Distribuzioni

Proprietà Elementari delle Distribuzioni, Derivata Distribuzionale, Convergenza e Supporto di Distribuzioni

---

Richiami di teoria. Elenchiamo in seguito le proprietà fondamentali delle distribuzioni. Osserviamo che, per definire queste proprietà, occorre definire l'effetto che hanno su una generica funzione test $\phi \in \mathcal{D}$.

Proprietà delle distribuzioni

1. Traslazione di $x_0 \in \mathbb{R}$: $\langle T\left(x-x_0\right), \phi(x)\rangle = \langle T(x), \phi\left(x+x_0\right)\rangle$.
2. Riscalamento per $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\langle T(ax), \phi(x)\rangle = \left\langle T(x), \frac{1}{|a|}\phi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle$.
3. Moltiplicazione per $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: $\langle \psi T(x), \phi(x)\rangle = \langle T(x), \psi(x)\phi(x)\rangle$.
4. Derivazione: $\langle T'(x), \phi(x)\rangle = -\langle T(x), \phi'(x)\rangle$.

Esercizio 1. Verifichiamo che la proprietà di riscalamento quando T è una distribuzione regolare. Sia $f \in \mathcal{R}^1_{loc}$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora

$$\left\langle T_{f(ax)}, \phi(x)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\phi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{|a|}\mathrm{d}y = \left\langle T_{f(x)}, \frac{1}{|a|}\phi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle$$

dove abbiamo applicato il cambio di variabile $y = ax \implies \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}y$ e osservato che, se $a < 0$, allora gli estremi di integrazione si invertono, cambiando il segno dell'integrale. Di conseguenza scriviamo $\frac{1}{|a|} = \mathrm{sign}(z)\frac{1}{a}$ per $a \neq 0$.

Esercizio 2. Dati $a, x_0 \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, calcoliamo $\delta(ax - x_0)$.
Soluzione.

$$\langle \delta\left(ax-x_0\right), \phi(x)\rangle = \langle \delta(ax), \phi\left(x+x_0\right)\rangle = \left\langle \delta(x), \frac{1}{|a|}\phi\left(\frac{x}{a}+\frac{x_0}{a}\right)\right\rangle = \frac{1}{|a|}\phi\left(\frac{x_0}{a}\right)$$

Di conseguenza $\delta(ax - x_0) = \frac{1}{|a|}\delta_{x_0/a}$.

Esercizio 3. Sia $\phi(x) \in \mathcal{D}$ tale che $\phi'(0) = -2$. Si calcoli

$$\langle \sin x\delta_0'', \phi\rangle$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che $\sin x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Di consegenza

$$\begin{aligned}\langle \sin x\delta_0'', \phi\rangle = \langle \delta_0'', \sin x\phi\rangle &= \left\langle \delta_0, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[\sin x\phi(x)]\right\rangle \\ &= \langle \delta_0, \phi''(x)\sin(x) + 2\phi'(x)\cos(x) - \phi(x)\sin(x)\rangle \\ &= \phi''(0)\sin(0) + 2\phi'(0)\cos(0) - \phi(0)\sin(0) \\ &= 2\phi'(0)\cos(0) = -4\end{aligned}$$

Richiami di teoria. Vale la pena fare chiarezza sul concetto di derivata di una distribuzione. La definizione generale, valida per qualsiasi distribuzione è la seguente:

$$\langle T'(x), \phi(x) \rangle = - \langle T(x), \phi'(x) \rangle$$

La derivata distribuzionale gode di molte delle proprietà classiche della derivazione per funzioni:

Proprietà delle derivata distrbuzionale

1. $(\lambda T_1 + \mu T_2)' = \lambda T_1' + \mu T_2'$, per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $(T(ax+b))' = aT'(ax+b)$ per $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.
3. $(\psi(x)T(x))' = \psi'(x)T(x) + \psi(x)T'(x)$, per $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Per le distribuzioni regolari, con funzione $f$derivabile e tale che $f' \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$ allora si ha che:

$$T_f'(x) = T_{f'}(x)$$

Tuttavia, se f non è derivabile in un certo insieme di punti, non è ben chiaro come calcolare $T_{f'(x)}$. In generale, la derivata di una distribuzione regolare T_f con f non derivabile può non essere una distribuzione regolare (e cioè $T_f'(x) \neq T_{f'}(x)$), come mostra il seguente Lemma:

Lemma. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ovunque tranne che in un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_k$, dove $f(x)$ presenta al più una discontinuità eliminabile o a salto e tale che $f'(x) \in \mathcal{R}^1_{loc}$, dove definita. Allora

Derivata di distribuzioni regolari con funzione con discontinuità a salto

$$T'_{f(x)}(x) = T_{f'(x)}(x) + \sum_{i=1}^{k} \left[f(x_i^+) - f(x_i^-) \right] \delta_{x_i}(x),$$

dove $f(x_0^\pm) = \lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$.

Il lemma ci dice che, ogni volta che f presenta delle discontinuità a salto, allora la derivata della distribuzione regolare indotta da f presenterà una parte impulsiva, ovvero una somma di delta di Dirac, e quindi non sarà una distribuzione regolare.

Dimostrazione. Studiamo il caso dove f presenta un solo punto di non derivabilità x_0. Il metodo è poi generalizzabile. Scriviamo

$$\begin{aligned}\langle T_f'(x), \phi(x) \rangle &= - \langle T_f(x), \phi'(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x) \mathrm{d}x \\ &= - \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi'(x) \mathrm{d}x - \int_{x_0}^{\infty} f(x)\phi'(x) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

I due integrali possono essere calcolati per parti, considerando che la funzione f in $(-\infty, x_0)$ e (x_0, ∞) è continua (essendo derivabile):

$$- \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi'(x)\, \mathrm{d}x = - \left[f(x)\phi(x) \right]_{-\infty}^{x_0^-} + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x = -f(x_0^-)\phi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x,$$

e

$$- \int_{x_0}^{\infty} f(x)\phi'(x)\, \mathrm{d}x = - \left[f(x)\phi(x) \right]_{x_0^+}^{\infty} + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x = +f(x_0^+)\phi(x_0) + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x.$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
\left\langle T_f'(x), \phi(x) \right\rangle &= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{\infty} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -f(x_0^-)\phi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + f(x_0^+)\phi(x_0) + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\phi(z_0)\left[f(x_0^+) - f(x_0^-)\right] + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \delta_{x_0}(x)\left[f(x_0^+) - f(x_0^-)\right] + \langle T_{f'}(x), \phi(x)\rangle .
\end{aligned}$$

Abbiamo visto dunque come i salti producano delta di Dirac a livello della derivata distribuzionale. Meno facile è capire che cosa succeda quando la funzione che si deriva presenta ad esempio un asintoto in un punto. Non miriamo a presentare una teoria generale che studi questo tipo di fenomeni e ci limitiamo invece a presentare un esempio significativo nel prossimo esercizio.

Esercizio 4. Si calcoli la derivata distribuzionale di T_f, dove $f(x) = \ln|x|$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che la funzione $f(x)$ è $\mathcal{R}^1_{loc}$. Tuttavia, presenta un asintoto verticale in $x_0 = 0$, non è quindi possibile usare la formula per la derivata distribuzionale di funzioni con discontinuità eliminabili o a salto. Utilizziamo le definizione di derivata distribuzionale:

$$\begin{aligned}
\left\langle T'_{\ln|x|}, \phi \right\rangle &= -\left\langle T_{\ln|x|}, \phi' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln|x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[[\ln|x|\phi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + [\ln|x|\phi(x)]_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln(\varepsilon)\phi(-\epsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x - \ln(\varepsilon)\phi(\epsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln(\varepsilon)\left[\phi(-\epsilon) - \phi(\epsilon)\right] - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln(\varepsilon)(\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon))\right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\varepsilon\ln(\varepsilon)\left(\frac{\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)}{2\varepsilon}\right)\right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\varepsilon\ln(\varepsilon)\phi'(0)\right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right] =: \left\langle \mathrm{v.p}\cdot\frac{1}{x}, \phi \right\rangle,
\end{aligned}$$

Osserviamo che dire che la derivata distribuzionale di $f(x)$ è $\frac{1}{x}$ è sbagliato, in quanto $\frac{1}{x}$ non è $\mathcal{R}^1_{loc}$, quindi $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x$ non è ben definito. In conclusione $T'_{\ln|x|} = \mathrm{v.p.}\frac{1}{x}$.

Nota. Si osservi che la distribuzione $\mathrm{v.p.}\frac{1}{n}$ è tale che $x\left[\mathrm{v.p.}\frac{1}{n}\right] = T_1$. Infatti

$$\left\langle x\left[\mathrm{v.p}\cdot\frac{1}{n}\right], \phi \right\rangle = \left\langle \mathrm{v.p.}\frac{1}{n}, x\phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}x\phi(x)\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}x\phi(x)\mathrm{d}x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$$

Di conseguenza $\left\langle x\left[\mathrm{v.p}\cdot\frac{1}{n}\right], \phi\right\rangle = \langle T_1, \phi\rangle$

Esercizio 5. Sia $f(x) = \mathbb{1}_{[x,\infty]}(0)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si calcoli T'_f

Soluzione. Innanzitutto, osserviamo che $f(x)$ si può scrivere come segue:

$$f(x) = \mathbb{1}_{[x,\infty]}(0) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases} = H(-x)$$

Dove $H(x)$ denota la funzione gradino di Heaviside. La funzione gradino ha una discontinuità a salto in 0 ed è costante altrove. Per la formula vista sopra allora, la parte regolare della derivata distribuzionale sarà nulla mentre la parte impulsiva sarà data da una delta di Dirac in 0 ma occorre fare attenzione al segno associato al "salto" che avviene nell'origine:

$$T'_f = \left(\lim_{x\to 0^+} H(-x) - \lim_{x\to 0^-} H(-x) \right) \delta_0(x) = (0-1)\delta_0(x) = -\delta_0(x)$$

Esercizio 6. Sia $f(x) = |x|\; \mathbb{1}|_{[-1,2]}(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si calcoli T'_f

Soluzione. Innanzitutto, osserviamo che $f(x)$ si può scrivere come segue:

$$f(x) = |x|\mathbb{1}_{[-1,2]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1 \\ -x & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ x & \text{per } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

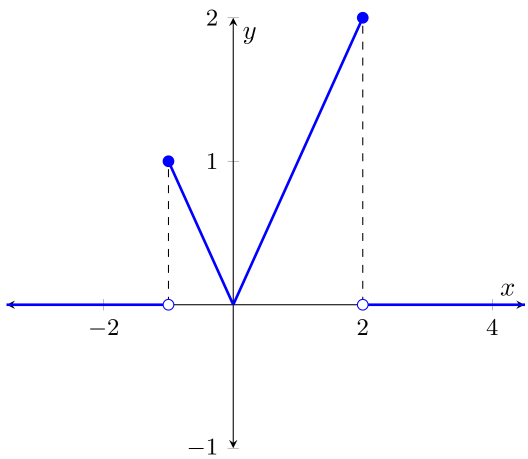

Figura 1: Grafico di $f(x) = |x|\mathbb{1}_{[-1,2]}(x)$.

E' immediato constatare che la funzione ha due discontinuità a salto in $x = -1$ e in $x = 2$. Per la formula vista sopra allora, si ha che:

$$T'_f = \underbrace{T_{\text{sign}(x)\mathbb{1}_{[-1,2]}(x)}}_{\text{parte regolare}} + \underbrace{\delta_{-1}(x) - 2\delta_2(x)}_{\text{parte impulsiva}}$$

Esercizio 7. Sia $f(x) = |x-1| + \text{sign}(x)\cos x$ con $x \in \mathbb{R}$. Si calcoli T'_f

Soluzione. Innanzitutto, osserviamo che $f(x)$ si può scrivere come segue:

$$f(x) = |x-1| + \text{sign}(x)\cos x = \begin{cases} 1 - x - \cos x & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \\ 1 - x + \cos x & \text{per } 0 < x < 1 \\ x - 1 + \cos x & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

E' immediato constatare che la funzione ha una discontinuità a salto (di "ampiezza" 2) in $x = 0$.

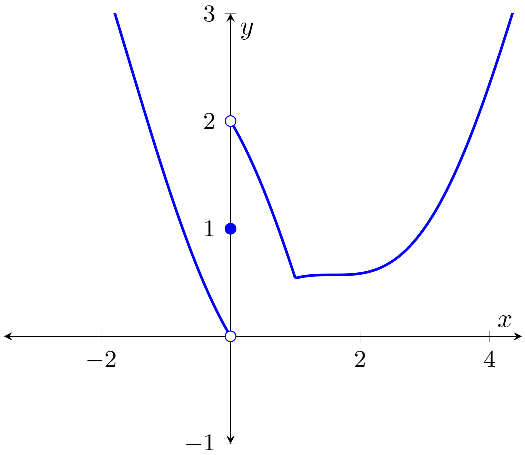

Figura 2: Grafico di $f(x) = |x - 1| + \operatorname{sign}(x)\cos x$.

Per la formula vista sopra allora, si ha che:

$$T'_f = \underbrace{T_{\text{sign}}(x-1) - \operatorname{sign}(x)\sin x}_{\text{parte regolare}} + \underbrace{2\delta_0(x)}_{\text{parte impulsiva}}$$

Esercizio 8. Sia $f(x) = \operatorname{sign}(H(3x))$. Si calcoli T'_f

Soluzione. La soluzione in questo caso è immediata. Basta osservare che

$$f(x) = \operatorname{sign}(H(3x)) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases} = H(x)$$

E quindi $T'_f = \delta_0(x)$.

Esercizio 9. Sia $f(x) = |2x|H(1-x)$ e $T = T_f + e^{2x}\delta_3(x)$. Si calcoli T'

Soluzione. Vediamo prima di tutto T_f, si ha che

$$f(x) = |2x|H(1-x) = \begin{cases} -2x & \text{per } x \leq 0 \\ 2x & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

La funzione ha un salto di ampiezza -2 (nel senso che il gradino è a "scendere") per $x = 1$, per cui, usando la regola della derivata del prodotto sulla parte regolare e aggiungendo la parte impulsiva si ha: $T'_f = 2\operatorname{sign}(x)H(1-x) - 2\delta_1$.

Per quanto riguarda l'altro addendo, per la regola della derivata del prodotto tra una distribuzione e una funzione liscia si ha $\left(e^{2x}\delta_3(x)\right)' = 2e^{2x}\delta_3(x) + e^{2x}\delta'_3(x)$. A questo punto basta notare che

$$\left\langle 2e^{2x}\delta_3(x), \phi(x)\right\rangle = \left\langle \delta_3(x), 2e^{2x}\phi(x)\right\rangle = 2e^6\phi(3) = 2e^6\delta_3(x)$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned}\left\langle e^{2x}\delta'_3(x), \phi(x)\right\rangle &= \left\langle \delta'_3(x), e^{2x}\phi(x)\right\rangle = -\left\langle \delta_3(x), 2e^{2x}\phi(x) + e^{2x}\phi'(x)\right\rangle \\ &= -2e^6\phi(3) - e^6\phi'(3) = -2e^6\delta_3(x) + e^6\delta'_3(x)\end{aligned}$$

Mettendo tutto assieme si ha:

$$\begin{aligned} T' &= T'_f + \left(e^{2x}\delta_3(x)\right)' = 2\,\mathrm{sign}(x)H(1-x) - 2\delta_1 + \cancel{2e^6\delta_3(x)} - \cancel{2e^6\delta_3(x)} + e^6\delta'_3(x) \\ &= 2\,\mathrm{sign}(x)H(1-x) - 2\delta_1 + e^6\delta'_3(x) \end{aligned}$$

Esercizio 10. Sia $f(x) = \mathrm{sign}\left(x^3\right) - \mathrm{sign}\left(x^4\right) + \mathrm{sign}\left(x^5\right)$. Si calcoli $T_f^{(2)}$

Soluzione. Notiamo che:

$$f(x) = \mathrm{sign}(H(3x)) = \begin{cases} -3 & \text{per } x \le 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

La funzione ha chiaramente un salto di "ampiezza" 4 in $x = 0$ mentre, essendo le funzioni segno costanti per $x \neq 0$, esse non danno contributo (la parte regolare è nulla). Si ha quindi:

$$T'_f = 4\delta_0(x) \Longrightarrow T_f^{(2)} = 4\delta'_0(x)$$

Esercizio 11. Si calcoli la derivata distribuzionale della distribuzione indotta da $f(x) = (5x + 3)H(x)$

Soluzione. Notiamo che: Innanzitutto osserviamo che la funzione di Heaviside ha una sola discontinuità a salto in 0 ed è costante altrove, di conseguenza la sua derivata è una delta di Dirac in 0. Di conseguenza scriviamo

$$T'_f(x) = ((5x+3)T_H(x))' = 5T_H(x) + (5x+3)\delta_0(x) = 5T_H(x) + 3\delta_0(x)$$

Esercizio 12. Si calcoli la derivata distribuzionale della distribuzione indotta da $f(x) = |x| - x^2$

Soluzione. Si noti che $f(x)$ è continua ovunque, per cui la derivata distribuzionale non avrà parte impulsiva. Di conseguenza scriviamo

$$T'_f = T_{f'} \quad \text{con} \quad f'(x) = \mathrm{sign}(x) - 2x$$

<u>Richiami di teoria</u>. Possiamo stabilire una nozione di convergenza per le distribuzioni. Data una successione di distribuzioni T_n, diciamo che $T_n \to T$ se $\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}$.

Lemma. Date due successioni di distribuzioni $T_n \to T$ e $S_n \to S$, e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora

$$\lambda T_n + \mu S_n \to \lambda T + \mu S.$$

Esercizio 13. Si calcoli il limite distribuzionale di $f_n(x) = \sqrt{n}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$.

Soluzione. Osserviamo che, fissato n, $f_n(x)$ induce una distribuzione regolare T_{f_n}, dove

$$\langle T_{f_n}, \phi\rangle = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{n}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\left(\Phi\left(\frac{1}{n}\right) - \Phi(0)\right),$$

dove $\Phi(x)$ è una generica primitiva di $\phi(x)$, ovvero $\Phi'(x) = \phi(x)$. Consideriamo ora il limite per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{f_n}, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\left(\Phi\left(\frac{1}{n}\right) - \Phi(0)\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(0)}{\sqrt{n}} = 0$$

Ne segue che $\sqrt{n}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \to 0$ nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 14. Si calcoli il limite distribuzionale di $f_n(x) = n^2 \mathbb{1}_{[-\frac{2}{n},\frac{2}{n}]}(x)$.

Soluzione. Osserviamo che, fissato n, $f_n(x)$ induce una distribuzione regolare T_{f_n}, dove

$$\langle T_{f_n}, \phi\rangle = \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} n^2\phi(x)\,\mathrm{d}x = n^2\int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = n^2\left(\Phi\left(\frac{2}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{n}\right)\right),$$

dove $\Phi(x)$ è una generica primitiva di $\phi(x)$. Consideriamo ora il limite per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_{f_n}, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} 4n\frac{\left(\Phi\left(\frac{2}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{n}\right)\right)}{\frac{4}{n}} = \lim_{n\to\infty} 4n\phi(0)$$

Considerata una generica funzione test ϕ tale che $\phi(z) \neq 0$, allora la successione $\langle T_{f_n}, \phi\rangle$ diverge. Ne segue che $n^2\mathbb{1}_{[-\frac{2}{n},\frac{2}{n}]}(x)$ non ammette limite nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 15. Si calcoli il limite distribuzionale di $T_n(x) = e^x\delta_{\log n}$.

Soluzione. Si ha che:

$$\lim_{n\to\infty}\langle e^x\delta_{\log n}, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} e^{\log n}\phi(\log n) = \lim_{n\to\infty} n\phi(\log n) = 0$$

Dove il limite si annulla a causa del supporto limitato di $\phi(x)$, cioè $\phi \in \mathcal{D}$, allora $\exists \tilde{n} : \forall n \geq \tilde{n}, \phi(n) = 0$

Esercizio 16. Si calcoli il limite distribuzionale di $n^n\delta_n$.

Soluzione. Osserviamo che, fissato n,

$$\langle n^n\delta_n, \phi\rangle = n^n\phi(n) \to 0$$

siccome $\phi \in \mathcal{D}$, allora $\exists\, \tilde{n} : \forall n \geq \tilde{n}, \phi(n) = 0$

Esercizio 17. Si calcoli il limite distribuzionale di $\delta_{(-1)^n}$

Soluzione. Osserviamo che, per n pari,

$$\left\langle \delta_{(-1)^n}, \phi\right\rangle = \langle \delta_1, \phi\rangle = \phi(1)$$

mentre per n dispari,

$$\left\langle \delta_{(-1)^n}, \phi\right\rangle = \langle \delta_{-1}, \phi\rangle = \phi(-1)$$

Considerata una generica funzione ϕ con $\phi(1) \neq \phi(-1)$, risulta immediato osservare che la distribuzione $\delta_{(-1)^n}$ non converge.

Esercizio 18. Si calcoli il limite distribuzionale di $f_n(x) = \sin(nx)$.

Soluzione. Per prima cosa ricordiamo da Analisi II che la successione di funzioni $\sin(nx)$ non ammette limite (nel senso classico del termine) nemmeno puntualmente. Osserviamo che, fissato n, $f_n(x)$ induce una distribuzione regolare T_{f_n}, dove utilizzando la definizione ed integrando per parti

$$\langle T_{f_n}, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(nx)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{n}\cos(nx)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(nx)\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Consideriamo ora il limite per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} |\langle T_{f_n}, \phi\rangle| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |\phi'|\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Ne segue che $\sin(nx) \to 0$ nel senso delle distribuzioni.

Da fare a casa. Ripetere con $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$ e $g_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$.

Esercizio 19. Si calcoli il limite distribuzionale di $e^{-\frac{1}{n}}\delta_{\frac{1}{n}}$

Soluzione. Osserviamo che, fissato n,

$$\langle e^{-\frac{1}{n}}\delta_{\frac{1}{n}}, \phi\rangle = e^{-\frac{1}{n}}\phi\left(\frac{1}{n}\right) \to \phi(0) \implies e^{-\frac{1}{n}}\delta_{\frac{1}{n}} \to \delta_0.$$

Da fare a casa. Ripetere con $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0)$ ed $S_n = \sqrt{n}(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$.

Esercizio 20. Si calcoli il limite distribuzionale di $T_n = n\left[\delta_0\left(x - \frac{1}{n}\right) - \delta_0\left(x + \frac{1}{2n}\right)\right]$

Soluzione. Osserviamo che, fissato n,

$$\begin{aligned}
\langle T_n, \phi\rangle &= \left\langle n\left[\delta_0\left(x - \frac{1}{n}\right) - \delta_0\left(x + \frac{1}{2n}\right)\right], \phi(x)\right\rangle \\
&= n\left\langle \delta_0\left(x - \frac{1}{n}\right), \phi(x)\right\rangle - n\left\langle \delta_0\left(x + \frac{1}{2n}\right), \phi(x)\right\rangle \\
&= n\left\langle \delta_0(x), \phi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right\rangle - n\left\langle \delta_0(x), \phi\left(x - \frac{1}{2n}\right)\right\rangle \\
&= n\phi\left(\frac{1}{n}\right) - n\phi\left(-\frac{1}{2n}\right) \\
&= n\left[\phi\left(\frac{1}{n}\right) - \phi(0)\right] + n\left[\phi(0) - \phi\left(-\frac{1}{2n}\right)\right] \\
&= \frac{\phi\left(\frac{1}{n}\right) - \phi(0)}{1/n} + \frac{\phi(0) - \phi\left(-\frac{1}{2n}\right)}{1/n} \\
&= \frac{\phi\left(\frac{1}{n}\right) - \phi(0)}{1/n} + \frac{1}{2}\frac{\phi\left(-\frac{1}{2n}\right) - \phi(0)}{-1/2n} \to \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi'(0) = \frac{3}{2}\phi'(0)
\end{aligned}$$

In conclusione $T_n \to \frac{3}{2}\phi_0'$.

Da fare a casa. Si calcoli il limite distribuzionale di $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{2n^2}})$

Esercizio 21. Si calcoli il limite distribuzionale di $T_n = (-1)^n\delta_{\frac{n}{\log(n^2+1)}} - \delta'_{\frac{(-1)^n}{n}}$

Soluzione. Per comodità, poniamo $T_n = U_n - V_n$ con $U_n = (-1)^n\delta_{\frac{n}{\log(n^2+1)}}$ e $V_n = \delta'_{\frac{(-1)^n}{n}}$ Per quanto riguarda U_n si ha:

$$U_n = \left\langle (-1)^n\delta_{\frac{n}{\log(n^2+1)}}, \phi(x)\right\rangle = (-1)^n\phi\left(\frac{n}{\log\left(n^2+1\right)}\right) \to 0$$

Il limite risulta nullo in quanto $\frac{n}{\log(n^2+1)} \to \infty$ e per il supporto limitato di $\phi(x)$.

Passiamo a V_n:

$$V_n = \left\langle \delta'_{\frac{(-1)^n}{n}}, \phi(x)\right\rangle = -\left\langle \delta_{\frac{(-1)^n}{n}}, \phi'(x)\right\rangle = -\phi'\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \to -\phi'(0) = \langle\delta_0', \phi(x)\rangle = \delta_0'$$

E quindi, mettendo tutto insieme: $V_n = U_n - V_n \to 0 - \delta_0' = -\delta_0'$

Esercizio 22. Si calcoli il limite distribuzionale di $T_n = \frac{n^2}{1-n}\left(\delta_{\frac{1}{n^2}}(x) - \delta_{\frac{1}{n}}(x)\right)$

Soluzione. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \phi(x)\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1-n}\left(\phi\left(\frac{1}{n^2}\right) - \phi\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi\left(\frac{1}{n^2}\right) - \phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

Per capire cosa succede per $n \to \infty$, può essere utile porre $\varepsilon = \frac{1}{n}$ cosi che $n \to \varepsilon \to 0$, e il limite precedente diventa:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\phi\left(\varepsilon^2\right) - \phi(\varepsilon)}{\varepsilon^2 - \varepsilon} \xrightarrow{\text{De l'Hopital}} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\varepsilon\phi'\left(\varepsilon^2\right) - \phi'(\varepsilon)}{2\varepsilon - 1} = \phi'(0)$$

E quindi concludiamo che $\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \phi(x)\rangle = \phi'(0) = \langle -\delta_0'(x), \phi(x)\rangle = -\delta_0'(x)$

Esercizio 23. Si calcoli il limite distribuzionale della seguente successione di distribuzioni:

$$T_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n} k\delta_{\frac{k}{n}}$$

Soluzione. Possiamo notare che:

$$\langle T_n, \phi\rangle = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n} k\phi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n}\phi\left(\frac{k}{n}\right)$$

Dove l'ultimo termine di destra definisce una somma integrale della funzione $x\phi(x)$ sull'intervallo $[0,2]$. Infatti, ricordiamo che, data $g(x)$ integrabile su $[a,b]$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)}_{\text{somma integrale}} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

In particolare, se scegliamo $a = 0$ e $b = 2$, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{2}{n}k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n}\sum_{k=1}^{2n} g\left(\frac{2}{2n}k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Nel nostro caso si ha $g(x) = x\phi(x)$, e allora:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n}\phi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^2 x\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{[0,2]}\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

Possiamo quindi concludere che:

$$T_n \to T_f, \quad \text{con} \quad f = x\mathbb{1}_{[0,2]}$$

<u>Richiami di teoria</u>. Definiamo il *supporto* di una distribuzione T come il luogo dei punti dove essa non è nulla, per una qualche funzione test. Il supporto può essere definito più agilmente come complementare dell'insieme dove la distribuzione è nulla per qualsiasi funzione test. Ovvero

Supporto di una distribuzione

$$\mathrm{supp}_T = \mathbb{R} \setminus \bigcup\{A \text{ aperto} : \forall\phi \in \mathcal{D} \text{ con } \mathrm{supp}_\phi \subseteq A,\ \langle T, \phi\rangle = 0\}.$$

Se supp_T è un insieme compatto, allora si dice che T è una *distribuzione a supporto compatto*. Osserviamo che, per le distribuzioni a supporto compatto, è possibile estendere in modo naturale l'azione di T da $\mathcal{D}$ a tutto $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 24. Sia $f \in \mathcal{R}^1_{loc}$. Si mostri che $\mathrm{supp}_{T_f} = \mathrm{supp}_f$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che se $f(x) \neq 0$, allora è possibile trovare una funzione $\phi \in \mathcal{D}$ tale che $\langle T_f, \phi \rangle \neq 0$, basta che $\phi(x) \neq 0$ e definita appropriatamente altrove. Consideriamo a questo punto $\phi \in \mathcal{D}$ tale che $\mathrm{supp}_\phi \cap \mathrm{supp}_f = \emptyset$. Allora

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Deduciamo quindi che l'insieme in cui T_f si annulla (per qualsiasi ϕ) coincide con l'insieme dove si annulla f. Passando al complementare otteniamo la tesi.

Esercizio 25. Si determini il supporto di $T = \delta'(x+2) - T_H(x)$.

Soluzione. Osserviamo che

$$\langle T, \phi \rangle = -\phi'(-2) - \int_0^\infty \phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Di conseguenza è immediato osservare che $\{2\} \cup [0,\infty) \subseteq \mathrm{supp}_T$. Per verificare che il supporto coincide con tale insieme, consideriamo una funzione ϕ con $\mathrm{supp}_\phi \cap (\{2\} \cup [0,\infty)) = \emptyset$. Allora

$$\langle T, \phi \rangle = -\phi'(-2) - \int_0^\infty \phi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Esercizio 26. Si determini il supporto di $T = x\delta_0$.

Soluzione. Osserviamo che

$$\langle T, \phi \rangle = \langle \delta_0, x\phi \rangle = 0,$$

di conseguenza $\mathrm{supp}_T = \emptyset$.

Esercizio 27. Si determini il supporto di T_{x^2-x}

Soluzione. Essendo T una distribuzione regolare, per quando detto sopra il suo supporto coinciderà con quello della funzione che induce la distribuzione stessa. Si ha evidentemente che $\mathrm{supp}\,(T_{x^2-x}) = \mathrm{supp}\,\big(x^2 - x\big) = \mathbb{R}$. Evidentemente non si tratta di un supporto compatto.

Nota. $f(x) = x^2 - x$ si annulla per $x = 1$ e $x = 0$, tuttavia il suo supporto NON è dato da $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ poiché il supporto di una funzione è definito come la chiusura dell'insieme dei punti del dominio dove la funzione non si annulla. Evidentemente la chiusura di tale insieme contiene i due punti singolari in cui f si annulla.

Esercizio 28. Si determini il supporto di $T = x\delta_0$.

Soluzione. Osserviamo che

$$\langle T, \phi \rangle = \langle \delta_0, x\phi \rangle = 0 \cdot \phi(0) = 0,$$

di conseguenza $\mathrm{supp}_T = \emptyset$.

Esercizio 29. Si determini il supporto di $T = T_{p_1(x)} - \delta_{\frac{1}{2}}$

Soluzione. Essendo $T_{p_1(x)}$ una distribuzione regolare si ha che $\operatorname{supp}\left(T_{p_1(x)}\right) = \operatorname{supp}\left(p_1(x)\right) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Per quando riguarda la delta di Dirac, sappiamo che $\operatorname{supp}\left(\delta_{\frac{1}{2}}\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Concludiamo che $\operatorname{supp}\left(T_{p_1(x)} - \delta_{\frac{1}{2}}\right) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Notiamo che si tratta di un supporto compatto.

Esercizio 30. Si determini il supporto di $T = e^x \delta_{32}'' + x^6 \delta_{-12}$

Soluzione. Si ha che:

$$\langle e^x \delta_{32}'', \phi(x) \rangle = \langle \delta_{32}'', e^x \phi(x) \rangle = e^{32}\phi''(32) + 2e^{32}\phi'(32) + e^{32}\phi(32)$$

Il supporto di questa distribuzione è evidentemente $\operatorname{supp}\left(e^x \delta_{32}''\right) = \{32\}$ (ricordiamo che, in generale, per la n-esima derivata della delta di Dirac si ha $\operatorname{supp}\left(\delta_{x_0}^{(n)}\right) = \{x_0\}$).

L'altro addendo è dato dalla distribuzione $x^6 \delta_{-12}$, per cui:

$$\left\langle x^6 \delta_{-12}, \phi(x) \right\rangle = x^6 \phi(-12)$$

Il supporto di questa distribuzione è evidentemente $\operatorname{supp}\left(x^6 \delta_{-12}\right) = \{-12\}$.

In conclusione $\operatorname{supp}\left(e^x \delta_{32}'' + x^6 \delta_{-12}\right) = \{32\} \cup \{-12\}$. Si tratta di un supporto compatto.

Esercizio 31. Si determini il supporto di $T = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \delta_{k^2}$

Soluzione. Osserviamo che

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-k} \phi\left(k^2\right)$$

Di conseguenza osserviamo che $\left\{n^2 : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \operatorname{supp}_T$, considerando, per ciascun n, la funzione test $\phi_n = p_1\left(x - n^2\right)$, per cui $\langle T, \phi_n \rangle = 1$. Per verificare che il supporto coincide con tale insieme, consideriamo una funzione ϕ con $\operatorname{supp}_{\ \phi} \cap \left\{n^2 : n \in \mathbb{N}\right\} = \emptyset$. Allora

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-k} \phi\left(k^2\right) = 0$$

Evidentemente il supporto non è compatto.