Trasformata di Fourier di Distribuzioni

Funzioni Rapidamente Decrescenti, Distribuzioni Temperate, Formula di Inversione, Trasformata di Distribuzioni Temperate

---

Richiami di teoria. E' utile studiare la trasformata di Fourier su una particolare sottoclasse di funzioni sommabili, dette *funzioni rapidamente decrescenti*. L'insieme delle funzioni rapidamente decrescenti forma uno spazio vettoriale detto spazio di Schwartz, ed è definito come:

Spazio delle funzioni rapidamente decrescenti

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) : \lim_{x \to \pm\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0, \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Intuitivamente, una funzione è rapidamente decrescente se la funzione stessa e le sue derivate decrescono più velocemente di qualsiasi polinomio. Notiamo che per come sono definite le funzion-itest $\phi \in \mathcal{D}$ (infinitamente regolari e a supporto compatto), esse sono contenute nello spazio delle funzioni rapidamente decrescenti, ovvero: $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$.

L'insieme delle funzioni rapidamente decrescenti è stabile rispetto alla trasformata di Fourier, il che significa che la trasformata di Fourier di una funzione rapidamente decrescente è ancora una funzione rapidamente decrescente, ovvero:

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathcal{F}(f)(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

L'importanza delle funzioni rapidamente decrescenti sta nel fatto che, su tale classe di funzioni, l'*antitrasformata di Fourier*, è esattamente l'operazione inversa della trasformata, cioè si ha:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(f)\right) = f, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Per come è definita l'antitrasformata di Fourier, il risultato presentato sopra implica l'importante formula di inversione:

Formula di inversione

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

A questo punto, al fine di poter estendere la trasformata di Fourier anche a funzioni non sommabili, è importante definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e per fare questo ci torna ancora una volta utile lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definito prima. Le distribuzioni su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ saranno definite come al solito come i funzionali $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineari e continui; l'insieme di tali distribuzioni, denotato con $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, è uno spazio vettoriale detto spazio delle *distribuzioni temperate*. In particolare, evidenziamo che, per la struttura di spazio vettoriale, la combinazione lineare di distribuzioni temperate è ancora una distribuzione temperata.

Vale la pena osservare che le distribuzioni temperate sono un sottoinsieme delle usuali distribuzioni definite su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ che abbiamo visto fino a ora, cioè si ha: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. In altre parole, un funzionale T potrebbe essere una distribuzione su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ma potrebbe non essere una distribuzione temperata, cioè potrebbe non essere una distribuzione su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Diventa allora fondamentale chiedersi quando una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è anche una distribuzione temperata; valgono i seguenti risultati:

Condizioni sufficienti per distribuzioni temperate

- Se $f \in \mathcal{R}^1$ o se f è limitata, allora T_f è una distribuzione temperata;
- Se $f(x) \in R^1_{loc}$ è a crescita lenta (i.e., $|f(x)| \leq A(1+|x|^p)$, per qualche $A > 0$ e $p \in \mathbb{N}$) allora T_f è una distribuzione temperata. Si noti che le funzioni limitate e i polinomi sono a crescita lenta;
- Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è a supporto compatto, allora T è una distribuzione temperata.

L'importanza delle distribuzioni temperate sta nel fatto che per esse ha senso definire la trasformata di Fourier come

Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

$$\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle, \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Ricordando che $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha che la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata è ancora una distribuzione temperata.

La formula per la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata diventa particolarmente semplice per alcune distribuzioni regolari, vale infatti:

$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}, \qquad f(x) \in \mathcal{R}^1$$

Quindi la trasformata di Fourier in questo caso è una distribuzione regolare indotta da $F(f)$. Se invece f non fosse sommabile, si dovrà usare la formula generale vista sopra ed eventualmente le proprietà della trasformata di Fourier che avevamo visto per le funzioni e che continuano a valere anche per le distribuzioni temperate.

Nota. Con abuso di notazione, si è soliti identificare una distribuzione regolare indotta da una funzione f con la funzione f stessa; malgrado questo non sia formalmente corretto, la notazione $\langle T_f, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$ non genera ambiguità e può dunque essere usata. Per questo motivo, per distribuzioni regolari che ammettono trasformata di Fourier possiamo anche usare una notazione più leggera e scrivere $F(T_f) = F(f)$. Nel seguito, cercheremo comunque di usare la notazione formalmente corretta tranne che quando specificato per alleggerire la notazione.

Esercizio 1. Si stabilisca se la funzione $f(x) = e^{x^2}$ induce o meno una distribuzione temperata.

Soluzione. Intuitivamente, f non è una funzione a crescita lenta, quindi possiamo aspettarci che non induca una distribuzione temperata. Per dimostrarlo è sufficiente far vedere che, data $g(x) = e^{-x^2}$, osserviamo che $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 1\,\mathrm{d}x = \infty$$

a cui si deduce che T_f non è una distribuzione temperata

Esercizio 2. Si stabilisca se il treno di impulsi è una distribuzione temperata.

Soluzione. Ricordiamo che la distribuzione treno di impulsi T è data da

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k$$

Preso un generico $\phi \in \mathcal{S}$, osserviamo che $\langle T, \phi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k)$ converge poiché essendo $\phi(k)$ rapidamente decrescente, possiamo dire che $|\phi(k)| \leq 1/|k|^2$, per k sufficientemente grande. Di Di conseguenza, è immediato mostrare che T è lineare:

$$\langle T, a\phi + b\psi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\phi(k) + b\psi(k) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(k) = a\langle T, \phi \rangle + b\langle T, \psi \rangle$$

Per finire, proviamo la continuità in zero. Dato $\phi_n \to 0$ in $\mathcal{S}$. Allora

$$|\langle T, \phi_n \rangle| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_n(k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi_n(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left| \left(1+k^2\right) \phi_n(k) \right|}{1+k^2}$$

$$\leq \left\| \left(1+x^2\right) \phi_n(x) \right\|_\infty \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}}_{\text{converge}} \to 0 \quad \text{poiché } \phi_n(x) \to 0$$

Esercizio 3. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}, \ a > 0$

Soluzione. Osserviamo che $f \notin \mathcal{R}^1$ tuttavia possiamo considerarne la distribuzione indotta. $f(x)$ è limitata, quindi la distribuzione regolare T_f è una distribuzione temperata. Ricordiamo che

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{\left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]}(x)\right) = \frac{\sin(b\pi\omega)}{\pi\omega}$$

Utilizziamo quindi la formula di inversione:

$$\mathcal{F}\left(T_{\frac{\sin(ax)}{x}}\right) = \pi\mathcal{F}\left(T_{\frac{\sin\left(\frac{a}{\pi}\pi x\right)}{\pi x}}\right) = \pi\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(T_{\mathbb{1}_{\left[-\frac{a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}\right]}(x)}\right)\right) = T_{\pi\mathbb{1}_{\left[-\frac{a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}\right]}(-\omega)} = \pi T_{\mathbb{1}_{\left[-\frac{a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}\right]}(\omega)}$$

Esercizio 4. Si calcoli la trasformata di Fourier della delta di Dirac δ_t

Soluzione. Innanzitutto la distribuzione δ_t è una distribuzione temperata poiché abbiamo già dimostrato che è una distribuzione a supporto compatto. Abbiamo quindi che, considerata $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha:

$$\langle \mathcal{F}(\delta_t), \phi \rangle = \langle \delta_t, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \left\langle \delta_t, \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega x} \phi(x)\, \mathrm{d}x \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi itx} \phi(x)\, \mathrm{d}x = \langle T_{e^{-2\pi itx}}, \phi(x) \rangle$$

Possiamo quindi concludere che

$$\mathcal{F}(\delta_t(x)) = T_{e^{-2\pi itx}}$$

Possiamo inoltre applicare la trasformata di Fourier ad ambo i membri di questa identità e tramite la formula di inversione otteniamo:

$$\mathcal{F}(T_{e^{-2\pi itx}}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\delta_t(x))) = \delta_t(-x) = \delta_{-t}(x)$$

e questo implica:

$$\mathcal{F}(T_{e^{2\pi itx}}) = \delta_t(x)$$

Notiamo che per $t = 0$, in base a queste formule, si ottiene immediatamente $\mathcal{F}(\delta_0(x)) = T_1$ e $\mathcal{F}(T_1) = \delta_0(x)$. Queste formule si possono anche scrivere nella notazione "leggera" di cui avevamo parlato nella nota iniziale, cioè si ha:

$$\mathcal{F}(\delta_t(x)) = e^{-2\pi itx} \text{ e } \mathcal{F}\left(e^{2\pi itx}\right) = \delta_t(x)$$

.

Esercizio 5. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione $\delta_0'(x)$

Soluzione. Innanzitutto la distribuzione $\delta_0'(x)$ è una distribuzione temperata. Per la regola della derivata di una distribuzione e della trasformata di Fourier, abbiamo quindi che

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0'(x)), \phi \rangle = \langle \delta_0'(x), \mathcal{F}(\phi) \rangle = -\langle \delta_0(x), \mathcal{F}(\phi)' \rangle = 2\pi i \langle \delta_0(x), \mathcal{F}(x\phi) \rangle$$

$$= 2\pi i \langle \mathcal{F}(\delta_0(x)), x\phi \rangle = 2\pi i \langle T_1, x\phi \rangle = 2\pi i \langle T_x, \phi \rangle = \langle T_{2\pi i x}, \phi \rangle$$

dove si è utilizzato la regola di derivazione. In conclusione $\mathcal{F}(\delta_0') = T_{2\pi i x}$. Si poteva arrivare subito al risultato usando la regola della trasformata della derivata di una funzione/distribuzione con trasformata nota.

Da fare a casa. Determinare la trasformata di Fourier di δ_a', $a \in \mathbb{R}$. Determinare la trasformata di Fourier di $\delta_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 6. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione indotta da $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Osserviamo che T_f è una distribuzione temperata, essendo f a crescita lenta. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(T_{x^n}), \phi \rangle &= \langle T_{x^n}, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \langle T_1, x^n \mathcal{F}(\phi) \rangle = \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle T_1, \mathcal{F}\left(\phi^{(n)}\right) \right\rangle \\
&= \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle \mathcal{F}(T_1), \phi^{(n)} \right\rangle = \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle \delta_0(x), \phi^{(n)} \right\rangle = \tfrac{1}{(-1)^n} \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle \delta_0^{(n)}(x), \phi \right\rangle \\
&= \left(\tfrac{i}{2\pi}\right)^n \left\langle \delta_0^{(n)}(x), \phi \right\rangle = \left\langle \left(\tfrac{i}{2\pi}\right)^n \delta_0^{(n)}(x), \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

In conclusione $\mathcal{F}(x) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \delta_0^{(n)}$.

Da fare a casa. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione regolare indotta da un generico polinomio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

Esercizio 7. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione indotta da $f(x) = \sin x$.

Soluzione. Osserviamo che f è una funzione limitata, quindi T_f è temperata. Ricordiamo che

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Calcoliamo quindi la trasformata:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(T_{\sin x}), \phi \rangle = \langle T_{\sin x}, \mathcal{F}(\phi) \rangle &= \frac{1}{2i} \left[\langle T_{e^{ix}}, \mathcal{F}(\phi) \rangle - \langle T_{e^{-ix}}, \mathcal{F}(\phi) \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left[\langle \mathcal{F}(T_{e^{ix}}), \phi \rangle - \langle \mathcal{F}(T_{e^{-ix}}), \phi \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left[\left\langle \delta\left(T_{e^{2\pi i x \frac{1}{2\pi}}} \right), \phi \right\rangle - \left\langle \mathcal{F}\left(T_{e^{2\pi i x \left(-\frac{1}{2\pi}\right)}} \right), \phi \right\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left[\left\langle \delta_{\frac{1}{2\pi}}, \phi \right\rangle - \left\langle \delta_{-\frac{1}{2\pi}}, \phi \right\rangle \right] = \left\langle \frac{1}{2i} \left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}} \right), \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\mathcal{F}(\sin x) = \frac{1}{2i} \left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}} \right)$$

Da fare a casa. Si calcolnoi le trasformate di Fourier delle distribuzioni regolari indotte da $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin^2 x$.

Esercizio 8. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione v.p.$\frac{1}{x}$.

Soluzione. Innanzitutto ricordiamo che

$$t\left(\text{v.p}\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Di conseguenza

$$\mathcal{F}\left(t\left(\text{v.p}\frac{1}{x}\right)\right)=\mathcal{F}(1)=\delta_0.$$

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\mathcal{F}\left(\text{v.p}\frac{1}{x}\right)'=\delta_0.$$

$$\left(-\frac{1}{\pi i}\right)\mathcal{F}\left(\text{v.p}\frac{1}{x}\right)(\omega)'=\text{sign}(\omega)' \implies \left[\pi i\text{sign}(\omega)+\mathcal{F}\left(\text{v.p}\frac{1}{x}\right)(\omega)\right]'=0,$$

quindi $\pi i\text{sign}(x)+\mathcal{F}\left(\text{v.p}\frac{1}{x}\right)=C$, per qualche $C\in\mathbb{R}$. Siccome $\text{sign}(x)$ è dispari, e pure v.p.$\frac{1}{x}$ lo è (e quindi lo è la sua trasformata), allora necessariamente $C=0$. In conclusione

$$\mathcal{F}\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(\omega)=-\pi i\text{sign}(\omega).$$

Da fare a casa. Calcolare le trasformate di $f(x)=\text{sign}(x)$ e $g(x)=H(x)$.

Esercizio 9. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione indotta da

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

Soluzione. Per alleggerire la notazione, in questo esercizio identificheremo la distribuzione regolare indotta da f con la funzione stessa, cioè $T_f=f$, tenendo comunque a mente quanto detto nella nota sopra. Osserviamo che $f\notin\mathcal{R}^1$ ma usando la regola del polinomio si ha:

$$\mathcal{F}(f(x))=\mathcal{F}\left(x\frac{1}{x^2+1}\right)=\frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=\frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\pi e^{-2\pi|\omega|}\right]=-i\pi e^{-2\pi|\omega|}\,\text{sign}(\omega)$$

Da fare a casa. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione indotta da $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$

Esercizio 10. Posto $g(x)=x^2e^{ix+6\pi i}$ e $T=T_g+x^3\delta_2(x+3)+\mathcal{F}(x\delta_1')$, calcolare $\mathcal{F}(T)$.

Soluzione. Utilizziamo anche qui la notazione "leggera", in particolare $T_g=g$. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T)&=\mathcal{F}\left(x^2e^{ix+6\pi i}\right)+\mathcal{F}\left(x^3\delta_2(x+3)\right)+\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(x\delta_1'\right)\right)\\&=\mathcal{F}\left(x^2e^{ix}\underbrace{e^{6\pi i}}_{=1}\right)+\mathcal{F}\left(\underbrace{x^3\delta_{-1}(x)}_{=-\delta_{-1}(x)}\right)+\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(x\delta_1'\right)\right)\\&=\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\mathcal{F}\left(e^{ix}\right)(\omega)+\mathcal{F}\left(-\delta_{-1}(x)\right)-\omega\delta_1'(-\omega)\\&=-\frac{1}{4\pi^2}\delta''_{\frac{1}{2\pi}}(\omega)-e^{2\pi i\omega}-\omega\delta_1'(-\omega)\end{aligned}$$

Esercizio 11. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x)=\frac{2xe^{\pi ix}}{(1+x^2)^2}$$

Soluzione. L'idea è di ricondurci a trasformate note. Possiamo scrivere:

$$\mathcal{F}\left(\frac{2xe^{\pi ix}}{(1+x^2)^2}\right)(\omega)=\mathcal{F}\left(\frac{2xe^{2\pi i\frac{x}{2}}}{(1+x^2)^2}\right)(\omega)\xrightarrow{\text{modulazione}}\mathcal{F}\left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)\left(\omega-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(1+x^2)}\right)\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\xrightarrow{\text{derivazione}}-2\pi i\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\left[\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)}\right)\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=-2\pi i\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\pi e^{-2\pi|\omega-\frac{1}{2}|}=-2\pi^2 i\left(\omega-\frac{1}{2}\right)e^{-2\pi|\omega-\frac{1}{2}|}$$

Esercizio 12. (esercizio d'esame) Posto $g(x) = H(x+2)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$, verificare che la distribuzione

$$T = T_g + x\delta_5(x-3)$$

è temperata e calcolare la sua trasformata di Fourier.

Soluzione. La distribuzione T è definita come somma di due distribuzioni; sapendo che la somma di distribuzioni temperate è una distribuzione temperata, dobbiamo mostrare che le due distribuzioni sono temperate. Cominciamo notando che T_g è la distribuzione regolare indotta dalla funzione g che è limitata, infatti si vede subito che $g(x) = H(x+2)e^{-x} \leq e^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (alternativamente, si può notare che g è sommabile.). Quindi, T_g è una distribuzione temperata.

Per quanto riguarda l'altra distribuzione, si ha:

$$\langle x\delta_5(x-3), \phi(x)\rangle = \langle \delta_8(x), x\phi(x)\rangle = 8\phi(8) = 8\delta_8(x)$$

Sapendo che la delta di Dirac è una distribuzione temperata (poiché a supporto compatto), concludiamo che $x\delta_5(x-3)$ è temperata. Essendo T la somma di due distribuzioni temperate essa è temperata.

Calcoliamo a questo punto la trasformata di Fourier (utilizziamo la notazione leggera):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(T)(\omega) &= \mathcal{F}\left(H(x+2)e^{-x}\right)(\omega) + \mathcal{F}\left(x\delta_5(x-3)\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(H(x+2)e^{-(x+2)}e^2\right)(\omega) + 8\mathcal{F}\left(\delta_8(x)\right)(\omega) \\
&= e^2\mathcal{F}\left(H(x+2)e^{-(x+2)}\right)(\omega) + 8e^{-16\pi i\omega} = e^2e^{4\pi i\omega}\mathcal{F}\left(H(x)e^{-x}\right)(\omega) + 8e^{-16\pi i\omega} \\
&= e^{2+4\pi i\omega}\frac{1}{1+2\pi i\omega} + 8e^{-16\pi i\omega}
\end{aligned}$$

Esercizio 13. (quiz d'esame) Sia $g(x) = p_2(x-1)$ e $f = \mathcal{F}(g)(\omega)$, calcolare $\mathcal{F}(f)$

Soluzione. Si tratta di una immediata applicazione della formula di inversione, si ha:

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(g)) = g(-x) = p_2(-(x+1)) = p_2(x+1)$$

Dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che la funzione porta è pari.

Esercizio 14. (quiz d'esame) Calcolare $\mathcal{F}\left(x^4\delta_2(x) + \delta_0''(x)\right)$

Soluzione. Prima di tutto, si può notare che

$$\left\langle x^4\delta_2(x), \phi(x)\right\rangle = \left\langle \delta_2(x), x^4\phi(x)\right\rangle = 16\phi(2) = 16\delta_2(x)$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(x^4\delta_2(x) + \delta_0''(x)\right) &= \mathcal{F}\left(16\delta_2(x)\right) + \mathcal{F}\left(\delta_0''(x)\right) = 16e^{4\pi i\omega} + (2\pi i)^2\omega^2\mathcal{F}\left(\delta_0(x)\right) \\
&= 16e^{-4\pi i\omega} - 4\pi^2\omega^2
\end{aligned}$$

Esercizio 15. (quiz d'esame) Calcolare $\mathcal{F}\left(4e^{-4\pi ix} - \pi^2x^2\right)$

Soluzione. Si può ricorrere a trasformate note oppure utilizzare la formula di inversione ricordandosi la trasformata calcolata nell'esercizio precedente. Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(16e^{-4\pi i\omega} - 4\pi^2x^2\right) = 4\mathcal{F}\left(4e^{-4\pi i\omega} - \pi^2x^2\right) &= \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(x^4\delta_2(x) + \delta_0''(x)\right)\right) \\
&= (-x)^4\delta_2(-x) + \delta_0''(-x) = 16\delta_2(-x) + \delta_0''(x) \\
&= 16\delta_{-2}(x) + \delta_0''(x)
\end{aligned}$$

Dove si è usato il fatto che $\delta_0''(x)$ è una funzione pari.

Esercizio 16. (quiz d'esame) Sia $T_n = \mathcal{F}\left(e^{inx}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Calcolare il limite distribuzionale di T_n per $n \to \infty$.

Soluzione. Si ha:

$$\mathcal{F}(T_n) = \mathcal{F}\left(e^{inx}\right) = \mathcal{F}\left(e^{2\pi ix\left(\frac{n}{2\pi}\right)}\right) = \delta_{\frac{n}{2\pi}}(x)$$

Possiamo poi osservare che:

$$\delta_{\frac{n}{2\pi}}(x) = \left\langle \delta_{\frac{n}{2\pi}}(x), \phi(x) \right\rangle = \phi\left(\frac{n}{2\pi}\right) \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to \infty, \ \forall\, \phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Il limite vale zero per il supporto compatto di $\phi(x)$. Concludiamo che $T_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Nota. Dire che $\mathcal{F}\left(e^{inx}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ non è in contraddizione con quanto detto nei richiami di teoria. Infatti visto che la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata è ancora una distribuzione temperata, allora è anche una distribuzione sulle usuali funzioni test $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (infatti ricordiamo che $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$).