema precedente che sfrutta l'utilizzo di un seme, e questo seme viene scambiato tra gli agenti attraverso un canale sicuro. Ad ogni messaggio m si aggiunge il valore $f(m)$, spedendo quindi la coppia $(m, f(m))$, in altri termini $f(m)$ è l'autenticazione di m , non mandando quindi solo il messaggio m , ma anche la sequenza di bit che è l'autenticazione di m .

La funzione è pseudocasuale, di conseguenza chiunque non conosca il seme di partenza vede di fianco ad ogni messaggio una sequenza di k bit scelta uniformemente a tra le sequenze di k bit. Qualunque agente che conosce il seme può calcolare autonomamente $f(m)$ e confrontarlo con il secondo elemento della coppia, se sono uguali allora il messaggio è autentico, altrimenti non è autentico.

5.1.1 Forger

Sia \mathcal{F} un **forger**, ovvero un algoritmo probabilistico polinomiale che interroga f su una sequenza di messaggi m_1, m_2, \dots, m_l , anche in modo adattivo e alla fine restituisce una coppia (m, σ) , diciamo che \mathcal{F} ha successo se $f(m) = \sigma$ e $\forall i \ m \neq m_i$, quindi restituisce una coppia (m, σ) dove m non è mai stato interrogato e σ è l'autenticazione di m .

$$\forall \mathcal{F} \in \text{PPT} \quad \mathcal{P}[\text{Succ}(\mathcal{F}) = 1] \leq k^{-\omega(1)}$$

5.1.2 Autenticare messaggi lunghi

L'idea è quella di dividere il messaggio in blocchi di lunghezza k , quindi $m = m_1, \dots, m_l$, possiamo cercare di creare l'autenticazione applicando la funzione f a ogni blocco, quindi $f(m_1), \dots, f(m_l)$ e definire il messaggio m come:

$$m = f(m_1) \oplus f(m_2) \oplus \dots \oplus f(m_l)$$

Il problema è che il forger in questo caso può combinare i blocchi in modo diverso, quindi può creare un messaggio m' che è diverso da m , ma che ha la stessa autenticazione. Infatti chiedendo la coppia $(m_1m_2, f(m_1m_2))$, la coppia $(m_2m_1, f(m_2m_1))$ è una coppia autentica.

Costruire un messaggio autenticato senza interrogare la funzione f in questo caso è molto semplice, infatti costruendo la coppia $(m_1m_1, f(m_1m_1))$, lo XOR di due messaggi uguali è sempre 0, e dal punto di vista della definizione abbiamo trovato il forger, quindi abbiamo la necessità di utilizzare un meccanismo più complesso per autenticare messaggi lunghi vietando inoltre lo scambio dei blocchi. Per farlo la posizione di ogni singolo blocco deve avere un impatto sulla funzione f .

$$f(m) = f(\langle 1 \rangle m_1) \oplus f(\langle 2 \rangle m_2) \oplus \dots \oplus f(\langle l \rangle m_l)$$

Dove $\langle i \rangle$ è una stringa di pochi bit che rappresenta la posizione del blocco m_i . Purtroppo però anche con questo sistema il forger può creare un messaggio autentico in modo semplice:

$$\begin{aligned} f(m_1m_2) &= f(\langle 1 \rangle m_1) \oplus f(\langle 2 \rangle m_2) \\ f(m'_1m_2) &= f(\langle 1 \rangle m'_1) \oplus f(\langle 2 \rangle m_2) \\ f(m_1m'_2) &= f(\langle 1 \rangle m_1) \oplus f(\langle 2 \rangle m'_2) \\ \hline f(m'_1m'_2) &= f(\langle 1 \rangle m'_1) \oplus f(\langle 2 \rangle m'_2) \end{aligned}$$

L'idea per risolvere il problema potrebbe essere l'applicazione nidificata della funzione f in stile cypher block chaining, ovvero:

$$f'(m_1 \dots m_l) = f(m_l \oplus \dots \oplus f(m_3 \oplus f(m_2 \oplus f(m_1))))$$

Questo sistema è dimostrabilmente sicuro; difatti, ciò che viene realizzato è la costruzione di una nuova funzione $f' : \{0, 1\}^{kl} \rightarrow \{0, 1\}^k$, partendo da una funzione pseudocasuale di k bit in k bit, che incrementa la dimensione dell'input. Possiamo concepire questo concetto come un'estensione dell'idea di generazione di funzioni pseudocasuali. Supponiamo di avere una funzione scelta in modo uniforme tra le funzioni da $\{0, 1\}^k$ a $\{0, 1\}^k$, oppure una funzione da kl bit a k bit, selezionata da un insieme di dimensione più ridotta, poiché dipende dallo stesso seme utilizzato per f . Il nostro obiettivo è affermare che questo sistema è sicuro nel senso che non esiste alcun algoritmo probabilistico polinomiale in grado di distinguere una funzione pseudocasuale da una funzione casuale.

L'eventuale forger può essere convertito in un distinguisher; pertanto, affermare che si tratta di un sistema di autenticazione o di una funzione pseudocasuale da kl bit a k bit è equivalente, quindi l'esistenza di un forger implica l'esistenza di un distinguisher, e viceversa.

Dimostriamo quindi che la costruzione della funzione f' è una costruzione di una funzione pseudocasuale da kl bit a k bit, partendo da una funzione pseudocasuale da k bit a k bit, e dimostriamo che è una funzione pseudocasuale nel senso delle definizioni date sulle funzioni pseudocasuali, ovvero non esiste alcun algoritmo probabilistico polinomiale in grado di distinguere una funzione pseudocasuale da una funzione casuale.

Per farlo costruiamo $\mathcal{F}_i(m_1, \dots, m_i)$ prende i primi i blocchi del messaggio e applica la funzione f pseudocasuale a questi blocchi e per i successivi $l - i$ blocchi applica la funzione r casuale, quindi:

$$\mathcal{F}(m_1 \dots m_l) = r(m_l \oplus \dots \oplus r(m_{i+1} \oplus f(m_i \oplus \dots \oplus f(m_3 \oplus f(m_2 \oplus f(m_1))))))$$

A questo punto, sapendo che f_0 è sempre casuale in tutti i punti e f_1 è pseudocasuale in tutti i punti, sapendo distinguere i due estremi possiamo, per interpolazione, distinguere anche i punti intermedi. Sappiamo che $\mathcal{P}(i)$ è la probabilità che il distinguisher restituisca 1 se la funzione di autenticazione è la funzione \mathcal{F}_i , allora:

$$|\mathcal{P}(i) - \mathcal{P}(i+1)| > k^{-c}$$

Quindi distinguere sul livello i -esimo e il livello $i+1$ -esimo si traduce in una distinzione nell'utilizzo di una funzione pseudocasuale e una funzione casuale, quindi:

$$\exists i \in \{0, \dots, k-1\} \quad |\mathcal{P}(i) - \mathcal{P}(i+1)| > k^{-c'}$$

Diventando quindi un distinguisher per la funzione pseudocasuale f .

5.1.3 Problema della non ripudiabilità

Vorremmo avere a disposizione un sistema che permetta di autenticare un messaggio, in modo tale che il mittente non possa negare di averlo inviato, poiché con le tecniche utilizzate fino ad ora i messaggi potrebbero essere stati creati da chiunque. Tale problema è legato al concetto di firma digitale, chi firma il messaggio non può negare di averlo firmato, in quanto la firma è univoca e non può essere riprodotta da nessun altro.

In sostanza, solo un agente può firmare un messaggio, e tutti possono verificare la firma. Chi può verificare non può firmare, nel momento in cui la firma è stata apposta non può essere contestata. Devono quindi esistere due chiavi, una chiave privata per firmare e una chiave pubblica per verificare, e dalla chiave pubblica non deve essere possibile risalire alla chiave privata.

RSA nella firma digitale

L'algoritmo RSA può essere utilizzato per la firma digitale, in quanto è un algoritmo a chiave pubblica e privata, e la chiave pubblica non può essere utilizzata per risalire alla chiave privata.

In RSA classico, il messaggio da criptare si eleva alla potenza e e si prende il modulo n , e per decrittare si eleva alla potenza d e si prende il modulo n . Per il teorema di Eulero, n elevato

alla cardinalità del gruppo fornisce l'unità, quindi $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, quindi $m^{k\varphi(n)+1} \equiv m \pmod n$.

Per firmare un messaggio m si calcola $m^d \pmod n$, e per verificare la firma si calcola $(m^d)^e \pmod n$, che è uguale a m . Solamente chi possiede la chiave privata può firmare, mentre la verifica può essere effettuata da chiunque.

$$(m^d)^e \equiv m^{de} \equiv m^{k\varphi(n)+1} \equiv m \pmod n$$

5.1.4 Definizione di sistema di firma digitale

Un sistema di firma digitale è una tripla di algoritmi (**Gen**, **Sign**, **Ver**) probabilistici polinomiali.

- \mathcal{G} è un algoritmo probabilistico polinomiale che prende in input 1^n (*poiché l'algoritmo deve essere polinomiale nel valore del security parameter, ovvero il numero di bit che usiamo per rappresentare le nostre chiavi, visto che sulle macchine di Turing la dimensione del problema è pari al numero di celle che usiamo nel nastro di input*) che produce una coppia di chiavi (p_k, s_k) ;
- \mathcal{S} è un algoritmo probabilistico polinomiale che prende in input una chiave privata s_k e il messaggio m e produce una firma σ ;
- \mathcal{V} è un algoritmo probabilistico polinomiale che prende in input una chiave pubblica p_k , e la firma σ e restituisce 1 se la firma è valida, 0 altrimenti.

La probabilità di verificare una firma costruito secondo lo schema di firma digitale è 1.

$$\forall \mathcal{P} [\mathcal{V}(p_k, \mathcal{S}(s_k, m)) = 1] = 1$$

Si parla di probabilità perché l'algoritmo di verifica potrebbe essere un algoritmo probabilistico polinomiale, e di conseguenza sbagliare, ma la probabilità che questo accada è 0.

Sia $\mathcal{F} \in \text{PPT}$ un algoritmo che chiede la firma di messaggi m_0, m_1, \dots, m_l , anche in modo adattivo, e che produce una coppia (m, σ) , dove m è il messaggio che viene firmato e σ ed \mathcal{F} ha successo se $\mathcal{V}(p_k, \sigma) = 1$ e $m \notin \{m_0, m_1, \dots, m_l\}$.

$$\forall \mathcal{F} \in \text{PPT} \quad \mathcal{P}[\mathcal{F} \text{ ha successo}] \leq k^{-\omega(1)}$$

Se \mathcal{F} non riesce a produrre una firma falsa avendo a disposizione la chiave pubblica, è evidente che chiunque abbia la chiave pubblica non può produrre firme; non è possibile ricavare la chiave privata, perché l'unico modo che conosciamo per produrre una firma è mediante l'algoritmo \mathcal{S} , che prende in input la chiave privata e di conseguenza un crittosistema di firma digitale che soddisfa queste definizioni è un sistema che soddisfa la proprietà di non ripudiabilità.

RSA però non è un buon sistema di firma digitale, nel senso che non soddisfa la definizione data, infatti non è vero che ogni forger ha una probabilità di successo trascurabile, infatti è possibile forgiare messaggi, dati (m_1, m_1^d) e (m_2, m_2^d) , creando un nuovo messaggio $(m_1 m_2, (m_1 m_2)^d)$. Chiaro che inserendo sufficiente ridondanza ai messaggi in modo tale che molto difficilmente $m_1 m_2$ sia un messaggio significativo questi attacchi non producono nulla.

5.2 Funzioni Hash

L'idea alla base relativa alla firma di messaggi lunghi è quella dell'utilizzo di **funzioni hash** crittograficamente sicure, quindi il messaggio σ viene calcolato come $\sigma = H(m)^d$. Il motivo per cui viene firmato l'hash di un messaggio è per poter firmare messaggi lunghi, evitando quindi di utilizzare firme lunghe tanto quanto il messaggio originale. Utilizzando questa metodologia cosa succede se dati due messaggi m_1 e m_2 , $H(m_1) = H(m_2)$? In questo caso è possibile forgiare un messaggio, infatti chiedendo la firma del messaggio m_1 , è possibile forgiare la firma del messaggio m_2 utilizzando la firma del messaggio m_1 .

Per la natura intrinseca delle funzioni hash, tali funzioni hanno collisioni, quindi è necessario utilizzare delle funzioni hash crittograficamente sicure, ovvero funzioni hash collision resistant, su cui è difficile trovare collisioni. Quindi è computazionalmente difficile trovare due messaggi m_1 e m_2 tali che $H(m_1) = H(m_2)$.

Funzione collision resistant

Una funzione H è **collision resistant** se per ogni algoritmo \mathcal{A} che lavora in tempo polinomiale, la probabilità che \mathcal{A} produca una coppia (m_1, m_2) tale che $H(m_1) = H(m_2)$ è trascurabile, più piccola di qualsiasi polinomio.

Degli esempi di funzioni hash collision resistant possono essere MD5, SHA-1, SHA-2. SHA-2 al momento è considerata lo stato dell'arte, ma è possibile che in futuro vengano trovati attacchi che permettono di trovare collisioni in SHA-2.

Utilizzando funzioni hash collision resistant all'interno di RSA per firmare messaggi, allora il sistema di firma digitale è sicuro, ovvero soddisfa la definizione data in precedenza, poiché non siamo in grado di produrre la firma di un messaggio $m_1 \cdot m_2$ a partire dalla firma di m_1 e m_2 , perché l'hash di $m_1 \cdot m_2$ è diverso dall'hash di m_1 e m_2 .

5.2.1 Funzioni hash one way

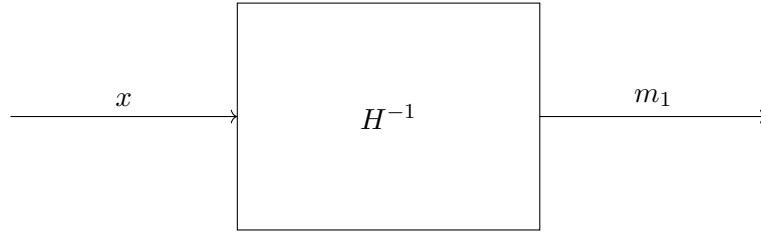
Una funzione hash H è one way se dato x è difficile trovare un qualsiasi m tale che $H(m) = x$, ovvero facile da calcolare, ma difficile da invertire. In una funzione iniettiva, dove ogni elemento dell'immagine (*codominio*) ha un unico elemento dell'insieme di partenza, quindi trovare l'inversa è semplice, siccome $f : A \rightarrow B$ è iniettiva allora $f^{-1} : B \rightarrow A$ è definita. Per invertire una funzione hash, che non è iniettiva, è necessario utilizzare tecniche di **brute force**, ovvero provare tutti i possibili input e trovare un qualsiasi input che produce l'hash x .

Proposizione Se H è una funzione collision resistant, allora H è anche una funzione one way.

5.2.1

Dimostrazione. Supponiamo che H non sia one way, mostriamo quindi che H non sia collision resistant.

Sia m un messaggio casuale e calcoliamo $x = H(m)$, quindi x è un valore casuale che viene dato in input alla macchina che inverte la funzione hash e che produrrà un messaggio m' tale che $H(m') = x$.



Con il fatto di aver scelto m in modo casuale, la probabilità che H^{-1} restituisca lo stesso messaggio m è trascurabile, quindi con probabilità 1 abbiamo trovato una collisione. \square

5.3 Blind signature

Blind signature è un protocollo che permette di firmare un messaggio senza che il firmatario sappia cosa sta firmando. Esiste un messaggio m che l'agente B deve firmare e B non può conoscere m . L'agente A che ha bisogno della firma sceglie un elemento b casuale appartenente al gruppo \mathbb{Z}_n^* chiamato **blinding factor** e calcola $m \cdot b^e$, dove e è la chiave pubblica di B , e ne chiede la firma l'agente B calcola la firma $\sigma = (m \cdot b^e)^d = m^d \cdot b$ e comunica σ ad A . In questo caso non si utilizza la funzione hash essendo fondamentale l'utilizzo della struttura dei messaggi, quindi bisognerà utilizzare tecniche alternative, come la ridondanza dei messaggi, per evitare gli attacchi visti precedentemente. L'agente A calcola quindi $\sigma' = \sigma \cdot b^{-1}$ ottenendo m, σ' , quindi σ' è la firma del messaggio m .

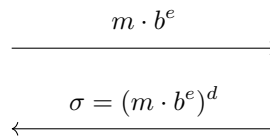


Alice



Bob

Sceglie $b \in_R \mathbb{Z}_n^*$



Produce σ' dove $\sigma' = \sigma \cdot b^{-1} = m^d$

A interagendo con B riesce a far produrre una firma per il messaggio m senza che B sappia cosa sta firmando.

$$\sigma' = \sigma \cdot b^{-1} = (m \cdot b^e)^d \cdot b^{-1} = m^d \cdot b^{ed} \cdot b^{-1} = m^d \cdot b \cdot b^{-1} = m^d$$

Vorremmo migliorare il sistema, in modo tale che B firmi comunque alla cieca, ma che abbia la garanzia che sia un messaggio costruito in maniera adeguata a quello che doveva effettivamente firmare. Per farlo abbiamo due modi:

1. La chiave pubblica usata da B può essere usata solo per spedire pin.
2. Complicando il protocollo. Per farlo A genera m_1, m_2, \dots, m_l differenti messaggi di comunicazione pin e tali messaggi devono essere tutti identici, ma differiscono solo per il valore del pin. A genera b_1, b_2, \dots, b_l blinding factor secondo il protocollo e spedisce a B i messaggi $m_1 \cdot b_1^e, m_2 \cdot b_2^e, \dots, m_l \cdot b_l^e$. A questo punto B sceglie $i \in_R \{1, \dots, l\}$, scegliendo quindi una lettera e comunica b ad A , a questo punto A comunica $m_1, b_1, \dots, m_{i-1}, b_{i-1}, m_{i+1}, b_{i+1}, \dots, m_l, b_l$ ad B , comunicando tutte le informazioni tranne quelle relative al messaggio i -esimo. B verifica la correttezza dei dati ricevuti e se la verifica ha successo produce la firma $\sigma = (m_i \cdot b_i^e)^d$, altrimenti rifiuta la firma.

Scegliendo l sufficientemente grande, la probabilità che B riesca a trovare il valore del pin si abbassa, ma la probabilità di attacco resta comunque alta, implicando quindi la necessità di trovare altri strumenti per contrastare gli attacchi.

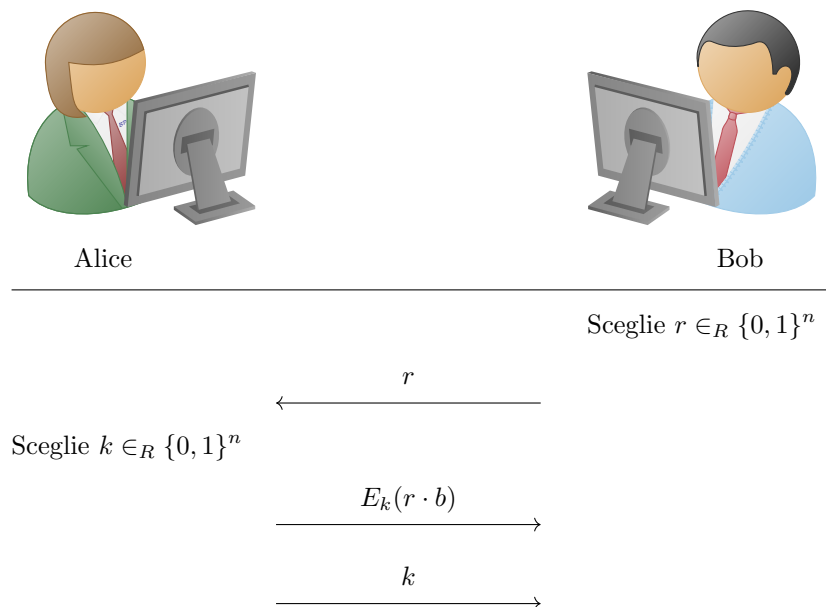
5.4 Bit commitment

Bit commitment è un protocollo che permette di inviare un bit in modo che il ricevente non possa sapere il valore del bit fino a quando non viene rivelato, senza che il mittente possa cambiare il valore del bit. In questo caso il lavoro viene fatto lavorando su un singolo bit, ovviamente il protocollo può essere esteso per lavorare su stringhe di bit più lunghe. Non essere in grado di capire il valore del bit b significa che l'agente B che riceve il bit se applica una qualsiasi algoritmo \mathcal{A} al bit b indovina il valore del bit con probabilità non maggiore di $\frac{1}{2} + \epsilon$, dove ϵ è una quantità trascurabile.

L'apertura della *busta* avviene quando A comunica b l'informazione trapdoor in modo che B possa verificare che il bit b sia effettivamente quello che A ha inviato. Ovviamente A non deve riuscire a creare due coppie m' e m'' che producano due *buste* diverse.

5.4.1 Primo protocollo

In questo protocollo la collaborazione di B è fondamentale, infatti A non può fare nulla se B non collabora. L'algoritmo utilizza un algoritmo di crittografia simmetrica.



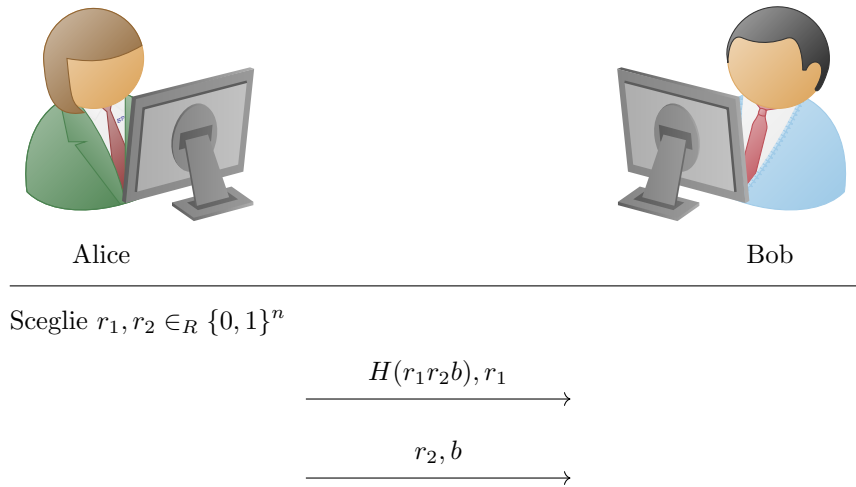
Sulla base delle analisi fatte fino ad ora, non è possibile ricavare la chiave di cifratura k a partire dal plaintext, anche se scegliamo parte del plaintext. B verifica l'autenticità del messaggio ricevuto non appena riceve la chiave k , ovvero l'informazione trapdoor. A non può imbrogliare perché dovrebbe trovare due chiavi k_0 e k_1 tali per cui $E_{k_0}(r \cdot 0) = E_{k_1}(r \cdot 1)$, ma su un algoritmo di crittografia simmetrica come **AES** non è possibile trovare due chiavi che producano lo stesso ciphertext.

In tale algoritmo però ci sono due problemi:

1. B deve collaborare, altrimenti A non può fare nulla.
2. Non è buona cosa scegliere un protocollo che si basa su un algoritmo di crittografia non dimostrabilmente sicuro.

5.4.2 Secondo protocollo

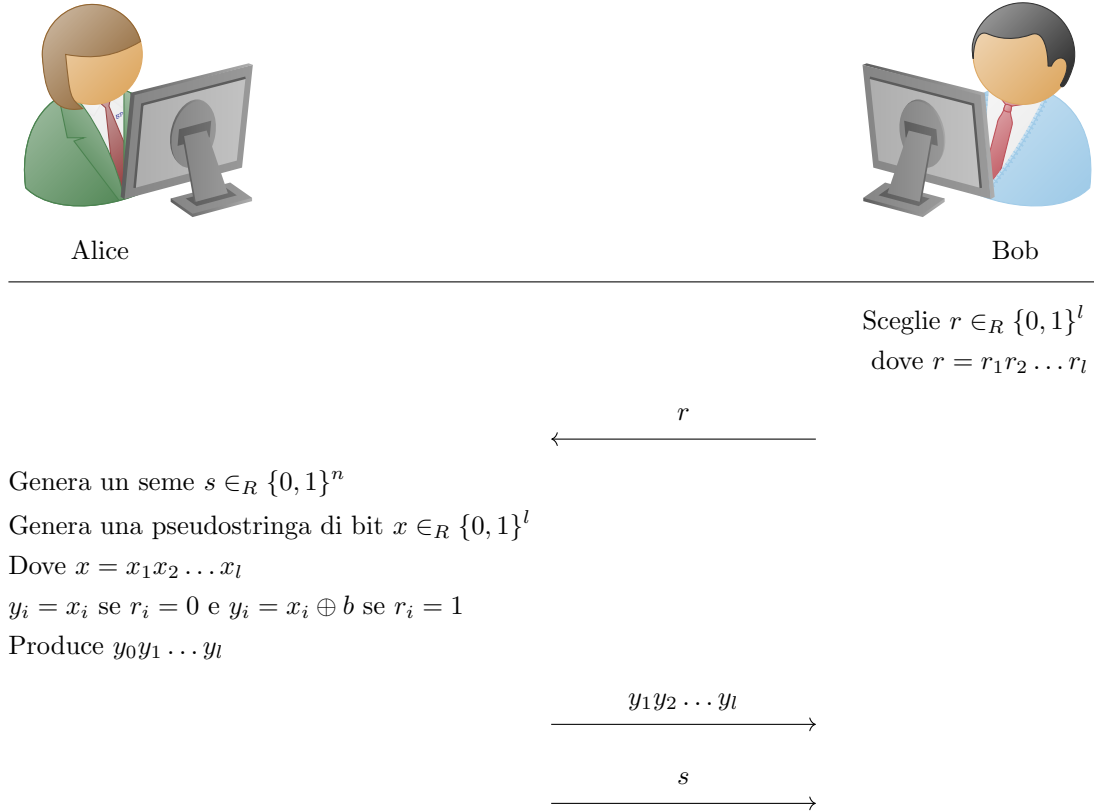
Sia H una funzione hash one way.



Quando A invia il messaggio codificato con la funzione hash nota e parte dell'informazione che è stata codificata, B può verificare che il messaggio sia corretto, solamente se A invia l'informazione restante, che non sarà in grado di manipolare, perché dovrebbe creare una situazione tale che $H(r_1 r_2 0) = H(r_1 r'_2 1)$, ma questo è equivalente a trovare un confitto nella funzione hash, che è un problema difficile. B non può ricavare l'informazione b perché non può invertire la funzione hash. Se non ci fosse r_2 allora B potrebbe facilmente ricavare b provando le combinazioni $H(r_1 0)$ e $H(r_1 1)$, ma con r_2 non è possibile fare questo tipo di attacco.

5.4.3 Terzo protocollo

Questo protocollo è dimostrabilmente sicuro, ma in termini di complessità è molto più costoso degli altri due.



La sequenza y inviata è una sequenza di bit che sono generati o in maniera pseudocasuale o in XOR con il bit b quando $r_i = 1$, nel momento in cui un oggetto è casuale, lo è anche la sua XOR con un altro oggetto, non contenendo quindi nessuna informazione circa il bit b .

Una volta che B riceve il seme s , è in grado di ricostruire la sequenza x e quindi verificare che tutti gli y_i siano corretti, se così non fosse, allora B può interrompere la comunicazione.

A non può imbrogliare perché dovrebbe trovare due semi s_0 e s_1 tali per cui s_0 porti a y_1, \dots, y_l e s_1 porti a y'_1, \dots, y'_l e per ogni i se $r_i = 1$ allora $x_i = \bar{x}_i$, ma per essere più precisi $0 \oplus x_i = 1 \oplus x'_i$, in modo tale che y da spedire sia uguale in entrambi i casi.

5.5 Schemi a barriera

Negli schemi a barriera disponiamo di un segreto s che vogliamo proteggere, lo distribuiamo ad n agenti creando delle parti chiamate *share* s_1, \dots, s_n , in modo che mettendo assieme n parti si possa ricostruire il segreto, ma con meno di n parti non si possa ricavare alcuna informazione sul segreto, quindi nemmeno un'informazione binaria del segreto s .

5.5.1 Schema XOR

Per farlo proviamo con lo XOR, siano s_1, \dots, s_{n-1} sequenze di bit casuali, sia s il segreto e sia $s_n \equiv s \oplus s_1 \oplus \dots \oplus s_{n-1}$, essendo s_1, \dots, s_{n-1} casuali, s_n è casuale, quindi non contiene alcuna informazione sul segreto s , e lo sarebbe di qualunque sottoinsieme. Vale infatti che, per come è stato costruito, $s_1 \oplus s_n = s$, e lo XOR con qualunque sottoinsieme di $s_1, \dots, s_k = s \oplus s_{k+1} \oplus \dots \oplus s_n$, non fornendo quindi alcuna informazione sul segreto.

Questo schema ha però un problema, un agente non collaborativo potrebbe non inviare la sua parte e quindi impedire la ricostruzione del segreto, vorremmo che fosse possibile ricostruire il segreto anche con un numero minore di parti, ma non con meno di un numero fissato k .

5.5.2 Schema di Shamir

Lo schema di Shamir è un metodo per distribuire un segreto s in n parti, in modo che con k parti si possa ricostruire il segreto, ma con meno di k parti non si possa ricavare alcuna informazione sul segreto s .

Teorema 5.5.1 Un polinomio di grado $k - 1$ è individuato univocamente da k punti. Per k punti passa esattamente un polinomio di grado $k - 1$.

Costruiamo un polinomio P casuale di grado k tale che $P(0) = s$.

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1}$$

$$P(0) = a_0 = s$$

Scegliendo quindi a_1, \dots, a_{k-1} casuali e $a_0 = s$ otteniamo un polinomio P casuale.

Gli agenti sono n , e ad ognuno di essi viene assegnato in valore del polinomio P in un punto casuale x_i , che non sia il punto 0.

Distribuzione delle Parti

Dopo aver costruito il polinomio P , il possessore del segreto s distribuisce le sue n parti agli agenti, assegnando a ciascun agente i il valore $P(x_i)$. Ogni agente conosce solo il suo valore assegnato e non può dedurre nulla circa il segreto complessivo.

Il polinomio $P(x)$ è definito come:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}$$

dove $a_0 = s$ e a_1, a_2, \dots, a_{k-1} sono scelti casualmente. Ogni agente riceve il proprio valore $P(x_i)$, con x_i scelto casualmente da una distribuzione che non include lo zero.

Ricostruzione del Segreto

Per ricostruire il segreto s , è necessario un insieme di almeno k parti. Questo è garantito dal teorema precedentemente enunciato, secondo il quale k punti sono sufficienti per individuare univocamente un polinomio di grado $k - 1$.

La ricostruzione del segreto può essere effettuata utilizzando una tecnica come l'interpolazione polinomiale. Ad esempio, utilizzando l'interpolazione di Lagrange, il segreto può essere recuperato con la seguente formula:

$$s = P(0) = \sum_{j=0}^{k-1} y_j \prod_{m=0, m \neq j}^{k-1} \frac{x_m}{x_m - x_j}$$

Dove x_1, x_2, \dots, x_k sono i punti in cui gli agenti hanno valori del polinomio P .

Capitolo 6

Zero knowledge

6.1 Crittografi mangiatori

Ci sono 3 crittografi che cenano insieme, durante la loro cena discutono di tutto, ma essendo paranoici non possono far a meno di notare un personaggio misterioso che li osserva. Al momento del conto decidono di pagare ognuno la propria parte, ma il cameriere gli dice che il conto è stato già pagato. I crittografi vogliono capire se il personaggio misterioso ha pagato il conto o se è stato uno di loro, ma non vogliono rivelare il proprio contributo. Come possono fare?

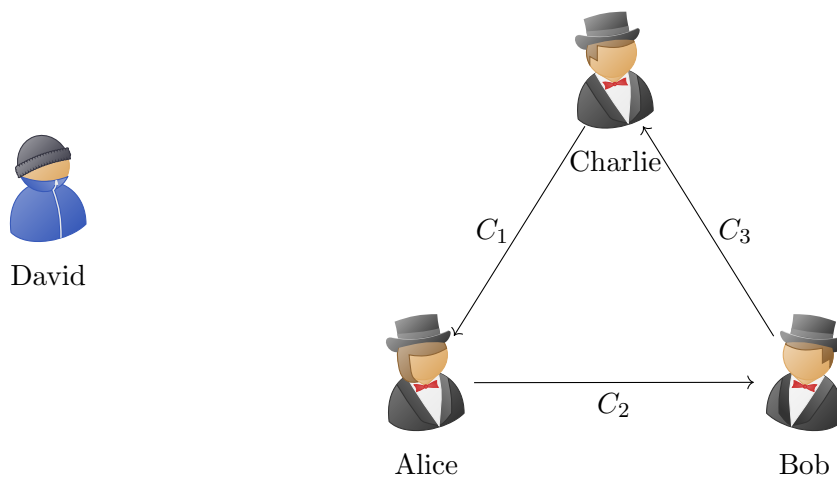


Figura 6.1.1: Crittografi mangiatori

L'idea è quella di utilizzare un protocollo di **zero knowledge**, ovvero un protocollo che permette di dimostrare di conoscere una certa informazione senza rivelarla. Ognuno di loro nasconde un bit b_i che indica se ha pagato o meno il conto, il bit varrà 1 se ha pagato e 0 altrimenti. Ovviamente è chiaro che se il risultato di tutti i bit è 0 allora nessuno ha pagato, se invece il risultato è 1 allora ogni crittografo sa che almeno uno di loro ha pagato, ma non

sa chi. Possiamo vedere questo calcolo come il calcolo di una funzione f che prende in input i bit b_i e restituisce 1 se almeno uno di loro ha pagato, 0 altrimenti, partendo dall'assunzione che i partecipanti siano onesti.

Ognuno di loro lancia una propria moneta a destra, ed ogni crittografo vede il risultato della moneta del crittografo alla sua sinistra e ovviamente sa il risultato della propria moneta. A questo punto ogni crittografo calcola lo XOR delle due monete a cui ha accesso.

$$x_{mine} = C_{other} \oplus C_{mine}$$

x_i varrà 0 se le monete sono uguali, 1 altrimenti. Il crittografo che ha pagato il conto complementa il proprio x .

$$x_{mine} = \overline{x_{mine}}$$

A questo punto notiamo che ogni singolo elemento viene considerato due volte, quindi il risultato dello XOR di tutti gli x sarà 0 se nessuno ha pagato, 1 altrimenti. Ogni crittografo sa quello che può sapere conoscendo il proprio bit e il risultato della funzione, quindi da questo protocollo ogni crittografo può apprendere solo ed esclusivamente ciò che si può apprendere dalla conoscenza del proprio argomento e dalla conoscenza del risultato della funzione. Chiaramente l'agente che sa di essere il crittografo che ha pagato sa il risultato degli altri crittografi.

6.1.1 Generalizzazione del protocollo

Il protocollo può essere generalizzato a n crittografi, ognuno dei quali lancia una moneta e ognuno di loro vede il risultato della moneta del crittografo alla sua sinistra, calcolando lo XOR tra le due monete. Ogni singola moneta viene conteggiata due volte, quindi il risultato dello XOR di tutte le monete sarà 0 se nessuno ha pagato, 1 altrimenti (*eseguendo il complemento*), partendo dal presupposto che tutti i crittografi siano onesti.

Agente esterno che incarica la trasmissione di un messaggio

Supponiamo che qualcuno incarichi un crittografo di spedire un bit, ma non vuole comunicare chi è l'incaricato. Se il crittografo in questione si comporta come l'unico crittografo che può aver pagato, ha la capacità di spedire un bit senza che nessuno si accorga di chi è stato l'incaricato.

Agente interno che vuole spedire un messaggio

Supponiamo che il tempo sia scandito da un clock. Al primo ciclo di clock, il crittografo i lancia la moneta e la passa al crittografo alla sua destra. Al secondo ciclo di clock, il crittografo i calcola lo XOR tra la moneta che ha ricevuto e la moneta che ha lanciato. Il crittografo che vuole spedire il bit complementa il risultato, chi non vuole spedire il bit lascia il risultato così com'è.

Supponendo che il crittografo che vuole spedire il bit sia uno solo, riuscirà a spedire il bit con successo.

Con questo protocollo però potrebbero esserci dei conflitti, ovvero potrebbe capitare che due crittografi vogliano spedire un bit. I crittografi hanno modo di accorgersi di questo conflitto, ogni crittografo riesce ad osservare il bit che è stato spedito nella rete, se il bit è diverso da quello che ha spedito lui, allora sa che c'è stato un conflitto. In questo caso il crittografo che ha spedito il bit e si accorgono gli il risultato non è andato a buon fine, spediscono il bit ad un ciclo di clock casuale e riprovano.

Agente interno che vuole spedire un messaggio ad un agente nascondendo il destinatario

Per farlo basta utilizzare il metodo precedente criptando il messaggio con la chiave pubblica del destinatario. In questo modo solo il destinatario potrà leggere il messaggio.

Il risultato è un sistema di comunicazione totalmente non tracciabile, non si sa chi ha spedito, non si sa il destinatario del messaggio e non si sa il contenuto del messaggio. Il protocollo ha però dei difetti, è infatti molto dispendioso in termini di risorse, poiché tutti gli agenti devono essere sempre attivi ed è soggetto ad un attacco chiamato **denial of service**, se qualcuno vuole oscurare il canale può trasmettere sequenze di bit casuali e nessuno saprà mai chi ha oscurato il canale.

6.2 La caverna di Ali Baba

L'idea si basa sul fatto che ci siano due agenti, Peggy e Victor. Peggy (*prover*) vuole dimostrare a Victor (*verifier*) di conoscere una certa informazione, senza però rivelare l'informazione stessa. Si vuole inoltre che la conoscenza di Victor sull'informazione sia **zero**, ovvero Victor non deve imparare nulla sull'informazione che Peggy vuole dimostrare e che non sia nemmeno in grado di dimostrare di conoscere l'informazione a terzi.

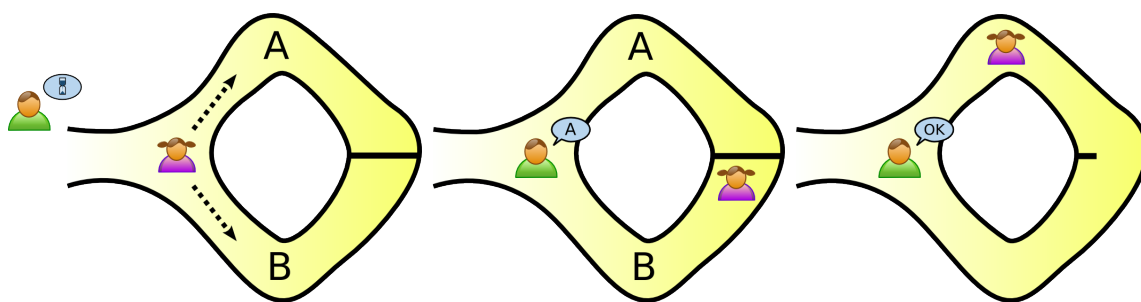


Figura 6.2.1: Peggy è in grado di dimostrare a Victor di conoscere l'informazione senza rivelarla, dimostrando di riuscire ad uscire dall'estremità corretta del labirinto.

Se Victor seguisse Peggy, potrebbe imparare l'informazione, quindi Peggy deve essere in grado di dimostrare di conoscere l'informazione senza che Victor possa impararla. Se invece Victor andasse dalla parte opposta, non imparerebbe nulla, ma sarebbe in grado di dimostrare a terzi che Peggy conosce l'informazione, filmando l'apertura della porta.

Quello che si può fare è far scegliere da Peggy una delle due direzioni attraverso il lancio di una moneta, dopo che Peggy ha raggiunto la direzione decisa attraverso il lancio della moneta, Victor raggiunge lo stesso punto di partenza di Peggy e lancia la moneta per decidere la direzione che Peggy deve prendere, Peggy deve quindi prendere la direzione decisa da Victor. Se Peggy conosce l'informazione, riuscirà sempre a prendere la direzione decisa da Victor, altrimenti con probabilità $\frac{1}{2}$ non sarà in grado di prendere la direzione decisa da Victor. Per abbassare la probabilità di errore, si può ripetere il protocollo più volte, in questo modo se Peggy non conosce l'informazione, la probabilità di errore sarà $\frac{1}{2^k}$, dove k è il numero di volte che si ripete il protocollo.

Victor non sarà in grado di dimostrare a terzi che Peggy conosce l'informazione, poiché dall'ipotetico filmato che Victor potrebbe girare, non si capirebbe se i due hanno deciso la direzione in anticipo o se Peggy conosce l'informazione, essendo che si vedrebbe solo la comunicazione della direzione da parte di Victor e l'uscita di Peggy dalla direzione decisa da Victor.

6.3 Classe P e NP

Un problema decisionale Q appartiene a P se esiste una macchina di Turing deterministica (*o equivalente*) che, in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'input, può risolvere il problema Q .

Un problema decisionale Q appartiene a NP se e solo se esiste una macchina di Turing deterministica (*o equivalente*) che, in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'input, può verificare soluzioni proposte per ogni istanza x di Q .

Teorema Un linguaggio $\mathcal{L} \in \text{NP}$ se e solo se esiste un linguaggio \mathcal{L}' appartenente alla classe P tale che

6.3.1 $\forall x \in \mathcal{L}$, esiste un certificato y tale che $(x, y) \in \mathcal{L}'$.

In generale quindi dimostrare un teorema è più difficile che verificare che un teorema sia vero. Se volessimo dimostrare che verificare non è più difficile che dimostrare potremmo farlo dando una potenza di calcolo limitata a chi verifica e una potenza di calcolo illimitata a chi dimostra.

6.4 Interactive proof system

Un **interactive proof system** è una coppia di algoritmi (*macchine di Turing*) (P, V) , tali che P ha potenza di calcolo illimitata e $V \in \text{PPT}$. P e V interagiscono scambiandosi messaggi e alla fine V deve decidere se accettare o rifiutare l'input x .

Un linguaggio \mathcal{L} ammette un IPS (*Interactive Proof Space*) se esistono due algoritmi, P e V , tali che:

$$\forall x \in \mathcal{L} \quad \mathcal{P}[(P, V) \text{ accetta } x] > \frac{2}{3}$$

$$\forall x \notin \mathcal{L} \quad \forall P' \quad \mathcal{P}[(P', V) \text{ accetta } x] \leq \frac{1}{3}$$

La classe di linguaggi che ammettono un IPS si chiama IP. Quindi, un linguaggio \mathcal{L} appartiene a IP se ammette un IPS.

Inoltre, si ha l'inclusione di classi di complessità:

$$\text{NP} \subseteq \text{IP}$$

Il seguente teorema afferma l'equivalenza tra le classi di complessità IP e PSPACE:

Teorema $\text{IP} = \text{PSPACE}$

6.4.1

Dimostrazione. La dimostrazione di questa equivalenza coinvolge la costruzione di trasformazioni tra le classi IP e PSPACE in entrambe le direzioni. Per dimostrare $\text{IP} \subseteq \text{PSPACE}$, si mostra che ogni problema risolvibile in modo interattivo in tempo polinomiale ha anche una soluzione in spazio polinomiale. La direzione opposta, $\text{PSPACE} \subseteq \text{IP}$, richiede la costruzione di un protocollo interattivo che possa simulare una macchina di Turing con spazio limitato e risolvere il problema in modo interattivo. Pertanto, si conclude che IP e PSPACE sono equivalenti in termini di potenza computazionale. \square

6.4.1 Quadratic non-residuosity

Tale problema è un problema appartenente alla classe di problemi CO-NP, perché verificare che un numero sia effettivamente un quadrato è un problema di NP e il certificato che mostra che un numero è un quadrato è una delle due radici quadrate del numero.

Abbiamo un numero in \mathbb{Z}_n^* che non è un quadrato e vogliamo costruire un interactive proof system per dimostrare che non è un quadrato.

L'idea alla base è che se x non è un quadrato, allora moltiplicando x per un quadrato, il risultato non sarà un quadrato.

L'input del problema è la coppia (n, x) , e l'output accetta se x è un non-residuo quadratico in \mathbb{Z}_n^* . Victor manda a Peggy w_1, w_2, \dots, w_l dove:

$$w_i = \begin{cases} z_i^2 & \text{con } z_i \in_R \mathbb{Z}_n^* \text{ se } b_i = 0 \text{ dove } b_i \in_R \{0, 1\} \\ x \cdot z_i^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Peggy invia a Victor la sequenza c_1, c_2, \dots, c_l dove:

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{se } w_i \text{ è un quadrato} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se x non è un quadrato, allora w_i è un quadrato se e solo se $b_i = 0$ e non è un quadrato se e solo se $b_i = 1$. Victor accetta solo se $c_i = b_i$ per ogni i . La se Peggy non conosce la soluzione, la probabilità che Victor accetti è $\frac{1}{2^l}$, mentre se la conosce la probabilità è 1. L'idea intuitiva è che la capacità di rispondere coincida con la conoscenza del segreto, in questo caso visto che nel mondo reale prover con potenza di calcolo illimitata non esistono, e visto che Peggy riesce a rispondere alle domande di Victor, allora Peggy conosce la fattorizzazione di n .

6.4.2 Graph non-isomorphism

Abbiamo due grafi G_1 e G_2 e vogliamo costruire un interactive proof system per dimostrare che non sono isomorfi, $G_1 \not\cong G_2$. Ricordiamo che due grafi sono isomorfi se esiste una funzione biunivoca tra i vertici dei due grafi che preserva gli archi.

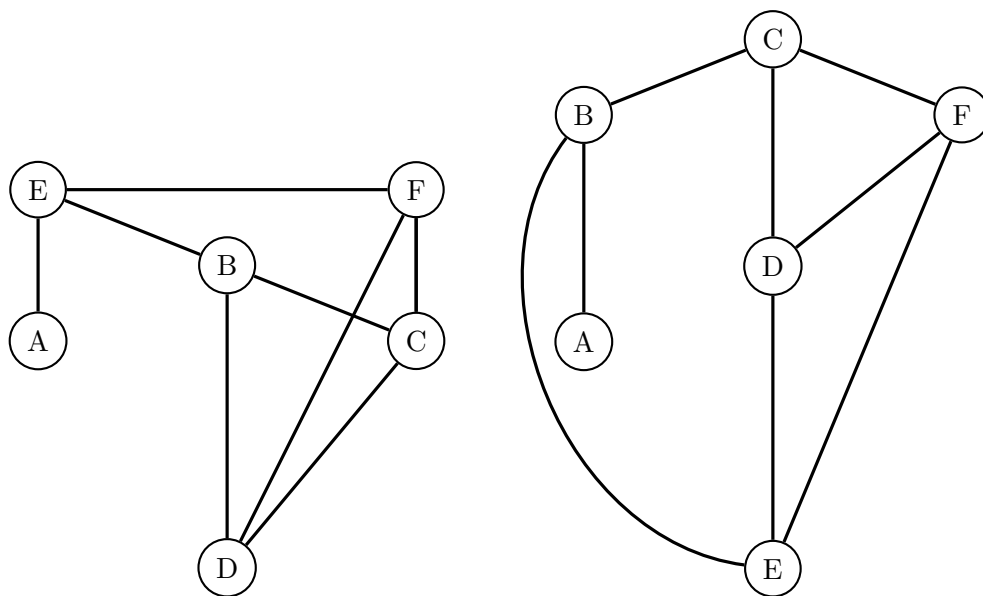


Figura 6.4.1: Esempio di due grafi isomorfi

Isomorfismo di grafi

Due grafi sono isomorfi, quando esiste un mapping biunivoco, che preserva gli archi, tra i vertici dei due grafi.

V sceglie un grafo $G \in_R \{G_1, G_2\}$ e lo permuta casualmente in G' . V invia G' a P e P stabilisce se G' è isomorfo a G_1 o G_2 e invia il risultato a V . V accetta se P indovina correttamente.

Il fatto che P sia in grado di rispondere è dovuto al fatto che abbia potenza di calcolo illimitata e non è dovuto al fatto che vi siano informazioni trapdoor.

Vorremo arrivare al punto che V non impari nulla di più se non il non isomorfismo tra i grafi, poiché potrebbe esistere un V che ha come obiettivo di sapere qualcosa in più, come ad esempio capire se G_2 è isomorfo a un altro grafo G_3 . Per farlo parte dall'istanza di G_1 e G_2 per interagire con P , e la prima richiesta sarà proprio G_3 . Usando quindi P per risolvere problemi di cui non ha l'informazione.

L'idea è che V avrebbe potuto simulare l'interazione con P senza interagire con P stesso. Se P e V interagiscono vengono prodotti una serie di messaggi, che in realtà sono una sequenza casuale, perché P e V sono algoritmi stocastici, dove vengono effettuate scelte casuali, producendo quindi una **misura di probabilità** su sequenze di messaggi chiamata $\text{view}(P, V, x, h)$.

Con h , che rappresenta l'*hint*, si vuole catturare l'idea che qualcuno possa fornire informazioni aggiuntive a V per aiutarlo a rispondere alle domande di P .

Diciamo che P, V è zero-knowledge se per ogni $V' \in \text{PPT}$ esiste un simulatore $M \in \text{PPT}$ tale che $M(P, V', x, h) = \text{view}(P, V, x, h)$. In grado quindi di produrre una sequenza di messaggi distribuite esattamente come quelle di view .

6.4.3 Ciclo hamiltoniano

Un ciclo hamiltoniano è un ciclo che passa per tutti i vertici di un grafo una e una sola volta.

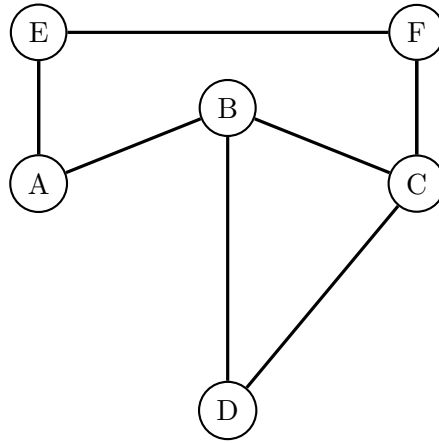


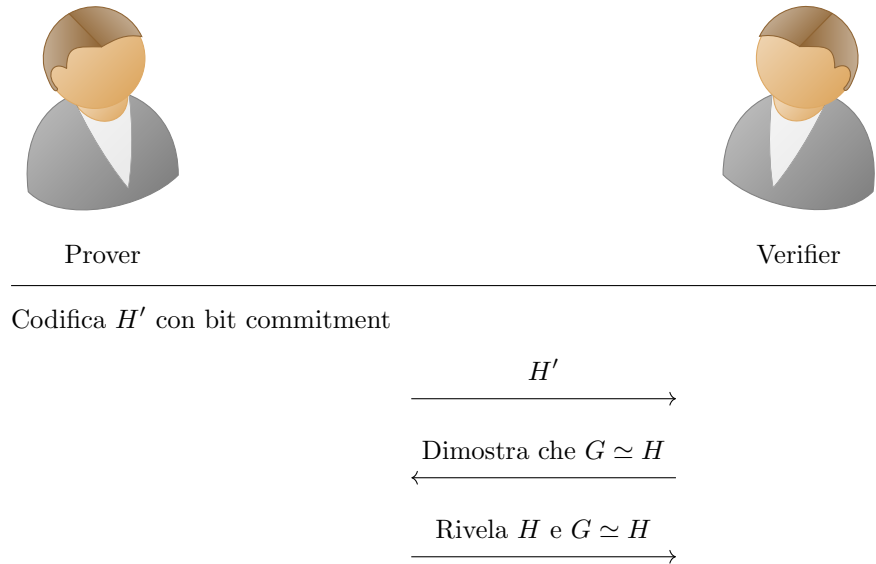
Figura 6.4.2: Esempio di un ciclo hamiltoniano

Per farlo P permuta G per ottenere H , grafo isomorfo a G e codifica tutti i bit della matrice di adiacenza di H con bit commitment, e sia H' il risultato. P invia H' , sapendo che il dato inviato non rivela alcuna informazione circa i bit al suo interno. V lancia una moneta per decidere se chiedere a P l'evidenza che $G \simeq H$ o l'evidenza che H ammette un ciclo hamiltoniano. P obbedisce e nel caso in cui V abbia chiesto l'evidenza che $G \simeq H$ allora rivela H e l'isomorfismo tra G e H (*se uno ammette ciclo hamiltoniano, lo ammette anche l'altro*). Se invece V ha chiesto l'evidenza che H ammette un ciclo hamiltoniano, scopre solo i bit di H che costituiscono un ciclo hamiltoniano.

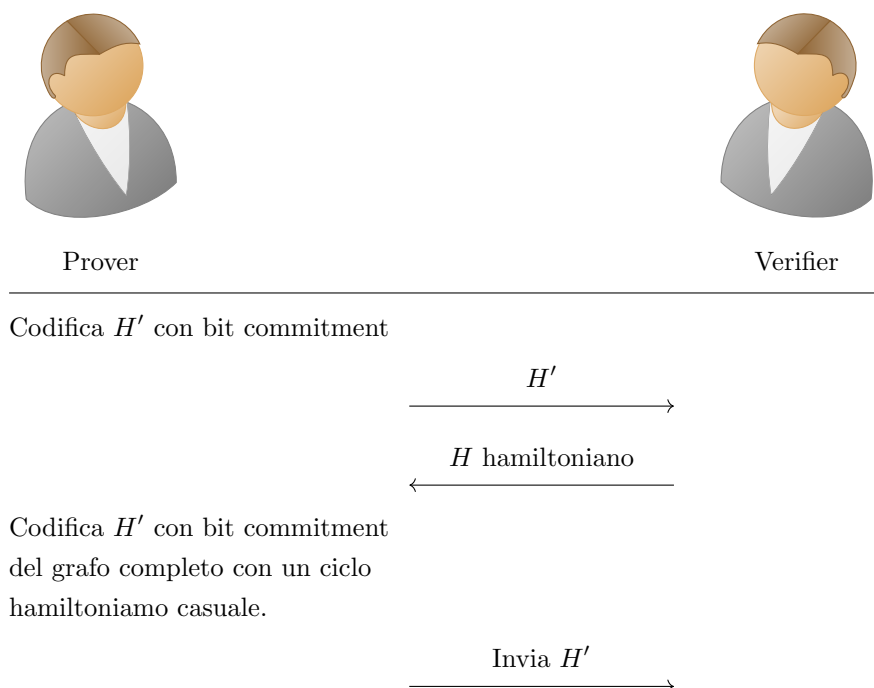
Se G non ammette ciclo hamiltoniano allora il grafo H inviato dal prover, non è possibile che sia sia isomorfo a G e che ammetta un ciclo hamiltoniano. Se è isomorfo a G , visto che G non ammette ciclo hamiltoniano, allora H non può ammetterlo. In quel caso il verifier saprà solamente fornire la risposta ad una delle due domande. Visto che il verifier sceglie le domande casualmente, con probabilità $\frac{1}{2}$ il verifier sceglierà la domanda a cui il prover non sa rispondere. Di conseguenza se G ammette ciclo hamiltoniano, il prover risponderà sempre in qualsiasi caso e quindi risponderà correttamente con probabilità 1.

6.4.4 Costruzione del simulatore M

Vogliamo far sì che V non possa utilizzare l'interazione con V per convincere terzi. Per farlo scegliamo casualmente la domanda di V , se la domanda che fa V è di dimostrare che $G \simeq H$, allora costruiamo H' secondo il protocollo.



Se invece la domanda è di dimostrare che H ammette un ciclo hamiltoniano, allora P invia H' bit commitment del grafo **completo**, scegliendo una permutazione casuale dei nodi come ciclo.



La distribuzione di probabilità delle domande che può effettuare il prover è di $\frac{1}{2}$ per ciascuna domanda. La distribuzione di probabilità delle risposte che può dare il prover è corretta nel primo caso, è infatti dovuta alla permutazione casuale che può assumere il grafo. Nel secondo caso invece si tratta di una permutazione casuale dei nodi del grafo H' . Permutando un grafo con ciclo hamiltoniano, il ciclo diventa una permutazione dei nodi del grafo, quindi qualunque permutazione ha la stessa probabilità di essere un ciclo hamiltoniano, quindi la probabilità che una determinata permutazione sia un ciclo hamiltoniano è sempre la stessa.

Nel primo caso la misura di probabilità è sempre la stessa, nel secondo caso invece la misura di probabilità è diversa.

Un qualunque terzo osservatore che abbia potenza di calcolo polinomiale che osserva l'interazione tra P e V , non può distinguere l'interazione reale che avviene tra P e V da un'interazione simulata tra P e V . Un osservatore che osserva H' fornito dalla seconda interazione (*ovvero quello che ha la permutazione casuale dei nodi del grafo completo*), non riesce a capire che l' H' inviato dal verifier è la matrice di adiacenza di un grafo completo o meno.

Supponendo di avere un algoritmo $\mathcal{D} \in \text{PPT}$ che campiona i messaggi tra **View** e **M** e che riesce a distinguere tra l'interazione reale e quella simulata, allora siamo in grado di distinguere tra il bit commitment di un grafo con ciclo hamiltoniano da il bit commitment di un grafo completo, ma ciò si traduce in un algoritmo che risolve il problema del bit commitment, che è un problema non risolubile in PPT.

Quello che viene effettivamente visto esternamente è la distribuzione di probabilità tra le domande e le risposte, ma non viene effettivamente vista la differenza tra le due versioni di

H' .

Perfect Zero Knowledge

In questo caso le due distribuzioni di probabilità sono identiche, ovvero:

$$\text{view}(P, V, x, h) = M(P, V, x, h)$$

Statistical Zero Knowledge

In questo caso la differenza tra le due distribuzioni di probabilità è trascurabile, ovvero non esiste un algoritmo PPT che riesce a distinguere tra le due distribuzioni di probabilità.

$$\sum_{\omega} \left| \text{view}(P, V, x, h)(\omega) - M(P, V, x, h)(\omega) \right| \leq k^{-\omega(1)}$$

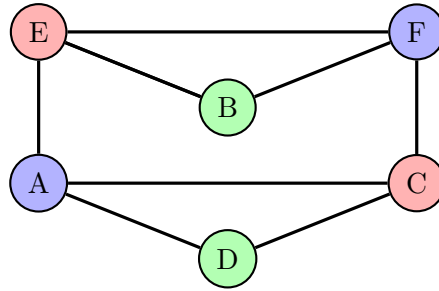
Computational Zero Knowledge

In questo caso le due misure di probabilità sono polinomialmente indistinguibili, ovvero $\forall \mathcal{D} \in \text{PPT}$ sia $\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{V}}$ la probabilità che \mathcal{D} restituisca 1 campionando da view e sia $\mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{M}}$ la probabilità che \mathcal{D} restituisca 1 campionando da M ,

$$\left| \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{V}} - \mathcal{P}_k^{\mathcal{D}, \mathcal{M}} \right| \leq k^{-\omega(1)}$$

Non esiste un algoritmo PPT che riesce a distinguere tra le due distribuzioni di probabilità.

6.4.5 Tre colorabilità di un grafo



Nel contesto della dimostrazione della tre-colorabilità di un grafo senza rivelare la colorazione effettiva dei nodi, si adotta un protocollo computational zero knowledge. L'obiettivo è dimostrare che un grafo può essere colorato con tre colori in modo tale che nodi adiacenti abbiano colori distinti, senza mai rivelare la specifica colorazione adottata.

Il protocollo inizia con un accordo tra il prover e il verifier su un grafo G . Il prover si impegna a dimostrare la tre-colorabilità del grafo senza rivelare direttamente la colorazione.

Per mantenere la confidenzialità, il prover sceglie casualmente una permutazione tra tre colori (*ad esempio, rosso, verde e blu*) senza rivelarla al verifier. Questa permutazione sarà utilizzata per colorare i nodi del grafo.

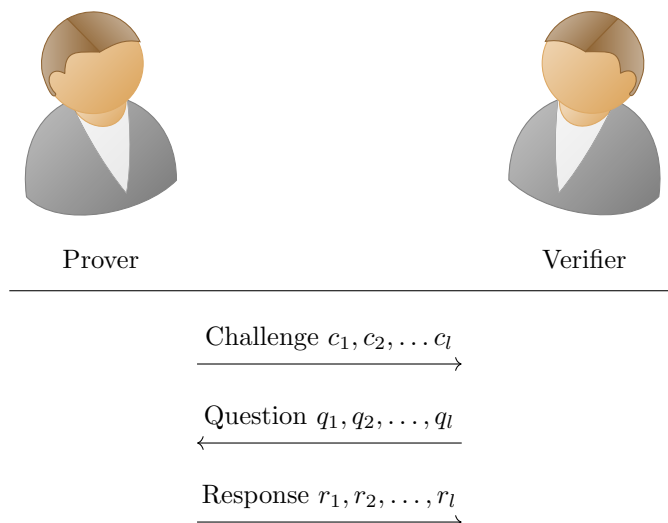
Il verifier, a sua volta, sfida il prover selezionando casualmente due nodi adiacenti, A e B, e richiede la rivelazione dei colori associati secondo la permutazione scelta. Il prover risponde rivelando i colori senza svelare la permutazione effettiva. Il verifier può verificare se i colori sono diversi, confermando così la corretta tre-colorabilità del grafo. Questo processo può essere ripetuto per diverse coppie di nodi adiacenti, ma la casualità nella selezione delle sfide impedisce al verifier di dedurre la permutazione specifica attraverso tentativi ripetuti.

Il prover, per evitare la possibile deduzione della permutazione da parte del verifier attraverso esperimenti multipli, permuta casualmente i colori ad ogni sfida successiva. In questo modo, il verifier non può accumulare informazioni utili per dedurre la tre-colorabilità del grafo.

Alla conclusione del protocollo, se il prover ha superato con successo tutte le sfide, il verifier acquisisce la convinzione della tre-colorabilità del grafo, senza mai venire a conoscenza della specifica permutazione dei colori utilizzata dal prover. Questo dimostra l'efficacia della computational zero knowledge nel preservare la riservatezza della colorazione dei nodi.

6.5 Ripetizione parallela della zero knowledge

Per come abbiamo definito la zero knowledge, il protocollo può essere ripetuto più volte eseguendo arbitrariamente la sequenza di *challenge*, *question*, *response*. Se il protocollo seguisse uno schema parallelo di esecuzione, ovvero se il verifier ponesse più domande in parallelo, il prover potrebbe rispondere a tutte le domande con una singola risposta, senza dover ripetere il protocollo per ogni domanda.



Per uno schema sequenziale, dove gli eventi sono mutuamente indipendenti, è possibile creare misure di probabilità che risultano indistinguibili dall'originale. Tuttavia, la zero knowledge

proof in uno schema parallelo presenta delle sfide. Questo è evidente definendo q_1, q_2, \dots, q_l come una funzione hash unidirezionale $H(c_1, c_2, \dots, c_l)$. Nel contesto dello schema parallelo, la tecnica per simulare la sequenza di messaggi diventa impraticabile. La difficoltà principale risiede nella necessità di invertire la funzione hash, che è di tipo unidirezionale, al fine di costruire le challenge c_1, c_2, \dots, c_l per la simulazione.

Una proof zero knowledge in cui il verifier pone domande al prover sulla base di una funzione hash one way applicata alle challenge, è qualcosa che riesce a convincere terze parti che il prover conosce la soluzione.

6.6 Non interactive zero knowledge

La non interactive zero knowledge è una variante della zero knowledge proof in cui qualcuno conosce il segreto senza rivelare chi sia, non rivelando nessuna informazione circa il segreto stesso. L'aspetto cruciale delle non interactive zero knowledge è la capacità di dimostrare la conoscenza di un segreto in modo autonomo e senza rivelare dettagli sensibili, rendendole particolarmente utili in applicazioni decentralizzate come le blockchain.