Distribuzioni

09BQXOA - Metodi Matematici per l'Ingegneria
A.A. 2023/2024

Versione: Aprile 2024

Disclaimer: Queste dispense non sostituiscono le esercitazioni, ma sono un'integrazione delle stesse.

Indice

1 Derivata distribuzionale

1.1 Richiami di teoria

Vale la pena fare chiarezza sul concetto di derivata di una distribuzione.
La definizione generale, valida per qualsiasi distribuzione è la seguente:

$$\langle T'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle T(x), \varphi'(x)\rangle \tag{1.1}$$

La derivata distribuzionale gode di molte delle proprietà classiche della derivazione per funzioni:

- $(\lambda T_1 + \mu T_2)' = \lambda T_1' + \mu T_2'$, per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $(T(ax+b))' = aT'(ax+b)$ per $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.
- $(\psi(x)T(x))' = \psi'(x)T(x) + \psi(x)T'(x)$, per $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$

Per le distribuzioni regolari, con funzione f derivabile e tale che $f' \in R^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, allora si ha che:

$$T_f'(x) = T_{f'}(x)$$

Tuttavia, se f non è derivabile in un certo insieme di punti, non è ben chiaro come calcolare $T_f'(x)$.
In generale, la derivata di una distribuzione regolare T_f con f non derivabile può non essere una distribuzione regolare (cioè $T_f'(x) \neq T_{f'}(x)$).
Si può dimostrare che, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ovunque tranne che in un numero finito di punti $x_1, \dots, x_k$, dove $f(x)$ presenta al più una discontinuità eliminabile o a salto e tale che $f'(x) \in R^1_{\text{loc}}$, allora:

$$T'_{f(x)} = T_{f'(x)} + \sum_{i=1}^{k} [f(x_i^+) - f(x_i^-)] \cdot \delta_{x_i} \qquad \textit{con} \qquad f(x_i^\pm) := \lim_{x \to x_i^\pm} f(x) \tag{1.2}$$

Dunque, ogni volta che f presenta delle discontinuità a salto, la derivata della distribuzione regolare indotta da f presenterà una parte impulsiva (una somma di delta di Dirac) e non sarà quindi una distribuzione regolare. Inoltre:

- I punti $x_0 \in \mathbb{R}$ dove la funzione $f(x)$ presenta punti angolosi o discontinuità eliminabili non danno alcun contributo alla derivata distribuzionale. Se ne tenessimo conto, infatti, all'interno della sommatoria darebbero un contributo nullo: $f(x_i^+) = f(x_i^-) \implies f(x_i^+) - f(x_i^-) = 0$.
- Il valore effettivo della funzione $f(x)$ nel punto x_i ($f(x_i)$) non ha alcuna rilevanza, poichè nella 1.2 compiaono solo i due limiti $f(x)$ per $x \to x_i^\pm$.

1.2 Esercizi

Esercizio 1: Calcolare la derivata distribuzionale della distribuzione regolare indotta da:

$$f(x) = \text{sign}(x) + 2x \tag{1.3}$$

utilizzando la seguente definizione per sign(x):

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soluzione

Per risolvere correttamente l'esercizio, è necessario utilizzare la formula per la derivata distribuzionale 1.2, poiché $f(x)$ non è derivabile $\forall\ x \in \mathbb{R}$ in quanto presenta una discontinuità a salto per $x = 0$.

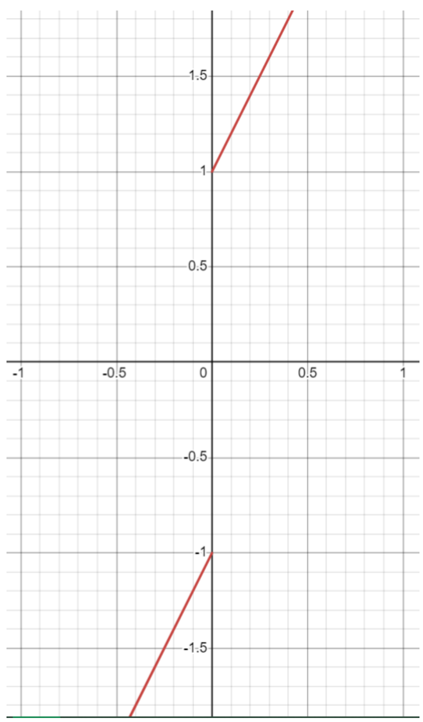

Figure 1: funzione 1.3 a $x = 0$

La funzione, (per $\forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$), ha la seguente derivata:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}(2x-1) & \text{se } x < 0 \\ \frac{d}{dx}(2x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 2, \quad x \neq 0$$

Per $x = 0$ dobbiamo invece studiare i due limiti, $x \to 0^{\pm}$:

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad\qquad f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Applicando 1.2:

$$T'_{\text{sign}(x)+2x} = \underbrace{T_{[\text{sign}(x)+2x]'}}_{\text{Parte regolare}} + \underbrace{[f(0^+) - f(0^-)] \cdot \delta_0}_{\text{Parte impulsiva}} = T_2 + 2\delta_0 \tag{1.4}$$

Come discusso in precedenza, possiamo vedere che il valore della funzione 1.3 nel punto $x = 0$ è irrilevante nel risultato finale.

Esercizio 2: Calcolare la derivata distribuzionale della seguente distribuzione:

$$T = e^{x^2} \cdot \delta_{-1} + T_{3 \cdot \text{sign}(-x)} \tag{1.5}$$

utilizzando la seguente definizione per $\text{sign}(x)$:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soluzione
Utilizzando la linearità, possiamo scrivere:

$$T' = (e^{x^2} \cdot \delta_{-1})' + T'_{3 \cdot \text{sign}(-x)}$$

e possiamo studiare separatamente i due pezzi.
Per quanto riguarda il primo addendo, ricordando l'azione della delta di Dirac quando moltiplicata per una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$, possiamo scrivere:

$$e^{x^2} \cdot \delta_{-1} = e^{(-1)^2} \cdot \delta_{-1} = e \cdot \delta_{-1}$$

e, nuovamente per linearità:

$$(e^{x^2} \cdot \delta_{-1})' = e^{(-1)^2} \cdot \delta_{-1} = e \cdot \delta'_{-1}$$

La seconda parte della distribuzione originale 1.5 può essere studiata come nell'esercizio precedente.
La prima cosa da fare è valutare gli intervalli in cui la funzione che induce la distribuzione è continua e derivabile, in modo da poter utilizzare la formula 1.2.
La funzione $3 \cdot \text{sign}(-x)$ può essere scritta come:

$$3 \cdot \text{sign}(-x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

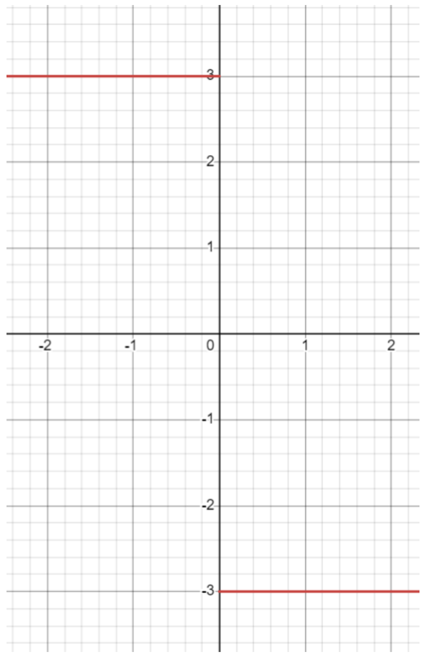

Figure 2: funzione 1.5 vicino a $x = 0$

come nell'esercizio precedente, abbiamo trovato che l'unico punto di non derivabilità è $x_0 = 0$ dove la funzione ha una discontinuità a salto.
Valutando i due limiti e applicando 1.2 possiamo scrivere che

$$T' = e\delta'_{-1} + [f(0^+) - f(0^-)] \cdot \delta_0 = e\delta_{-1} - 6\delta_0$$

Esercizio 3: Sia $\varphi(x) \in \mathbb{D}$ una funzione test tale che $\varphi'(0) = -2$. Calcolare:

$$\lambda = \langle (\sin x) \cdot \delta''_0, \varphi(x) \rangle \tag{1.6}$$

Soluzione
Essendo $f(x) := \sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$, per la proprietà di moltiplicazione:

$$\lambda = \langle (\sin x) \cdot \delta''_0, \varphi(x) \rangle = \langle \delta''_0, \varphi(x) \cdot (\sin x) \rangle$$

Presentando una derivata seconda, utilizziamo 1.1 due volte:

$$\lambda = \langle \delta''_0, \varphi(x) \cdot (\sin x) \rangle \overset{1.1}{=} -\langle \delta'_0, [\sin(x) \cdot \varphi(x)]' \rangle =$$

$$= -\langle \delta'_0, \cos(x) \cdot \varphi(x) + \sin(x) \cdot \varphi'(x) \rangle \overset{1.1}{=} \langle \delta_0, [\cos(x) \cdot \varphi(x) + \sin(x) \cdot \varphi'(x)]' \rangle =$$

$$= \langle \delta_0, -\sin(x)\cdot\varphi(x) + \cos(x)\cdot\varphi'(x) + \cos(x)\cdot\varphi'(x) + \sin(x)\cdot\varphi''(x)\rangle =$$

$$= -\underbrace{\sin(0)}_{0}\varphi(0) + 2\underbrace{\cos(0)}_{1}\underbrace{\varphi'(0)}_{-2} + \underbrace{\sin(0)}_{0}\varphi''(0) = -4$$

Esercizio 4: Trova ogni distribuzione $T \in \mathbb{D}'$ per cui vale la seguente equazione:

$$T' = 2\cdot\delta_{-2} - 6\cdot\delta_1 + \delta_4'$$

Soluzione
Per risolvere questo esercizio dobbiamo applicare la formula della derivata distribuzionale 1.2 da destra a sinistra.
I primi due termini derivano da due discontinuità di tipo salto, mentre l'ultimo termine è la derivata di un delta già esistente.
Il primo delta può essere ottenuto sia derivando una funzione di Heaviside traslata $H(t+2)$ moltiplicata per 2 o una funzione segno traslata $sign(t+2)$.
Seguendo un ragionamento simile, il secondo delta può essere trovato derivando una funzione di Heaviside traslata $H(t-1)$ moltiplicata per -6 o una funzione segno traslata $sign(t-1)$ moltiplicata per -3.
Il terzo delta si ottiene derivando un delta già esistente nella forma δ_4.
Poiché ci viene chiesto di trovare ogni possibile distribuzione, dobbiamo anche considerare l'esistenza di un termine costante (c), che derivato sarà nullo.
Per concludere, una possibile soluzione generale (usando la funzione di Heaviside) è:

$$T = T_{2\cdot H(t+2)} + T_{-6\cdot H(t-1)} + \delta_4 + \underbrace{T_c}_{\text{costante}} \tag{1.7}$$

2 Successioni di distribuzioni

2.1 Richiami di teoria

Possiamo stabilire una nozione di convergenza per le distribuzioni. Data una successione di distribuzioni $T_n \in \mathbb{D}'$, diciamo che T_n converge (nel senso delle distribuzioni) a una certa $T \in \mathbb{D}'$ se:

$$\lim_{n \to +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathbb{D} \tag{2.1}$$

e si può dire che $T_n \to T$.
Inoltre, date due successioni di distribuzioni $T_n \to T$ e $S_n \to S$, si può dire:

$$\lambda T_n + \mu S_n \to \lambda T + \mu S, \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Per le distribuzioni regolari, data una $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che converge a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in un intervallo compatto, possiamo concludere che $T_{f_n} \to T_f$.

2.2 Esercizi

Esercizio 1: Sia $T_n = n^n \cdot \delta_n$ una successione di distribuzioni. Determina se la successione converge e, in caso positivo, la distribuzione a cui converge.

Soluzione
Per studiare la convergenza si calcola $\langle T_n, \varphi\rangle$ per $n \to +\infty$ come da 2.1:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle n^n \cdot \delta_n, \varphi\rangle$$

Visto che $n^n \in \mathbb{N}$, per linearità possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle n^n \cdot \delta_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} n^n \cdot \langle \delta_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} n^n \cdot \varphi(n)$$

La funzione $\varphi \in \mathbb{D}$ è una funzione test, e in quanto tale ha supporto compatto (oltre ad essere vero che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$).
Ciò significa che:

$$\exists M \in \mathbb{N} : n > M \implies \varphi(x) = 0$$

Quindi, per quanto sia corretto scrivere che $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = 0$ il risultato è in realtà più forte: la funzione test non solo tende a 0 per $n \to +\infty$ ma è identicamente 0.
Perciò, quella che può sembrare una forma indeterminata del tipo '$0 \cdot \infty$' è in realtà una banale moltiplicazione per 0:

$$\lim_{n\to\infty} n^n \cdot \varphi = 0$$

quindi,

$$\langle n^n \cdot \delta_n, \varphi\rangle \to \langle 0, \varphi\rangle \implies n^n \cdot \delta_n \to 0$$

Esercizio 2: Sia $T_n = n \cdot \left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_0\right)$ una successione di distribuzioni. Dimostrare che la successione non converge in $\mathbb{D}'$.

Soluzione
Per dimostrare che la successione della distribuzione data non converge, dobbiamo utilizzare una funzione test φ.
Inoltre, possiamo scrivere che:

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \langle n \cdot \left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_0\right), \varphi\rangle = \langle n \cdot \delta_{\frac{1}{n}} + n \cdot \delta_0, \varphi\rangle$$

Utilizzando la proprietà di linearità insieme alla proprietà del delta di Dirac, possiamo scrivere:

$$\langle n \cdot \delta_{\frac{1}{n}} + n \cdot \delta_0, \varphi\rangle = n \cdot \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + n \cdot \varphi(0)$$

Ora, a seconda del valore di $\varphi(0)$ possiamo avere casi differenti.
Se il valore di $\varphi(0) \neq 0$ (ad esempio, $\varphi(0) = 1$), possiamo concludere che $n \cdot \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + n \cdot \varphi(0) \to +\infty$ per $n \to +\infty$, dimostrando così che la successione data non è convergente.

Esercizio 3: Calcolare la distribuzione a cui converge T_{f_n} con:

$$f_n = n \cdot P_{\left[-\frac{2}{n};\frac{2}{n}\right]}(x)$$

con $P_{\left[-\frac{2}{n};\frac{2}{n}\right]}(x)$ la funzione porta 2.3 con centro 0 e ampiezza $\frac{4}{n}$.
La funzione porta può essere scritta come:

$$P_{\left[-\frac{2}{n};\frac{2}{n}\right]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } |x| > \frac{2}{n} \end{cases} \tag{2.3}$$

Soluzione
Con la data definizione della funzione porta, possiamo scrivere l'azione della distribuzione regolare indotta da f_n come:

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} n \cdot P_{\left[-\frac{2}{n};\frac{2}{n}\right]}(x) \cdot \varphi(x)\, dx \overset{2.3}{=}$$

$$= n \cdot \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(x)\, dx$$

Ora, possiamo usare il teorema fondamentale del calcolo per valutare l'ultimo integrale:

$$n \cdot \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(x)\, dx = n \cdot \left[\Phi\left(\frac{2}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{n}\right)\right]$$

dove $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una primitiva di φ. Vogliamo quindi calcolare la differenza tra la funzione test valutata in due punti, parametrizzati su n, che tendono a 0 per $n \to \infty$. In casi come questo, è utile cercare di ricondursi al rapporto incrementale, cercando di scrivere la differenza nella forma:

$$\varphi(N(n) + \nu(n)) - \varphi(N(n)) \tag{2.4}$$

In questo caso, con $\nu(n) = \frac{4}{n}$, otteniamo:

$$n\left[\Phi\left(\frac{2}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{n}\right)\right] = n\frac{4}{n}\frac{\Phi\left(-\frac{2}{n}+\frac{4}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{n}\right)}{\frac{4}{n}}$$

Poiché vogliamo valutare la convergenza di T_{f_n}, dobbiamo studiare il limite per $n \to +\infty$ dell'espressione precedente, ottenendo il rapporto incrementale desiderato:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \lim_{n\to+\infty} n\frac{4}{n}\frac{\Phi\left(-\frac{2}{n}+\frac{4}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{n}\right)}{\frac{4}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 4 \cdot \Phi'\left(\frac{-2}{n}\right) = 4\varphi(0)$$

Quindi, l'azione di T_{f_n} su una funzione test è di campionare $\varphi(0)$ e di moltiplicarla per 4. L'azione è dunque quella di una delta centrata in $x_0 = 0$ moltiplicata per 4:

$$T_{f_n} \to 4 \cdot \delta_0$$