Trasformata di Laplace

Esercizi

Metodi matematici per l'ingegneria

June 2, 2024

Politecnico di Torino

Table of Contents

se $\int_a^b |f(t)|dt < +\infty \quad [a, b] \subset [0, +\infty) \quad \Omega_f :== \{s \in \mathbb{C} : f(t) \cdot e^{-st}$ è sommabile$\}$

allora $\mathscr{L}[f(t)](s) := \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$

la convergenza della trasformata di Laplace dipende solamente dalla parte reale (λ) di s $\in \Omega_f$

$\lambda_f :=$ inf$\{$Re(s) : $f(t) \cdot e^{-st}$ è sommabile$\}$

Esercizio 1

Trova l'insieme Ω_f e la trasformata di Laplace di:

$$f(t) = t \cdot sin(\omega t) \cdot H(t)$$

Quale risposta è corretta?

1. Non posso trasformare la funzione
2. $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re(s)} > 0\}, \mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
3. $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re(s)} > 0\}, \mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
4. $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re(s)} > 1\}, \mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$

Esercizio 2

1 Trasformata di Laplace per funzioni

Trova l'insieme Ω_f e calcola la trasformata di Laplace di:

$$f(t) = (t-3)\cdot H(t-2)\cdot e^{t+1}$$

Quale risposta è corretta?

1. $\lambda_f = 1, \mathscr{L}[f(t)](s) = e^{3-2s}\cdot\frac{2-s}{(s-1)^2}$
2. $\lambda_f = 0, \mathscr{L}[f(t)](s) = e^{3-2s}\cdot\frac{2-s}{(s-1)^2}$
3. $\lambda_f = 1, \mathscr{L}[f(t)](s) = e^{3-3s}\cdot\frac{2-s}{(s-2)^2}$
4. $\lambda_f = 0, \mathscr{L}[f(t)](s) = e^{3-3s}\cdot\frac{2-s}{(s-2)^2}$

Esercizio 3

Trova l'insieme Ω_f e calcola la trasformata di Laplace di:

$$f(t) = H(t) \cdot e^{t-1} + H(t-2) \cdot cos(t)$$

Quale risposta è corretta?

1. $\lambda_f = 1, \mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{s-1} + cos(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{s}{s^2+1} - sin(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{(s-2)^2+1}$
2. $\lambda_f = 0, \mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{s-1} + cos(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{s}{s^2+1} - sin(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{(s-2)^2+1}$
3. $\lambda_f = 0, \mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{s-1} + cos(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{s}{s^2+1} - sin(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$
4. $\lambda_f = 1, \mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{s-1} + cos(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{s}{s^2+1} - sin(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$

Table of Contents

Esercizio 1

Calcola la trasformata di Laplace di:

$$T = t^4 \cdot \delta_3$$

Quale risposta è corretta?

1. $L[T](s) = 81 \cdot e^{3s}$
2. $L[T](s) = -81 \cdot e^{3s}$
3. $L[T](s) = 81 \cdot e^{-3s}$
4. $L[T](s) = -81 \cdot e^{-3s}$

La **Trasformata di Laplace è iniettiva** $\implies \mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t)$

Formula di Heaviside: $M_j = \frac{1}{(l-j)!} \left\{ \frac{d^{l-j}}{ds^{l-j}} \left[(s - p_M)^l \cdot \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right\}_{s=p_M}$

Espansione in fratti semplici $\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)}$

se il grado del numeratore N(s) è maggiore o uguale al grado del denominatore D(s), allora, la distribuzione nel dominio del tempo avrà almeno una delta di Dirac.

Esercizio 1

Calcola la anti trasformata di Laplace di:

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 4}{s^3 + 3s^2 + s + 3}$$

Quale risposta è corretta?

1. $[e^{3t} + cos(t)] \cdot H(t)$
2. $[e^{3t} + cos(t)] \cdot H(t-3)$
3. $[e^{-3t} + cos(t)] \cdot H(t-3)$
4. $[e^{-3t} + sin(t)] \cdot H(t)$

Esercizio 2

Calcola la anti trasformata di Laplace di:

$$F(s) = \frac{s^2 - 3s + 4}{(s+1)(s-2)^2}$$

Quale risposta è corretta?

1. $\frac{8}{9} \cdot e^{-t} \cdot H(t) + \frac{1}{9} \cdot e^{2t} \cdot H(t) + \frac{2}{3} \cdot e^{2t} \cdot t$
2. $\frac{1}{9} \cdot e^{-t} \cdot H(t) + \frac{8}{9} \cdot e^{2t} \cdot H(t) + \frac{2}{3} \cdot e^{2t} \cdot t \cdot H(t)$
3. $\frac{8}{9} \cdot e^{2t} \cdot H(t) + \frac{1}{9} \cdot e^{-t} \cdot H(t) + \frac{2}{3} \cdot e^{-t} \cdot t \cdot H(t)$
4. $\frac{8}{9} \cdot e^{-t} \cdot H(t) + \frac{1}{9} \cdot e^{2t} \cdot H(t) + \frac{2}{3} \cdot e^{2t} \cdot t \cdot H(t)$

Esercizio 3

Calcola la anti trasformata di Laplace di:

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 3}{s^3 - 4s^2 - 15s + 18}$$

Quale risposta è corretta?

1. $\delta_0 - \frac{7}{20} \cdot e^{t} \cdot H(t) - \frac{7}{12} \cdot e^{-3t} \cdot H(t) + \frac{89}{15} \cdot e^{-6t} \cdot H(t)$
2. $-\frac{7}{20} \cdot e^{t} \cdot H(t) - \frac{7}{12} \cdot e^{-3t} \cdot H(t) + \frac{89}{15} \cdot e^{6t} \cdot H(t)$
3. $\delta_0 - \frac{7}{20} \cdot e^{t} \cdot H(t) - \frac{7}{12} \cdot e^{-3t} \cdot H(t) + \frac{89}{15} \cdot e^{6t} \cdot H(t)$
4. $-\frac{7}{20} \cdot e^{t} \cdot H(t) - \frac{7}{12} \cdot e^{-3t} \cdot H(t) + \frac{89}{15} \cdot e^{-6t} \cdot H(t)$

Trasformata di Laplace *Thank you for listening!*

Any questions?