

## 5. Teoria delle distribuzioni

Vincenzo Recupero

*Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino*

`vincenzo.recupero@polito.it`

Versione: 10 giugno 2013

Revisione: 23 maggio 2016

**Metodi Matematici per l'Ingegneria**

05BQX (Suddivisione alfabetica A-L)

**Dispense di Analisi**

## 1 Preliminari

### 1.1 Nozioni topologiche in $\mathbb{R}$


Le nozioni topologiche definite in  $\mathbb{C}$  si possono definire in modo analogo in  $\mathbb{R}$  se si sostituiscono le palle aperte  $B_r(z_0)$  con gli intervalli aperti  $(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ ,  $r > 0$ . Anche per questi particolari intervalli possiamo usare il termine *intorno di  $x$  di raggio  $r$* . Ad esempio, se  $S \subseteq \mathbb{R}$  allora:

- (i) si dice che  $S$  è *aperto* se ogni punto  $x_0 \in S$  ha un intorno  $(x_0 - r, x_0 + r)$ ,  $r > 0$ , che è contenuto in  $S$
- (ii) si dice che  $x_0 \in \mathbb{R}$  è un *punto di frontiera di  $S$*  se per ogni  $r > 0$  e per ogni intorno  $(x_0 - r, x_0 + r)$  di  $x_0$  esistono  $x \in S$  ed  $y \in \mathbb{R} \setminus S$  tali che  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  ed  $y \in (x_0 - r, x_0 + r)$ . L'insieme dei punti di frontiera di  $S$  si denota con  $\partial S$  ed è chiamato *frontiera (o bordo) di  $S$*
- (iii) l'insieme  $\overline{S} := S \cup \partial S$  è chiamato *chiusura di  $S$*
- (iv) si dice che  $S$  è *chiuso* se  $\overline{S} = S$
- (v) l'insieme  $\overset{\circ}{S} := S \setminus \partial S$  si dice *interno di  $S$*

Si noti che possiamo utilizzare la notazione  $B_r(x_0) := \{x : |x - x_0| < r\}$  in  $\mathbb{R}$ , in  $\mathbb{C}$  e in  $\mathbb{R}^n$  e possiamo dare una sola definizione per le precedenti nozioni topologiche: in ogni caso particolare dobbiamo interpretare il simbolo  $|x - x_0|$  come valore assoluto in  $\mathbb{R}$ , modulo in  $\mathbb{C}$ , o norma (o modulo) in  $\mathbb{R}^n$ .

È possibile provare la seguente

**Proposizione 1.1.** Dato  $S$ , la sua chiusura  $\overline{S}$  è il più piccolo insieme chiuso contenente  $S$ .

*Dimostrazione.*  .

□

La seguente terminologia è usata di frequente

**Definizione 1.1.** Si dice che un insieme  $S$  è *compatto* se è chiuso e limitato.

**Esempio 1.1.** Per i seguenti sottoinsiemi  $S$  di  $\mathbb{R}$  si ha:

- (a)  $S = ]0, 1[$ ,  $\partial S = \{0, 1\}$ ,  $\overline{S} = [0, 1]$ ,  $\overset{\circ}{S} = S$ ,  $S$  è aperto,  $S$  non è chiuso.
- (b)  $S = [2, +\infty[$ ,  $\partial S = \{2\}$ ,  $\overline{S} = S$ ,  $\overset{\circ}{S} = ]2, +\infty[$ ,  $S$  non è aperto,  $S$  è chiuso.
- (c)  $S = \{1/n : n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ ,  $\partial S = S \cup \{0\}$ ,  $\overline{S} = S \cup \{0\}$ ,  $\overset{\circ}{S} = \emptyset$ ,  $S$  non è aperto,  $S$  non è chiuso.
- (d)  $S = \mathbb{N}$ ,  $\partial S = \mathbb{N}$ ,  $\overline{S} = \mathbb{N}$ ,  $\overset{\circ}{S} = \emptyset$ ,  $S$  non è aperto,  $S$  è chiuso.
- (e)  $S = \mathbb{R}$ ,  $\partial S = \emptyset$ ,  $\overline{S} = \mathbb{R}$ ,  $\overset{\circ}{S} = \mathbb{R}$ ,  $S$  è aperto,  $S$  è chiuso.
- (f)  $S = \emptyset$ ,  $\partial S = \emptyset$ ,  $\overline{S} = \emptyset$ ,  $\overset{\circ}{S} = \emptyset$ ,  $S$  è aperto,  $S$  è chiuso.

♡

## 1.2 Supporto di una funzione

**Definizione 1.2.** Il *supporto* di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è l'insieme

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}},$$

cioè è la chiusura dell'insieme dove  $f$  è diversa da zero.

**Esempio 1.2.**

- (a) Se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1 \end{cases}$$

allora  $\text{supp}(f) = \overline{]-1, 1[} = [-1, 1]$ .

- (b) Se  $f(x) = x^2$  allora  $\text{supp}(f) = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$ .
- (c) Se  $f(x) = \sin x$  allora  $\text{supp}(f) = \overline{\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}} = \mathbb{R}$ .
- (d) Se  $f(x) = 0$  allora  $\text{supp}(f) = \overline{\emptyset} = \emptyset$ .

♡

**Osservazione 1.1.** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione si ha che  $\text{supp}(f)$  è compatto, cioè chiuso e limitato in  $\mathbb{R}$ , se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \quad : \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b].$$

◇

**Osservazione 1.2.** Supponiamo che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è derivabile ad ha supporto compatto, cioè  $\text{supp}(f)$  è chiuso e limitato. Allora anche la derivata  $f'$  ha supporto compatto, infatti esistono  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , tali che

$$f(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b],$$

quindi  $f$  è identicamente uguale a zero fuori da  $[a, b]$ , per cui

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b].$$

◇

### 1.3 Funzioni localmente sommabili

**Definizione 1.3.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo in  $\mathbb{R}$  di estremi  $a$  e  $b$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione. Si dice che  $f$  è *sommabile su  $I$*  se gli integrali

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b |f(x)| dx$$

(intesi in senso improprio, se necessario) sono finiti (o convergenti).

**Definizione 1.4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione. Diciamo che  $f$  è *localmente sommabile (in  $\mathbb{R}$ )* se

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{sono finiti per ogni } a, b \in \mathbb{R}, \quad -\infty < a < b < +\infty.$$

(intesi in senso improprio, se necessario).

#### Esempio 1.3.

- Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) := x^2$ , allora per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  si ha che  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b x^2 dx$  è finito perché  $f$  è continua su  $[a, b]$ , quindi integrabile.
- Più generalmente ogni funzione continua  $f \in C(\mathbb{R})$  è localmente sommabile.
- Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) := 1/\sqrt{|x|}$  per  $x \neq 0$  ( $f(0)$  definito arbitrariamente). Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Se  $0 \notin [a, b]$  allora  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b 1/\sqrt{|x|} dx$  è finito perché  $f$  è continua su  $[a, b]$ . Se  $0 \in [a, b]$  allora l'integrale improprio  $\int_a^b 1/\sqrt{|x|} dx$  è convergente. Quindi  $f$  è localmente sommabile.
- Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) := 1/x$  per  $x \neq 0$  ( $f(0)$  definito arbitrariamente). L'integrale  $\int_0^1 1/x dx$  non è convergente, perciò  $f$  non è localmente sommabile.

♡

A volte useremo il simbolo  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  per l'integrale di una funzione definita su tutta la retta reale, tuttavia la notazione  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  è consigliata quando si effettua un cambio di variabile.

Nell'esempio seguente definiamo alcune semplici ma importanti funzioni che useremo nel seguito.

**Esempio 1.4.**

- (a) Se  $S$  è un sottoinsieme dato, la *funzione indicatrice di  $S$*  è la funzione  $\mathbb{1}_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\mathbb{1}_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Alcuni autori usano il simbolo  $\chi_S$ .

- (b) La *funzione segno*  $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- (c) La *funzione di Heaviside* è la funzione  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$H(x) := \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- (c) Se  $a > 0$ , la *funzione porta di ampiezza  $a$*  (o *funzione rettangolare*) è la funzione  $p_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$p_a(x) := \mathbb{1}_{[-a/2, a/2]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq a/2 \\ 0 & \text{se } |x| > a/2 \end{cases}$$

♡

## 1.4 Convergenza uniforme

**Definizione 1.5.** Siano dati  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . La *norma dell'estremo superiore di  $f$  su  $D$*  (o *norma  $\infty$  di  $f$  su  $D$* ) è definita da

$$\|f\|_{\infty, D} := \sup_{x \in D} |f(x)| \in [0, \infty].$$

Useremo anche il simbolo  $\|f\|_{\infty}$  se l'insieme di definizione  $D$  è fissato e non c'è rischio di ambiguità.

Non è difficile verificare che

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty} = 0 & \iff f = 0, \\ \|\lambda f\|_{\infty} &= |\lambda| \|f\|_{\infty}, \\ \|f + g\|_{\infty} &\leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}. \end{aligned}$$

**Definizione 1.6.** Siano dati  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{C}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Si dice che  $f_n$  converge uniformemente ad  $f$  su  $I$  (o  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $I$ ) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad [ n > n_\varepsilon, \quad x \in D \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ]$$

cioè se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad \left[ n > n_\varepsilon \quad \implies \quad \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right]$$

cioè se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad [ n > n_\varepsilon \quad \implies \quad \|f_n - f\|_{\infty, D} < \varepsilon ]$$

cioè se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty, D} = 0.$$

## 2 Funzioni test

**Definizione 2.1.** Si dice che  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è una *funzione test* se

- (i)  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$
- (ii)  $\text{supp}(\varphi)$  è compatto in  $\mathbb{R}$ , cioè  $\text{supp}(\varphi)$  è chiuso e limitato in  $\mathbb{R}$ .

L'insieme delle funzioni test si denota con  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  (o semplicemente con  $\mathcal{D}$ )

**Osservazione 2.1.** Ricordiamo che il fatto che  $\text{supp}(\varphi)$  è chiuso e limitato in  $\mathbb{R}$  significa che

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \quad : \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b].$$

◇

**Proposizione 2.1.** L'insieme  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  è uno spazio vettoriale, cioè se  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  e se  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , allora  $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Facile. □

**Definizione 2.2.** Supponiamo che  $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Si dice che  $\varphi_n$  converge a  $\varphi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  (o  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  per  $n \rightarrow \infty$ ) se

- (i)  $\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad : \quad \text{supp}(\varphi_n) \subseteq [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- (ii)  $\varphi_n^{(p)} \rightarrow \varphi^{(p)}$  uniformemente su  $\mathbb{R}$  per ogni  $p \in \mathbb{N}.$

**Osservazione 2.2.** Nella Definizione 2.2, la condizione (i) significa che tutti i supporti delle funzioni  $\varphi_n$  sono contenuti in un solo intervallo chiuso e limitato:

esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $\varphi_n(x) = 0$  per ogni  $x \notin [a, b]$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

La seconda condizione (ii) significa invece che la successione  $\varphi_n$  e le successioni  $\varphi_n^{(p)}$  delle derivate di ogni ordine  $p \in \mathbb{N}$  convergono uniformemente su  $\mathbb{R}$  (in realtà su  $[a, b]$ ) a  $\varphi$  ed a  $\varphi^{(p)}$ .  $\diamond$

Prima di proseguire con la teoria dovremmo verificare che l'insieme delle funzioni test  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  contiene almeno una funzione diversa da zero. Questo è il contenuto dell'esempio seguente.

**Esempio 2.1.** Sia  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da


$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Studiamo la funzione  $\varphi$ . Chiaramente  $\text{supp}(\varphi) = [-1, 1]$ . Inoltre  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \varphi(x) = 0$ , quindi  $\varphi$  è continua. Si ha

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{2x}{(x^2-1)^2} & \forall x \in ]-1, 1[ \\ 0 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \varphi'(x) = 0.$$

per cui  $f$  è derivabile in  $x = \pm 1$  e  $\varphi'(1) = \varphi'(-1) = 0$ . Per induzione si può provare che  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ , per cui  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ :  infatti

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= e^{\frac{1}{x^2-1}} \left( \frac{2x}{(x^2-1)^2} \right)^2 - e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{2(x^2-1)[(x^2-1) - 4x^2]}{(x^2-1)^4} \\ &= e^{\frac{1}{x^2-1}} \left[ \frac{4x^2 - 2(x^2-1)[(x^2-1) - 4x^2]}{(x^2-1)^4} \right] \quad \forall x \in ]-1, 1[ , \end{aligned}$$

e se  $p > 1$

$$\varphi^{(p)}(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{P(x)}{(x^2-1)^{2p}} \quad \forall x \in ]-1, 1[ \quad (2.2)$$

dove  $P(x)$  è un polinomio, infatti se assumiamo (2.2) come ipotesi induttiva allora

$$\varphi^{(p+1)}(x) = -e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{2x}{(x^2-1)^2} \frac{P(x)}{(x^2-1)^{2p}} + e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{P'(x)(x^2-1)^{2p} - P(x)4p(x^2-1)^{2p-1}2x}{(x^2-1)^{4p}}.$$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \varphi^{(p)}(x) = 0.$$

$\heartsuit$

**Esempio 2.2.** Sia  $\varphi \in \mathcal{D}$  la funzione “a campana” dell'Esempio 2.1. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , sia  $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\rho_n(x) := \frac{\varphi(nx)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(nt) dt}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Allora  $\text{supp}(\rho_n) = [-1/n, 1/n]$  e  $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ , quindi  $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Inoltre osserviamo che  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) dx = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(nx)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(nt) dt} dx = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(nt) dt} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(nx) dx = 1.$$

$\heartsuit$

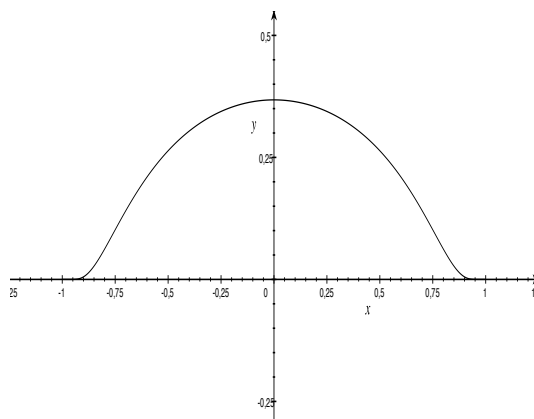


Figura 1: La funzione “a campana” dell’Esempio 2.1

### 3 Distribuzioni (funzioni generalizzate)

Nel seguito di questo capitolo avremo a che fare frequentemente con funzioni il cui dominio è  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  e il cui codominio è  $\mathbb{C}$  (o  $\mathbb{R}$ ). Si tratta quindi di funzioni  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  che associano un numero  $T(\varphi) \in \mathbb{C}$  ad ogni funzione  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Per enfatizzare il fatto che il dominio è un insieme che consiste a sua volta di funzioni,  $T$  sarà chiamato *funzionale*. Inoltre se  $T$  è lineare, utilizzeremo la notazione

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

che è molto comoda ed ampiamente usata. Riassumendo per  $T$  lineare:

$$\begin{array}{ccc} T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \langle T, \varphi \rangle \end{array}$$

Si osservi che la variabile indipendente  $x$  della funzione test  $\varphi(x)$  non appare nella notazione  $\langle T, \varphi \rangle$ , infatti non è necessaria. Tuttavia in alcune occasioni la notazione leggermente impropria

$$\langle T, \varphi(x) \rangle := \langle T, \varphi \rangle$$

sarà molto utile. Potrebbe anche essere conveniente usare la notazione (del tutto scorretta!)

$$\langle T(x), \varphi(x) \rangle$$

anche se  $x$  non è la variabile indipendente di  $T$ . In altre parole la notazione  $T(x)$  non ha senso, ma vedremo che può essere utile scrivere  $\langle T(x), \varphi(x) \rangle$  purché ricordiamo che il suo significato è semplicemente  $\langle T, \varphi \rangle$ .

**Definizione 3.1.** Un funzionale  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$  si dice *distribuzione* (o *funzione generalizzata*) se

(i)  $T$  è lineare, cioè se per ogni  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  ed ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle T, \varphi \rangle + \mu\langle T, \psi \rangle$$

(ii)  $T$  è *continuo* nel senso seguente: se  $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,


$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ in } \mathbb{C}$$

L'insieme delle distribuzioni si denota con  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  (o semplicemente con  $\mathcal{D}'$ ).

La condizione (ii) della definizione precedente ha una natura essenzialmente tecnica che permette lo sviluppo coerente della teoria.

**Proposizione 3.1.** L'insieme  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  è uno spazio vettoriale, cioè se  $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , allora  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , dove si pone


$$\begin{aligned} \langle \lambda T, \varphi \rangle &:= \lambda \langle T, \varphi \rangle, & T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{C}, \\ \langle T + S, \varphi \rangle &:= \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle & T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

*Dimostrazione.*  Facile. □

Il lemma seguente mostra una proprietà tipica delle funzioni lineari: è sufficiente verificarne la continuità solo in  $\varphi = 0$ .

**Lemma 3.1.** Se  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$  è lineare, allora per verificare la continuità di  $T$  è sufficiente provare che

$$\varphi_n \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow 0.$$

*Dimostrazione.*  . Assume that  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n^{(p)} - \varphi^{(p)}\|_\infty = 0$  for every  $p \in \mathbb{N}$  and there exist  $a, b \in \mathbb{R}$  such that  $\varphi_n(x) = 0$  for every  $x \notin [a, b]$  and for every  $n \in \mathbb{N}$ . In particular  $\varphi(x) = 0$  whenever  $x \notin [a, b]$ . Therefore  $\psi_n := \varphi_n - \varphi \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  hence  $|\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| \rightarrow 0$ , that is  $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ . □

**Definizione 3.2** (Distribuzioni regolari). Se  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  è localmente sommabile, definiamo la distribuzione  $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ponendo

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (3.1)$$

La distribuzione  $T_f$  è chiamata *distribuzione regolare associata ad  $f$* .



Dobbiamo verificare che  $T_f$  è effettivamente una distribuzione. Cominciamo verificando che l'integrale in (3.1) è definito. Se  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  allora il suo supporto è contenuto in un intervallo limitato  $[a, b]$ , quindi  $\varphi(x) = 0$  se  $x \notin [a, b]$ . Inoltre per il Teorema di Weierstrass

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| < \infty,$$

quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| \sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| dx = \int_a^b |f(x)| \|\varphi\|_\infty dx \\ &= \|\varphi\|_\infty \int_a^b |f(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

essendo  $f$  localmente sommabile. Abbiamo perciò provato che l'integrale è finito. Ora verifichiamo che  $T$  è una distribuzione.

a)  $T_f$  è lineare:

Per ogni  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  abbiamo, per la linearità dell'integrale,

$$\begin{aligned} \langle T_f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x) (\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)) dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx + \mu \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(x) dx = \lambda \langle T_f, \varphi \rangle + \mu \langle T_f, \psi \rangle \end{aligned}$$

b)  $T_f$  è continuo:


Usiamo il Lemma 3.1: se  $\varphi_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , allora esistono  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , tali che  $\varphi_n(x) = 0$  per ogni  $x \notin [a, b]$ . Inoltre  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  uniformemente su  $\mathbb{R}$ , quindi

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi_n \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| |\varphi_n(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| \|\varphi_n\|_\infty dx = \|\varphi_n\|_\infty \int_a^b |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

perché  $\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$  e  $\|\varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$  per la convergenza uniforme. Allora abbiamo mostrato che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_f, \varphi_n \rangle = 0$ , per cui dal Lemma 3.1 deduciamo che  $T_f$  è continuo.

**Definizione 3.3.** Si dice che  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  è una *distribuzione regolare* se esiste una funzione localmente sommabile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  per cui  $T = T_f$ . In tal caso la distribuzione  $T_f$  è a volte denotata semplicemente con  $f$ , il simbolo della stessa funzione.

**Proposizione 3.2.** Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sono continue  $T_f = T_g$ , allora  $f = g$ .

*Dimostrazione.*  Supponiamo per assurdo che esista  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x_0) \neq g(x_0)$ . Allora per la continuità di  $f$  e di  $g$  esiste  $\delta > 0$  per cui  $f(x) \neq g(x)$  per ogni  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Sia allora  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  una funzione test tale che  $\varphi(x) > 0$  per  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  (è sufficiente riscalarlo e traslare il grafico della solita funzione a campana). Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\varphi(x) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} (f(x) - g(x))\varphi(x) dx \neq 0$$

cioè  $T_f \neq T_g$ . □

La proposizione precedente ci permette di identificare lo spazio delle funzioni continue  $C(\mathbb{R})$  con un sottoinsieme dello spazio delle distribuzioni, perciò possiamo scrivere

$$C(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Più in generale, se  $f$  e  $g$  non sono continue e  $T_f = T_g$ , può accadere che  $f \neq g$ . Un semplice esempio è dato da  $f(x) := 0$  e  $g(x) := \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Tuttavia è possibile dimostrare che se  $T_f = T_g$ , allora l'insieme dei punti  $x$  per cui  $f(x) \neq g(x)$  è “trascurabile” rispetto all'operazione di integrazione. Questa nozione potrebbe essere precisata e resa rigorosa, ma ciò che è importante per noi è sapere che se  $T_f = T_g$ , allora possiamo considerare le due funzioni localmente sommabili  $f$  e  $g$  essenzialmente come la stessa funzione. Da questo punto di vista l'insieme delle funzioni localmente sommabili può essere considerato (identificato con) un sottoinsieme di  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Osservazione 3.1.** Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano due funzioni localmente sommabili che sono uguali ovunque tranne che in un numero finito di punti. Allora  $T_f = T_g$ , infatti l'integrale di una funzione non cambia se modifichiamo il valore di tale funzione in un numero finito di punti, quindi

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x) dx = \langle T_g, \varphi \rangle.$$

Allora se  $h : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  è localmente sommabile, essa genera una distribuzione regolare  $T_h$  tale che  $\langle T_h, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x) dx$ , infatti  $x_1, \dots, x_m$  non alterano il valore di questo integrale. ◇

Nel prossimo importante esempio definiamo una distribuzione che non è: la *delta di Dirac*.

**Esempio 3.1.** Se  $x_0 \in \mathbb{R}$  la *delta di Dirac di centro  $x_0$*  è la distribuzione  $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle := \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (3.2)$$

Se  $x_0 = 0$  la notazione  $\delta := \delta_0$  è anche usata. Verifichiamo che  $\delta_{x_0}$  è una distribuzione:

a)  $\delta_{x_0}$  è lineare:

Se  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  allora

$$\begin{aligned} \langle \delta_{x_0}, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle &= \lambda\varphi(x_0) + \mu\psi(x_0) \\ &= \lambda\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \mu\langle \delta_{x_0}, \psi \rangle. \end{aligned}$$

b)  $\delta_{x_0}$  è continuo:

Supponiamo che  $\varphi_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Allora in particolare  $\varphi_n(x_0) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ , quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta_{x_0}, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_0) = 0$$

così  $\delta_{x_0}$  è continuo.

È possibile dimostrare che  $\delta_{x_0}$  non è una distribuzione regolare. ♡

**Esempio 3.2.**

(a) Sia  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $\langle T, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x \varphi(x) dx$ . Allora  $T$  è una distribuzione, infatti  $T$  è la distribuzione regolare  $T = T_f$  con  $f(x) := \arctan x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , e  $f$  è localmente sommabile (perché è continua).

(b) Sia  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $\langle T, \varphi \rangle := \int_0^1 x^2 \varphi(x) dx$ . Allora  $T$  è una distribuzione perché

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 x^2 \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) x^2 \varphi(x) dx.$$

Quindi  $T = T_f$  con  $f(x) := \mathbf{1}_{[0,1]}(x) x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , che è una funzione localmente sommabile.

(c) Sia  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $\langle T, \varphi \rangle := \int_{-2}^{+2} \varphi'(x) dx$ . Allora grazie al teorema fondamentale del calcolo otteniamo che

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-2}^2 \varphi'(x) dx = \varphi(2) - \varphi(-2) = \langle \delta_2, \varphi \rangle - \langle \delta_{-2}, \varphi \rangle$$

quindi  $T = \delta_2 - \delta_{-2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

(d) Sia  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $\langle T, \varphi \rangle := \int_0^2 x \varphi'(x) dx$ . Allora integrando per parti otteniamo

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^2 x \varphi'(x) dx = \varphi(2) - \int_0^2 \varphi(x) dx = -\langle \delta_2, \varphi \rangle - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,2]}(x) \varphi(x) dx$$

per cui  $T = \delta_2 - T_{\mathbf{1}_{[0,2]}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . ♡

**Esempio 3.3.**

(a) Definiamo il funzionale  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$\langle T, \varphi \rangle := \|\varphi\|_2 = \|\varphi\|_{2,\mathbb{R}} := \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Allora  $T$  non è una distribuzione perché  $T$  non è lineare, infatti consideriamo  $\varphi \in \mathcal{D}$  tale che  $\varphi \neq 0$ . Allora essendo  $\varphi$  continua abbiamo che

$$\langle T, \varphi \rangle = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} > 0.$$

D'altra parte

$$\langle T, -\varphi \rangle = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |-\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|\varphi\|_2 = \langle T, \varphi \rangle,$$

ma ciò non è possibile, perché se  $\varphi \neq 0$  e se  $T$  fosse lineare dovremmo trovare  $\langle T, -\varphi \rangle = -\langle T, \varphi \rangle$ .

(b) Definiamo il funzionale  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$\langle T, \varphi \rangle := 2014, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Allora  $T$  non è una distribuzione perché  $T$  non è lineare, infatti se  $T$  fosse lineare si avrebbe  $\langle T, 0 \rangle = 0 \neq 2014$ . ♡

## 4 Operazioni sulle distribuzioni

### 4.1 Derivazione

Consideriamo una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^1$ . Allora  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è localmente sommabile. Vediamo come opera la distribuzione regolare  $T_{f'}$ . Per una funzione test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , se  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$ , si ha

$$\begin{aligned} \langle T_{f'}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{\text{per parti}}{=} [f(x) \varphi(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx \\ &\stackrel{\varphi(a)=\varphi(b)=0}{=} - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx \\ &\stackrel{\text{supp}(\varphi') \subseteq [a,b]}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle, \end{aligned}$$

quindi abbiamo verificato che

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \implies \langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (4.1)$$

(in realtà la formula precedente è vera anche se  $f$  è continua e  $f'$  è solo localmente sommabile). Motivati da tale formula introduciamo la definizione di derivata di una distribuzione qualunque.

**Definizione 4.1** (Derivata). Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , diciamo che la *derivata (distribuzionale) di  $T$*  è la distribuzione  $T' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (4.2)$$

Osserviamo che dobbiamo ancora verificare che  $T'$  è effettivamente una distribuzione. Lo facciamo nella seguente

**Proposizione 4.1.** Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , allora il funzionale  $T' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  definito in (4.2) è una distribuzione.

*Dimostrazione.* Se  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  allora

$$\langle T', \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = -\langle T, \lambda\varphi' + \mu\psi' \rangle = -\lambda\langle T, \varphi' \rangle - \mu\langle T, \psi' \rangle = \lambda\langle T', \varphi \rangle + \mu\langle T', \psi \rangle$$

per cui  $T'$  è lineare. Quindi, per verificarne la continuità possiamo considerare  $\varphi_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . In particolare  $\varphi'_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T', \varphi_n \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi'_n \rangle = 0,$$

e la continuità segue dal Lemma 3.1.  $\square$

Dalla formula (4.1) e dalla definizione di derivata distribuzionale deduciamo che

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \implies (T_f)' = T_{f'}.$$

È anche facile controllare che se  $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , allora

$$(\lambda T + \mu S)' = \lambda T' + \mu S'.$$

**Esempio 4.1.**

(a) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Allora se  $\varphi \in \mathcal{D}$ , integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned} \langle T_f', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx \\ &= -[x \varphi(x)]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \varphi(x) dx = \langle T_H, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove  $H$  è la funzione di Heaviside. Così  $T_f' = T_H$ . Si osservi che la funzione  $f$  non è derivabile in  $x = 0$  (nel senso dell'Analisi 1).

(b) Calcoliamo la derivata distribuzionale della funzione di Heaviside  $H$ , cioè la derivata di  $T_H$ . Se  $\varphi \in \mathcal{D}$  otteniamo

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \quad (4.4)$$

Quindi

$$\boxed{T_H' = \delta_0}$$

Potremmo considerare la funzione  $f$  del precedente esempio (a) come la legge del moto di una particella in quiete che subisce un impulso da una forza all'istante  $x = 0$  e che dopo comincia a muoversi con velocità 1. La sua derivata prima (distribuzionale) è  $H$ , la velocità: ciò non è certo sorprendente. Più interessante è considerare la derivata seconda. Si ottiene  $(T_f)'' = (T_H)' = \delta_0$ , forza impulsiva di intensità 1.

♡

**Esempio 4.2.** Calcoliamo la derivata di  $\delta_{x_0}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Per  $\varphi \in \mathcal{D}$  si ha

$$\langle \delta_{x_0}', \varphi \rangle = -\langle \delta_{x_0}, \varphi' \rangle = -\varphi'(x_0). \quad (4.5)$$

Più generalmente, se  $p \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\langle \delta_{x_0}^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle \delta_{x_0}, \varphi^{(p)} \rangle = (-1)^{(p)} \varphi^{(p)}(x_0).$$

♡

**Osservazione 4.1.** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Sia  $\varphi \in C^1([a, b])$  e sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$\exists f(a+) := \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \in \mathbb{R}, \quad \exists f(b-) := \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \in \mathbb{R}$$

(questi limiti devono essere finiti) ed esista  $f'(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ , con  $f'$  sommabile su  $[a, b]$ . Allora

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = f(b-) \varphi(b) - f(a+) \varphi(a) - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx, \quad (4.6)$$

infatti per applicare la formula di integrazione per parti in modo corretto dobbiamo considerare  $f(b-)$  e  $f(a+)$  invece che  $f(b)$  e  $f(a)$ . ◇

Possiamo ora dimostrare il seguente utile teorema sulla derivata distribuzionale di funzioni regolari a tratti.

**Teorema 4.1.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente sommabile, derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Supponiamo che  $f$  abbia un punto di salto in ogni  $x_k$  (cioè  $f(x_k-) e f(x_k+)$  esistono finiti per ogni  $k = 1, \dots, m$ ). Assumiamo inoltre che  $f' : \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  sia localmente sommabile in  $\mathbb{R}$  ( $f'$  può essere definita arbitrariamente nei punti  $x_k$ ). Allora*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^m [f(x_k+) - f(x_k-)] \delta_{x_k} \quad (4.7)$$

*Dimostrazione.* Proviamo il Teorema nel caso  $m = 1$ , cioè quando  $f$  ha un solo punto di salto  $x_1$ . Allora, integrando per parti e ricordando l'Osservazione 4.1,

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{x_1} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{x_1}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= -[f(x) \varphi(x)]_{x=-\infty}^{x=x_1+} + \int_{-\infty}^{x_1} f'(x) \varphi(x) dx \\ &\quad - [f(x) \varphi(x)]_{x=x_1-}^{x=+\infty} + \int_{x_1}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx \\ &= -f(x_1-) \varphi(x_1) + \int_{-\infty}^{x_1} f'(x) \varphi(x) dx + f(x_1+) \varphi(x_1) + \int_{x_1}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx \\ &= [f(x_1+) - f(x_1-)] \varphi(x_1) + \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx \\ &= [f(x_1+) - f(x_1-)] \langle \delta_{x_1}, \varphi \rangle + \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \langle [f(x_1+) - f(x_1-)] \delta_{x_1} + T_{f'}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

Dal teorema precedente segue che se  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ , allora

$$\begin{cases} f \in C(\mathbb{R}), \\ \exists f' \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \\ f' \text{ localmente sommabile su } \mathbb{R} \end{cases} \implies (T_f)' = T_{f'} \quad (4.8)$$

### Esempio 4.3.

- (a) Calcoliamo la derivata di  $T_f$ , dove  $f(x) = \mathbb{1}_{[-3,3]}(x) e^{-|2x|}$ .

La funzione  $f$  è localmente sommabile ed ha due punti di salto  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 3$ . Il salto in  $x_1$  è  $f(-3+) - f(-3-) = e^{-6}$ , il salto in  $x_2$  è  $f(3+) - f(3-) = -e^{-6}$ . Per quanto riguarda la derivata puntuale si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 3 \\ -e^{-|2x|} \operatorname{sign}(2x) 2 = -2 \operatorname{sign}(x) e^{-|2x|} & \text{se } |x| < 3, x \neq 0 \end{cases}$$

(nel punto  $x = 0$  non esiste la derivata, e possiamo considerare  $x = 0$  come un punto di salto con salto uguale a zero). Poiché  $f' : \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$  è localmente sommabile si ha che

$$(T_f)' = T_{f'} + e^{-6} \delta_{-3} - e^{-6} \delta_3$$

- (b) Calcoliamo la derivata di  $T_f$ , dove  $f(x) = |x| - 1 + p_2(x)$ .  
 $f$  è localmente sommabile  $f'(x) = \text{sign}(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ . Visto che  $f'$  è localmente sommabile, si ha che

$$T'_f = T_{\text{sign}} + \delta_{-1} - \delta_1.$$

- (c) Calcoliamo la derivata di  $T_f$ , dove  $f(x) = e^x H(-x) + (e^x + 1)p_2(x - 1)$ .  
 Se  $f_1(x) = e^x H(-x)$  allora  $f'_1(x) = e^x H(-x)$  per  $x \neq 0$ . In  $x = 0$  il salto di  $f_1$  è  $-1$ , quindi  $T'_{f_1} = T_{f'_1} - \delta_0$ . Se  $f_2(x) = (e^x + 1)p_2(x - 1)$  allora  $f'_2(x) = e^x p_2(x - 1)$  per  $x \neq 0$  e  $x \neq 1$ . Vi sono due salti: in  $x = 0$  il salto di  $f_2$  è  $2$ ; in  $x = 1$  il salto di  $f_2$  è  $-(e^2 + 1)$ , per cui  $T'_{f_2} = T_{f'_2} + 2\delta_0 - (e^2 + 1)\delta_2$ . Allora

$$T'_f = T_{e^x H(-x) + e^x p_2(x-1)} + \delta_0 - (e^2 + 1)\delta_2.$$

♡

L'importante esempio che segue mostra che la classica derivata puntuale può essere diversa dalla derivata distribuzionale:

**Esempio 4.4.** Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \log|x|$  che è localmente sommabile.<sup>1</sup> Troviamo la derivata distribuzionale, cioè calcoliamo  $T'_f$ . Si osservi che  $\frac{d}{dx} \log|x| = 1/x$  per ogni  $x \neq 0$ , ma  $1/x$  non è localmente sommabile  $\mathbb{R}$ . Così il simbolo  $T_{1/x}$  non ha senso. Se  $\varphi \in \mathcal{D}$ , esiste  $R > 0$  tale che  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]$ , e troviamo

$$\begin{aligned} \langle T'_{\log|x|}, \varphi \rangle &= -\langle T_{\log|x|}, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \log|x| \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} \log|x| \varphi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^R \log|x| \varphi'(x) dx \right) \\ &\stackrel{\text{per parti}}{=} -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left( [\log|x| \varphi(x)]_{x=-R}^{x=-\varepsilon} - \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + [\log|x| \varphi(x)]_{x=\varepsilon}^{x=R} - \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left( \log \varepsilon \varphi(-\varepsilon) - \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \log \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left( \log \varepsilon (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right). \end{aligned}$$

Ora osserviamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \log \varepsilon (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \log \varepsilon \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \cdot 2\varphi'(0) = 0. \quad ^2$$

Quindi troviamo che

$$\langle T'_{\log|x|}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (4.9)$$

Ne segue che il membro di destra della formula precedente definisce una distribuzione che chiamiamo *valore principale di  $1/x$*  e che denotiamo con  $\text{p.v.} \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

$$\left\langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (4.10)$$

Riassumendo si ha

$$\left( T_{\log|x|} \right)' = \text{p.v.} \frac{1}{x}. \quad (4.11)$$

♡

<sup>1</sup>Poiché  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \log|x| = 0$  per ogni  $\alpha > 0$ , abbiamo che  $|x|^\alpha |\log|x|| \leq 1$  in un intorno di  $x = 0$ , quindi  $|\log|x|| \leq 1/|x|^\alpha$  in tale intorno. Prendendo  $\alpha = 1/2$  otteniamo l'assoluta convergenza degli integrali impropri  $\int_0^1 \log|x| dx$ ,  $\int_{-1}^0 \log|x| dx$ .

<sup>2</sup> $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{-\varepsilon} = 2\varphi'(0)$ , ma si può anche usare il teorema di De L'Hopital.

## 4.2 Traslazione

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente sommabile e  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideriamo la funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $g(x) := f(x - x_0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Il grafico di  $g$  è ottenuto traslando quello di  $f$ . Grazie ad un cambio di variabile, per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  si ha

$$\langle T_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x - x_0) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x + x_0) dx = \langle T_f(x), \varphi(x + x_0) \rangle \quad (4.12)$$

dove abbiamo usato la notazione (non corretta, ma non ambigua)  $\langle T_f(x), \varphi(x + x_0) \rangle$ , che significa che stiamo valutando il funzionale  $T_f$  con la funzione test  $\psi(x) := \varphi(x + x_0)$ .

Questo esempio suggerisce di porre la seguente

**Definizione 4.2** (Traslazione). Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e  $a \in \mathbb{R}$ , la *traslazione di  $T$  di  $a$*  è il funzionale  $T(x - a) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  definito da

$$\langle T(x - a), \varphi \rangle := \langle T(x), \varphi(x + a) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (4.13)$$

È facile verificare che  $T(x - a)$  è una distribuzione. Sottolineiamo il fatto che  $T(x - a)$  è soltanto un simbolo, una notazione per la distribuzione definita da  $\langle T(x), \varphi(x + a) \rangle$ :  $x - a$  non è la variabile indipendente di  $T$ , dal momento che  $T$  non è una funzione di variabile reale.

**Esempio 4.5.** Se  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$ , allora

$$\langle \delta_{x_0}(x - a), \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi(x + a) \rangle = \varphi(x_0 + a) = \langle \delta_{x_0+a}, \varphi \rangle.$$

In particolare

$$\delta_0(x - a) = \delta_a$$

♡

## 4.3 Riscaldamento

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente sommabile e sia  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $g(x) := f(ax)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Grazie al cambio di variabile  $y = ax$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  si ha

$$\begin{aligned} \langle T_g, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) \varphi(x) dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi\left(\frac{y}{a}\right) \frac{1}{a} dy & \text{se } a > 0 \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi\left(\frac{y}{a}\right) \frac{1}{a} dy & \text{se } a < 0 \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi\left(\frac{y}{a}\right) \frac{1}{|a|} dy = \left\langle T_{f(x)}, \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Quindi

$$\langle T_{f(ax)}, \varphi(x) \rangle = \left\langle T_{f(x)}, \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle$$

Perciò è naturale porre la seguente



**Definizione 4.3** (Riscalamento). Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ed  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , si dice *riscalamento di  $T$  di un fattore  $a$*  la distribuzione  $T(ax) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$\langle T(ax), \varphi \rangle := \left\langle T(x), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (4.14)$$

Anche in questo caso è facile verificare che  $T(ax)$  è in effetti una distribuzione. Un caso particolare rilevante è dato da  $a = -1$ :

$$\langle T(-x), \varphi \rangle := \langle T(x), \varphi(-x) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (4.15)$$

**Esempio 4.6.** Se  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$  si ha

$$\langle \delta_{x_0}(ax), \varphi \rangle = \left\langle \delta_{x_0}, \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle = \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{x_0}{a}\right) = \left\langle \frac{1}{|a|} \delta_{\frac{x_0}{a}}, \varphi \right\rangle$$

quindi

$$\delta_{x_0}(ax) = \frac{1}{|a|} \delta_{x_0/a}. \quad (4.16)$$

Se  $a = -1$

$$\delta_{x_0}(-x) = \delta_{-x_0}. \quad (4.17)$$

♡

#### 4.4 Moltiplicazione per una funzione $C^\infty$

Consideriamo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente sommabile ed  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Sia  $hf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $hf(x) := h(x)f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , localmente sommabile. Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  abbiamo

$$\langle T_{hf}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x)f(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\varphi(x) dx = \langle T_f, h\varphi \rangle \quad (4.18)$$

che ha senso perché  $h\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  ( $\text{supp}(h\varphi) \subseteq \text{supp}(\varphi)$  ed  $h\varphi \in C^\infty$  per la formula di Leibniz per la derivata del prodotto di funzioni). La formula trovata per  $T_{hf}$  suggerisce la seguente

**Definizione 4.4** (Moltiplicazione). Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ , si dice *moltiplicazione di  $T$  per  $h$*  il funzionale  $hT : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  definito da

$$\langle hT, \varphi \rangle := \langle T, h\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (4.19)$$

**Esempio 4.7.** Se  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  otteniamo

$$\langle h\delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, h\varphi \rangle = h(x_0)\varphi(x_0) = \langle h(x_0)\delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

cioè

$$h\delta_{x_0} = h(x_0)\delta_{x_0}. \quad (4.20)$$

Ad esempio  $\cos(x)\delta_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{\pi/4}$ .

♡

Concludiamo il paragrafo mostrando alcune proprietà che collegano la derivata con le operazioni precedenti. Le dimostrazioni sono lasciate come utile esercizio.

**Proposizione 4.2.** Se  $T \in \mathcal{D}'$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ed  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ , allora

$$\begin{aligned}(T(x-a))' &= T'(x-a), \\ (T(ax))' &= aT'(ax) \quad (a \neq 0), \\ (hT)' &= h'T + hT'.\end{aligned}$$

## 5 Convergenza di distribuzioni

**Definizione 5.1** (Convergenza di distribuzioni). Sia  $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  Una successione di distribuzioni. Diciamo che  $T_n$  converge a  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  nel senso delle distribuzioni (e scriviamo  $T_n \rightarrow T$  in  $\mathcal{D}'$ ) se

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (5.1)$$

È facile verificare il seguente

**Proposizione 5.1.** Se  $T_n \rightarrow T$  e  $S_n \rightarrow S$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , allora  $\lambda T_n + \mu S_n \rightarrow \lambda T + \mu S$  per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

**Esempio 5.1.**

- (a) Supponiamo che  $T_n = \delta_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $\varphi \in \mathcal{D}$  è fissata arbitrariamente, allora  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$ , per opportuni  $a, b \in \mathbb{R}$ , e si ha

$$\langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(n) \quad \forall n.$$

Ora  $\varphi(n) = 0$  per ogni  $n > b$ , così  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = 0$  e

$$\langle \delta_n, \varphi \rangle \rightarrow 0 = \langle 0, \varphi \rangle \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Perciò  $\delta_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

- (b) Definiamo  $T_n = \delta_n - \delta_{1/n}$ . Se  $\varphi \in \mathcal{D}$  allora

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \langle \delta_n, \varphi \rangle - \langle \delta_{1/n}, \varphi \rangle = \varphi(n) - \varphi(1/n) \rightarrow 0 - \varphi(0)$$

poiché  $\varphi$  è continua in  $x = 0$ . Perciò

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow -\varphi(0) = -\langle \delta_0, \varphi \rangle$$

cioè  $\delta_n - \delta_{1/n} \rightarrow -\delta_0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

- (c) Sia  $T_n = \delta_{(-2)^{3n} \log(2n)}$  per  $n > 0$ . Se  $\varphi \in \mathcal{D}$  allora  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$  per opportuni  $a, b \in \mathbb{R}$ , e si ha

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \varphi((-2)^{3n} \log(2n)).$$

Il limite della successione  $(-2)^{3n} \log(2n)$  non esiste, ma  $|(-2)^{3n} \log(2n)| \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ , perciò  $(-2)^{3n} \log(2n) \notin \text{supp}(\varphi)$  per ogni  $n$  maggiore di un opportuno  $n_0$ . Ne segue che  $\varphi((-2)^{3n} \log(2n)) = 0$  per ogni  $n > n_0$  e

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

cioè  $T_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

(d) Se  $T_n = \delta_{(-1)^n}$  allora per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$  abbiamo

$$\langle \delta_{(-1)^n}, \varphi \rangle = \varphi((-1)^n).$$

Consideriamo ora una funzione test  $\varphi_0$  tale che  $\varphi_0(-1) = 1$  e  $\varphi_0(1) = 0$ . Ne segue che il limite di  $\varphi_0((-1)^n)$  non esiste, quindi  $\delta_{(-1)^n}$  non converge in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .  $\heartsuit$

**Proposizione 5.2.** Supponiamo che  $f_n, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  siano date per ogni  $n$  e che

$$f_n \rightarrow f \quad \text{uniformemente su } [a, b] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

( $[a, b]$  limitato). Allora  $T_{f_n} \rightarrow T_f$  in  $\mathcal{D}'$ .

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che  $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$ , cioè che  $\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Perciò dobbiamo stimare  $|\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle|$  con una successione convergente a zero. Se  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [c, d]$ , allora

$$\begin{aligned} |\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x) - f(x)) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f_n - f\|_{\infty, [c, d]} \|\varphi\|_{\infty} dx = \|f_n - f\|_{\infty, [c, d]} \|\varphi\|_{\infty} (d - c) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per  $n \rightarrow \infty$  poiché  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $[c, d]$ .  $\square$

**Esempio 5.2.** Sia  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Allora  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente su  $\mathbb{R}$ , infatti

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nx)}{n} \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ . Quindi grazie al teorema precedente  $T_{f_n} \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Naturalmente è facile trovare direttamente il limite distribuzionale: se  $\varphi \in \mathcal{D}$  e  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$ , allora

$$|\langle T_{f_n}, \varphi \rangle| = \left| \int_a^b \frac{\cos(nx)}{n} \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\cos(nx)}{n} \right| |\varphi(x)| dx \leq \frac{\|\varphi\|_{\infty}}{n} (b - a) \rightarrow 0 \quad (5.2)$$

per  $n \rightarrow \infty$  (sono gli stessi calcoli della dimostrazione precedente).  $\heartsuit$

**Esempio 5.3.** Se  $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x)$  allora  $f_n(x) \rightarrow 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  fissato, infatti

$$\mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{se } x \notin [n, n+1] \end{cases}$$

quindi  $f_n(x) = 0$  per ogni  $n > x$ . Questa convergenza non è uniforme su  $\mathbb{R}$ , ma è uniforme su ogni intervallo limitato  $[a, b]$ :

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |\mathbb{1}_{[n, n+1]}(x)| = 0 \quad \forall n > b.$$

Quindi  $T_{f_n} \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Anche in questo caso è forse più facile trovare il limite distribuzionale direttamente tramite la definizione.  $\heartsuit$

**Esempio 5.4.** Sia  $f_n(x) = np_{1/n}(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . È facile vedere che  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  se  $x \neq 0$  e  $f_n(0) = n \rightarrow +\infty$ , per cui la convergenza non è uniforme. Verifichiamo che  $T_{f_n}$  converge in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Se  $\varphi \in \mathcal{D}$  allora

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-1/2n}^{1/2n} n \varphi(x) dx = \frac{1}{1/n} \int_{-1/2n}^{1/2n} \varphi(x) dx = \varphi(x_n) \quad (5.3)$$

per un opportuno  $x_n \in ]-1/2n, 1/2n[$ , in virtù del teorema della media integrale. Poiché  $-1/2n < x_n < 1/2n$ , abbiamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , quindi per la continuità di  $\varphi$  in  $x = 0$ , troviamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(0)$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

e  $T_{np_{1/n}} \rightarrow \delta_0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . ♡

## 6 Distribuzioni a supporto compatto

**Definizione 6.1.** Sia  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

- (i) Si dice che  $T$  è *nulla su*  $]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$ , se  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  con  $\text{supp}(\varphi) \subseteq ]a, b[$ .
- (ii) Chiamiamo *supporto di*  $T$  l'insieme  $\text{supp}(T) := \mathbb{R} \setminus N_T$ , dove  $N_T$  è l'unione di tutti gli intervalli dove  $T$  è nulla.

Dalla definizione precedente segue che  $T$  ha supporto compatto se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b, : T \text{ è nulla su } \mathbb{R} \setminus [a, b].$$

**Esempio 6.1.** Troviamo il supporto di  $\delta_{x_0}$ , dove  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

È chiaro che  $\delta_{x_0}$  non è nulla su ogni intervallo aperto contenente  $x_0$ . Prendiamo ora  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , e  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Allora

$$]a, b[ \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \text{supp}(\varphi) \subseteq ]a, b[ \implies \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) = 0,$$

quindi  $\delta_{x_0}$  è nulla  $]a, b[$ . Allora  $N_{\delta_{x_0}} = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  e si ha

$$\text{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\},$$

in particolare  $\delta_{x_0}$  ha supporto compatto. ♡

**Proposizione 6.1.** Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  allora  $\text{supp}(T') \subseteq \text{supp}(T)$ .

*Dimostrazione.* Se  $T$  è nulla su  $]a, b[$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  e  $\text{supp}(\varphi) \subseteq ]a, b[$  allora  $\text{supp}(\varphi') \subseteq ]a, b[$ , per cui  $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = 0$ . Ne segue che  $N_T \subseteq N_{T'}$ , perciò  $\text{supp}(T') = \mathbb{R} \setminus N_{T'} \subseteq \mathbb{R} \setminus N_T = \text{supp}(T)$ . □

**Esempio 6.2.** Dalla proposizione precedente si deduce che  $\text{supp}(\delta_{x_0}^{(p)}) \subseteq \{x_0\}$  per ogni  $p \in \mathbb{N}$ . D'altra parte se prendiamo una funzione test tale che  $\varphi^{(p)}(x_0) \neq 0$  otteniamo che  $\langle \delta_{x_0}^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \varphi^{(p)}(x_0) \neq 0$ , quindi  $x_0 \notin N_{\delta_{x_0}^{(p)}}$ . Perciò

$$\text{supp}(\delta_{x_0}^{(p)}) = \{x_0\} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

♡

**Definizione 6.2.** Si dice che  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  è a supporto compatto se  $\text{supp}(T)$  è compatto.

Quando  $T \in \mathcal{D}'$  e  $\text{supp}(T)$  è compatto, è possibile dare un significato alla scrittura  $\langle T, \varphi \rangle$ , dove  $\varphi \in C^\infty$ , ma il suo supporto non è compatto.

**Definizione 6.3.** Sia  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  a supporto compatto, e siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $\text{supp}(T) \subseteq ]a, b[$ . Allora poniamo

$$\langle T, \psi \rangle := \langle T, \varphi_0 \psi \rangle \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad (6.1)$$

dove  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  è una funzione test tale che  $\varphi_0(x) = 1$  per ogni  $x \in ]a, b[$ . In tal modo possiamo estendere la definizione di  $T$  all'insieme  $C^\infty(\mathbb{R})$ , in altri termini possiamo scrivere  $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ .

La definizione precedente ha senso poiché è possibile provare che non dipende dalla scelta di  $\varphi_0$ .

## 7 Convoluzione

### 7.1 Convoluzione di funzioni

**Definizione 7.1.** Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sono localmente sommabili, chiamiamo *convoluzione di  $f$  e  $g$*  la funzione

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (7.1)$$

definita per i numeri reali  $x$  tali che l'integrale è convergente.


Osserviamo che con un cambio di variabile si verifica che

$$f * g = g * f \quad (7.2)$$


infatti, se poniamo  $t = x - y$ , si ha  $dt = -dy$  e

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(t)g(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = (g * f)(x). \end{aligned}$$

Diamo ora delle condizioni sufficienti che assicurino l'esistenza di  $(f * g)(x)$ .

**Proposizione 7.1.**  Siano date  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

- (a)  $f$  sommabile,  $g$  localmente sommabile,  $g$  limitata  $\implies (f * g)(x)$  esiste.
- (b)  $f$  localmente sommabile,  $g \in C(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp}(g)$  compatto  $\implies (f * g)(x)$  esiste.
- (c)  $|f|^2, |g|^2$  sommabili  $\implies (f * g)(x)$  esiste.

*Dimostrazione.* 

- (a) Per ogni  $y \in \mathbb{R}$  abbiamo  $|f(x-y)g(y)| \leq |f(x-y)|\|g\|_\infty$  e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\|g\|_\infty dy = \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

- (b) Poiché  $g$  è continua e il suo supporto è contenuto in qualche intervallo  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , per il teorema di Weierstrass  $\|g\|_\infty$  è finito, quindi  $|f(x-y)g(y)| \leq |f(x-y)|\|g\|_\infty$ . Inoltre il supporto della funzione  $F(y) = f(x-y)g(y)$  è contenuto in  $[a, b]$ , quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)| dy &= \int_a^b |f(x-y)g(y)| dy \\ &\leq \int_a^b |f(x-y)|\|g\|_\infty dy = \|g\|_\infty \int_{x-b}^{x-a} |f(t)| dt < \infty \end{aligned}$$

perché  $f$  è localmente sommabile.

- (c) Osserviamo che  $f$  e  $g$  sono localmente sommabili, infatti  $|f(x)| \leq \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{1}{2}$ <sup>3</sup> e se  $-\infty < a < b < +\infty$  si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &\leq \int_a^b \left( \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \int_a^b \frac{|f(x)|^2}{2} dx + \frac{b-a}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx + \frac{b-a}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Ne segue che  $F(y) = f(x-y)g(y)$  è localmente sommabile. Abbiamo


$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x-y)|^2}{2} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(y)|^2}{2} dy < \infty.$$

□

**Proposizione 7.2.** Se  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è localmente sommabile,  $g \in C^p(\mathbb{R})$ , e  $\text{supp}(g)$  è compatto, allora  $f * g \in C^p(\mathbb{R})$  e

$$(f * g)^{(p)}(x) = (f * g^{(p)})(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p \geq 1.$$

<sup>3</sup>per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  si ha  $\alpha\beta \leq (\alpha^2 + \beta^2)/2$ , poiché  $0 \leq (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

*Dimostrazione.*  Grazie alla Proposizione 7.1-(b), la convoluzione esiste. È possibile provare che è lecito passare al limite sotto il segno di integrale, così per ogni  $x_n \rightarrow x$  si ha, usando la continuità di  $g$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f * g)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g * f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x_n - y) f(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n - y) f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} g(x - y) f(y) \, dy = (g * f)(x) = (f * g)(x). \end{aligned}$$

Segue che  $(f * g)$  è continua in  $x$ . È anche possibile derivare sotto il segno di integrale, quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f * g)(x) &= \frac{d}{dx} (g * f)(x) = \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} g(x - y) f(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} g(x - y) f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} g'(x - y) f(y) \, dy = (g' * f)(x) = (f * g')(x). \end{aligned}$$

L'affermazione per  $p \in \mathbb{N}$  segue ragionando per induzione. □

**Lemma 7.1.** Sia  $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita nell'Esempio 2.2. Se  $f \in C(\mathbb{R})$  allora per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\rho_n * f \rightarrow f \quad \text{uniformly on } [a, b].$$

*Dimostrazione.*  Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$\begin{aligned} (\rho_n * f)(x) - f(x) &= (f * \rho_n)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y) f(x - y) \, dy - \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y) f(x) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y) (f(x - y) - f(x)) \, dy = \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(y) (f(x - y) - f(x)) \, dy. \end{aligned}$$

Poiché  $f$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$  per  $|y| < \delta$ . Allora per  $n > 1/\delta$  si ha

$$\begin{aligned} \|\rho_n * f - f\|_{\infty, [a, b]} &= \sup_{x \in [a, b]} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| \\ &\leq \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(y) |f(x - y) - f(x)| \, dy < \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(y) \, dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Corollario 7.1.** Se  $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione definita nell'Esempio 2.2, allora  $T_{\rho_n} \rightarrow \delta_0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Se  $\varphi \in \mathcal{D}$  per il lemma precedente si ha che  $\rho_n * \varphi \rightarrow \varphi$  uniformemente su ogni intervallo limitato, in particolare  $(\rho_n * \varphi)(0) \rightarrow \varphi(0)$ , quindi

$$\begin{aligned} \langle T_{\rho_n}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) \varphi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(0 - x) \varphi(x) \, dx \\ &= (\rho_n * \varphi)(0) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

## 7.2 Convoluzione di distribuzioni

Consideriamo due funzioni  $f, g$  tali che la convoluzione  $f * g$  è localmente sommabile e calcoliamo  $T_{f*g}$ . Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  si ha (anche grazie al teorema di Fubini<sup>4</sup>)

$$\begin{aligned}
 \langle T_{f*g}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy \varphi(x) dx \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) \varphi(x) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) \varphi(x) dx dy \\
 &\stackrel{t=x-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \varphi(y+t) dt dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(y+x) dx dy = \left\langle T_f(y), \langle T_g(x), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle
 \end{aligned}$$

Questo calcolo sembra suggerire la definizione di convoluzione di due distribuzioni  $T, S \in \mathcal{D}'$  nel modo seguente:

$$\langle T * S, \varphi \rangle := \left\langle T(y), \langle S(x), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle, \quad (7.3)$$

ma è necessario provare però che il membro di destra abbia senso. È possibile dimostrare la proposizione seguente.


**Proposizione 7.3.** *Se  $x \in \mathbb{R}$  è fissato e  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è definita da*

$$\psi(y) := \langle S(x), \varphi(x+y) \rangle, \quad y \in \mathbb{R}$$

*allora*

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad (7.4)$$

$$\text{supp}(S) \text{ compatto} \implies \text{supp}(\psi) \text{ compatto}. \quad (7.5)$$

*Dimostrazione.*  .

□

Abbiamo così due possibilità:

- (1.) Se  $\text{supp}(S)$  è compatto allora, grazie a (7.4)-(7.5),  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  e (7.3) hanno senso.
- (2.) Se invece  $\text{supp}(T)$  è compatto, da (7.5), deduciamo che (7.3) ha senso secondo la Definition 6.3.

Perciò possiamo finalmente dare la seguente

<sup>4</sup>Il teorema di Fubini permette di scambiare i due segni di integrale



**Definizione 7.2.** Supponiamo che  $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e che almeno uno dei due supporti  $\text{supp}(T)$  o  $\text{supp}(S)$  è compatto. La *convoluzione di  $T$  e  $S$*  è la distribuzione  $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  definita da


$$\langle T * S, \varphi \rangle := \left\langle T(y), \langle S(x), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (7.6)$$

È possibile provare che  $T * S$  è lineare e continuo, cioè è una distribuzione.

**Proposizione 7.4.** Se  $S, T, U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  allora

- (i)  $S * T = T * S$
- (ii)  $S * (T * U) = (S * T) * U$
- (iii)  $S * (\lambda T + \mu U) = \lambda(S * T) + \mu(S * U)$
- (iv)  $(S * T)(x - a) = S(x - a) * T = S * T(x - a)$
- (v)  $(S * T)' = S' * T = S * T'$

quando la convoluzione ha senso.

*Dimostrazione.* 

□

**Esempio 7.1.** Se  $T \in \mathcal{D}'$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  allora

$$\langle T * \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \left\langle T(y), \langle \delta_{x_0}(x), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle = \langle T(y), \varphi(x_0 + y) \rangle = \langle T(y - x_0), \varphi(y) \rangle$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la definizione di  $T(x - x_0)$ , quindi

$$T * \delta_{x_0} = T(x - x_0)$$

in particolare per  $x_0 = 0$

$$T * \delta_0 = T$$

♡

**Esempio 7.2.** Se  $T \in \mathcal{D}'$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  allora

$$(T * \delta_{x_0})^{(p)} = T^{(p)} * \delta_{x_0} = T^{(p)}(x - x_0).$$

♡

**Proposizione 7.5.** Se  $T_n, T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp}(S)$  è compatto e  $T_n \rightarrow T$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , allora  $T_n * S \rightarrow T * S$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$  abbiamo

$$\langle T_n * S, \varphi \rangle = \left\langle T_n(y), \langle S(x), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle \rightarrow \left\langle T(y), \langle S(x), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle = \langle T * S, \varphi \rangle$$

per  $n \rightarrow \infty$ .

□

**Proposizione 7.6.** Sia  $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita nell'Esempio 2.2. Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , allora  $T * \rho_n$  è una distribuzione regolare associata ad una funzione di classe  $C^\infty$  e  $T * \rho_n \rightarrow T$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

Dimostrazione. 

□

Concludiamo il capitolo con due utili teoremi (ne omettiamo la dimostrazione)

**Teorema 7.1.** Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e  $xT(x) = 0$  allora esiste una costante  $c$  tale che  $T = c\delta_0$ .

**Teorema 7.2.** Se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e  $T' = 0$  allora  $T$  è costante, più precisamente esiste una costante  $c$  tale che  $T = T_c$ .

## 8 Esercizi

**Esercizi** (tratti dalle dispense di Analisi Complessa (vecchio ordinamento)).

1. Quali tra i seguenti funzionali sono distribuzioni?

$$\begin{aligned} \langle T_1, \varphi \rangle &= \int_0^1 \ln(x+1) \varphi(x) dx, & \langle T_2, \varphi \rangle &= \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx, \\ \langle T_3, \varphi \rangle &= \int_0^1 \varphi'(x) dx, & \langle T_4, \varphi \rangle &= |\varphi(5)| \\ \langle T_5, \varphi \rangle &= \varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4), & \langle T_6, \varphi \rangle &= \int_{-4}^4 \sin x \varphi(x) dx + 6\varphi(4) \end{aligned}$$

2. Quali tra i seguenti funzionali sono distribuzioni?

$$\begin{aligned} \langle T_1, \varphi \rangle &= \int_{-1}^1 x^2 \varphi(x) dx + \int_{-2}^3 e^x \varphi(x) dx, & \langle T_2, \varphi \rangle &= \int_0^1 \varphi(x)^3 dx \\ \langle T_3, \varphi \rangle &= \int_0^1 x \varphi'(x) dx, & \langle T_4, \varphi \rangle &= \varphi(5) \varphi(3) \\ \langle T_5, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sinh x - 4x) \varphi(x) dx + e^{12} \varphi(e), & \langle T_6, \varphi \rangle &= 1 \end{aligned}$$

3. Calcolare la derivata distribuzionale delle distribuzioni regolari associate alle seguenti funzioni localmente sommabili:

$$\begin{aligned} (5x+3)H(x), \quad \operatorname{sgn}(x) + 2x, \quad |x^2 - 1| \\ (x^2 - 1)H(-x), \quad \sin x H(x), \quad \arctan \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

4. Calcolare la derivata distribuzionale delle seguenti distribuzioni:

$$T_{H(2x)} + 5\delta_3(2x), \quad e^{x^2}\delta_{-1} + T_3 \operatorname{sign}(-x), \quad x^2 T_{\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)}$$

5. Sia  $\varphi \in \mathcal{D}$  una funzione test tale che  $\varphi'(0) = -2$ . Calcolare

$$\langle (\sin x)\delta_0'', \varphi \rangle.$$

6. Trovare tutte le distribuzioni  $T \in \mathcal{D}'$  tali che  $T' = \delta_0 + \delta_2 - 2\delta_1'$ .

7. Mostrare che

$$n^n \delta_n \rightarrow 0, \quad \delta_n^{(n)} \rightarrow 0, \quad e^{-1/n} \delta_{1/n} \rightarrow \delta_0$$

in  $\mathcal{D}'$  per  $n \rightarrow \infty$ .

8. Mostrare che

$$T_n = n(\delta_{1/n} + \delta_0)$$

non è convergente in  $\mathcal{D}'$ .

9. Trovare il limite, se esiste, delle seguenti successioni di distribuzioni:

$$n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}), \quad \sqrt{n}(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}), \quad n^2(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}).$$

10. Se

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[2(-1)^n, 2(-1)^{n+1}]}(x),$$

mostrare che  $T_{f_n}$  non converge nel senso delle distribuzioni.

11. Se

$$f_n(x) = n^2 p_{1/n}(x),$$

mostrare che  $T_{f_n}$  non converge in  $\mathcal{D}'$ .

### Risposte

1.  $T_1$  è una distribuzione perché  $T_1 = T_g$  con  $g(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \ln(x+1)$ .  $T_2$  non è una distribuzione perché non è lineare (ad esempio  $\langle T_2, -\varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$ ).  $T_3$  è una distribuzione perché per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\langle T_3, \varphi \rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = \langle \delta_1 - \delta_0, \varphi \rangle.$$

Quindi  $T_3 = \delta_1 - \delta_0$ .  $T_4$  non è distribuzione perché non è lineare.  $T_5$  è una distribuzione perché  $T_5 = \delta_1 - \delta_2 + \delta - 3 - \delta_4$ .  $T_6$  è una distribuzione perché  $T_6 = T_g + 6\delta_4$  con  $g(x) = \mathbf{1}_{[-4,4]}(x) \sin x$ .

2.  $T_1$ ,  $T_3$  e  $T_5$  sono distribuzioni. Gli altri funzionali non lo sono.

3.

$$5T_H + 3\delta_0, \quad 2\delta_0 + T_2, \quad T_{2x \operatorname{sign}(x^2-1)}$$

$$T_{2xH(-x)} + \delta_0, \quad T_{\cos xH(x)}, \quad T_{\frac{-1}{(x-1)^2+1}} + \pi\delta_1$$

4.

$$\delta_0 + 5/2\delta'_{3/2}, \quad e\delta'_{-1} - 6\delta_0, \quad 2xT_{\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)} + \delta_{-1} - \delta_1$$

5.  $-4$ .6.  $T = T_{H(x)} + T_{H(x-2)} - 2\delta_1 + T_c$  dove  $c$  è una costante.

7. La soluzione è simile agli esercizi studiati a lezione.

8. Se  $\varphi$  è una funzione test allora

$$\langle n(\delta_{1/n} + \delta_0), \varphi \rangle = n\varphi(1/n) + n\varphi(0).$$

Se scegliamo una particolare  $\varphi$  in modo tale che  $\varphi(0) = 1$  otteniamo che  $n\varphi(1/n) + n\varphi(0) \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ .

9.  $-2\delta'_0, 0$ , la terza successione non converge.10. La successione  $f_n$  è  $\mathbb{1}_{[-2,-1]}$ ,  $\mathbb{1}_{[2,3]}$ ,  $\mathbb{1}_{[-2,-1]}$ ,  $\mathbb{1}_{[2,3]}$ ,  $\dots$ , Quindi se  $\varphi \in \mathcal{D}$  allora la successione  $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle$  è

$$\int_{-2}^{-1} \varphi(x) dx, \int_2^3 \varphi(x) dx, \int_{-2}^{-1} \varphi(x) dx, \int_2^3 \varphi(x) dx, \dots$$

Se scegliamo una funzione test  $\varphi_0 \neq 0$  tale che  $\operatorname{supp} \varphi_0 \subseteq [-2, -1]$  e, per esempio,  $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x) dx = 1$ , allora

$$\langle T_{f_n}, \varphi_0 \rangle = 1, 0, 1, 0, \dots$$

così  $T_{f_n}$  non converge nel senso delle distribuzioni.

11. Usare il teorema del valor medio integrale (vedi lezione in aula).

**Modifiche dalla revisione del 11 giugno 2015 alla revisione del 23 maggio 2016:**

1. Esempio 1.1-(e):  $\partial S = \mathbb{R} \rightsquigarrow \partial S = \emptyset$
2. Pag. 9, riga 3:  $f(x) = 0 \rightsquigarrow \varphi(x) = 0$
3. Pag. 17, una riga sopra la formula (4.15):  $a = 1 \rightsquigarrow a = -1$
4. Pag. 24, ultima riga della prima formula:  $dt \rightsquigarrow dx$