

## Trasformata di Fourier

### Trasformata di Funzioni e Proprietà Elementari

**Richiami di teoria.** Data una funzione  $f \in \mathcal{R}^1$  possiamo definire la sua *trasformata di Fourier*:

#### Trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} f(x) \, dx.$$

Le proprietà elementari della trasformata di Fourier sono:

#### Proprietà della trasformata di Fourier

- Linearità:  $\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$ .
- Traslazione:  $\mathcal{F}(f(x - x_0))(\omega) = e^{-2\pi i x_0 \omega} \mathcal{F}(f(x))(\omega)$ .
- Modulazione:  $\mathcal{F}(e^{2\pi i \omega_0 x} f(x))(\omega) = \mathcal{F}(f(x))(\omega - \omega_0)$ .
- Riscaldamento:  $\mathcal{F}(f(ax))(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f(x))\left(\frac{\omega}{a}\right)$ .
- Derivazione:  $\mathcal{F}([f(x)]^{(n)})(\omega) = (2\pi i)^n \omega^n \mathcal{F}(f(x))(\omega)$ , se  $f^{(n)} \in \mathcal{R}^1$ .
- Moltiplicazione per polinomi:  $\mathcal{F}(x^n f(x))(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^n [\mathcal{F}(f(x))(\omega)]^{(n)}$ , se  $x^n f(x) \in \mathcal{R}^1$ .

**Esercizio 1.** Si provi che la trasformata di una funzione pari e reale è pari e reale.

*Soluzione.* Ricordiamo innanzitutto che il prodotto tra una coppia di funzioni pari o una coppia di funzioni dispari è pari, mentre il prodotto tra una coppia di funzioni pari ed una dispari è dispari. Inoltre l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine è sempre nullo. Allora, se  $f(x)$  è pari e reale, abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(-2\pi \omega x) + i \sin(-2\pi \omega x)) f(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi \omega x) f(x) \, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi \omega x) f(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi \omega x) f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che  $\mathcal{F}(f)(\omega)$  è reale, essendo l'integrale di un prodotto di funzioni reali, e che è pari, in quanto

$$\mathcal{F}(f)(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi(-\omega)x) f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi \omega x) f(x) \, dx = \mathcal{F}(f)(\omega).$$

*Da fare a casa.* Si provi che la trasformata di una funzione dispari e reale è dispari ed immaginaria

**Esercizio 2.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = e^{-ax} H(x)$ ,  $a > 0$ .

*Soluzione.* Ricordiamo

$$\mathcal{F}(e^{-x} H(x)) = \frac{1}{1 + 2\pi i \omega}$$

ed osserviamo che, definita  $f(g) = e^{-x}H(x)$ , abbiamo  $g(ax) = e^{-ax}H(ax) = e^{-x}H(x) = f(x)$ . Di conseguenza

$$\mathcal{F}(f(x))(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(g(x))\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{a + 2\pi i \omega}$$

**Esercizio 3.** Si calcoli la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*Soluzione.* Innanzitutto riscriviamo

$$f(x) = 2\mathbb{1}_{[-1,0]}(x) - \mathbb{1}_{[0,2]}(x) = 2\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x + \frac{1}{2}) - \mathbb{1}_{[-1,1]}(x - 1).$$

Ricordiamo a questo punto la trasformata di Fourier della porta  $p_a(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x)$ :

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x)\right)(\omega) = \frac{\sin(a\pi\omega)}{\pi\omega}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= 2\mathcal{F}\left[\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x + \frac{1}{2})\right](\omega) - \mathcal{F}[\mathbb{1}_{[-1,1]}(x - 1)](\omega) \\ &= 2e^{-2\pi i(-\frac{1}{2})\omega} \mathcal{F}\left[\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)\right](\omega) - e^{-2\pi i 1\omega} \mathcal{F}[\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)] \\ &= 2e^{\pi i \omega} \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega} - e^{-2\pi i \omega} \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega} \end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

*Soluzione.* Si ha che  $f$  è sommabile e quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx = \int_a^b e^{-2\pi i \omega x} dx \\ &= -\frac{e^{-2\pi i \omega x}}{2\pi i \omega} \Big|_a^b = \frac{e^{-2\pi i \omega a} - e^{-2\pi i \omega b}}{2\pi i \omega} = e^{-\pi(b+a)i\omega} \frac{\sin(\pi(b-a)\omega)}{\pi\omega} \end{aligned}$$

**Esercizio 5.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \sin(ax)$ .

*Soluzione.* Innanzitutto osserviamo che la funzione  $f(x)$  è sommabile (ovvero  $f \in \mathcal{R}^1$ ), di conseguenza possiamo definire

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \sin(ax) dx.$$

A questo punto, possiamo scrivere la funzione  $\sin(ax)$  come

$$\sin(at) = \frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2i} = \frac{e^{2\pi i \frac{a}{2\pi} x} - e^{2\pi i \frac{-a}{2\pi} x}}{2i},$$

ottenendo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \frac{e^{2\pi i \frac{a}{2\pi} x} - e^{2\pi i \frac{-a}{2\pi} x}}{2i} dx \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} e^{2\pi i \frac{a}{2\pi} x} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} e^{2\pi i \frac{-a}{2\pi} x} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) dx \\
 &= \frac{1}{2i} [\mathcal{F}(e^{2\pi i \frac{a}{2\pi} x} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x))(\omega)] - \frac{1}{2i} [\mathcal{F}(e^{2\pi i \frac{-a}{2\pi} x} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x))(\omega)] \\
 &= \frac{1}{2i} \left[ \mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)) \left( \omega - \frac{a}{2\pi} \right) \right] - \frac{1}{2i} \left[ \mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)) \left( \omega + \frac{a}{2\pi} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2i} \frac{\sin(2\pi a(\omega - \frac{a}{2\pi}))}{\pi(\omega - \frac{a}{2\pi})} - \frac{1}{2i} \frac{\sin(2\pi a(\omega + \frac{a}{2\pi}))}{\pi(\omega + \frac{a}{2\pi})} \\
 &= \frac{\sin(2\pi a\omega - a^2)}{2\pi i\omega - ai} - \frac{\sin(2\pi a\omega + a^2)}{2\pi i\omega + ai}.
 \end{aligned}$$

Dove si è utilizzato la proprietà di rimodulazione

*Da fare a casa.* Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(x) \cos(2\pi x)$  e di  $g(x) = \mathbb{1}_{[-2a,2a]}(x) \sin(ax)$ .

**Esercizio 6.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ .

*Soluzione.* Innanzitutto osserviamo che  $f \in \mathcal{R}^1$ , di conseguenza

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \omega t}}{a^2 + t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} \frac{e^{-2\pi i \omega t}}{1 + (\frac{t}{a})^2} dx.$$

Utilizziamo il cambio di variabili  $x = t/a$ , da cui con  $dx = a dt$  otteniamo

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \frac{e^{-2\pi i \omega a x}}{1 + x^2} dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i (a\omega)x}}{1 + x^2} dx = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)(a\omega).$$

Calcoliamo ora

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{1 + x^2} dx.$$

Come abbiamo già visto, è possibile calcolare questo integrale sfruttando le proprietà degli integrali in campo complesso. Prima di tutto, distinguiamo due casi.

- $\omega \leq 0$

Chiamato  $\gamma_1$  il segmento da  $-\rho$  a  $\rho$ ,  $\gamma_2$  la semicirconferenza superiore con centro in 0 e raggio  $\rho$  e  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$  curva di Jordan, abbiamo che

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1 + z^2} dz = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{1 + x^2} dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1 + z^2} dz \right].$$

L'idea ora è quella di mostrare che l'integrale lungo  $\gamma_2$  si annulla per  $\rho \rightarrow \infty$ . A tal proposito, osserviamo che per  $\omega \leq 0$  abbiamo che lungo  $\gamma_2$  (dove  $\text{Im}[z] = y \geq 0$ ) si ha:

$$|e^{-2\pi i \omega z}| = |e^{-2\pi \omega (xi - y)}| = |e^{2\pi \omega y} e^{-2\pi \omega xi}| = e^{2\pi \omega y} \leq 1 \quad \text{per } \omega \leq 0$$

e quindi per la disuguaglianza di Darboux:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_2} \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1 + z^2} dz \right| &\leq \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{|e^{-2\pi i \omega z}|}{|1 + z^2|} dz \leq \lim_{\rho \rightarrow \infty} L_{\gamma_2} \max_{z \in \gamma_2} \frac{|e^{-2\pi i \omega z}|}{|1 + z^2|} \\
 &\leq \lim_{\rho \rightarrow \infty} L_{\gamma_2} \frac{\max_{z \in \gamma_2} |e^{-2\pi i \omega z}|}{\min_{z \in \gamma_2} |1 + z^2|} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \pi \rho \frac{1}{\rho^2 - 1} = 0
 \end{aligned}$$

In conclusione, per  $\omega \leq 0$ , considerando che la funzione integranda ha un polo semplice  $z = i$  contenuto nella semicirconferenza superiore, per il Teorema dei Residui abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{1+x^2} dx = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1+z^2}, i \right) = \pi e^{2\pi \omega}$$

- $\omega > 0$

Al contrario, per  $\omega > 0$ , possiamo chiamare  $\gamma_3$  la semicirconferenza inferiore con centro in 0 e raggio  $\rho$  e  $\gamma' = \gamma_3(-\gamma_1)$  curva di Jordan, per cui

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{\gamma'} \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1+z^2} dz = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[ - \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{1+x^2} dx + \int_{\gamma_3} \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1+z^2} dz \right].$$

Osserviamo che lungo  $\gamma_3$  (dove  $\operatorname{Im}[z] = y \leq 0$ ), per lo stesso ragionamento fatto sopra si ha:

$$|e^{-2\pi i \omega z}| \leq 1,$$

di conseguenza, per lo stesso ragionamento di prima si prova che l'integrale lungo  $\gamma_3$  va a 0 per  $\rho \rightarrow \infty$ . Osservando che in  $\gamma'$  il segmento lungo l'asse reale è percorso in senso inverso e considerando che la funzione integranda ha un polo semplice  $z = -i$  contenuto nella semicirconferenza inferiore, per il Teorema dei Residui abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{1+x^2} dx = - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{\gamma'} \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1+z^2} dz = -2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1+z^2}, -i \right) = \pi e^{-2\pi \omega}$$

Possiamo riassumere i due casi come:

$$\mathcal{F} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) (\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-2\pi |\omega|}$$

e, dunque,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) (a\omega) = \frac{\pi}{|a|} e^{-2\pi |a\omega|}$$

**Esercizio 7.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ .

*Soluzione.* Sfruttiamo la traslazione riscrivendo

$$x^2 + x + 1 = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Di conseguenza, ricordando la trasformata trovata nell'esercizio precedente si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \mathcal{F} \left( \frac{1}{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} \right) (\omega) = e^{-2\pi i \left( -\frac{1}{2} \right) \omega} \mathcal{F} \left( \frac{1}{x^2 + \frac{3}{4}} \right) (\omega) \\ &= e^{\pi i \omega} \mathcal{F} \left( \frac{1}{x^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right) (\omega) = e^{\pi i \omega} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\pi |\omega|} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} e^{\pi(i\omega - \sqrt{3}|\omega|)}. \end{aligned}$$

**Esercizio 8.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = \frac{x}{(9+4x^2)^2}$ .

*Soluzione.* Possiamo innanzitutto osservare che  $f \in \mathcal{R}^1$ . Inoltre

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{9+4x^2} = -\frac{8x}{(9+4x^2)^2} \implies f(x) = g'(x),$$

dove

$$g(x) = -\frac{1}{8} \frac{1}{9+4x^2} = -\frac{1}{32} \frac{1}{x^2 + \frac{9}{4}}.$$

Di conseguenza, per la regola di derivazione e usando la trasformata calcolata nell'esercizio 6 si ha:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(g')(\omega) = -\frac{1}{32} 2\pi i \omega \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + (\frac{3}{2})^2}\right)(\omega) = -\frac{1}{16} \pi i \omega \frac{2\pi}{3} e^{-2\pi|\frac{3}{2}\omega|} = -\frac{\pi^2 i}{24} \omega e^{-3\pi|\omega|}.$$

**Esercizio 9.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = xe^{-x}H(x)$ .

*Soluzione.* Osserviamo che  $f \in \mathcal{R}^1$ . Ricordiamo

$$\mathcal{F}(e^{-x}H(x)) = \frac{1}{1+2\pi i\omega}$$

Di conseguenza, per la regola di moltiplicazione per polinomi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \mathcal{F}(xe^{-x}H(x))(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-x}H(x)) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{1+2\pi i\omega}\right] \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \frac{-2\pi i}{(1+2\pi i\omega)^2} = \frac{1}{(1+2\pi i\omega)^2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 10.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = e^{-|x|}$

*Soluzione.* Usiamo la definizione:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x} e^{-|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{x(1-2\pi i\omega)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1+2\pi i\omega)} dx \\ &= \frac{e^{x(1-2\pi i\omega)}}{1-2\pi i\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-x(1+2\pi i\omega)}}{1+2\pi i\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2} \end{aligned}$$

**Esercizio 11.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = e^{6\pi i x} e^{-|x|}$

*Soluzione.* Si potrebbe affrontare il calcolo passando ancora una volta per la definizione, ma avendo calcolato la trasformata di Fourier di  $e^{-|x|}$  nell'esercizio precedente, possiamo sfruttare la proprietà di modulazione:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(e^{6\pi i x} e^{-|x|})(\omega) = \mathcal{F}(e^{-|x|})(\omega - 3) = \frac{2}{1+4\pi^2(\omega - 3)^2}$$

**Esercizio 12.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = e^{-x^2}$

*Soluzione.* Innanzitutto osserviamo che  $f \in \mathcal{R}^1$ , di

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} e^{-x^2} dx$$

L'ultimo integrale può essere calcolato con tecniche di analisi complessa. Mostreremo qui un altro metodo; derivando ambo i membri rispetto a  $\omega$ , si trova che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} e^{-2\pi i \omega x} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi i x e^{-2\pi i \omega x} e^{-x^2} dx \\ &= \pi i \int_{-\infty}^{\infty} -2x e^{-x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx = \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [e^{-x^2}] e^{-2\pi i \omega x} dx \end{aligned}$$

La derivazione sotto il segno di integrale fatta nei primi passaggi in questo caso è lecita (la verifica è lasciata allo studente interessato). A questo punto, integriamo per parti l'ultimo integrale:

$$\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [e^{-x^2}] e^{-2\pi i \omega x} dx = \pi i \underbrace{\left[ e^{-x^2} e^{-2\pi i \omega x} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - 2\pi^2 \omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} e^{-x^2} dx = -2\pi^2 \omega \hat{f}(\omega)$$

Ma allora abbiamo appena ottenuto che:

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -2\pi^2 \omega \hat{f}(\omega)$$

Questa è una equazione differenziale ordinaria del primo ordine che può essere facilmente risolta per separazione delle variabili. Infatti si ha:

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -2\pi^2 \omega \hat{f}(\omega) \implies \int \frac{d\hat{f}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = -2\pi^2 \int \omega d\omega \implies \log(\hat{f}(\omega)) = -2\pi^2 \frac{\omega^2}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Semplificando ed esplicitando  $\hat{f}(\omega)$  si trova che la soluzione è data da

$$\hat{f}(\omega) = k e^{-\pi^2 \omega^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

La costante  $k$  può essere trovata imponendo la condizione iniziale:

$$\hat{f}(0) = k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Da cui, sostituendo:

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \omega^2}$$

**Esercizio 13.** Si calcoli la trasformata di Fourier di  $f(x) = x e^{-x^2}$

*Soluzione.* Notiamo che, posto  $g(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ , si ha  $g'(x) = x e^{-x^2} = f(x)$ . Possiamo ora usare la regola della derivata e la trasformata usata nell'esercizio precedente:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(g')(\omega) = 2\pi i \omega \mathcal{F}(g)(\omega) = -\pi i \omega \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\omega) = -\pi^{\frac{3}{2}} i \omega e^{-\pi^2 \omega^2}$$

Alternativamente, si poteva anche usare la regola della moltiplicazione per polinomi.