Trasformata di Fourier

09BQXOA - Metodi Matematici per l'Ingegneria
A.A. 2023/2024

Versione: Maggio 2024

Disclaimer: Queste dispense non sostituiscono le esercitazioni, ma sono un'integrazione delle stesse.

Contents

1 Trasformata di funzioni

1.1 Richiami di teoria

Data una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile, cioè una funzione per cui l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \, \mathrm{d}t$$

converge, si definisce *trasformata di Fourier* di g la seguente espressione

$$\mathcal{F}[g](\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i\nu t} \, \mathrm{d}t := \hat{g}(\nu) \qquad \nu \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

facendo attenzione al fatto che la variabile indipendente della trasformata di Fourier è la frequenza ν, anche se spesso viene omessa scrivendo soltanto $\mathcal{F}[g]$ o $\mathcal{F}(g)$.
La trasformata di Fourier gode delle seguenti proprietà

- $\mathcal{F}[\lambda g(t) + \mu h(t)](\nu) = \lambda\mathcal{F}[g(t)](\nu) + \mu\mathcal{F}[h](\nu) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile
- $\mathcal{F}[e^{2\pi i\nu_0 t}g(t)](\nu) = \mathcal{F}[g](\nu - \nu_0) \qquad \nu_0 \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[g(t - t_0)](\nu) = e^{-2\pi i t_0\nu}\mathcal{F}[g(t)](\nu) \qquad t_0 \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[g(at)](\nu) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[g(t)]\left(\frac{\nu}{a}\right) \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathcal{F}[g(-t)](\nu) = \mathcal{F}[g(t)](-\nu)$
- $\mathcal{F}[g^{(n)}(t)](\nu) = (2\pi i\nu)^n\mathcal{F}[g(t)](\nu) \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad g^{(n)}(t)$ sommabile
- $\mathcal{F}[t^n g(t)](\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^n \mathcal{F}^{(n)}[g(t)](\nu)], \qquad t^n g(t)$ sommabile

NB: combinando la proprietà di traslazione con quella di riscalamento liberamente è molto facile commettere errori. Conviene imparare la seguente, nonchè ultima, proprietà

$$\mathcal{F}[g(at - t_0)](\nu) = \frac{1}{|a|}e^{-2\pi i\frac{t_0}{a}\nu}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\nu}{a}\right), \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, t_0 \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

1.2 Esercizi

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$g(t) = e^{-2t^2+4t}$$

Soluzione. La funzione è sommabile dato che

$$|g(t)| \sim e^{-2t^2}, \qquad |t| \to +\infty$$

La trasformata a cui si fa affidamento è quella di

$$h(t) = e^{-at^2} \longrightarrow \hat{h}(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2\nu^2/a} \tag{1.3}$$

Infatti, completando il quadrato nell'argomento dell'esponenziale di $g(t)$

$$g(t) = e^{-2t^2+4t} = e^{-2(t^2-2t)} = e^{-2(t^2-2t+1-1)} = e^{-2[(t-1)^2-1]} = e^2 e^{-2(t-1)^2}$$

Adesso l'espressione di $g(t)$ ricorda quella della gaussiana $h(t)$ in (1.3) scegliendo $a = 2$ e traslando di $t_0 = 1$:

$$g(t) = e^2 \cdot \underbrace{e^{-2(t-1)^2}}_{\text{gaussiana traslata}}$$

Dalle proprietà della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\nu) &= e^2 \cdot \mathcal{F}[h(t-1)](\nu) = e^2 \cdot \underbrace{e^{-2\pi i\nu}\hat{h}(\nu)}_{\text{traslazione}} = e^2 \cdot e^{-2\pi i \nu}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi^2\nu^2/2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{2-2\pi i\nu - \frac{\pi^2\nu^2}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\nu^2\pi^2+4i\nu\pi-4)} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\nu\pi+2i)^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$g(t) = |t|e^{-|t|}$$

Soluzione. La funzione è sommabile dato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-|t|}\,\mathrm{d}t = \underbrace{2\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t}_{\text{funzione pari su dominio simmetrico}} = 2\left(\cancelto{0}{\left[-e^{-t}t\right]\Big|_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) = 2$$

La tentazione di usare la trasformata di $e^{-a|t|}$ e la proprietà di moltiplicazione è forte, ma a causa del modulo $|t|$ bisogna prima spezzare in

$$g(t) = \begin{cases} te^{-t} & t \geq 0 \\ -te^{t} & t < 0 \end{cases}$$

Avendo introdotto la funzione di Heaviside, le funzioni scritte a tratti si possono scrivere come somma di funzioni di Heaviside che "accendono e spengono" le espressioni di $g(t)$ nei rispettivi domini:

$$g(t) = \underbrace{te^{-t}H(t)}_{\text{tratto con } t \geq 0} - \underbrace{te^{t}H(-t)}_{\text{tratto con } t<0}$$

Ora ci si affida alla trasformata di

$$h(t) = e^{-at}H(t) \longrightarrow \hat{h}(\nu) = \frac{1}{a + 2\pi i\nu}$$

con $a = 1$. In particolare:

$$g(t) = th(t) - th(-t)$$

Concatenando due proprietà della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\nu) &= \underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathcal{F}[h(t)](\nu)}_{\text{moltiplicazione}} - \underbrace{\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathcal{F}[h(-t)](\nu)}_{\text{moltiplicazione}} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\frac{1}{1+2\pi i\nu} + \frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\frac{1}{2\pi i\nu - 1} \\
&= \frac{1}{(1+2\pi i\nu)^2} + \frac{1}{(1-2\pi i\nu)^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$g(t) = \frac{t}{(9+4t^2)^2}$$

Soluzione. La funzione è sommabile in quanto

$$|g(t)| \sim \left|\frac{1}{16t^3}\right|, \quad |t| \to +\infty$$

L'espressione di $g(t)$ suggerisce l'uso della trasformata:

$$h(t) = \frac{1}{a^2+t^2} \longrightarrow \hat{h}(\nu) = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\nu|} \tag{1.4}$$

Il denominatore di $g(t)$ è un termine elevato al quadrato $(9+4t^2)^2$, mentre il numeratore è un termine di grado 1, cioè un grado inferiore a $(9+4t^2)$ che è *l'argomento* del quadrato a denominatore. Questo ricorda la *derivata* di un quoziente come quello di $h(t)$:

$$h'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{a^2+t^2} = -\frac{2t}{(a^2+t^2)^2}$$

e vista la presenza di $4t^2$ in $g(t)$, si può valutare $h'(2t)$ ottenendo:

$$h'(2t) = -\frac{4t}{(a^2+4t^2)^2}$$

Adesso il paragone con $g(t)$ è più chiaro: scegliendo $a = 3$:

$$h'(2t) = -4\frac{t}{(9+4t^2)^2} = -4g(t) \longrightarrow g(t) = -\frac{1}{4}h'(2t)$$

Concatenando due proprietà della trasformata di Fourier:

$$\hat{g}(\nu) = -\frac{1}{4}\mathcal{F}[h'(2t)](\nu) = -\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{F}[h'(t)]\left(\frac{\nu}{2}\right)}_{\text{riscalamento}} = -\frac{1}{8}\cdot\underbrace{[2\pi i\nu\mathcal{F}[h(t)]]\left(\frac{\nu}{2}\right)}_{\text{derivazione}}$$
$$= -\frac{\pi i}{4}\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\frac{\pi}{3}e^{-6\pi\left|\frac{\nu}{2}\right|} = -\frac{\pi^2 i}{24}\nu e^{-3\pi|\nu|}$$

In alternativa, se non si vuole usare la proprietà di riscalamento, si può portare il 4 a fattor comune e ottenere a=3/2.

2 Trasformata di distribuzioni

2.1 Richiami di teoria

Lo scopo di introdurre le distribuzioni nella trasformata di Fourier è quello di rilassare l'ipotesi di sommabilità della funzione che si vuole trasformare, potendo quindi lavorare, per esempio, con segnali periodici.
L'obiettivo è impiegare distribuzioni T e funzioni φ che soddisfino

$$\langle\mathcal{F}(T),\varphi\rangle = \langle T,\mathcal{F}(\varphi)\rangle \tag{2.1}$$

E' utile studiare la trasformata di Fourier su una particolare sottoclasse di funzioni sommabili, dette funzioni rapidamente decrescenti. L'insieme delle funzioni rapidamente decrescenti forma uno spazio vettoriale detto spazio di Schwartz, ed è definito come:

$$\mathscr{S} := \left\{\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{t\to\pm\infty} t^p\varphi^{(q)}(t) = 0, \quad \forall p,q\in\mathbb{N}\right\} \tag{2.2}$$

La definizione non è delle più intuitive, ma essenzialmente le funzioni in $\mathscr{S}$ e tutte le loro derivate *decrescono più velocemente di qualsiasi polinomio.* L'importanza delle funzioni $g\in\mathscr{S}$ è la seguente: sono *stabili* rispetto alla trasformata di Fourier, cioè

$$\varphi\in\mathscr{S}\Longrightarrow\mathcal{F}[\varphi]\in\mathscr{S}$$

Le distribuzioni che agiscono sulle funzioni in $\mathscr{S}$ (cioè i funzionali che sono lineari e continui $\forall\varphi\in\mathscr{S}$) si chiamano *distribuzioni temperate* e formano lo spazio $\mathscr{S}'$.
Seguono tre condizioni sufficienti (ma non necessarie) affinchè una distribuzione T sia temperata:

- se $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ è sommabile, allora T_f è una distribuzione temperata

- se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è *localmente* sommabile e a crescita lenta (cioè $|f(t)| \leq A(1+|t|^p)$) allora T_f è una distribuzione temperata. Esempi di funzioni che soddisfano queste condizioni sono le funzioni limitate e i polinomi
- se $T \in \mathscr{D}'$ è a supporto compatto, allora T è una distribuzione temperata

Usando $\varphi \in \mathscr{S}$ e $T \in \mathscr{S}'$, l'espressione in (2.1) è ben definita. Quando si vorrà trasformare una funzione non sommabile, sarà sufficiente applicare (2.1) usando la distribuzione regolare indotta da tale funzione. Inoltre, per semplificare la notazione, data una distribuzione regolare T_f, si scrive

$$\mathcal{F}[T_f] \equiv \mathcal{F}[f] \tag{2.3}$$

La trasformata di Fourier delle distribuzioni soddisfa tutte le proprietà viste nella sezione precedente, sottointendendo che, dove necessario, le derivate presenti nell'ultima proprietà sono derivate distribuzionali.

2.2 Esercizi

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$g(t) = \cos(2t + 1)$$

Soluzione. La funzione $g(t)$ non è sommabile, ma la distribuzione regolare indotta da essa è temperata in quanto funzione limitata (seconda condizione sufficiente vista prima). Quindi esiste la trasformata di Fourier di T_g e per la notazione introdotta in (2.3) si scrive soltanto $\mathcal{F}[T_g] = \mathcal{F}[g] = \mathcal{F}[\cos(2t + 1)]$.
Applicando la proprietà di traslazione e riscalamento in (1.2) con $a = 2$ e $t_0 = -1$:

$$\mathcal{F}[\cos{(2t + 1)}](\nu) = \left[\frac{1}{2}e^{\pi i\nu}\mathcal{F}[\cos{(t)}]\right]\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

L'esercizio è ora ridotto a calcolare la trasformata di Fourier di $\cos{(t)}$. Usandone la definizione:

$$\cos{(t)} = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

ci si appoggia alla trasformata di

$$T(t) = e^{2\pi i x_0 t} \longrightarrow \hat{T} = \delta_{x_0} \tag{2.4}$$

potendo scrivere:

$$\cos{(t)} = \frac{1}{2}(e^{2\pi i(1/2\pi)t} + e^{2\pi i(-1/2\pi)t})$$

cioè la trasformata di (2.4) con $x_0 = 1/2\pi$ per il primo addendo e $x_0 = -1/2\pi$ per il secondo. Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos{(t)}] &= \frac{1}{2}(\delta_{1/2\pi} + \delta_{-1/2\pi}) \\ \mathcal{F}[\cos{(2t + 1)}] &= \frac{1}{4}e^{\pi i\nu} \cdot 2(\delta_{1/\pi} - \delta_{-1/\pi}) = \frac{1}{2}(e^{i}\delta_{1/\pi} + e^{-i}\delta_{-1/\pi}) \end{aligned}$$

ricordando un'utile identità della delta di Dirac:

$$\delta_{x_0}(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta_{x_0/\alpha}$$

In alternativa, come verificato in aula, senza applicare la (1.2) e ragionando da subito con l'identità del coseno:

$$\mathcal{F}[\cos(2t+1)] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{i(2t+1)} + e^{-i(2t+1)}] = \frac{1}{2}\left[e^i\mathcal{F}[e^{i2t}] + e^{-i}\mathcal{F}[e^{-i2t}]\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left[e^i\mathcal{F}[e^{2\pi i(\frac{1}{\pi})t}] + e^{-i}\mathcal{F}[e^{2\pi i(-\frac{1}{\pi})t}]\right] = \frac{1}{2}(e^i\delta_{1/\pi} + e^{-i}\delta_{-1/\pi})$$

Esercizio 2. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$g(t) = \frac{k+t^2}{1+t^2}$$

Soluzione. Anche $g(t)$ non è sommabile ma T_g è una distribuzione temperata per la seconda condizione sufficiente (la funzione è limitata da qualunque polinomio del tipo $A(1+|t|^p)$ con $p \geq 3$). La trasformata a cui si fa affidamento è quella di

$$h(t) = \frac{1}{1+t^2} \longrightarrow \hat{h}(\nu) = \pi e^{-2\pi|\nu|} \tag{2.5}$$

Osservando che

$$k = (k-1)+1$$

la frazione si può spezzare come segue:

$$g(t) = \frac{(k-1)+1+t^2}{1+t^2} = \frac{k-1}{1+t^2} + \frac{1+t^2}{1+t^2} = \frac{k-1}{1+t^2} + 1$$

La trasformata della costante (nel senso delle distribuzioni temperate, visto che non è sommabile ma limitata) si appoggia alla stessa trasformata in (2.4) ma con $x_0 = 0$:

$$T(t) = e^{2\pi i x_0 t} = e^{2\pi i\cdot 0\cdot t} = 1 \longrightarrow \hat{T} = \delta_0$$

mentre per trasformare il primo addendo basta usare (1.4). In conclusione:

$$\hat{g}(\nu) = \delta_0 + (k-1)\pi e^{-2\pi|\nu|}$$

Esercizio 3. Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione

$$T = t^4\delta_2 + \delta_0''$$

Soluzione. Ricordando l'azione della delta di Dirac quando moltiplicata per funzioni in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$:

$$t^4\delta_2 = 2^4\delta_2 = 16\delta_2$$

La distribuzione risultante è una somma di distribuzioni a supporto compatto, cioè una somma di distribuzioni temperate. Quindi $T \in \mathscr{S}'$.
Ora, sfruttando la proprietà di derivazione e appoggiandosi alla trasformata di Fourier della delta di Dirac:

$$\mathcal{F}[\delta_{x_0}] = e^{-2\pi i x_0 \nu}$$

si ottiene:

$$\hat{T} = 16\mathcal{F}[\delta_2] + \mathcal{F}[\delta_0''] = 16e^{-4\pi i\nu} + (2\pi i\nu)^2\mathcal{F}[\delta_0] = 16e^{-4\pi i\nu} - 4\pi^2\nu^2\delta_0$$

Esercizio 4. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$g(t) = tH(t)$$

Soluzione. La funzione non è sommabile ma T_g è una distribuzione temperata per la seconda condizione sufficiente:

$$|g(t)| \leq A(1 + |t|^p), \quad p \geq 2$$

Per la proprietà di moltiplicazione:

$$\hat{g}(\nu) = -\frac{1}{2\pi i}\left[\mathcal{F}[H(t)]\right]' = -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2\pi i} v.p.\frac{1}{\nu} + \frac{\delta_0}{2}\right]' = \left[\frac{1}{4\pi^2} v.p.\frac{1}{\nu} + i\frac{\delta_0}{4\pi}\right]'$$