

La trasformata di Fourier

Vincenzo Recupero

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

`vincenzo.recupero@polito.it`


Versione: 14 giugno 2013

Revisione: 1 giugno 2016

Metodi Matematici per l'Ingegneria

05BQ (Suddivisione alfabetica A-L)

Dispense di Analisi

Avvertenza: Il simbolo  all'inizio di una dimostrazione significa che tale dimostrazione è stata omessa durante la lezione.

1 Trasformata di Fourier: prime proprietà

Definizione 1.1. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sommabile, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$ sono convergenti. Si dice *trasformata di Fourier di g* la funzione $\mathcal{F}(g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da


$$\mathcal{F}(g)(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Si usa anche la notazione $\hat{g} := \mathcal{F}(g)$.

Si osservi che la definizione ha senso perché per ν fissato si ha $|g(t)e^{-2\pi i \nu t}| = |g(t)|$ per ogni t , quindi $g(t)e^{-2\pi i \nu t}$ è integrabile per ogni ν grazie al criterio del confronto per gli integrali impropri. È il caso di tenere presente che l'integrale in (1.1) potrebbe convergere anche se g non è sommabile, per cui la trasformata di Fourier può essere definita anche per alcune funzioni non sommabili. Al momento non consideriamo questa eventualità perché rientrerà nella teoria più generale nell'ambito delle distribuzioni. Spesso scriveremo $\int_{\mathbb{R}}$ invece che $\int_{-\infty}^{+\infty}$, tuttavia si consiglia di non adottare questa notazione quando si effettua un cambio di variabile. Vediamo subito alcune proprietà della trasformata di Fourier.

Proposizione 1.1. Siano $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sommabili, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\nu_0, t_0, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Allora

- (i) $\mathcal{F}(\lambda g + \mu h) = \lambda \mathcal{F}(g) + \mu \mathcal{F}(h)$.
- (ii) $\mathcal{F}(e^{2\pi i \nu_0 t} g(t))(\nu) = \mathcal{F}(g(t))(\nu - \nu_0)$ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\mathcal{F}(g(t - t_0))(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu} \mathcal{F}(g(t))(\nu)$ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$.
- (iv) $\mathcal{F}(g(at))(\nu) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(g(t))\left(\frac{\nu}{a}\right)$ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$.
- (v) $\mathcal{F}(g(-t))(\nu) = \mathcal{F}(g(t))(-\nu)$ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$.
- (vi) $\mathcal{F}(\overline{g(t)})(\nu) = \overline{\mathcal{F}(g(t))(-\nu)}$ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.  (tuttavia queste dimostrazioni sono facili e utili per ricavare le formule)

- (i) Segue subito dalla linearità dell'integrale.
- (ii) $\mathcal{F}(e^{2\pi i \nu_0 t} g(t))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \nu_0 t} g(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i (\nu - \nu_0) t} dt = \mathcal{F}(g(t))(\nu - \nu_0)$.
- (iii) Grazie al cambio di variabile $s = t - t_0$ si ha che $\mathcal{F}(g(t - t_0))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t - t_0) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-2\pi i \nu (s + t_0)} ds = e^{-2\pi i \nu t_0} \int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-2\pi i \nu s} ds = e^{-2\pi i \nu t_0} \mathcal{F}(g)(\nu)$.
- (iv) Effettuando il cambio di variabile $s = at$ si trova

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g(at))(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(at) e^{-2\pi i \nu t} dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-(2\pi i \nu s)/a} \frac{1}{a} ds & \text{se } a > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-(2\pi i \nu s)/a} \frac{1}{-a} ds & \text{se } a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-[2\pi i (\nu/a) s]} ds = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(g(s))\left(\frac{\nu}{a}\right). \end{aligned}$$

- (v) Segue dal punto precedente prendendo $a = -1$.
- (vi) $\mathcal{F}(\overline{g(t)})(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)} e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t) e^{2\pi i \nu t}} dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{2\pi i \nu t} dt} = \overline{\mathcal{F}(g(t))(-\nu)}$.

□

Osserviamo che $e^{-2\pi i \nu t} = \cos(-2\pi \nu t) + i \sin(-2\pi \nu t) = \cos(2\pi \nu t) - i \sin(2\pi \nu t)$, perché \cos è pari e \sin è dispari. Quindi

$$\mathcal{F}(g)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \cos(2\pi \nu t) dt - i \int_{\mathbb{R}} g(t) \sin(2\pi \nu t) dt. \quad (1.2)$$

Si osservi anche che il primo integrale è una funzione pari di ν , mentre il secondo è una funzione dispari. Se g è pari, si ha che $g(t) \sin(2\pi \nu t)$ è dispari (in t), per cui il secondo integrale è nullo. Se g è dispari, si ha che $g(t) \cos(2\pi \nu t)$ è dispari (in t), per cui il primo integrale è nullo. Abbiamo quindi provato la seguente

Proposizione 1.2. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sommabile. Allora

- (i) g pari $\implies \mathcal{F}(g)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \cos(2\pi \nu t) dt$ e $\mathcal{F}(g)$ è pari.
- (ii) g dispari $\implies \mathcal{F}(g)(\nu) = -i \int_{\mathbb{R}} g(t) \sin(2\pi \nu t) dt$ e $\mathcal{F}(g)$ è dispari.

Esempio 1.1. Sia $a > 0$ e sia $g(t) := H(t)e^{-at}$, $t \in \mathbb{R}$. La funzione g è sommabile in \mathbb{R} e si ha

$$\hat{g}(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2\pi i\nu)t} dt = \left[\frac{e^{-(a+2\pi i\nu)t}}{-(a+2\pi i\nu)} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}.$$

Osserviamo che, essendo $a > 0$, si ha

$$|e^{-(a+2\pi i\nu)t}| = e^{\operatorname{Re}(-a-2\pi i\nu)t} = e^{-at} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow +\infty,$$

quindi

$$\boxed{\mathcal{F}(H(t)e^{-at})(\nu) = \frac{1}{a+2\pi i\nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \quad (1.3)$$

♡

Esempio 1.2. Sia $a > 0$ e sia $g(t) := e^{-a|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. La funzione g è sommabile in \mathbb{R} e si ha

$$e^{-a|t|} = H(t)e^{-at} + H(-t)e^{at}$$

quindi, utilizzando i punti (i) e (v) della Proposizione 1.1, si trova

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(\nu) &= \mathcal{F}(H(t)e^{-at})(\nu) + \mathcal{F}(H(-t)e^{at})(\nu) \\ &= \mathcal{F}(H(t)e^{-at})(\nu) + \mathcal{F}(H(t)e^{-at})(-\nu) \\ &= \frac{1}{a+2\pi i\nu} + \frac{1}{a-2\pi i\nu} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\nu) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \quad (1.4)$$

♡

Esempio 1.3. Siano $a > 0$ e $g(t) := p_a(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\hat{g}(\nu) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2\pi i\nu t} dt = \left[\frac{e^{-2\pi i\nu t}}{-2\pi i\nu} \right]_{t=-a/2}^{t=a/2} = \frac{e^{\pi i\nu a} - e^{-\pi i\nu a}}{2\pi i\nu} = \frac{\sin(a\pi\nu)}{\pi\nu}.$$

Quindi

$$\boxed{\mathcal{F}(p_a)(\nu) = \frac{\sin(a\pi\nu)}{\pi\nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \quad (1.5)$$

♡

Esempio 1.4. Siano $a > 0$ e $g(t) := (a - |t|)p_{2a}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Osserviamo che g è pari, per cui dalla Proposizione 1.2 segue che

$$\hat{g}(\nu) = \int_{-a}^a (a - |t|) \cos(2\pi\nu t) dt = 2 \int_0^a (a - t) \cos(2\pi\nu t) dt,$$

dove nel secondo passaggio si è usato il fatto che la funzione integranda è pari in t e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a $t = 0$. Allora, utilizzando anche un'integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned} \hat{g}(\nu) &= 2a \int_0^a \cos(2\pi\nu t) dt - 2 \int_0^a t \cos(2\pi\nu t) dt \\ &= \frac{\sin(2\pi\nu a)}{\pi\nu} - 2 \left(\left[\frac{t \sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu} \right]_{t=0}^{t=a} - \int_0^a \frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu} dt \right) \\ &= 2 \left[-\frac{\cos(2\pi\nu t)}{(2\pi\nu)^2} \right]_{t=0}^{t=a} = \frac{1}{2\pi^2\nu^2} (1 - \cos(2\pi\nu a)) = \frac{\sin^2(\pi\nu a)}{\pi^2\nu^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Quindi

$$\boxed{\mathcal{F}(p_{2a}(t)(a - |t|))(\nu) = \frac{\sin^2(a\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \quad (1.7)$$

♡

Esempio 1.5. Siano $a > 0$ e $g(t) := e^{-at^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Utilizzando i metodi dell'analisi complessa si può verificare che

$$\mathcal{F}(e^{-at^2})(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{a}} \quad \forall \nu \in \mathbb{R}, \quad a > 0. \quad (1.8)$$

Si osservi che nel caso particolare $a = \pi$ si trova


$$\mathcal{F}(e^{-at^2})(\nu) = e^{-\pi \nu^2} \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0). \quad (1.9)$$

♡

Proposizione 1.3. Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è sommabile, allora

- (i) $\hat{g} \in C(\mathbb{R})$.
- (ii) $\|\hat{g}\|_\infty \leq \|g\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt$.

Dimostrazione.

- (i)  Fissato $\nu_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, mostriamo che \hat{g} è continua in ν_0 , equivalentemente che per ogni successione $\nu_n \rightarrow \nu_0$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\nu_n) = g(\nu_0)$. Grazie al Teorema di convergenza dominata 8.1 dell'Appendice passiamo al limite sotto il segno di integrale e otteniamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}(\nu_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i \nu_n t} dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} g(t) e^{-2\pi i \nu_n t} dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i \nu_0 t} dt = \hat{g}(\nu_0)$.

- (ii) Si ha

$$\|\hat{g}\|_\infty := \sup_{\nu \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \right| \leq \sup_{\nu \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(t)| |e^{-2\pi i \nu t}| dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt.$$

□

Oltre alle proprietà della Proposizione precedente è possibile dimostrare il *Lemma di Riemann-Lebesgue*, che afferma che $\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} \hat{g}(\nu) = 0$. La dimostrazione di questo fatto richiede però strumenti avanzati di teoria dell'integrazione.

2 Trasformata di funzioni rapidamente decrescenti

La trasformata di Fourier è un utile strumento per analizzare segnali non periodici, però la sua applicabilità è limitata dal fatto che la formula (1.1) non ha senso, ad esempio, per segnali non sommabili come $g(t) = H(t)$. L'idea è allora quella di passare alle distribuzioni, formulando un'opportuna definizione di trasformata delle distribuzioni che conservi le buone proprietà della trasformata (1.1). Osserviamo che, grazie al Teorema di Fubini 8.3 (cfr. Appendice) sugli integrali iterati, si ha

$$\begin{aligned} \langle T_{\hat{g}}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) \varphi(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \varphi(\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \hat{\varphi}(t) dt = \langle T_g, \hat{\varphi} \rangle, \end{aligned}$$

quindi un tentativo molto naturale potrebbe essere quello di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione T ponendo $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$. Purtroppo $\mathcal{F}(\varphi)$

non ha supporto compatto, quindi questa definizione è priva di significato, almeno che non sia compatto $\text{supp}(T)$: è infatti possibile dimostrare che $\mathcal{F}(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R})$ e sappiamo come valutare una distribuzione a supporto compatto in una funzione C^∞ . Allora, ad esempio per la delta di Dirac δ_{x_0} , avremmo che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\delta_{x_0}), \varphi \rangle &:= \langle \delta_{x_0}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle \delta_{x_0}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i x_0 t} dt = \langle T_{e^{-2\pi i x_0 \nu}}, \varphi(t) \rangle,\end{aligned}$$

quindi confondendo come di consueto la distribuzione regolare $T_{e^{-2\pi i x_0 \nu}}$ con la funzione $e^{-2\pi i x_0 \nu}$ ad essa associata, abbiamo trovato che

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu) = e^{-2\pi i x_0 \nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Ciò non risolve tuttavia il problema che ci eravamo posti, perché la definizione appena data vale solo per distribuzioni a supporto compatto, come ad esempio δ_{x_0} e p_1 , ma non per $H(t)$. La soluzione consiste nel trovare un nuovo tipo di distribuzioni che operino su un nuovo spazio di funzioni test \mathcal{S} che sia stabile rispetto alla trasformata di Fourier, cioè per cui $\varphi \in \mathcal{S} \implies \mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}$. In questo modo la formula $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$ avrebbe senso. Passiamo allora alle definizioni precise illustrando questo nuovo spazio di funzioni test.

Definizione 2.1. Una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *rapidamente decrescente all'infinito* se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^p \varphi^{(q)}(t) = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

L'insieme di tali funzioni si denota con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, o più semplicemente con \mathcal{S} .

Date $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si dice che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se

$$t^p \varphi_n^{(q)}(t) \rightarrow t^p \varphi^{(q)}(t) \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Un tipico esempio di funzione rapidamente decrescente ad infinito è $\varphi(t) = e^{-t^2}$. Un altro esempio è dato dalle funzioni C^∞ a supporto compatto, cioè abbiamo

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Non è difficile verificare che $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, cioè che

$$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \implies \lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Infine è chiaro che ogni funzione φ di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è sommabile in \mathbb{R} , infatti prendendo nella definizione $p = 2$ e $q = 0$, si ha che $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^2 \varphi(t) = 0$, quindi esiste $M > 0$ tale che $|t^2 \varphi(t)| \leq 1$ per $|t| \geq M$. Allora

$$|\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{per } |t| \geq M$$

e si applica il criterio del confronto per gli integrali impropri.

Vediamo ora che effettivamente \mathcal{S} è stabile rispetto alla trasformata di Fourier. Per

vederlo ci servono delle utili proprietà sul comportamento della trasformata rispetto all'operazione di derivazione.

Proposizione 2.1. *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora*

- (i) $[\mathcal{F}(\varphi)]^{(p)}(\nu) = (-2\pi i)^p \mathcal{F}(t^p \varphi(t))(\nu)$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\mathcal{F}(\varphi^{(p)})(\nu) = (2\pi i)^p \nu^p \mathcal{F}(\varphi)(\nu)$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.
- (iii) $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- (iv) $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \mathcal{F}(\varphi_n) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ per $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione.

- (i) È possibile derivare sotto il segno di integrale (cfr. Teorema 8.2), quindi

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(\varphi)]'(\nu) &= \frac{d}{d\nu} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} (-2\pi i t) dt \\ &= (-2\pi i) \int_{\mathbb{R}} t \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \mathcal{F}(t \varphi(t))(\nu), \end{aligned}$$

per cui abbiamo dimostrato (i) nel caso $p = 1$. Il caso $p > 1$ si ottiene iterando la formula appena trovata.

- (ii) Integrando per parti otteniamo che

$$[\mathcal{F}(\varphi')](\nu) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = [\varphi(t) e^{-2\pi i \nu t}]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} (-2\pi i \nu) dt.$$


Si osservi ora che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} = 0$$

perché $\varphi(t)$ tende a zero e $e^{-2\pi i \nu t}$ è limitato. Quindi

$$[\mathcal{F}(\varphi')](\nu) = - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} (-2\pi i \nu) dt = (2\pi i \nu) \mathcal{F}(\varphi)(\nu)$$

e la (ii) è dimostrata per $p = 1$. Il caso $p > 1$ si ottiene iterando la formula appena trovata.

- (iii)  Grazie a (i) abbiamo che $\mathcal{F}(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Per ogni $p, q \in \mathbb{N}$ abbiamo poi che


$$\begin{aligned} |\nu^p [\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu)| &= |\nu^p (-2\pi i)^q \mathcal{F}(t^q \varphi(t))(\nu)| && \text{(per il punto (i))} \\ &= |(-2\pi i)^q \nu^p \mathcal{F}(t^q \varphi(t))(\nu)| \\ &= |(-2\pi i)^{q-p} [\mathcal{F}((t^q \varphi(t))^{(p)})](\nu)| && \text{(per il punto (ii))} \\ &= |2\pi|^{q-p} \left| \int_{\mathbb{R}} (t^q \varphi(t))^{(p)} e^{-2\pi i \nu t} dt \right| \\ &\leq |2\pi|^{q-p} \int_{\mathbb{R}} |(t^q \varphi(t))^{(p)}| dt := C_{p,q}. \end{aligned}$$

Quindi

$$|\nu^{p+1} [\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu)| \leq C_{p+1,q}$$

da cui segue che

$$|\nu^p [\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu)| \leq \frac{C_{p+1,q}}{|\nu|} \rightarrow 0 \quad \text{per } \nu \rightarrow \pm\infty.$$

- (iv)  Supponiamo che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, cioè $x^p(\varphi_n^{(q)} - \varphi^{(q)}) \rightarrow 0$ uniformemente per ogni $p, q \in \mathbb{N}$. Vogliamo provare che $\nu^p ([\mathcal{F}(\varphi_n)]^{(q)}(\nu) - [\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu)) \rightarrow 0$ uniformemente per ogni $p, q \in \mathbb{N}$. Si osservi che $[\mathcal{F}(\varphi_n)]^{(q)}(\nu) - [\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu) = [\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu) = [\mathcal{F}(\varphi_n - \varphi)]^{(q)}(\nu)$, quindi ponendo $\psi_n := \varphi_n - \varphi$, si tratta di dimostrare che $\nu^p [\mathcal{F}(\psi_n)]^{(q)} \rightarrow 0$ uniformemente. Allora grazie a (ii) e (i)

$$\begin{aligned} \left| \nu^p [\mathcal{F}(\psi_n)]^{(q)} \right| &= |\nu^p (-2\pi i)^q \mathcal{F}(t^q(\psi_n(t)))(\nu)| && \text{(per il punto (i))} \\ &= |(-2\pi i)^{q-p} [\mathcal{F}((t^q(\psi_n(t)))^{(p)})](\nu)| && \text{(per il punto (ii))} \\ &\leq (2\pi)^{q-p} \int_{\mathbb{R}} |(t^q \psi_n(t))^{(p)}| dt \\ &= (2\pi)^{q-p} \int_{\mathbb{R}} (1+t^2) |(t^q \psi_n(t))^{(q)}| \frac{1}{1+t^2} dt \\ &\leq (2\pi)^{q-p} \|(1+t^2)(t^q \psi_n(t))^{(q)}\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Ora l'ultimo termine tende a zero per $n \rightarrow \infty$, perché $\psi_n = \varphi_n - \varphi$ tende a zero in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e quindi $\|(1+t^2)(t^q \psi_n(t))^{(q)}\|_{\infty} \leq \|(t^q \psi_n(t))^{(q)}\|_{\infty} + \|t^2(t^q \psi_n(t))^{(q)}\|_{\infty} \rightarrow 0$. Allora

$$\|\nu^p [\mathcal{F}(\psi_n)]^{(q)}\|_{\infty} \leq (2\pi)^{q-p} \|(1+t^2)(t^q \psi_n(t))^{(q)}\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} dt \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$ ed abbiamo concluso. □

Le proprietà (i) e (ii) valgono anche per funzioni più generali di \mathcal{S} , ma è un po' laborioso scrivere le ipotesi precise. Sarà più semplice enunciare le proprietà corrispondenti nell'ambito più generale delle distribuzioni. Passiamo ora all'importante nozione di antitrasformata di Fourier.

Definizione 2.2. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sommabile. Si dice *antitrasformata di Fourier* di g la funzione $\check{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\check{g}(\nu) := \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{2\pi i \nu t} dt, \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

In altri termini

$$\check{g}(\nu) := \hat{g}(-\nu), \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Si usa anche la notazione $\mathcal{F}^{-1}(g) := \check{g}$, in quanto, come vedremo, in \mathcal{S} essa è effettivamente la trasformazione inversa di \mathcal{F} .

Esattamente come per la trasformata di Fourier si dimostra la seguente

Proposizione 2.2. Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è sommabile, allora

- (i) $\check{g} \in C(\mathbb{R})$.
- (ii) $\|\check{g}\|_{\infty} \leq \|g\|_1$.

Il prossimo teorema mostra che in \mathcal{S} l'antitrasformata è la trasformazione inversa di \mathcal{F} .

Teorema 2.1 (Formula di inversione in \mathcal{S}). *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\check{\check{\varphi}} = \varphi = \check{\check{\varphi}}$, cioè*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F})(\varphi) = \varphi = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})(\varphi). \quad (2.3)$$

Usando (2.2) si può riscrivere la formula come

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi))(t) = \varphi(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Dimostrazione.  Se fosse possibile applicare il Teorema di Fubini (cfr. Teorema 8.3) avremmo:

$$\begin{aligned} \check{\check{\varphi}}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) e^{2\pi i \nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(s) e^{-2\pi i t s} ds \right] e^{2\pi i \nu t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i (s-\nu)t} dt \right] ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \hat{1}(s-\nu) ds = (\varphi * \hat{1})(\nu). \end{aligned}$$

Però i conti precedenti non sono leciti perché la funzione $\varphi(s)e^{-2\pi i (s-\nu)t}$ non è integrabile in \mathbb{R}^2 . Quindi la approssimiamo moltiplicando per la funzione a decrescenza rapida in t

$$f_{\varepsilon}(t) := e^{-\pi(\varepsilon t)^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove $\varepsilon > 0$ è molto piccolo. Ricordiamo che

$$f_{\varepsilon}(t) = f(\varepsilon t) \quad \text{dove } f(t) := e^{-\pi t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1, \quad (2.6)$$

$$\hat{f} = f, \quad (2.7)$$

da cui segue che

$$\hat{f}_{\varepsilon}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\varepsilon s) e^{-2\pi i t s} ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} f(\sigma) e^{-2\pi i \frac{t}{\varepsilon} \sigma} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \hat{f}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Allora adesso possiamo applicare il Teorema di Fubini e dedurre che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) f_{\varepsilon}(t) e^{2\pi i \nu t} dt &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(s) e^{-2\pi i t s} ds \right] f_{\varepsilon}(t) e^{2\pi i \nu t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \left[\int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(t) e^{-2\pi i (s-\nu)t} dt \right] ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \hat{f}_{\varepsilon}(s-\nu) ds \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) f\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) ds \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) e^{-\pi(s-\nu)^2/\varepsilon^2} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\nu + \varepsilon \sigma) e^{-\pi \sigma^2} d\sigma \quad \left[\sigma = \frac{s-\nu}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Allora, poiché $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f_\varepsilon(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, è possibile applicare un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (Teorema 8.1) e ottenere che

$$\begin{aligned}\check{\varphi}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) e^{2\pi i \nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\varphi}(t) f_\varepsilon(t) e^{2\pi i \nu t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) f_\varepsilon(t) e^{2\pi i \nu t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\nu + \varepsilon \sigma) e^{-\pi \sigma^2} d\sigma = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varphi(\nu + \varepsilon \sigma) e^{-\pi \sigma^2} d\sigma = \varphi(\nu) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi \sigma^2} d\sigma = \varphi(\nu).\end{aligned}$$

Abbiamo mostrato perciò che $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = \varphi$. L'altra uguaglianza segue subito da questa osservando che grazie alla Proposizione 1.1-(v)

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(t))(\nu) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)(-t))(\nu) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)(t))(-\nu) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)(t))(\nu) = \varphi(\nu).$$

□

3 Distribuzioni temperate

Introduciamo in questo paragrafo la classe di distribuzioni per la quale è possibile definire la trasformata di Fourier.

Definizione 3.1. Un funzionale $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *distribuzione temperata* se è lineare e continuo, cioè

$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle T, \varphi \rangle + \mu\langle T, \psi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle. \quad (3.2)$$

L'insieme delle distribuzioni temperate si denota con $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Spesso è utile inserire una variabile indipendente fittizia nella notazione $\langle T, \varphi \rangle$ e scrivere invece


$$\langle T(t), \varphi(t) \rangle$$

che pur non essendo una notazione del tutto corretta (in generale T non è una funzione di t), non è ambigua e in alcuni contesti permette di capire chiaramente quale è la variabile indipendente di φ .


Non è difficile verificare che $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, cioè che

$$T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \implies \lambda T + \mu S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Come nel caso delle distribuzioni di \mathcal{D}' la (3.2) è una richiesta di natura tecnica.


Proposizione 3.1.  Se $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ è lineare, allora T è continuo se e solo se vale la seguente implicazione:


$$\varphi_n \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow 0.$$


Dimostrazione.  Supponiamo che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Allora $\psi_n := \varphi_n - \varphi \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, infatti $\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p \psi_n^{(q)}(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p (\varphi_n^{(q)}(t) - \varphi^{(q)}(t))| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p \varphi_n^{(q)}(t) - t^p \varphi^{(q)}(t)| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Quindi $|\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| \rightarrow 0$ cioè $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$. □

Consideriamo una distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'$, cioè un funzionale $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ lineare e continuo. Poiché $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ ha senso considerare la restrizione di T a \mathcal{D} , cioè considerare $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$. Evidentemente T è ancora lineare. Meno ovvio è che T è continuo nel senso di \mathcal{D}' : infatti se $\varphi_n \rightarrow 0$ in \mathcal{D} , allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n^{(q)}\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(q)}(t)| = 0$ per ogni $q \in \mathbb{N}$ ed esiste $R \geq 0$ tale che $\text{supp } \varphi_n \subseteq [-R, R]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $\|t^p \varphi_n^{(q)}(t)\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p \varphi_n^{(q)}(t)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |R|^p |\varphi_n^{(q)}(t)| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, cioè $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Abbiamo quindi mostrato che un elemento $T \in \mathcal{S}'$ può essere considerato anche come un elemento di \mathcal{D}' . Vale pure la seguente

Proposizione 3.2. *Se $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $T_1 \neq T_2$, allora T_1 e T_2 ristrette a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sono due diverse distribuzioni di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione.  Abbiamo già verificato che T_k , $k = 1, 2$, ristrette a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sono distribuzioni. Rimane da vedere che T_1 e T_2 non sono lo stesso elemento di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Essendo diverse in \mathcal{S}' , si ha che esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ per cui $\langle T_1, \varphi \rangle \neq \langle T_2, \varphi \rangle$. Supponiamo per assurdo che $T_1 = T_2$ come elementi di \mathcal{D}' e approssimiamo φ con una successione di funzioni test $\varphi_n \in \mathcal{D}$ tali che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in \mathcal{S} (ciò è possibile grazie al seguente lemma tecnico 3.1). Allora $\langle T_1, \varphi_n \rangle = \langle T_2, \varphi_n \rangle$ per ogni n per cui prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$ si ottiene $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$, assurdo. \square

Lemma 3.1.  *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora esiste $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione.  L'idea è quella di moltiplicare, ad ogni passo $n \in \mathbb{N}$, la funzione φ per una funzione $\psi_n(t) \in \mathcal{D}$ tale che $\psi_n(t) = 1$ per $|t| \leq n$. Prendiamo allora $\psi_1 \in \mathcal{D}$ che vale 1 in $[-1, 1]$ e zero fuori dall'intervallo $[-2, 2]$, e poniamo $\psi_n(t) := \psi_1(t/n)$. Consideriamo quindi la successione $\varphi_n := \varphi \psi_n$, per cui $\varphi_n \in \mathcal{D}$, $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq [-2n, 2n]$ e $\varphi_n(t) = \varphi(t)$ se $t \in [-n, n]$. Si ha che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente su \mathbb{R} , infatti

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_n\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi(t)\psi_n(t)| \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| |1 - \psi_n(t)| = \sup_{|t| \geq n} |\varphi(t)| |1 - \psi_n(t)| \leq \sup_{|t| \geq n} |\varphi(t)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$ perché $\varphi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$. Ora se $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$, grazie alla formula di Leibniz si ha

$$\begin{aligned} |\varphi_n^{(q)}(t) - \varphi^{(q)}(t)| &= |[\varphi(t)(\psi_n(t) - 1)]^{(q)}| = |[\varphi(t)(\psi_1(t/n) - 1)]^{(q)}| \\ &\leq \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} |\varphi^{(q-k)}(t)| |(\psi_1(t/n) - 1)^{(k)}| \\ &= |\varphi^{(q)}(t)| |\psi_1(t/n) - 1| + \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} |\varphi^{(q-k)}(t)| |\psi_1^{(k)}(t/n)| 1/n^k \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^{(q)} - \varphi^{(q)}\|_\infty &\leq \sup_{|t| \geq n} |\varphi^{(q)}(t)| |\psi_1(t/n) - 1| + \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} \|\varphi^{(q-k)}\|_\infty \|\psi_1^{(k)}\|_\infty 1/n^k \\ &\leq \sup_{|t| \geq n} |\varphi^{(q)}(t)| + \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} \|\varphi^{(q-k)}\|_\infty \|\psi_1^{(k)}\|_\infty 1/n^k \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

per $n \rightarrow \infty$. Allora se $p \in \mathbb{N}$

$$\|t^p \varphi_n^{(q)}(t) - t^p \varphi_n^{(q)}(t)\|_\infty \leq \sup_{|t| \geq n} |t^p| |\varphi^{(q)}(t)| + \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} \|t^p \varphi^{(q-k)}(t)\|_\infty \|\psi_1^{(k)}\|_\infty 1/n^k \quad (3.4)$$

che tende a zero per $n \rightarrow \infty$ perché $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |t^p| |\varphi^{(q)}(t)| = 0$. Il lemma è quindi dimostrato. \square

Le considerazioni precedenti permettono di identificare lo spazio delle distribuzioni temperate con un sottospazio delle distribuzioni, per cui è lecito scrivere l'inclusione

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

È utile quindi sapere se una data distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è temperata, cioè se appartenga o no a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. I prossimi tre importanti esempi forniscono tre criteri in tal senso.

Esempio 3.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è sommabile allora T_f è temperata.

È chiaro che T_f è lineare. Per verificare la continuità consideriamo $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Allora

$$\langle T_f, \varphi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_n(t) dt = \|\varphi_n\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

♡

Esempio 3.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile. Se f è a crescita lenta, cioè

$$\exists A > 0, p \in \mathbb{N} : |f(t)| \leq A(1 + |t|)^p \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

allora $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

La condizione (3.6) dice in il modulo di f è più piccolo del modulo di un polinomio. Si osservi che un caso particolare di funzioni a crescita lenta è fornito dalle funzioni limitate e dai polinomi. perciò

- (i) f polinomio $\implies f$ a crescita lenta $\implies T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
- (ii) f limitata $\implies f$ a crescita lenta $\implies T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Vediamo la dimostrazione. $\textcircled{\text{STOP}}$ Se $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi_n \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_n(t) dt \right| \leq A \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^p |\varphi_n(t)| dt \\ &= A \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^{p+2} |\varphi_n(t)| \frac{(1 + |t|)^p}{(1 + |t|)^{p+2}} dx \\ &\leq A \|(1 + |t|)^{p+2} \varphi_n(t)\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |t|)^p}{(1 + |t|)^{p+2}} dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

♡

Esempio 3.3. Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è a supporto compatto allora $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Per vederlo $\textcircled{\text{STOP}}$ consideriamo $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e supponiamo che il supporto di T sia contenuto in $[-R, R]$. Se $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vale 1 in $[-R, R]$ allora

$$\langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \psi \varphi_n \rangle \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

perché $\psi \varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, infatti $\text{supp}(\psi \varphi_n) \subseteq [-R, R]$ e usando la formula di Leibniz per la derivata di un prodotto

$$\|D^p(\psi \varphi_n)\|_\infty \leq \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \|\psi^{(q)}\|_\infty \|\varphi_n^{(p-q)}\|_\infty \rightarrow 0.$$


♡

Un altro esempio di distribuzione temperata è fornito dal treno di impulsi $T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k$, che sulle funzioni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è definita da

$$\left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \varphi \right\rangle := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k).$$

Infatti abbiamo la seguente

Proposizione 3.3. *Il treno di impulsi è una distribuzione temperata.*

Dimostrazione.  Osserviamo innanzitutto che la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k)$ è convergente, perché $|\varphi(k)| \leq 1/|k|^2$ per k sufficientemente grande, essendo φ a decrescenza rapida. La linearità di T è facile. Per vedere la continuità di T sia $\varphi_n \rightarrow 0$ in \mathcal{S} . Allora abbiamo che $|\varphi_n(k)| = |(1+k^2)\varphi_n(k)|/(1+k^2)$ per ogni k , quindi

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi_n \rangle| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_n(k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_n(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|(1+k^2)\varphi_n(k)|}{1+k^2} \\ &\leq \|(1+x^2)\varphi_n(x)\|_{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

per $n \rightarrow \infty$ perché $\varphi_n \rightarrow 0$ in \mathcal{S} . □

4 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Definizione 4.1. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si dice *trasformata di Fourier di T* il funzionale $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ definito da

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (4.1)$$

Un'altra notazione usata è $\widehat{T} := \mathcal{F}(T)$, per cui $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$.

Proposizione 4.1. *Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. La linearità è evidente. Per mostrare la continuità supponiamo che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Allora grazie alla Proposizione 2.1-(iv) si ha che $\mathcal{F}(\varphi_n) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ per $n \rightarrow \infty$ per cui

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi_n \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi_n) \rangle \rightarrow \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle$$

per $n \rightarrow \infty$ ed abbiamo concluso. □

Proposizione 4.2. Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è sommabile allora

$$\mathcal{F}(T_g) = T_{\mathcal{F}(g)},$$

in altri termini la distribuzione $\mathcal{F}(T_g)$ è regolare ed è associata alla funzione

$$\mathcal{F}(g)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Dal Teorema 1.3(i) si ha che \hat{g} è continua, quindi localmente sommabile. Quindi per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha, grazie al Teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T_g), \varphi \rangle &= \langle T_g, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(\nu) \mathcal{F}(\varphi)(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} g(\nu) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g)(t) \varphi(t) dt = \langle \mathcal{F}(g), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

Proposizione 4.3. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ allora

- (i) $[\mathcal{F}(T(t))]^{(p)} = (-2\pi i)^p \mathcal{F}(t^p T(t))$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\mathcal{F}(T^{(p)})(\nu) = (2\pi i)^p \nu^p \mathcal{F}(T)(\nu)$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Le derivate sono intese nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione.

- (i) Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha che

$$\begin{aligned} \langle [\mathcal{F}(T)]^{(p)}, \varphi \rangle &= (-1)^p \langle \mathcal{F}(T), \varphi^{(p)} \rangle && \text{(definizione di derivata in } \mathcal{D}') \\ &= (-1)^p \langle T, \mathcal{F}(\varphi^{(p)}) \rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathcal{S}') \\ &= (-1)^p \langle T, (2\pi i)^p \nu^p \mathcal{F}(\varphi) \rangle && \text{(Proposizione 2.1-(ii))} \\ &= (-1)^p (2\pi i)^p \langle T, \nu^p \mathcal{F}(\varphi) \rangle && \text{(linearità di } T) \\ &= (-1)^p (2\pi i)^p \langle \nu^p T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle && \text{(moltiplicazione per funzioni } C^\infty) \\ &= (-1)^p (2\pi i)^p \langle \mathcal{F}(\nu^p T), \varphi \rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathcal{S}') \\ &= \langle (-2\pi i)^p \mathcal{F}(\nu^p T), \varphi \rangle \end{aligned}$$

- (ii)

$$\begin{aligned} \langle [\mathcal{F}(T^{(p)})], \varphi \rangle &= \langle T^{(p)}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathcal{S}') \\ &= (-1)^p \langle T, (\mathcal{F}(\varphi))^{(p)} \rangle && \text{(definizione di derivata in } \mathcal{D}') \\ &= (-1)^p \langle T, (-2\pi i)^p \mathcal{F}(t^p \varphi) \rangle && \text{(Proposizione 2.1-(i))} \\ &= (-1)^p (-2\pi i)^p \langle T, \mathcal{F}(t^p \varphi) \rangle && \text{(linearità di } T) \\ &= (2\pi i)^p \langle \mathcal{F}(T), t^p \varphi \rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathcal{S}') \\ &= (2\pi i)^p \langle t^p \mathcal{F}(T), \varphi \rangle && \text{(moltiplicazione per funzioni } C^\infty) \\ &= \langle (2\pi i)^p \mathcal{F}(T), \varphi \rangle \end{aligned}$$

□

Allo stesso modo, cioè scaricando la trasformata sulla funzione test ed utilizzando le analoghe proprietà in \mathcal{S} , si prova la seguente

Proposizione 4.4. *Siano $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\nu_0, t_0, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Allora*

- (i) $\mathcal{F}(\lambda T + \mu S) = \lambda \mathcal{F}(T) + \mu \mathcal{F}(S)$.
- (ii) $\mathcal{F}(e^{2\pi i \nu_0 t} T(t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(\nu - \nu_0)$.
- (iii) $\mathcal{F}(T(t - t_0))(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu} \mathcal{F}(T(t))(\nu)$.
- (iv) $\mathcal{F}(T(at))(\nu) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(T(t))\left(\frac{\nu}{a}\right)$.
- (v) $\mathcal{F}(T(-t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(-\nu)$.

Passiamo ora alla nozione di antitrasformata in ambito distribuzionale.

Definizione 4.2. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si dice *antitrasformata di Fourier di T* la distribuzione $\check{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definita da

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (4.2)$$

Un'altra notazione usata è $\mathcal{F}^{-1}(T) := \check{T}$, perché, come vedremo, in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ essa è effettivamente la trasformazione inversa di \mathcal{F} . Allora $\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Si osservi che se $\varphi \in \mathcal{S}$ allora

$$\begin{aligned} \langle \check{T}, \varphi \rangle &= \langle T, \check{\varphi} \rangle && \text{(definizione di } \check{T}) \\ &= \langle T(t), \check{\varphi}(t) \rangle && \text{(inseriamo una variabile indipendente)} \\ &= \langle T(t), \hat{\varphi}(-t) \rangle && \text{(definizione di } \check{\varphi}) \\ &= \langle T(-t), \hat{\varphi}(t) \rangle && \text{(definizione di } T(-t)) \\ &= \langle T(-t), \hat{\varphi} \rangle \\ &= \langle \widehat{T(-t)}, \varphi \rangle && \text{(definizione di } \widehat{T(-t)}) \\ &= \langle \widehat{T(-t)}(\nu), \varphi(\nu) \rangle \\ &= \langle \widehat{T(t)}(-\nu), \varphi(\nu) \rangle && \text{(Proposizione 4.4(v)).} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Abbiamo quindi mostrato che

$$\check{T}(\nu) = \hat{T}(-\nu), \quad (4.4)$$

oppure, usando la notazione con la \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F}^{-1}(T)(\nu) = \mathcal{F}(T)(-\nu). \quad (4.5)$$

Vediamo ora che l'uso del simbolo \mathcal{F}^{-1} è giustificato dal fatto che l'antitrasformata è effettivamente la trasformazione inversa della trasformata in \mathcal{S}' .

Teorema 4.1 (Formula di inversione in \mathcal{S}'). *La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ è invertibile e la sua inversa è l'antitrasformata di Fourier, cioè $\check{T} = T = \hat{T}$, o in altri termini*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (4.6)$$

Usando (4.5) si può riscrivere la formula come

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(T))(t) = T(-t). \quad (4.7)$$

Dimostrazione. Per ogni φ si ha

$$\begin{aligned} \langle \check{T}, \varphi \rangle &= \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle && \text{(definizione di antitrasformata in } \mathcal{S}') \\ &= \langle T, \hat{\varphi} \rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathcal{S}') \\ &= \langle T, \varphi \rangle && \text{(formula di inversione in } \mathcal{S}). \end{aligned}$$

La verifica che $T = \hat{T}$ è del tutto analoga. □

Come corollario otteniamo una formula di inversione puntuale, che mostra un'elegante analogia con lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica.

Corollario 4.1. *Se $g \in C(\mathbb{R})$ è sommabile e se \hat{g} è sommabile, allora*

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} d\nu \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Dimostrazione. Dalla formula di inversione in \mathcal{S}' segue che $T_g = \check{T}_g$, quindi, utilizzando anche il Teorema di Fubini, si deduce che

$$\begin{aligned} \langle T_g, \varphi \rangle &= \langle \check{T}_g, \varphi \rangle = \langle \hat{T}_g, \check{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) \check{\varphi}(\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{2\pi i \nu t} dt d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu \varphi(t) dt = \left\langle T_{\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu}, \varphi(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Quindi $T_g = T_{\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu}$, ma per la Proposizione 2.2(i) la funzione $(t) \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$ è continua, quindi $f = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$, che è la tesi del Teorema (si ricordi che se $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$ e $T_{f_1} = T_{f_2}$, allora $f_1 = f_2$). □

Si può quindi dire che la trasformata di Fourier è una versione “continua” della serie di Fourier, dove la serie è sostituita dall'integrale, mentre i coefficienti di Fourier sono sostituiti da $\hat{g}(\nu)$.

Esistono altre versioni della formula di inversione puntuale (4.8). Ad esempio è possibile dimostrare la seguente implicazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ sommabile, } C^0 \text{ a tratti} \\ \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} d\nu \text{ convergente} \end{array} \right. \implies \frac{g(t+) + g(t-)}{2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} d\nu. \quad (4.9)$$

Si osservi che non è richiesta la sommabilità di \hat{g} , ma soltanto la convergenza dell'integrale improprio $\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} d\nu$. Se si rinuncia a chiedere anche la convergenza di tale integrale, allora si deve esigere più regolarità dalla g e si ottiene comunque una formula un po' più debole, infatti si può provare che se g è sommabile, continua a tratti e con derivata continua a tratti, allora vale la formula

$$\frac{g(t+) + g(t-)}{2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} d\nu. \quad (4.10)$$

Ricordiamo che il limite a secondo membro dell'equazione precedente può esistere anche quando l'integrale improprio è divergente (ripassare la definizione).

Concludiamo questo paragrafo con qualche cenno alla trasformata della convoluzione. È possibile provare che

$$T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \text{supp}(T) \text{ compatto} \implies \begin{cases} \mathcal{F}(T) \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S) \end{cases} \quad (4.11)$$

La scrittura $\mathcal{F}(T) \in C^\infty(\mathbb{R})$ significa che $\mathcal{F}(T)$ è una distribuzione regolare associata ad una funzione di classe C^∞ . Questo permette di dare un senso alla moltiplicazione $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$. Per quanto riguarda la convoluzione tra due funzioni f e g , un'estensione del Teorema 8.3 permette di dimostrare che $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ ogni volta che i due membri di tale equazione hanno senso.

5 Calcolo di trasformate

Negli esempi di questo paragrafo calcoliamo alcune trasformate notevoli e svolgiamo un certo numero di esercizi.

Esempio 5.1. Cominciamo col calcolare la trasformata della δ di Dirac. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta_{x_0}), \varphi \rangle &= \langle \delta_{x_0}(\nu), \mathcal{F}(\varphi)(\nu) \rangle = \left\langle \delta_{x_0}(\nu), \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i x_0 t} dt = \langle T_{e^{-2\pi i x_0 t}}, \varphi(t) \rangle = \langle T_{e^{-2\pi i x_0 \nu}}, \varphi(\nu) \rangle, \end{aligned}$$

quindi

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu) = e^{-2\pi i x_0 \nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.} \quad (5.1)$$

Applicando \mathcal{F} ad ambo i membri di (5.1) ed usando la formula di inversione (4.7), si ottiene

$$\mathcal{F}(e^{-2\pi i \nu x_0})(t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\delta_{x_0}))(t) = \delta_{x_0}(-t) = \delta_{-x_0}(t),$$

cioè

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{2\pi i x_0 t}) = \delta_{x_0}} \quad (5.2)$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$. Per $x_0 = 0$ otteniamo le formule

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_0)(\nu) = 1, \quad \mathcal{F}(1) = \delta_0.} \quad (5.3)$$

♡

Esempio 5.2. Calcolare la trasformata della funzione sommabile $g(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$, $a > 0$.

Essendo g sommabile, è anche temperata e la definizione classica coincide con quella delle per le distribuzioni. Sappiamo che se $b > 0$ allora

$$\mathcal{F}(e^{-b|t|})(\nu) = \frac{2b}{b^2 + 4\pi^2\nu^2} \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Allora applicando \mathcal{F} ad ambo i membri ed utilizzando la formula di inversione

$$\mathcal{F}\left(\frac{2b}{b^2 + 4\pi^2\nu^2}\right)(t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(e^{-b|t|}))(t) = e^{-b|t|} = e^{-b|t|},$$

quindi, scambiando t con ν ,

$$\mathcal{F}\left(\frac{2b}{b^2 + 4\pi^2t^2}\right)(\nu) = e^{-b|\nu|} \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (5.4)$$

Allora per ottenere la trasformata della funzione $g(t)$ scriviamo

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)(\nu) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{a} \frac{2(2\pi a)}{(2\pi a)^2 + 4\pi^2t^2}\right)(\nu) = \frac{\pi}{a} \mathcal{F}\left(\frac{2(2\pi a)}{(2\pi a)^2 + 4\pi^2t^2}\right)(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\nu|}$$

dove abbiamo applicato la formula (5.4) con $b = 2\pi a$. Riassumendo

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\nu|} \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \quad (5.5)$$

♡

Esempio 5.3. Calcolare la trasformata di $g(t) = \frac{\sin(at)}{t}$, $a > 0$.

La funzione g non è sommabile, tuttavia essendo limitata si può considerare come una distribuzione temperata. Sappiamo che se $b > 0$ allora

$$\mathcal{F}(p_b(t))(\nu) = \frac{\sin(b\pi\nu)}{\pi\nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Allora utilizzando la formula di inversione

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(b\pi\nu)}{\pi\nu}\right)(t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(p_b(t)))(t) = p_b(-t) = p_b(t),$$

quindi, scambiando t con ν ,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(b\pi t)}{\pi t}\right)(\nu) = p_b(\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Allora per ottenere la trasformata della funzione $g(t)$ scriviamo

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(at)}{t}\right)(\nu) = \mathcal{F}\left(\pi \frac{\sin(\frac{a}{\pi} \pi t)}{\pi t}\right)(\nu) = \pi \mathcal{F}\left(\frac{\sin(\frac{a}{\pi} \pi t)}{\pi t}\right)(\nu) = \pi p_{a/\pi}(\nu)$$

dove abbiamo applicato la formula (5.4) con $b = a/\pi$. Riassumendo

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{\sin(at)}{t}\right)(\nu) = \pi p_{\frac{a}{\pi}}(\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \quad (5.7)$$

♡

Esempio 5.4. Calcolare $\mathcal{F}(t^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il polinomio t^n è a crescita lenta, quindi si può calcolarne la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate e si ha

$$\mathcal{F}(t^n)(\nu) = \mathcal{F}(t^n 1)(\nu) = \left(\frac{1}{-2\pi i}\right)^n [\mathcal{F}(1)]^{(n)}(\nu) = \left(\frac{1}{-2\pi i}\right)^n \delta_0^{(n)}.$$

♡

Esempio 5.5. Calcolare $\mathcal{F}(\sin t)$.

La funzione \sin è limitata, quindi è una distribuzione temperata e si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sin t)(\nu) &= \mathcal{F}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)(\nu) = \frac{1}{2i} \left[\mathcal{F}(e^{it})(\nu) - \mathcal{F}(e^{-it})(\nu) \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\mathcal{F}\left(e^{2\pi i(1/2\pi)t}\right)(\nu) - \mathcal{F}\left(e^{2\pi i(-1/2\pi)t}\right)(\nu) \right] = \frac{1}{2i} (\delta_{1/2\pi} - \delta_{-1/2\pi}).\end{aligned}$$

♡

Esempio 5.6. Posto $g(t) = te^{-t}H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, calcolare $\mathcal{F}(g(t))$.

Si ha che g è una funzione sommabile. Utilizzando la Proposizione 4.3(i) si trova

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(tH(t)e^{-t})(\nu) &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) (\mathcal{F}(H(t)e^{-t}))'(\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \frac{d}{d\nu} \left(\frac{1}{1+2\pi i\nu}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \frac{-2\pi i}{(1+2\pi i\nu)^2} = \frac{1}{(1+2\pi i\nu)^2}.\end{aligned}$$

♡

Esempio 5.7. Calcolare $\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right)$.

Si osservi che $g(t) = 1/(t^2+t+1)$ è sommabile. Grazie alla Proposizione (4.4)(iii) e alla formula (5.7) si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right)(\nu) &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{(t+1/2)^2+3/4}\right)(\nu) = e^{-2\pi i\nu(-1/2)} \mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+3/4}\right)(\nu) \\ &= e^{\pi i\nu} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-2\pi(\sqrt{3}/2)|\nu|} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi(i\nu-\sqrt{3}|\nu|)}.\end{aligned}$$

♡

Esempio 5.8. Calcolare $\mathcal{F}(e^{-|2t|} \text{sign}(t))$.

Si ha $e^{-|2t|} \text{sign}(t) = -H(-t)e^{2t} + H(t)e^{-2t}$, quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-|2t|} \text{sign}(t))(\nu) &= -\mathcal{F}(H(-t)e^{2t})(\nu) + \mathcal{F}(H(t)e^{-2t})(\nu) \\ &= -\mathcal{F}(H(t)e^{-2t})(-\nu) + \mathcal{F}(H(t)e^{-2t})(\nu) \\ &= -\frac{1}{2+2\pi i(-\nu)} + \frac{1}{2+2\pi i\nu} \\ &= -\frac{1}{2-2\pi i\nu} + \frac{1}{2+2\pi i\nu} = \frac{-4\pi i\nu}{4+4\pi^2\nu^2} = \frac{-\pi i\nu}{1+\pi^2\nu^2}.\end{aligned}$$

♡

Esempio 5.9. Calcolare $\mathcal{F}\left(\frac{t}{(9+4t^2)^2}\right)$.

Osserviamo innanzi tutto che $t/(9+4t^2)^2$ è una funzione sommabile. Possiamo ricondurci a trasformate note osservando che

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{(9+4t^2)} = -\frac{8t}{(9+4t^2)^2},$$

quindi, utilizzando nell'ordine la Proposizione 4.3(ii), la Proposizione 4.4(iv) e la formula (5.7), troviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{t}{(9+4t^2)^2}\right)(\nu) &= \mathcal{F}\left(-\frac{1}{8} \frac{d}{dt} \frac{1}{(9+4t^2)}\right)(\nu) = -\frac{1}{8} 2\pi i\nu \mathcal{F}\left(\frac{1}{(9+4t^2)}\right)(\nu) \\ &= -\frac{\pi i\nu}{4} \mathcal{F}\left(\frac{1}{(9+(2t)^2)}\right)(\nu) = -\frac{\pi i\nu}{4} \frac{1}{2} \mathcal{F}\left(\frac{1}{(9+t^2)}\right)\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi i\nu}{8} \frac{\pi}{3} e^{-2\pi 3|\nu/2|} = \frac{\pi^2\nu}{24i} e^{-3\pi|\nu|}.\end{aligned}$$

♡

Per il calcolo delle prossime trasformate ci servono le nozioni di distribuzione pari e dispari.

Definizione 5.1. Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si dice *pari* se $T(-t) = T(t)$.
Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si dice *dispari* se $T(-t) = -T(t)$.

Esempio 5.10.

- a. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è pari allora T_f è pari.
- b. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è dispari allora T_f è dispari.
- c. δ_0 è pari, infatti se $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha $\langle \delta_0(-t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta_0(t), \varphi(-t) \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0(t), \varphi(t) \rangle$.
- d. v.p. $\frac{1}{t}$ è dispari: infatti tramite il cambio di variabile $s = -t$ si trova che per ogni φ

$$\begin{aligned} \langle \text{v.p. } \frac{1}{t}(-t), \varphi(t) \rangle &= \langle \text{v.p. } \frac{1}{t}(t), \varphi(-t) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-t)}{t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(s)}{s} ds = - \langle \text{v.p. } \frac{1}{t}(t), \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

- e. Se T è dispari, allora $\mathcal{F}(T)$ è dispari. Ciò segue subito dalla Proposizione 4.4(v).
- f. Se T è pari, allora $\mathcal{F}(T)$ è pari. Ciò segue subito dalla Proposizione 4.4(v).

♡

Come per le funzioni di una variabile reale, si ha la seguente relazione tra parità e derivata che ci è tornata utile nello svolgimento degli esercizi.

Proposizione 5.1.

- (i) Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è dispari, allora T' è pari.
- (ii) Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è pari, allora T' è dispari.

Dimostrazione. Dimostriamo l'affermazione (i) e lasciamo per esercizio la (ii). Per ogni funzione test φ si ha

$$\begin{aligned} \langle T'(-t), \varphi(t) \rangle &= \langle T'(t), \varphi(-t) \rangle = - \langle T(t), -\varphi'(-t) \rangle = \langle T(t), \varphi'(-t) \rangle \\ &= \langle T(-t), \varphi'(t) \rangle = \langle T(t), \varphi'(t) \rangle = - \langle T(t), \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

□

Vogliamo ora calcolare la trasformata di Fourier di v.p. $\frac{1}{t}$. Osserviamo prima che, siccome $t(\frac{1}{t}) = 1$, è ragionevole congetturare che

$$t \left(\text{v.p. } \frac{1}{t} \right) = 1. \quad (5.8)$$

La congettura è vera, infatti per ogni funzione test φ abbiamo

$$\begin{aligned} \left\langle t \left(\text{v.p. } \frac{1}{t} \right), \varphi(t) \right\rangle &= \left\langle \text{v.p. } \frac{1}{t}, t\varphi(t) \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{t\varphi(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Allora calcolando la trasformata di Fourier di ambo i membri di (5.8) si ha

$$\mathcal{F}\left(t\left(\text{v.p.}\frac{1}{t}\right)\right) = \delta_0$$

quindi per la Proposizione 4.3(i) si trova

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left[\mathcal{F}\left(\text{v.p.}\frac{1}{t}\right)\right]' = \delta_0$$

cioè, poiché $2\delta_0 = \text{sign}'$,

$$\left[\pi i \text{sign} + \mathcal{F}\left(\text{v.p.}\frac{1}{t}\right)\right]' = 0$$

e quindi esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\pi i \text{sign} + \mathcal{F}\left(\text{v.p.}\frac{1}{t}\right) = C$$

Poiché $\text{v.p.}\frac{1}{t}$ è dispari, la sua trasformata è dispari. Anche sign è dispari, quindi la distribuzione nel primo membro dell'equazione precedente è dispari, e ciò è possibile solo se $C = 0$. Abbiamo allora trovato che

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\text{v.p.}\frac{1}{t}\right)(\nu) = -\pi i \text{sign}(\nu).} \quad (5.9)$$

Applichiamo allora la formula di inversione: troviamo che

$$-\pi i \mathcal{F}(\text{sign}(\nu))(t) = \left(\text{v.p.}\frac{1}{t}\right)(-t) = -\left(\text{v.p.}\frac{1}{t}\right)(t)$$


oppure, scambiando ν con t ,

$$\boxed{\mathcal{F}(\text{sign}(t))(\nu) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.}\frac{1}{\nu}.} \quad (5.10)$$


Ora, poiché $H(t) = \frac{1}{2} \text{sign}(t) + \frac{1}{2}$ si trova anche che

$$\boxed{\mathcal{F}(H(t))(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \left(\text{v.p.}\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta_0.} \quad (5.11)$$

Vogliamo ora calcolare la trasformata del treno d'impulsi. A tale scopo utilizziamo il prossimo risultato, noto come *formula di sommazione di Poisson*.

Teorema 5.1.  Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) \quad (5.12)$$

Dimostrazione.  Sia $f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t-n)$, che è ottenuta sommando ad ogni passo $n \in \mathbb{N}$ la traslata di n di φ . poiché φ è a decrescenza rapida, non è difficile vedere che $f(t)$ è convergente per ogni t . Inoltre f è C^∞ e periodica di periodo 1. Possiamo allora applicare la teoria sulle serie di Fourier e scrivere

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t}$$

dove i coefficienti di Fourier c_k sono dati da

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{-1/2}^{1/2} f(s) e^{-2\pi i k s} ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(s-n) e^{-2\pi i k s} ds \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2-n}^{1/2-n} \varphi(\sigma) e^{-2\pi i k \sigma} d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\sigma) e^{-2\pi i k \sigma} d\sigma = \hat{\varphi}(k), \end{aligned} \quad (5.13)$$


quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) e^{2\pi i k t}$$

e la tesi segue prendendo $t = 0$. □

Consideriamo allora il treno di impulsi $T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ e dimostriamo che

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n.} \quad (5.14)$$

Infatti  grazie alla formula di sommazione di Poisson, si ha che per ogni funzione test

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_n, \hat{\varphi} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \hat{\delta}_n, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e^{2\pi i n \nu}, \varphi \rangle$$

cioè

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \nu}.$$

Applicando ad ambo i membri la trasformata di Fourier otteniamo allora che

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(e^{2\pi i n \nu}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$$

che è la tesi. Si osservi che si è usata la continuità della trasformata in \mathcal{S}' , cioè il seguente lemma, la cui semplice dimostrazione è lasciata per esercizio.

Lemma 5.1. *Supponiamo che $T_n, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e che $T_n \rightarrow T$ in \mathcal{S}' , che significa che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Allora $\mathcal{F}(T_n) \rightarrow \mathcal{F}(T)$, cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}(T_n), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle$ per ogni φ .

Concludiamo con un breve cenno alla cosiddetta *teoria quadratica della trasformata di Fourier*. Una funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile in \mathbb{R} si dice *a quadrato sommabile (in \mathbb{R})* se $|g|^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è sommabile. Denotiamo con $L^2(\mathbb{R})$ le funzioni a quadrato sommabile. Si può dimostrare il seguente risultato. Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è sia sommabile sia a quadrato sommabile, allora \hat{g} è a quadrato sommabile e

$$\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2$$

dove $\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. La relazione precedente è nota col nome di *uguaglianza di Parseval*.

È anche possibile dimostrare che ogni funzione g a quadrato sommabile (non necessariamente sommabile) è una distribuzione temperata (più precisamente $T_g \in \mathcal{S}'$ se $g \in L^2$). Allora ha senso farne la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni. Utilizzando un'estensione dell'integrale di Riemann, chiamato *integrale di Lebesgue*, è possibile mostrare che $\mathcal{F}(g)$ è ancora una funzione e soddisfa ancora l'uguaglianza di Parseval e la formula di inversione in un opportuno senso generalizzato.

6 Tabelle

Proprietà

$\mathcal{F}(e^{2\pi i \nu_0 t} T(t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(\nu - \nu_0)$	$(\nu_0 \in \mathbb{R})$
$\mathcal{F}(T(t - t_0))(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu} \mathcal{F}(T(t))(\nu)$	$(t_0 \in \mathbb{R})$
$\mathcal{F}(T(at))(\nu) = \frac{1}{ a } \mathcal{F}(T(t))\left(\frac{\nu}{a}\right)$	$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
$\mathcal{F}(T(-t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(-\nu)$	
$[\mathcal{F}(T(t))]^{(p)} = (-2\pi i)^p \mathcal{F}(t^p T(t))$	$(p \in \mathbb{N})$
$\mathcal{F}(T^{(p)})(\nu) = (2\pi i)^p \nu^p \mathcal{F}(T)(\nu)$	$(p \in \mathbb{N})$

Trasformate ($a > 0$)

$T(t)$	$\mathcal{F}(T(t))(\nu)$
$H(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a + 2\pi i \nu}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \nu^2}$
$p_a(t)$	$\frac{\sin(a\pi \nu)}{\pi \nu}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \nu^2 / a}$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-2\pi a \nu }$

$T(t)$	$\mathcal{F}(T(t))(\nu)$
$\frac{\sin(at)}{t}$	$\pi p_{\frac{a}{\pi}}(\nu)$
δ_{x_0}	$e^{-2\pi i x_0 \nu}$
$e^{2\pi i x_0 \nu}$	δ_{x_0}
$\text{v.p. } \frac{1}{t}$	$-\pi i \operatorname{sign}(\nu)$
$\operatorname{sign}(t)$	$\frac{1}{\pi i} \text{v.p. } \frac{1}{\nu}$
$H(t)$	$\frac{1}{2\pi i} \text{v.p. } \frac{1}{\nu} + \frac{\delta_0}{2}$

7 Esercizi

Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni e distribuzioni.

1. $g(t) = te^{-t^2}$

2. $g(t) = e^{-2t^2+4t}$ (suggerimento: completare il quadrato)

3. $g(t) = \cos t$

4. $g(t) = \cos(2t + 1)$

5. $g(t) = \cos t e^{-3t} H(t)$

6. $g(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$

7. $g(t) = |t|e^{-|t|}$

8. $g(t) = p_T(t - t_0)$ (dove $t_0 \in \mathbb{R}$ e $T > 0$)

9. $g(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}$ (dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$)

10. $g(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1 < t < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

(suggerimento: scrivere g come somma di opportune funzioni porta).

11. $g(t) = te^{-|t+2|/2}$

12. $g(t) = \frac{t \sin(2t)}{(t^2 + 4)^2}$ (suggerimento: procedere come nell'esempio 5.9)

13. $g(t) = tH(t)$

14. $g(t) = |t|$ (procedere come fatto a lezione oppure osservando che $|t| = t \operatorname{sign} t$)

15. $g(t) = H(t - 2)e^{-2t}$

16. $g(t) = p_{2\pi}(t) \sin t$

17. $g(t) = e^{-5t} \sin t H(t)$

18. $g(t) = p_{\pi}(t) \cos t$

19. $g(t) = \mathbb{1}_{[1,2]}(t) \sin t$ (per abbreviare il conto si può utilizzare l'esercizio 9)

20.* $g(t) = \arctan t$

21.* $g(t) = \log(t^2 + 1) - 2 \log |t|$

Risposte:

1. $-i\pi\sqrt{\pi}\nu e^{-\pi^2\nu^2}$

2. $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^2 e^{-\pi\nu(2i+\pi\nu/2)}$
3. $\frac{1}{2}(\delta_{1/2\pi} + \delta_{-1/2\pi})$
4. $\frac{1}{2}(e^i \delta_{1/\pi} + e^{-i} \delta_{-1/\pi})$
5. $\frac{3 + 2\pi i\nu}{(3 + 2\pi i\nu)^2 + 1}$
6. $-\pi e^{-2\pi|\nu|} + \delta_0$
7. $\frac{2 - 8\pi^2\nu^2}{(1 + 4\pi^2\nu^2)^2}$
8. $e^{-2\pi i\nu t_0} \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu}$
9. $e^{-\pi i\nu(a+b)} \frac{\sin(\pi\nu(b-a))}{\pi\nu}$
10. $\frac{1}{\pi\nu}(2e^{\pi i\nu} \sin(\pi\nu) - e^{-2\pi i\nu} \sin(2\pi\nu))$
11. $8ie^{4\pi i\nu} \frac{i(1 + 16\pi^2\nu^2) - 8\pi\nu}{(1 + 16\pi^2\nu^2)^2}$
12. $\frac{\pi}{4} [(1 - \pi\nu)e^{-4\pi|\nu-1/\pi|} + (1 + \pi\nu)e^{-4\pi|\nu+1/\pi|}]$
13. $\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\pi} (\text{v.p. } \frac{1}{\nu})' + i\delta'_0 \right]$
14. $\frac{1}{2\pi^2} (\text{v.p. } \frac{1}{\nu})'$
15. $\frac{e^{-4(1+\pi i\nu)}}{2 + 2\pi i\nu}$
16. $\frac{1}{2i} \left[\frac{\sin(2\pi^2(\nu - 1/2\pi))}{\pi(\nu - 1/2\pi)} - \frac{\sin(2\pi^2(\nu + 1/2\pi))}{\pi(\nu + 1/2\pi)} \right]$
17. $\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{5 + 2\pi i(\nu - 1/2\pi)} - \frac{1}{5 + 2\pi i(\nu + 1/2\pi)} \right]$
18. $\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\pi^2(\nu - 1/2\pi))}{\pi(\nu - 1/2\pi)} + \frac{\sin(\pi^2(\nu + 1/2\pi))}{\pi(\nu + 1/2\pi)} \right]$
19. $\frac{1}{2i} \left[e^{-3\pi i(\nu-1/2\pi)} \frac{\sin(\pi(\nu - 1/2\pi))}{\pi(\nu - 1/2\pi)} - e^{-3\pi i(\nu+1/2\pi)} \frac{\sin(\pi(\nu + 1/2\pi))}{\pi(\nu + 1/2\pi)} \right]$
20. Poiché $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ si ha $\hat{g}'(\nu) = \mathcal{F}(1/(1+t^2))(\nu) = \pi e^{-2\pi|\nu|}$. Ma $\hat{g}'(\nu) = 2\pi i\nu \hat{g}(\nu)$, quindi $2i\nu \hat{g}(\nu) = e^{-2\pi|\nu|}$. Non possiamo dividere per ν perchè \hat{g} è una distribuzione, quindi ricordando che $\nu \text{ v.p. } \frac{1}{\nu} = 1$, scriviamo $2i\nu \hat{g}(\nu) =$

$e^{-2\pi|\nu|} \nu$ v.p. $\frac{1}{\nu}$, cioè $\nu(2i\hat{g}(\nu) - e^{-2\pi|\nu|} \nu \text{ v.p. } \frac{1}{\nu}) = 0$. Ricordiamo ora dalla teoria che $\nu T(\nu) = 0$ implica che $T(\nu) = c\delta_0$ per una qualche costante c . Troviamo allora che $2i\hat{g}(\nu) - e^{-2\pi|\nu|} \nu \text{ v.p. } \frac{1}{\nu} = c\delta_0$. Ora abbiamo che $e^{-2\pi|\nu|}$ è pari e v.p. $\frac{1}{\nu}$ è dispari, ne segue che $e^{-2\pi|\nu|} \nu \text{ v.p. } \frac{1}{\nu}$ è dispari (esercizio). Inoltre $g(t)$ è dispari, quindi $\hat{g}(\nu)$ è dispari. Ne segue allora che è dispari $2i\hat{g}(\nu) - e^{-2\pi|\nu|} \nu \text{ v.p. } \frac{1}{\nu}$, che però è uguale a $c\delta_0$ che è pari, quindi $c = 0$. In definitiva abbiamo $\hat{g}(\nu) = \frac{1}{2i} e^{-2\pi|\nu|} \nu \text{ v.p. } \frac{1}{\nu}$.

21. La funzione $g(t)$ risulta sommabile su \mathbb{R} , infatti per $t \rightarrow 0$ $g(t) \sim 2 \log |t|$, mentre per $t \rightarrow \pm\infty$ $g(t) = \log(1+1/t^2) \sim 1/t^2$. Si ha $g'(t) = \frac{2t}{1+t^2} - 2 \text{ v.p. } (\frac{1}{t})$, quindi trasformando ambo i membri otteniamo che $\hat{g}'(\nu) = 2 \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \left[\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right]'(\nu) + 2\pi i \text{ sign}(\nu) = \frac{i}{\pi} \frac{d}{d\nu}(e^{-2\pi|\nu|}) + 2\pi i \text{ sign}(\nu) = \frac{i}{\pi}(-2\pi)e^{-2\pi|\nu|} \text{ sign}(\nu) + 2\pi i \text{ sign}(\nu) = 2\pi i \text{ sign}(\nu)(1 - \frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})$. D'altra parte $\hat{g}'(\nu) = 2\pi i \nu \hat{g}(\nu)$, quindi $2\pi i \nu \hat{g}(\nu) = 2\pi i \text{ sign}(\nu)(1 - \frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})$, da cui segue che $\nu \hat{g}(\nu) = \text{sign}(\nu)(1 - \frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})$ e quindi $\hat{g}(\nu) = \frac{\text{sign}(\nu)}{\nu}(1 - \frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi}) = \frac{1}{|\nu|}(1 - \frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})$, infatti essendo g è sommabile, si ha che $\hat{g} \in C(\mathbb{R})$, cioè \hat{g} è ancora una funzione).

8 Appendice: teoremi sull'integrazione

In questa appendice enunciamo senza dimostrazione l'estensione al caso degli integrali impropri di alcuni teoremi dell'Analisi II riguardanti gli integrali doppi e gli integrali dipendenti da un parametro. Nell'ambito del nostro corso non è indispensabile conoscere a mente gli enunciati di tali teoremi, tuttavia è bene essere consapevoli che le operazioni di passaggio al limite o di derivazione sotto il segno di integrale non sono lecite in generale, ma necessitano di alcune ipotesi.

Teorema 8.1 (Convergenza dominata). *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione sommabile tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ esista $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \in \mathbb{C}$. Supponiamo che f sia sommabile e che esista $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ sommabile tale che $|f_n(t)| \leq g(t)$ per ogni t . Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt.$$

Teorema 8.2. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia convergente l'integrale*

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dt.$$

Se esiste una funzione sommabile $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ tale che $|\frac{d}{dt} f(x, t)| \leq g(t)$. Allora F è derivabile e

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} f(x, t) dt.$$

Teorema 8.3 (Fubini). *Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione integrabile su \mathbb{R}^2 . Allora*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(x, y) \, dy \, dx, \quad (8.1)$$

dove si suppone che i due membri hanno senso.

Per quanto riguarda il Teorema di Fubini, è possibile dimostrare che non è necessario supporre che i due membri di (8.1) abbiano senso: l'integrabilità di F su \mathbb{R}^2 implica l'esistenza dei due integrali iterati, purché F sia modificata in un opportuno insieme “piccolo”, cioè che non altera il valore di tali integrali.

Modifiche dalla revisione del 9 giugno 2015 alla revisione del 1 giugno, 2016:

1. I calcoli dell'Esempio 5.8 sono stati riscritti.
2. Suggerimento aggiutno all'Esercizio 2.