



Trasformata di Fourier

Esercizi

Metodi Matematici per l'Ingegneria

May 19, 2024



**Politecnico
di Torino**



Table of Contents

1 Trasformata di Fourier di funzioni

► Trasformata di Fourier di funzioni

► Trasformata di Fourier di distribuzioni



Note

1 Trasformata di Fourier di funzioni

se $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty$
allora $\mathcal{F}[g(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt = \hat{g}(\nu) \quad \text{con } \nu \in \mathbb{R}$

- $\mathcal{F}[g(a \cdot t - t_0)](\nu) = \frac{1}{|a|} \cdot e^{-2\pi i \frac{t_0}{a} \nu} \mathcal{F}[g(t)]\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}/\{0\}, t_0 \in \mathbb{R}$



Proprietà

1 Trasformata di Fourier di funzioni

- $\mathcal{F}[\lambda \cdot g(t) + \mu \cdot h(t)](\nu) = \lambda \cdot \mathcal{F}[g(t)](\nu) + \mu \cdot \mathcal{F}[h(t)](\nu)$
con : $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sommabile
- $\mathcal{F}[e^{2\pi i \nu_0 t} \cdot g(t)](\nu) = \mathcal{F}[g(t)](\nu - \nu_0)$ $\nu_0 \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[g(t - t_0)](\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu} \cdot \mathcal{F}[g(t)](\nu)$ $t_0 \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[g(at)](\nu) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[g(t)]\left(\frac{\nu}{a}\right)$ $a \in \mathbb{R}/\{0\}$
- $\mathcal{F}[g(-t)](\nu) = \mathcal{F}[g(t)](-\nu)$
- $\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n} g(t)\right](\nu) = \mathcal{F}[g^{(n)}(t)](\nu) = (2\pi i \nu)^n \mathcal{F}[g(t)](\nu)$ $n \in \mathbb{N}$
 $g^{(n)}(t)$ sommabile
- $\mathcal{F}[t^n \cdot g(t)](\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^n \mathcal{F}^n[g(t)](\nu)$ $t^n \cdot g(t)$ sommabile



Esercizio 1

1 Trasformata di Fourier di funzioni

Calcolare la trasformata di Fourier di:

$$g(t) = e^{-2 \cdot t^2 + 4t}$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

1. Non è trasformabile perché
 $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|$ non è convergente

2. $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\nu + \frac{2i}{\pi}\right)^2}$

3. $e^{-\frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\nu + \frac{2i}{\pi}\right)^2}$

4. $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\nu + \frac{2i}{\pi}\right)}$



Esercizio 2

1 Trasformata di Fourier di funzioni

Calcolare la trasformata di Fourier di:

$$g(t) = |t| \cdot e^{-|t|}$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

1. $\frac{1}{(1+2\pi i\nu)^2} + \frac{1}{(1-2\pi i\nu)^2}$

2. $\frac{i}{\nu} \cdot \frac{1}{(1+2\pi i\nu)} + \frac{i}{\nu} \cdot \frac{1}{(1-2\pi i\nu)}$

3. $\frac{i}{\nu} \cdot \frac{1}{(1+2\pi i\nu)^2} + \frac{i}{\nu} \cdot \frac{1}{(1-2\pi i\nu)^2}$

4. Non è trasformabile perché $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|$ non è convergente



Esercizio 3

1 Trasformata di Fourier di funzioni

Calcolare la trasformata di Fourier di:

$$g(t) = \frac{t}{(9 + 4t^2)^2}$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

1. $-\frac{\pi^2 i}{24} \cdot \nu \cdot e^{-3\pi|\nu|}$

2. $\frac{\pi^2 i}{3} \cdot \nu \cdot e^{-3\pi|\nu|}$

3. $-\frac{\pi^2 i}{12} \cdot \nu \cdot e^{-3\pi|\nu|}$

4. $-\frac{\pi^2 i}{48} \cdot \nu \cdot e^{-3\pi|\frac{\nu}{2}|}$



Table of Contents

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

► Trasformata di Fourier di funzioni

► Trasformata di Fourier di distribuzioni



Note

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

$$\mathcal{S} := \{ \varphi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^p \cdot \varphi^q(t) = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \}$$

Distribuzioni Temperate formano lo spazio \mathcal{S}'

- se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è sommabile, allora T_f è una distribuzione temperata
- se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è localmente sommabile e a crescita lenta (cioè $|f(t)| \leq A \cdot (1 + |x|^p)$), allora T_f è una distribuzione temperata. Esempi di funzioni f che soddisfano questa condizione sono le funzioni polinomiali e le funzioni limitate.
- se $T \in \mathcal{D}'$ ha un supporto compatto, allora T è una distribuzione temperata

$$\mathcal{F}[T_f] = \mathcal{F}[f]$$



Esercizio 1

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Calcolare la trasformata di Fourier di:

$$g(t) = \cos(2t + 1)$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

1. $\frac{1}{2} \cdot \left(e^i \cdot \delta_{\frac{1}{\pi}} + e^{-i} \cdot \delta_{-\frac{1}{\pi}} \right)$

2. $-\frac{1}{2} \cdot \left(e^i \cdot \delta_{\frac{1}{\pi}} + e^{-i} \cdot \delta_{-\frac{1}{\pi}} \right)$

3. $\left(e^i \cdot \delta_{\frac{1}{2\pi}} + e^{-i} \cdot \delta_{-\frac{1}{2\pi}} \right)$

4. $-\left(e^i \cdot \delta_{\frac{1}{2\pi}} + e^{-i} \cdot \delta_{-\frac{1}{2\pi}} \right)$



Esercizio 2

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Calcolare la trasformata di Fourier di:

$$g(t) = \frac{k + t^2}{1 + t^2}$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

1. Non si può calcolare perché k non è dato
2. $(k - 1) \cdot \pi e^{-2\pi|\nu|} + \delta_0$
3. $(k - 1) \cdot \pi e^{-2\pi|\nu|}$
4. $(k - 1) \cdot \pi e^{-2\pi|\nu|} + \delta_1$



Esercizio 3

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Calcolare la trasformata di Fourier della seguente distribuzione:

$$T = t^4 \cdot \delta_2 + \delta_0''$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

1. $e^{-4\pi i\nu} - 4\pi^2$

2. $16 \cdot e^{-4\pi i\nu} + 4\pi^2$

3. $16 \cdot e^{-4\pi i\nu} + 4\pi^2\nu^2$

4. $16 \cdot e^{-4\pi i\nu} - 4\pi^2\nu^2$



Esercizio 4

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Calcolare la trasformata di Fourier di:

$$g(t) = t \cdot H(t)$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

1. $\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{d}{d\nu} \mathcal{V}.p. \frac{1}{\nu} + \frac{i}{4\pi} \cdot \delta_0$

2. $\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{d}{d\nu} \mathcal{V}.p. \frac{1}{\nu} + \frac{i}{4\pi} \cdot \delta'_0$

3. $\frac{1}{4\pi^2} \cdot \mathcal{V}.p. \frac{1}{\nu} + \frac{i}{4\pi} \cdot \delta_0$

4. $\frac{1}{4\pi^2} \cdot \mathcal{V}.p. \frac{1}{\nu}$



Trasformata di Fourier

Grazie per l'attenzione!

Domande?