Trasformata di Laplace

09BQXOA - Metodi Matematici per l'Ingegneria
A.A. 2023/2024

Versione: Maggio 2024

Disclaimer: Queste dispense non sostituiscono le esercitazioni, ma sono un'integrazione delle stesse.

1 Trasformata di funzioni

1.1 Richiami di teoria

Sia $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente sommabile, cioè per cui esiste finita la quantità

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad [a,b] \subset [0,+\infty)$$

Inoltre, sia Ω_f il sottoinsieme del piano complesso definito da

$$\Omega_f \coloneqq \{s \in \mathbb{C}\colon\ f(t)e^{-st} \text{ è sommabile}\} \tag{1.1}$$

Preso $s \in \Omega_f$, si definisce *trasformata di Laplace della funzione* f come segue

$$\mathcal{L}[f](s) \coloneqq \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

osservando che l'integrale converge sicuramente vista la definizione in (1.1). Spesso le funzioni da trasformare sono della forma

$$f(t) = g(t)H(t)$$

così da poter "tagliare" tutto ciò che sta prima dell'origine.
L'insieme Ω_f è detto *semipiano di convergenza*, il cui nome deriva dalla seguente osservazione: scrivendo $s \in \Omega_f$ in forma algebrica e stimando il modulo della funzione integranda in (1.2)

$$0 \le \left|f(t)e^{-st}\right| = |f(t)| \cdot \left|e^{-(\lambda+i\omega)t}\right| = |f(t)| \cdot \left|e^{-\lambda t}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-i\omega t}\right|}_{1} = |f(t)| \cdot \left|e^{-\lambda t}\right|$$

Da questo si deduce che *la convergenza della trasformata di Laplace dipende solo dalla parte reale* λ *di* $s \in \Omega_f$. Inoltre, se per $s_1 = \lambda_1+i\omega_1$ la trasformata converge, allora per $s_2 = \lambda_2+i\omega_2$ converge se $\lambda_2 > \lambda_1$ dal criterio del confronto

$$0 \le \left|f(t)e^{-s_2t}\right| = |f(t)| \cdot \left|e^{-\lambda_2 t}\right| < |f(t)| \cdot \left|e^{-\lambda_1 t}\right|$$

quindi se converge per una certa parte reale allora converge per tutte le parti reali maggiori, *definendo un semipiano nel piano complesso.* La più piccola parte reale per cui converge è detta *ascissa di convergenza assoluta* e si indica con λ_f

$$\lambda_f \coloneqq \inf\{\mathrm{Re}(s)\colon\ f(t)e^{-st} \text{ è sommabile}\}$$

Dalla definizione (1.2), discendono le proprietà da formulario.

1.2 Esercizi

Esercizio 1. Determinare l'insieme Ω_f e calcolare la trasformata di

$$f(t) = t\sin(\omega t)H(t)$$

Soluzione. Per trovare Ω_f bisogna stimare il modulo di $f(t)e^{-st}$ così da verificarne la sommabilità. Come osservato precedentemente, del numero complesso s ci interesserà la parte reale

$$0 \leq \left|t \sin(\omega t) H(t) e^{-st}\right| = \left|t \sin(\omega t) H(t)\right| \cdot \left|e^{-\lambda t}\right| \leq \left|t e^{-\lambda t}\right|$$

osservando che $\sin(\omega t)H(t) \leq 1$. Quindi, per il criterio del confronto, l'integrale di Laplace esiste se $\lambda > 0$

$$\Omega_f = \{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s) > 0\} \longrightarrow \lambda_f = 0$$

Intuitivamente, l'esponenziale $e^{-\lambda t}$ tende a zero molto più velocemente della funzione $f(t)$, controllandone il comportamento asintotico. Chiaramente questo è vero se l'esponente è negativo (altrimenti l'esponenziale sarebbe monotono crescente e di sicuro l'integrale divergerebbe), cioè se $-\lambda t < 0 \longrightarrow \lambda > 0$.

Per calcolare la trasformata di $f(t)$ si fa affidamento alla proprietà di derivazione, cioè

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}[t \sin(\omega t) H(t)](s) = -\mathcal{L}[\sin(\omega t) H(t)](s) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}\end{aligned}$$

Esercizio 2. Determinare l'insieme Ω_f e calcolare la trasformata di

$$f(t) = (t-3)H(t-2)e^{t+1}$$

Soluzione. Nuovamente bisogna stimare $|f(t)e^{-st}|$. Seguendo il ragionamento intuitivo di prima, la convergenza sarà controllata dal termine esponenziale $e^{t+1} \cdot e^{-\lambda t}$. Formalmente

$$\begin{aligned}0 &\leq \left|f(t)e^{-st}\right| = \left|f(t)e^{-\lambda t}\right| = \left|(t-3)H(t-2)e^{t+1}e^{-\lambda t}\right| \leq \left|(t-3)e^{t-\lambda t}\right| \\ &= \left|(t-3)e^{(1-\lambda)t}\right|\end{aligned}$$

trovando quello che ci aspettavamo. Ricordando che l'esponente dev'essere negativo, la convergenza è assicurata se

$$1 - \lambda < 0 \longrightarrow \lambda > 1$$

quindi

$$\Omega_f = \{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s) > 1\} \longrightarrow \lambda_f = 1$$

Per calcolare la trasformata, osservando che la funzione di Heaviside è calcolata in $(t-2)$, l'idea è di usare la proprietà di traslazione. La funzione va quindi riscritta come segue

$$f(t) = (t-2+1)H(t-2)e^{t-2+3} = e^3[H(t-2)e^{t-2}(t-2+1)] = e^3[H(t-2)e^{t-2}(t-2) + H(t-2)e^{t-2}]$$

Adesso è sufficiente applicare la proprietà di traslazione ad entrambi gli addendi e poi usare le trasformate standard

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= e^3[\mathcal{L}[H(t-2)(t-2)e^{t-2}](s) + \mathcal{L}[H(t-2)e^{t-2}](s)] \\ &= e^3 \cdot \underbrace{e^{-2s}}_{\text{traslazione}} \cdot \mathcal{L}[H(t)te^t](s) + e^3 \cdot \underbrace{e^{-2s}}_{\text{traslazione}} \cdot \mathcal{L}[H(t)e^t](s) \\ &= e^{3-2s}\mathcal{L}[H(t)t](s-1) + e^{3-2s}\mathcal{L}[H(t)e^t](s) \\ &= e^{3-2s}\frac{1}{(s-1)^2} + e^{3-2s}\frac{1}{s-1} = e^{3-2s}\frac{s}{(s-1)^2}\end{aligned}$$

Arrivati alla seconda riga, per il primo addendo è possibile sia applicare la proprietà di moltiplicazione per esponenziale (che è la scelta effettuata nel calcolo), sia la proprietà di moltiplicazione per t. Dato che la seconda richiede una derivazione, scegliere la prima diminuisce la probabilità di fare errori di calcolo.

Esercizio 3. Determinare l'insieme Ω_f e calcolare la trasformata di

$$f(t) = H(t)e^{t-1} + H(t-2)\cos(t)$$

Soluzione. La situazione è simile a quella dell'esercizio precedente: per il secondo addendo sarà sufficiente avere $\lambda > 0$, mentre la convergenza per il primo addendo sarà controllata da $e^{t-1} \cdot e^{-st}$. Formalmente, si usa la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}0 &\leq \left|f(t)e^{-st}\right| = \left|[H(t)e^{t-1} + H(t-2)\cos(t)]e^{-st}\right| \leq \left|H(t)e^{t-1}e^{-st}\right| + \left|H(t-2)\cos(t)e^{-st}\right| \\ &= \left|H(t)e^{t-1}e^{-\lambda t}\right| + \left|H(t-2)\cos(t)e^{-\lambda t}\right| \leq \left|e^{t-1-\lambda t}\right| + \left|e^{-\lambda t}\right| \leq \left|e^{(1-\lambda)t}\right| + \left|e^{-\lambda t}\right|\end{aligned}$$

trovando quello che ci aspettavamo: $\lambda > 0$ per il secondo addendo, mentre per il primo

$$1 - \lambda < 0 \longrightarrow \lambda > 1$$

sempre ricordando che l'esponenziale deve avere esponente negativo. Quindi

$$\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(s) > 1\} \longrightarrow \lambda_f = 1$$

Per calcolare la trasformata, il primo membro è una diretta applicazione del formulario, mentre il secondo membro richiede qualche manipolazione algebrica. Le strade sono due:

- usare la formula di Eulero per il coseno, così da applicare le stesse proprietà usate per trasformare il primo membro
- sommare e sottrarre 2 nell'argomento del coseno e usare la formula di somma, così da applicare la proprietà di traslazione

Visto che la prima è più algoritmica, si sceglie la seconda

$$\begin{aligned}f(t) &= H(t)e^{t-1} + H(t-2)\cos(t-2+2) \\ &= H(t)e^{t}e^{-1} + H(t-2)[\cos(t-2)\cos(2) - \sin(t-2)\sin(2)] \\ &= \frac{1}{e}H(t)e^{t} + \cos(2)H(t-2)\cos(t-2) - \sin(2)H(t-2)\sin(t-2)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](t) &= \frac{1}{e}\frac{1}{s-1} + \cos(2)\underbrace{e^{-2s}}_{\text{traslazione}}\mathcal{L}[H(t)\cos(t)](s) - \sin(2)\underbrace{e^{-2s}}_{\text{traslazione}}\mathcal{L}[H(t)\sin(t)](s) \\ &= \frac{1}{e}\frac{1}{s-1} + \cos(2)e^{-2s}\frac{s}{s^2+1} - \sin(2)e^{-2s}\frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

2 Trasformata di distribuzioni

2.1 Richiami di teoria

Svolgere una lunga trattazione (come quella svolta per la trasformata di Fourier) esula dallo scopo di questa esercitazione. Quindi, volendo estendere la trasformata di Laplace alle distribuzioni, è sufficiente osservare che, come per la trasformata di Fourier

$$\varphi \in \mathcal{D} \Longrightarrow \mathcal{L}[\varphi](s) \notin \mathcal{D}'$$

Per sopperire alla mancanza del supporto compatto di $\mathcal{L}[\varphi](s)$, si usano le distribuzioni $T \in \mathcal{D}'$ a supporto compatto e si definisce

$$\mathcal{L}[T](s) \coloneqq \langle T, e^{-st} \rangle$$

da cui discendono, mutatis mutandis, le stesse proprietà della trasformata di funzioni.

2.2 Esercizio

Trasformare $T = t^4 \delta_3$.
Soluzione. Per le proprietà della delta di Dirac

$$T = t^4 \delta_3 = 3^4 \delta_3$$

quindi, da formulario

$$\mathcal{L}[T](s) = 3^4 e^{-3s}$$

3 Antitrasformata e fratti semplici

3.1 Richiami di teoria

La trasformata di Laplace è *iniettiva*, stabilendo una mappa 1 : 1 tra una funzione e la sua trasformata. Perciò si può definire l'*antitrasformata di Laplace*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$$

Il problema dell'antitrasformata è generalmente più complesso di quello della trasformata. Un caso particolare di antitrasformata è quello del rapporto di polinomi, data da

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right](t) = H(t) \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{N(s)}{D(s)} e^{ts}, p_k\right)$$

dove p_k rappresenta il k-esimo polo della frazione.

A livello pratico, per calcolare l'antitrasformata di $N(s)/D(s)$ bisogna scomporre la frazione in *fratti semplici* e trasformare ogni addendo. Analizziamo due casi

- poli semplici: la scomposizione in fratti semplici ha il seguente aspetto

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A}{s - p_A} + \frac{B}{s - p_B} + \frac{C}{s - p_C} + \dots$$

  Una volta trovate le costanti $A, B, C, \dots$ calcolare l'antitrasformata è una diretta applicazione del formulario. Per trovare le costanti esistono due strade: ricostruire la frazione originale e risolvere un sistema paragonando i coefficienti delle potenze di s, oppure usare la *formula di Heaviside*

$$A = \frac{P(s)}{Q(s)} \cdot (s - p_A)\bigg|_{s=p_A}$$

  cioè valutare la frazione nel polo, moltiplicandola però per il termine che genera il polo stesso.

- polo multiplo: la scomposizione in fratti semplici di *un* polo di molteplicità ℓ è la seguente

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{M_j}{(s - p_M)^j} \tag{3.1}$$

  e le costanti M_j sono date da una generalizzazione della formula di Heaviside

$$M_j = \frac{1}{(\ell - j)!} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{\ell-j}}{\mathrm{d}s^{\ell-j}} \left[(s - p_M)^{\ell} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right\} \bigg|_{s=p_M}$$

  NB: se il grado del polinomio $N(s)$ è maggiore di quello di $D(s)$ bisogna prima svolgere la *divisione polinomiale*

$$\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)}$$

  dove $Q(s)$ è il quoziente della divisione.

3.2 Esercizi

Esercizio 1. Antitrasformare

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 4}{s^3 + 3s^2 + s + 3}$$

Soluzione. Per scrivere $F(s)$ in fratti semplici bisogna trovare le radici del denominatore. Vista la presenza del termine $s + 3$, è ragionevole supporre che $s = -3$ sia una radice (e sostituendo il valore si vede immediatamente essere un'ipotesi corretta). Applicando la regola di Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{s^2+s+4}{(s+3)(s^2+1)} = \frac{s^2+s+4}{(s+3)(s+i)(s-i)} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-i} + \frac{C}{s+i} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-i} + \frac{\overline{B}}{s+i}\end{aligned}$$

ricordando che le costanti dei fratti semplici di poli complessi coniugati sono a loro volta complesse coniugate (anche se non è un fatto necessario ai fini della risoluzione dell'esercizio, serve soltanto a velocizzare i calcoli).

La funzione $F(s)$ presenta tre poli semplici, quindi usando la formula di Heaviside

$$\begin{aligned}A &= F(s)\cdot(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{s^2+s+4}{s^2+1}\Big|_{s=-3} = 1 \\ B &= F(s)\cdot(s-i)\Big|_{s=i} = \frac{s^2+s+4}{(s+3)(s+i)}\Big|_{s=i} = \frac{3+i}{(3+i)2i} = -\frac{i}{2} \\ C &= \overline{B} = \frac{i}{2}\end{aligned}$$

Da formulario, l'antitrasformata è

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = Ae^{-3t} + Be^{it} + \overline{B}e^{-it} = \left(e^{-3t} - \frac{i}{2}e^{it} + \frac{i}{2}e^{-it}\right)H(t)$$

L'esercizio sembra finito, ma bisogna ricordarsi che la trasformata di una funzione reale è a sua volta reale. Bisogna quindi mostrare che la funzione $f(t)$ ottenuta sia effettivamente a valori reali, facendo scomparire l'unità immaginaria nell'ultima espressione. Raccogliendo $i/2$ e usando la formula di Eulero

$$f(t) = \left[e^{-3t} - \frac{i}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right]H(t) = \left[e^{-3t} - \frac{i}{2}2i\sin(t)\right]H(t) = [e^{-3t} + \sin(t)]H(t)$$

concludendo l'esercizio.

Esercizio 2. Come continuazione dell'esercizio precedente, ci si pone la seguente domanda: esiste un modo di risolverlo senza passare per i poli complessi coniugati?

Soluzione. La funzione $f(t)$ a cui siamo arrivati presenta la funzione $\sin(t)$, che da formulario corrisponde a una trasformata con s^2+1 a denominatore, che in parte figura nel testo dell'esercizio. Volendo quindi lasciare il termine s^2+1 si scompone in fratti semplici *parzialmente*, cioè si scrive

$$F(s) = \frac{s^2+s+4}{s^3+3s^2+s+3} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

facendo ben attenzione al fatto che le costanti B e C *non* sono le stesse di prima (la costante A invece è uguale a prima visto, ma facciamo finta di non conoscerla così da risolvere un esercizio completo). Scrivendo $F(s)$ in questo modo non si riesce ad applicare la formula di Heaviside; non ci resta che ricostruire la frazione e risolvere un sistema

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{s^2+s+4}{s^3+3s^2+s+3} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s+3)}{(s+3)(s^2+1)} \\ &= \frac{As^2+A+Bs^2+3Bs+Cs+3C}{(s+3)(s^2+1)}\end{aligned}$$

Paragonando i coefficenti dei polinomi a numeratore si ottiene

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3B+C=1 \\ A+3C=4 \end{cases}$$

cioè $A=1, B=0, C=1$. Sostituendo in $F(s)$ si ricava

$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s^2+1}$$

Antitrasformando salta all'occhio la trasformata della funzione $\sin(t)$: siamo arrivati allo stesso risultato di prima senza passare per i numeri complessi

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = [e^{-3t} + \sin(t)]H(t)$$

Esercizio 3. Antitrasformare

$$F(s) = \frac{s^2-3s+4}{(s+1)(s-2)^2}$$

Soluzione. Il denominatore è già fattorizzato, presentando un polo semplice e uno doppio. Scomponendo in fratti semplici come in (3.1) per il polo multiplo, si ottiene

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \underbrace{\frac{M_1}{(s-2)} + \frac{M_2}{(s-2)^2}}_{\text{polo multiplo}}$$

e usando la formula di Heaviside

$$\begin{aligned}A &= F(s)\cdot(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{s^2-3s+4}{(s-2)^2}\Big|_{s=-1} = \frac{8}{9} \\ M_1 &= \frac{1}{(2-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}s^{2-1}}\left[(s-2)^2F(s)\right]\right\}\Big|_{s=2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s^2-3s+4}{s+1}\right)\Big|_{s=2} = \frac{1}{9} \\ M_2 &= \frac{1}{(2-2)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2-2}}{\mathrm{d}s^{2-2}}\left[(s-2)^2F(s)\right]\right\}\Big|_{s=2} = F(s)(s-2)^2\Big|_{s=2} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ora si tratta di applicare le trasformate standard del formulario, tenendo conto delle varie traslazioni in s

$$f(t) = \frac{8}{9}e^{-t}H(t) + \frac{1}{9}e^{2t}H(t) + \frac{2}{3}e^{2t}tH(t)$$