

Fondamenti di Controlli Automatici

Anno Accademico 2024/2025

Alessio Veni (redattore)

Prof. Mirco Rampazzo (docente del corso)

4 giugno 2025

Indice

| | |
|---|-----------|
| 0 Introduzione ai Controlli Automatici | 10 |
| 0.1 Definizioni Fondamentali | 10 |
| 0.2 Esempi Applicativi | 11 |
| 0.3 Aspetti Fondamentali dei Controlli Automatici | 11 |
| 1 Segnali e Sistemi | 12 |
| 1.1 Concetto di Segnale | 12 |
| 1.1.1 Esempi di Segnali | 12 |
| 1.1.2 Tipologie di Segnali | 12 |
| 1.1.3 Metodi di Descrizione (segnali matematici) | 13 |
| 1.2 Concetto di Sistema | 13 |
| 1.2.1 Caratteristiche di un Sistema | 13 |
| 1.2.2 Sistemi Dinamici | 14 |
| 2 Esempi di modelli a tempo continuo e discreto | 15 |
| 2.1 Serbatoio (tempo continuo) | 15 |
| 2.1.1 Introduzione | 15 |
| 2.1.2 Dati e Assunzioni | 15 |
| 2.1.3 Bilancio di Massa | 16 |
| 2.1.4 Caso particolare | 17 |
| 2.1.5 Metodo di Integrazione Numerica di Eulero | 17 |
| 2.1.6 Dati e Assunzioni | 18 |
| 2.1.7 Definizione dell'errore | 19 |
| 2.1.8 Strategia di controllo | 19 |
| 2.1.9 Legge di controllo | 20 |
| 2.1.10 Dinamica del sistema | 20 |
| 2.1.11 Soluzione analitica | 20 |
| 2.1.12 Osservazioni sul comportamento | 21 |
| 2.2 Fenomeno Emigrazione (tempo discreto) | 22 |
| 2.2.1 Definizione del Modello | 22 |
| 2.2.2 Equazioni di Bilancio della Popolazione | 22 |
| 2.2.3 Calcolo della Popolazione Residua in Italia | 22 |
| 2.2.4 Calcolo della Popolazione Emigrata | 23 |
| 2.2.5 Sistema Finale | 23 |
| 2.3 Modello termico di un sistema di raffreddamento di un chip elettronico (tempo continuo) | 25 |
| 2.3.1 Definizione delle Variabili | 25 |
| 2.3.2 Equazione Differenziale del Bilancio di Potenza | 25 |
| 2.3.3 Metodo di Integrazione Numerica di Eulero | 28 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.3.4 | Conclusioni | 28 |
| 2.4 | Modello di utilizzo di una CPU (tempo discreto) | 30 |
| 2.4.1 | Introduzione | 30 |
| 2.4.2 | Prima Dinamica: Aggiornamento dell'Utilizzo della CPU | 30 |
| 2.4.3 | Seconda Dinamica: Processi Elaborabili | 30 |
| 2.4.4 | Terza Dinamica: Aggiornamento della Coda di Attesa | 31 |
| 2.4.5 | Condizione di Stato Stazionario | 32 |
| 2.4.6 | Determinazione dell'Input in Stato Stazionario | 32 |
| 2.4.7 | Conclusioni | 32 |
| 3 | Modelli di Flusso Continuo | 34 |
| 3.1 | Modelli di Trasferimento di Risorse a Tempo Continuo | 34 |
| 3.1.1 | Bilancio di Flusso | 35 |
| 3.1.2 | Flussi Entranti in un Singolo Compartimento | 35 |
| 3.1.3 | Flussi Uscenti da un Singolo Compartimento | 35 |
| 3.1.4 | Bilancio per un Singolo Compartimento | 35 |
| 3.1.5 | Modello a n Compartimenti | 35 |
| 3.1.6 | Matrice dei Coefficienti A | 36 |
| 3.1.7 | Matrice dei Coefficienti di Ingresso B | 36 |
| 3.1.8 | Equazione del Sistema Dinamico Lineare | 36 |
| 3.2 | Esempi: Modelli di Flusso nei Serbatoi | 37 |
| 3.2.1 | Legenda Grafico | 37 |
| 3.2.2 | Esempio 1: Serbatoio con Solo Rubinetto di Uscita | 37 |
| 3.2.3 | Esempio 2: Serbatoio con Controllo sul Flusso d'Uscita | 38 |
| 3.2.4 | Esempio 3: Serbatoio con Controllo dell'Altezza del Liquido | 38 |
| 3.2.5 | Esempio 4: Serbatoio in Serie | 40 |
| 3.2.6 | Forma Matriciale del Sistema | 42 |
| 3.2.7 | Autovalori e Autovettori | 42 |
| 3.2.8 | Esempio 5: Serbatoi Interconnessi | 43 |
| 3.2.9 | Conservazione del Volume | 44 |
| 3.2.10 | Interpretazione dei Termini | 44 |
| 3.3 | Esempi: Modelli di Flusso nel Parco Macchine e nel Traffico Automobilistico | 45 |
| 3.3.1 | Esempio: Parco Macchine | 45 |
| 3.3.2 | Esempio: Traffico Automobilistico | 46 |
| 3.3.3 | Modellazione del Sistema | 47 |
| 3.3.4 | Caso A: Sistema Iniziale (Strade Aperte) | 48 |
| 3.3.5 | Caso B: Post Chiusura della Strada da Città 1 a Città 2 | 48 |
| 3.3.6 | Passaggi per il Calcolo | 49 |
| 3.3.7 | Riepilogo e Commenti Finali | 50 |
| 3.3.8 | Punti di Equilibrio di un Sistema Dinamico | 51 |
| 3.3.9 | Definizione del Punto di Equilibrio | 51 |
| 3.3.10 | Osservazioni | 51 |
| 3.3.11 | Esempio: Emigrazione Italiana | 52 |
| 3.3.12 | Rappresentazione Matriciale | 52 |
| 3.3.13 | Spiegazione del Modello | 52 |
| 3.3.14 | Considerazioni Finali | 53 |

| | |
|---|-----------|
| 4 Modelli di Flusso Discreto (Modelli di Decisione "istanti privilegiati") | 54 |
| 4.0.1 Differenza dai modelli di flusso continuo | 54 |
| 4.1 Modelli di Trasferimento di Risorse a Tempo Discreto | 54 |
| 4.1.1 Equazioni del modello a tempo discreto | 54 |
| 4.1.2 Forma matriciale del modello | 55 |
| 4.1.3 Evoluzione dinamica del sistema | 56 |
| 4.1.4 Descrizione dei compartimenti | 56 |
| 4.1.5 Parametri | 56 |
| 4.1.6 Dinamica per classi | 57 |
| 4.1.7 Forma matriciale | 57 |
| 4.1.8 Tasso netto di riproduzione | 57 |
| 4.1.9 Equilibrio della struttura d'età | 58 |
| 4.1.10 Interpretazione dell'autovalore λ | 58 |
| 4.1.11 Osservazione finale: anomalia nella struttura | 58 |
| 4.1.12 Esempio: Popolazione di conigli (modello di Fibonacci) | 59 |
| 4.1.13 Esempio: Salmoni – struttura di equilibrio instabile | 60 |
| 4.1.14 Esempio: Catena di produzione industriale | 62 |
| 5 Modelli di transizione tra stati | 63 |
| 5.0.1 Differenza dai modelli precedenti | 63 |
| 5.0.2 Tempo discreto | 63 |
| 5.0.3 Definizioni | 63 |
| 5.0.4 Modello formale | 64 |
| 5.1 Grafo di transizione e modello di Markov | 64 |
| 5.1.1 Catena di Markov | 64 |
| 5.2 Esempi applicativi | 67 |
| 5.2.1 Esempio: previsioni meteo | 67 |
| 5.2.2 Esempio: ranking di Google | 69 |
| 5.2.3 Esempio: condivisione di risorse | 71 |
| 6 Modelli di Influenza per Sistemi Dinamici Causa-Effetto | 72 |
| 6.0.1 Modello Keynesiano | 72 |
| 6.0.2 Come rappresentare i modelli di influenza | 72 |
| 6.0.3 Esempio: Dinamica delle Opinioni (Tempo Discreto) | 73 |
| 6.0.4 Modello di De Groot | 74 |
| 6.0.5 Esempio: Affari di Cuori (Tempo Continuo) | 75 |
| 6.0.6 Esempio: La Corsa agli Armamenti (Tempo Continuo) | 77 |
| 6.0.7 Esempio: Dinamica dei Prezzi (Tempo Discreto) | 79 |
| 7 Modelli Fisici - Circuiti Elettrici | 85 |
| 7.1 Leggi di Kirchhoff | 85 |
| 7.1.1 Legge di Kirchhoff per le correnti (KCL) | 85 |
| 7.1.2 Legge di Kirchhoff per le tensioni (KVL) | 85 |
| 7.1.3 Convenzione degli utilizzatori e dei generatori | 86 |
| 7.1.4 Componenti principali | 86 |
| 7.2 Circuiti Elettrici - Esempi | 88 |
| 7.2.1 Esempio 1 - Rappresentazione di un circuito in forma di stato | 88 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7.2.2 | Esempio 2 - Rappresentazione in forma di stato di un circuito in parallelo | 89 |
| 7.2.3 | Esempio 3 - Circuito con due condensatori e un induttore | 90 |
| 7.2.4 | Esempio 4 - Modello di stato con legame istantaneo tra variabili | 92 |
| 7.3 | Sistemi Meccanici - Traslazionali e Rotativi | 94 |
| 7.3.1 | Sistemi Meccanici Traslazionali | 94 |
| 7.4 | Esempi - Sistemi Meccanici Traslazionali | 95 |
| 7.4.1 | Esempio 1: Un carrello | 95 |
| 7.4.2 | Esempio 2: Due carrelli accoppiati | 96 |
| 7.4.3 | Esempio 3: Modello di sospensione meccanica per veicolo | 98 |
| 7.4.4 | Sistemi Meccanici Rotativi | 100 |
| 7.5 | Esempi - Sistemi Meccanici Rotativi | 101 |
| 7.5.1 | Esempio 1: sistema rotante con molla torsionale | 101 |
| 7.5.2 | Esempio 2: Puntamento di un radar meteorologico | 102 |
| 7.5.3 | Esempio 3: Motore elettrico | 103 |
| 7.5.4 | Esempio 4: Diffusore Acustico (altoparlante) | 105 |
| 8 | Sistemi Dinamici Non Lineari | 107 |
| 8.1 | Sistemi Dinamici non lineari a tempo continuo | 108 |
| 8.1.1 | Esempio 1: Il Pendolo Semplice | 108 |
| 8.1.2 | Esempio 2: Sistema Non Lineare - Serbatoio | 111 |
| 8.1.3 | Esempio 3: Modello Logistico di Crescita della Popolazione | 112 |
| 8.1.4 | Esempio 4: Sistema Non Lineare - Ventola di Raffreddamento per CPU | 114 |
| 8.2 | Sistemi non lineari a tempo continuo: struttura generale | 115 |
| 8.3 | Sistemi non lineari a tempo discreto: struttura generale | 116 |
| 8.4 | Analisi dei punti di equilibrio: soluzioni costanti nel tempo | 117 |
| 8.5 | Linearizzazione (intorno ai punti di equilibrio) | 118 |
| 8.5.1 | Linearizzazione – Sistemi a tempo continuo | 120 |
| 8.5.2 | Linearizzazione – Sistemi a tempo discreto | 120 |
| 8.6 | Applicazione della linearizzazione a tre esempi | 121 |
| 8.6.1 | Linearizzazione: Pendolo Semplice (tempo continuo) | 121 |
| 8.6.2 | Linearizzazione: Serbatoio (tempo continuo) | 122 |
| 8.6.3 | Linearizzazione: Modello di Popolazione (tempo continuo) | 123 |
| 9 | Analisi dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti a Tempo Continuo | 125 |
| 9.1 | Introduzione ai Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) | 125 |
| 9.2 | Sistemi LTI – Evoluzione Libera e Risposta Forzata | 127 |
| 9.2.1 | Evoluzione libera | 127 |
| 9.2.2 | Risposta forzata | 127 |
| 9.2.3 | Soluzione completa | 127 |
| 9.2.4 | Esempio: Circuito Elettrico RC | 128 |
| 9.2.5 | Esempio: Serbatoio | 129 |
| 9.3 | Sistemi LTI – Calcolo dell’Evoluzione Libera: Modi Naturali Reali | 131 |
| 9.3.1 | Modi Naturali Reali – Caso Particolare | 131 |
| 9.3.2 | Modi Naturali Reali – Caso Generale | 132 |
| 9.3.3 | Esempio: Traffico Automobilistico | 135 |
| 9.4 | Sistemi LTI – Calcolo dell’Evoluzione Libera: Modi Naturali Complessi | 137 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 9.5 | Traiettorie nello Spazio di Stato dell'Evoluzione Libera | 138 |
| 9.5.1 | Modo Oscillatorio Divergente | 139 |
| 9.5.2 | Modo Oscillatorio Convergente | 139 |
| 9.5.3 | Modo Oscillatorio Periodico | 140 |
| 9.5.4 | Esempio: Evoluzione Libera con Modi Naturali Complessi | 140 |
| 9.6 | Sistemi LTI – Evoluzione Libera | 142 |
| 9.7 | L'Esponente di una Matrice | 144 |
| 9.7.1 | Esempio | 144 |
| 9.8 | Sistemi LTI – Calcolo della Risposta Forzata | 144 |
| 9.8.1 | Esempio: Ingresso Costante $u(t) = \bar{u}$ | 145 |
| 9.8.2 | Esempio Numerico | 145 |
| 9.8.3 | Esempio: Serbatoio con Ingresso e Perdita | 146 |
| 9.9 | Sistemi LTI – Risposta Forzata e Convoluzione | 147 |
| 9.9.1 | Risposta Forzata come Convoluzione | 147 |
| 9.9.2 | Risposta Impulsiva | 148 |
| 9.9.3 | Nota: Segnali Canonici e il Loro Legame | 148 |
| 9.9.4 | Risposta Forzata: Perché la Convoluzione? | 150 |
| 9.9.5 | Esempio Intuitivo | 150 |
| 9.9.6 | Calcolo della Risposta Forzata per Ingresso Generico | 151 |
| 9.10 | Trasformata di Laplace e Calcolo dell'Integrale di Convoluzione | 151 |
| 9.10.1 | Trasformazioni Funzionali | 152 |
| 9.10.2 | Funzioni di Variabili Complesse | 153 |
| 9.10.3 | Trasformata di Laplace | 154 |
| 9.10.4 | Proprietà della Trasformata di Laplace | 154 |
| 9.10.5 | Lista Trasformate di Laplace | 156 |
| 9.10.6 | Esempi di Trasformata di Laplace | 156 |
| 9.11 | Anti-Trasformazione di Laplace di $Y(s)$: (Poli semplici, rapporti di polinomi in s) | 157 |
| 9.11.1 | Esempio: Poli semplici reali | 158 |
| 9.11.2 | Esempio: Poli semplici complessi coniugati | 158 |
| 9.12 | Calcolo dell'Evoluzione Libera con la Trasformata di Laplace | 161 |
| 9.12.1 | Evoluzione Libera e Trasformata di Laplace | 161 |
| 9.12.2 | Antitrasformazione: Calcolo dell'evoluzione nel tempo | 161 |
| 9.13 | Risposta Forzata: Convoluzione e Trasformata di Laplace | 163 |
| 9.14 | Risposta Complessiva e Trasformata di Laplace | 164 |
| 9.15 | Esempi: Risposta Forzata e Complessiva con Trasformata di Laplace | 164 |
| 9.15.1 | Esempio: Serbatoio – Risposta Forzata | 164 |
| 9.15.2 | Esempio: Circuito RC – Risposta Complessiva | 166 |
| 9.15.3 | Modelli per R , L e C nel Dominio- s | 169 |
| 9.15.4 | Esempio: Filtro Passa-Basso – Risposta Forzata | 170 |
| 9.16 | Analogie tra Sistemi Fisici | 171 |
| 9.17 | Sistemi LTI – Risposta in Frequenza | 172 |
| 9.17.1 | Nota Trigonometrica e Risposta in Frequenza | 174 |
| 9.17.2 | Risposta in Frequenza: Diagrammi di Bode | 175 |
| 9.17.3 | Esercizio su Simulink – Identificazione Filtro Passa-Basso | 177 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 10.1 | Tempo continuo vs Tempo discreto | 179 |
| 10.1.1 | Sistemi LTI - Evoluzione Libera e Risposta Forzata | 180 |
| 10.1.2 | Confronto tra Tempo Continuo e Tempo Discreto a Tempo Invariante | 181 |
| 10.1.3 | Tempo continuo: $\alpha_k = \operatorname{Re}\{\lambda_k\}$ | 182 |
| 10.1.4 | Tempo discreto: $\sigma_h = \lambda_h $ | 182 |
| 10.2 | Trasformata Z | 182 |
| 10.2.1 | Struttura dello spazio funzionale | 183 |
| 10.2.2 | Trasformata Z Unilatera | 184 |
| 10.2.3 | Trasformata Z: alcune proprietà | 185 |
| 10.2.4 | Esempi di trasformata Z $\mathbf{x}(k)$, $k \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbf{X}(z)$ | 185 |
| 10.2.5 | Esempio 1: Trasformata Z di una successione finita | 186 |
| 10.3 | Antitrasformata Z | 186 |
| 10.3.1 | Esempio di Antitrasformata Z | 187 |
| 10.4 | Analisi dei Sistemi Lineari Tempo Invariante a Tempo Discreto | 188 |
| 10.4.1 | Calcolo dell'Evoluzione Libera nel Dominio del Tempo (senza trasformata Z) | 188 |
| 10.5 | Evoluzione Libera e Risposta Forzata tramite Trasformata Z | 189 |
| 10.5.1 | Evoluzione Libera ($u(k) = 0$) | 190 |
| 10.5.2 | Risposta Forzata ($x(0) = 0$) | 190 |
| 10.5.3 | Esempio 1: Dinamica dei Prezzi (Domanda e Offerta) | 190 |
| 10.5.4 | Esempio 2: Risposta Forzata con Condizioni Iniziali Nulle | 191 |
| 11 | Stabilità | 192 |
| 11.1 | Stabilità: Stati e Coppie di Equilibrio | 192 |
| 11.1.1 | Esempio: Rubinetto e Serbatoio | 192 |
| 11.2 | Stati di Equilibrio | 193 |
| 11.2.1 | Calcolo degli Stati (Tempo Continuo) | 193 |
| 11.3 | Calcolo delle Coppie di Equilibrio (Tempo Continuo) | 194 |
| 11.4 | Calcolo degli Stati di Equilibrio (Tempo Discreto) | 194 |
| 11.5 | Stabilità | 195 |
| 11.6 | Stabilità: Sistemi LTI | 196 |
| 11.7 | Criteri di Stabilità per Sistemi a Tempo Continuo | 197 |
| 11.8 | Stabilità per Sistemi a Tempo Continuo: Il Criterio di Routh | 198 |
| 11.8.1 | Il Criterio di Routh | 199 |
| 11.9 | Esempi di Applicazione del Criterio di Routh | 200 |
| 11.9.1 | ESEMPIO 1 | 200 |
| 11.9.2 | ESEMPIO 2 | 201 |
| 11.10 | Note su Molteplicità e Modi Dominanti | 202 |
| 11.10.1 | Nota 1: Autovalori con Molteplicità > 1 e Modi Naturali | 202 |
| 11.10.2 | Esempio: Il Moto Rettilineo Uniforme (Velocità Costante) | 203 |
| 11.10.3 | Nota 2: Autovalori Dominanti (Modi Dominanti) | 204 |
| 11.11 | Osservazioni Ulteriori sui Criteri di Stabilità | 206 |
| 11.11.1 | Corollario della Regola di Cartesio (Radici Negative) | 206 |
| 11.11.2 | Criterio di Routh | 206 |
| 11.11.3 | Corollario del Criterio di Routh-Hurwitz | 207 |
| 11.11.4 | Stabilità per Sistemi a Tempo Continuo: Il Criterio di Routh (Casi Particolari) | 207 |
| 11.11.5 | Tecniche di Completamento della Tabella di Routh | 208 |

| | |
|---|------------|
| 11.11.6 Esercizio: Stabilità di un Sistema Dinamico | 209 |
| 11.11.7 Criteri di Stabilità per Sistemi a Tempo Discreto | 210 |
| 11.11.8 Esempio: Verifica della Stabilità tramite Trasformazione Bilineare | 212 |
| 11.12 Stabilità Interna, Trasformata di Laplace e Trasformata Z | 213 |
| 11.12.1 Sistemi LTI a Tempo Continuo | 213 |
| 11.12.2 Sistemi LTI a Tempo Discreto | 213 |
| 11.12.3 Stabilità Esterna: BIBS e BIBO | 214 |
| 11.12.4 Stabilità Esterna BIBS e BIBO per Sistemi LTI | 214 |
| 11.12.5 Stabilità Esterna BIBS per Sistemi LTI – Trasformata di Laplace e Matrice di Trasferimento | 215 |
| 11.12.6 Stabilità Esterna BIBO per Sistemi LTI – Trasformata di Laplace e Funzione di Trasferimento (FDT) | 216 |
| 11.12.7 Stabilità Esterna BIBS per Sistemi LTI – Trasformata Z e Matrice di Trasferimento | 216 |
| 11.12.8 Stabilità Esterna BIBO per Sistemi LTI – Trasformata Z e Funzione di Trasferimento (FDT) | 217 |
| 11.13 Osservazioni per i Sistemi LTI a Tempo Continuo SISO (Single Input – Single Output) . . | 217 |
| 11.13.1 Osservazioni Analoghe per i Sistemi LTI SISO a Tempo Discreto | 219 |
| 11.13.2 Esempio: Equazione alle Differenze (SISO) | 219 |
| 11.13.3 Esempio: Due Serbatoi in Serie (Tempo Continuo) | 220 |
| 11.13.4 Esempio: Due Serbatoi in Serie (senza scarico esterno, $\alpha_{20} = 0$) | 223 |
| 11.13.5 Esempio: Ammortamento di un Debito (Tempo Discreto) | 225 |
| 12 Proprietà Strutturali dei Sistemi Dinamici | 227 |
| 12.1 Stabilità | 228 |
| 12.2 Esempio: Raggiungibilità | 228 |
| 12.3 Ricordiamo la Matrice di Trasferimento Ingresso-Uscita | 230 |
| 12.4 Raggiungibilità | 230 |
| 12.5 Controllabilità | 232 |
| 12.5.1 Raggiungibilità e Controllabilità | 232 |
| 12.6 Osservabilità | 232 |
| 12.6.1 Esempio: 2 serbatoi collegati in serie; si misura solo lo stato del primo serbatoio . | 233 |
| 12.6.2 Ora il caso contrario: si misura solo lo stato del secondo serbatoio | 234 |
| 13 Controllo | 235 |
| 13.1 Controllo a Tempo Continuo | 235 |
| 13.1.1 Matrice (Funzione) di Trasferimento | 235 |
| 13.1.2 Caso MIMO (Multi Input - Multi Output) | 235 |
| 13.1.3 Caso SISO (Single Input - Single Output) | 235 |
| 13.1.4 Connessione in Serie e Parallello di Sistemi | 236 |
| 13.2 Il Problema del Controllo | 236 |
| 13.2.1 Soluzione 1: Controllo in Catena Aperta (ad Azione Diretta, Open-loop, Feed-forward) | 237 |
| 13.2.2 Soluzione 2: Controllo in Retroazione (Feedback Negativo) dall'Uscita | 238 |
| 13.2.3 Cancellazione fra Zeri e Poli | 239 |
| 13.2.4 Esempio | 240 |
| 14 Sistemi Elementari del Primo e Secondo Ordine | 241 |

| | |
|---|------------|
| 14.1 Sistemi elementari del primo ordine ($n = 1$) | 241 |
| 14.1.1 Esempio: | 242 |
| 14.1.2 Esempio: | 243 |
| 14.1.3 Esempio: | 243 |
| 14.2 Sistemi elementari del secondo ordine ($n = 2$) | 245 |
| 14.2.1 Overshoot (massima sovraelongazione) | 246 |
| 14.2.2 Osservazioni sulla risposta al variare di ω_n e ϵ | 249 |
| 14.2.3 Vincoli sulla posizione dei poli della FdT nel piano complesso | 251 |
| 14.3 Sistemi di ordine superiore al secondo ($n > 2$) | 252 |
| 14.3.1 Esempio: coppia di poli complessi coniugati dominante | 253 |
| 14.3.2 Esempio: polo reale dominante | 253 |
| 15 Fedeltà della Risposta, Specifiche e Prestazioni | 255 |
| 15.1 Fedeltà della Risposta: Errore a Regime (∞) - Tipo di un Sistema | 257 |
| 15.1.1 IMPORTANTE: Tipo di un Sistema ed Errore a Regime | 258 |
| 15.2 Fedeltà della Risposta: Errore Transitorio per Riferimenti Costanti | 259 |
| 15.3 Fedeltà della Risposta: Specifiche nel Tempo → Posizione dei Poli di $W(s)$, Radici di $1 + L(s) = 0$ | 262 |
| 16 Controllori Standard | 264 |
| 16.1 Controllori Standard: P, PI, PID | 265 |
| 16.2 Progetto di Controllori Proporzionali ($k_p > 0$) | 266 |
| 16.2.1 Esempio: controllo proporzionale del livello di un serbatoio | 267 |
| 16.3 Progetto di Controllori Proporzionali-Integrali ($k_p > 0, k_i > 0$) | 268 |
| 16.3.1 Esempio con sistema $G(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ | 269 |
| 16.3.2 IMPORTANTE: Specifiche sul Sistema del Secondo Ordine | 270 |
| 16.3.3 Esempio con $\alpha = 1, k_p = 5, k_i = 18$ | 271 |
| 16.4 Nota: Sistemi Elementari del Secondo Ordine con uno Zero | 272 |
| 16.4.1 Caso: Sistema a fase non minima | 273 |
| 16.4.2 Caso: Sistema a fase minima | 274 |
| 16.4.3 Caso: Sistema a fase minima con quasi cancellazione polo/zero | 275 |
| 16.5 Effetto dei Parametri K_p, K_i, K_d sulle Prestazioni del Sistema in Catena Chiusa | 277 |
| 16.5.1 Effetto dell'aumento di K_p (guadagno proporzionale) | 277 |
| 16.5.2 Effetto dell'aumento di K_i (guadagno integrativo) | 277 |
| 16.5.3 Effetto dell'aumento di K_d (guadagno derivativo) | 278 |
| 16.6 Progetto del Controllore | 278 |
| 17 Luogo delle Radici | 281 |
| 17.0.1 Esempio | 282 |
| 17.1 Osservazioni sul Luogo delle Radici (LDR) | 283 |
| 17.2 Altre osservazioni preliminari sul Luogo delle Radici (LDR) | 284 |
| 17.3 Regole per il tracciamento del Luogo delle Radici (LDR) | 287 |
| 17.3.1 Esempi in base al grado relativo ($n - m$) | 289 |
| 17.3.2 Riassunto sugli zeri almeno doppi di $p_k(s)$ | 292 |
| 18 Uso del Luogo delle Radici nella Sintesi del Controllore | 295 |
| 18.0.1 Esempio: Controllo della Posizione di un Motore Elettrico (SISO) | 296 |

| | |
|---|------------|
| 18.0.2 Soluzione | 297 |
| 18.1 Analisi Raffinata del Luogo delle Radici | 304 |
| 18.1.1 Esempio: Controllo della Velocità di un Motore Elettrico | 307 |
| 19 Progetto di Sistemi di Controllo - Tempo Discreto | 313 |
| 19.1 Tempo Continuo vs Tempo Discreto | 313 |
| 19.1.1 Tempo Continuo vs Tempo Discreto: Piano s - Piano Z | 314 |
| 19.1.2 Corrispondenza Piano s - Piano Z | 315 |
| 19.1.3 Curiosità: Luogo delle Radici per Sistemi a Tempo Discreto | 316 |
| 19.1.4 Sistemi LTI a Tempo Discreto: Controllo, Fedeltà della Risposta, Specifiche e Prestazioni, Tipo di Sistema, etc. | 317 |
| 19.1.5 Esempio: Controllo Catena di Produzione con Test di Qualità | 319 |
| 19.1.6 Metodo Alternativo | 322 |
| 20 Retroazione Statica dallo Stato | 324 |
| 20.0.1 Esempio - Controllo di Posizione (Sistema SISO) | 324 |
| 20.0.2 Controllo di Posizione (Sistema SISO) con Retroazione dall'Uscita | 325 |
| 20.0.3 Analisi della Funzione di Trasferimento con Controllo Proporzionale | 326 |
| 20.0.4 Controllo di Posizione (Sistema SISO) con Retroazione Statica dallo Stato | 327 |
| 20.0.5 Progetto del Controllore con Retroazione Statica dallo Stato | 328 |
| 20.0.6 Esempio Simulink | 328 |

Capitolo 0

Introduzione ai Controlli Automatici

La disciplina dei **Controlli Automatici** si occupa dello studio e dell'applicazione di sistemi in grado di operare autonomamente. In questa sezione analizziamo i concetti fondamentali legati all'Automatica e alla sua applicazione tecnologica.

0.1 Definizioni Fondamentali

Automatica

L'Automatica rappresenta l'aspetto teorico della materia. Si occupa dello studio dei sistemi e delle soluzioni che operano in maniera autonoma. Può essere considerata come un *contenitore metodologico* che raccoglie i principi fondamentali dell'automazione.

Controlli Automatici

I Controlli Automatici forniscono gli strumenti per l'Automatica. I principali problemi affrontati includono:

- Stabilità dei sistemi
- Prestazioni e ottimizzazione

In sintesi, i Controlli Automatici rappresentano un contenitore che raccoglie gli strumenti necessari per risolvere i problemi dell'Automatica.

Automazione

L'Automazione è l'applicazione tecnologica dei principi dell'Automatica. Include non solo la teoria e i metodi di controllo, ma anche i dispositivi fisici che consentono ai sistemi automatici di operare. Tra questi troviamo:

- Sensori
- Attuatori
- Sistemi di controllo

Attuatori

Gli attuatori sono dispositivi che permettono di eseguire azioni nel sistema automatico. Alcuni esempi includono:

- Volante (nelle macchine a guida autonoma)
- Nastro trasportatore (in una catena di montaggio)

0.2 Esempi Applicativi

L'Automatica e i Controlli Automatici trovano applicazione in vari settori tecnologici e industriali, tra cui:

- **Catene di montaggio**, dove i sistemi automatici regolano il flusso di produzione.
- **Guida autonoma**, che utilizza sensori e algoritmi di controllo per la navigazione dei veicoli.
- **Controlli su allevamenti di pesci**, per monitorare e ottimizzare le condizioni ambientali.

0.3 Aspetti Fondamentali dei Controlli Automatici

Lo studio dei controlli automatici si basa su tre aspetti fondamentali:

- **Modellistica**: rappresentazione matematica dei sistemi.
- **Analisi**: studio delle proprietà e delle prestazioni dei sistemi.
- **Controllo**: progettazione di strategie per ottenere il comportamento desiderato.

Inoltre, è importante distinguere tra:

- **Segnali e sistemi a tempo continuo**, che descrivono l'evoluzione dei sistemi in modo continuo nel tempo.
- **Segnali e sistemi a tempo discreto**, che trattano sistemi il cui stato è aggiornato a intervalli discreti.

Capitolo 1

Segnali e Sistemi

1.1 Concetto di Segnale

Un segnale è una grandezza che evolve in funzione di una o più variabili indipendenti a cui è associata un'informazione.

1.1.1 Esempi di Segnali

- Segnale vocale
 - Suono consonantico 's' (non esibisce "regolarità")
 - Suono vocalico 'a' (esibisce "regolarità")
- Segnale corrispondente al codice ASCII

1.1.2 Tipologie di Segnali

I segnali possono essere classificati in diversi modi:

- **In base alla loro natura:**
 - Segnali fisici (grandezze fisiche alle quali è associata l'informazione)
 - Segnali matematici (modelli dei segnali fisici)
- **In base al dominio:**
 - Segnale monodimensionale (una variabile indipendente)
 - * Segnale a tempo continuo
 - * Segnale a tempo discreto
 - Segnale multidimensionale (due o più variabili indipendenti)
- **In base al codominio:**
 - Segnali scalari (se assumono valori scalari)
 - * Segnale analogico (ampiezza continua)
 - * Segnale digitale (ampiezza discreta)
 - Segnale multivariabili (se assumono valori vettoriali)

- * Segnale analogico (ampiezza continua)
- * Segnale digitale (ampiezza discreta)

1.1.3 Metodi di Descrizione (segnali matematici)

I segnali matematici specificati in un Dominio e Codominio possono essere dati attraverso:

- una espressione analitica (formula)
- un grafico
- una tabella

1.2 Concetto di Sistema

Un sistema è un insieme di entità collegate che formano un insieme unificato e ha uno scopo specifico.

1.2.1 Caratteristiche di un Sistema

- **Componenti**
 - Un sistema è composto da componenti
 - è una parte irriducibile. noto come sottosistema
- **Connessione di Componenti**
 - I componenti sono collegati tra loro
- **Confine/contorno**
 - Il confine separa un componente dall'altro
- **Scopo**
 - Tutti i componenti lavorano insieme per raggiungere un obiettivo comune
- **Ambiente**
 - Tutto ciò che è esterno al sistema interagisce e influisce sul sistema stesso
- **Interfacce**
 - I punti in cui il sistema interagisce con il suo ambiente sono noti come interfacce
- **Ingresso**
 - Per funzionare un sistema riceve input dall'ambiente circostante attraverso le interfacce
- **Uscita**
 - Un sistema restituisce all'ambiente un output come risultato finale del suo funzionamento raggiungendo così il suo scopo
- **Vincoli**
 - I segnali coinvolti in un sistema possono essere soggetti a vincoli, ovvero alcune modalità di funzionamento possono essere messe mentre altre no

1.2.2 Sistemi Dinamici

Un sistema dinamico è un sottosistema in cui:

- La variabile indipendente è il tempo.
- L'analisi si concentra sull'evoluzione del sistema nel tempo.

Nel nostro studio, ci occupiamo principalmente di **sistemi dinamici lineari**, che presentano le seguenti caratteristiche:

- Le loro proprietà evolvono nel tempo.
- Possono essere studiati più facilmente grazie a strumenti fisici e matematici.
- Valgono il **principio di sovrapposizione degli effetti**.

I sistemi fisici hanno la capacità di **generare** o **trasformare** segnali in altri segnali.

Capitolo 2

Esempi di modelli a tempo continuo e discreto

2.1 Serbatoio (tempo continuo)

2.1.1 Introduzione

In questo documento analizziamo il comportamento di un serbatoio a tempo continuo controllato da una valvola che regola il flusso di ingresso. Il sistema è descritto da una variabile di controllo $a(t)$, che rappresenta l'apertura della valvola:

- variabile indipendente: $a(t)$
- variabile dipendente: $h(t)$
- $a(t) = 0$ (valvola completamente chiusa)
- $a(t) = 1$ (valvola completamente aperta)
- $0 < a(t) < 1$ (apertura parziale)

Il nostro obiettivo è determinare l'andamento dell'altezza $h(t)$ del liquido nel serbatoio in funzione del tempo.

2.1.2 Dati e Assunzioni

Definiamo le seguenti grandezze:

- $V(t)$: volume del liquido nel serbatoio [m^3]
- S : sezione del serbatoio [m^2]
- $h(t)$: altezza del liquido nel serbatoio [m]
- P_{max} : portata massima di ingresso [m^3/s]

La relazione tra il volume e l'altezza è data da:

$$V(t) = Sh(t) \quad (2.1)$$

Condizioni iniziali:

$$V(0) = 0, \quad h(0) = 0 \quad (2.2)$$

Non esiste alcun meccanismo di uscita del liquido, quindi l'altezza del fluido può solo aumentare nel tempo.

2.1.3 Bilancio di Massa

Accumulo = ingresso - uscita

Dal principio di conservazione della massa, possiamo scrivere l'equazione del bilancio:

$$\frac{dV(t)}{dt} = a(t)P_{max} \quad (2.3)$$

Problema Diretto

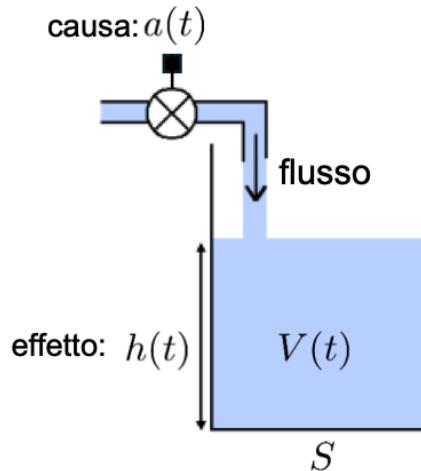


Figura 2.1: Serbatoio

Sostituendo $V(t) = Sh(t)$, otteniamo l'equazione differenziale per l'altezza:

$$S \frac{dh(t)}{dt} = P_{max}a(t) \quad (2.4)$$

Risolviamo per $dh(t)$:

$$dh(t) = \frac{P_{max}}{S}a(t)dt \quad (2.5)$$

Integrando entrambi i membri da 0 a t :

$$\int_0^{h(t)} dh(\tau) = \int_0^t \frac{P_{max}}{S}a(\tau)d\tau \quad (2.6)$$

Otteniamo la soluzione:

$$h(t) = h(0) + \frac{P_{max}}{S} \int_0^t a(\tau)d\tau \quad (2.7)$$

2.1.4 Caso particolare

Se $a(t) = \bar{a} = \cos t$, allora:

$$h(t) = \frac{P_{max}}{S} \bar{a} t = \frac{P_{max}}{S} \cos t \cdot t \quad (2.8)$$

2.1.5 Metodo di Integrazione Numerica di Eulero

Per approssimare numericamente la soluzione, utilizziamo il metodo di Eulero. L'equazione differenziale può essere riscritta come:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \bar{h}(t) = \alpha a(t), \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{P_{max}}{S} \quad (2.9)$$

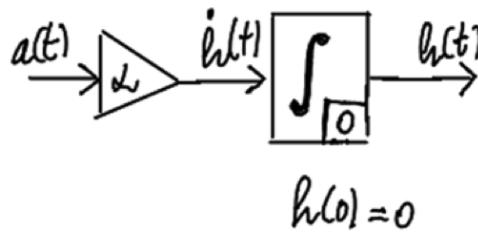


Figura 2.2: Serbatoio accumulo di informazioni

Riassumendo abbiamo:

- $a(t)$ amplificata da una costante α
- un serbatoio di accumulo di informazioni
- $h(t)$ soluzione dell'equazione differenziale

Dato che:

$$\bar{h}(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h(t+k) - h(t)}{k}, \quad k > 0 \quad (2.10)$$

se consideriamo un valore di k positivo e "sufficientemente piccolo".

Approssimo la derivata:

$$\bar{h}(t) \approx \frac{h(t+k) - h(t)}{k} \quad (2.11)$$

Discretizzando con un passo di discretizzazione k , otteniamo l'iterazione numerica:

$$h(t+k) = h(t) + k\bar{h}(t) \quad (2.12)$$

$$h(1) := h(0) + 1\bar{h}(0) \quad (2.13)$$

$$h(2) := h(1) + 1\bar{h}(1) \quad (2.14)$$

$$h(3) := h(2) + 1\bar{h}(2) \quad (2.15)$$

$$\dots \quad (2.16)$$

$$h(n) := h(n-1) + 1\bar{h}(n-1) \quad (2.17)$$

Più precisamente:

- $h(t+k)$ è il passo successivo all'istante presente

- $h(t)$ è il valore dell'altezza al passo precedente
- k è il passo di discretizzazione
- $\bar{h}(t)$ è la derivata (valore della variabile di controllo al passo presente)

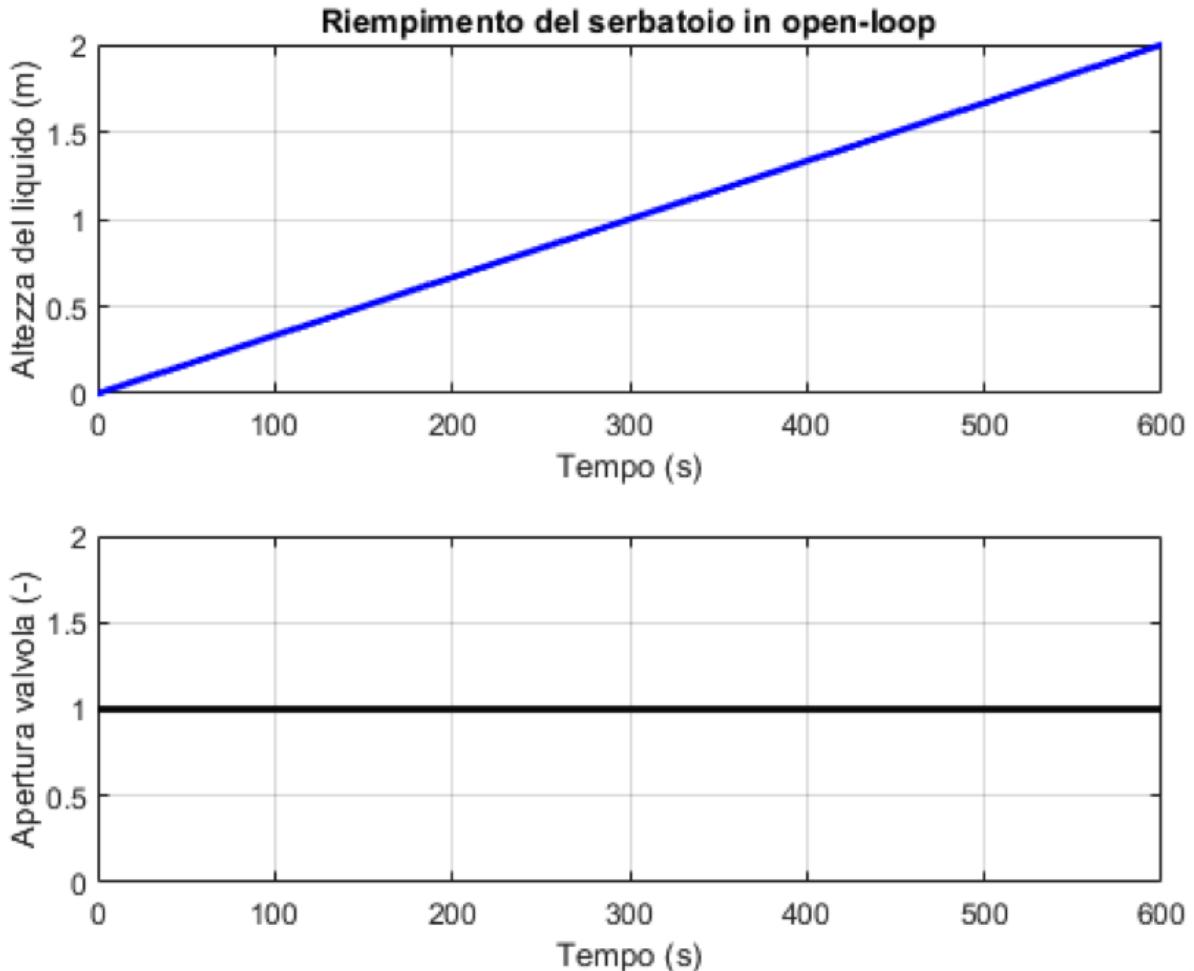


Figura 2.3: Rimpimento serbatoio in open-loop

Problema Inverso

Nel problema inverso, non vogliamo semplicemente descrivere la dinamica del serbatoio, ma determinare l'azione di controllo necessaria per ottenere un effetto desiderato. In particolare, vogliamo trovare un controllo $a(t)$ che porti l'altezza del liquido $h(t)$ al valore desiderato h_{des} .

2.1.6 Dati e Assunzioni

Definiamo le seguenti grandezze per il problema di controllo:

- h_{des} : altezza desiderata del liquido nel serbatoio [m]
- $h(t)$: altezza attuale del liquido nel serbatoio [m]

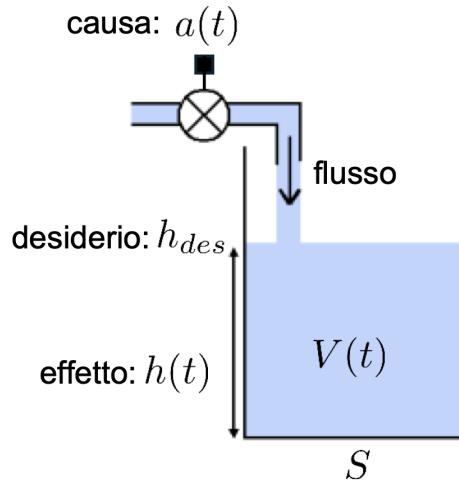


Figura 2.4: Serbatoio

- $e(t)$: errore tra altezza desiderata e attuale, definito come $e(t) = h_{des} - h(t)$ [m]
- $a(t)$: apertura della valvola di ingresso, con valori nell'intervallo $[0, 1]$
- $P_{in}(t)$: portata d'ingresso del liquido regolata dalla valvola [m^3/s]
- P_{\max} : portata massima di ingresso quando la valvola è completamente aperta [m^3/s]
- S : sezione del serbatoio [m^2]

2.1.7 Definizione dell'errore

L'errore è definito come la differenza tra il valore desiderato e lo stato attuale:

$$e(t) = h_{des} - h(t), \quad e(t) \geq 0$$

Dato che il serbatoio non può svuotarsi attivamente, l'errore sarà sempre positivo o nullo.

2.1.8 Strategia di controllo

L'azione di controllo è rappresentata dall'apertura della valvola $a(t)$, che varia nell'intervallo:

$$a(t) \in [0, 1]$$

L'obiettivo è scegliere $a(t)$ in funzione dell'errore, in modo che:

- Se $e(t)$ è grande, conviene aprire completamente la valvola ($a(t) = 1$).
- Se $e(t)$ è piccolo, conviene ridurre progressivamente $a(t)$.
- Se $e(t) = 0$, allora $a(t) = 0$ per evitare un eccesso di riempimento.

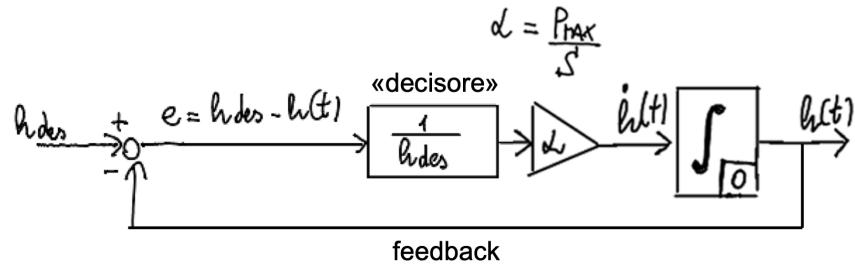


Figura 2.5: Serbatoio accumulo di informazioni

2.1.9 Legge di controllo

Per garantire un riempimento progressivo e stabile, possiamo adottare una legge di controllo basata sul feedback proporzionale:

$$a(t) = ke(t), \quad k > 0$$

dove il parametro k determina la velocità con cui si regola la valvola in funzione dell'errore.

2.1.10 Dinamica del sistema

L'evoluzione dell'altezza del liquido è governata dall'equazione differenziale:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{P_{max}}{S} a(t)$$

dove $a(t)$ rappresenta il controllo che determina la portata in ingresso.

2.1.11 Soluzione analitica

Per ottenere una legge di controllo adeguata, consideriamo la scelta di un'apertura della valvola proporzionale all'errore normalizzato:

$$a(t) = \frac{h_{des}}{h_{des} - h(t)}$$

Sostituendo questa relazione nell'equazione differenziale e integrando entrambi i membri:

$$\int_0^{h(t)} \frac{S}{P_{max}} \cdot \frac{h_{des}}{h_{des} - h(t)} dh(t) = \int_0^t dt$$

otteniamo:

$$\frac{-Sh_{des}}{P_{max}} [\ln(h_{des} - h(t)) - \ln h_{des}] = t$$

che, dopo ulteriori manipolazioni, diventa:

$$\frac{-Sh_{des}}{P_{max}} \ln \left(1 - \frac{h(t)}{h_{des}} \right) = t$$

Risolvendo per $h(t)$, otteniamo la legge temporale dell'altezza del liquido nel serbatoio:

$$h(t) = h_{des} \left(1 - e^{\frac{P_{max}}{Sh_{des}} t} \right)$$

2.1.12 Osservazioni sul comportamento

- All'inizio, quando il serbatoio è vuoto, $e(t)$ è massimo e quindi la valvola sarà completamente aperta.
- Man mano che $h(t)$ si avvicina a h_{des} , l'errore $e(t)$ diminuisce e la valvola si chiude progressivamente.
- L'esponente è negativo, quindi $h(t)$ è sempre limitata e converge asintoticamente a h_{des} .
- Per $t \rightarrow \infty$, l'altezza $h(t)$ si stabilizza su h_{des} , evitando overshoot.
- Il sistema garantisce un riempimento stabile senza oscillazioni indesiderate.

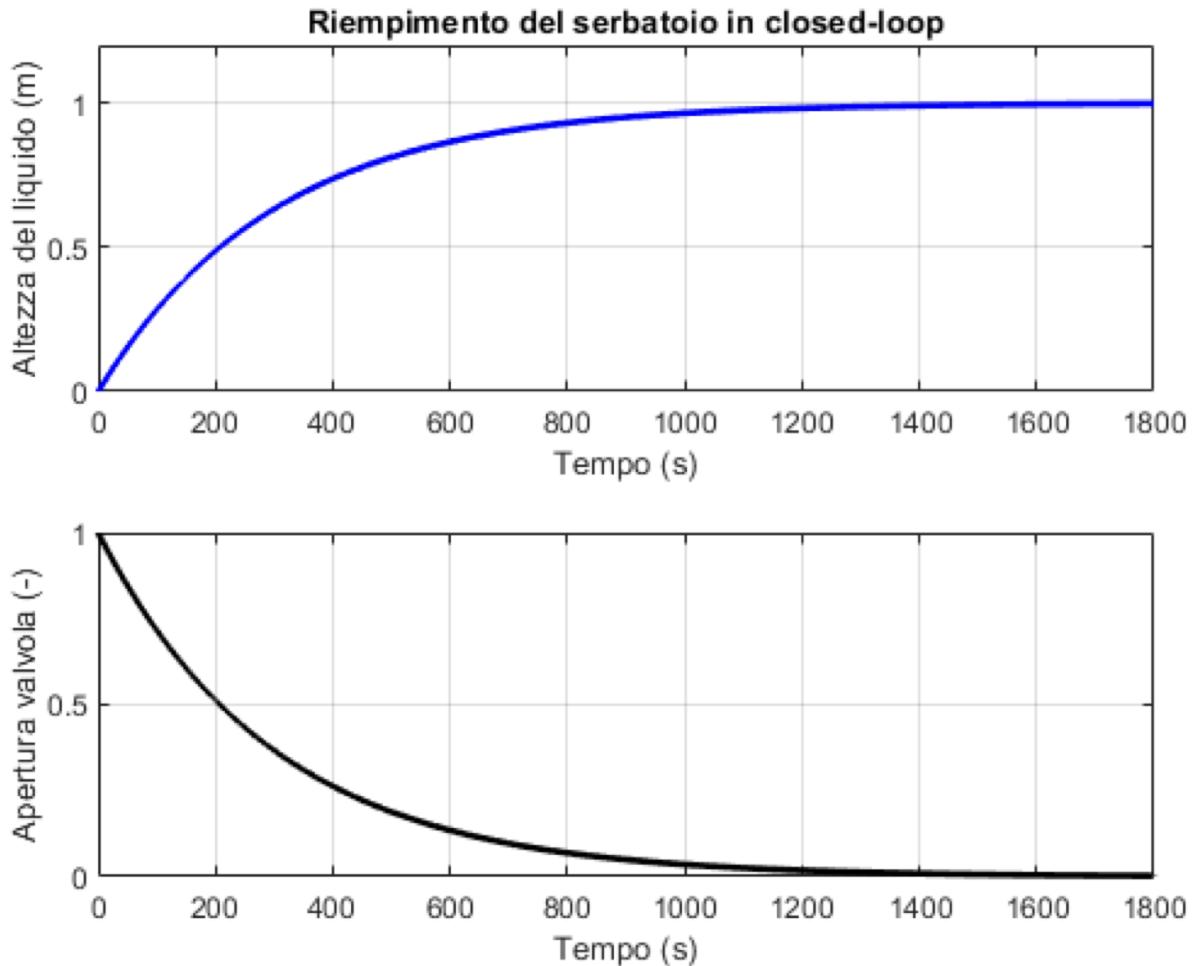


Figura 2.6: Riempimento serbatoio in closed-loop

2.2 Fenomeno Emigrazione (tempo discreto)

2.2.1 Definizione del Modello

Consideriamo un sistema dinamico discreto che descrive il fenomeno dell'emigrazione di cittadini italiani. Definiamo le seguenti variabili di stato:

- $x_1(k)$: numero di italiani residenti in Italia dopo k anni.
- $x_2(k)$: numero di italiani residenti all'estero dopo k anni.
- $k \in \mathbb{N}$: tempo discreto, misurato in anni.

Supponiamo che ogni anno un individuo su 1000 lasci l'Italia per trasferirsi all'estero.

Questo rappresenta un sistema dinamico autonomo, poiché:

- Non ci sono ingressi esplicativi nel sistema.
- Non ci sono variabili indipendenti esterne che influenzano direttamente l'evoluzione del sistema.
- L'evoluzione dipende solo dalle variabili di stato x_1 e x_2 e dalle condizioni iniziali.

2.2.2 Equazioni di Bilancio della Popolazione

Consideriamo l'Italia come sistema di riferimento. Poiché ogni anno $\frac{1}{1000}$ della popolazione residente si trasferisce all'estero, possiamo scrivere:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - \frac{1}{1000}x_1(k) \quad (2.18)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + \frac{1}{1000}x_1(k) \quad (2.19)$$

Osservazioni:

- Il sistema ha solo un flusso uscente (emigrazione) e nessun flusso entrante.
- Il fenomeno può essere assimilato a un flusso continuo di "liquido" che esce da un serbatoio senza rientrare.

2.2.3 Calcolo della Popolazione Residua in Italia

Procediamo con il calcolo iterativo di $x_1(k)$:

Anno 1:

$$x_1(1) = x_1(0) - \frac{1}{1000}x_1(0) = \frac{999}{1000}x_1(0) \quad (2.20)$$

Anno 2:

$$x_1(2) = x_1(1) - \frac{1}{1000}x_1(1) = \frac{999}{1000}x_1(1) = \left(\frac{999}{1000}\right)^2 x_1(0) \quad (2.21)$$

Anno generico:

$$x_1(k) = \left(\frac{999}{1000}\right)^k x_1(0) \quad (2.22)$$

Questa espressione mostra che la popolazione residente in Italia diminuisce esponenzialmente nel tempo.

2.2.4 Calcolo della Popolazione Emigrata

Procediamo con il calcolo iterativo di $x_2(k)$:

Anno 1:

$$x_2(1) = x_2(0) + \frac{1}{1000}x_1(0) \quad (2.23)$$

Anno 2:

$$x_2(2) = x_2(1) + \frac{1}{1000}x_1(1) = x_2(0) + \frac{1}{1000}x_1(0) + \frac{1}{1000} \left(\frac{999}{1000} \right) x_1(0) \quad (2.24)$$

Anno generico:

$$x_2(k) = x_2(0) + \frac{1}{1000} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{999}{1000} \right)^i x_1(0) \quad (2.25)$$

Questa è una somma di una progressione geometrica di ragione $\frac{999}{1000}$ e primo termine $x_1(0)$:

$$x_2(k) = x_2(0) + \frac{1}{1000} \cdot \frac{1 - \left(\frac{999}{1000} \right)^k}{1 - \frac{999}{1000}} x_1(0) \quad (2.26)$$

Semplificando:

$$x_2(k) = x_2(0) + \left[1 - \left(\frac{999}{1000} \right)^k \right] x_1(0) \quad (2.27)$$

2.2.5 Sistema Finale

Riassumendo, il sistema dinamico è descritto dalle due equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x_1(k) = \left(\frac{999}{1000} \right)^k x_1(0) \\ x_2(k) = x_2(0) + \left[1 - \left(\frac{999}{1000} \right)^k \right] x_1(0) \end{cases} \quad (2.28)$$

Queste equazioni descrivono come evolve la popolazione italiana residente in Italia e all'estero nel tempo discreto, modellando il fenomeno dell'emigrazione.

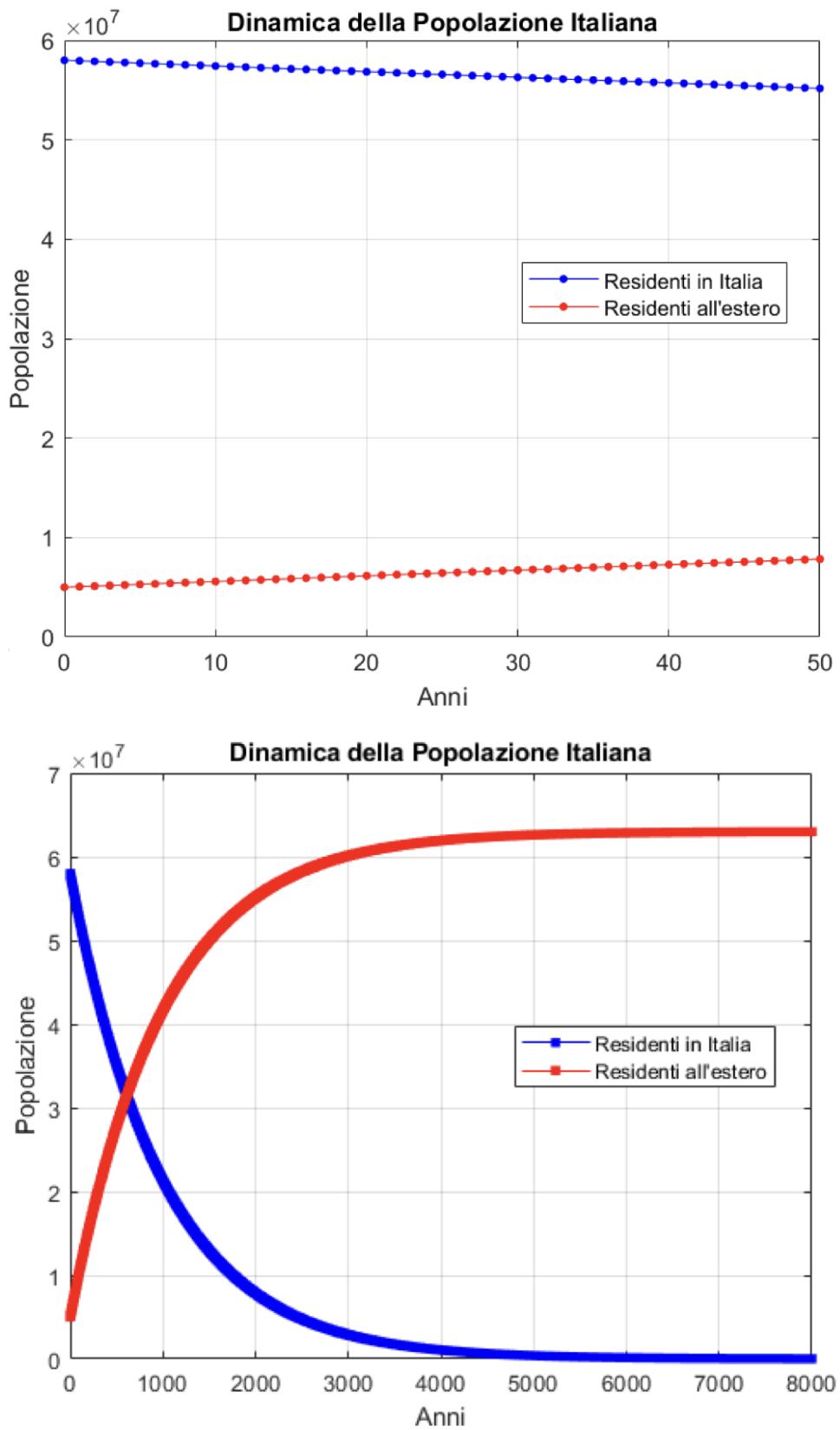


Figura 2.7: Dinamica della popolazione Italiana

2.3 Modello termico di un sistema di raffreddamento di un chip elettronico (tempo continuo)

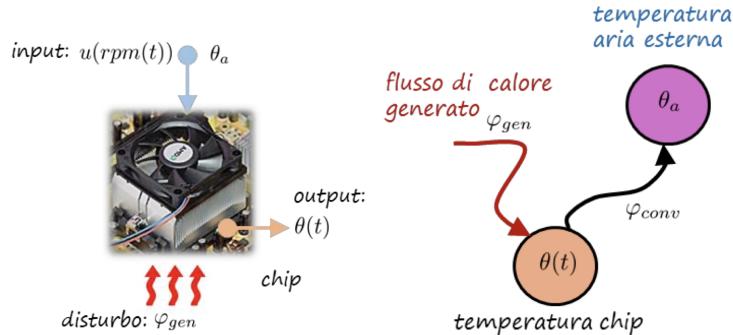


Figura 2.8: Modello termico

2.3.1 Definizione delle Variabili

Il modello descrive la dinamica della temperatura $\theta(t)$ di un chip raffreddato da una ventola. Le variabili coinvolte sono:

- **Input:** $u(rpm(t))$, θ_a (temperatura dell'aria)
- **Disturbo:** ϕ_{gen} (flusso di calore generato dal chip)
- **Output:** $\theta(t)$ (temperatura del chip)

$$\text{Poniamo } \bar{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Il chip si scalda a causa della generazione di calore ϕ_{gen} e si raffredda tramite la dissipazione convettiva, governata dal coefficiente di scambio termico u , che dipende dalla velocità della ventola $rpm(t)$.

2.3.2 Equazione Differenziale del Bilancio di Potenza

Il principio di conservazione dell'energia impone che la variazione di energia nel tempo sia data dall'energia entrante meno l'energia uscente:

$$Mc_p \frac{d\theta(t)}{dt} = \phi_{gen} - \phi_{conv}(t). \quad (2.29)$$

Sostituendo l'espressione per la dissipazione di calore convettiva:

$$Mc_p \frac{d\theta(t)}{dt} = \phi_{gen} - u \cdot rpm(t) \cdot (\theta(t) - \theta_a). \quad (2.30)$$

Problema Diretto

Supponiamo per semplicità che l'ingresso sia costante:

$$rpm(t) = \cos t \quad \Rightarrow \quad u \cdot rpm(t) = \bar{u}. \quad (2.31)$$

Allora l'equazione differenziale diventa:

$$\bar{\theta}(t) + \frac{\bar{u}}{Mc_p} \theta(t) = \frac{\phi_{gen} + \bar{u}\theta_a}{Mc_p}. \quad (2.32)$$

Definiamo:

$$\bar{\theta}(t) + \alpha\theta(t) = \beta \quad (2.33)$$

$$\alpha = \frac{\bar{u}}{Mc_p}, \quad \beta = \frac{\phi_{gen} + \bar{u}\theta_a}{Mc_p}. \quad (2.34)$$

Risolvendo l'equazione differenziale, otteniamo:

$$\theta(t) = \theta_a + \frac{\phi_{gen}}{\bar{u}} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (2.35)$$

Questa soluzione mostra che $\theta(t)$ è limitata e converge asintoticamente a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{\beta}{\alpha} = \theta_a + \frac{\phi_{gen}}{\bar{u}}. \quad (2.36)$$

Se \bar{u} aumenta, il valore stazionario della temperatura diminuisce, mostrando che la ventilazione è efficace nel raffreddamento.

$\rightarrow \theta(t)$ è monotona non decrescente, quindi avremo una crescita *smooth*.

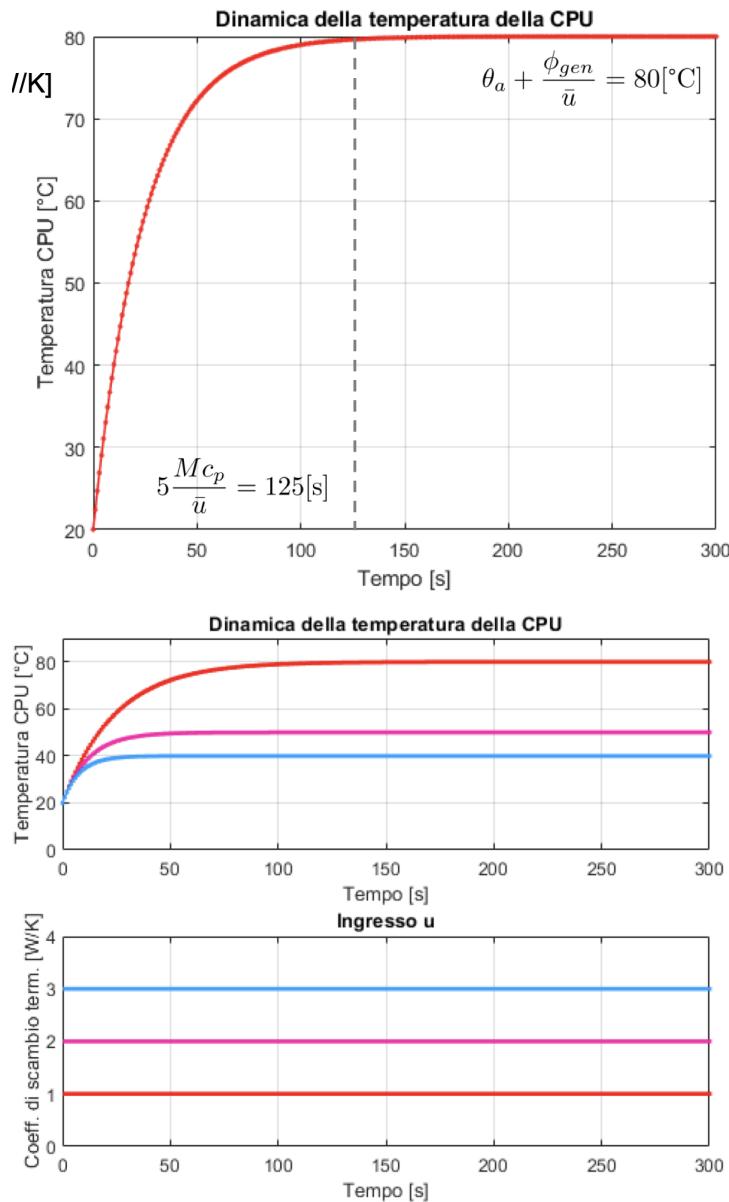


Figura 2.9: Dinamica della temperatura della CPU

Problema Inverso

Nel problema inverso vogliamo determinare \bar{u} che produce un determinato $\bar{\theta}(t)$. Dalla soluzione del problema diretto, isoliamo \bar{u} :

$$\bar{\theta}(t) = \theta_a + \frac{\phi_{gen}}{\bar{u}} \rightarrow \bar{u} = \frac{\phi_{gen}}{\bar{\theta} - \theta_a}. \quad (2.37)$$

oss : $\bar{\theta}(t) = \theta_a + \frac{\phi_{gen}}{\bar{u}}$ a regime stazionario.

Questo indica che possiamo regolare la velocità della ventola per mantenere la temperatura desiderata.

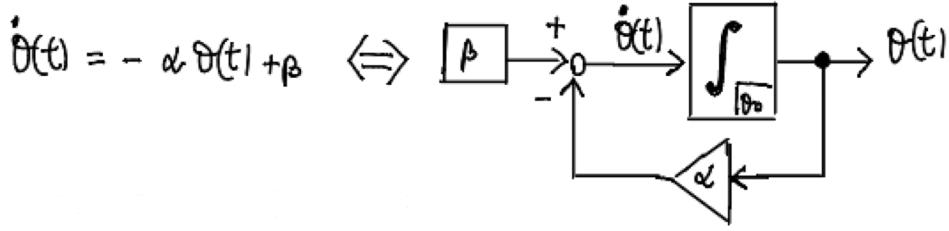


Figura 2.10: accumulo di informazioni di un sistema di raffreddamento

2.3.3 Metodo di Integrazione Numerica di Eulero

Per approssimare la soluzione, usiamo il metodo di Eulero. L'equazione differenziale:

$$\bar{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(t+h) - \theta(t)}{h} \quad (2.38)$$

porta alla formula iterativa:

$$\theta(t+h) = \theta(t) + h\bar{\theta}(t). \quad (2.39)$$

Definiamo il passo di discretizzazione h e iteriamo:

$$\theta_1 = \theta_0 + h \cdot \bar{\theta}(0), \quad (2.40)$$

$$\theta_2 = \theta_1 + h \cdot \bar{\theta}(1), \quad (2.41)$$

$$\vdots \quad (2.42)$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + h \cdot \bar{\theta}(n-1). \quad (2.43)$$

Questa approssimazione numerica consente di calcolare $\theta(t)$ in maniera discreta, utile per implementazioni su microcontrollori e sistemi embedded.

2.3.4 Conclusioni

Il modello mostra che la temperatura del chip è regolata dalla ventilazione e dalla generazione di calore. Il metodo di Eulero consente di calcolare l'evoluzione della temperatura in modo numerico, utile per simulazioni o controlli automatici di raffreddamento.

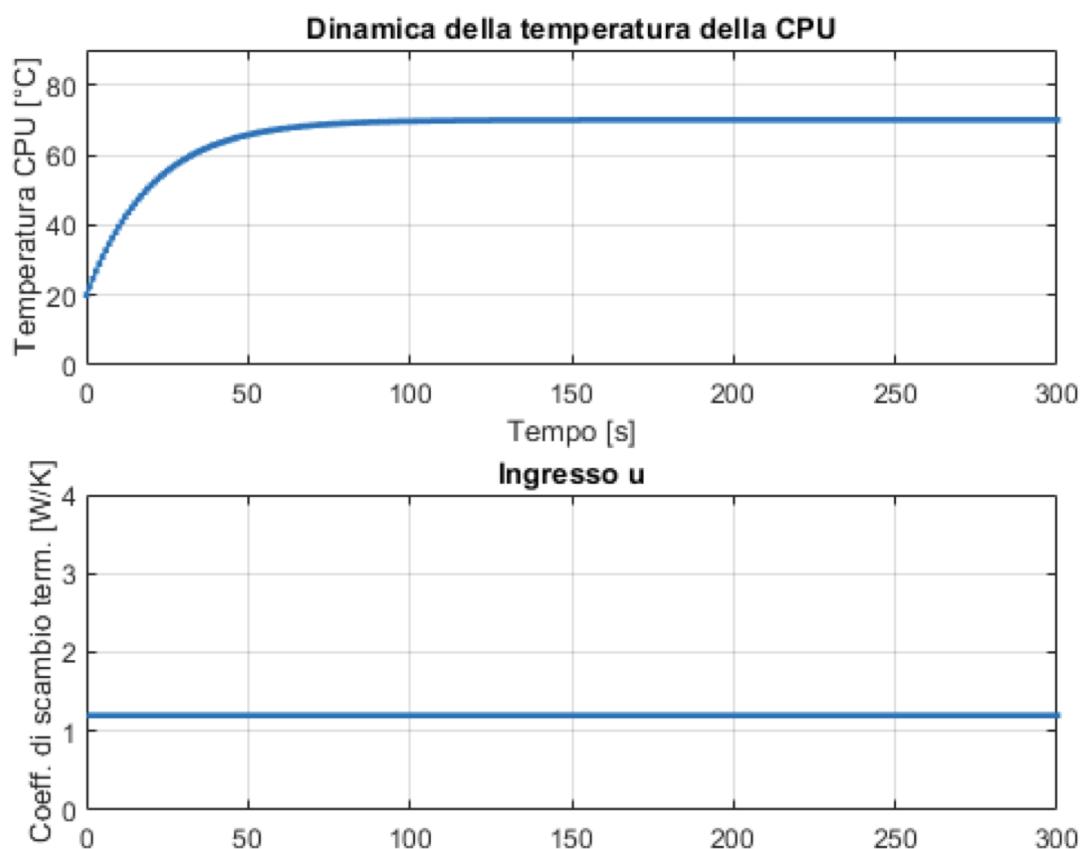


Figura 2.11: Dinamica della temperatura della CPU

2.4 Modello di utilizzo di una CPU (tempo discreto)

2.4.1 Introduzione

Il modello considera la CPU come un sistema con input e output, in cui:

- **Input:** $u(k)$ rappresenta il numero di processi in ingresso al tempo discreto k .
- **Output:** $p(k)$ rappresenta il numero di processi elaborati dalla CPU al tempo k .

L'elaborazione dei processi segue una logica FIFO con un buffer di attesa. L'utilizzo della CPU è denotato da $y(k)$ e si assume che sia saturabile (fino a un massimo del 100%).

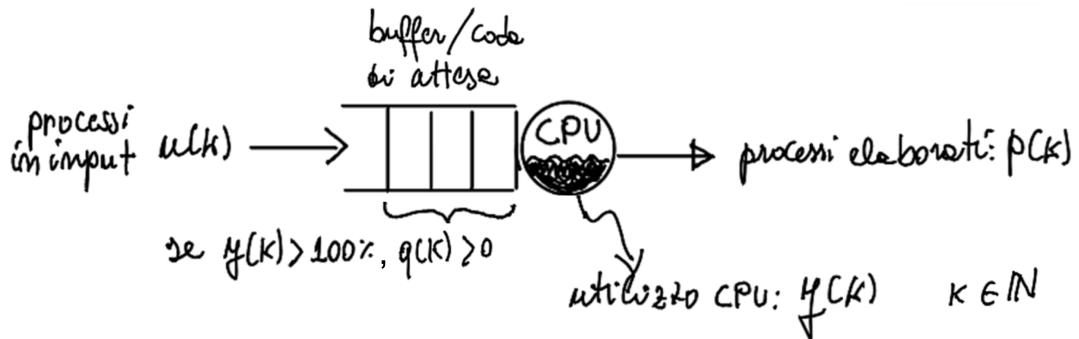


Figura 2.12: Uso CPU accumulo di informazioni

Problema Diretto

Il problema diretto descrive la dinamica del sistema nel tempo.

2.4.2 Prima Dinamica: Aggiornamento dell'Utilizzo della CPU

L'utilizzo della CPU al passo successivo è dato da:

$$y(k+1) = \min(100, ay(k) + bp(k)). \quad (2.44)$$

Dove:

- a è il coefficiente di persistenza dei processi nella CPU (quanto utilizzo rimane nel tempo).
- b rappresenta l'impatto di ogni nuovo processo sull'utilizzo della CPU (misurato in % per processo).

La funzione min garantisce che l'utilizzo della CPU non superi il 100%. In particolare:

- Se $ay(k) + bp(k) > 100$, allora la CPU è saturata e i processi in eccesso vengono messi in coda.
- Se $ay(k) + bp(k) \leq 100$, allora tutti i processi vengono elaborati senza saturare la CPU.

2.4.3 Seconda Dinamica: Processi Elaborabili

La quantità di processi che possono essere elaborati al tempo k è data da:

$$p(k) = \min \left[\text{round} \left(\frac{100 - y(k)}{b} \right), q(k) + u(k) \right], \quad k \in \mathbb{N}, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (2.45)$$

Questa equazione garantisce che:

- Il numero di processi elaborabili è limitato dalla capacità disponibile della CPU, data da $\frac{100-y(k)}{b}$.
- Tuttavia, non possiamo elaborare più processi di quanti ne siano disponibili nella coda e in ingresso, cioè $q(k) + u(k)$.

2.4.4 Terza Dinamica: Aggiornamento della Coda di Attesa

La coda di attesa si aggiorna nel tempo in base al numero di processi in ingresso e al numero di processi elaborati:

$$q(k+1) = q(k) + u(k) - p(k). \quad (2.46)$$

Se la CPU è satura, alcuni processi rimangono in coda, altrimenti la coda si svuota.

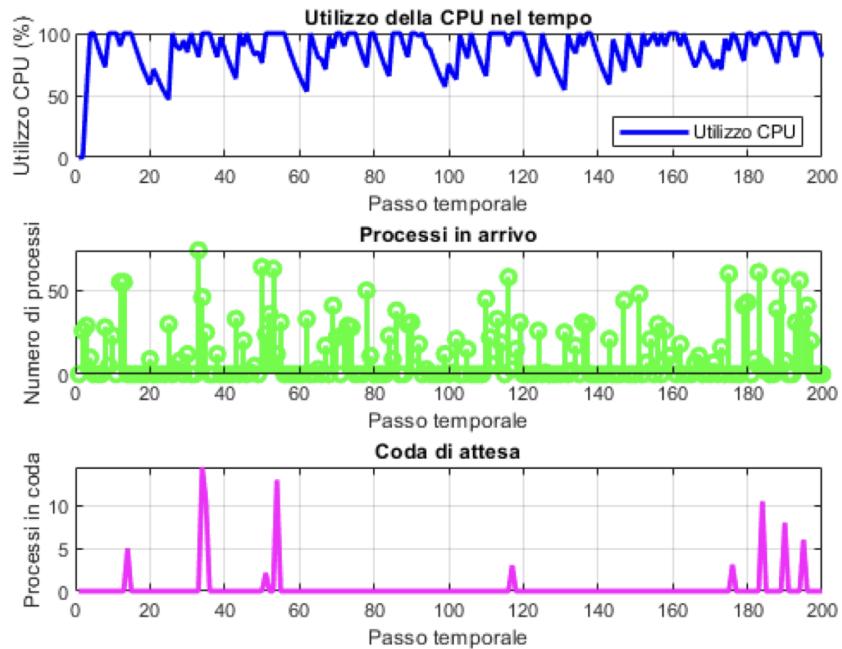


Figura 2.13: Utilizzo di una CPU

Problema Inverso

L'obiettivo del problema inverso è determinare l'input necessario per mantenere l'utilizzo della CPU stabile a un valore desiderato \bar{y}_r .

2.4.5 Condizione di Stato Stazionario

Per stabilità, vogliamo che dopo un certo tempo \bar{k} , l'utilizzo della CPU rimanga costante e inferiore alla soglia di saturazione:

$$\bar{y}_r = y(k+1) = y(k) < 100, \quad \forall k > \bar{k}. \quad (2.47)$$

Inoltre, per evitare l'accumulo di processi nella coda, imponiamo che nel regime stazionario:

$$q(k+1) = q(k) = 0. \quad (2.48)$$

Di conseguenza, il numero di processi elaborati deve uguagliare quello in ingresso:

$$u(k) = p(k) = \bar{u}, \quad \text{con } \bar{y}_r < 100. \quad (2.49)$$

2.4.6 Determinazione dell'Input in Stato Stazionario

Dall'equazione dell'utilizzo della CPU in stato stazionario:

$$\bar{y}_r = \min(100, a\bar{y}_r + b\bar{u}), \quad (2.50)$$

ma poiché $\bar{y}_r < 100$, allora si ha:

$$\bar{y}_r = a\bar{y}_r + b\bar{u}. \quad (2.51)$$

Risolvendo rispetto a \bar{u} , otteniamo:

$$\bar{u} = \frac{(1-a)\bar{y}_r}{b}. \quad (2.52)$$

Questa equazione mostra che il numero di processi in ingresso \bar{u} deve essere regolato in base a:

- Il valore desiderato di utilizzo della CPU \bar{y}_r .
- Il coefficiente di persistenza a (maggiore è a , più i processi restano attivi nel tempo).
- L'impatto di ogni nuovo processo b .

2.4.7 Conclusioni

Il modello fornisce una rappresentazione dell'utilizzo della CPU in un sistema a tempo discreto con coda di attesa. Il problema diretto descrive l'evoluzione nel tempo, mentre il problema inverso permette di determinare l'input necessario per stabilizzare l'utilizzo della CPU a un valore desiderato.

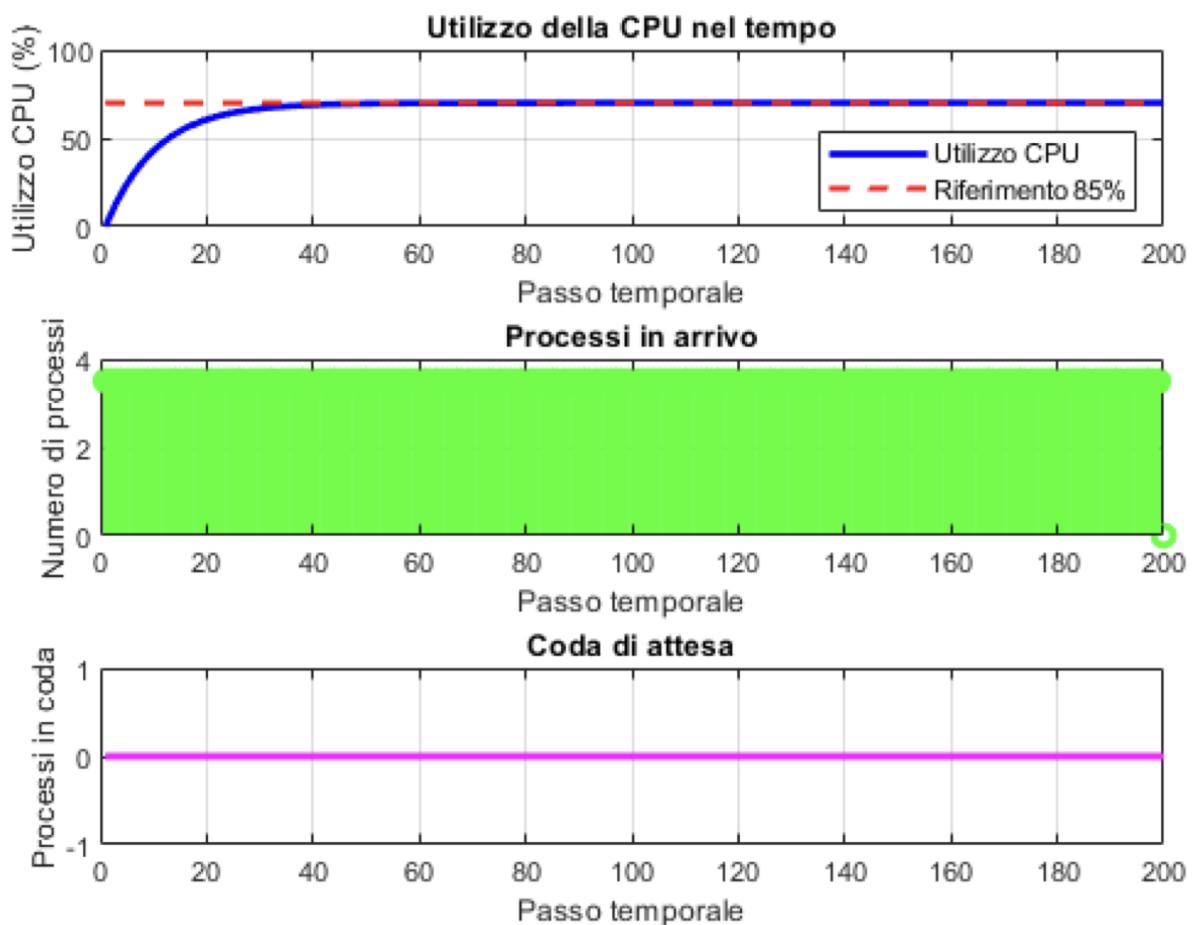
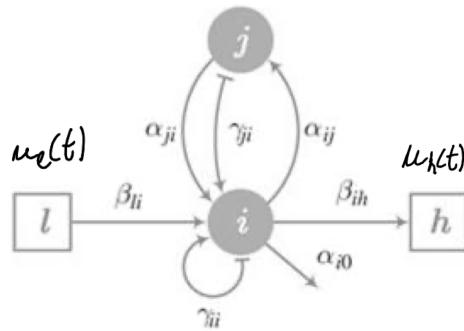


Figura 2.14: Utilizzo di una CPU

Capitolo 3

Modelli di Flusso Continuo



3.1 Modelli di Trasferimento di Risorse a Tempo Continuo

In questo modello i nodi collegati tra loro rappresentano i compartimenti di interesse. Nei grafici:

- I **nodi** (rappresentati con cerchi) indicano i compartimenti.
- Le **entrate** e le **uscite** (rappresentate con quadrati) indicano, rispettivamente, l'ingresso e l'uscita della risorsa.

Il **compartimento i -esimo** contiene la risorsa (stato) indicata da: $x_i(t)$ che varia nel tempo ($t > 0$).

Le variabili indipendenti associate sono:

- $u_l(t)$: ingresso (variabile indipendente), etichettato con l ;
- $u_h(t)$: uscita (variabile indipendente), etichettato con h .

I parametri del sistema sono:

- $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$: parametri reali che influenzano il modello;
- I coefficienti sugli archi sono numeri reali che indicano l'influenza (immissioni, estrazioni di flusso) tra i compartimenti.

3.1.1 Bilancio di Flusso

Il bilancio di flusso stabilisce che la velocità di variazione della risorsa in un compartimento è data dalla differenza tra il flusso entrante e il flusso uscente:

$$x'_i(t) = f_i^{in}(t) - f_i^{out}(t), \quad t > 0.$$

3.1.2 Flussi Entranti in un Singolo Compartimento

I flussi entranti nel compartimento i -esimo sono dati da:

- $\beta_{li} \cdot u_l(t)$: flussi esterni (immissione dalla sorgente l);
- $\alpha_{ji} \cdot x_j(t)$: trasferimenti interni da altri compartimenti;
- $\gamma_{ji} \cdot x_j(t)$: trasferimento della sola risorsa generata proveniente da un altro compartimento;
- γ_{ii} : accumulo della risorsa generata nel medesimo compartimento.

Formalmente, si scrive:

$$f_i^{in}(t) = \sum_{l=1}^p \beta_{li} u_l(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\alpha_{ji} + \gamma_{ji}) x_j(t) + \gamma_{ii} x_i(t). \quad (3.1)$$

3.1.3 Flussi Uscenti da un Singolo Compartimento

I flussi uscenti dal compartimento i -esimo sono dati da:

- $\beta_{ih} \cdot u_h(t)$: trasferimenti indipendenti della risorsa in uscita;
- $\alpha_{ij} \cdot x_i(t)$: trasferimenti verso altri compartimenti;
- α_{i0} : perdite del compartimento.

Formalmente:

$$f_i^{out}(t) = \sum_{h=1}^p \beta_{ih} u_h(t) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij} x_i(t). \quad (3.2)$$

3.1.4 Bilancio per un Singolo Compartimento

Il bilancio (o equazione di conservazione) per il compartimento i -esimo si esprime come:

$$x'_i(t) = f_i^{in}(t) - f_i^{out}(t). \quad (3.3)$$

3.1.5 Modello a n Compartimenti

Consideriamo ora un sistema costituito da n compartimenti. Definiamo il vettore di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

3.1.6 Matrice dei Coefficienti A

La matrice A è definita come:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

con

$$a_{ij} = \alpha_{ji} + \gamma_{ji}, \quad \text{per } i \neq j, \quad (3.6)$$

e

$$a_{ii} = \gamma_{ii} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}. \quad (3.7)$$

3.1.7 Matrice dei Coefficienti di Ingresso B

La matrice B è definita come:

$$B = \begin{bmatrix} \vdots \\ \beta_{li} \\ \vdots \\ -\beta_{ih} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

3.1.8 Equazione del Sistema Dinamico Lineare

Il sistema dinamico lineare che descrive il trasferimento delle risorse è:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.9)$$

dove

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Nota: In questo modello le equazioni e le matrici forniscono una rappresentazione completa del trasferimento continuo di risorse tra compartimenti. I termini positivi indicano flussi in entrata e i termini negativi indicano flussi in uscita o perdite, garantendo il bilancio di flusso.

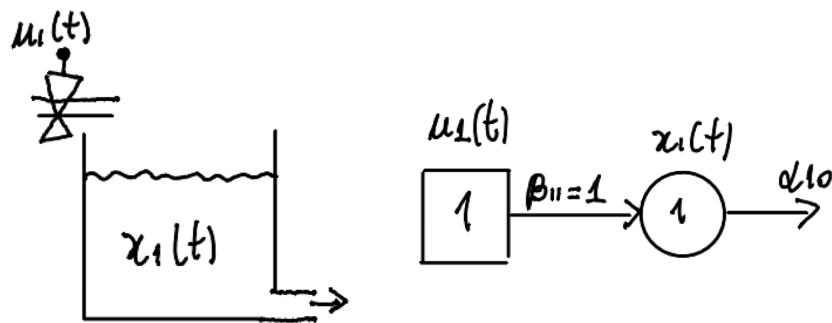
3.2 Esempi: Modelli di Flusso nei Serbatoi

3.2.1 Legenda Grafico

Nei diagrammi utilizzati per rappresentare i sistemi di serbatoi:

- I compartimenti e gli stati sono rappresentati con **cerchi**.
- Gli ingressi e le uscite (variabili indipendenti) sono rappresentati con **quadrati**.

3.2.2 Esempio 1: Serbatoio con Solo Rubinetto di Uscita



Il sistema è composto da un serbatoio con un'unica uscita regolata da un rubinetto.

- $x_1(t) = Sh_1(t)$ rappresenta il volume di liquido nel serbatoio.
- u_1 è il flusso d'entrata.

Le equazioni di bilancio sono date da:

$$\begin{cases} x'_1(t) = -f_1^{out}(t) \\ f_1^{out}(t) = \alpha_{10}x_1(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

Dove $\alpha_{10}x_1(t)$ rappresenta la densità di flusso.

$$x'_1(t) = -\alpha_{10}x_1(t) = Ax \quad (3.12)$$

Matrice del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{10} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

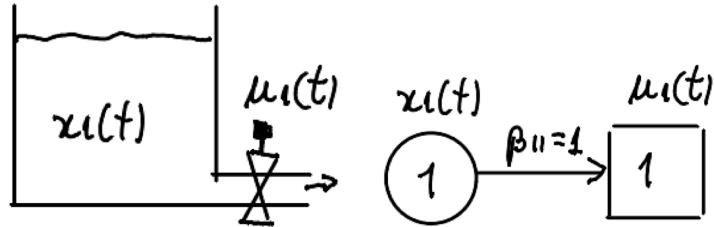
Soluzione dell'equazione differenziale:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-\alpha_{10}t} \quad (3.14)$$

Considerando l'ingresso:

$$x'_1(t) = +u_1(t) - \alpha_{10}x_1(t) \quad (3.15)$$

3.2.3 Esempio 2: Serbatoio con Controllo sul Flusso d'Uscita



Il volume del liquido è dato da:

$$x_1(t) = Sh_1(t) \quad (3.16)$$

Nella rappresentazione grafica:

- Risorsa (cerchio): $x_1(t)$
- Uscita del flusso (quadrato): $u_1(t)$

Si può agire su $u_1(t)$ per gestire il flusso d'uscita e su β .

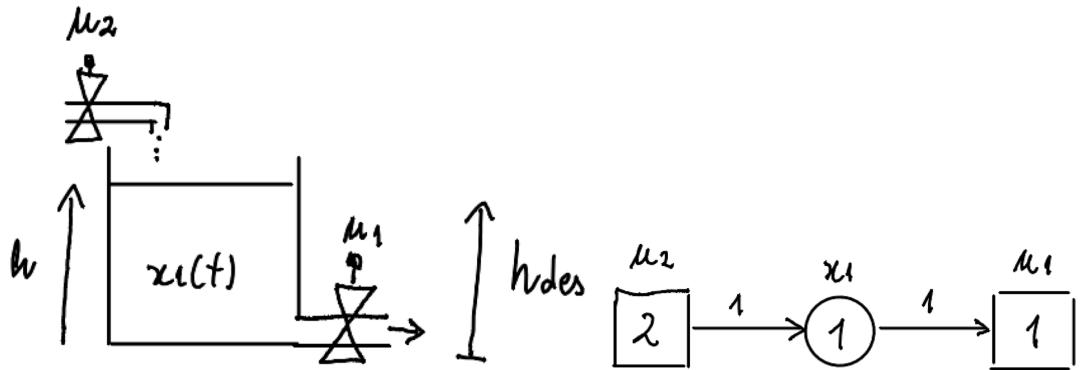
L'equazione di bilancio è:

$$x'_1(t) = -u_1(t) = \beta u(t) \quad (3.17)$$

Assumiamo un valore di β :

$$\beta = [-1] \quad (3.18)$$

3.2.4 Esempio 3: Serbatoio con Controllo dell'Altezza del Liquido



Il serbatoio ha:

- Volume del liquido x_1
- Rubinetto di ingresso u_2
- Rubinetto di uscita u_1

L'equazione di bilancio è:

$$x'_1(t) = u_2(t) - u_1(t) = Ax_1 + \beta u \quad (3.19)$$

$$A = [0] \quad (3.20)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Risultato riga per colonna:

$$\beta = [-1; 1] \quad (3.22)$$

Si vuole controllare h_t , impostando un valore desiderato h_{des} e determinando la causa che porta l'altezza a quel valore.

Definiamo:

$$u(t) := u_2(t) - u_1(t) = k(h_{des} - h(t)) \quad (3.23)$$

Riscriviamo il modello considerando l'errore rispetto al riferimento h_{des} :

$$x'_1(t) = k \cdot (h_{des} - \frac{x_1(t)}{S}) = \frac{k}{S} \cdot (Sh_{des} - x_1(t)) \quad (3.24)$$

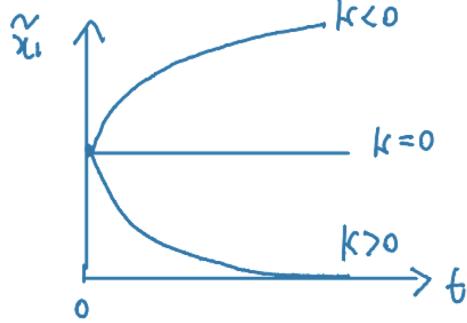
Definiamo l'errore:

$$\tilde{x}_1(t)^{def} := x_1(t) - Sh_{des} \quad (3.25)$$

L'obiettivo è raggiungere $\tilde{x}'_1 = 0$.

$$\tilde{x}'_1(t) = x'_1(t) = \frac{-k}{s} \tilde{x}_1(t) \quad (3.26)$$

$$\tilde{x}_1(t) = \tilde{x}_1(0) \cdot e^{-\frac{k}{s} t} \quad (3.27)$$



Se $k = 0$, nessuna modifica; se $k < 0$, il sistema diventa instabile. **Realizzazione:**

$$u(t) := u_2(t) - u_1(t) = k(h_{des} - h(t)) \quad (3.28)$$

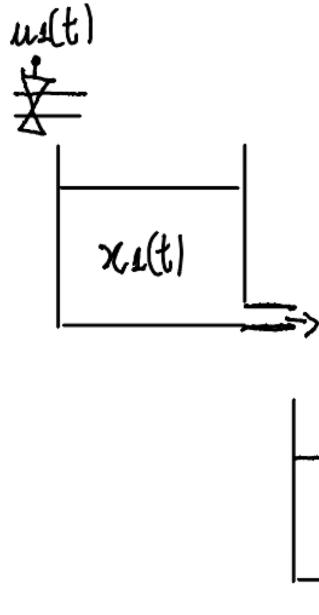
Se $u(t) > 0$:

$$\begin{cases} u_2(t) = u(t) \\ u_1(t) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Se $u(t) < 0$:

$$\begin{cases} u_1(t) = -u(t) \\ u_2(t) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

3.2.5 Esempio 4: Serbatoio in Serie



Si considerano due serbatoi in serie con le seguenti variabili:

- $x_1(t)$: quantità di liquido nel primo serbatoio,
- $x_2(t)$: quantità di liquido nel secondo serbatoio,
- $u_1(t)$: portata in ingresso nel primo serbatoio,
- $u_2(t)$: portata in uscita dal secondo serbatoio.

Le equazioni di bilancio per ciascun serbatoio sono:

$$x'_1(t) = -\alpha_{12}x_1(t) + u_1(t) \quad (3.31)$$

$$x'_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) - u_2(t) \quad (3.32)$$

Se $u_1(t) = 0$, allora il primo serbatoio si svuota con la soluzione:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-\alpha_{12}t} \quad (3.33)$$

La quantità totale di liquido nel sistema è data da:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (3.34)$$

e la sua derivata temporale è:

$$y'(t) = x'_1(t) + x'_2(t) = u_1(t) - u_2(t) \quad (3.35)$$

Se $u_1(t) = u_2(t) = 0$, allora $y'(t) = 0$, il che implica che il volume totale si conserva.

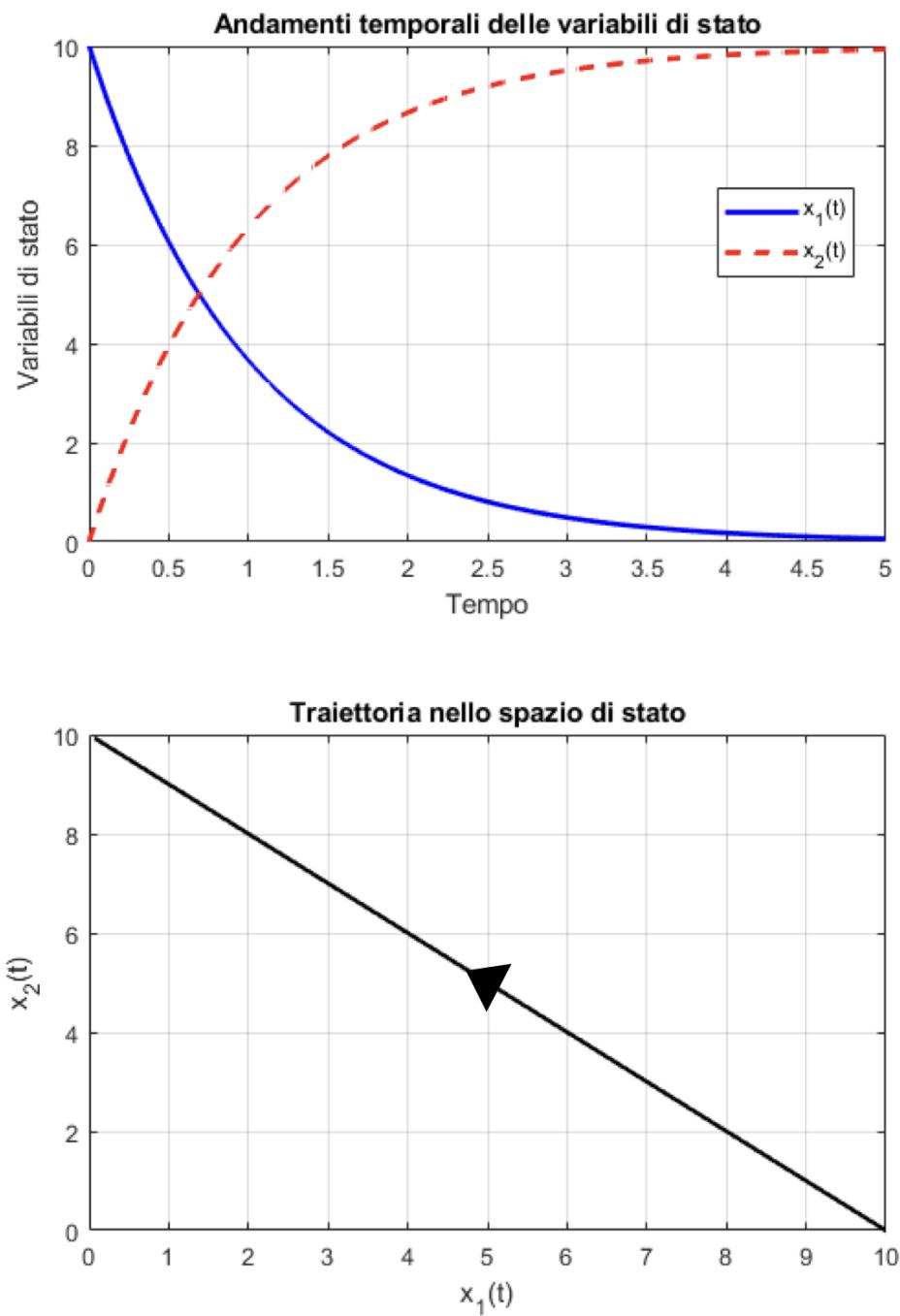


Figura 3.1: Andamenti temporali delle variabili di stato

3.2.6 Forma Matriciale del Sistema

Definiamo i vettori di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

La dinamica del sistema può essere espressa in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Dove:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Il sistema si può quindi scrivere in forma compatta come:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.39)$$

L'uscita è definita come la somma delle quantità di liquido nei due serbatoi:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.40)$$

Derivando rispetto al tempo:

$$y'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} (Ax(t) + Bu(t)) \quad (3.41)$$

Se $u(t) = 0$, ovvero con entrambi i rubinetti chiusi, si ha:

$$y'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} Ax(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) = 0 \quad (3.42)$$

Ciò significa che il volume totale del liquido si conserva.

3.2.7 Autovalori e Autovettori

Per determinare gli autovalori, consideriamo l'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (3.43)$$

Calcoliamo:

$$\det \begin{bmatrix} -\alpha_{12} - \lambda & 0 \\ \alpha_{12} & -\lambda \end{bmatrix} = (-\alpha_{12} - \lambda)(-\lambda) - (0)(\alpha_{12}) = \lambda(\alpha_{12} + \lambda) = 0 \quad (3.44)$$

Gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\alpha_{12} \quad (3.45)$$

L'autovettore destro associato a $\lambda_1 = 0$ è ottenuto risolvendo $Av = 0v$, cioè:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Questo porta a:

$$-\alpha_{12}v_1 = 0, \quad \alpha_{12}v_1 = 0 \quad (3.47)$$

Da cui $v_1 = 1, v_2 = 1$, quindi:

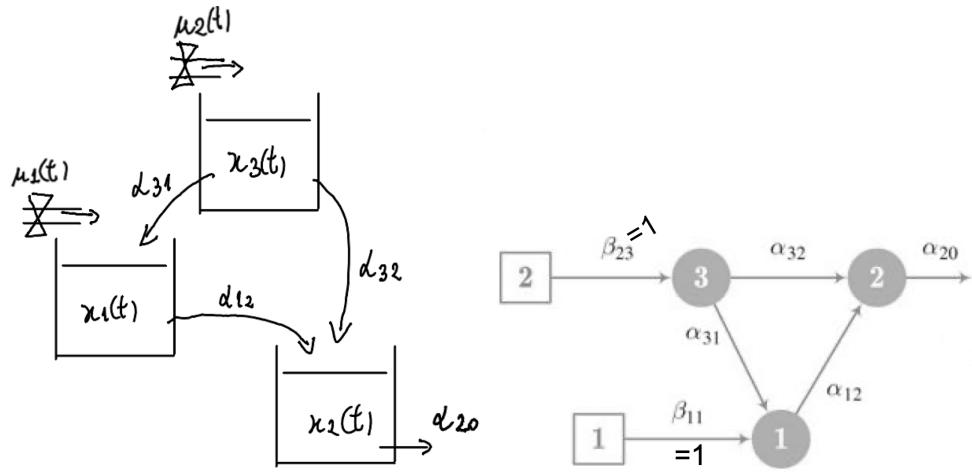
$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

L'autovettore sinistro si ottiene risolvendo $I^T A = 0I^T$, ovvero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Quindi l'autovalore sinistro corrispondente è $\lambda = 0$.

3.2.8 Esempio 5: Serbatoi Interconnessi



Si considerano tre serbatoi interconnessi con le seguenti variabili:

- $x_1(t)$: quantità di liquido nel primo serbatoio,
- $x_2(t)$: quantità di liquido nel secondo serbatoio,
- $x_3(t)$: quantità di liquido nel terzo serbatoio,
- $u_1(t)$: portata in ingresso nel serbatoio x_3 ,
- $u_2(t)$: portata in ingresso nel serbatoio x_3 .

Le equazioni di bilancio per ciascun serbatoio sono:

$$x'_1(t) = -\alpha_{12}x_1(t) + \alpha_{31}x_3(t) + u_1(t) \quad (3.50)$$

$$x'_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{20}x_2(t) + \alpha_{32}x_3(t) \quad (3.51)$$

$$x'_3(t) = -\alpha_{32}x_3(t) - \alpha_{31}x_3(t) + u_2(t) \quad (3.52)$$

La dinamica del sistema in forma vettoriale è:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.53)$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & -\alpha_{20} & \alpha_{32} \\ 0 & 0 & -(\alpha_{32} + \alpha_{31}) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Si nota che le righe della matrice A corrispondono alle equazioni di bilancio di ciascun serbatoio, con i termini positivi che rappresentano le entrate di liquido e i termini negativi che rappresentano le uscite.

Il vettore di ingresso è descritto da:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

con le variabili d'ingresso disposte come:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

3.2.9 Conservazione del Volume

Se sommiamo le equazioni di stato lungo le righe di A , otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{20} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Se imponiamo:

$$\begin{cases} u_1(t) = 0 \\ u_2(t) = 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

e $\alpha_{20} = 0$, allora il sistema conserva il volume totale, poiché $y'(t) = 0$ implica che $y(t)$ rimane costante.

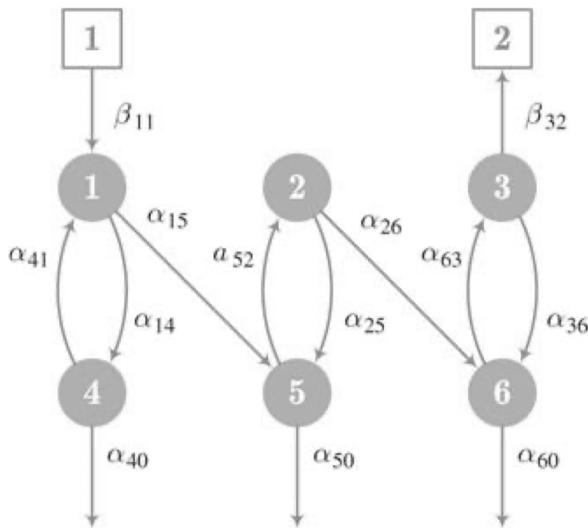
3.2.10 Interpretazione dei Termini

- I termini con segno positivo (+) nelle equazioni rappresentano le portate entranti nel serbatoio considerato.
- I termini con segno negativo (-) rappresentano le portate uscenti dal serbatoio.

Questa formulazione permette di modellare il comportamento del sistema e analizzare la sua evoluzione dinamica.

3.3 Esempi: Modelli di Flusso nel Parco Macchine e nel Traffico Automobilistico

3.3.1 Esempio: Parco Macchine



Si considerano i seguenti compartimenti per il parco macchine:

- x_1 : auto con chilometraggio $[0, 10000]$,
- x_2 : auto con chilometraggio $[10000, 20000]$,
- x_3 : auto con chilometraggio $[20000, +\infty]$,
- x_4 : auto in riparazione con chilometraggio $[0, 10000]$,
- x_5 : auto in riparazione con chilometraggio $[10000, 20000]$,
- x_6 : auto in riparazione con chilometraggio $[20000, +\infty]$.

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|-------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| \dot{x}_1 | $-\alpha_{15}$ $-\alpha_{14}$ | 0 | 0 | α_{41} | 0 | 0 |
| \dot{x}_2 | 0 | $-\alpha_{25}$ $-\alpha_{26}$ | 0 | 0 | α_{52} | 0 |
| \dot{x}_3 | 0 | 0 | $-\alpha_{36}$ | 0 | 0 | α_{63} |
| \dot{x}_4 | $+\alpha_{14}$ | 0 | 0 | $-\alpha_{41}$ $-\alpha_{40}$ | 0 | 0 |
| \dot{x}_5 | $+\alpha_{15}$ | $+\alpha_{25}$ | 0 | 0 | $-\alpha_{52}$ $-\alpha_{50}$ | 0 |
| \dot{x}_6 | 0 | $+\alpha_{26}$ | $+\alpha_{36}$ | 0 | 0 | $-\alpha_{63}$ $-\alpha_{60}$ |

$$= A \quad = B$$

Le variabili di controllo sono:

- $u_1(t)$: acquisto di nuove auto,
- $u_2(t)$: vendita di auto.

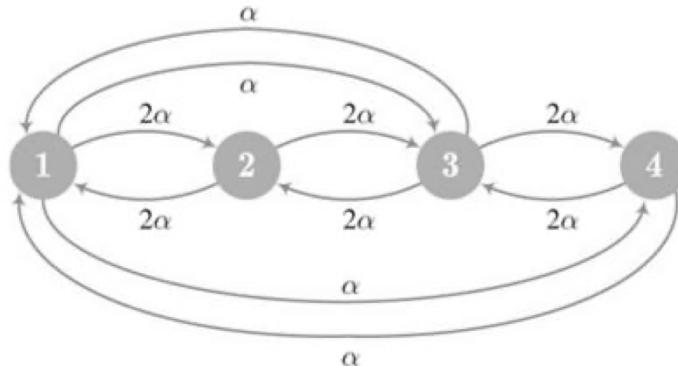
Il sistema dinamico è descritto da:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.59)$$

dove le matrici A e B sono costruite in modo tale che:

- La somma delle colonne della matrice A è zero, il che implica la conservazione del numero totale di veicoli nel sistema.
- Gli elementi diagonali di A sono negativi, mentre gli altri elementi sono positivi, rispettando il flusso naturale dei veicoli tra i compartimenti.

3.3.2 Esempio: Traffico Automobilistico



Consideriamo 4 città, identificate con i cerchi 1, 2, 3, 4. Le variabili di stato

$$x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$$

rappresentano il numero di veicoli in ciascuna città, mentre α indica il flusso continuo di automobili (approssimato come variabile continua).

3.3.3 Modellazione del Sistema

Il modello differenziale per la città 1 è dato da:

$$x'_1(t) = \alpha x_3(t) + \alpha x_4(t) + 2\alpha x_2(t) - 4\alpha x_1(t) = \alpha [x_3(t) + x_4(t) + 2x_2(t) - 4x_1(t)].$$

Analogamente si possono scrivere le equazioni per le altre città:

$$x'_2(t) = \dots,$$

$$x'_3(t) = \dots,$$

$$x'_4(t) = \dots.$$

Definendo il vettore di stato

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix},$$

il sistema compatto si scrive:

$$\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t),$$

con la matrice

$$A = \alpha \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

quindi avremo:

$$\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t) = \alpha \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3.60)$$

Osservazioni sulla Matrice A

- Somma delle colonne e delle righe:** Le colonne (e le righe) di A sono tali che, sommando gli elementi, si ottiene zero. Questo rappresenta la conservazione della risorsa (il numero totale di veicoli rimane costante).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Simmetria:** La matrice A è simmetrica, ovvero $A = A^T$. Questa simmetria implica che gli autovettori destri e sinistri coincidano.

- Equilibrio:** Dalla condizione

$$AI = 0, \quad \text{con } I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si deduce che esiste un punto di equilibrio candidato:

$$\bar{x} = \beta I = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix},$$

poiché

$$A\bar{x} = \beta AI = 0.$$

Questo significa che se in ogni città il numero di veicoli è uguale, il sistema è in equilibrio.

3.3.4 Caso A: Sistema Iniziale (Strade Aperte)

All'istante iniziale, scegliamo ad esempio:

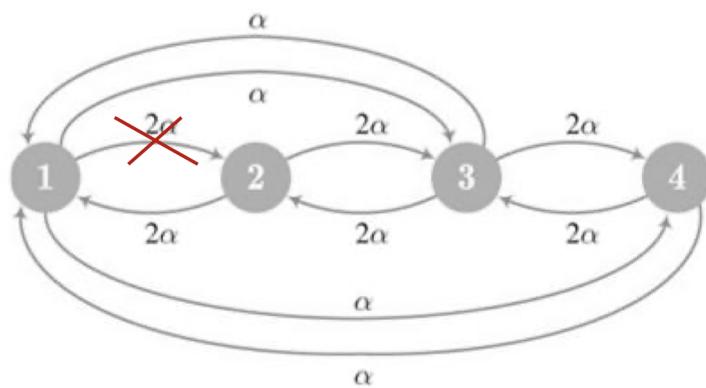
$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo che si ha l'equilibrio:

$$Ax(0) = 0.25 A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, il flusso entrante e uscente per ciascuna città è bilanciato e il sistema rimane in equilibrio.

3.3.5 Caso B: Post Chiusura della Strada da Città 1 a Città 2



Supponiamo che, in un certo istante t^* , a causa di lavori di manutenzione, venga chiusa la strada tra la città 1 e la città 2. La matrice A viene modificata in:

$$A = \alpha \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- **Nota:** Prima la matrice era simmetrica (cioè $A = A^T$), mentre dopo la chiusura della strada non lo è più, poiché gli elementi fuori diagonale non sono più uguali.
- **Conservazione dei flussi:** Per ogni città si deve comunque mantenere il bilancio dei flussi entranti e uscenti, cioè deve valere la condizione $Ax = 0$ per un punto di equilibrio.

Determiniamo il nuovo punto di equilibrio imponendo:

$$Ax = 0,$$

con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Le equazioni derivanti sono:

- a) $-2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
- b) $-4x_2 + 2x_3 = 0,$
- c) $x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0,$
- d) $x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0.$

3.3.6 Passaggi per il Calcolo

1. Dall'equazione (b):

$$-4x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_2.$$

2. Scegliamo un valore per x_2 , ad esempio $x_2 = 1$, da cui

$$x_3 = 2.$$

3. Sostituiamo $x_3 = 2$ nelle equazioni (a), (c) e (d).

- Dall'equazione (a):

$$-2x_1 + 2 \cdot 1 + 2 + x_4 = 0 \Rightarrow -2x_1 + 4 + x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 2x_1 - 4.$$

- Dall'equazione (d):

$$x_1 + 2 \cdot 2 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + 4 - 3x_4 = 0.$$

Sostituendo il valore di x_4 :

$$x_1 + 4 - 3(2x_1 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 + 4 - 6x_1 + 12 = 0,$$

$$-5x_1 + 16 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{16}{5}.$$

- Quindi, dall'espressione per x_4 :

$$x_4 = 2 \cdot \frac{16}{5} - 4 = \frac{32}{5} - 4 = \frac{32 - 20}{5} = \frac{12}{5}.$$

- Per completezza, verifichiamo l'equazione (c):

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = \frac{16}{5} + 2 - 10 + 2 \cdot \frac{12}{5} = \frac{16}{5} + 2 - 10 + \frac{24}{5}.$$

Convertendo $2 - 10 = -8$ in frazione con denominatore 5:

$$\frac{16}{5} + \frac{24}{5} - \frac{40}{5} = \frac{0}{5} = 0.$$

Quindi l'equazione è verificata.

4. In sintesi il punto di equilibrio risulta:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ 1 \\ 2 \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

5. Se si desidera normalizzare il vettore (ad esempio per far sì che la somma degli elementi sia 1), si calcola:

$$\text{somma} = 16 + 5 + 10 + 12 = 43,$$

ottenendo il vettore normalizzato:

$$\bar{x}_{\text{nor}} = \frac{1}{43} \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

3.3.7 Riepilogo e Commenti Finali

- Nel modello originale la matrice A è simmetrica e la condizione $Ax = 0$ per $x = \beta I$ (con $I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) garantisce che se ogni città ha lo stesso numero di veicoli, il sistema è in equilibrio.
- Dopo la chiusura della strada tra la città 1 e la città 2, la matrice non è più simmetrica. Tuttavia, imponendo nuovamente $Ax = 0$, si ricava un nuovo punto di equilibrio, che risulta diverso dal caso omogeneo.
- Il procedimento rispetta il principio della conservazione della risorsa (il totale dei veicoli rimane invariato) e l'equilibrio viene determinato imponendo che in ogni città i flussi entranti e uscenti si bilancino.

3.3.8 Punti di Equilibrio di un Sistema Dinamico

Consideriamo un sistema dinamico lineare con ingresso, descritto dall'equazione:

$$x'(t) = A x(t) + B u(t).$$

Un punto di equilibrio \bar{x} (con ingresso costante \bar{u}) è tale che, se

$$x(t) = \bar{x} \quad \text{e} \quad u(t) = \bar{u} \quad \forall t \geq 0,$$

allora la derivata temporale dello stato è nulla, ovvero:

$$x'(t) = 0.$$

3.3.9 Definizione del Punto di Equilibrio

Per definizione, imponendo le costanti si ha:

$$\begin{cases} x'(t) = A x(t) + B u(t) & (\text{sistema dinamico}) \\ x(t) = \bar{x} & (\text{stato costante}, x'(t) = 0) \\ u(t) = \bar{u} & (\text{ingresso costante}) \end{cases}$$

Pertanto, sostituendo si ottiene l'equazione:

$$0 = A \bar{x} + B \bar{u}.$$

Questa equazione caratterizza il punto di equilibrio del sistema.

3.3.10 Osservazioni

- **Caso in cui A sia invertibile:** Se la matrice A è invertibile, allora possiamo risolvere esplicitamente per \bar{x} :

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}.$$

In questo caso, dato un ingresso costante \bar{u} , il punto di equilibrio è unico.

- **Sistema autonomo:** Se il sistema è autonomo (cioè non sono presenti ingressi esplicativi), l'equazione diventa:

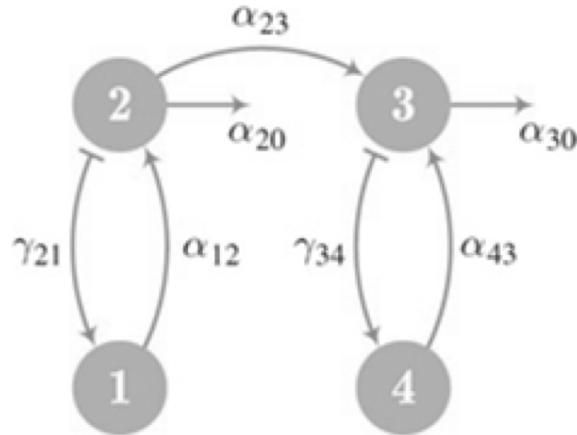
$$x'(t) = A x(t),$$

e i punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione:

$$A \bar{x} = 0.$$

Quindi, il set dei punti di equilibrio è dato dal nucleo (kernel) di A :

$$\{\bar{x} \mid A \bar{x} = 0\} = \ker A.$$



3.3.11 Esempio: Emigrazione Italiana

Il modello dinamico è dato dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= -\alpha_{12} x_1(t) + \gamma_{21} x_2(t), \\ x'_2(t) &= \alpha_{12} x_1(t) - (\alpha_{20} + \alpha_{23}) x_2(t), \\ x'_3(t) &= \alpha_{23} x_2(t) - \alpha_{30} x_3(t) + \alpha_{43} x_4(t), \\ x'_4(t) &= \gamma_{34} x_3(t) - \alpha_{43} x_4(t). \end{aligned}$$

3.3.12 Rappresentazione Matriciale

Il sistema può essere scritto in forma compatta come:

$$x'(t) = A x(t),$$

dove il vettore di stato è

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix},$$

e la matrice dei coefficienti A è data da:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_{12} & \gamma_{21} & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & -(\alpha_{20} + \alpha_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & -\alpha_{30} & \alpha_{43} \\ 0 & 0 & \gamma_{34} & -\alpha_{43} \end{pmatrix}.$$

3.3.13 Spiegazione del Modello

- Prima equazione:** La variazione della popolazione dei giovani residenti in Italia, $x_1(t)$, è determinata dalla perdita di giovani che, per un certo tasso α_{12} , passano alla categoria degli adulti (o emigrano) e dall'incremento dato dal tasso di natalità γ_{21} proveniente dagli adulti residenti in Italia.

- **Seconda equazione:** La popolazione degli adulti residenti in Italia, $x_2(t)$, aumenta con il contributo dei giovani che diventano adulti (a tasso α_{12}) e diminuisce per la mortalità (tasso α_{20}) e per il trasferimento verso l'estero (tasso α_{23}).
- **Terza equazione:** Gli adulti residenti all'estero, $x_3(t)$, vengono incrementati dal trasferimento degli adulti italiani (tasso α_{23}), mentre diminuiscono per mortalità (tasso α_{30}) e vengono influenzati dal flusso proveniente dai giovani emigrati (tasso α_{43}).
- **Quarta equazione:** La variazione dei giovani residenti all'estero, $x_4(t)$, è determinata dalla natalità all'estero (tasso γ_{34} , proveniente dagli adulti emigrati) e da una diminuzione per un eventuale trasferimento o mortalità (tasso α_{43}).

3.3.14 Considerazioni Finali

Il modello evidenzia come i flussi tra le diverse categorie (giovani/adulti e residenti in Italia/all'estero) siano governati da tassi di trasferimento, natalità e mortalità. La rappresentazione matriciale permette di analizzare il sistema in maniera compatta, e di studiarne la dinamica e l'evoluzione nel tempo attraverso metodi analitici e numerici.

Capitolo 4

Modelli di Flusso Discreto (Modelli di Decisione "istanti privilegiati")

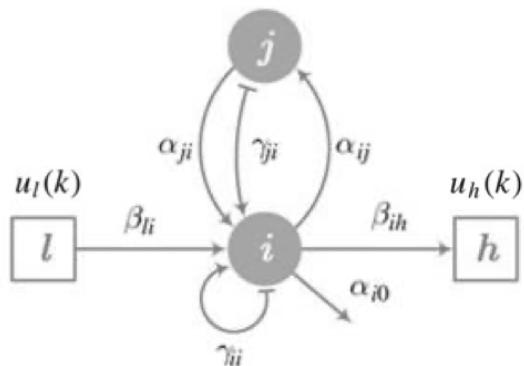
4.0.1 Differenza dai modelli di flusso continuo

- Tutto è in funzione della variabile discreta k .
- Non siamo più in un contesto a tempo continuo, ma consideriamo differenze di risorse in istanti discreti.
- Non abbiamo più una derivata, bensì una differenza tra la quantità di risorsa all'istante $k + 1$ e quella all'istante precedente k .
- Nel caso di flusso continuo, utilizzavamo un'equazione differenziale.

4.1 Modelli di Trasferimento di Risorse a Tempo Discreto

Modelli di Decisione

4.1.1 Equazioni del modello a tempo discreto



Risorsa in entrata nel compartimento i :

$$q_i^{\text{in}}(k) = \sum_{l=1}^p \beta_{li} u_l(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\alpha_{ji} + \gamma_{ji}) x_j(k) + \gamma_{ii} x_i(k) \quad (4.1)$$

Risorsa in uscita dal compartimento i :

$$q_i^{\text{out}}(k) = \sum_{h=1}^p \beta_{ih} u_h(k) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij} x_i(k) \quad (4.2)$$

Variazione della risorsa nel compartimento i :

$$x_i(k+1) - x_i(k) = q_i^{\text{in}}(k) - q_i^{\text{out}}(k) = \quad (4.3)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\alpha_{ji} + \gamma_{ji}) x_j(k) + \gamma_{ii} x_i(k) - \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} x_i(k) + \sum_{l=1}^p \beta_{li} u_l(k) - \sum_{h=1}^p \beta_{ih} u_h(k) \quad (4.4)$$

Dove α rappresenta la **frazione di risorsa trasferita** da un compartimento all'altro.

4.1.2 Forma matriciale del modello

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.5)$$

Costruzione delle matrici:

- $A \rightarrow$ si definisce come:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} + \gamma_{ji}, \quad \text{e} \quad \alpha_{ii} = 1 + \gamma_{ii} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij} \quad (4.6)$$

- $B \rightarrow$ può essere costruita in due modi a seconda delle convenzioni sui segni:

$$\beta_{il} = \beta_{li} \quad \text{oppure} \quad \beta_{ih} = -\beta_{ih} \quad (4.7)$$

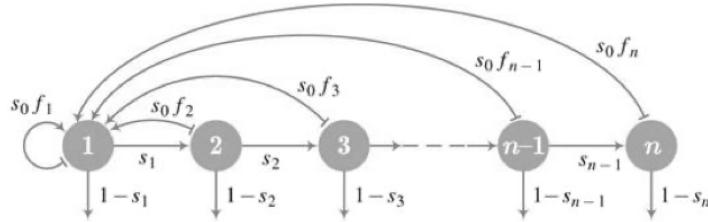
Modello di Leslie: Dinamica della popolazione a tempo discreto

Il modello di Leslie descrive la dinamica di una popolazione suddivisa per classi di età, con aggiornamento a istanti discreti e con struttura a compartimenti.

4.1.3 Evoluzione dinamica del sistema

- Assegno le condizioni iniziali: $x(0), u(0)$
- Calcolo successivo degli stati:

$$\begin{aligned}x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\&\vdots\end{aligned}$$



4.1.4 Descrizione dei compartimenti

La popolazione può essere rappresentata come numero di individui (maschi, femmine o coppie).

- $x_1(k)$: popolazione di età $[0, T[$ all'istante k
- $x_2(k)$: popolazione di età $[T, 2T[$ all'istante k
- \dots
- $x_n(k)$: popolazione di età $[(n-1)T, +\infty[$ all'istante k

4.1.5 Parametri

- s_i : tasso di sopravvivenza tra la classe i e la successiva.
- s_0 : tasso di sopravvivenza alla nascita.
- f_i : tasso di fertilità della classe i .

Strutture d'età ed equilibrio

- $x(k)$: vettore di stato al tempo k

$$\bullet \quad x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

- $N(k) = x_1(k) + \dots + x_n(k)$: popolazione totale
- $S_i(k) = \frac{x_i(k)}{N(k)}$: frazione di individui della classe i
- $S(k) = \frac{x(k)}{N(k)}$: struttura d'età della popolazione

Osservazione: $x(k)$ può crescere o calare nel tempo, ma $S(k)$ tende ad assumere una struttura stabile (struttura d'equilibrio).

4.1.6 Dinamica per classi

- Per $i = 1$ (riproduzione):

$$x_1(k+1) = s_0 [f_1 x_1(k) + f_2 x_2(k) + \dots + f_n x_n(k)]$$

- Per $1 < i < n$:

$$x_i(k+1) = s_{i-1} x_{i-1}(k)$$

- Per $i = n$ (ultima classe):

$$x_n(k+1) = s_{n-1} x_{n-1}(k) + s_n x_n(k)$$

4.1.7 Forma matriciale

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Dove A è la **matrice di Leslie**:

$$A = \begin{bmatrix} s_0 f_1 & s_0 f_2 & \dots & s_0 f_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

4.1.8 Tasso netto di riproduzione

Il tasso netto di riproduzione R è definito come:

$$R = s_0 f_1 + s_0 s_1 f_2 + \dots + s_0 s_1 \dots s_{n-2} f_{n-1} + s_0 s_1 \dots s_{n-1} f_n (1 + s_n + s_n^2 + \dots)$$

- Se $R > 1$, la popolazione cresce.
- Se $R < 1$, la popolazione tende all'estinzione.
- Se $R = 1$, la popolazione è stazionaria.

4.1.9 Equilibrio della struttura d'età

Se la popolazione ha una struttura d'età costante nel tempo:

$$x(k) = N(k)S_{eq}, \quad \text{allora} \quad x(k+1) = N(k+1)S_{eq}$$

Sostituendo nella dinamica:

$$x(k+1) = Ax(k) \Rightarrow N(k+1)S_{eq} = AN(k)S_{eq}$$

Dividendo entrambi i membri per $N(k)$:

$$AS_{eq} = \frac{N(k+1)}{N(k)} S_{eq}$$

Quindi:

- $\lambda = \frac{N(k+1)}{N(k)}$ è un autovalore di A
- S_{eq} è un autovettore di A (può essere dimostrato che è unico con tutte le componenti positive)

4.1.10 Interpretazione dell'autovalore λ

- $\lambda = 1$: popolazione costante
- $\lambda > 1$: popolazione in crescita
- $\lambda < 1$: popolazione in calo

Nota sull'equilibrio: la numerosità delle classi può cambiare, ma la struttura d'età può rimanere invariata. Ciò rappresenta una situazione di equilibrio dinamico.

4.1.11 Osservazione finale: anomalia nella struttura

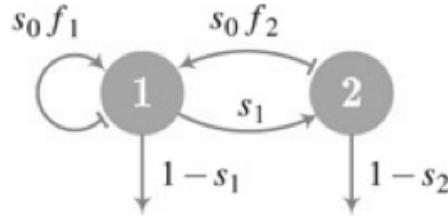
Se in una situazione di equilibrio, una classe di età avanzata ha una numerosità maggiore rispetto a una classe più giovane, si verifica:

$$1 < \frac{s_i}{\lambda}$$

In particolare, ciò implica che la natalità è inferiore a 1 e quindi la popolazione tenderà a decrescere esponenzialmente.

Esempi applicativi

4.1.12 Esempio: Popolazione di conigli (modello di Fibonacci)



Ipotesi: struttura di equilibrio stabile.

- $x_1(k)$: numero di coppie di conigli giovani (primo mese)
- $x_2(k)$: numero di coppie di conigli adulti
- I conigli non muoiono entro un anno.

Parametri del modello:

$$s_0 f_1 = 0, \quad s_0 f_2 = 1, \quad s_1 = s_2 = 1$$

Equazioni del modello:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) \end{aligned}$$

Forma matriciale:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Condizioni iniziali:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(1) = Ax(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(2) = Ax(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \dots$$

Popolazione totale:

$$N(k) = x_1(k) + x_2(k)$$

Evoluzione: vogliamo scrivere $N(k+2)$:

$$N(k+2) = N(k+1) + x_1(k) + x_2(k) = N(k+1) + N(k)$$

(si ottiene la successione di Fibonacci).

Struttura d'età di equilibrio: autovettore di A :

$$S(k) = \begin{bmatrix} S_1(k) \\ S_2(k) \end{bmatrix} \rightarrow S_{eq} = \begin{bmatrix} S_{eq,1} \\ S_{eq,2} \end{bmatrix}$$

Autovalori di A :

$$\det \begin{pmatrix} z & -1 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix} = z(z-1) - 1 = z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Scegliamo l'autovalore positivo (sezione aurea):

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

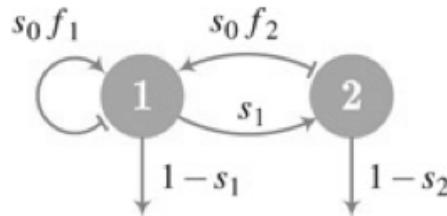
Autovettore: risolviamo $(\lambda I - A)S_{eq} = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{eq,1} \\ S_{eq,2} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow S_{eq,1} + S_{eq,2} = 1$$

Risolvendo:

$$S_{eq} = \begin{bmatrix} 0.382 \\ 0.618 \end{bmatrix} \quad (\text{Struttura d'età di equilibrio})$$

4.1.13 Esempio: Salmoni – struttura di equilibrio instabile



- $x_1(k)$: salmoni giovani (tutti diventano adulti)
- $x_2(k)$: salmoni adulti (possono generare nuovi nati)

Parametri:

$$s_0 f_1 = 0, \quad s_0 f_2 = 1.4, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 0$$

Equazioni dinamiche:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= ax_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \end{aligned}$$

Matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Evoluzione iniziale (con $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$):

$$\begin{aligned} x(1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ x(2) &= \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x(3) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4 \end{bmatrix} \\ x(4) &= \begin{bmatrix} 1.4^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \end{aligned}$$

Osservazione: la numerosità delle classi oscilla, risultando nulla in modo alternato nel tempo.

Autovalori:

$$\det(zI - A) = \det \begin{bmatrix} z & -a \\ -1 & z \end{bmatrix} = z^2 - a = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{a}$$

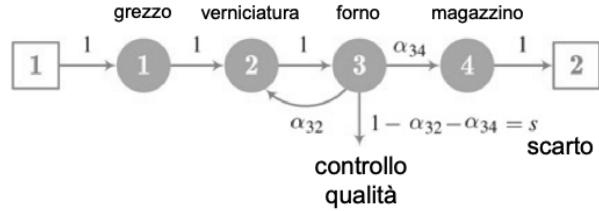
Autovettore per $\lambda = \sqrt{a}$:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a} & -a \\ -1 & \sqrt{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{eq,1} \\ S_{eq,2} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow S_{eq,1} = \sqrt{a}S_{eq,2}$$

Ponendo $S_{eq,1} + S_{eq,2} = 1$:

$$S_{eq} = \begin{bmatrix} 0.542 \\ 0.458 \end{bmatrix} \quad (\text{Struttura d'età di equilibrio})$$

4.1.14 Esempio: Catena di produzione industriale



- $x_1(k)$: numero di pezzi grezzi
- $x_2(k)$: numero di pezzi verniciati
- $x_3(k)$: numero di pezzi essiccati
- $x_4(k)$: numero di pezzi confezionati in magazzino

Variabili esterne:

- $u_1(k)$: numero di pezzi non lavorati
- $u_2(k)$: numero di pezzi completati e venduti

Equazioni di stato:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= u_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + \alpha_{32}x_3(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k) \quad (\text{dopo semplificazioni}) \\ x_4(k+1) &= -u_2(k) + \alpha_{34}x_3(k) \end{aligned}$$

Forma compatta:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Matrice A (dipendenze tra stati):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice B (influenza dei controlli esterni):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Osservazione: Si può porre $u_2(k) = 0$ se si vuole modellare il caso in cui i pezzi prodotti restano sempre in magazzino e non vengono venduti.

Capitolo 5

Modelli di transizione tra stati

5.0.1 Differenza dai modelli precedenti

In questo tipo di modelli, gli **stati** sono caratterizzati da un insieme finito di **attributi** o **qualità**. Si tratta quindi di sistemi dinamici in cui le variabili possono assumere solo un numero finito di valori.

- Ogni valore rappresenta un attributo o una qualità.
- La cardinalità del set di attributi è finita.

Esempi

Previsioni del meteo:

Gli stati possono assumere uno tra tre possibili valori: *sole*, *nuvoloso*, *pioggia*.

Attesa alla posta:

Gli stati rappresentano il numero di persone in coda: *nessuno in coda*, *una persona in coda*, *due persone*, ..., *n persone in coda*.

5.0.2 Tempo discreto

Il sistema evolve nel tempo secondo passi discreti, indicati da una variabile indipendente k (ad esempio, il numero di giorni trascorsi).

- Ogni stato può essere descritto da un valore compreso tra 0 e 1, che rappresenta una **probabilità**.
- Esempio: nello stato 1, vogliamo sapere quanto è probabile che oggi ci sia il sole.
- Lo **stato** rappresenta la probabilità che si verifichi un certo attributo (ad esempio, “c’è il sole”).

Domanda: Se oggi c’è il sole, qual è la probabilità che anche domani ($k + 1$) ci sia il sole?

Questa probabilità si valuta in funzione di k , cioè del tempo discreto (numero di giorni trascorsi).

5.0.3 Definizioni

- $x_1(k)$: probabilità di avere l’attributo 1 (es. “sole”) al tempo k .
- In questo modello formale non ipotizziamo la presenza di variabili indipendenti esterne: si tratta di un **sistema isolato**, senza ingressi né uscite.

Esempio: compartimento 1 = “bella giornata”

Il numero associato al compartimento 1 è la probabilità che ci sia il sole.

5.0.4 Modello formale

$$k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x_i(k) \leq 1$$

$x_1(k)$ = probabilità di essere nell’attributo 1 (cioè possedere il primo attributo dopo k passi)

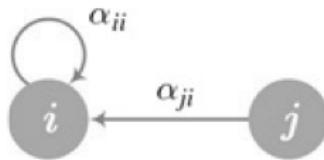
$x_i(k)$ = probabilità di essere nell’attributo i -esimo

$x_n(k)$ = probabilità di essere nell’attributo n -esimo

- Il modello permette di studiare la **dinamica delle probabilità**, cioè come evolvono nel tempo.
- In generale, non sono presenti variabili indipendenti (cioè non ci sono ingressi né uscite esterne al sistema).

5.1 Grafo di transizione e modello di Markov

5.1.1 Catena di Markov



In una catena di Markov, il sistema non può trovarsi in una situazione ambigua: deve sempre essere in uno stato preciso. L’evoluzione del sistema avviene per transizione da uno stato a un altro secondo probabilità assegnate.

Probabilità di transizione

Vogliamo rispondere alla seguente domanda:

Qual è la probabilità di trovarsi nello stato i al passo $k + 1$?

Se conosciamo la probabilità di trovarsi nello stato j al tempo k , e la probabilità di passare da j a i , possiamo scrivere:

$$x_i(k+1) = \alpha_{ji}x_j(k) + \alpha_{ii}x_i(k)$$

Dove:

- α_{ii} è la probabilità di rimanere nello stato i .
- α_{ji} è la probabilità che, trovandosi nello stato j , avvenga la transizione verso lo stato i .

In modo più generale, considerando il contributo da tutti gli stati:

$$x_i(k+1) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ji} x_j(k) + \alpha_{ii} x_i(k)$$

Questa è la formula generale per l'evoluzione della probabilità di trovarsi nello stato i al tempo $k+1$.

Vincoli sulle probabilità

Affinché il modello sia coerente, valgono i seguenti vincoli:

- Tutte le probabilità α_{ji} devono essere ≥ 0 e ≤ 1 .
- Per ogni colonna della matrice di transizione, la somma degli elementi deve essere uguale a 1.
- La somma delle probabilità degli stati deve sempre essere uguale a 1:

$$\sum_{i=1}^n x_i(k) = 1 \quad \forall k$$

Nota (OSS)

Al tempo $k=0$ si parte con un vettore di probabilità $x(0)$. Ad esempio:

- Lo stato 1 rappresenta “c’è sole”.
- x_1 rappresenta la probabilità che ci sia il sole.

Condizione di conservazione della probabilità

- se $x(0)$ è un vettore di probabilità, allora $x(k)$ lo sia per ogni k . Questo significa che: $x(k+1) = Ax(k)$

dove A è la matrice delle probabilità di transizione. Se vale:

$$\sum_{i=1}^n x_i(0) = 1$$

allora deve valere anche:

$$\sum_{i=1}^n x_i(k) = 1 \quad \forall k$$

Scrittura compatta con vettore somma Π

Definiamo il vettore colonna:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{allora} \quad \Pi^T x(0) = 1$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = 1$$

Vogliamo che ciò implichii:

$$\Pi^T x(k) = 1 \quad \forall k$$

- Vincolo fondamentale sulla matrice A :

$$\Pi^T x(k+1) = \Pi^T A x(k)$$

cioè:

$$\Pi^T A = \Pi^T \Rightarrow \text{La somma degli elementi di ogni colonna di } A \text{ deve essere 1.}$$

- Verifica esplicita della conservazione della probabilità

Eseguiamo ora alcune verifiche concrete. Supponiamo di essere con certezza nello stato 1 all'istante 0:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Pi^T A x(0) = 1$$

Oppure nello stato 2 all'istante 0:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Pi^T A x(0) = 1$$

E così via. In generale, vogliamo verificare che qualunque vettore $x(0)$ di probabilità rispetti:

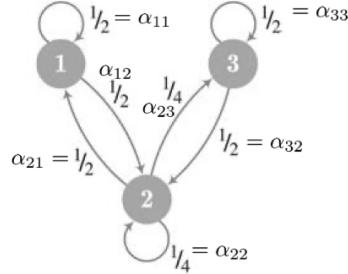
$$\Pi^T A x(0) = 1$$

Conclusione

- Ogni colonna della matrice A deve sommare a 1 per garantire che la somma delle probabilità rimanga costante nel tempo.
- Questa è una condizione fondamentale per la validità del modello: se non è soddisfatta, il modello non è corretto.

5.2 Esempi applicativi

5.2.1 Esempio: previsioni meteo



Consideriamo una catena di Markov con tre stati, che rappresentano le condizioni meteorologiche in un dato giorno:

- $x_1(k)$: probabilità che al giorno k ci sia **sole**,
- $x_2(k)$: probabilità che al giorno k sia **nuvoloso**,
- $x_3(k)$: probabilità che al giorno k **piova**.

Matrice di transizione

Definiamo la matrice delle probabilità di transizione A , dove α_{ij} rappresenta la probabilità di transizione dallo stato j allo stato i .

Nota: in questo esempio si assume $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, ossia simmetria della matrice (non sempre vero nei modelli reali, ma utile a fini didattici).

Vincolo fondamentale: La somma degli elementi di ciascuna colonna della matrice A deve essere uguale a 1, e tutti gli elementi devono essere ≥ 0 .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = \alpha_{11} & a_{12} = \alpha_{21} & a_{13} = \alpha_{31} \\ a_{21} = \alpha_{12} & a_{22} = \alpha_{22} & a_{23} = \alpha_{32} \\ a_{31} = \alpha_{13} & a_{32} = \alpha_{23} & a_{33} = \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Costruzione per colonne: ogni colonna rappresenta le probabilità di transizione da uno stato agli altri. Ad esempio, la seconda colonna contiene le probabilità di transizione *dal secondo stato* (nuvoloso) agli altri.

Verifica vincoli:

- Tutti gli elementi di A sono ≥ 0 .
- La somma degli elementi di ciascuna colonna è 1.

Evoluzione temporale del sistema

Ipotesi iniziale: oggi è una giornata di sole $\Rightarrow x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Al tempo $k = 0$:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al tempo $k = 1$:

$$x(1) = Ax(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al tempo $k = 2$:

$$x(2) = Ax(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Comportamento asintotico

Osservazione: sotto certe condizioni (come la regolarità della matrice A), la successione $x(0), x(1), x(2), \dots$ converge a un vettore di equilibrio:

$$x(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_{eq} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Questo vettore limite **non dipende dalla condizione iniziale $x(0)$!**

Definizione di equilibrio stazionario

Se esiste un k sufficientemente grande ($k > \bar{k}$) per cui:

$$x(k) \approx x_{eq}$$

allora il vettore x_{eq} è un **autovettore destro** della matrice A associato all'**autovalore** $\lambda = 1$:

$$Ax_{eq} = x_{eq}$$

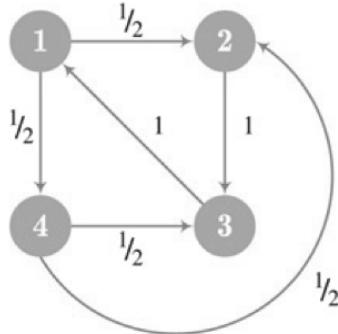
Autovettore sinistro

Analogamente, il vettore somma Π (vettore riga con tutti 1) è un **autovettore sinistro** di A :

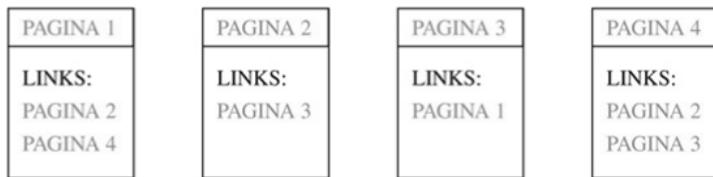
$$\Pi^T A = \Pi^T \quad \text{con} \quad \Pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Pi^T = [1 \ 1 \ 1]$$

Questo riflette la conservazione della probabilità (la somma delle componenti del vettore rimane invariata).

5.2.2 Esempio: ranking di Google



Un utente del web visita continuamente pagine della rete, scegliendo a caso (con la stessa probabilità) uno dei link uscenti da ciascuna pagina che visita. Vogliamo modellare questo comportamento con una catena di Markov.



Stati del sistema

Sono presenti 4 attributi, ognuno corrispondente a una pagina web:

- 1^a pagina
- 2^a pagina
- 3^a pagina
- 4^a pagina

Matrice di transizione iniziale

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ogni colonna della matrice rappresenta la distribuzione delle probabilità di transizione da una pagina (stato) alle altre. Ad esempio, la terza colonna indica che dalla 3^a pagina si va con probabilità 1 alla 1^a.

Osservazioni

- Le pagine più rilevanti sono quelle dove l'utente passa più tempo.
- Iterando la moltiplicazione $x(k+1) = Ax(k)$ si ottiene un vettore x_{eq} verso cui il sistema converge.
- Alternativamente, possiamo calcolare x_{eq} come autovettore destro di A associato all'autovalore $\lambda = 1$.

Criticità del modello

Esiste una problematica: alcune pagine possono non contenere link uscenti, generando una *trappola* in cui il navigatore resta bloccato.

Soluzione: si modifica la matrice introducendo una piccola probabilità $1 - p$ di uscire da qualunque pagina, andando in una qualsiasi delle altre.

$$A_{\text{pert}} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

La nuova matrice “corretta” diventa:

$$A_{\text{vera}} = pA + (1 - p)A_{\text{pert}}$$

Verifica dei vincoli

Dato che la somma degli elementi di ogni colonna di A è 1, si ha:

$$\Pi^T A_{\text{pert}} = \Pi^T$$

$$\Pi^T A_{\text{vera}} = \Pi^T (pA + (1 - p)A_{\text{pert}}) = p\Pi^T A + (1 - p)\Pi^T A_{\text{pert}} = p\Pi^T + (1 - p)\Pi^T = \Pi^T$$

Conclusione: A_{vera} è ancora una matrice di transizione tra stati. Il sistema rispetta la conservazione delle probabilità.

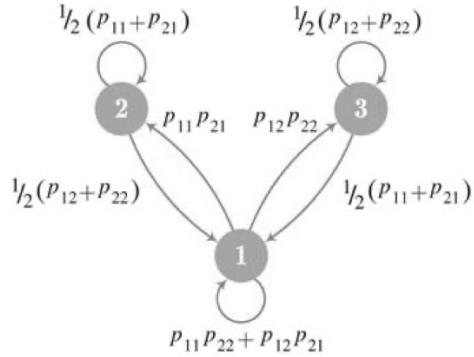
Evoluzione dell’esempio

Supponiamo che inizialmente l’utente si trovi sulla 1^a pagina:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x(1) = Ax(0), \quad x(2) = Ax(1), \quad \dots \quad x(k) \rightarrow x_{eq}$$

Conclusione: il ranking delle pagine nel lungo periodo è descritto dal vettore di equilibrio x_{eq} , che rappresenta le probabilità stazionarie di visita.

5.2.3 Esempio: condivisione di risorse



Descrizione del sistema

Due processori ($i = 1, 2$) possono richiedere l'accesso a due memorie ($j = 1, 2$). Le memorie soddisfano una sola richiesta per volta. Ogni processore effettua la richiesta indipendentemente dall'altro, con probabilità assegnate.

$$p_{11} + p_{12} = 1, \quad p_{21} + p_{22} = 1$$

Definizione degli stati

- $x_1(k)$: probabilità che ciascun processore acceda a una memoria diversa (cioè uno alla memoria 1 e l'altro alla memoria 2).
- $x_2(k)$: probabilità che entrambi i processori richiedano la memoria 1.
- $x_3(k)$: probabilità che entrambi richiedano la memoria 2.

Matrice di transizione

$$A = \begin{bmatrix} p_{11}p_{22} + p_{12}p_{21} & \frac{1}{2}(p_{12} + p_{22}) & \frac{1}{2}(p_{11} + p_{21}) \\ p_{11}p_{21} & \frac{1}{2}(p_{11} + p_{21}) & 0 \\ p_{12}p_{22} & 0 & \frac{1}{2}(p_{12} + p_{22}) \end{bmatrix}$$

Spiegazione delle voci nella matrice:

- La prima riga rappresenta il caso in cui i processori accedano a memorie diverse. - Le altre due righe rappresentano conflitti su memoria 1 o 2. - I termini con coefficienti $\frac{1}{2}$ riflettono il fatto che il sistema può essere visto simmetricamente (es. con divisione uniforme in assenza di priorità).

Finalità del modello

Questo tipo di modello può essere usato per valutare:

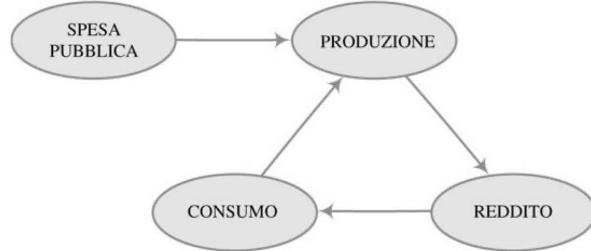
- l'efficienza del sistema nella gestione delle risorse condivise;
- la probabilità che si generino conflitti;
- l'equilibrio a cui si tende nel lungo periodo.

Capitolo 6

Modelli di Influenza per Sistemi Dinamici Causa-Effetto

In questa sezione andiamo a specificare i modelli di influenza per sistemi dinamici governati da azioni di causa-effetto: *qualcosa influenza qualcos'altro*.

6.0.1 Modello Keynesiano



Esempio: Se aumentiamo una produzione (agevolata dalla spesa pubblica) → aumenta il reddito delle persone → si consuma di più → si produce di più, e così via.

6.0.2 Come rappresentare i modelli di influenza

- **Grafi**

- **Tempo discreto**

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} x_j(k) + \sum_{l=1}^p \beta_{li} u_l(k) \quad (6.1)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad a_{ij} = \alpha_{ji} \quad (6.2)$$

- **Tempo continuo**

$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} x_j(t) + \sum_{l=1}^p \beta_{li} u_l(t) \quad (6.3)$$

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad a_{ij} = \alpha_{ji} \quad (6.4)$$

Interpretazione in termini di causa-effetto: come cambierà?

- **Tempo discreto:** cambia lo stato (ossia $x(k) \rightarrow x(k + 1)$).
- **Tempo continuo:** cambia la derivata (cioè la velocità di variazione dello stato: $x'(t)$).

Nota Bene: vedere il grafico nelle slide per la rappresentazione visiva del modello.

Chi influenza lo stato i ?

- una causa indipendente l ;
- lo stato i può influenzare se stesso (anello di retroazione);
- lo stato i può essere influenzato da un altro stato j .

Significato dell'arco nel grafo

Un arco che va da i a j implica che:

i è una causa per j

6.0.3 Esempio: Dinamica delle Opinioni (Tempo Discreto)

Introduzione

Modello per la dinamica delle opinioni che descrive come le opinioni degli individui evolvono nel tempo a seguito di interazioni sociali che determinano uno scambio di opinioni.

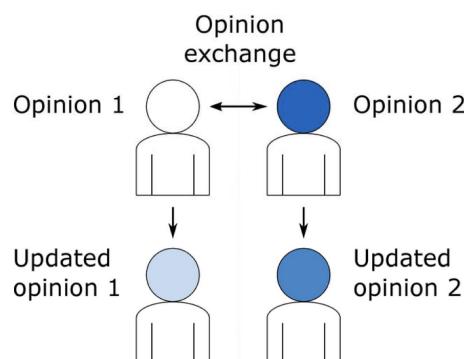
Obiettivo: costruire un modello che descriva come l'opinione degli individui possa variare nel tempo.

Osservazioni preliminari:

- Se ciascuno di noi resta fermo sulla propria idea, l'opinione non cambierà mai.
- Processo tipico:

Iniziamo con un'idea \rightarrow abbiamo uno scambio di opinioni \rightarrow siamo più o meno disposti ad ascoltare le opinioni altrui.

- Se siamo chiusi e isolati, chiaramente la nostra idea non cambierà.



Dinamica delle Opinioni per 2 individui

Definiamo:

- $x_1(k)$: opinione della persona 1 al tempo k
- $x_2(k)$: opinione della persona 2 al tempo k

Modello più semplice di scambio di opinioni: ciascun individuo aggiorna la propria opinione come media pesata tra la propria opinione e quella dell'altro.

- Se una persona è molto ferma nella propria opinione, il peso maggiore andrà alla sua opinione.
- Se una persona è volubile, darà più peso all'opinione altrui.

$$x_1(k+1) = \alpha_{11}x_1(k) + \alpha_{21}x_2(k)$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} = 1$$

$$\alpha_{11} = (1 - p)$$

$$\alpha_{21} = p$$

$$0 \leq p \leq 0.5 \quad (\text{per evitare cambiamenti troppo drastici o irremovibilità})$$

La stessa cosa vale per il secondo individuo:

$$x_2(k+1) = \alpha_{12}x_1(k) + \alpha_{22}x_2(k) \quad (6.5)$$

Dinamica delle Opinioni per n individui

Generalizziamo il modello per un numero n di individui.

- $x_i(k)$: opinione dell'individuo i al tempo k
- Ogni individuo aggiorna la propria opinione in base a una media pesata delle opinioni di tutti gli altri.

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}x_j(k) \quad (\text{aggiornamento opinione dell'individuo } i\text{-esimo}) \quad (6.6)$$

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (\text{forma vettoriale compatta}) \quad (6.7)$$

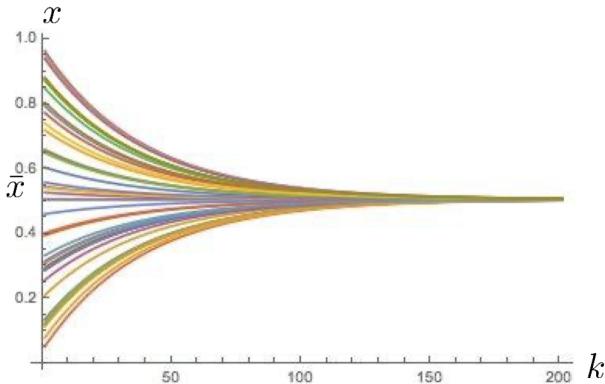
Nota: L'aggiornamento avviene istante per istante tramite moltiplicazione matriciale, dove A rappresenta la matrice dei pesi (influenze sociali tra individui).

6.0.4 Modello di De Groot

Nel modello di **De Groot**, gli individui aggiornano la propria opinione come una media ponderata delle opinioni degli altri. Questo porta tendenzialmente a una **rapida convergenza verso un consenso**.

$$\bar{x} = x_1(k) = x_2(k) = x_i(k) = \dots \quad \text{per } k \text{ sufficientemente grande} \quad (6.8)$$

Consenso: tutti gli individui convergono alla stessa opinione \bar{x} .



Modello di Friedkin e Johnsen

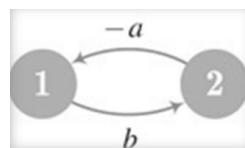
A differenza di De Groot, il modello di **Friedkin e Johnsen** introduce una **resistenza personale al cambiamento** dell'opinione originaria. La convergenza verso il consenso può essere più lenta o potrebbe non avvenire completamente.

$$x(k+1) = \lambda Ax(k) + (1 - \lambda)x(0) \quad \text{con } 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (6.9)$$

Interpretazioni dei valori di λ :

- Se $\lambda = 1$, si recupera il modello di **De Groot**.
- Se $\lambda = 0$, l'opinione resta sempre quella iniziale: è il limite estremo di **Friedkin e Johnsen**.

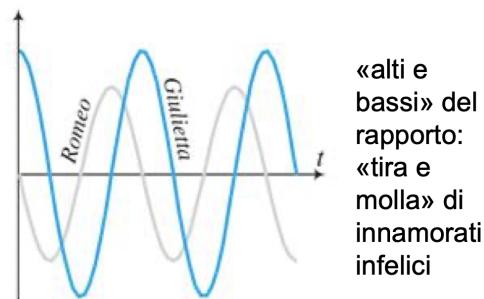
6.0.5 Esempio: Affari di Cuori (Tempo Continuo)



Introduzione al modello romantico

Consideriamo la dinamica della relazione d'amore tra **Romeo** e **Giulietta**.

- $x_1(t)$: intensità amorosa di Romeo nel tempo t
- $x_2(t)$: intensità amorosa di Giulietta nel tempo t



Regole della dinamica

Le regole del comportamento amoroso tra i due sono modellate con un sistema dinamico continuo:

1. **Romeo:** più Giulietta lo ama, più lui si infastidisce (reazione opposta). Tuttavia, se Giulietta perde interesse, Romeo ne è nuovamente attratto.

$$x'_1(t) = -ax_2(t)$$

2. **Giulietta:** l'amore di Giulietta aumenta se Romeo la ama, ma diminuisce se lui cambia i propri sentimenti (reazione simmetrica ma inversa).

$$x'_2(t) = -bx_1(t)$$

Quindi, il sistema è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x'_1(t) = -ax_2(t) \\ x'_2(t) = -bx_1(t) \end{cases} \quad (6.10)$$

Forma matriciale del sistema

Scriviamo il sistema in forma compatta vettoriale:

$$x'(t) = Ax(t) \quad (6.11)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Analisi del sistema

Calcoliamo gli autovalori della matrice A per analizzare la natura della dinamica:

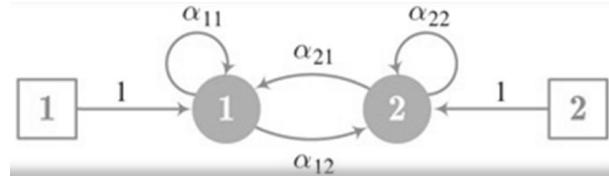
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + ab = 0$$

Soluzione dell'equazione caratteristica:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{ab}$$

Interpretazione:

- Gli autovalori sono puramente immaginari.
- Questo implica che la dinamica del sistema è **oscillatoria permanente**: Romeo e Giulietta non raggiungono mai un equilibrio stabile, ma oscillano eternamente tra amore e disamore.



6.0.6 Esempio: La Corsa agli Armamenti (Tempo Continuo)

Introduzione

Consideriamo due nazioni (denominate 1 e 2) e analizziamo quanto esse investono in armamenti nel tempo.

- $x_1(t)$: spesa in armamenti della nazione 1 al tempo t
- $u_1(t)$: aggressività intrinseca della nazione 1 (variabile di rancore)
- $x_2(t)$: spesa in armamenti della nazione 2 al tempo t
- $u_2(t)$: aggressività intrinseca della nazione 2 (variabile di rancore)

Modello dinamico continuo

Equazioni della dinamica:

$$x'_1(t) = u_1(t) + \alpha_{21}x_2(t) - \alpha_{11}x_1(t) \quad (6.12)$$

$$x'_2(t) = u_2(t) + \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{22}x_2(t) \quad (6.13)$$

Interpretazione dei coefficienti

- α_{21}, α_{12} : **coefficienti di difesa**. Termini positivi: se l'altra nazione aumenta la propria spesa, anch'io aumento la mia.

$$+\alpha_{21}x_2(t), +\alpha_{12}x_1(t)$$

- α_{11}, α_{22} : **coefficienti di saturazione**. Termini negativi: se la mia spesa è già alta e quella dell'altro è bassa, tendo a ridurre.

$$-\alpha_{11}x_1(t), -\alpha_{22}x_2(t)$$

Condizione di decrescita della spesa per la nazione 1

Supponiamo che:

$$x'_1(t) < 0$$

Da cui segue:

$$u_1(t) + \alpha_{21}x_2(t) - \alpha_{11}x_1(t) < 0 \quad (6.14)$$

$$x_1(t) > \frac{u_1(t)}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}x_2(t) \quad (6.15)$$

Se $u_1(t) = u_1$ costante, allora:

$$x_1(t) = \frac{u_1}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}x_2(t)$$

Condizione di crescita della spesa per la nazione 2

Supponiamo che:

$$x'_2(t) > 0$$

Da cui segue:

$$u_2(t) + \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{22}x_2(t) > 0 \quad (6.16)$$

$$x_2(t) < \frac{u_2(t)}{\alpha_{22}} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}x_1(t) \quad (6.17)$$

Se $u_2(t) = u_2$ costante, allora:

$$x_2(t) = \frac{u_2}{\alpha_{22}} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}x_1(t)$$

Spazio di Stato (Diagramma delle Fasi)

Primo caso: Intersezione delle rette

Le due rette (condizioni critiche per x_1 e x_2) hanno pendenze tali da intersecarsi in un punto A .

- In questo caso esiste un **punto di equilibrio**.
- Il piano (x_1, x_2) risulta diviso in **quattro quadranti**.
- L'evoluzione del sistema dipenderà dalla posizione iniziale rispetto a tale punto.

Secondo caso: Rette non incidenti

Le rette non si intersecano (sono parallele oppure divergenti).

- Il piano è diviso in **tre regioni**.
- Nella regione intermedia (secondo quadrante), entrambe le nazioni aumentano costantemente la spesa militare: **Corsa illimitata agli armamenti**

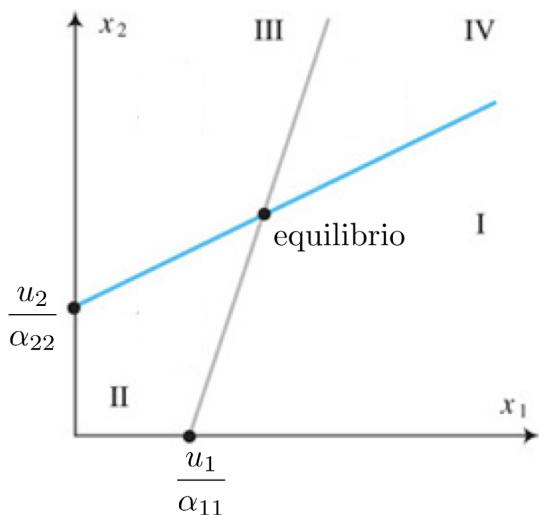


Figura 6.1: Primo caso

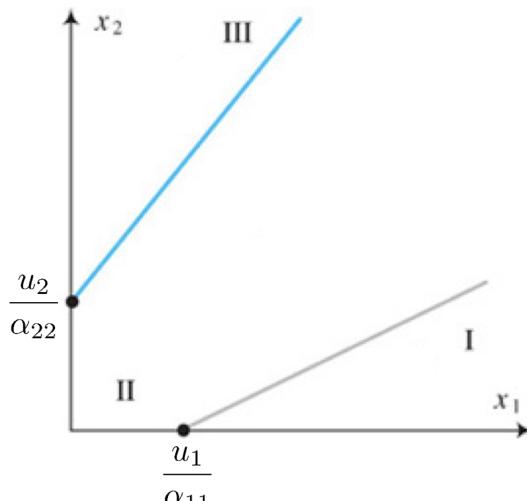


Figura 6.2: Secondo caso

6.0.7 Esempio: Dinamica dei Prezzi (Tempo Discreto)

Introduzione

Analizziamo un fenomeno tipico della microeconomia: l'interazione tra **domanda** e **offerta** in funzione del prezzo p di un bene e della quantità q prodotta.

- p : prezzo del bene
- q : quantità del bene programmata per la produzione

Comportamento dei produttori

Si ipotizza una relazione **lineare crescente** tra prezzo e produzione:

$$q = bp + Q$$

- $b > 0$: sensibilità dei produttori (quanto aumenta la produzione al crescere del prezzo)
- Q : produzione programmata a prezzo zero

Comportamento dei consumatori

Si ipotizza una relazione **lineare decrescente** tra prezzo e domanda:

$$q = -ap + D$$

- $a > 0$: sensibilità dei consumatori (quanto la domanda cala all'aumentare del prezzo)
- D : livello di domanda a prezzo zero

Modello a tempo discreto

Consideriamo un modello in cui:

- **Consumatore**: reagisce istantaneamente al prezzo corrente

$$q(k) = -ap(k) + D$$

- **Produttore**: programma la produzione con un ritardo (tempo $k+1$), basandosi sul prezzo osservato in k

$$q(k+1) = bp(k) + Q$$

Variabile di interesse: il prezzo

Definiamo:

$$x_1(k) := p(k) \quad (\text{prezzo al tempo } k)$$

Per trovare l'evoluzione del prezzo, partiamo dalla relazione della domanda, ma riferita al tempo $k+1$:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= p(k+1) = \frac{1}{a}[-q(k+1) + D] \\
 &= \frac{1}{a}[-(bp(k) + Q) + D] \\
 &= -\frac{b}{a}p(k) + \frac{1}{a}(D - Q)
 \end{aligned}$$

Sostituendo $x_1(k) = p(k)$:

$$x_1(k+1) = -\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{1}{a}(D - Q)$$

Definiamo infine:

$$u_1(k) := D - Q \quad (\text{causa esterna aggregata})$$

Forma finale del modello:



$$x_1(k+1) = -\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{1}{a}u_1(k)$$

Interpretazione

- Lo stato $x_1(k)$ (prezzo) influenza sé stesso nel tempo (feedback negativo proporzionale a $\frac{b}{a}$).
- La componente esterna $u_1(k)$ rappresenta la differenza tra domanda e produzione programmata a prezzo zero.
- Il sistema è quindi influenzato sia dallo stato interno che da cause esterne.

Analisi del Grafico: Modello a Ragnatela

Rappresentazione nel piano (p, q)

- Asse orizzontale: prezzo p
- Asse verticale: quantità q

Funzioni economiche nel piano:

- **Funzione di offerta:** retta con pendenza positiva

$$q(k+1) = bp(k) + Q$$

- **Funzione di domanda:** relazione inversa tra prezzo e quantità

$$p(k+1) = \frac{1}{a}(-q(k+1) + D)$$

Iterazione del sistema

Partendo da un prezzo iniziale $p(0)$:

$$\begin{aligned} q(1) &= bp(0) + Q \\ p(1) &= \frac{1}{a} (-q(1) + D) \\ &= \frac{1}{a} (-bp(0) - Q + D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(2) &= bp(1) + Q \\ p(2) &= \frac{1}{a} (-q(2) + D) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Questo processo iterativo continua fino al raggiungimento di un punto di equilibrio:

$$p_e, \quad q_e$$

Il sistema mostra un'oscillazione intorno al punto di equilibrio, che:

- **diminuisce** nel tempo se $a > b$ (convergenza)
- **aumenta** se $b > a$ (divergenza)
- **resta costante** se $a = b$

Modello a Ragnatela

Questa dinamica dei prezzi è conosciuta come **modello a ragnatela** (*Cobweb model*).

- Se $a > b$: le oscillazioni hanno ampiezza decrescente \Rightarrow **convergenza** all'equilibrio.
- Se $a < b$: le oscillazioni hanno ampiezza crescente \Rightarrow **divergenza** dal punto di equilibrio.
- Se $a = b$: le oscillazioni persistono con ampiezza costante \Rightarrow **ciclo permanente**.

Iterazione esplicita in caso $b > a$:

$$\begin{aligned} p(0) \rightarrow q(1) &= bp(0) + Q \\ p(1) &= \frac{1}{a} (-q(1) + D) \\ q(2) &= bp(1) + Q \\ p(2) &= \frac{1}{a} (-q(2) + D) \\ &\rightarrow \dots \end{aligned}$$

Caso $a = b$

In questo caso:

- Le oscillazioni non si smorzano né aumentano.
- Si ha una figura simile a un rettangolo centrato nel punto di equilibrio.
- Il sistema oscilla sempre con la stessa ampiezza: aumento e diminuzione costanti.

Studio con il modello discreto

Partiamo dal modello:

$$x_1(k+1) = -\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{1}{a}u_1(k)$$

Supponiamo $u_1(k) = \bar{u}_1$ costante:

$$x_1(k+1) = -\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{1}{a}\bar{u}_1$$

Ricerca dell'equilibrio

Cerchiamo un punto di equilibrio \bar{x}_1 tale che:

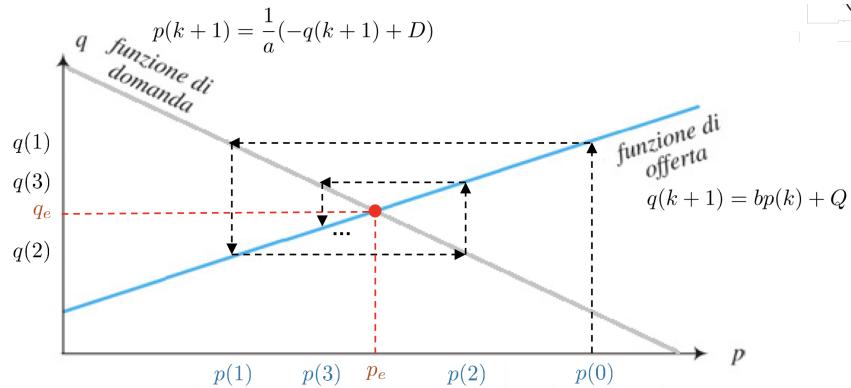
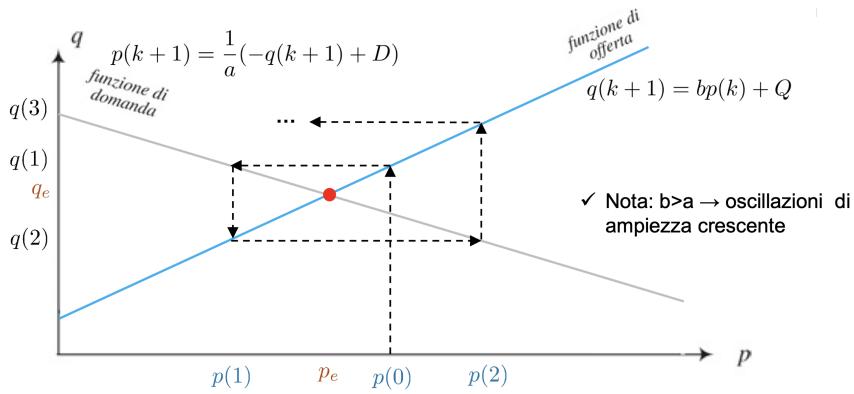
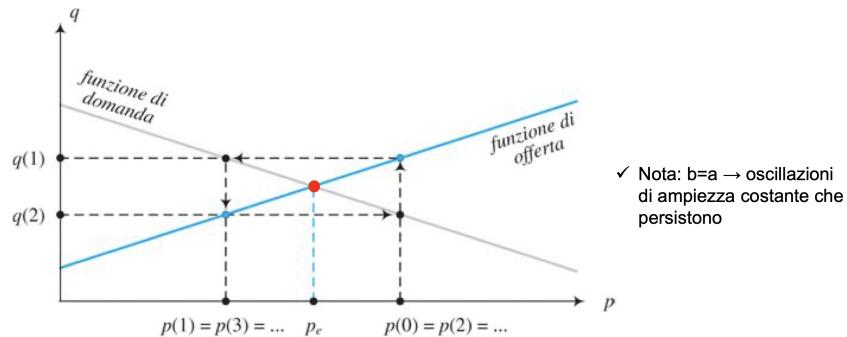
$$x_1(k+1) = x_1(k) = \bar{x}_1$$

Sostituendo:

$$\bar{x}_1 = -\frac{b}{a}\bar{x}_1 + \frac{1}{a}\bar{u}_1$$

Portando i termini a sinistra:

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)\bar{x}_1 = \frac{1}{a}\bar{u}_1 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{a+b}\bar{u}_1 = \bar{p}$$


 Figura 6.3: $a > b \rightarrow$ oscillazioni di ampiezza decrescente

 Figura 6.4: $a < b \rightarrow$ oscillazioni di ampiezza crescente

 Figura 6.5: $a = b \rightarrow$ oscillazioni di ampiezza costante che persistono

Dinamica delle deviazioni dal punto di equilibrio

Definiamo:

$$\tilde{x}_1(k) := x_1(k) - \bar{x}_1 \quad (\text{deviazione del prezzo})$$

Calcoliamo la dinamica:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(k+1) &= x_1(k+1) - \bar{x}_1 \\ &= -\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{1}{a}\bar{u}_1 - \bar{x}_1 \\ &= -\frac{b}{a}(\tilde{x}_1(k) + \bar{x}_1) + \frac{1}{a}\bar{u}_1 - \bar{x}_1 \\ &= -\frac{b}{a}\tilde{x}_1(k) - \frac{b}{a}\bar{x}_1 + \frac{1}{a}\bar{u}_1 - \bar{x}_1 \\ &= -\frac{b}{a}\tilde{x}_1(k)\end{aligned}$$

Conclusione: comportamento della deviazione

La dinamica della deviazione oscilla attorno all'equilibrio per effetto del segno negativo e della proporzione $\frac{b}{a}$. Si hanno i seguenti casi:

- Se $\frac{b}{a} < 1$: **convergenza** all'equilibrio
- Se $\frac{b}{a} > 1$: **divergenza** (oscillazioni crescenti)
- Se $\frac{b}{a} = 1$: **oscillazioni permanenti** di ampiezza costante

Capitolo 7

Modelli Fisici - Circuiti Elettrici

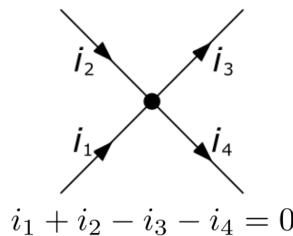
7.1 Leggi di Kirchhoff

Le leggi di Kirchhoff determinano i vincoli che governano l'evoluzione delle variabili del sistema:

7.1.1 Legge di Kirchhoff per le correnti (KCL)

La somma algebrica totale delle correnti in un singolo nodo è uguale a zero.

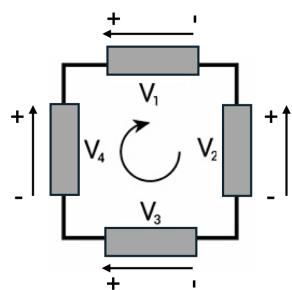
Regola: le correnti entranti nel nodo sono positive, quelle uscenti negative.



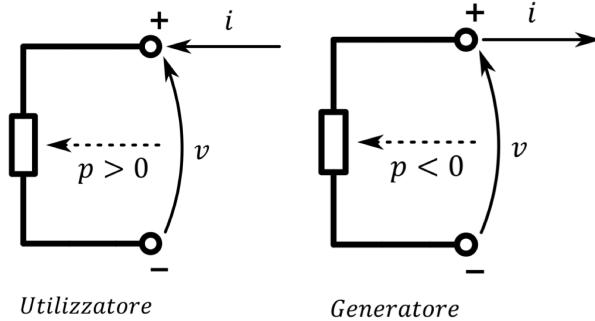
7.1.2 Legge di Kirchhoff per le tensioni (KVL)

La somma algebrica delle tensioni tra coppie di nodi lungo un percorso chiuso è uguale a zero.

Regola: nel giro orario (scelto arbitrariamente), se si passa dal polo positivo al negativo, la tensione è positiva; altrimenti è negativa.



7.1.3 Convenzione degli utilizzatori e dei generatori



Utilizzatore: quando il riferimento di corrente è entrante nel morsetto che reca il riferimento di tensione positivo (+).

- Potenza positiva assorbita

Generatore: quando il riferimento di corrente è uscente dal morsetto che reca il riferimento di tensione positivo (+).

- Potenza positiva erogata (o negativa assorbita)

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (7.1)$$

7.1.4 Componenti principali

I componenti principali che considereremo sono:

- **Resistori (utilizzatori):** componente istantaneo. Se passa corrente $i(t)$, istantaneamente la tensione sarà proporzionale:

$$v(t) = R i(t) \quad (7.2)$$

$$[V] = [\Omega][A] \quad (7.3)$$

- **Condensatori (utilizzatori):**

- Variabile indipendente: tensione
- Variabile dipendente: corrente

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (7.4)$$

$$[A] = [F] \left[\frac{V}{s} \right] \quad (7.5)$$

- **Induttori:**

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (7.6)$$

$$[V] = [H] \left[\frac{A}{s} \right] \quad (7.7)$$

- **Generatori indipendenti di tensione e di corrente:**

– Impone la tensione o la corrente; l'altra variabile sarà determinata dal circuito.

$$i(t) = I_g(t) \quad (7.8)$$

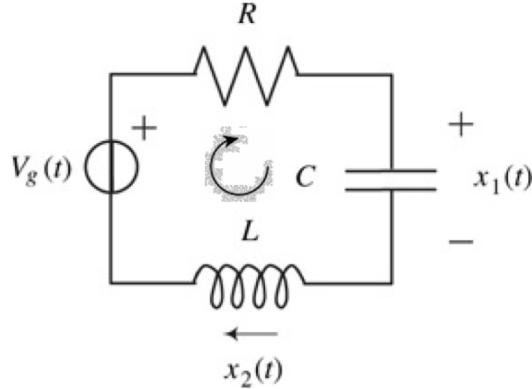
Modello di stato

Per definire un modello di stato di un circuito è necessario definire opportunamente:

- **Variabili indipendenti:** ingressi e disturbi
- **Variabili di stato:** solitamente si considerano come variabili di stato:
 - Le tensioni ai capi dei condensatori
 - Le correnti negli induttori

7.2 Circuiti Elettrici - Esempi

7.2.1 Esempio 1 - Rappresentazione di un circuito in forma di stato



Descrizione del sistema

Si consideri un circuito RLC serie alimentato da un generatore di tensione $V_g(t)$.

Le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$x'_1(t) = \frac{1}{C}x_2(t) \quad (7.9)$$

$$Lx'_2(t) + Rx_2(t) + x_1(t) - V_g(t) = 0 \quad (7.10)$$

La prima equazione deriva dalla relazione corrente-tensione del condensatore:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{1}{C}x_2(t)$$

dove $x_1(t)$ rappresenta la tensione ai capi del condensatore e $x_2(t)$ la corrente nel circuito.

La seconda equazione è ottenuta applicando la **Legge di Kirchhoff delle tensioni** (KVL) al circuito in serie: la somma delle tensioni ai capi di induttore ($Lx'_2(t)$), resistore ($Rx_2(t)$), condensatore ($x_1(t)$) e generatore ($-V_g(t)$) deve essere nulla.

Nota: La corrente che scorre nell'induttore è la stessa che passa in ogni componente, poiché essi sono in serie.

Definiamo:

- $u_1(t) = V_g(t)$ (variabile indipendente / ingresso)
- Stati del sistema: $x_1(t)$ e $x_2(t)$

Gli stati sono funzioni del tempo, e si vuole ottenere una rappresentazione del sistema in forma di equazioni differenziali del primo ordine, espresse come:

$$\begin{cases} x'_1(t) = \frac{1}{C}x_2(t) \\ x'_2(t) = -\frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t) \end{cases}$$

Forma di stato

La rappresentazione in forma di stato è:

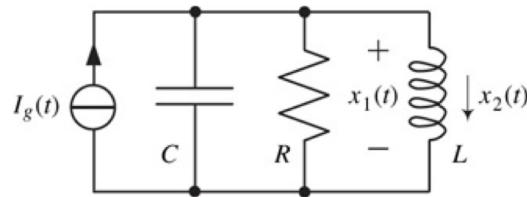
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_1(t) \quad (7.11)$$

dove:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Osservazione: Questa rappresentazione è fondamentale per l'analisi e la simulazione dei circuiti in ambito ingegneristico e consente una trattazione uniforme per circuiti più complessi.

7.2.2 Esempio 2 - Rappresentazione in forma di stato di un circuito in parallelo



Descrizione del sistema

In questo circuito tutti i bipoli si trovano alla stessa tensione: il collegamento è in **parallelo**.

Equazioni costitutive

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{L}x_1(t) \quad (7.12)$$

$$I_g(t) = \frac{1}{R}x_1(t) + x_2(t) + Cx'_1(t) \quad (7.13)$$

Nota: l'equazione (7.13) deriva dall'applicazione della **Legge di Kirchhoff per le correnti** (prima legge), secondo la quale la corrente entrante nel nodo (dal generatore) è uguale alla somma delle correnti uscenti attraverso il resistore, l'induttore e il condensatore.

Definiamo come variabile indipendente (ingresso):

$$u_1(t) = I_g(t)$$

e otteniamo l'equazione per $x'_1(t)$:

$$\dot{x}'_1(t) = -\frac{1}{RC}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}u_1(t) \quad (7.14)$$

Sistema in forma canonica

Le due equazioni differenziali del primo ordine sono:

$$\begin{cases} x'_1(t) = -\frac{1}{RC}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}u_1(t) \\ x'_2(t) = \frac{1}{L}x_1(t) \end{cases}$$

Osservazione: $x'_2(t)$ dipende solamente da $x_1(t)$.

Forma matriciale (stato-spazio)

Scriviamo il sistema nella forma compatta:

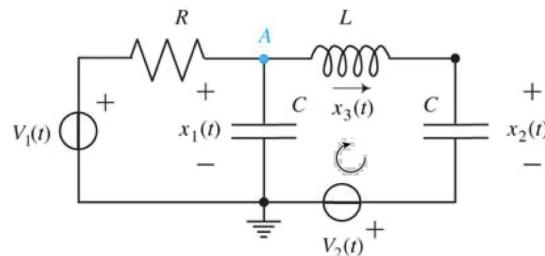
$$x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t)$$

dove:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conclusione: Il sistema è stato descritto in forma di stato, con ingresso $u_1(t) = I_g(t)$, e gli stati $x_1(t)$ e $x_2(t)$ rappresentano rispettivamente la tensione e la corrente del circuito parallelo.

7.2.3 Esempio 3 - Circuito con due condensatori e un induttore



Definizione degli stati

Definiamo le variabili di stato del sistema come segue:

- $x_1(t)$: tensione ai capi del condensatore di sinistra
- $x_2(t)$: tensione ai capi del condensatore di destra
- $x_3(t)$: corrente che scorre nell'induttore

Equazioni costitutive

Dal comportamento dei componenti e dalle leggi circuitali otteniamo:

1. Legge costitutiva del condensatore destro

$$x'_2(t) = \frac{1}{C}x_3(t)$$

2. Legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL) sul ramo contenente l'induttore

$$Lx'_3(t) + x_2(t) + V_2(t) - x_1(t) = 0$$

Isoliamo la derivata $x'_3(t)$:

$$x'_3(t) = \frac{1}{L} [x_1(t) - x_2(t) - V_2(t)]$$

3. Kirchhoff delle correnti al nodo A

Applichiamo la legge di Kirchhoff delle correnti al nodo A e utilizziamo la legge di Ohm per il resistore:

$$\frac{1}{R} [V_1(t) - x_1(t)] = Cx'_1(t) + x_3(t)$$

Risolvendo rispetto a $x'_1(t)$:

$$x'_1(t) = -\frac{1}{RC}x_1(t) - \frac{1}{C}x_3(t) + \frac{1}{RC}V_1(t)$$

Definizione degli ingressi

- $u_1(t) = V_1(t)$
- $u_2(t) = V_2(t)$

Forma di stato del sistema

Definiamo il vettore degli stati:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Scriviamo il sistema nella forma canonica:

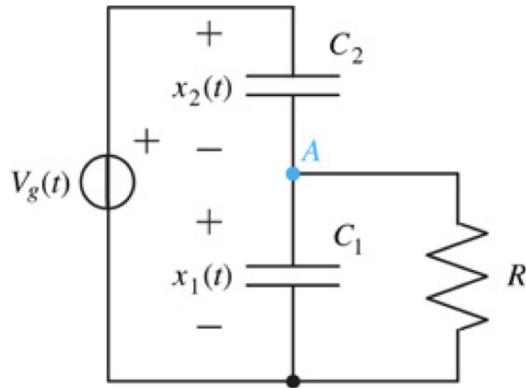
$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Osservazione: In questo esempio abbiamo due ingressi esterni ($V_1(t)$ e $V_2(t)$), e tre variabili di stato che permettono di descrivere completamente la dinamica del sistema. Il modello ottenuto è in forma standard (lineare, tempo-variabile se $V_1(t), V_2(t)$ lo sono).

7.2.4 Esempio 4 - Modello di stato con legame istantaneo tra variabili



Osservazioni iniziali

In questo circuito, la variabile indipendente è una tensione:

$$u_1(t) = V_g(t)$$

Vi è un legame istantaneo tra le variabili di stato e l'ingresso, rappresentato dall'equazione:

$$x_1(t) + x_2(t) = u_1(t)$$

Questo vincolo implica che $x_2(t)$ può essere espresso istantaneamente in funzione di $x_1(t)$ e $u_1(t)$. Di conseguenza, anche se inizialmente sono state considerate due variabili di stato, in realtà è sufficiente una sola variabile indipendente per descrivere la dinamica del sistema.

Riduzione della dimensione dello stato

Scegliamo come unica variabile di stato la tensione $x_1(t)$ ai capi del condensatore C_1 . Utilizzando le leggi dei circuiti (Kirchhoff e costitutive), si ottiene l'equazione differenziale:

$$C_2 [V'_g(t) - x'_1(t)] = C_1 x'_1(t) + \frac{1}{R} x_1(t)$$

Nota: questa equazione è ottenuta imponendo la legge di Kirchhoff per le correnti nel nodo condiviso dai due condensatori, dove la corrente nel ramo di C_2 è legata al generatore e alla derivata di x_1 , mentre quella in C_1 e nel resistore dipende solo da x_1 .

Definiamo nuovamente l'ingresso:

$$u_1(t) = V'_g(t)$$

e risolviamo l'equazione rispetto a $x'_1(t)$:

$$C_2 u_1(t) - C_2 x'_1(t) = C_1 x'_1(t) + \frac{1}{R} x_1(t) \quad (7.15)$$

$$(C_1 + C_2)x'_1(t) = -\frac{1}{R}x_1(t) + C_2 u_1(t) \quad (7.16)$$

Quindi:

$$x'_1(t) = -\frac{1}{(C_1 + C_2)R}x_1(t) + \frac{C_2}{C_1 + C_2}u_1(t)$$

Forma di stato ridotta

Anche se inizialmente il vettore di stato era:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

in realtà $x_2(t)$ può essere ricavato direttamente da:

$$x_2(t) = u_1(t) - x_1(t)$$

Pertanto, si può scrivere una rappresentazione di stato ridotta, con una sola variabile di stato $x_1(t)$, nella forma:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t)$$

dove:

$$A = -\frac{1}{(C_1 + C_2)R}, \quad B = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Osservazione: In questo esempio, a causa del legame algebrico immediato tra le variabili, la rappresentazione matriciale standard con più stati non è possibile senza ridondanza. La corretta modellazione prevede quindi una sola variabile di stato.

7.3 Sistemi Meccanici - Traslazionali e Rotativi

Studieremo due categorie di sistemi meccanici:

- Sistemi che **tralano** (movimento traslazionale)
- Sistemi che **ruotano** (movimento rotazionale)

In questo documento ci concentriamo sui sistemi traslazionali, applicando le leggi costitutive e i principi della dinamica per costruire modelli matematici.

7.3.1 Sistemi Meccanici Traslazionali

1º Principio della dinamica (inerzia)

Un corpo non soggetto a forze esterne mantiene la sua velocità (cioè la derivata dello spostamento $s(t)$) costante:

$$\sum_i F_i = 0 \iff s'(t) = \text{costante}$$

2º Principio della dinamica (legge fondamentale)

La somma delle forze esterne applicate a un corpo è pari al prodotto tra la sua massa m e l'accelerazione:

$$\sum_i F_i = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = ms''(t)$$

$$\sum_i F_i - ms''(t) = 0$$

Componenti e leggi costitutive

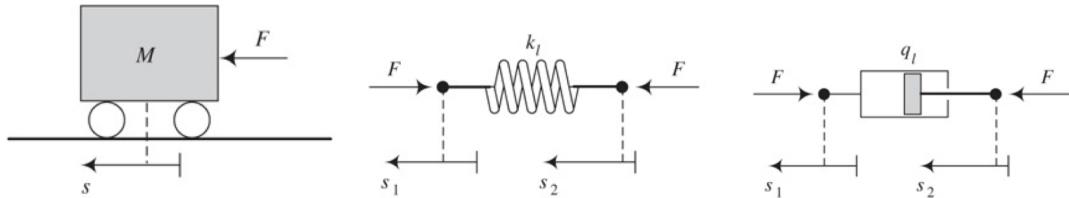


Figura 7.1: Massa - Molla - Smorzatore

- **Massa:** $F(t) = Ms''(t)$

- **Molla (Hooke):**

$$F(t) = -k_l[s_1(t) - s_2(t)] = k_l[s_2(t) - s_1(t)]$$

Forza elastica proporzionale alla deformazione dalla posizione di riposo.

- **Smorzatore (attrito viscoso):**

$$F(t) = -q_l[s'_1(t) - s'_2(t)]$$

Forza proporzionale alla velocità relativa, si oppone al moto del corpo in un fluido.

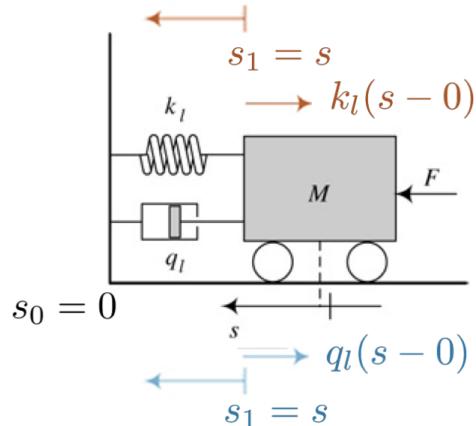
Modello di stato di un sistema meccanico traslazionale

Per costruire un modello di stato di un sistema meccanico traslazionale, bisogna definire:

- **Variabili indipendenti:** ingressi e disturbi esterni
- **Variabili di stato:** generalmente le posizioni e le velocità delle masse rispetto alle posizioni di riposo

7.4 Esempi - Sistemi Meccanici Traslazionali

7.4.1 Esempio 1: Un carrello



Supponiamo di avere un carrello soggetto a una forza esterna $F(t)$, collegato a:

- una molla (costante elastica k_l) - uno smorzatore (coefficiente di attrito viscoso q_l)

La molla e lo smorzatore agiscono nella stessa direzione della traslazione del carrello e lo riportano verso la posizione di equilibrio.

Equazione dinamica

Applicando il secondo principio della dinamica:

$$F(t) - k_l s(t) - q_l s'(t) = M s''(t)$$

Definizione delle variabili di stato

$$x_1(t) = s(t) \quad (\text{posizione})$$

$$x_2(t) = s'(t) \quad (\text{velocità})$$

Sistema di equazioni differenziali

Riscriviamo l'equazione del moto come sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = -\frac{k_l}{M}x_1(t) - \frac{q_l}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u_1(t) \end{cases}$$

dove $u_1(t) = F(t)$ è la forza esterna applicata.

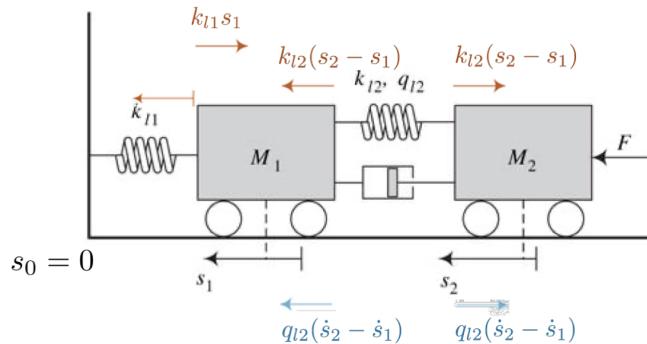
Forma matriciale

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_l}{M} & -\frac{q_l}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

Osservazione: Questo sistema è un classico secondo ordine lineare, modellabile facilmente con due variabili di stato (posizione e velocità). Le costanti fisiche (massa, attrito, elasticità) determinano la dinamica del sistema.

7.4.2 Esempio 2: Due carrelli accoppiati



Descrizione del sistema

Consideriamo due carrelli collegati tra loro da una molla e uno smorzatore. Il primo carrello è collegato anche a una molla di richiamo verso la parete. Sul secondo carrello agisce una forza esterna $F(t)$.

Equazioni dinamiche

Applichiamo il secondo principio della dinamica a ciascun carrello. Assumiamo che le forze nel verso del moto siano positive e quelle contrarie negative.

Per la prima massa M_1 :

$$M_1 s''_1(t) = -k_{l1}s_1(t) + k_{l2}(s_2(t) - s_1(t)) + q_{l2}(s'_2(t) - s'_1(t))$$

Per la seconda massa M_2 :

$$M_2 s''_2(t) = F(t) - k_{l2} (s_2(t) - s_1(t)) - q_{l2} (s'_2(t) - s'_1(t))$$

Definizione delle variabili di stato

$$\begin{aligned} x_1(t) &= s_1(t) && \text{(posizione del primo carrello)} \\ x_2(t) &= s'_1(t) && \text{(velocità del primo carrello)} \\ x_3(t) &= s_2(t) && \text{(posizione del secondo carrello)} \\ x_4(t) &= s'_2(t) && \text{(velocità del secondo carrello)} \\ u_1(t) &= F(t) && \text{(forza esterna)} \end{aligned}$$

Sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_3(t) = x_4(t) \\ x'_2(t) = -\frac{k_{l1} + k_{l2}}{M_1} x_1(t) - \frac{q_{l2}}{M_1} x_2(t) + \frac{k_{l2}}{M_1} x_3(t) + \frac{q_{l2}}{M_1} x_4(t) \\ x'_4(t) = \frac{k_{l2}}{M_2} x_1(t) + \frac{q_{l2}}{M_2} x_2(t) - \frac{k_{l2}}{M_2} x_3(t) - \frac{q_{l2}}{M_2} x_4(t) + \frac{1}{M_2} u_1(t) \end{cases}$$

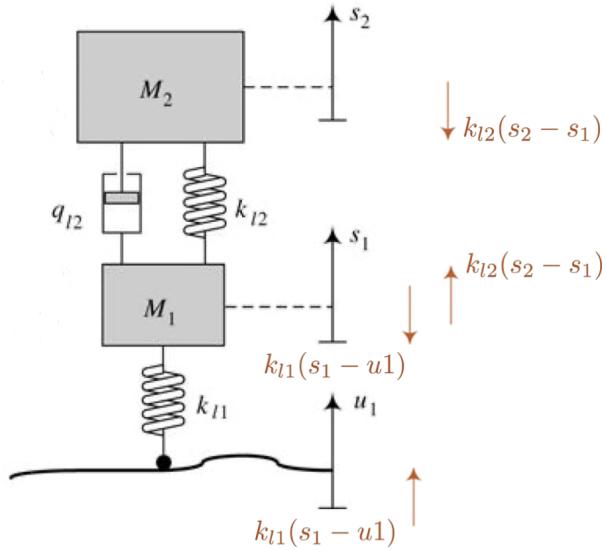
Forma matriciale

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{l1} + k_{l2}}{M_1} & -\frac{q_{l2}}{M_1} & \frac{k_{l2}}{M_1} & \frac{q_{l2}}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{l2}}{M_2} & \frac{q_{l2}}{M_2} & -\frac{k_{l2}}{M_2} & -\frac{q_{l2}}{M_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}$$

Osservazione: Questo sistema è composto da quattro equazioni del primo ordine e rappresenta fedelmente l'interazione dinamica tra le due masse, incluse le forze elastiche e dissipative. La matrice A evidenzia i legami incrociati tra le due masse, mentre il termine di ingresso B mostra che la forza agisce solo sulla seconda massa.

7.4.3 Esempio 3: Modello di sospensione meccanica per veicolo



Descrizione fisica del sistema

Modelliamo una sospensione automobilistica come un sistema composto da due masse:

- M_1 : massa del pneumatico
- M_2 : un quarto della massa del veicolo (carico su una ruota)

Nel modello:

- Il **pneumatico** è rappresentato come una molla con costante elastica k_{l1}
- La **sospensione** è rappresentata da una molla k_{l2} e uno smorzatore viscoso q_{l2}
- $u_1(t)$: è la **quota del terreno**, cioè il profilo stradale (variabile nel tempo, es. buche)

Equazioni dinamiche

Equazione per la massa M_1 (pneumatico):

$$M_1 s_1''(t) = -k_{l1}[s_1(t) - u_1(t)] + k_{l2}(s_2(t) - s_1(t)) + q_{l2}(s'_2(t) - s'_1(t))$$

Equazione per la massa M_2 (veicolo):

$$M_2 s_2''(t) = -k_{l2}(s_2(t) - s_1(t)) - q_{l2}(s'_2(t) - s'_1(t))$$

Nota: Il termine $-k_{l1}[s_1(t) - u_1(t)]$ rappresenta la forza elastica trasmessa dal terreno alla ruota tramite il pneumatico.

Definizione delle variabili di stato

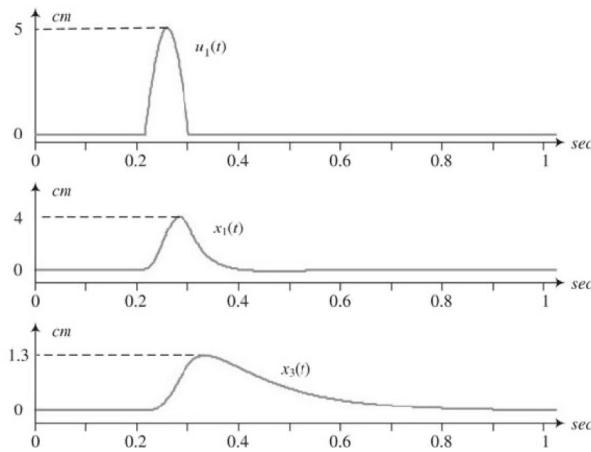
$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= s_1(t) && \text{(posizione del pneumatico)} \\
 x_2(t) &= s'_1(t) && \text{(velocità del pneumatico)} \\
 x_3(t) &= s_2(t) && \text{(posizione del veicolo)} \\
 x_4(t) &= s'_2(t) && \text{(velocità del veicolo)} \\
 u_1(t) &= \text{quota terreno}
 \end{aligned}$$

Equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_3(t) = x_4(t) \\ x'_2(t) = -\frac{k_{l1} + k_{l2}}{M_1}x_1(t) - \frac{q_{l2}}{M_1}x_2(t) + \frac{k_{l2}}{M_1}x_3(t) + \frac{q_{l2}}{M_1}x_4(t) + \frac{k_{l1}}{M_1}u_1(t) \\ x'_4(t) = \frac{k_{l2}}{M_2}x_1(t) + \frac{q_{l2}}{M_2}x_2(t) - \frac{k_{l2}}{M_2}x_3(t) - \frac{q_{l2}}{M_2}x_4(t) \end{cases}$$

Forma matriciale del sistema

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t) \\
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{l1} + k_{l2}}{M_1} & -\frac{q_{l2}}{M_1} & \frac{k_{l2}}{M_1} & \frac{q_{l2}}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{l2}}{M_2} & \frac{q_{l2}}{M_2} & -\frac{k_{l2}}{M_2} & -\frac{q_{l2}}{M_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{l1}}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



Osservazione: Questo modello permette di studiare la dinamica verticale del sistema ruota-veicolo. L'ingresso $u_1(t)$ rappresenta l'andamento del terreno, come una buca o un dosso. Il sistema è descritto da quattro equazioni del primo ordine ed è lineare a coefficienti costanti.

7.4.4 Sistemi Meccanici Rotativi

Introduzione ai sistemi meccanici rotativi

I sistemi meccanici rotativi descrivono il moto angolare di corpi rigidi attorno a un asse fisso. Sono governati, come i sistemi traslazionali, dai principi fondamentali della dinamica, adattati alla rotazione.

Principi della dinamica rotazionale

Primo principio della dinamica (inerzia rotazionale)

Un corpo rigido non soggetto a momenti esterni mantiene il suo stato di moto rotatorio:

$$\sum_i C_i = 0 \iff \theta'(t) = \text{costante}$$

dove $\theta(t)$ è la posizione angolare, e $\theta'(t)$ la velocità angolare.

Secondo principio della dinamica (legge fondamentale)

La somma dei momenti (coppie) applicati a un corpo rigido è pari alla variazione del momento angolare nel tempo.

Se il momento d'inerzia J è costante:

$$\sum_i C_i = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = J\theta''(t)$$

$$\sum_i C_i - J\theta''(t) = 0$$

Componenti e leggi costitutive

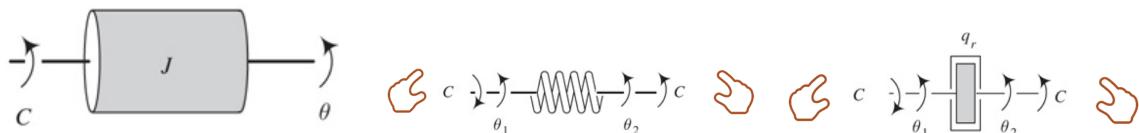


Figura 7.2: Massa rotante - Molla torcente - Smorzatore torsionale

- **Massa rotante (inerzia):**

$$C = J\theta''(t)$$

dove J è il momento d'inerzia.

- **Molla torsionale (coppia elastica):**

$$C(t) = -k_r[\theta_1(t) - \theta_2(t)] = k_r[\theta_2(t) - \theta_1(t)]$$

Forza di richiamo proporzionale allo spostamento angolare relativo tra due estremi (legge di Hooke rotazionale).

- Smorzatore torsionale (coppia di attrito viscoso):

$$C(t) = -q_r[\theta'_1(t) - \theta'_2(t)] = q_r[\theta'_2(t) - \theta'_1(t)]$$

Coppia resistente proporzionale alla velocità angolare relativa, modello dell'attrito viscoso in rotazione.

Modello di stato

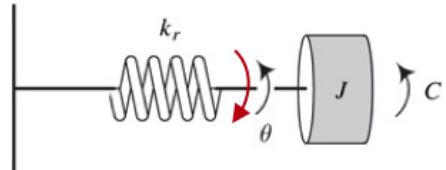
Per costruire un modello di stato in un sistema meccanico rotativo, bisogna definire:

- **Variabili indipendenti:** gli ingressi e/o disturbi esterni (ad esempio coppie motrici)
- **Variabili di stato:** solitamente si considerano:
 - Le posizioni angolari $\theta(t)$
 - Le velocità angolari $\theta'(t)$

Nota: Come nei sistemi traslazionali, si assume che le posizioni siano riferite a una posizione di riposo (equilibrio angolare).

7.5 Esempi - Sistemi Meccanici Rotativi

7.5.1 Esempio 1: sistema rotante con molla torsionale



Consideriamo un sistema meccanico rotante con:

- Momento d'inerzia J
- Molla torsionale con costante elastica k_r
- Coppia applicata $C(t)$ come ingresso

Equazione dinamica

Il sistema è descritto da:

$$J\theta''(t) = C(t) - k_r\theta(t)$$

Definizione delle variabili

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \theta(t) \quad (\text{posizione angolare}) \\x_2(t) &= \theta'(t) \quad (\text{velocità angolare}) \\u_1(t) &= C(t) \quad (\text{coppia applicata})\end{aligned}$$

Sistema in forma canonica

Scriviamo il sistema come equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases}x'_1(t) = x_2(t) \\x'_2(t) = -\frac{k_r}{J}x_1(t) + \frac{1}{J}u_1(t)\end{cases}$$

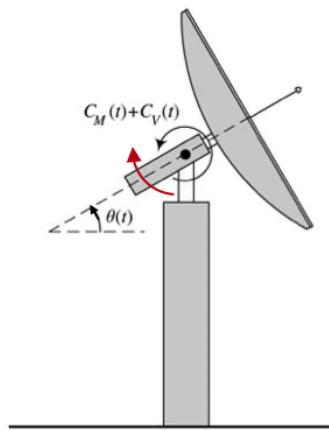
Forma matriciale

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_r}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

Osservazione: La coppia elastica agisce come forza di richiamo proporzionale alla posizione angolare, mentre il sistema presenta una tipica struttura del secondo ordine.

7.5.2 Esempio 2: Puntamento di un radar meteorologico



Sistema meccanico rotativo con:

- Momento d'inerzia J
- Coppia motrice $C_M(t)$
- Coppia di disturbo $C_V(t)$
- Smorzatore con coefficiente viscoso q_r

Equazione dinamica

$$J\theta''(t) = C_M(t) + C_V(t) - q_r\theta'(t)$$

Definizione delle variabili

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \theta(t) \quad (\text{posizione angolare}) \\x_2(t) &= \theta'(t) \quad (\text{velocità angolare}) \\u_1(t) &= C_M(t) \quad (\text{coppia motrice}) \\u_2(t) &= C_V(t) \quad (\text{disturbo})\end{aligned}$$

Sistema in forma canonica

$$\begin{cases}x'_1(t) = x_2(t) \\x'_2(t) = -\frac{q_r}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}u_1(t) + \frac{1}{J}u_2(t)\end{cases}$$

Forma matriciale

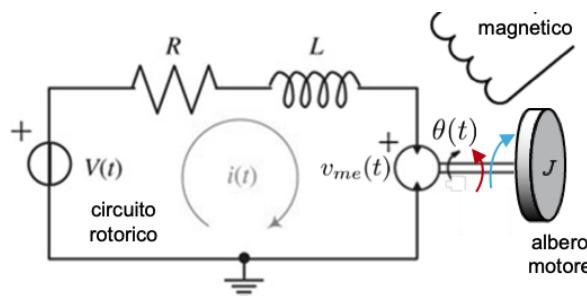
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{q_r}{J} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

Osservazione: Questo esempio mostra un sistema soggetto sia a ingresso controllato che a disturbo. Il termine di smorzamento oppone resistenza al moto, mentre le due coppie sommate agiscono come forze motrici.

7.5.3 Esempio 3: Motore elettrico



Un motore elettrico è un sistema multifisico in cui un ingresso elettrico genera un'uscita meccanica. Il rotore del motore è solidale con l'albero e può essere rappresentato come un circuito elettrico RL , immerso in un campo magnetico.

Domini coinvolti

- **Elettrico:** corrente generata nel circuito rotorico a partire dalla tensione applicata
- **Meccanico:** rotazione generata dal campo magnetico tramite la coppia torcente

Leggi del circuito elettrico (Kirchhoff)

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_{me}(t)$$

dove $v_{me}(t)$ è la **forza contro-elettromotrice** generata dalla rotazione (legge di Faraday):

$$v_{me}(t) = h\theta'(t)$$

Bilancio delle coppie sul lato meccanico

$$J\theta''(t) = -q_r\theta'(t) + C_{em}(t)$$

dove $C_{em}(t) = hi(t)$ è la **coppia elettromagnetica** generata dal passaggio di corrente nel campo magnetico (legge di Lorentz).

Definizione delle variabili

$$\begin{aligned} x_1(t) &= i(t) && (\text{corrente}) \\ x_2(t) &= \theta'(t) && (\text{velocità angolare}) \\ x_3(t) &= \theta(t) && (\text{posizione angolare}) \\ u_1(t) &= V(t) && (\text{tensione applicata}) \end{aligned}$$

Sistema dinamico

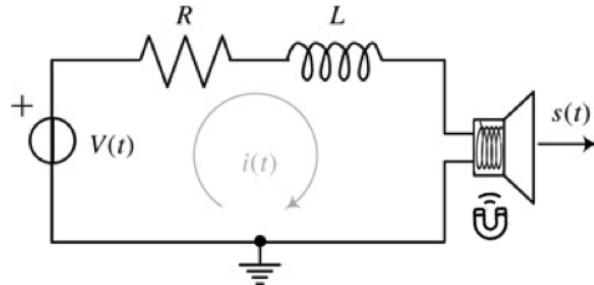
$$\begin{cases} x'_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{h}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t) \\ x'_2(t) = \frac{h}{J}x_1(t) - \frac{q_r}{J}x_2(t) \\ x'_3(t) = x_2(t) \end{cases}$$

Forma matriciale

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t) \\ A &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{h}{L} & 0 \\ \frac{h}{J} & -\frac{q_r}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Spiegazione: Questo sistema rappresenta chiaramente l'interazione tra il dominio elettrico e quello meccanico. La corrente genera coppia, la rotazione genera una tensione indotta che a sua volta si oppone alla tensione esterna. È un classico esempio di sistema multifisico accoppiato.

7.5.4 Esempio 4: Diffusore Acustico (altoparlante)



In un altoparlante, l'ingresso elettrico genera una corrente, che produce una forza che muove il cono, generando onde di pressione (suono).

Domini coinvolti

- **Elettrico:** circuito con resistenza e induttanza
- **Meccanico:** sistema massa-molla-smorzatore (il cono)

Equazioni del circuito

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + hs'(t)$$

dove $hs'(t)$ è la **forza contro-elettromotrice** indotta dal movimento del cono.

Equazione meccanica (cono)

$$ms''(t) = -k_ls(t) - q_ls'(t) + hi(t)$$

- $-k_ls(t)$: forza elastica della molla
- $-q_ls'(t)$: forza di attrito (smorzatore)
- $hi(t)$: forza motrice indotta dalla corrente

Definizione delle variabili

$$\begin{aligned} x_1(t) &= i(t) && (\text{corrente elettrica}) \\ x_2(t) &= s(t) && (\text{posizione del cono}) \\ x_3(t) &= s'(t) && (\text{velocità del cono}) \\ u_1(t) &= V(t) && (\text{tensione in ingresso}) \end{aligned}$$

Sistema dinamico

$$\begin{cases} x'_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{h}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}u_1(t) \\ x'_2(t) = x_3(t) \\ x'_3(t) = \frac{h}{m}x_1(t) - \frac{k_l}{m}x_2(t) - \frac{q_l}{m}x_3(t) \end{cases}$$

Forma matriciale

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t)$$
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{h}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{h}{m} & -\frac{k_l}{m} & -\frac{q_l}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Spiegazione: Il diffusore acustico è un altro sistema multifisico in cui la corrente genera una forza che mette in moto una massa (il cono). Questa forza si oppone al moto tramite una molla e uno smorzatore. Anche qui c'è accoppiamento bidirezionale tra elettrico e meccanico.

Capitolo 8

Sistemi Dinamici Non Lineari

Fino a questo punto abbiamo analizzato principalmente **sistemi dinamici lineari**, sia a **tempo continuo** che a **tempo discreto**.

Tuttavia, la **realtà non è sempre lineare**. In molti casi pratici — come nei sistemi meccanici complessi, nei circuiti elettronici reali o nei processi biologici — il comportamento dei sistemi presenta una marcata *non linearità*.

In questo corso, l'attenzione sarà comunque prevalentemente rivolta allo **studio dei sistemi lineari**. Questo perché i sistemi lineari sono più semplici da analizzare e offrono strumenti matematici consolidati che permettono una comprensione profonda della dinamica del sistema.

Obiettivo didattico

Per comprendere meglio l'approccio alla non linearità, considereremo un esempio di **sistema dinamico non lineare**. Su questo sistema eseguiremo una procedura chiamata **linearizzazione** attorno a una *condizione specifica* (ad esempio un punto di equilibrio o una traiettoria).

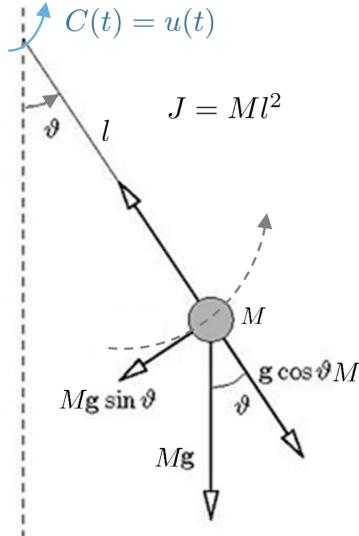
Scopo della linearizzazione:

- ottenere un *modello approssimato* ma **più semplice da analizzare**;
- applicare su di esso gli strumenti già visti per i sistemi lineari;
- studiare il comportamento locale del sistema vicino alla condizione di riferimento.

Questa tecnica è molto potente perché consente di utilizzare tutta la teoria sviluppata per i sistemi lineari per analizzare anche sistemi che, in generale, non lo sono.

8.1 Sistemi Dinamici non lineari a tempo continuo

8.1.1 Esempio 1: Il Pendolo Semplice



Consideriamo un sistema costituito da:

- una massa M fissata all'estremità di un'asta rigida di lunghezza l ,
- l'asta ha massa trascurabile,
- il punto di sospensione è fisso.

Fissiamo un sistema di riferimento in cui l'angolo θ è misurato in senso antiorario a partire dalla verticale verso il basso.

Il pendolo è soggetto alla forza peso Mg , la cui componente tangente alla traiettoria circolare è $Mg \sin \theta$.

Inoltre, possiamo perturbare il sistema applicando una coppia esterna $u(t)$, che agisce come ingresso e rappresenta una variabile indipendente.

Equazione della dinamica costitutiva

Il momento della forza agente sul pendolo rispetto al punto di sospensione è dato da:

$$J\theta''(t) = -Mgl \sin \theta - q_r \theta'(t) + u(t)$$

dove:

- $J = Ml^2$ è il momento d'inerzia rispetto al punto di sospensione,
- q_r rappresenta un coefficiente di smorzamento viscoso,
- $u(t)$ è la coppia esterna applicata.

Sostituendo J si ottiene:

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t) - \frac{q_r}{Ml^2} \theta'(t) + \frac{1}{Ml^2} u(t)$$

Definiamo le variabili di stato come:

$$x_1(t) := \theta(t), \quad x_2(t) := \theta'(t)$$

quindi il vettore di stato è:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Il sistema in forma di equazioni differenziali ordinarie (ODE) diventa:

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = -\frac{g}{l} \sin x_1(t) - \frac{q_r}{Ml^2} x_2(t) + \frac{1}{Ml^2} u(t) \end{cases}$$

Osserviamo che la presenza del termine $\sin x_1(t)$ rende il sistema non lineare.

Punti di equilibrio

Un punto di equilibrio è una soluzione stazionaria del sistema, ovvero tale che $x(t) = \bar{x}$ e $u(t) = \bar{u}$ costanti. In questo caso, le derivate temporali sono nulle, quindi:

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\frac{g}{l} \sin \bar{x}_1 - \frac{q_r}{Ml^2} \bar{x}_2 + \frac{1}{Ml^2} \bar{u} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $\bar{x}_2 = 0$. Sostituendo nella seconda:

$$\sin \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{Mgl}$$

In particolare, se $\bar{u} = 0$, allora $\sin \bar{x}_1 = 0$ e quindi:

$$\bar{x}_1 \in \{0, \pi, 2\pi, \dots\}$$

Studio della stabilità locale: Linearizzazione

1) Punto di equilibrio “dal basso”

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0$$

Definiamo le variabili traslate:

$$\tilde{x}_1(t) := x_1(t) - \bar{x}_1, \quad \tilde{x}_2(t) := x_2(t) - \bar{x}_2$$

Quindi:

$$\begin{cases} \tilde{x}'_1(t) = \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}'_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(\tilde{x}_1(t)) - \frac{q_r}{Ml^2} \tilde{x}_2(t) \end{cases}$$

Poiché \tilde{x}_1 è piccolo, possiamo approssimare:

$$\sin \tilde{x}_1(t) \approx \tilde{x}_1(t)$$

Ottenendo così il sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \tilde{x}'_1(t) = \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}'_2(t) = -\frac{g}{l}\tilde{x}_1(t) - \frac{q_r}{Ml^2}\tilde{x}_2(t) \end{cases}$$

Che in forma matriciale diventa:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{q_r}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Poiché il termine $-\frac{g}{l}$ è negativo, l'equilibrio $\bar{x}_1 = 0$ risulta essere stabile una piccola perturbazione porta ad una forza restauratrice che riporta il pendolo verso il basso.

2) Punto di equilibrio “dall’alto”

$$\bar{x}_1 = \pi, \quad \bar{x}_2 = 0$$

Analogamente:

$$\tilde{x}_1(t) := x_1(t) - \pi, \quad \tilde{x}_2(t) := x_2(t)$$

L’equazione dinamica diventa:

$$\tilde{x}'_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(\tilde{x}_1(t) + \pi) - \frac{q_r}{Ml^2}\tilde{x}_2(t)$$

Sfruttando l’identità $\sin(\tilde{x}_1 + \pi) = -\sin(\tilde{x}_1)$:

$$\tilde{x}'_2(t) = \frac{g}{l}\tilde{x}_1(t) - \frac{q_r}{Ml^2}\tilde{x}_2(t)$$

Il sistema linearizzato risulta:

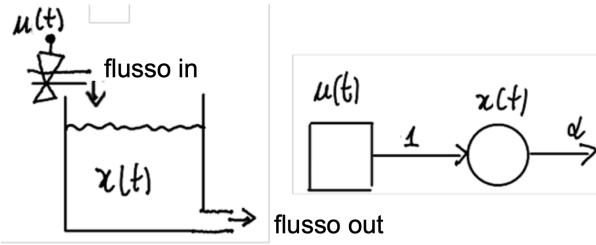
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{q_r}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Poiché il termine $\frac{g}{l}$ è positivo, il punto di equilibrio $\bar{x}_1 = \pi$ è instabile: una piccola perturbazione fa aumentare l’angolo, portando il pendolo a cadere.

In sintesi:

- $\bar{x}_1 = 0$: punto di equilibrio **stabile** (pendolo verso il basso).
- $\bar{x}_1 = \pi$: punto di equilibrio **instabile** (pendolo capovolto).

8.1.2 Esempio 2: Sistema Non Lineare - Serbatoio



Consideriamo un serbatoio con:

- flusso di ingresso $u(t)$,
- flusso di uscita proporzionale al livello del liquido: $\alpha x(t)$ nel caso lineare, $\alpha\sqrt{x(t)}$ nel caso non lineare.

Sia $x(t)$ il volume o livello del liquido nel serbatoio al tempo t .

Modello Lineare

Nel modello lineare, l'uscita è proporzionale direttamente allo stato $x(t)$:

$$x'(t) = u(t) - \alpha x(t)$$

Questo è un sistema dinamico lineare del primo ordine.

Modello Non Lineare

Nel modello non lineare, si assume che il flusso di uscita sia proporzionale alla *radice quadrata* del livello:

$$x'(t) = u(t) - \alpha\sqrt{x(t)}$$

La presenza della radice quadrata $\sqrt{x(t)}$ rende il sistema dinamico non lineare.

Punti di Equilibrio

I punti di equilibrio sono definiti come soluzioni costanti, cioè:

$$x(t) = \bar{x}, \quad u(t) = \bar{u}$$

In tali condizioni, la derivata temporale è nulla:

$$0 = \bar{u} - \alpha\sqrt{\bar{x}}$$

Da cui possiamo ricavare:

- se fissiamo \bar{x} , allora:

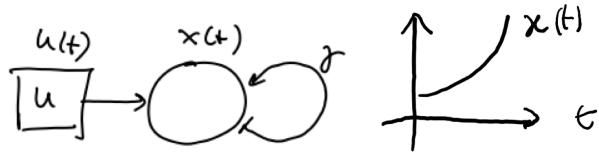
$$\bar{u} = \alpha\sqrt{\bar{x}}$$

- se fissiamo \bar{u} , allora:

$$\bar{x} = \left(\frac{\bar{u}}{\alpha}\right)^2 = \frac{\bar{u}^2}{\alpha^2}$$

Questi valori rappresentano le condizioni in cui il livello del serbatoio rimane costante nel tempo, cioè lo stato stazionario del sistema.

8.1.3 Esempio 3: Modello Logistico di Crescita della Popolazione



Sia $x(t)$ il numero di individui di una popolazione, assumendo che vi sia una sola classe d'età (cioè ogni individuo ha lo stesso comportamento riproduttivo e di sopravvivenza).

Tasso di crescita costante Introduciamo il parametro $\gamma > 0$, che rappresenta un tasso di crescita costante. Consideriamo il seguente modello lineare:

$$x'(t) = \gamma x(t) + u(t)$$

Dove $u(t)$ è un termine esterno (ad esempio, immigrazione/emigrazione netta).

Se $u(t) = 0$, allora la soluzione è:

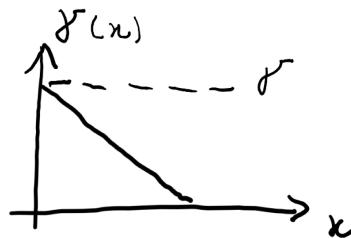
$$x(t) = x(0)e^{\gamma t}$$

Questo implica una crescita esponenziale illimitata, che è **poco realistica** nel lungo periodo, perché non tiene conto della competizione per risorse limitate.

Motivazione del modello non lineare In natura, la crescita della popolazione rallenta all'aumentare del numero di individui, a causa della limitatezza delle risorse (cibo, spazio, ecc.). È quindi più realistico assumere che il tasso di crescita sia **funzione decrescente della popolazione**.

Modello logistico (non lineare) Si assume che il tasso di crescita dipenda dalla popolazione stessa secondo la legge:

$$\gamma(x) = a \left(1 - \frac{x}{k}\right)$$



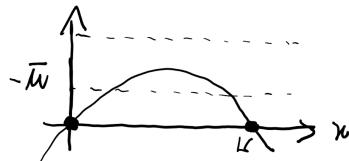
Dove:

- $a > 0$ è il tasso di crescita massimo (a bassa densità),
- $k > 0$ è la capacità portante dell'ambiente (massima popolazione sostenibile).

Il modello completo diventa:

$$x'(t) = \gamma(x(t)) \cdot x(t) + u(t) = a \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) x(t) + u(t)$$

Punti di equilibrio



Cerchiamo soluzioni stazionarie, ovvero:

$$x(t) = \bar{x}, \quad u(t) = \bar{u}$$

All'equilibrio si ha:

$$0 = \bar{x}' = a \left(1 - \frac{\bar{x}}{k}\right) \bar{x} + \bar{u}$$

Da cui possiamo ricavare:

- Se fissiamo lo stato \bar{x} , allora:

$$\bar{u} = -a \left(1 - \frac{\bar{x}}{k}\right) \bar{x}$$

- Se fissiamo l'ingresso \bar{u} , l'equilibrio \bar{x} si ricava risolvendo:

$$-\bar{u} = a \left(1 - \frac{\bar{x}}{k}\right) \bar{x}$$

Caso particolare: $\bar{u} = 0$ L'equazione diventa:

$$a \left(1 - \frac{\bar{x}}{k}\right) \bar{x} = 0$$

che ammette due soluzioni:

$$\bar{x} = 0 \quad \text{oppure} \quad \bar{x} = k$$

- $\bar{x} = 0$: la popolazione è estinta.
- $\bar{x} = k$: la popolazione è stabilizzata alla capacità portante.

Nota Se il valore di \bar{u} è troppo grande in valore assoluto (ad esempio, un flusso negativo eccessivo), allora l'equazione potrebbe non ammettere soluzioni reali positive. In tal caso, **non esiste un equilibrio ammissibile fisicamente**.

8.1.4 Esempio 4: Sistema Non Lineare - Ventola di Raffreddamento per CPU

Consideriamo un modello semplificato di raffreddamento di un processore (CPU) tramite una ventola. La variabile di stato è la temperatura del chip, $\theta(t)$. Il sistema scambia calore con l'ambiente esterno tramite convezione forzata.

Modello Termico

L'equazione di bilancio energetico (in forma differenziale) è la seguente:

$$M_{cp} \frac{d\theta(t)}{dt} = \phi_{gen} - u(\text{rpm}(t))(\theta(t) - \theta_a)$$

dove:

- M_{cp} è la capacità termica equivalente del chip (massa \times capacità termica specifica),
- ϕ_{gen} è il flusso di potenza termica generato dal processore,
- $u(\text{rpm}(t))$ è il coefficiente di scambio termico, funzione della velocità della ventola (in RPM),
- θ_a è la temperatura dell'aria esterna.

Dividendo entrambi i membri per M_{cp} :

$$\theta'(t) = \frac{1}{M_{cp}} [\phi_{gen} - u(\text{rpm}(t))(\theta(t) - \theta_a)]$$

Riformulazione con notazione di controllo

Introduciamo una nuova variabile di stato $x(t) := \theta(t)$ e tre ingressi:

- $u_1(t)$: potenza termica generata dal chip (ϕ_{gen}),
- $u_2(t)$: velocità della ventola (legata allo scambio termico),
- $u_3(t)$: temperatura dell'aria esterna.

Riscriviamo il modello come:

$$x'(t) = \alpha u_1(t) - \alpha u_2(t)x(t) + \alpha u_2(t)u_3(t)$$

dove $\alpha = \frac{1}{M_{cp}}$.

Non linearità del sistema: il termine $\alpha u_2(t)x(t)$ rappresenta il prodotto tra ingresso e stato, che è un termine **bilineare** e quindi rende il sistema **non lineare**.

Punti di Equilibrio

Definiamo lo stato e gli ingressi costanti all'equilibrio:

$$x(t) = \bar{x}, \quad u_1(t) = \bar{u}_1, \quad u_2(t) = \bar{u}_2, \quad u_3(t) = \bar{u}_3$$

Ponendo $x'(t) = 0$, si ottiene:

$$0 = \alpha\bar{u}_1 - \alpha\bar{u}_2\bar{x} + \alpha\bar{u}_2\bar{u}_3$$

Risolviamo per \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{\alpha\bar{u}_2} [\alpha\bar{u}_1 + \alpha\bar{u}_2\bar{u}_3] = \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} + \bar{u}_3$$

Osservazione

Questo equilibrio evidenzia come la temperatura stazionaria del chip dipenda:

- proporzionalmente al calore generato dal chip (\bar{u}_1),
- inversamente alla capacità di dissipazione della ventola (\bar{u}_2),
- e direttamente alla temperatura esterna (\bar{u}_3).

Il sistema resta non lineare anche se gli ingressi sono fissati, a ca

8.2 Sistemi non lineari a tempo continuo: struttura generale

Consideriamo un sistema dinamico continuo con:

- n variabili di stato: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$,
- m ingressi: $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$.

Sistema Lineare

Un sistema dinamico lineare può essere descritto dalla seguente struttura:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1m}u_m(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nm}u_m(t) \end{cases}$$

Forma compatta matriciale:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

dove:

- $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ è il vettore di stato,
- $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ è il vettore di ingresso,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice dinamica,
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è la matrice di ingresso.

Sistema Non Lineare

Nel caso non lineare, le equazioni del sistema assumono la forma:

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases}$$

Forma compatta vettoriale:

$$x'(t) = f(x(t), u(t))$$

dove $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un vettore funzione composto da n componenti non necessariamente lineari.

Esempi di Sistemi Non Lineari

1) Pendolo semplice

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ x'_2(t) = -\frac{g}{l} \sin x_1(t) - \frac{q_r}{Ml^2} x_2(t) + \frac{1}{Ml^2} u(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \end{cases}$$

2) Serbatoio

$$x'(t) = u(t) - \alpha \sqrt{x(t)} = f(x(t), u(t))$$

3) Popolazione (modello logistico)

$$x'(t) = a \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) x(t) + u(t) = f(x(t), u(t))$$

8.3 Sistemi non lineari a tempo discreto: struttura generale

Consideriamo ora un sistema dinamico a tempo discreto, cioè aggiornato a intervalli di tempo regolari. L'indice temporale è una variabile intera $k \in \mathbb{Z}$.

Abbiamo:

- n variabili di stato: $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$,
- m ingressi: $u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)$.

Sistema Lineare

Il sistema dinamico lineare a tempo discreto si esprime come:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_{11}u_1(k) + \dots + b_{1m}u_m(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_{n1}u_1(k) + \dots + b_{nm}u_m(k) \end{cases}$$

Forma compatta matriciale:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

dove:

- $x(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ è il vettore di stato al tempo k ,
- $u(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ è il vettore di ingresso,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice dinamica,
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è la matrice di ingresso.

Sistema Non Lineare

Nel caso non lineare, ogni equazione di stato può dipendere in modo arbitrario (non lineare) dalle variabili di stato e dagli ingressi:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = f_n(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \end{cases}$$

Forma compatta vettoriale:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un vettore funzione con n componenti, ciascuna delle quali descrive la dinamica di una variabile di stato.

8.4 Analisi dei punti di equilibrio: soluzioni costanti nel tempo

I punti di equilibrio (o stati stazionari/punti fissi) sono soluzioni del sistema in cui le variabili di stato e di ingresso restano costanti nel tempo. La loro determinazione dipende dalla natura del sistema: continuo o discreto.

Sistemi a tempo continuo

Si assume che le variabili di stato e gli ingressi siano costanti per ogni $t \geq 0$:

$$x_1(t) = \bar{x}_1, \dots, x_n(t) = \bar{x}_n, \quad u_1(t) = \bar{u}_1, \dots, u_m(t) = \bar{u}_m$$

La condizione di equilibrio si ottiene imponendo che tutte le derivate siano nulle, ovvero:

$$\begin{cases} \bar{x}'_1 = 0 = f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) \\ \vdots \\ \bar{x}'_n = 0 = f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere n equazioni in $n + m$ incognite (gli \bar{x}_i e gli \bar{u}_j). Le soluzioni ammissibili rappresentano gli **stati stazionari** del sistema.

Sistemi a tempo discreto

Nel caso discreto, si cercano soluzioni costanti per ogni $k \geq 0$:

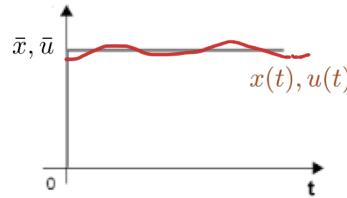
$$x_1(k) = \bar{x}_1, \dots, x_n(k) = \bar{x}_n, \quad u_1(k) = \bar{u}_1, \dots, u_m(k) = \bar{u}_m$$

Le equazioni di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) \\ \vdots \\ \bar{x}_n = f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) \end{cases}$$

Anche in questo caso si devono risolvere n equazioni in $n + m$ incognite. Le soluzioni corrispondono ai **punti fissi** del sistema dinamico.

8.5 Linearizzazione (intorno ai punti di equilibrio)



La linearizzazione è una tecnica utilizzata per approssimare un sistema non lineare con uno lineare in un intorno di un punto di equilibrio. È un passaggio fondamentale per analizzare localmente la stabilità del sistema o progettare controllori tramite tecniche lineari.

Prerequisito: determinazione dei punti di equilibrio

La linearizzazione può essere effettuata **solo** una volta che sono stati determinati i punti di equilibrio del sistema. Infatti:

- Prima: determinare i punti di equilibrio.
- Poi: linearizzare attorno a tali punti.
- Se non si trovano i punti di equilibrio, **non si può effettuare la linearizzazione**.

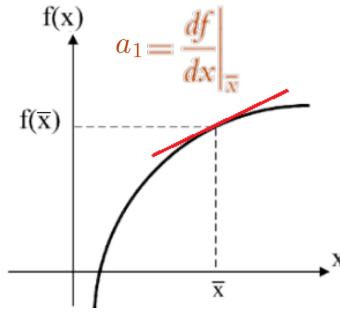
Concetto: sviluppo di Taylor intorno al punto di equilibrio

L'idea di base è che in un intorno del punto di equilibrio, i segnali di stato e di ingresso sono "piccoli", e si può approssimare il comportamento del sistema con lo sviluppo di Taylor al primo ordine.

Esempio: funzione in una sola variabile

Sia $f(x)$ una funzione differenziabile. Supponiamo di aver individuato un punto di equilibrio \bar{x} .

Allora, per x vicino a \bar{x} :



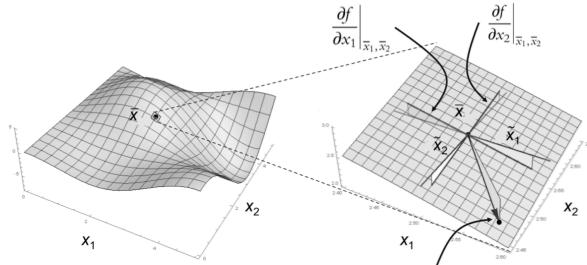
$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}\Big|_{\bar{x}} (x - \bar{x})$$

Poiché per definizione $f(\bar{x}) = 0$ in corrispondenza dell'equilibrio, si ha:

$$f(x) \approx \frac{df}{dx}\Big|_{\bar{x}} \cdot \tilde{x}$$

dove $\tilde{x} := x - \bar{x}$ rappresenta lo scostamento dalla condizione di equilibrio.

Esempio: funzione di due variabili



Sia $f(x_1, x_2)$ una funzione differenziabile in due variabili. Se \bar{x}_1 e \bar{x}_2 rappresentano il punto di equilibrio, allora per valori vicini:

$$f(x_1, x_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_2 - \bar{x}_2)$$

Come nel caso precedente, se $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$, allora:

$$f(x_1, x_2) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \cdot \tilde{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \cdot \tilde{x}_2$$

dove:

$$\tilde{x}_1 := x_1 - \bar{x}_1, \quad \tilde{x}_2 := x_2 - \bar{x}_2$$

Conclusione

La linearizzazione consente di rappresentare localmente il sistema con un modello lineare, utile per l'analisi della stabilità locale e per la progettazione di controllori. Tuttavia, è valida solo in un intorno sufficientemente piccolo del punto di equilibrio e non descrive il comportamento globale del sistema.

8.5.1 Linearizzazione – Sistemi a tempo continuo

Sia $(\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ un punto di equilibrio del sistema in esame.

La dinamica del sistema è descritta da funzioni non lineari f_i :

$$x'_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

Effettuiamo ora lo sviluppo di Taylor di primo ordine delle f_i attorno al punto di equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) :

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \approx f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (x_1(t) - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (x_n(t) - \bar{x}_n) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (u_1(t) - \bar{u}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (u_m(t) - \bar{u}_m) \end{aligned}$$

e analogamente per tutte le n equazioni.

Variabili traslate Introduciamo le variabili che descrivono gli scostamenti dal punto di equilibrio:

$$\tilde{x}_i(t) := x_i(t) - \bar{x}_i, \quad \tilde{u}_j(t) := u_j(t) - \bar{u}_j$$

Definiamo inoltre i coefficienti delle derivate parziali valutate in (\bar{x}, \bar{u}) :

$$a_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}, \quad b_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

Osservazione Il sistema traslato in \tilde{x} e \tilde{u} descrive la dinamica degli scostamenti rispetto al punto di equilibrio. In questo nuovo sistema, il punto di equilibrio corrisponde a:

$$\tilde{x} = 0, \quad \tilde{u} = 0$$

Forma compatta matriciale della linearizzazione

La linearizzazione completa può essere scritta in forma compatta come:

$$\tilde{x}'(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t)$$

dove:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con } i, j = 1, \dots, n, \quad B = (b_{ij}) \quad \text{con } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

8.5.2 Linearizzazione – Sistemi a tempo discreto

Sia $(\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ un punto di equilibrio del sistema a tempo discreto.

La dinamica del sistema è espressa tramite:

$$x_i(k+1) = f_i(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

Effettuiamo ora lo sviluppo di Taylor al primo ordine delle f_i attorno al punto di equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \approx f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (x_1(k) - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (x_n(k) - \bar{x}_n) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (u_1(k) - \bar{u}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (u_m(k) - \bar{u}_m) \end{aligned}$$

e in modo analogo per tutte le n equazioni.

Variabili traslate Definiamo ora le variabili traslate:

$$\tilde{x}_i(k) := x_i(k) - \bar{x}_i, \quad \tilde{u}_j(k) := u_j(k) - \bar{u}_j$$

e i coefficienti delle derivate parziali valutate nel punto di equilibrio:

$$a_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}, \quad b_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

Forma compatta matriciale della linearizzazione

La linearizzazione completa in forma matriciale è:

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + B\tilde{u}(k)$$

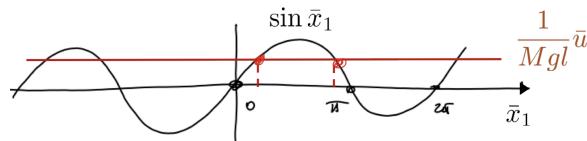
dove:

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad B = (b_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

Questa rappresentazione lineare locale permette di analizzare il comportamento del sistema discreto in un intorno del punto di equilibrio, e può essere utilizzata per studiare stabilità o progettare controlli discreti.

8.6 Applicazione della linearizzazione a tre esempi

8.6.1 Linearizzazione: Pendolo Semplificato (tempo continuo)



Il sistema dinamico è:

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ x'_2(t) = -\frac{g}{l} \sin x_1(t) - \frac{q_r}{Ml^2} x_2(t) + \frac{1}{Ml^2} u(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \end{cases}$$

Punti di equilibrio Imponendo $\bar{x}'_1(t) = \bar{x}'_2(t) = 0$, si ha:

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \sin \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{Mg} \end{cases}$$

Linearizzazione Definiamo:

$$\tilde{x}_1(t) := x_1(t) - \bar{x}_1, \quad \tilde{x}_2(t) := x_2(t) - 0, \quad \tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$$

Allora, la dinamica linearizzata è:

$$\tilde{x}'(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = 0 & a_{12} = \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = 1 \\ a_{21} = \frac{\delta f_2}{\delta x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = -\frac{q}{l} \cos(\bar{x}_1) & a_{22} = \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = -\frac{q_r}{Ml^2} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_1 = \frac{\delta f_1}{\delta u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = 0 \\ b_2 = \frac{\delta f_2}{\delta u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Esempi di linearizzazione per punti di equilibrio comuni:

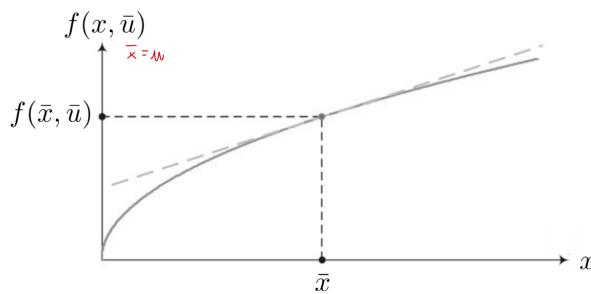
- Se $\bar{u} = 0$ e $\bar{x}_1 = 0$ (pendolo verso il basso), $\cos(\bar{x}_1) = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{q_r}{Ml^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

- Se $\bar{u} = 0$ e $\bar{x}_1 = \pi$ (pendolo capovolto), $\cos(\bar{x}_1) = -1$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g}{l} & -\frac{q_r}{Ml^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

8.6.2 Linearizzazione: Serbatoio (tempo continuo)



Il modello dinamico è:

$$x'(t) = u(t) - \alpha \sqrt{x(t)} = f(x, u)$$

Punto di equilibrio Fissato $\bar{u} > 0$, allora:

$$\bar{x} = \frac{\bar{u}^2}{\alpha^2}$$

Linearizzazione Definiamo:

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \bar{x}, \quad \tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$$

Derivate parziali:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} = -\alpha \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{\bar{x}} = -\frac{\alpha^2}{2\bar{u}}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial u} = 1$$

Dinamica linearizzata:

$$\tilde{x}'(t) = -\frac{\alpha^2}{2\bar{u}} \tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)$$

Nota: per $\bar{u} = 0$, la linearizzazione non è valida poiché \sqrt{x} non è derivabile in zero.

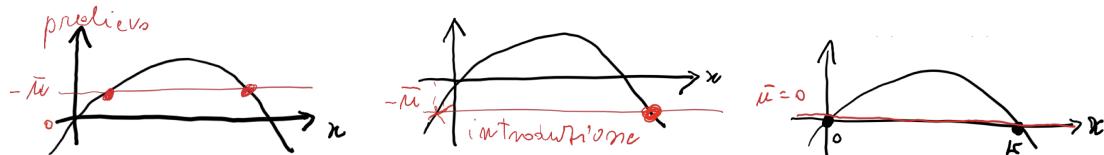
8.6.3 Linearizzazione: Modello di Popolazione (tempo continuo)

Modello:

$$x'(t) = a \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) x(t) + u(t) = f(x, u)$$

Punto di equilibrio Fissato \bar{u} , l'equilibrio si ottiene risolvendo:

$$-\bar{u} = a \left(1 - \frac{\bar{x}}{k} \right) \bar{x}$$



Linearizzazione Derivata parziale rispetto a x :

$$a_{11} = \frac{\partial f}{\partial x} = a \left(1 - \frac{2x}{k} \right) \Big|_{\bar{x}}$$

Derivata parziale rispetto a u :

$$b = \frac{\partial f}{\partial u} = 1$$

Definizioni:

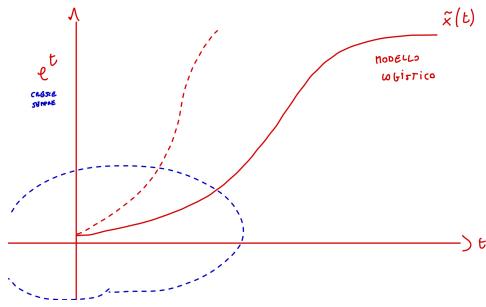
$$\tilde{x}(t) := x(t) - \bar{x}, \quad \tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$$

Esempi pratici:

- Se $\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} \in \{0, k\}$:

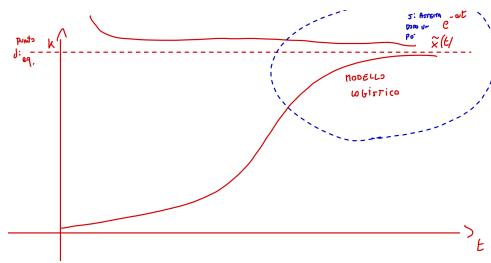
- Se $\bar{x} = 0$, allora $a_{11} = a$:

$$\tilde{x}'(t) = a\tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)$$



– Se $\bar{x} = k$, allora $a_{11} = -a$:

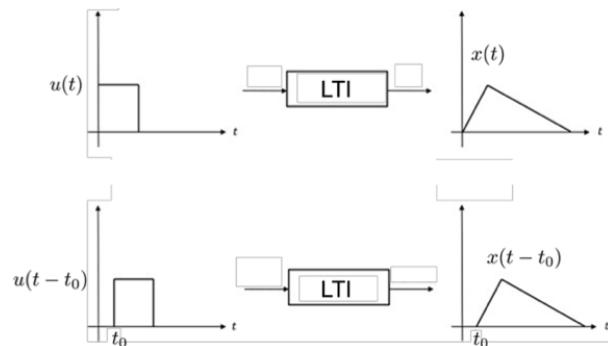
$$\tilde{x}'(t) = -a\tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)$$



Capitolo 9

Analisi dei Sistemi Lineari Tempo Invarianti a Tempo Continuo

9.1 Introduzione ai Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)



Consideriamo l'equazione generale di un sistema lineare tempo invariante (LTI) a tempo continuo:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j(t) \quad (9.1)$$

dove $x_j(t)$ rappresentano le componenti dello stato del sistema e $u_j(t)$ gli ingressi.

In forma matriciale, il sistema si esprime come:

$$\dot{x}_i = A_{n \times n} x_{n \times 1}(t) + B_{n \times m} u_{m \times 1}(t) \quad (9.2)$$

dove:

- $A = (a_{ij})$, con $i, j = 1, \dots, n$ è la matrice dei coefficienti di stato,
- $B = (b_{ij})$, con $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ è la matrice dei coefficienti di ingresso.

Tempo Invarianza

Il sistema è detto **tempo invariante** se i coefficienti delle matrici A e B non variano nel tempo. Un esempio fisico può essere un'asta che mantiene costante la sua lunghezza nel tempo.

Quando tutti i coefficienti del sistema sono costanti nel tempo, il sistema è sia **lineare** che **tempo invariante**, e viene definito come sistema **LTI** (Linear Time-Invariant).

Proprietà dei Sistemi LTI

In un sistema dinamico LTI valgono due proprietà fondamentali:

- **Principio di sovrapposizione degli effetti (linearità):** la risposta del sistema alla somma di ingressi è la somma delle risposte individuali.
- **Invarianza nel tempo:** le caratteristiche del sistema non cambiano nel tempo. Se, da una certa condizione iniziale, un ingresso $u(t)$ produce una risposta $x(t)$, allora un ingresso ritardato $u(t-t_0)$ produce una risposta ritardata $x(t-t_0)$.

Verifica della Sovrapposizione

Supponiamo di considerare un sistema dinamico espresso da:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9.3)$$

Siano:

- $x_{\cdot}(t)$ la soluzione associata a condizioni iniziali $x_{\cdot}(0)$ e ingresso $u_{\cdot}(t)$;
- $x_{..}(t)$ la soluzione associata a condizioni iniziali $x_{..}(0)$ e ingresso $u_{..}(t)$.

Allora, per la linearità del sistema, la combinazione:

$$\begin{aligned} x_{...}(0) &= \alpha x_{\cdot}(0) + \beta x_{..}(0) \\ u_{...}(t) &= \alpha u_{\cdot}(t) + \beta u_{..}(t) \end{aligned}$$

genera la risposta:

$$x_{...}(t) = \alpha x_{\cdot}(t) + \beta x_{..}(t) \quad (9.4)$$

Verifica diretta

Poiché $x_{\cdot}(t)$ e $x_{..}(t)$ sono soluzioni del sistema, abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{x}_{\cdot}(t) = Ax_{\cdot}(t) + Bu_{\cdot}(t) \\ \dot{x}_{..}(t) = Ax_{..}(t) + Bu_{..}(t) \end{cases} \quad (9.5)$$

Allora, derivando la combinazione lineare si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{...}(t) &= \alpha \dot{x}_{\cdot}(t) + \beta \dot{x}_{..}(t) \\ &= \alpha(Ax_{\cdot}(t) + Bu_{\cdot}(t)) + \beta(Ax_{..}(t) + Bu_{..}(t)) \\ &= A(\alpha x_{\cdot}(t) + \beta x_{..}(t)) + B(\alpha u_{\cdot}(t) + \beta u_{..}(t)) \\ &= Ax_{...}(t) + Bu_{...}(t) \end{aligned}$$

Quindi $x_{...}(t)$ è effettivamente soluzione del sistema con condizioni iniziali e ingresso combinati linearmente.

9.2 Sistemi LTI – Evoluzione Libera e Risposta Forzata

Consideriamo un sistema dinamico lineare tempo-invariante (LTI) descritto dall'equazione differenziale:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con assegnato un problema di Cauchy, cioè:

- un ingresso $u(t)$ specificato,
- condizioni iniziali (c.i.) assegnate: $x(0)$ e $u(0)$.

9.2.1 Evoluzione libera

Per *evoluzione libera* si intende la soluzione $x_l(t)$ del sistema dinamico a partire da condizioni iniziali assegnate $x(0)$ e in assenza di ingressi, cioè:

$$u(t) = 0 \Rightarrow Bu(t) = 0$$

In questo caso, l'equazione del sistema si riduce a:

$$x'(t) = Ax(t)$$

Questa soluzione non rappresenta la risposta generale del sistema completo $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, ma solo il caso particolare in cui $Bu(t) = 0$.

9.2.2 Risposta forzata

Per *risposta forzata* si intende la soluzione $x_f(t)$ del sistema dinamico a partire da condizioni iniziali nulle:

$$x(0) = 0$$

e ingresso assegnato non nullo $u(t)$.

In questo caso, se supponiamo che la parte libera del sistema sia nulla, cioè $Ax(t) = 0$, l'equazione si riduce a:

$$x'(t) = Bu(t)$$

Anche qui, la soluzione non rappresenta il comportamento completo del sistema, ma solo la risposta dovuta esclusivamente all'ingresso esterno.

9.2.3 Soluzione completa

Dato il sistema lineare:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

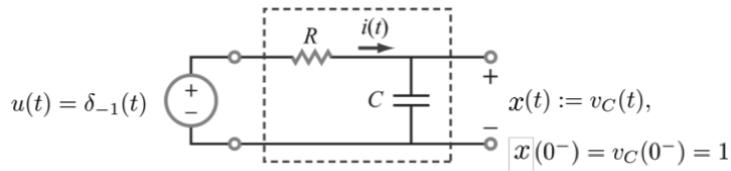
la soluzione completa del problema di Cauchy, cioè con condizioni iniziali assegnate e ingresso non nullo, è data dalla somma delle due componenti:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

dove:

- $x_l(t)$ è la risposta all'evoluzione libera (condizioni iniziali date, $u(t) = 0$),
- $x_f(t)$ è la risposta forzata (condizioni iniziali nulle, ingresso $u(t)$ assegnato).

9.2.4 Esempio: Circuito Elettrico RC



Consideriamo un circuito RC con ingresso:

$u(t)$: ingresso (è anche $\delta_{-1}(t)$, ovvero un gradino unitario, uno switch tra 1 e 0)

Definiamo come variabile di stato:

$$x(t) := v_c(t)$$

ossia la tensione ai capi del condensatore. Inoltre, supponiamo che:

$$x(0^-) = v_c(0^-) = 1$$

cioè inizialmente il condensatore ha tensione 1.

Utilizzando le **leggi di Kirchhoff**, sappiamo che la somma delle tensioni in un loop chiuso è nulla.

Applicandola al circuito:

$$u(t) = RC x'(t) + x(t)$$

Dividendo entrambi i membri per RC si ottiene:

$$x'(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t)$$

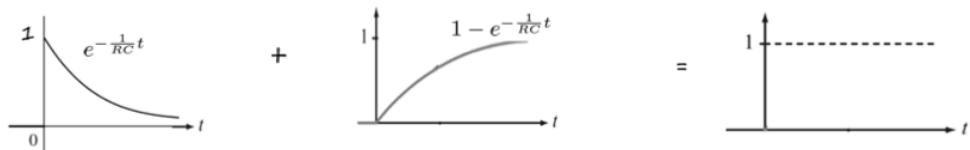


Figura 9.1: Evoluzione libera + Risposta Forzata = Risposta complessiva

Evoluzione libera: Condizione iniziale non nulla, ingresso nullo:

$$x(0) \neq 0, \quad u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_l(t)$$

La soluzione dell'equazione omogenea è:

$$x_l(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

che rappresenta un decadimento esponenziale nel tempo.

Risposta forzata: Condizione iniziale nulla, ingresso costante:

$$x(0) = 0, \quad u(t) = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_f(t)$$

La soluzione forzata assume la forma:

$$x_f(t) = 1 - e^{-\frac{1}{RC}t}$$

che cresce esponenzialmente da 0 a 1 (questo chiarisce l'intento del passaggio scritto come $e^{1-\frac{1}{RC}t}$).

Risposta complessiva: La soluzione totale del sistema è data dalla somma di evoluzione libera e risposta forzata:

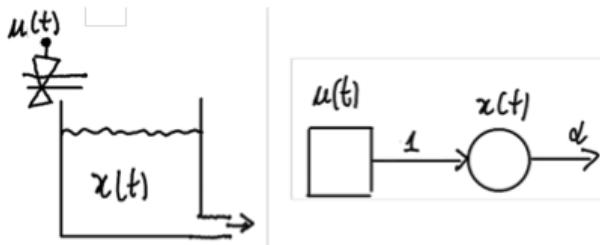
$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

che, con una costante iniziale pari a 1, diventa:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{RC}t} + (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = 1$$

Nel caso specifico, il sistema si stabilizza sull'ingresso costante.

9.2.5 Esempio: Serbatoio



Consideriamo un serbatoio con dinamica:

$$x'(t) = u(t) - \alpha x(t)$$

Evoluzione libera: Il serbatoio contiene inizialmente del liquido ($x(0) \neq 0$), ma non vi è immissione ($u(t) = 0$):

$$x'_l(t) = -\alpha x_l(t)$$

La soluzione dell'equazione omogenea è:

$$x_l(t) = x(0)e^{-\alpha t}$$

Verifica:

$$x'_l(t) = -\alpha x(0)e^{-\alpha t} = -\alpha(x(0)e^{-\alpha t})$$

Risposta forzata: Il serbatoio parte vuoto ($x(0) = 0$) e riceve un ingresso costante \bar{u} :

$$x'_f(t) = \bar{u} - \alpha x_f(t)$$

La soluzione è:

$$x_f(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\bar{u}$$

Verifica:

$$x'_f(t) = \bar{u} - \alpha \left(\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\bar{u} \right) = \bar{u} - (\bar{u} - \bar{u}e^{-\alpha t}) = \bar{u}e^{-\alpha t}$$

che è la derivata di $x_f(t)$ come atteso.

Risposta complessiva: Combinando le due soluzioni:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = x_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\bar{u}$$

9.3 Sistemi LTI – Calcolo dell’Evoluzione Libera: Modi Naturali Reali

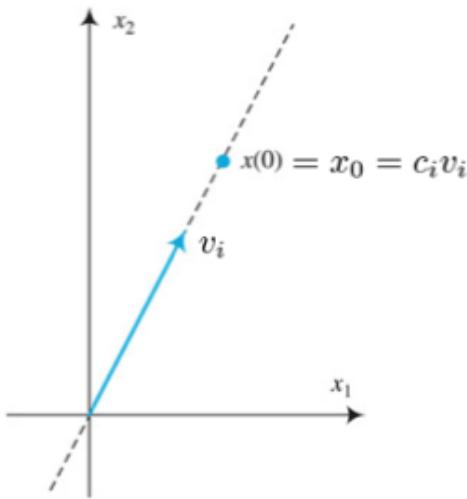
Cerchiamo la soluzione del sistema dinamico in assenza di ingresso e con condizione iniziale non nulla:

$$x(0) \neq 0, \quad u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_l(t)$$

La dinamica è governata da:

$$x'_l(t) = Ax_l(t)$$

9.3.1 Modi Naturali Reali – Caso Particolare



Consideriamo il caso in cui la condizione iniziale di stato sia proporzionale a un autovettore \$\mathbf{v}_i\$ della matrice \$A\$, ovvero:

$$x(0) = x_0 = c_i \mathbf{v}_i$$

Il vettore iniziale \$x_0\$ giace lungo la retta generata da \$\mathbf{v}_i\$. Ricordiamo che:

$$Av_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

dove \$\mathbf{v}_i\$ è un autovettore e \$\lambda_i\$ è il corrispondente autovalore.

La soluzione sarà:

$$x_l(t) = c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i = x_0 e^{\lambda_i t}$$

La funzione \$e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i\$ rappresenta il **modo naturale** associato all'autovalore \$\lambda_i\$.

Verifica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i) &= c_i \lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \\ A(c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i) &= c_i e^{\lambda_i t} Av_i = c_i \lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

Quindi l'identità è verificata.

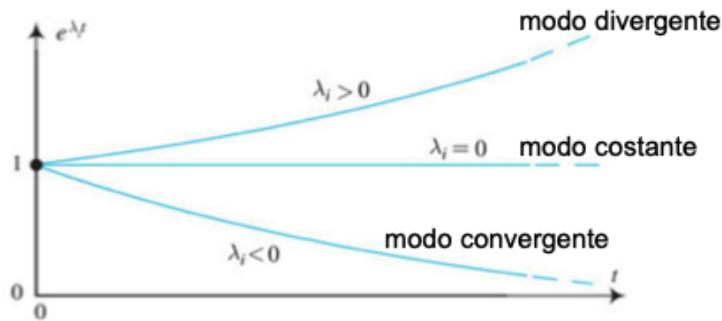
Condizione iniziale: Valutando per $t = 0$:

$$x_l(0) = c_i e^{\lambda_i \cdot 0} v_i = c_i v_i = x_0$$

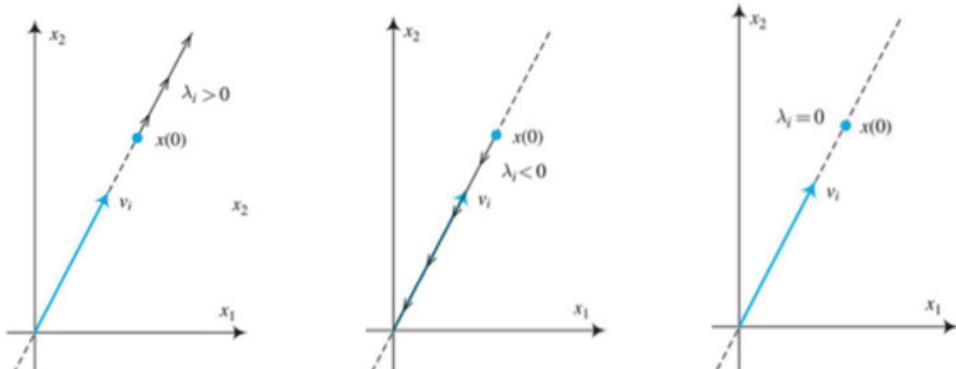
Andamento del modo naturale $e^{\lambda_i t} v_i$

Il comportamento dipende dal segno dell'autovalore λ_i :

- $\lambda_i > 0$: modo divergente
- $\lambda_i < 0$: modo convergente
- $\lambda_i = 0$: modo costante



Traiettorie nello spazio di stato: La traiettoria dell'evoluzione libera si origina e rimane confinata nel sottospazio unidimensionale (una retta) identificato dall'autovettore v_i . Questo sottospazio è detto *sottospazio invariante* (o autospazio) del sistema.



Costante di tempo: L'opposto dell'inverso di un autovalore negativo è detto **costante di tempo** del modo naturale:

$$\tau_i = -\frac{1}{\lambda_i}$$

9.3.2 Modi Naturali Reali – Caso Generale

Consideriamo ora il caso più generale in cui lo stato iniziale del sistema è un punto qualsiasi dello spazio di stato, e gli autovalori della matrice A sono reali e distinti.

Siano v_1, \dots, v_n gli autovettori di A che formano una base dello spazio di stato n -dimensionale. Ogni stato iniziale si può scrivere come combinazione lineare:

$$x_0 = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

Per la linearità del sistema, l'evoluzione libera è:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$$

L'evoluzione libera è dunque combinazione lineare di n modi naturali, ciascuno con traiettoria lungo il proprio sottospazio unidimensionale.

Esempio

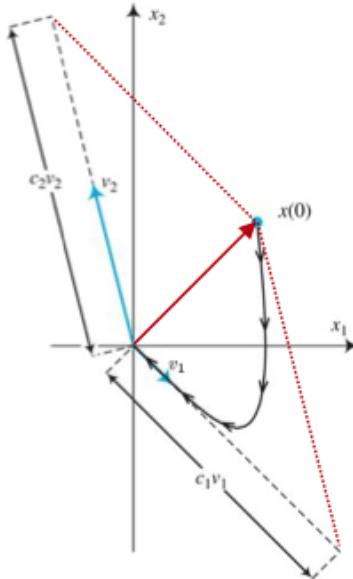
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1) Calcolo degli autovalori:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -5 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4$$

Polinomio caratteristico: $(\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0$



2) Calcolo degli autovettori:

Per $\lambda_1 = -1$:

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{11} + v_{12} = 0 \\ -4v_{11} - 4v_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per $\lambda_2 = -4$:

$$A + 4I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4v_{21} + v_{22} = 0 \\ -4v_{21} - v_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Entrambi gli autovalori sono negativi: i modi sono convergenti e la traiettoria converge verso l'origine $(0,0)$.

3) Scomposizione dello stato iniziale:

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ -c_1 + 4c_2 \end{bmatrix}$$

Sistema:

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 3 \\ -c_1 + 4c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 5, \quad c_2 = 2$$

4) Evoluzione libera:

$$x_l(t) = 5e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2e^{-4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 2e^{-4t} \\ -5e^{-t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Nota

I coefficienti c_1 e c_2 si possono anche calcolare come soluzione del sistema lineare:

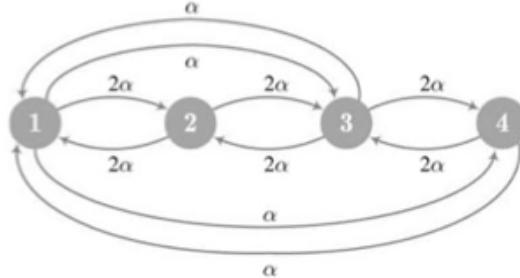
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Osservazione generale:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}^{-1} x_0$$

dove v_1, \dots, v_n sono gli autovettori di A .

9.3.3 Esempio: Traffico Automobilistico



Siano x_1, x_2, x_3, x_4 le quantità di veicoli presenti in ciascuna delle quattro città.

Il sistema dinamico che descrive l'evoluzione del numero di veicoli è:

$$x'(t) = Ax(t) = \alpha \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} x(t)$$

Autovalori

Calcoliamo gli autovalori di A risolvendo:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Gli autovalori risultano essere:

$$\lambda_1 = -7.34\alpha, \quad \lambda_2 = -5.47\alpha, \quad \lambda_3 = -3.18\alpha, \quad \lambda_4 = 0$$

Autovettori

Gli autovettori corrispondenti (calcolati risolvendo $(A - \lambda I)v = 0$) sono:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.23 \\ 0.56 \\ -0.69 \\ 0.37 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0.77 \\ 0.36 \\ 0.50 \\ -0.09 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.55 \\ -0.07 \\ -0.77 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Caso 1: Stato Iniziale Uniforme

Supponiamo che inizialmente i veicoli siano distribuiti uniformemente:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow x_0 = \frac{N}{2} v_4$$

Osservazione 1: Poiché lo stato iniziale x_0 è allineato con l'autovettore v_4 (associato all'autovalore nullo $\lambda_4 = 0$), l'evoluzione libera rimane confinata nel sottospazio generato da v_4 :

$$x_l(t) = e^{\lambda_4 t} x_0 = x_0$$

La distribuzione dei veicoli non cambia nel tempo.

Caso 2: Tutti i veicoli nella prima città

Supponiamo che inizialmente tutti i veicoli siano nella prima città:

$$x_0 = \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proiettiamo x_0 sulla base degli autovettori v_1, \dots, v_4 :

$$x_0 = (-0.23)v_1N + (-0.77)v_2N + 0.30v_3N + 0.25v_4N$$

Evoluzione libera:

$$x_l(t) = -0.23Ne^{-7.34\alpha t} \begin{bmatrix} -0.23 \\ 0.56 \\ -0.69 \\ 0.37 \end{bmatrix} - 0.77Ne^{-5.47\alpha t} \begin{bmatrix} -0.77 \\ 0.36 \\ 0.50 \\ -0.09 \end{bmatrix} + 0.30Ne^{-3.18\alpha t} \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.55 \\ -0.07 \\ -0.77 \end{bmatrix} + Ne^0 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Conclusione

L'evoluzione libera del sistema è composta da tre modi naturali *convergenti* (associati ad autovalori negativi) e un modo *costante* (associato a $\lambda_4 = 0$).

Al passare del tempo, le componenti esponenziali si annullano e la soluzione converge verso il modo costante:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_l(t) = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} N$$

Cioè, a regime, la distribuzione dei veicoli si uniforma tra le quattro città.

9.4 Sistemi LTI – Calcolo dell’Evoluzione Libera: Modi Naturali Complessi

È sempre possibile decomporre un problema di Cauchy in due parti: *evoluzione libera* e *risposta forzata*. In questa sezione approfondiamo il caso in cui tra gli autovalori della matrice A siano presenti valori complessi coniugati.

Modi Naturali Complessi

Supponiamo:

$$x(0) \neq 0, \quad u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_l(t)$$

La dinamica è:

$$x'_l(t) = Ax_l(t), \quad x_l(0) = x_0$$

Ipotesi: Tra gli autovalori della matrice A ci sono anche autovalori complessi coniugati:

$$\lambda_k = \alpha_k \pm j\omega_k$$

I corrispondenti autovettori, tali che $Av_k = \lambda_k v_k$, sono anch’essi complessi coniugati:

$$v_k = v_{ka} \pm jv_{kb}$$

Condizione iniziale: Supponiamo che lo stato iniziale sia una combinazione reale dei vettori reale e immaginario:

$$x_0 = c_{ka}v_{ka} + c_{kb}v_{kb}$$

dove x_0 è un punto nello spazio di stato e c_{ka}, c_{kb} sono coefficienti scalari.

Evoluzione libera: La soluzione generale associata ai modi naturali complessi è:

$$x_l(t) = m_k e^{\alpha_k t} [\sin(\omega_k t + \phi_k)v_{ka} + \cos(\omega_k t + \phi_k)v_{kb}]$$

- L’esponenziale $e^{\alpha_k t}$ rappresenta la crescita o il decadimento (parte reale).
- La parte oscillatoria $\sin(\omega_k t + \phi_k)$ e $\cos(\omega_k t + \phi_k)$ è dovuta alla parte immaginaria ω_k .

Questa è la forma reale del **modo naturale complesso**:

$$e^{\alpha_k t} [\sin(\omega_k t + \phi_k)v_{ka} + \cos(\omega_k t + \phi_k)v_{kb}]$$

dove:

$$m_k = \sqrt{c_{ka}^2 + c_{kb}^2}$$

$$\phi_k : \begin{cases} \sin \phi_k = \frac{c_{ka}}{m_k} \\ \cos \phi_k = \frac{c_{kb}}{m_k} \end{cases}$$

Verifica della Soluzione

Vogliamo verificare che l'evoluzione libera proposta sia effettivamente una soluzione dell'equazione differenziale:

$$x_l'(t) = Ax_l(t)$$

Poiché $Av_k = \lambda_k v_k$, abbiamo:

$$A(v_{ka} \pm jv_{kb}) = (\alpha_k \pm j\omega_k)(v_{ka} \pm jv_{kb})$$

quindi l'azione della matrice A sui vettori reali e immaginari genera dinamiche coerenti con la struttura della soluzione proposta.

Condizione Iniziale

Verifichiamo che la soluzione soddisfi la condizione iniziale:

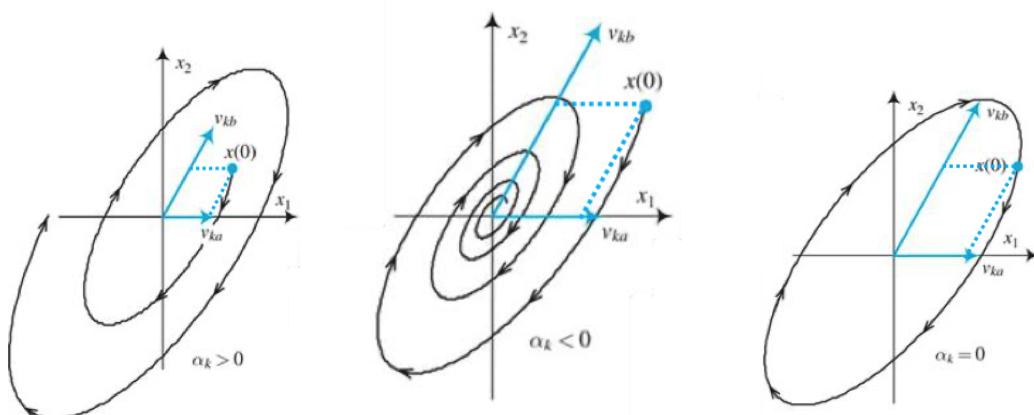
$$x_l(0) = m_k e^{\alpha_k \cdot 0} [\sin(\phi_k)v_{ka} + \cos(\phi_k)v_{kb}] = c_{ka}v_{ka} + c_{kb}v_{kb} = x_0$$

Pertanto, anche la condizione iniziale è verificata.

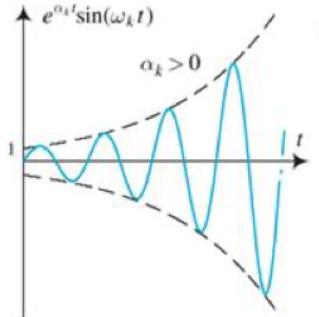
Conclusione: Quando gli autovalori della matrice A sono complessi coniugati, il comportamento del sistema include componenti oscillatorie (dovute alla parte immaginaria) combinate con una crescita o decadimento esponenziale (dovuti alla parte reale). La soluzione reale si ottiene combinando le parti reale e immaginaria degli autovettori.

9.5 Traiettorie nello Spazio di Stato dell'Evoluzione Libera

Le traiettorie dell'evoluzione libera nel piano di stato dipendono dal tipo di modi naturali complessi presenti nel sistema, ovvero dal valore della parte reale α_k dell'autovalore $\lambda_k = \alpha_k \pm j\omega_k$.



9.5.1 Modo Oscillatorio Divergente



$$\alpha_k > 0 \quad (\text{parte reale positiva})$$

Le coordinate iniziali dello stato sono $x_1(0), x_2(0)$.

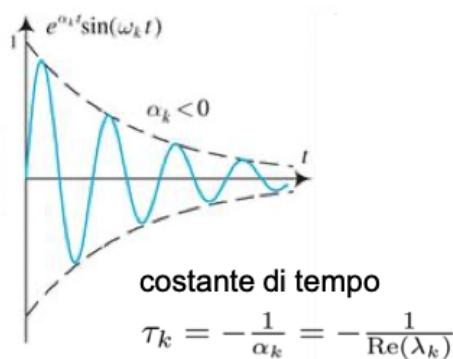
Siano v_{ka}, v_{kb} gli autovettori associati alla parte reale e immaginaria dell'autovalore complesso, e c_{ka}, c_{kb} i coefficienti che li combinano per ricostruire la condizione iniziale $x(0)$:

$$x(0) = c_{ka}v_{ka} + c_{kb}v_{kb}$$

La traiettoria segue un comportamento oscillatorio con ampiezza crescente:

$$x_l(t) \sim e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t)$$

9.5.2 Modo Oscillatorio Convergente



$$\alpha_k < 0 \quad (\text{parte reale negativa})$$

Le coordinate iniziali dello stato sono $x_1(0), x_2(0)$.

Anche in questo caso si utilizzano gli autovettori v_{ka}, v_{kb} e i coefficienti c_{ka}, c_{kb} per definire $x(0)$.

La traiettoria segue un comportamento oscillatorio con ampiezza decrescente:

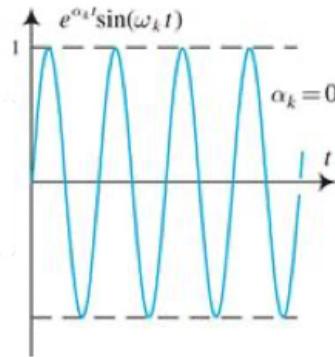
$$x_l(t) \sim e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t)$$

Costante di tempo Per i modi convergenti, è possibile definire la costante di tempo:

$$\tau_k = \frac{1}{|\alpha_k|} = -\frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_k)}$$

Essa rappresenta il tempo caratteristico con cui il moto si smorza verso l'origine.

9.5.3 Modo Oscillatorio Periodico



$$\alpha_k = 0 \quad (\text{parte reale nulla})$$

Le coordinate iniziali sono $x_1(0), x_2(0)$. Come negli altri casi, si usano gli autovettori v_{ka}, v_{kb} e i coefficienti c_{ka}, c_{kb} .

La parte esponenziale scompare ($e^0 = 1$), per cui resta solo l'oscillazione pura:

$$x_l(t) \sim \sin(\omega_k t)$$

La traiettoria nello spazio di stato descrive una **figura chiusa** (in genere un'ellisse), corrispondente a un *moto periodico* non smorzato.

9.5.4 Esempio: Evoluzione Libera con Modi Naturali Complessi

Consideriamo il sistema:

$$x'(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

1) Calcolo degli Autovalori

Calcoliamo l'equazione caratteristica:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Risolvendo l'equazione quadratica:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm j2 = \alpha_1 \pm j\omega_1$$

2) Interpretazione

La parte reale dell'autovalore è $\alpha_1 = 1 > 0$, quindi l'evoluzione libera è **divergente**.

Ci aspettiamo quindi una *spirale divergente* che si allontana dall'origine.

3) Calcolo degli Autovettori

Cerchiamo l'autovettore v associato a $\lambda_1 = 1 + j2$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - (1 + 2j) & -2 \\ 2 & 1 - (1 + 2j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2j & -2 \\ 2 & -2j \end{bmatrix}$$

Cerchiamo $v = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ tale che $(A - \lambda I)v = 0$:

$$\begin{cases} -2jp - 2q = 0 \\ 2p - 2jq = 0 \end{cases} \Rightarrow q = -jp$$

Scegliendo $p = j$, otteniamo:

$$v = \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_{1a} + jv_{1b}$$

Quindi:

$$v_{1a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{1b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'autovettore coniugato complesso è:

$$v^* = v_{1a} - jv_{1b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) Calcolo delle Costanti

Scomponiamo lo stato iniziale:

$$x_0 = c_{1a}v_{1a} + c_{1b}v_{1b} = c_{1a} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_{1b} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$c_{1a} = 0.5, \quad c_{1b} = -0.5$$

Calcolo di m_1 :

$$m_1 = \sqrt{c_{1a}^2 + c_{1b}^2} = \sqrt{0.5^2 + (-0.5)^2} = \sqrt{0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Calcolo di ϕ :

$$\sin \phi = \frac{c_{1a}}{m_1} = \frac{0.5}{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \phi = \frac{c_{1b}}{m_1} = \frac{-0.5}{1/\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi:

$$\phi = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{II quadrante})$$

5) Evoluzione Libera

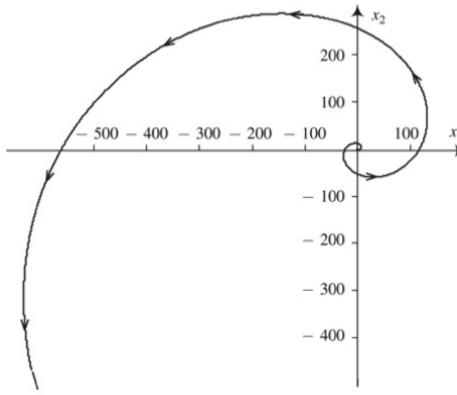
La soluzione è:

$$x_l(t) = m_1 e^{\alpha_1 t} [\sin(\omega_1 t + \phi_1) v_{1a} + \cos(\omega_1 t + \phi_1) v_{1b}]$$

Sostituendo i valori:

$$x_l(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \left[\sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \begin{bmatrix} \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

La traiettoria descrive una **spirale divergente** in senso antiorario nel piano (x_1, x_2) .



9.6 Sistemi LTI – Evoluzione Libera

- In generale, l'evoluzione libera è data da una **combinazione lineare dei modi naturali** corrispondenti agli autovalori (reali e complessi) della matrice A .
- I modi naturali sono **evoluzioni libere particolari**, ciascuna relativa alla componente dello stato iniziale proiettata lungo un autovettore. Ogni autovettore definisce un **sottospazio invariante** per la traiettoria associata.

Espessione generale dell'evoluzione libera Supponiamo che la matrice dinamica A abbia n autovalori distinti (reali o complessi). Allora, l'espressione dell'evoluzione libera è:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} v_i + \sum_{k=1}^v m_k e^{\alpha_k t} [\sin(\omega_k t + \phi_k) v_{ka} + \cos(\omega_k t + \phi_k) v_{kb}]$$

dove:

- μ : numero di autovalori reali distinti,
- v : numero di coppie di autovalori complessi coniugati,
- c_i : coefficienti delle componenti lungo gli autovettori reali v_i ,

- m_k : modulo della combinazione iniziale nel piano generato da v_{ka}, v_{kb} ,
- $\alpha_k \pm j\omega_k$: autovalori complessi,
- v_{ka}, v_{kb} : parte reale e immaginaria degli autovettori complessi,
- ϕ_k : fase iniziale.

Condizione iniziale La condizione iniziale x_0 può essere scritta come:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\mu} c_i v_i + \sum_{k=1}^v (c_{ka} v_{ka} + c_{kb} v_{kb})$$

Osservazione Noti:

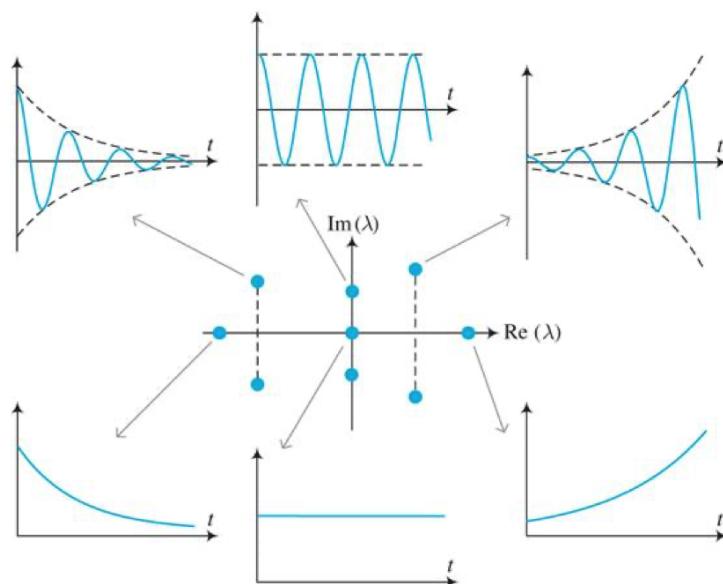
- gli autovalori e gli autovettori della matrice A ,
 - i coefficienti c_i, c_{ka}, c_{kb} ottenuti dalla proiezione di x_0 sugli autospazi,
- l'evoluzione libera del sistema è **univocamente determinata**.

Leggi Temporali e Autovalori

Le leggi temporali che governano l'evoluzione libera dipendono dalla posizione degli autovalori nel piano complesso:

- Autovalori con parte reale negativa: modi convergenti.
- Autovalori con parte reale positiva: modi divergenti.
- Autovalori con parte reale nulla (e parte immaginaria non nulla): moto periodico.

Una volta determinati gli autovalori, è già possibile abbozzare il comportamento qualitativo delle soluzioni. Successivamente, l'evoluzione libera può essere quantificata numericamente sulla base dei valori specifici.



9.7 L'Esponente di una Matrice

Per comprendere il significato dell'esponenziale di una matrice, si può fare riferimento alla sua rappresentazione come serie di Taylor, simile a quanto avviene per lo scalare.

Definizione: L'esponenziale di una matrice A è definito come:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Nel caso scalare, questa espressione coincide con lo sviluppo in serie di Taylor dell'esponenziale nella variabile x centrato in 0. Nel contesto matriciale, I sostituisce il termine "1" iniziale ed è la matrice identità.

9.7.1 Esempio

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo i primi termini della serie:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Poiché $A^2 = 0$, tutti i termini successivi della serie saranno nulli.

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osservazione: Questo è un caso particolare in cui la serie di potenze dell'esponenziale si tronca dopo pochi termini a causa della nilpotenza della matrice (cioè $A^k = 0$ per $k \geq 2$).

9.8 Sistemi LTI – Calcolo della Risposta Forzata

La **risposta forzata** è la soluzione del sistema dinamico quando l'ingresso è diverso da zero e lo stato iniziale è nullo:

$$x'_f(t) = Ax_f(t) + Bu(t), \quad x_f(0) = 0$$

Soluzione tramite Convoluzione

Si può verificare che la soluzione generale è data da:

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Utilizzando la formula di Leibniz per la derivata di un integrale a estremi variabili:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, \tau) d\tau = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) d\tau$$

si ottiene:

$$x'_f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = Bu(t) + Ax_f(t)$$

Osservazione: Questa è la soluzione di un'equazione differenziale con stato iniziale nullo. In alternativa, per ingressi semplici, può essere utile passare al dominio di Laplace.

9.8.1 Esempio: Ingresso Costante $u(t) = \bar{u}$

Nel caso di ingresso costante:

$$x_f(t) = \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau \right) \bar{u}$$

Ponendo $\epsilon = t - \tau$, si ha:

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau = \int_0^t e^{A\epsilon} B d\epsilon$$

Caso 1: A invertibile

Se la matrice A è invertibile:

$$\int_0^t e^{A\epsilon} B d\epsilon = [A^{-1} e^{A\epsilon}]_0^t = A^{-1}(e^{At} - I)$$

$$x_f(t) = A^{-1}(e^{At} - I)B\bar{u}$$

Caso 2: A non invertibile

- Se B è una colonna: $e^{A\epsilon} B$ è la risposta libera a partire da $x_0 = B$

$$x_f(t) = \left(\int_0^t x_l(\epsilon) \Big|_{x_0=B} d\epsilon \right) \bar{u}$$

- Se B ha m colonne (cioè m ingressi), per il principio di sovrapposizione:

$$x_f(t) = \sum_{i=1}^m \left(\int_0^t e^{A\epsilon} [B]_i d\epsilon \right) \bar{u}_i$$

9.8.2 Esempio Numerico

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2]^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Risposta libera:

$$x_l(t) = e^{At} B = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = 5e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2e^{-4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 2e^{-4t} \\ -5e^{-t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Risposta forzata:

$$x_f(t) = \left[\int_0^t \begin{bmatrix} 5e^{-\tau} - 2e^{-4\tau} \\ -5e^{-\tau} + 8e^{-4\tau} \end{bmatrix} d\tau \right] \bar{u} = \begin{bmatrix} -5e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{9}{2} \\ 5e^{-t} - 2e^{-4t} - 3 \end{bmatrix} \bar{u}$$

Verifica con la Formula $x_f(t) = A^{-1}(e^{At} - I)B\bar{u}$

Poiché A è invertibile e diagonalizzabile (2 autovettori linearmente indipendenti), possiamo scrivere:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

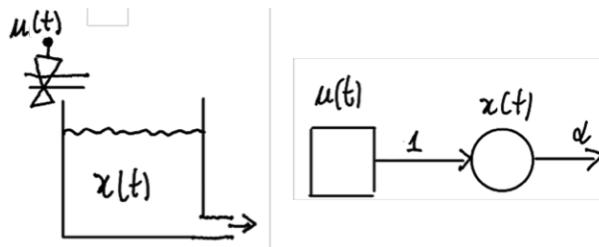
$$A = VDV^{-1}, \quad e^{At} = Ve^{Dt}V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4e^{-t} - e^{-4t} & e^{-t} - e^{-4t} \\ -4e^{-t} + 4e^{-4t} & -e^{-t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} - I = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4e^{-t} - e^{-4t} - 3 & e^{-t} - e^{-4t} \\ -4e^{-t} + 4e^{-4t} & -e^{-t} + 4e^{-4t} - 3 \end{bmatrix}$$

$$x_f(t) = A^{-1}(e^{At} - I)B\bar{u} = \begin{bmatrix} -5e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{9}{2} \\ 5e^{-t} - 2e^{-4t} - 3 \end{bmatrix} \bar{u}$$

Osservazione finale: La verifica coincide con il risultato ottenuto tramite integrazione diretta della risposta libera.

9.8.3 Esempio: Serbatoio con Ingresso e Perdita



Consideriamo un serbatoio che riceve un flusso di liquido in ingresso e presenta una perdita proporzionale alla quantità di liquido contenuta:

$$x'(t) = u(t) - \alpha x(t)$$

I parametri del sistema sono:

- $A = -\alpha$
- $B = 1$
- $u(t) = \bar{u}$ (ingresso costante)

Calcolo della risposta forzata Applichiamo la formula generale per la risposta forzata:

$$x_f(t) = \left(\int_0^t e^{A\epsilon} B d\epsilon \right) \bar{u}$$

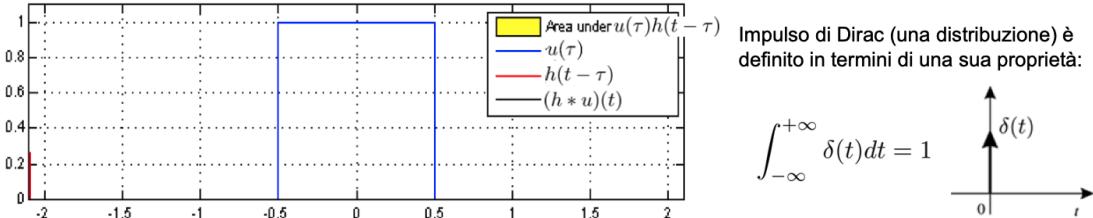
Osservando che $x_l(\epsilon) = e^{A\epsilon}$ con $x_0 = B = 1$, possiamo scrivere:

$$x_f(t) = \left(\int_0^t x_l(\epsilon) d\epsilon \right) \bar{u} = \left(\int_0^t e^{-\alpha\epsilon} d\epsilon \right) \bar{u}$$

$$x_f(t) = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\epsilon} \right]_0^t \bar{u} = \left(-\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - 1) \right) \bar{u} = -\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - 1) \bar{u}$$

Questa è la risposta forzata del sistema, cioè l'evoluzione del livello del liquido nel serbatoio nel tempo, sotto l'effetto di un ingresso costante e una perdita proporzionale alla quantità contenuta.

9.9 Sistemi LTI – Risposta Forzata e Convoluzione



La risposta forzata di un sistema LTI è strettamente collegata a due concetti fondamentali:

- la **convoluzione**
- la **risposta impulsiva**

9.9.1 Risposta Forzata come Convoluzione

La risposta forzata si può scrivere come:

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Questa forma rappresenta un **prodotto di convoluzione** tra una funzione di risposta $h(t)$ e il segnale di ingresso $u(t)$.

Forma generale della convoluzione

$$x_f(t) = (h * u)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

Nel contesto dei sistemi **causali** (cioè $h(t) = 0$ per $t < 0$), questa diventa:

$$x_f(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

dove:

$$h(t) := e^{At} B$$

Osservazione: Anche se l'espressione generale della convoluzione prevede un intervallo da $-\infty$ a $+\infty$, nei sistemi causali $h(t)$ è nulla per $t < 0$, e spesso anche $u(t)$ è definita solo per $t \geq 0$. Quindi l'integrale si restringe all'intervallo $[0, t]$.

9.9.2 Risposta Impulsiva

Richiamiamo brevemente la **funzione delta di Dirac** $\delta(t)$:

- $\delta(t) = 0$ per $t \neq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)$

Caso $u(t) = \delta(t)$: Se l'ingresso è un impulso di Dirac, si ottiene:

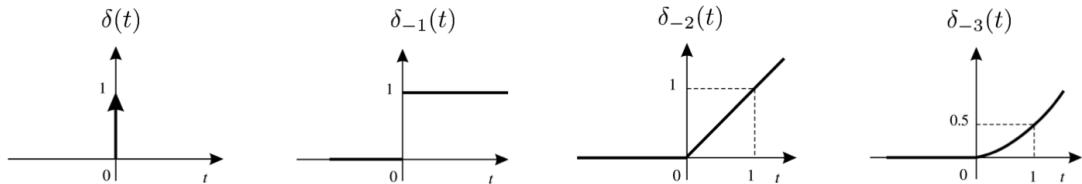
$$x_f(t) \Big|_{u(t)=\delta(t)} = (h * \delta)(t) = h(t)$$

Quindi, la **risposta impulsiva** del sistema coincide con la funzione $h(t) = e^{At}B$.

Interpretazione fisica: Stimolare un sistema dinamico con un impulso $\delta(t)$ equivale a "colpirlo" istantaneamente con un segnale infinitamente breve e infinitamente intenso, la cui area è unitaria. È come colpire un tavolo con un martello: dalla risposta osservata (es. vibrazioni, cedimenti) si deducono le caratteristiche dinamiche interne del sistema.

Conclusione: la risposta impulsiva contiene tutte le informazioni dinamiche del sistema. La risposta a qualunque altro ingresso $u(t)$ può essere ottenuta come convoluzione tra $u(t)$ e $h(t)$.

9.9.3 Nota: Segnali Canonici e il Loro Legame



Relazioni tra segnali canonici

I segnali canonici come il delta di Dirac, il gradino unitario e le loro primitive sono legati tra loro da operazioni di integrazione e derivazione:

Integrazione

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \delta_{-1}(t) \quad (\text{gradino unitario})$$

$$\int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) d\tau = \delta_{-2}(t)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta_{-2}(\tau) d\tau = \delta_{-3}(t)$$

Derivazione Si possono invertire queste relazioni con la derivazione:

$$\delta_{-2}(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-3}(t)$$

$$\delta_{-1}(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-2}(t)$$

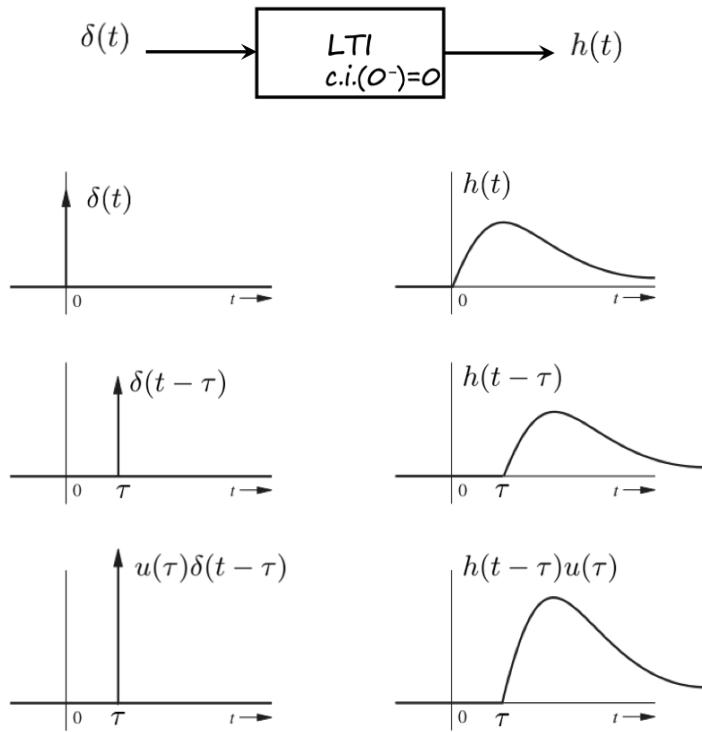
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-1}(t)$$

Interpretazione Operativa della Risposta Impulsiva

Abbiamo visto che, per un sistema **lineare tempo-invariante** (LTI) con condizioni iniziali nulle:

- Se l'ingresso è $\delta(t)$, l'uscita è la **risposta impulsiva** $h(t)$
- Se l'ingresso è $\delta(t - \tau)$, l'uscita è $h(t - \tau)$ (traslazione)
- Se l'ingresso è $u(\tau)\delta(t - \tau)$, l'uscita è $u(\tau)h(t - \tau)$ (scalatura)

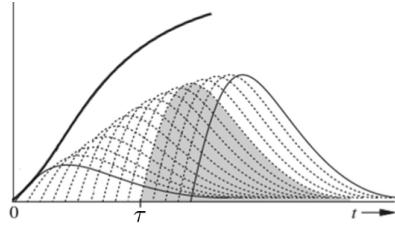
Osservazione: Questo modello può essere interpretato come una *somma continua di "martellate"* distribuite nel tempo, ciascuna pesata per l'ampiezza dell'ingresso $u(\tau)$ in quel momento.



Convoluzione come Somma di Risposte Impulsive

$$x_f(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

Questa è la formula della convoluzione. Essa rappresenta la **risposta forzata** del sistema come la somma pesata di tutte le risposte impulsive traslate nel tempo e scalate in base all'ingresso $u(\tau)$.

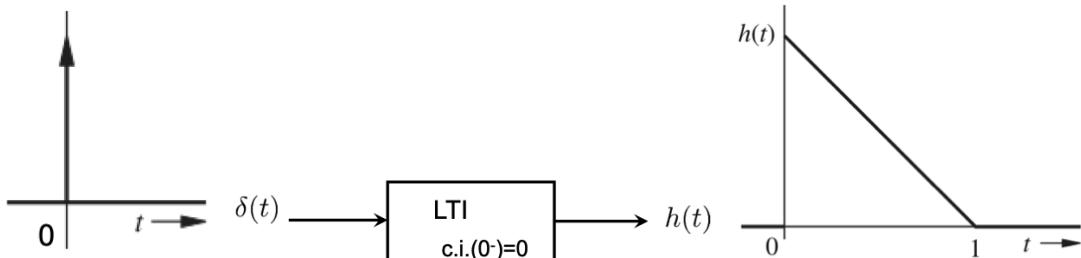


Interpretazione: La funzione $h(t)$ è un **ingrediente fondamentale**, perché consente di determinare la risposta del sistema a qualsiasi ingresso $u(t)$. L'uscita risultante $x_f(t)$ è quindi la somma continua (convoluzione) dei contributi dinamici generati da ogni istante di ingresso.

9.9.4 Risposta Forzata: Perché la Convoluzione?

Può sembrare curioso che la risposta di un sistema lineare sia data da un'operazione come la **convoluzione**, in cui un segnale è fissato (la risposta impulsiva) e l'altro è invertito e traslato. Per comprendere meglio questo meccanismo, consideriamo il seguente esempio.

9.9.5 Esempio Intuitivo



Supponiamo di avere una risposta impulsiva ipotetica $h(t)$ che decresce linearmente nel tempo. Essa è massima in $t = 0$ (quando agisce l'impulso), poi decresce linearmente fino ad annullarsi dopo 1 secondo.

- Quanto più l'istante t è vicino al tempo in cui si verifica un impulso, tanto più esso influenzerà l'uscita al tempo t .

Approssimazione dell'ingresso

Consideriamo un ingresso generico $u(t)$ e pensiamo di approssimarlo mediante una somma di impulsi regolari (o rettangolari) nel tempo.

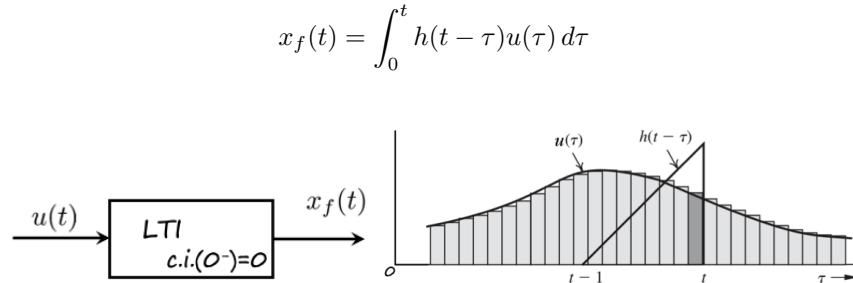
- Per un sistema causale, la risposta al tempo t dipende solo dalle componenti impulsive di $u(t)$ **precedenti a t** .
- Ogni impulso contribuisce con un peso diverso alla risposta al tempo t , a seconda della sua distanza da t .
- L'impulso più vicino a t ha peso massimo.
- Il peso decresce linearmente per gli impulsi precedenti fino a $t - 1$.
- Gli impulsi prima di $t - 1$ non influenzano l'uscita: hanno peso nullo.

Funzione peso Questa funzione di peso è proprio la funzione:

$$h(t - \tau)$$

La risposta del sistema al tempo t è determinata dall'ingresso pesato $u(\tau)h(t - \tau)$.

Passaggio al continuo La somma degli ingressi pesati si trasforma in un integrale nel limite in cui l'ampiezza degli impulsi tende a zero:



Sintesi

- $u(t)$: ingresso
- LTI con condizioni iniziali $x(0^-) = 0$
- $x_f(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) d\tau$: uscita forzata

9.9.6 Calcolo della Risposta Forzata per Ingresso Generico

Il calcolo diretto nel dominio del tempo dell'integrale di convoluzione:

$$x_f(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

può essere **computazionalmente oneroso**.

Soluzione alternativa: Conviene quindi spesso adottare un metodo basato sulla **trasformata di Laplace**, che converte la convoluzione in un semplice prodotto algebrico:

$$\mathcal{L}\{x_f(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\}$$

9.10 Trasformata di Laplace e Calcolo dell'Integrale di Convoluzione

Motivazione

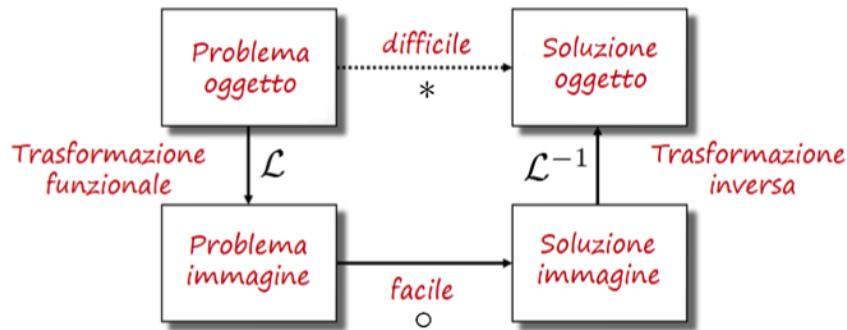
Nel calcolo della risposta forzata tramite convoluzione:

$$x_f(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

l'integrale nel dominio del tempo può risultare complesso. Le **trasformazioni funzionali** offrono un potente strumento per semplificare questi calcoli, trasformando un problema difficile nel dominio del tempo in uno più semplice nel dominio delle variabili complesse.

Idea chiave: Un oggetto difficile da trattare nel “mondo del tempo” può risultare molto più semplice se rappresentato in un altro dominio.

9.10.1 Trasformazioni Funzionali



Le trasformazioni funzionali stabiliscono una **corrispondenza biunivoca** fra:

- Funzioni oggetto: tipicamente funzioni del tempo $f(t)$
- Funzioni immagine: trasformate associate $F(s)$

Operazioni complesse sulle funzioni oggetto corrispondono a operazioni più semplici sulle funzioni immagine. Dopo la soluzione nel dominio immagine, si ritorna al dominio originale tramite l'operazione di **anti-trasformazione** (o trasformazione inversa).

Formalismo

Sia L l'operatore di trasformazione funzionale (es. la trasformata di Laplace):

$$\begin{cases} L : f \mapsto F \\ L : * \mapsto \circ \end{cases}$$

dove:

- $*$ è un'operazione nel dominio delle funzioni oggetto (es. convoluzione)
- \circ è un'operazione più semplice nel dominio delle funzioni immagine (es. prodotto)

Esempio:

$$f * g = h \quad (\text{nel dominio del tempo})$$

$$F \cdot G = H \quad (\text{nel dominio trasformato})$$

$$L(f * g) = F \cdot G \quad \Rightarrow \quad f * g = L^{-1}(F \cdot G)$$

Quindi la trasformazione funzionale ci consente di calcolare:

$$h = f * g = L^{-1}(F \cdot G) = L^{-1}(H)$$

Conclusione

L'uso della trasformata di Laplace trasforma il difficile problema del calcolo di un integrale di convezione in una semplice moltiplicazione algebrica nel dominio complesso, seguita da un'operazione di anti-trasformazione per tornare alla soluzione nel dominio del tempo.

9.10.2 Funzioni di Variabili Complesse

Una **trasformata di Laplace** prende in ingresso una funzione reale del tempo e la trasforma in una funzione definita su un dominio complesso.

Funzione trasformata:

$$F(s)$$

Se la trasformata $F(s)$ esiste per una certa funzione $f(t)$, allora possiamo dire che il processo di trasformazione è ben definito.

Definizione di funzione complessa

Una funzione F di variabile complessa s si definisce specificando due funzioni di variabili reali:

- $u(\sigma, \omega)$: parte reale di $F(s)$
- $v(\sigma, \omega)$: parte immaginaria di $F(s)$

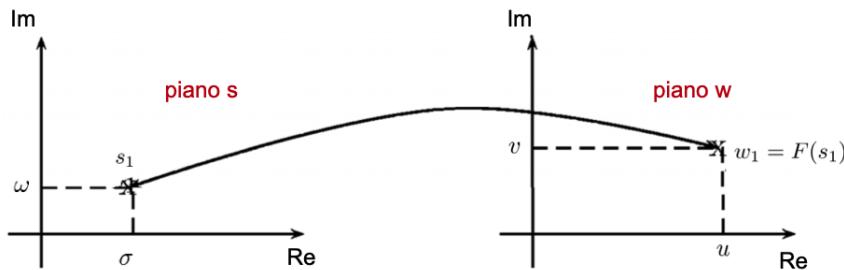
Questa definizione stabilisce una **corrispondenza biunivoca** tra punti del:

- piano di Gauss della variabile indipendente s
- e piano della variabile dipendente $w = F(s)$

Espressione della variabile complessa

$$s = \sigma + j\omega \quad \Rightarrow \quad w = F(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$$

Osservazione: Ogni punto s del piano complesso viene trasformato in un punto w del piano immagine, attraverso le componenti reale e immaginaria della funzione $F(s)$.



9.10.3 Trasformata di Laplace

- Sia $f(t)$ una funzione (reale nei casi di nostro interesse) di variabile reale:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Si definisce **trasformata di Laplace unilatera**¹ di f , la funzione F (se esiste!) complessa di variabile complessa così definita:

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$s = \sigma + j\omega \quad \Rightarrow \quad F(s) = \mathcal{L}(f(t)) := \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Nota: nel contesto della trasformata di Laplace, il tempo (variabile indipendente originaria) si trova nel dominio della funzione $f(t)$, mentre s è la variabile nel dominio trasformato.

- L'integrale è da considerarsi calcolato lungo qualunque retta parallela all'asse immaginario inclusa nel dominio di F . Questo significa che si può integrare per valori di s con parte reale costante, ossia $s = \sigma + j\omega$ con σ fissato.
- L'intervallo di integrazione $[0^-, +\infty]$ fa riferimento a una funzione f causale (nulla per $t < 0$), quindi a un sistema fisicamente realizzabile. Tale formulazione è utile in presenza di condizioni iniziali (c.i.) non nulle, molto comuni nelle applicazioni ingegneristiche.
- L'estremo inferiore 0^- si considera per includere eventuali componenti impulsive (cioè contributi di tipo Dirac delta in $t = 0$).
- Il fattore e^{-st} ha la funzione di rendere finito l'integrale. Infatti, $e^{-st} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, il che può “smorzare” la crescita di $f(t)$, rendendo l'integrale convergente. Se $f(t)$ è limitata, la trasformata esiste certamente. Se invece diverge, $F(s)$ esiste solo se e^{-st} tende a zero più rapidamente di quanto $f(t)$ tende a infinito. In tal caso, il prodotto $f(t)e^{-st}$ ha comunque un valore finito.
- L'esponente $-st$ dev'essere adimensionale. Di conseguenza, l'unità di misura di s è l'inverso del tempo, cioè $[s] = s^{-1}$. Questo conferma che s ha natura di *frequenza complessa* o *pulsazione complessa*.
- Essendo l'integrale calcolato tra 0^- e $+\infty$, si tratta di un integrale improprio, da interpretare come limite per $t \rightarrow +\infty$.
- Poiché si tratta di un integrale definito (gli estremi di integrazione sono noti), il risultato non dipende da t , ma solo dal parametro s . La trasformata $F(s)$ è quindi funzione di s , non del tempo.
- Per trasformare una funzione tramite la trasformata di Laplace non è sempre necessario calcolare esplicitamente l'integrale. Per molte funzioni comuni, la trasformata è già nota e riportata in apposite tabelle.

9.10.4 Proprietà della Trasformata di Laplace

- **Unicità**

La trasformata di Laplace (quando esiste) è unica: due funzioni causali che hanno la stessa trasformata coincidono quasi ovunque (tranne eventualmente su un insieme di misura nulla).

¹Trasformata di Laplace unilatera: relativa (ristretta) a funzioni f causali, ovvero nulle per $t < 0$

- **Linearità**

La trasformata di Laplace è un operatore lineare:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}).

- **Proprietà della Derivata**

La trasformata della derivata di una funzione (causale e sufficientemente regolare) è data da:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

In generale, per la derivata n-esima:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - \cdots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0^-)$$

- **Integrale**

La trasformata di un integrale (a partire da 0) è:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

- **Convoluzione**

La trasformata della convoluzione di due funzioni è il prodotto delle loro trasformate:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

dove $(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$.

- **Traslazione temporale**

Se $f(t)$ ha trasformata $F(s)$, allora:

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)u(t - t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$$

dove $u(t)$ è la funzione gradino di Heaviside.

- **Traslazione in frequenza**

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, allora:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

- **Teorema del valore iniziale**

Se $f(t)$ e $f'(t)$ sono entrambe trasformabili, allora:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- **Teorema del valore finale**

Se esistono i limiti e tutti i poli di $sF(s)$ sono a parte reale negativa (tranne eventualmente in $s = 0$), allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

9.10.5 Lista Trasformate di Laplace

Di seguito vengono riportate alcune trasformate fondamentali di funzioni comunemente utilizzate nell'analisi dei sistemi dinamici.

| Funzione del tempo | \longrightarrow | Trasformata di Laplace |
|--|-------------------|------------------------|
| $\delta(t)$ impulso di Dirac | | 1 |
| $\delta_{-1}(t)$ gradino unitario | | $\frac{1}{s}$ |
| $\delta_{-2}(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)$ rampa unitaria | | $\frac{1}{s^2}$ |

Nota:

- $\delta(t)$: impulso di Dirac, funzione generalizzata con effetto impulsivo in $t = 0$, area unitaria.
- $\delta_{-1}(t)$: rappresenta il gradino unitario (funzione di Heaviside), ovvero una funzione nulla per $t < 0$ e pari a 1 per $t \geq 0$.
- $\delta_{-2}(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)$: rampa unitaria, funzione che cresce linearmente da 0 con pendenza 1, a partire da $t = 0$.

9.10.6 Esempi di Trasformata di Laplace

| Funzione del tempo | \longrightarrow | Trasformata di Laplace |
|--|-------------------|---|
| e^{at} (esponenziale) | | $\frac{1}{s - a}$ |
| $\sin(\omega t)$ (sinusoide) | | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\cos(\omega t)$ (cosinusoide) | | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2} t)$ (fattore smorzato sinusoidale) | | $\frac{1}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2}$ (fattore trinomio) |
| $e^{-at} \cos(\omega t)$ (traslazione + trasformata) | | $\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$ |
| $e^{-at} \sin(\omega t)$ (traslazione + trasformata) | | $\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$ |

Nota:

- ω : è un parametro che, nel dominio del tempo, moltiplica la variabile t . Non va confuso con ω come parte immaginaria di s nel dominio complesso.

Quando si ha un **Problema Oggetto**, ossia un problema nel dominio del tempo (legato a funzioni come $f(t)$), si può applicare la trasformata di Laplace per convertirlo in un **Problema Immagine**, nel dominio s , dove la risoluzione risulta più semplice (grazie alla linearità e alla trasformazione di derivate in polinomi di s).

Dopo aver risolto il problema in s , si esegue l'anti-trasformata di Laplace per ritornare alla **Soluzione Oggetto**, ovvero nel dominio del tempo. Questo approccio è particolarmente utile nell'analisi di sistemi dinamici e circuituali.

9.11 Anti-Trasformazione di Laplace di $Y(s)$: (Poli semplici, rapporti di polinomi in s)

Supponiamo di avere una funzione razionale del tipo:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} = \frac{C_1}{s - \lambda_1} + \cdots + \frac{C_i}{s - \lambda_i} + \cdots + \frac{C_n}{s - \lambda_n}$$

Poli: sono gli zeri del denominatore $D(s)$, cioè le radici dell'equazione caratteristica.

Due tipologie principali di poli (cioè radici λ):

- Poli reali singoli
- Poli reali multipli (molteplicità > 1)
- Poli complessi semplici
- Poli complessi con molteplicità > 1

Fattorizzazione: si utilizza la scomposizione in fratti semplici. I coefficienti C_i (detti *residui*) sono associati ai singoli poli λ_i , e sono calcolabili come:

$$C_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) F(s)$$

Questo processo va ripetuto per tutti i poli (fattori del denominatore).

Attenzione: i poli λ possono essere:

- Reali (con $\lambda \in \mathbb{R}$)
- Complessi coniugati (cioè $\lambda = \sigma \pm j\omega$)

Anti-trasformazione di ciascun termine:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C_i}{s - \lambda_i} \right\} = C_i e^{\lambda_i t}$$

Ad esempio, se $C_i = 2$, si ha:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s - \lambda_i} \right\} = 2e^{\lambda_i t}$$

Caso di poli complessi coniugati: Siano $\lambda = \sigma \pm j\omega$ e i corrispondenti residui $C, C^* = a \pm jb$.

Allora:

$$Ce^{\lambda t} + C^* e^{\lambda^* t} = (a + jb)e^{(\sigma+j\omega)t} + (a - jb)e^{(\sigma-j\omega)t}$$

Sviluppando:

$$\begin{aligned} &= 2ae^{\sigma t} \cos(\omega t) - 2be^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ &= 2e^{\sigma t} (a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

Osservazione: le esponenziali complesse possono essere riscritte come combinazioni di funzioni trigonometriche reali, utilizzando la **formula di Eulero**:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Conclusione: Se ho un polo complesso e il suo coniugato, e i relativi residui, per ottenere l'anti-trasformata sommo:

$$Ce^{\lambda t} + C^* e^{\lambda^* t}$$

E il risultato sarà una funzione del tipo:

$$\text{esponenziale reale} \times (\text{coseno} + \text{seno})$$

che rappresenta un segnale oscillante smorzato.

9.11.1 Esempio: Poli semplici reali

Sia:

$$F(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s-3)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s-3}$$

Calcolo dei residui:

$$r_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s+1) \frac{(s-1)}{(s+1)(s-3)} \right] = \left[\frac{s-1}{s-3} \right]_{s=-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$r_2 = \lim_{s \rightarrow 3} \left[(s-3) \frac{(s-1)}{(s+1)(s-3)} \right] = \left[\frac{s-1}{s+1} \right]_{s=3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$F(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s-3)} = \frac{0.5}{s+1} + \frac{0.5}{s-3}$$

Anti-trasformata:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 0.5e^{-t} + 0.5e^{3t}$$

Nota: la trasformata inversa è ottenuta riconoscendo che:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}$$

9.11.2 Esempio: Poli semplici complessi coniugati

Sia:

$$F(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2-2s+2)} = \frac{r_1}{s+2} + \frac{r_2}{s-(1+j)} + \frac{r_2^*}{s-(1-j)}$$

Calcolo dei residui:

$$r_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \cdot \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2-2s+2)} \right] = \left[\frac{s+1}{s^2-2s+2} \right]_{s=-2} = -\frac{1}{10}$$

$$r_2 = \lim_{s \rightarrow 1+j} \left[(s-(1+j)) \cdot \frac{(s+1)}{(s+2)(s-(1+j))(s-(1-j))} \right] = \left[\frac{s+1}{(s+2)(s-(1-j))} \right]_{s=1+j}$$

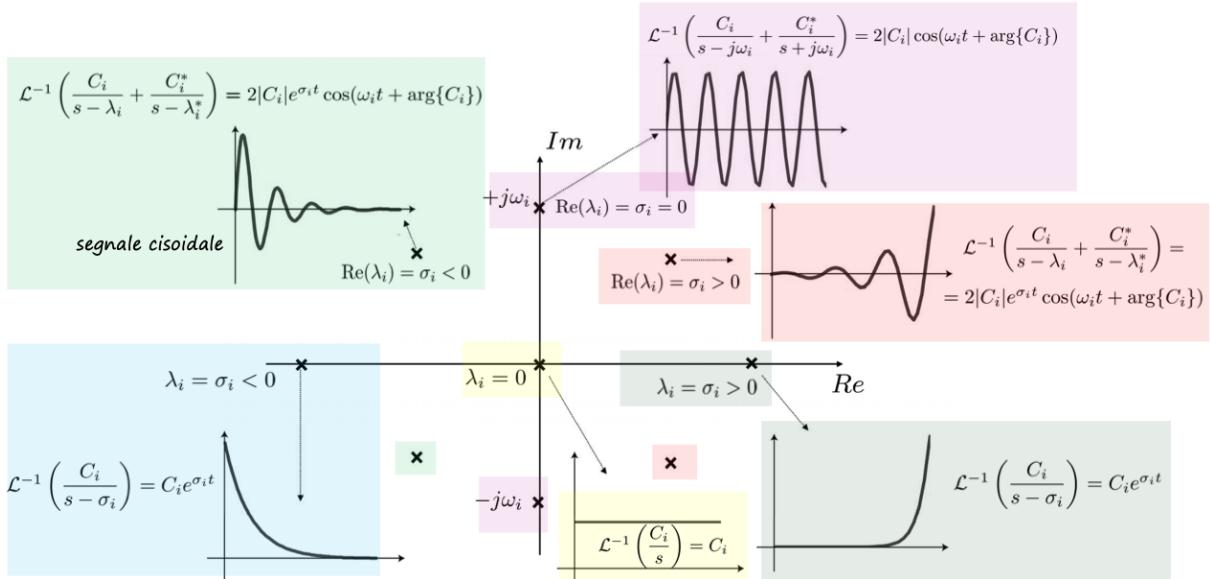
$$r_2 = \frac{1}{20} - j \cdot \frac{7}{20}, \quad r_2^* = \frac{1}{20} + j \cdot \frac{7}{20}$$

Anti-trasformata:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{10}e^{-2t} + \left(\frac{1}{20} - j \cdot \frac{7}{20} \right) e^{(1+j)t} + \left(\frac{1}{20} + j \cdot \frac{7}{20} \right) e^{(1-j)t}$$

$$= -\frac{1}{10}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^t (\cos t + 7 \sin t), \quad t \geq 0$$

Nota sul termine $s - \lambda$: Ogni termine della forma $\frac{1}{s-\lambda}$ ha trasformata inversa del tipo $e^{\lambda t}$. A seconda della parte reale e immaginaria di λ , il comportamento nel tempo cambia.



Comportamenti delle esponenziali complesse

Senza componente immaginaria (poli reali):

- Parte reale negativa ($s - \lambda$ con $\lambda > 0$): esponenziale decrescente \rightarrow convergente a 0
- Parte reale nulla ($s - 0$): funzione costante
- Parte reale positiva ($s + \lambda$ con $\lambda > 0$): esponenziale crescente \rightarrow divergente a $+\infty$

Con componente immaginaria (poli complessi):

- Parte reale negativa: oscillazioni decrescenti (smorzate)
- Parte reale nulla: oscillazioni costanti (onda pura)
- Parte reale positiva: oscillazioni crescenti (instabili)

Riassunto:

- Se λ puramente reale \rightarrow nessuna oscillazione
- Se λ ha parte immaginaria positiva e parte reale positiva \rightarrow oscillazioni crescenti
- Se λ ha parte immaginaria positiva e parte reale negativa \rightarrow oscillazioni decrescenti
- Se parte reale nulla \rightarrow oscillazione costante (nessuna crescita o smorzamento)

Anti-Trasformazione di Laplace di $Y(s)$: (Poli multipli)

Nel caso in cui la funzione $F(s)$ abbia **poli multipli**, ovvero radici del denominatore con molteplicità $\mu_i > 1$, la scomposizione in fratti parziali assume la forma:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \cdots + \frac{N(s)}{(s - \lambda_1)^{\mu_1}(s - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (s - \lambda_n)^{\mu_r}} = \cdots \\ &= \frac{C_{i,0}}{(s - \lambda_1)} + \cdots + \frac{C_{i,1}}{(s - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{C_{i,\mu_i-1}}{(s - \lambda_i)^{\mu_i}} + \cdots \end{aligned}$$

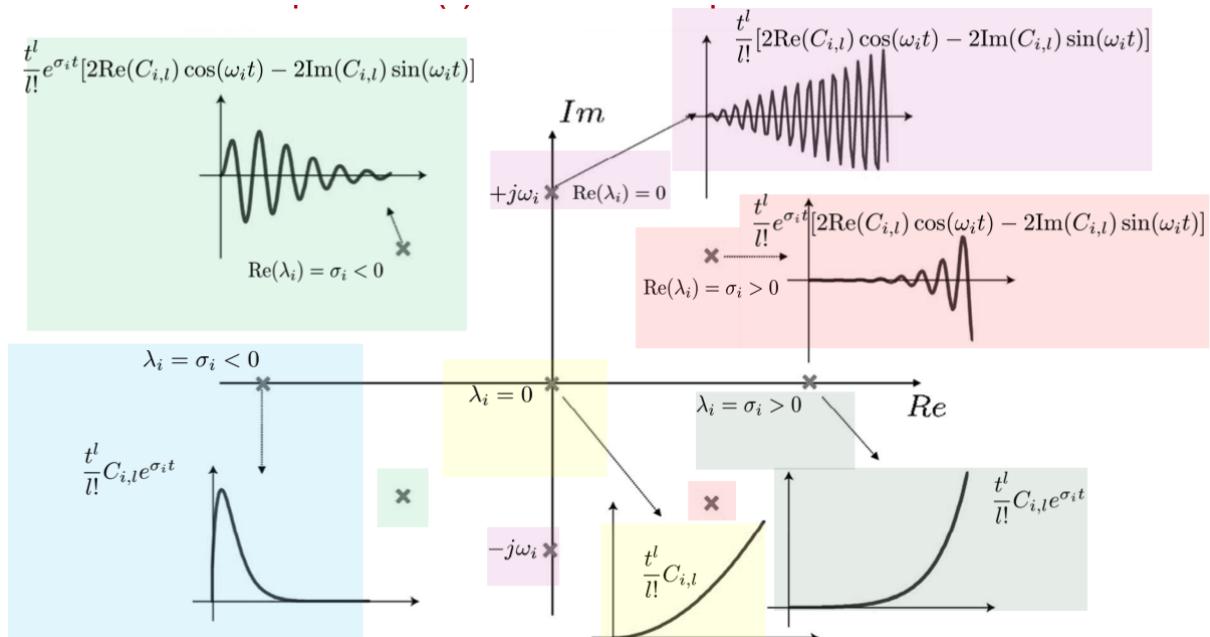
Calcolo dei coefficienti $C_{i,k}$:

$$\begin{aligned} C_{i,\mu_i-1} &= \lim_{s \rightarrow \lambda_i} F(s)(s - \lambda_i)^{\mu_i} \\ C_{i,\mu_i-2} &= \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left(F(s) - \frac{C_{i,\mu_i-1}}{(s - \lambda_i)^{\mu_i}} \right) (s - \lambda_i)^{\mu_i-1} \\ C_{i,0} &= \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left(F(s) - \sum_{l=1}^{\mu_i-1} \frac{C_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}} \right) (s - \lambda_i) \end{aligned}$$

Nota: anche in questo caso, se i poli sono complessi coniugati, i corrispondenti coefficienti saranno complessi coniugati. Di conseguenza, le esponenziali complesse che compaiono nell'anti-trasformata potranno essere riscritte come prodotti tra esponenziali reali e funzioni trigonometriche reali, sfruttando la **formula di Eulero**.

Importante:

- Se ho poli reali o poli complessi coniugati con molteplicità > 1 , nella trasformata inversa compariranno fattori moltiplicativi del tipo t^l , dove l è un intero positivo.
- Questo termine t^l si presenta solo nei casi di molteplicità maggiore di 1 (ossia quando il polo compare più volte).



9.12 Calcolo dell'Evoluzione Libera con la Trasformata di Laplace

9.12.1 Evoluzione Libera e Trasformata di Laplace

Nel caso di **evoluzione libera**, consideriamo:

$$\begin{aligned} x(0) &\neq 0, \quad u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_l(t) \\ x'_l(t) &= Ax_l(t) \end{aligned}$$

Applicando le proprietà di derivazione e linearità della trasformata di Laplace, otteniamo:

$$\begin{aligned} L[x'_l(t)] &= L[Ax_l(t)] \\ sX_l(s) - x_l(0) &= AX_l(s) \\ (sI - A)X_l(s) &= x_l(0) \\ X_l(s) &= (sI - A)^{-1}x_l(0) \end{aligned}$$

Forma dell'inversa

La matrice inversa $(sI - A)^{-1}$ può essere espressa come:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{N(s)}{p_A(s)}$$

dove:

- $p_A(s) = \det(sI - A)$ è il **polinomio caratteristico** della matrice A
- $N(s)$ è la **matrice aggiunta** di dimensione $n \times n$, i cui elementi sono polinomi di grado al massimo $n - 1$

Proprietà: Gli elementi di $(sI - A)^{-1}$ sono **funzioni razionali strettamente proprie** in s : il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore.

9.12.2 Antitrasformazione: Calcolo dell'evoluzione nel tempo

Per ottenere la soluzione nel dominio del tempo si applica l'anti-trasformazione di Laplace:

$$x_l(t) = L^{-1}[X_l(s)] = L^{-1}[(sI - A)^{-1}x_l(0)] = e^{At}x_l(0)$$

Osservazione: Questa uguaglianza si basa sul fatto che:

$$L[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$$

Quindi l'evoluzione libera nel dominio del tempo è ottenuta direttamente tramite la matrice esponenziale e^{At} applicata alla condizione iniziale $x_l(0)$.

Risposta Forzata e Trasformata di Laplace

Definizione

La risposta forzata è, per definizione, la soluzione del sistema dinamico:

$$x'_f(t) = Ax_f(t) + Bu(t), \quad x_f(0) = 0$$

Applicazione della Trasformata di Laplace

Applicando le proprietà di derivazione e linearità della trasformata di Laplace si ottiene:

$$L[x'_f(t)] = L[Ax_f(t) + Bu(t)]$$

$$sX_f(s) - x_f(0) = AX_f(s) + BU(s)$$

Poiché $x_f(0) = 0$, si semplifica in:

$$sX_f(s) = AX_f(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X_f(s) = BU(s) \Rightarrow X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Risposta nel dominio del tempo

$$x_f(t) = L^{-1}[X_f(s)] = L^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)]$$

Matrice di Trasferimento Ingresso-Stato

La quantità:

$$\frac{X_f(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1}B$$

è detta **matrice di trasferimento tra ingresso e stato** del sistema dinamico, valida nel caso di condizioni iniziali nulle.

Caso Generale con Uscita $y(t)$

Nel caso in cui le uscite del sistema non coincidano direttamente con gli stati, ma siano una combinazione lineare di stati e ingressi, il sistema è descritto da:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{relazione istantanea}) \end{cases}$$

In questo caso, la **matrice di trasferimento tra ingresso e uscita** risulta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Nota: Quando si ha un singolo ingresso e una singola uscita, questa espressione prende il nome di **funzione di trasferimento** (fdt) del sistema.

Questa formulazione consente una **visione completa e modulare** del comportamento del sistema, utile in analisi e progettazione.

9.13 Risposta Forzata: Convoluzione e Trasformata di Laplace

Tutto ciò che abbiamo ottenuto grazie alla **proprietà di linearità** nella trasformata di Laplace può essere interpretato anche tramite la **proprietà di convoluzione**.

Osservazione: La convoluzione nel dominio del tempo si trasforma in un prodotto nel dominio di Laplace.

Definizione della Risposta Forzata

La risposta forzata è, per definizione, la soluzione del sistema:

$$x'_f(t) = Ax_f(t) + Bu(t), \quad x_f(0) = 0$$

Riscrittura tramite Convoluzione

La risposta forzata può essere calcolata anche mediante l'integrale di convoluzione, sfruttando la risposta impulsiva $h(t) = e^{At}B$:

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau = (h * u)(t)$$

Applicazione della Trasformata di Laplace

Applicando la trasformata di Laplace al prodotto di convoluzione:

$$L[x_f(t)] = L[(h * u)(t)] = H(s)U(s)$$

dove:

$$H(s) = L[e^{At}B] = (sI - A)^{-1}B$$

Pertanto:

$$L[x_f(t)] = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Ritorno nel dominio del tempo

La risposta forzata si ottiene antitrasformando:

$$x_f(t) = L^{-1}[X_f(s)] = L^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)]$$

Conclusione: La trasformata di Laplace consente di trasformare un problema difficile (convoluzione nel tempo) in un'operazione semplice (prodotto algebrico) nel dominio complesso, da cui si torna facilmente alla soluzione nel dominio del tempo tramite l'anti-trasformazione.

9.14 Risposta Complessiva e Trasformata di Laplace

In generale, la trasformata di Laplace dello stato del sistema $x(t)$ è data dalla somma della **risposta libera** e della **risposta forzata**:

$$X(s) = X_l(s) + X_f(s) = (sI - A)^{-1}x_l(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Interpretazione dei termini:

- $(sI - A)^{-1}x_l(0)$: contributo delle **condizioni iniziali**, governato dalle radici del polinomio caratteristico $\det(sI - A)$ (cioè gli autovalori di A)
- $(sI - A)^{-1}BU(s)$: contributo dell'**ingresso**, governato sia dalle radici del denominatore di $U(s)$ sia da quelle di $(sI - A)^{-1}$

Risposta nel dominio del tempo (antitrasformazione)

Applicando la trasformata inversa di Laplace (L^{-1}), si ottiene:

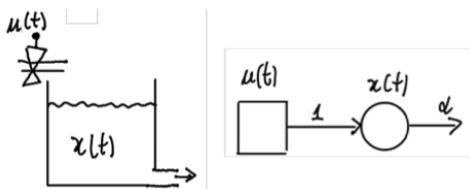
$$\begin{aligned} x(t) &= x_l(t) + x_f(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}x_l(0)] + L^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)] \\ &= e^{At}x_l(0) + L^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)] \end{aligned}$$

Conclusione: La soluzione complessiva è somma di due contributi distinti:

- l'evoluzione libera legata alla condizione iniziale,
- l'evoluzione forzata causata dall'ingresso $u(t)$.

9.15 Esempi: Risposta Forzata e Complessiva con Trasformata di Laplace

9.15.1 Esempio: Serbatoio – Risposta Forzata



Obiettivo

Trovare la risposta forzata del sistema:

$$x'(t) = u(t) - \alpha x(t)$$

con:

$$u(t) = (1 + c \sin t) \bar{u}, \quad 0 \leq c \leq 1$$

Il termine sinusoidale è ponderato da c , scelto in modo tale che:

$$u(t) \geq 0 \quad \forall t$$

per cui $u(t)$ rappresenta un ingresso sempre non negativo.

Trasformata di $u(t)$

Applicando la trasformata di Laplace:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{(1 + c \sin t)\bar{u}\} = \frac{\bar{u}}{s} + c \cdot \frac{\bar{u}}{s^2 + 1}$$

Caso particolare: $c = 0$

Se $c = 0$, allora:

$$u(t) = \bar{u} \Rightarrow x_f(t) = \frac{\bar{u}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

Risoluzione nel dominio di Laplace

Operatore di risoluzione:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s + \alpha}$$

Risposta forzata nel dominio di Laplace:

$$X_f(s) = \frac{\bar{u}}{s(s + \alpha)} + \frac{c\bar{u}}{(s^2 + 1)(s + \alpha)}$$

Scomponiamo il primo termine in fratti semplici:

$$\frac{\bar{u}}{s(s + \alpha)} = \frac{\bar{u}}{\alpha s} - \frac{\bar{u}}{\alpha(s + \alpha)}$$

Per il secondo termine, si applica una scomposizione razionale (con risultato noto):

$$\frac{c\bar{u}}{(s^2 + 1)(s + \alpha)} = \frac{c\bar{u}}{\alpha^2 + 1} \cdot \frac{1}{s + \alpha} + \frac{c\bar{u}}{\alpha^2 + 1} \left(\frac{\alpha}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 1} \right)$$

Anti-trasformata

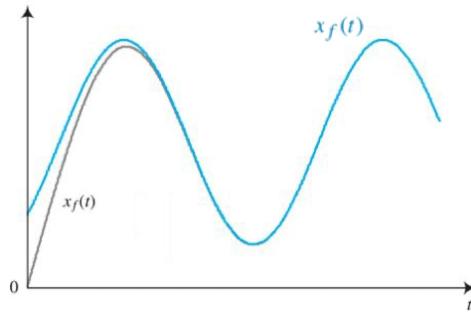
$$\begin{aligned} x_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X_f(s)] \\ &= \frac{\bar{u}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{c\bar{u}}{\alpha^2 + 1} (e^{-\alpha t} + \alpha \sin t - \cos t) \end{aligned}$$

Comportamento a regime

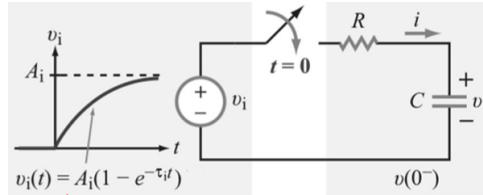
Per $t \rightarrow +\infty$, il termine transitorio $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$. Quindi:

$$x_f(t) \approx \frac{\bar{u}}{\alpha} + \frac{c\bar{u}}{\alpha^2 + 1} (\alpha \sin t - \cos t)$$

ovvero un'uscita costituita da una componente continua e da una componente oscillante a regime.



9.15.2 Esempio: Circuito RC – Risposta Complessiva



Obiettivo

Trovare la **risposta complessiva** $v(t)$ di un circuito RC soggetto a un ingresso del tipo:

$$v_i(t) = A_i(1 - e^{-\tau_i t}) \quad (\text{segnale costante a regime})$$

Trasformata di Laplace dell'ingresso

$$V_i(s) = \mathcal{L}\{A_i(1 - e^{-\tau_i t})\} = \frac{A_i}{s} - \frac{A_i}{s + \tau_i} = \frac{A_i \tau_i}{s(s + \tau_i)}$$

Equazione del circuito

Applicando la legge di Kirchhoff e la legge di Ohm:

$$-v_i(t) + RC \cdot \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\tau_C := \frac{1}{RC}$$

Nota: sarebbe più corretto scrivere:

$$\tau_C = RC, \quad f_C = \frac{1}{RC}$$

Forma canonica dell'equazione di stato

Isoliamo la derivata:

$$v'(t) = -\tau_C v(t) + \tau_C v_i(t)$$

Poni:

$$A = -\tau_C, \quad B = \tau_C$$

Soluzione nel dominio di Laplace

$$v(t) = e^{-\tau_C t} v(0^-) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tau_C V_i(s)}{s + \tau_C} \right]$$

Dove:

$$v_l(t) = e^{-\tau_C t} v(0^-), \quad v_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tau_C V_i(s)}{s + \tau_C} \right]$$

Scomposizione in fratti semplici

$$V_f(s) = \frac{A_i \tau_C \tau_i}{s(s + \tau_C)(s + \tau_i)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \tau_C} + \frac{k_3}{s + \tau_i}$$

Calcolo dei coefficienti:

$$k_1 = V_f(s) \cdot s|_{s=0} = \frac{A_i \tau_C \tau_i}{\tau_C \tau_i} = A_i$$

$$k_2 = V_f(s) \cdot (s + \tau_C)|_{s=-\tau_C} = \frac{A_i \tau_C \tau_i}{-\tau_C(\tau_i - \tau_C)} = \frac{A_i \tau_i}{\tau_C - \tau_i}$$

$$k_3 = V_f(s) \cdot (s + \tau_i)|_{s=-\tau_i} = \frac{A_i \tau_C \tau_i}{-\tau_i(-\tau_i + \tau_C)} = \frac{A_i \tau_C}{\tau_i - \tau_C}$$

Anti-trasformata della parte forzata

$$v_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(V_f(s)) = \left[A_i + \frac{A_i \tau_i}{\tau_C - \tau_i} e^{-\tau_C t} + \frac{A_i \tau_C}{\tau_i - \tau_C} e^{-\tau_i t} \right] \delta_{-1}(t)$$

Risultato numerico (esempio)

$$v(t) = v_l(t) + v_f(t) = 2e^{-3t} \delta_{-1}(t) + [6 + 12e^{-3t} - 18e^{-2t}] \delta_{-1}(t)$$

$$v(t) = [14e^{-3t} - 18e^{-2t}] \delta_{-1}(t) + 6 \delta_{-1}(t)$$

Interpretazione dei termini:

- e^{-3t} : modo naturale del sistema.
- $2e^{-3t} \delta_{-1}(t)$: risposta libera $v_l(t)$ (condensatore inizialmente carico).
- $[6 + 12e^{-3t} - 18e^{-2t}] \delta_{-1}(t)$: risposta forzata $v_f(t)$.

Analisi finale

$$v(t) = [14e^{-3t} - 18e^{-2t}] \delta_{-1}(t) + 6 \delta_{-1}(t)$$

- $[14e^{-3t} - 18e^{-2t}] \delta_{-1}(t)$: componente transitoria, decresce a zero per $t \rightarrow \infty$.
- $6 \delta_{-1}(t)$: componente stazionaria, che permane a regime \rightarrow tensione finale di 6 V.

Evoluzione libera: $u(t) = 0$, quindi il generatore viene cortocircuitato e il condensatore si scarica (solo transitorio).

Evoluzione forzata: si considera il condensatore inizialmente scarico, e l'ingresso carica il sistema (comportamento guidato dal generatore).

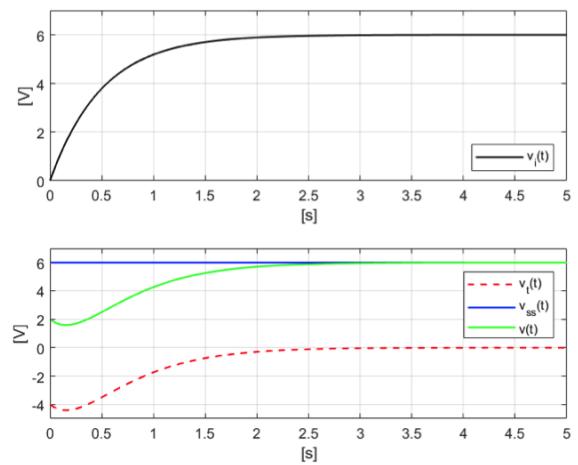
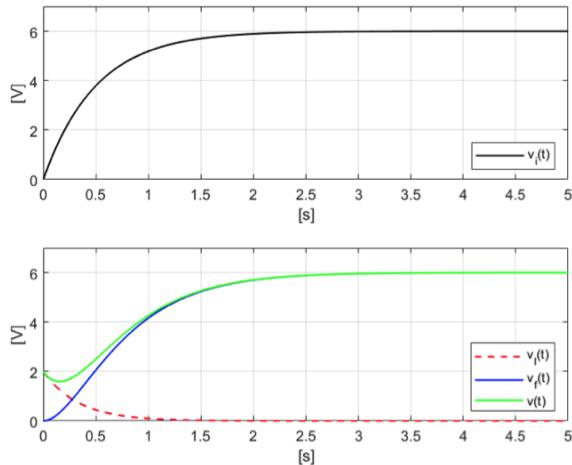
Nota finale: la costante τ_C rappresenta il *modo naturale* del sistema.

Nel grafico allegato:

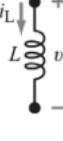
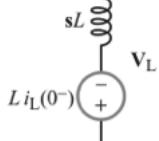
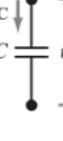
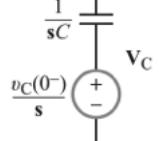
- Risposta **complessiva**: curva verde

- Risposta **libera**: curva rossa

- Risposta **forzata**: curva blu



9.15.3 Modelli per R , L e C nel Dominio- s

| dominio-t | dominio-s |
|---|---|
| Resitore  $v = Ri$ |  $V(s) = RI(s)$ |
| Induttore  $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^t v_L(\tau) d\tau + i_L(0^-)$ |  $V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$ $I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0^-)}{s}$ |
| Condensatore  $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ $v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_C(\tau) d\tau + v_C(0^-)$ |  $V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0^-)}{s}$ $I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0^-)$ |

La trasformazione nel dominio- s degli elementi circuituali incorpora le **condizioni iniziali** relative all'energia "in memoria" eventualmente presente nei condensatori e negli induttori al tempo $t = 0^-$.

Resistore

- Dominio del tempo:

$$v(t) = Ri(t)$$

- Dominio- s :

$$V(s) = RI(s)$$

Induttore

- Dominio del tempo:

$$v(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

- Dominio- s :

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

Condensatore

- Dominio del tempo:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

- Dominio-s:

$$I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0^-)$$

Osservazione importante: Ricorda sempre di togliere la condizione iniziale per ottenere il modello ideale nel dominio-s durante l'analisi (ad esempio quando si applicano i metodi della funzione di trasferimento con condizioni iniziali nulle).

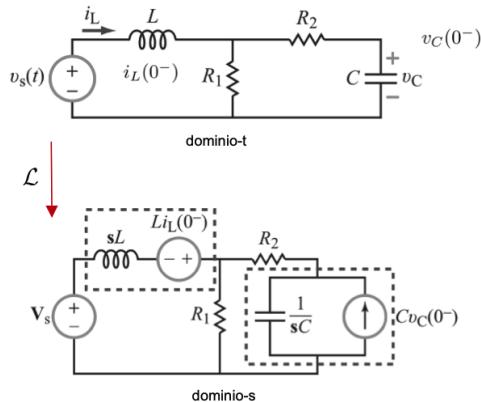
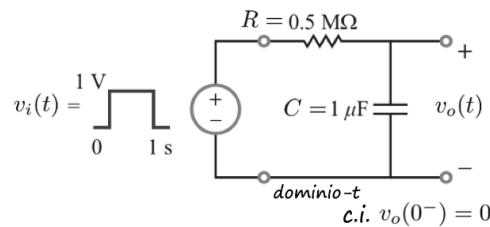


Figura 9.2: Esempio

9.15.4 Esempio: Filtro Passa-Basso – Risposta Forzata



Obiettivo: calcolare la risposta forzata del sistema.

L'ingresso è:

$$v_i(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-1)$$

Questo rappresenta un segnale che:

- parte da zero,
- diventa 1 tra $t = 0$ e $t = 1$,
- torna a zero dopo $t = 1$.

Trasformata di Laplace dell'uscita:

$$V_o(s) = V_i(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = V_i(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{s + \frac{1}{sC}} = V_i(s) \cdot \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

Sia $\frac{1}{RC} = 2$, allora:

$$V_o(s) = V_i(s) \cdot \frac{2}{s+2}$$

La tensione di uscita è il prodotto tra la funzione di trasferimento e l'ingresso:

$$V_o(s) = 2(1 - e^{-s}) \cdot \frac{1}{s(s+2)}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+2}$$

$$C_1 = s \cdot \frac{1}{s(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}, \quad C_2 = (s+2) \cdot \frac{1}{s(s+2)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

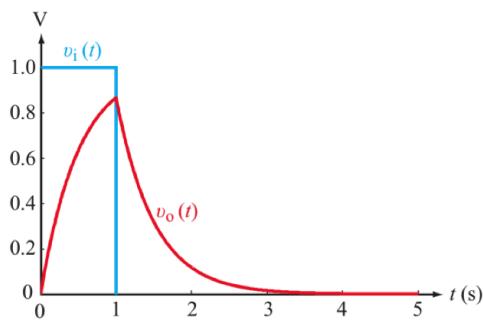
$$V_o(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) - \left(\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s+2} e^{-s} \right)$$

Antitrasformata:

$$v_o(t) = \delta_{-1}(t) - e^{-2t} \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-1) + e^{-2(t-1)} \delta_{-1}(t-1)$$

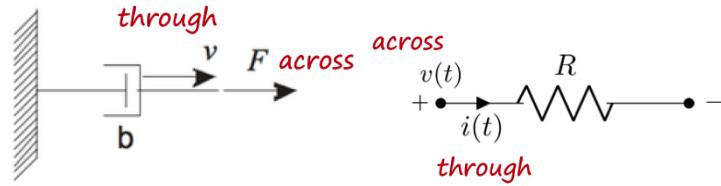
Interpretazione:

- Gradino attivo tra $t = 0$ e $t = 1$
- Componente esponenziale decrescente
- Termini traslati nel tempo



9.16 Analogie tra Sistemi Fisici

Variabili *across* e *through*:



- Una **variabile across** è misurata ai capi di un componente. È una differenza di potenziale o valore tra due punti.
Esempi: tensione, velocità, pressione, temperatura.
- Una **variabile through** è una grandezza che attraversa un componente e si conserva.
Esempi: corrente, forza, portata di fluido, flusso termico.

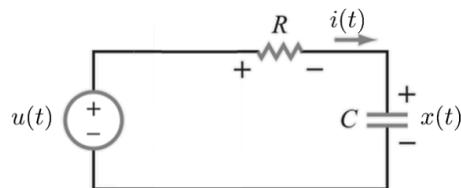
Analogia Elettro-Meccanica

- **Componenti elettrici**
 - Tensione = variabile across
 - Corrente = variabile through
- **Componenti meccanici (traslazionali)**
 - Velocità = variabile across
 - Forza = variabile through

Conclusione: Esistono analogie strutturali tra sistemi elettrici, meccanici, termici, idraulici ecc. che permettono di modellare il comportamento dinamico con formalismi simili.

9.17 Sistemi LTI – Risposta in Frequenza

Esempio: Circuito RC (Filtro Passa-Basso)



Obiettivo: determinare la risposta forzata del circuito a un ingresso sinusoidale.

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

Questo tipo di ingresso è rilevante perché qualunque segnale periodico con periodo T può essere rappresentato come somma (serie di Fourier) di sinusoidi con frequenze multiple della frequenza fondamentale $\frac{1}{T}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Parametri del circuito

$$R = 1 \Omega, \quad C = 1 \text{ F}, \quad \tau = RC = 1 \text{ s}$$

Legge di Kirchhoff sulla maglia:

$$-u(t) + RC \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x'(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) + \frac{1}{\tau}u(t)$$

Nel dominio di Laplace:

$$sX(s) - x(0) = -X(s) + U(s)$$

Condizioni iniziali nulle:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (s+1)X(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

Per l'ingresso sinusoidale:

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Scomposizione in fratti semplici

Poniamo:

$$\frac{1}{s+1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s^2 + \omega^2} + \frac{R_3s}{s^2 + \omega^2}$$

Uguagliamo i numeratori:

$$\omega = R_1(s^2 + \omega^2) + (R_2 + R_3s)(s+1)$$

$$\omega = (R_1 + R_3)s^2 + (R_2 + R_3)s + R_1\omega^2 + R_2$$

Sistema:

$$\begin{cases} R_1 + R_3 = 0 \\ R_2 + R_3 = 0 \\ R_1\omega^2 + R_2 = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_3 = -R_1 \\ R_2 = R_1 \\ R_1(1 + \omega^2) = \omega \end{cases} \Rightarrow R_1 = \frac{\omega}{1 + \omega^2}, \quad R_2 = \frac{\omega}{1 + \omega^2}, \quad R_3 = -\frac{\omega}{1 + \omega^2}$$

Forma finale di $X(s)$

$$X(s) = \frac{\omega}{1 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{1 + \omega^2} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \omega \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right]$$

Antitrasformata:

$$x(t) = \frac{\omega}{1 + \omega^2} e^{-t} + \frac{1}{1 + \omega^2} [\sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)]$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{\omega}{1+\omega^2} e^{-t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{M \sin(\omega t + \Phi)}_{\text{componente sinusoidale stazionaria}}$$

Osservazione:

- La componente esponenziale è il transitorio, che si annulla per $t \rightarrow \infty$.
- La risposta si stabilizza su un'oscillazione sinusoidale con ampiezza M e fase Φ (dipendenti da ω).

9.17.1 Nota Trigonometrica e Risposta in Frequenza

Combinazione di seno e coseno

$$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = C \sin(\omega t + \Phi)$$

Sviluppando:

$$C \sin(\omega t + \Phi) = C \sin(\omega t) \cos \Phi + C \cos(\omega t) \sin \Phi = C \cos \Phi \sin(\omega t) + C \sin \Phi \cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} A = C \cos \Phi \\ B = C \sin \Phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \Phi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) \end{cases}$$

Nel nostro esempio: $A = 1$, $B = -\omega$, quindi:

$$C = \sqrt{1 + \omega^2}, \quad \Phi = -\tan^{-1}(\omega)$$

Risultato finale della risposta

$$x(t) = \frac{\omega}{1+\omega^2} e^{-t} + \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{1+\omega^2} \sin(\omega t + \Phi) = \frac{\omega}{1+\omega^2} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(\omega t + \Phi)$$

- $\frac{\omega}{1+\omega^2} e^{-t}$: **componente transitoria**
- $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(\omega t + \Phi)$: **componente permanente** (a regime)

Osservazione sulla risposta forzata a ingresso sinusoidale

Consideriamo un sistema LTI BIBO stabile (*Bounded Input - Bounded Output*): se l'ingresso è limitato, anche l'uscita sarà limitata. A regime, la risposta forzata risulta:

$$x_r(t) := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(\omega t + \Phi)$$

$$x_r(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \arg\{H(j\omega)\})$$

dove:

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \text{funzione di trasferimento (fdt)} \quad \text{e anche} \quad H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$$

Nel caso specifico:

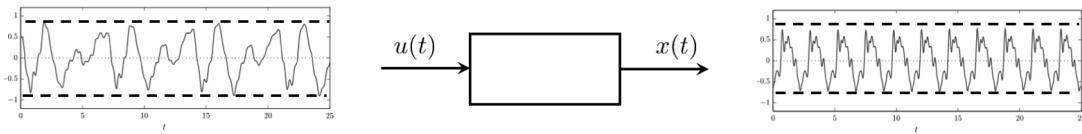
$$X(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \arg\{H(j\omega)\} = -\tan^{-1}(\omega)$$

Pertanto:

$$x_r(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(\omega t + \Phi) = |H(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \arg\{H(j\omega)\})$$

BIBO e linearità



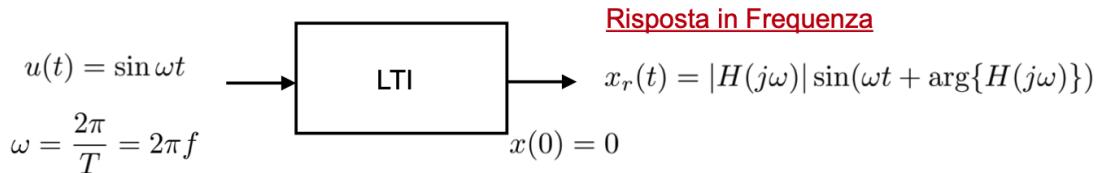
- **BIBO stabilità:** Un sistema LTI è BIBO stabile se un ingresso limitato produce una risposta limitata su $[0, +\infty]$, con condizioni iniziali nulle.
- **Risposta sinusoidale:** Se l'ingresso è una sinusoide di pulsazione ω , l'uscita sarà ancora una sinusoide con:
 - stessa pulsazione ω , periodo T , frequenza f ;
 - ampiezza modificata da $|H(j\omega)|$;
 - fase modificata da $\arg\{H(j\omega)\}$.
- Se invece in uscita osserviamo un periodo diverso (es. $3T$), il sistema non è lineare.

Riepilogo finale:

$$\text{Ingresso: } u(t) = \sin(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Con sistema LTI e $x(0) = 0$, la risposta a regime è:

$$x_r(t) = |H(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \arg\{H(j\omega)\})$$



9.17.2 Risposta in Frequenza: Diagrammi di Bode

Risposta Armonica e Diagrammi di Bode

Il **modulo** $|H(j\omega)|$ e la **fase** $\arg\{H(j\omega)\}$ della funzione di trasferimento valutata lungo l'asse immaginario definiscono la **risposta armonica** di un sistema LTI.

Queste informazioni vengono rappresentate graficamente mediante i **diagrammi di Bode**:

- **Diagramma del modulo:** $20 \log_{10} |H(j\omega)|$
- **Diagramma della fase:** $\arg\{H(j\omega)\}$

Esempio: Circuito RC (Filtro Passa-Basso)

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Scala Logaritmica

- Si utilizza una **scala logaritmica** sull'asse delle pulsazioni ω , per meglio rappresentare un ampio intervallo di frequenze (o pulsazioni).
- Muovendosi verso destra si comprimono le frequenze (decadi), mentre a sinistra si espandono.

Banda Passante e Pulsazione di Taglio

- La **banda passante** è l'intervallo di pulsazioni (frequenze) per cui il segnale passa con **poca attenuazione**.
- In un filtro passa-basso come questo, tale intervallo va da $\omega \rightarrow 0^+$ fino a una **pulsazione di taglio**.
- La pulsazione di taglio è definita come quella per cui la parte reale e quella immaginaria della funzione di trasferimento sono uguali in modulo:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

- Oltre questa soglia, l'attenuazione inizia a essere significativa (oltre il 30%).

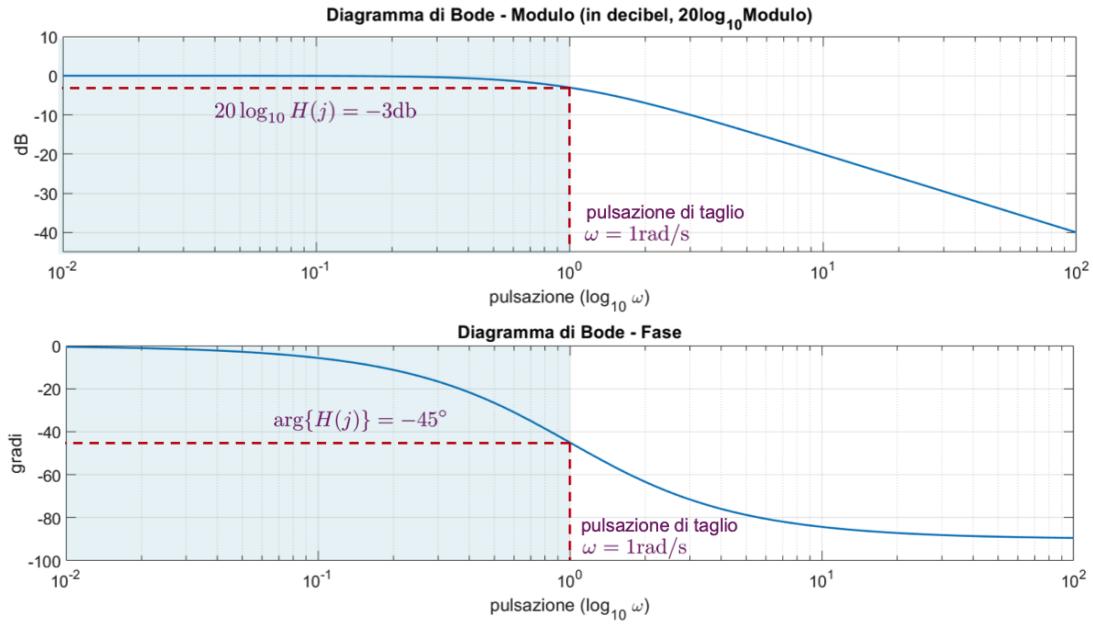
Definizione alternativa della pulsazione di taglio

In presenza di una funzione di trasferimento monotona decrescente (come nel caso del filtro RC), la **pulsazione di taglio** può anche essere definita come la pulsazione per cui:

$$|H(j\omega)| = 70\% \quad (\text{attenuazione del } 30\%)$$

Osservazioni

- La risposta del sistema è considerata **non alterata** fino a che il modulo non scende sotto 0.7.
- La **pulsazione di taglio** rappresenta il confine tra banda passante e zona di attenuazione significativa.
- La parte azzurra del grafico Bode corrisponde alla banda passante.



9.17.3 Esercizio su Simulink – Identificazione Filtro Passa-Basso

Domanda: Come capisco se è un passa-basso?

- Imposto un **segnale sinusoidale a bassa frequenza** (cioè con **periodo ampio**).
- Osservo i grafici dell'ingresso e dell'uscita:
 - Se sono quasi **sovraposti** (nessuno sfasamento significativo),
 - Se l'ampiezza è quasi la stessa,
 - Allora il segnale sta passando: il sistema lascia passare le basse frequenze.

Simulazione:

- **Tempo simulazione:** 1000 secondi
- La curva blu (uscita) è **sovraposta** alla curva gialla (ingresso)
- **Conclusione:** il sistema **lascia passare** la bassa frequenza \Rightarrow **filtro passa-basso**

Verifica sulla frequenza di taglio

- Frequenza di taglio teorica:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{rad/s})$$
- Provo con $\omega = \frac{1}{2\pi}$ rad/s: la risposta è ancora ben visibile \Rightarrow il filtro **funziona** come passa-basso.

Test a frequenza alta

- Provo con $\omega = \frac{100}{2\pi}$ rad/s (frequenza molto più alta).
- Il sistema **attenua il segnale** ad alta frequenza \Rightarrow comportamento coerente con un filtro passa-basso.

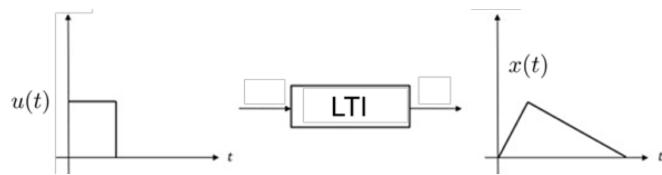
Conclusione: Osservando l'effetto dell'ingresso sinusoidale a diverse frequenze su un sistema simulato in Simulink, possiamo verificare sperimentalmente il comportamento passa-basso del filtro.

Capitolo 10

Analisi dei sistemi Lineari Tempo Invariante a Tempo Discreto

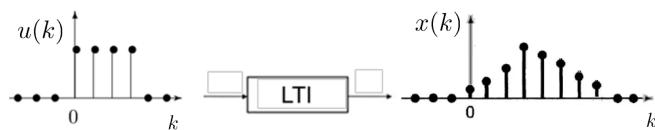
10.1 Tempo continuo vs Tempo discreto

- **Tempo continuo** $t \in \mathbb{R}_+$



$$x'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j(t)$$
$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

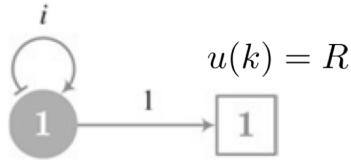
- **Tempo discreto** $k \in \mathbb{Z}_+$



$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(k) + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j(k)$$
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

10.1.1 Sistemi LTI - Evoluzione Libera e Risposta Forzata

Esempio:



Una banca propone un mutuo pari a P con un tasso d'interesse fisso i , da estinguere con una rata annuale fissa R (che in questo sistema dinamico rappresenta l'ingresso $u(k)$).

La variabile di stato $x_1(k)$ rappresenta il debito residuo dopo k anni, e $x_1(0) = P$ è la condizione iniziale.

Dinamica:

Nell'anno $k + 1$, si ha l'accumulo dell'interesse $(1 + i)x_1(k)$ meno la rata fissa R :

$$x_1(k + 1) = (1 + i)x_1(k) - R$$

$$x_1(1) = (1 + i)x_1(0) - R$$

$$x_1(2) = (1 + i)x_1(1) - R$$

e così via.

Formula ricorsiva generale:

$$x_1(k) = (1 + i)^k x_1(0) - R [1 + (1 + i) + \dots + (1 + i)^{k-1}]$$

$$x_1(k) = (1 + i)^k P - R \cdot \frac{(1 + i)^k - 1}{i}$$

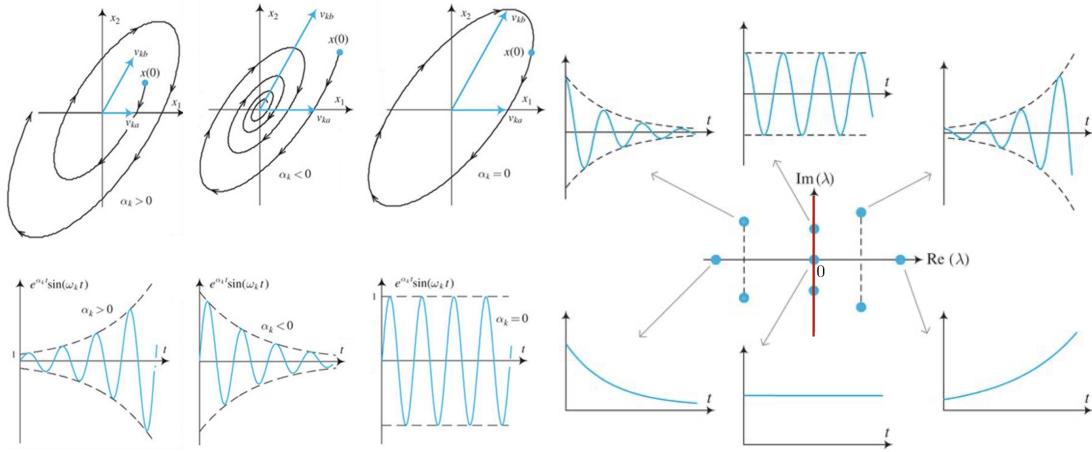
Interpretazione:

- $(1 + i)^k P$: evoluzione libera ($x(0) = P$)
- $-R \cdot \frac{(1 + i)^k - 1}{i}$: evoluzione forzata ($u(k) = R$)

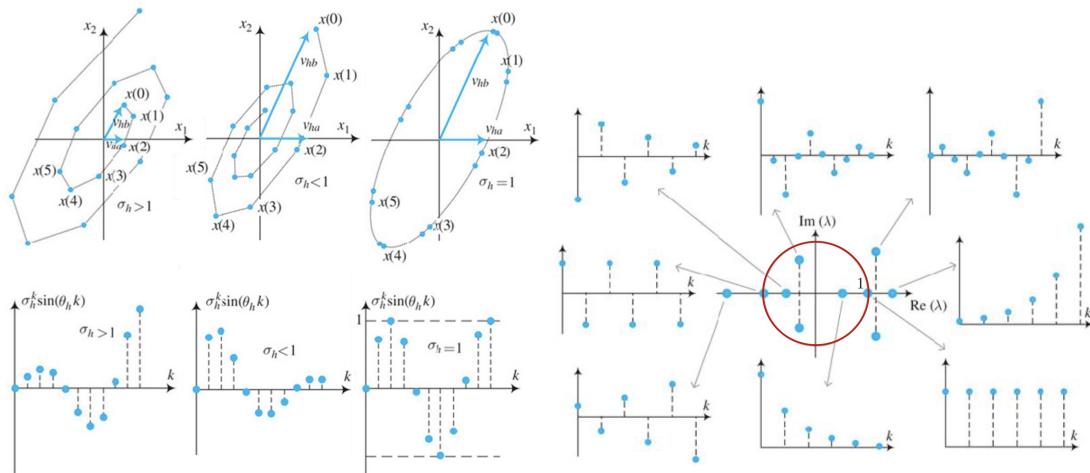
10.1.2 Confronto tra Tempo Continuo e Tempo Discreto a Tempo Invariante

| Tempo Continuo ($t \in \mathbb{R}_+$) | Tempo Discreto ($k \in \mathbb{Z}_+$) |
|---|---|
| $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ | $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ |
| $x(t) = x_l(t) + x_f(t)$ | $x(k) = x_l(k) + x_f(k)$ |
| $x_0 = \sum c_i v_i$ | $x_0 = \sum c_i v_i$ |
| Modi naturali: $e^{\lambda_i t} v_i$ | Modi naturali: $\lambda_i^k v_i$ |
| $e^{\lambda_i t}$: | λ_i^k : |
| $\lambda_i < 0$ convergente | $ \lambda_i < 1$ convergente |
| $\lambda_i = 0$ costante | $ \lambda_i = 1$ costante |
| $\lambda_i > 0$ divergente | $ \lambda_i > 1$ divergente |
| | $\lambda_i < 0$: modi alternanti |
| $x'_l(t) = Ax_l(t), x_0 \rightarrow$ | $x_l(k+1) = Ax_l(k), x_0 \rightarrow$ |
| $x_l(t) = \sum c_i e^{\lambda_i t} v_i = e^{At} x_0$ | $x_l(k) = \sum c_i \lambda_i^k v_i = A^k x_0$ |
| $x'_f(t) = Ax_f(t) + Bu(t) _{x_0=0}$ | $x_f(k+1) = Ax_f(k) + Bu(k) _{x_0=0}$ |
| $\Rightarrow x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$ | $\Rightarrow x_f(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} Bu(h)$ |
| Per ingresso costante \bar{u} : | Per ingresso costante \bar{u} : |
| $x_f(t) = \left(\int_0^t e^{A\epsilon} Bd\epsilon \right) \bar{u}$ | $x_f(k) = \left(\sum_{\epsilon=0}^{k-1} A^\epsilon B \right) \bar{u}$ |
| Per $p > 1$ ingressi: | Per $p > 1$ ingressi: |
| $x_f(t) = \sum_{i=1}^p \left(\int_0^t e^{A\epsilon} [B]_i d\epsilon \right) \bar{u}_i$ | $x_f(k) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{\epsilon=0}^{k-1} A^\epsilon [B]_i \right) \bar{u}_i$ |
| Trasformata di Laplace | Trasformata Zeta |

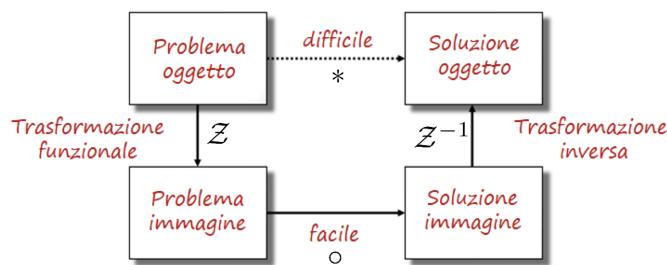
10.1.3 Tempo continuo: $\alpha_k = \operatorname{Re}\{\lambda_k\}$



10.1.4 Tempo discreto: $\sigma_h = |\lambda_h|$



10.2 Trasformata Z



Trasformazioni Funzionali

Così come la trasformata di Laplace permette di passare da un'equazione differenziale (continua nel tempo) a un'equazione algebrica più semplice da trattare, allo stesso modo la **trasformata Z** consente

di trasformare un'equazione alle differenze (tempo discreto) in un oggetto di un altro dominio, più agevole da analizzare e risolvere.

L'approccio diretto:

$$\text{problema oggetto} \rightarrow \text{soluzione oggetto} \quad (\text{difficile})$$

L'approccio tramite trasformata Z:

$$\text{problema oggetto} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \text{problema immagine} \xrightarrow{\text{operazione semplice}} \text{soluzione immagine} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \text{soluzione oggetto}$$

10.2.1 Struttura dello spazio funzionale

La trasformata Z agisce tra due spazi di funzioni:

$$\mathcal{Z} : \begin{cases} f \mapsto F \\ * \mapsto \circ \end{cases}$$

Dove:

- f, F sono due funzioni (rispettivamente nello spazio V e nello spazio W)
- $*$ è un'operazione nello spazio originale V
- \circ è l'operazione trasformata nello spazio immagine W

Esempio di convoluzione

Nello spazio V :

$$f * g = h \quad (\text{difficile})$$

Applicando la trasformazione Z:

$$F \circ G = H \quad (\text{facile})$$

e quindi:

$$h = f * g = \mathcal{Z}^{-1}(F \circ G) = \mathcal{Z}^{-1}(H)$$

In altre parole, l'operazione difficile nello spazio originale diventa una semplice moltiplicazione (o altro tipo di operazione più trattabile) nello spazio trasformato.

Confronto tra Segnali e Trasformate: Tempo Continuo vs Tempo Discreto

| Segnali a Tempo Continuo | Segnali a Tempo Discreto |
|--|---|
| $x(t), t \in \mathbb{R}$: segnale continuo a tempo continuo | $x(k), k \in \mathbb{Z}$: successione |
| Trasformata di Laplace unilatera: $X(s) = \mathcal{L}(x(t)) := \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$ | Trasformata Zeta unilatera: $X(z) = \mathcal{Z}(x(k)) := \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$ |
| Esempio trasformata Zeta: $x(k) = [4, 2, 0, 5] \Rightarrow X(z) = 4z^0 + 2z^{-1} + 5z^{-3}$ | |
| e^{-st} : ritardo continuo di t secondi | z^{-k} : ritardo discreto di k passi (stabilisce la posizione del campione $x(k)$ nella serie) |
| Da equazioni differenziali a equazioni algebriche | Da equazioni alle differenze a equazioni algebriche |

10.2.2 Trasformata Z Unilatera

$$X(z) = \mathcal{Z}(x(k)) := x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

(ammesso che la serie converga)

- La variabile z^{-1} può essere vista come un **operatore di ritardo temporale** di un passo.
- **Legame con la trasformata di Laplace:**

Ipotizziamo di rappresentare il segnale discreto $x(k)$ come derivante da un segnale continuo campionato, ovvero $x(k) = x_q(t)$, dove $x_q(t)$ è un treno di impulsi ottenuto campionando il segnale continuo $x(t)$ con intervallo di campionamento T (cioè prendendo i valori agli istanti kT , con k intero):

$$x_q(t) = x(0)\delta(t) + x(1)\delta(t - T) + x(2)\delta(t - 2T) + \cdots + x(k)\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\delta(t - kT)$$

La trasformata di Laplace del segnale campionato è:

$$X_q(s) = x(0) + x(1)e^{-sT} + x(2)e^{-2sT} + \cdots + x(k)e^{-skT} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)(e^{-sT})^k$$

$$\Rightarrow \text{definendo } z = e^{sT} \Rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)(z^{-1})^k$$

Osservazione: La trasformata Z unilatera può essere interpretata come la trasformata di Laplace di un segnale campionato in modo ideale (con impulsi di Dirac), tramite la sostituzione:

$$X_q(s) = [X(z)]_{z=e^{sT}}$$

10.2.3 Trasformata Z: alcune proprietà

Sia $x(k)$, $k \in \mathbb{Z} \leftrightarrow X(z)$ la coppia trasformata. Le seguenti proprietà risultano utili per il calcolo e la manipolazione delle trasformate Z:

| Operazione nel dominio temporale | Effetto nel dominio Z |
|--|---|
| Linearità | $a_1x_1(k) + a_2x_2(k) \leftrightarrow a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$ |
| Moltiplicazione per k | $kx(k) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$ |
| Moltiplicazione per k^2 | $k^2x(k) \leftrightarrow z \frac{dX(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2X(z)}{dz^2}$ |
| Ritardo temporale (a destra) | $x(k-1) \leftrightarrow z^{-1}X(z)$ |
| Anticipazione (traslazione a sinistra) | $x(k+1) \leftrightarrow zX(z) - zx(0)$ |
| Moltiplicazione per esponenziale | $\lambda^k x(k) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{\lambda}\right)$ |
| Prodotto di convoluzione | $x_1 * x_2(k) \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$ |

10.2.4 Esempi di trasformata Z $x(k)$, $k \in \mathbb{Z} \leftrightarrow X(z)$

| Segnale nel dominio temporale | Trasformata Z |
|--|---|
| Delta di Kronecker (impulso unitario discreto) | $\delta(k) \leftrightarrow 1$ |
| Impulso ritardato di i passi, $i \in \mathbb{N}$ | $\delta(k-i) \leftrightarrow z^{-i}$ |
| Gradino unitario discreto | $\delta_{-1}(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$ |
| Successione esponenziale causale | $\lambda^k \delta_{-1}(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-\lambda}$ |
| k volte la successione esponenziale causale | $k\lambda^k \delta_{-1}(k) \leftrightarrow \frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$ |
| k^2 volte la successione esponenziale causale | $k^2 \lambda^k \delta_{-1}(k) \leftrightarrow \frac{\lambda z(z+\lambda)}{(z-\lambda)^3}$ |
| Successione sinusoidale causale | $A \cos(\theta k + \Phi) \delta_{-1}(k) \leftrightarrow A \frac{z[z \cos(\Phi) - \cos(\Phi - \theta)]}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$ |

10.2.5 Esempio 1: Trasformata Z di una successione finita

Calcolare la trasformata di:

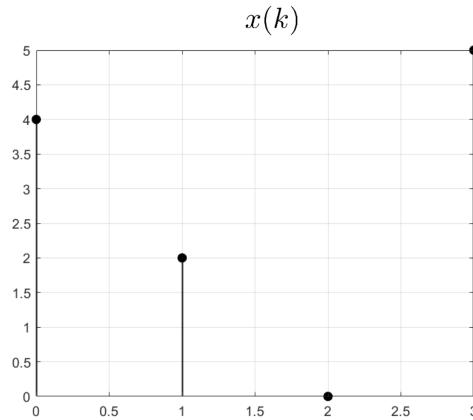
$$x(k) = [4, 2, 0, 5] \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3$$

Possiamo scrivere:

$$x(k) = 4\delta(k) + 2\delta(k-1) + 0\delta(k-2) + 5\delta(k-3)$$

La trasformata Z unilatera è:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = 4 + 2z^{-1} + 5z^{-3} = \frac{4z^3 + 2z^2 + 5}{z^3}$$



10.3 Antitrasformata Z

Come antitrasformare una funzione razionale fratta?

- Sia $X(z) \in \mathbb{C}$ una funzione razionale propria ($\deg \text{numeratore} < \deg \text{denominatore}$), con poli distinti (cioè radici del denominatore, in generale complessi) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ e molteplicità $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$.
- Potrebbe esserci anche un polo nell'origine di molteplicità $v \geq 0$.
- La funzione può essere scritta nella forma irriducibile:

$$Y(z) = \frac{\tilde{N}(z)}{z^v(z - \lambda_1)^{\mu_1}(z - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (z - \lambda_r)^{\mu_r}}, \quad \text{con } \tilde{N}(z) \in \mathbb{C}[z], \deg \tilde{N}(z) \leq v + \sum_{i=1}^r \mu_i$$

- Sviluppo in fratti semplici: dividiamo $X(z)$ per z , ottenendo:

$$X_1(z) := \frac{X(z)}{z} = \sum_{i=0}^v \frac{A_i}{z^{i+1}} + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{C_{i,l}}{(z - \lambda_i)^{l+1}}$$

- Da cui si ricava:

$$X(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \cdots + \frac{A_v}{z^v} + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} C_{i,l} \cdot \frac{z}{(z - \lambda_i)^{l+1}}$$

Antitrasformando:

$$x(k) = A_0\delta(k) + A_1\delta(k-1) + \cdots + A_v\delta(k-v) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} C_{i,l} \binom{k}{l} \lambda_i^{k-l}$$

I coefficienti A_i e $C_{i,l}$ si determinano con tecniche analoghe a quelle viste per la trasformata di Laplace.

10.3.1 Esempio di Antitrasformata Z

$$X(z) = \frac{z-1}{z(z+2)(z+1)}$$

Poniamo:

$$X_1(z) := \frac{X(z)}{z} = \frac{z-1}{z^2(z+2)(z+1)} = \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z+2} + \frac{C_4}{z+1}$$

Nota: Se un polo ha molteplicità maggiore di 1, occorre considerarlo più volte nel denominatore.

Calcolo dei coefficienti:

$$C_4 = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{z-1}{z^2(z+2)(z+1)} \cdot (z+1) \right) = \frac{-2}{(-1)^2 \cdot 1} = -2$$

$$C_3 = \lim_{z \rightarrow -2} \left(\frac{z-1}{z^2(z+2)(z+1)} \cdot (z+2) \right) = \frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$C_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z-1}{z^2(z+2)(z+1)} \cdot z^2 \right) = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\left(\frac{z-1}{z^2(z+2)(z+1)} - \frac{C_2}{z^2} \right) \cdot z \right] = \frac{5}{4}$$

Ricostruzione:

$$X(z) = zX_1(z) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2z} + \frac{\frac{3}{4}z}{z+2} - \frac{2z}{z+1}$$

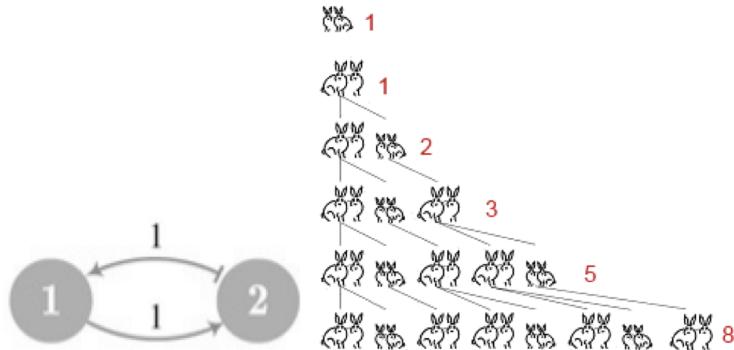
Antitrasformata Z:

$$x(k) = \frac{5}{4}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-1) + \frac{3}{4}(-2)^k\delta_{-1}(k) - 2(-1)^k\delta_{-1}(k)$$

10.4 Analisi dei Sistemi Lineari Tempo Invariante a Tempo Discreto

10.4.1 Calcolo dell'Evoluzione Libera nel Dominio del Tempo (senza trasformata Z)

Esempio 1 (popolazione di conigli):



Si consideri il sistema:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad x_1(k) : \text{giovani}, \quad x_2(k) : \text{adulti}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k), & \text{con } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) = Bx(k) \end{cases}$$

Calcolo degli Autovalori di A

Troviamo gli autovalori risolvendo il polinomio caratteristico:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(1 - \lambda) - (1)(1) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Le radici del polinomio (autovalori) sono:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$$

$$|\lambda_1| \approx 1.618 > 1, \quad |\lambda_2| \approx 0.618 < 1$$

Calcolo degli Autovettori

Cerchiamo v tale che $(A - \lambda I)v = 0$.

Per λ_1 :

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\lambda_1 x + y = 0 \Rightarrow y = \lambda_1 x$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Per λ_2 :

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\lambda_2 x + y = 0 \Rightarrow y = \lambda_2 x$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x \\ \lambda_2 x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Calcolo dell'Evoluzione Libera: Modi Naturali Reali

Determiniamo le costanti c_1 e c_2 che permettono di soddisfare la condizione iniziale:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}}, \quad c_1 = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{5}}$$

L'evoluzione libera si scrive come:

$$x_l(k) = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 = \frac{-\lambda_2}{\sqrt{5}} \lambda_1^k \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \lambda_2^k \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_1 > 0, |\lambda_1| > 1$: modo **divergente**
- $\lambda_2 < 0, |\lambda_2| < 1$: modo **alternante convergente**

Componente $x_1(k)$:

$$x_{1l}(k) = \frac{-\lambda_2}{\sqrt{5}} \lambda_1^k + \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \lambda_2^k$$

Componente $x_2(k)$:

$$x_{2l}(k) = \frac{-\lambda_2}{\sqrt{5}} \lambda_1^{k+1} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \lambda_2^{k+1}$$

Rapporto tra popolazioni totali in due mesi successivi

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{y(k+1)}{y(k)}$$

Sul lungo periodo, il rapporto tende alla sezione aurea:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y(k+1)}{y(k)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

10.5 Evoluzione Libera e Risposta Forzata tramite Trasformata Z

Sistema Dinamico Lineare Tempo Invariante

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(k) = x_l(k) + x_f(k)$$

10.5.1 Evoluzione Libera ($u(k) = 0$)

Applichiamo la trasformata Z:

$$\mathcal{Z}[x_l(k+1)] = \mathcal{Z}[Ax_l(k)] \Rightarrow zX_l(z) - zx(0) = AX_l(z)$$

$$(zI - A)X_l(z) = zx(0) \Rightarrow X_l(z) = (zI - A)^{-1}zx(0)$$

Dove:

$$(zI - A)^{-1} = \frac{N(z)}{\det(zI - A)} = \frac{N(z)}{p_A(z)} \Rightarrow x_l(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X_l(z)]$$

- $(zI - A)^{-1}$: contiene elementi razionali nella variabile z
- $N(z)$: matrice aggiunta, formata da polinomi di grado $\leq n - 1$
- $p_A(z) = \det(zI - A)$: polinomio caratteristico di grado n
- Gli elementi di $(zI - A)^{-1}$ sono funzioni razionali strettamente proprie

10.5.2 Risposta Forzata ($x(0) = 0$)

$$\mathcal{Z}[x_f(k+1)] = \mathcal{Z}[Ax_f(k) + Bu(k)] \Rightarrow X_f(z) = (zI - A)^{-1}BU(z)$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{N(z)}{p_A(z)}, \quad x_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X_f(z)]$$

10.5.3 Esempio 1: Dinamica dei Prezzi (Domanda e Offerta)



Risposta Forzata

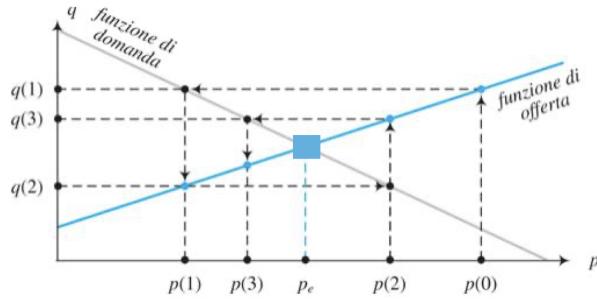
$$q(k) = -ap(k) + D \quad (\text{consumatori})$$

$$q(k+1) = bp(k) + Q \quad (\text{produttori})$$

- $a > 0$: sensibilità dei consumatori
- $b > 0$: sensibilità dei produttori
- $x_1(k) := p(k)$
- $u_1(k) := \bar{u} = D - Q$

Sistema dinamico:

$$x_1(k+1) = -\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{1}{a}\bar{u}$$



10.5.4 Esempio 2: Risposta Forzata con Condizioni Iniziali Nulle

$$x_1(k+1) = -\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{1}{a}\bar{u}$$

Applichiamo la trasformata Z:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x_1(k+1)] &= \mathcal{Z}\left[-\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{1}{a}\bar{u}\right] \Rightarrow zX_1(z) - zx_1(0) = -\frac{b}{a}X_1(z) + \frac{1}{a}\bar{u} \cdot \frac{z}{z-1} \\ \left(z + \frac{b}{a}\right)X_1(z) &= \frac{\bar{u}}{a} \cdot \frac{z}{z-1} \\ X_1(z) &= \left(\frac{a}{az+b}\right) \cdot \frac{\bar{u}}{a} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{\bar{u}}{a} \cdot \frac{z}{(z+\frac{b}{a})(z-1)} = \frac{\bar{u}}{a+b} \left[-\frac{z}{z+\frac{b}{a}} + \frac{z}{z-1} \right] \end{aligned}$$

Scomposizione parziale:

$$\begin{aligned} \frac{X_1(z)}{z} &= \bar{u} \cdot \frac{1}{(az+b)(z-1)} = \frac{\bar{u}}{a} \left[\frac{-\frac{a}{a+b}}{z+\frac{b}{a}} + \frac{\frac{a}{a+b}}{z-1} \right] \\ \Rightarrow X_1(z) &= \frac{\bar{u}}{a+b} \left[-\frac{z}{z+\frac{b}{a}} + \frac{z}{z-1} \right] \\ \Rightarrow x_1(k) &= \frac{\bar{u}}{a+b} \left[1 - \left(-\frac{b}{a}\right)^k \right] \delta_{-1}(k) \end{aligned}$$

Comportamento Asintotico:

Se $a > b$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_1(k) = \frac{\bar{u}}{a+b}$$

Capitolo 11

Stabilità

11.1 Stabilità: Stati e Coppie di Equilibrio

Stato di equilibrio (senza ingressi, variabili indipendenti)

Definizione: Dato un sistema a tempo continuo o a tempo discreto, uno stato x_e si dice stato d'equilibrio se l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale x_e è costante e pari a x_e , cioè:

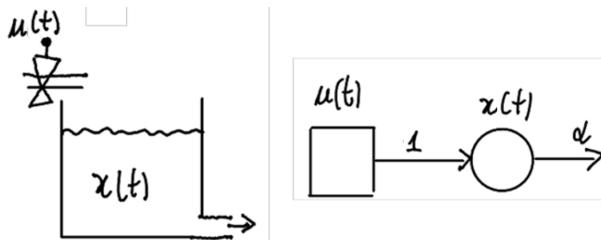
$$x_l(t) = x_e \quad \text{per ogni } t \geq 0, \quad \text{oppure} \quad x_l(k) = x_e \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Coppia d'equilibrio (con ingressi, variabili indipendenti)

Definizione: Dato un sistema a tempo continuo o a tempo discreto, una coppia $[x_e, u_e]$ viene detta *coppia d'equilibrio* per il sistema se l'andamento delle variabili di stato, a fronte di un andamento costante pari a u_e della variabile indipendente e a uno stato iniziale x_e , è costante e pari a x_e , cioè:

$$x(t) = x_e \quad \text{per ogni } t \geq 0, \quad \text{oppure} \quad x(k) = x_e \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

11.1.1 Esempio: Rubinetto e Serbatoio



Consideriamo la seguente equazione differenziale:

$$x'(t) = u(t) - \alpha x(t)$$

Si può verificare che la coppia $[x_e, u_e] = [\frac{\bar{u}}{\alpha}, \bar{u}]$ è una coppia di equilibrio. Infatti, imponendo la condizione di equilibrio $x'(t) = 0$, si ha:

$$0 = \bar{u} - \alpha \cdot \frac{\bar{u}}{\alpha}$$

che è verificata.

L'andamento della soluzione completa del sistema è dato da:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = x(0)e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\bar{u}$$

Se si assume come condizione iniziale $x(0) = x_e = \frac{\bar{u}}{\alpha}$, allora sostituendo nella soluzione:

$$x(t) = \frac{\bar{u}}{\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{\bar{u}}{\alpha} - \frac{\bar{u}}{\alpha}e^{-\alpha t} = \frac{\bar{u}}{\alpha} = x_e, \quad \forall t \geq 0$$

Quindi, si conferma che la coppia $\left[\frac{\bar{u}}{\alpha}, \bar{u}\right]$ è una coppia d'equilibrio del sistema.

11.2 Stati di Equilibrio

Teorema: Dato un sistema LTI (a tempo continuo o a tempo discreto),

- l'insieme di tutti gli stati d'equilibrio è un sottospazio dello spazio di stato;
- l'origine dello spazio di stato è quindi sempre uno stato di equilibrio del sistema.

Nota: L'origine è lo stato formato da tutti zeri.

Dimostrazione

i) Siano dati due stati di equilibrio x_1 e x_2 . Per la linearità del sistema (proprietà di sovrapposizione degli effetti), ogni combinazione lineare di x_1 e x_2 è anch'essa uno stato di equilibrio:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x = \alpha x_1 + \beta x_2 \Rightarrow x \text{ è ancora uno stato di equilibrio.}$$

Pertanto, l'insieme degli stati di equilibrio è un sottospazio dello spazio di stato.

ii) Per dimostrare che l'origine è sempre uno stato di equilibrio:

- **Nel caso continuo:** se $x_e = 0$, allora

$$\dot{x} = Ax = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

- **Nel caso discreto:** se $x_e = 0$, allora

$$x(k+1) = Ax(k) = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow x(k) = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Quindi l'origine dello spazio di stato è sempre uno stato di equilibrio.

11.2.1 Calcolo degli Stati (Tempo Continuo)

- **Osservazione:** l'evoluzione libera a partire da uno stato di equilibrio rimane costante e pari allo stato di equilibrio stesso. Questo implica che:

$$0 = x'_e = Ax_e$$

Quindi tutti gli stati di equilibrio appartengono al nucleo (kernel) della matrice A :

$$x_e \in \ker\{A\}$$

- **Nota:** nel caso in cui la matrice A abbia autovalori distinti, calcolare gli stati di equilibrio equivale a determinare se esiste un autovettore associato a un autovalore nullo:

$$Ax_e = 0 = 0 \cdot x_e$$

cioè, trovare una soluzione non banale del sistema omogeneo associato alla matrice A .

- Se la matrice A è **invertibile**, ovvero se:

$$\det(A) \neq 0$$

allora il sistema ammette un solo stato di equilibrio, che è l'origine. Infatti, l'unica soluzione del sistema omogeneo è:

$$x_e = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

- In questo caso (matrice A invertibile), non esistono autovalori nulli. Di conseguenza, i modi naturali del sistema (le soluzioni dell'equazione omogenea associata) sono:

- convergenti (se $\Re(\lambda) < 0$),
- divergenti (se $\Re(\lambda) > 0$),
- o periodici (se $\Re(\lambda) = 0$ con parte immaginaria non nulla).

In ogni caso, non è possibile trovare nessuno stato iniziale non nullo dal quale l'evoluzione libera del sistema rimanga costante nel tempo.

11.3 Calcolo delle Coppie di Equilibrio (Tempo Continuo)

- **Coppia di equilibrio:** l'evoluzione del sistema a partire da uno stato di equilibrio x_e rimane costante e pari a x_e , a fronte di un valore costante della variabile indipendente pari a u_e . La condizione di equilibrio diventa:

$$x'_e = Ax_e + Bu_e = 0$$

cioè la derivata dello stato è nulla in presenza di ingressi costanti.

- **Caso con matrice A invertibile:** se A è invertibile (cioè $\det(A) \neq 0$), allora per ogni valore assegnato di u_e esiste una sola coppia di equilibrio $[x_e, u_e]$. In questo caso, è possibile calcolare lo stato di equilibrio x_e in forma esplicita risolvendo:

$$x_e = -A^{-1}Bu_e$$

Questo risultato garantisce che, fissato l'ingresso costante u_e , esiste un unico stato x_e che rende la derivata nulla, cioè mantiene il sistema in equilibrio statico.

11.4 Calcolo degli Stati di Equilibrio (Tempo Discreto)

- **Osservazione:** se uno stato x_e è uno stato di equilibrio, allora:

$$x(k+1) = x(k) = x_e = Ax_e, \quad \forall k \geq 0$$

cioè lo stato non cambia nel tempo e rispetta l'equazione della dinamica del sistema.

- Gli stati di equilibrio appartengono al nucleo della matrice $(I - A)$, che è un sottospazio lineare:

$$x_e \in \ker(I - A)$$

- Nel caso in cui la matrice A abbia autovalori distinti, trovare uno stato di equilibrio equivale a cercare, se esiste, un autovettore associato a un autovalore pari a uno. Infatti:
 - Se esiste un autovalore $\lambda = 1$, allora scegliendo uno stato iniziale appartenente al sottospazio generato dall'autovettore corrispondente, l'evoluzione libera del sistema rimane costante nel tempo.
 - Questo perché il modo naturale associato a $\lambda = 1$ è costante.
- Se la matrice $(I - A)$ è **invertibile**, cioè:

$$\det(I - A) \neq 0$$

allora l'unico stato di equilibrio è l'origine.

- In questo caso, la matrice A non ha alcun autovalore pari a uno. Di conseguenza, i modi naturali del sistema possono essere:
 - convergenti (se $|\lambda| < 1$),
 - divergenti (se $|\lambda| > 1$),
 - periodici (se λ complesso con $|\lambda| = 1$ e $\lambda \neq 1$),
 - o alternanti costanti (ad esempio $\lambda = -1$).

Tuttavia, in nessun caso è possibile trovare uno stato iniziale non nullo per cui l'evoluzione libera del sistema rimanga costante.

Coppie di Equilibrio (Tempo Discreto)

- **Coppia d'equilibrio:** l'evoluzione a partire da uno stato d'equilibrio x_e rimane costante e pari a x_e , a fronte di un ingresso costante pari a u_e . La condizione di equilibrio è:

$$x_e = Ax_e + Bu_e$$

- Se la matrice $(I - A)$ è **invertibile**, allora per ogni valore assegnato di u_e esiste una sola coppia di equilibrio $[x_e, u_e]$. In tal caso, lo stato x_e può essere calcolato esplicitamente come:

$$x_e = (I - A)^{-1}Bu_e$$

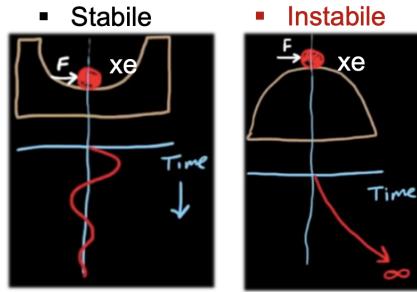
Questo garantisce l'esistenza e l'unicità della coppia d'equilibrio per ogni ingresso costante.

11.5 Stabilità

- **Osservazione:** è di grande interesse applicativo stabilire se lo stato (o la coppia) di equilibrio sia stabile, ovvero se il sistema tenda spontaneamente a tornare in tale condizione di equilibrio quando se ne discosti temporaneamente.

Il problema della stabilità dell'equilibrio è di natura prettamente dinamica, poiché riguarda l'evoluzione dello stato del sistema nel tempo, quando esso si trovi in una configurazione lievemente differente da quella di equilibrio.

Definizioni di stabilità



- **Asintoticamente stabile:** uno stato di equilibrio x_e si dice **asintoticamente stabile** se l'evoluzione libera a partire da un qualsiasi stato iniziale x_0 tende a x_e sul lungo periodo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_l(t) = x_e, \quad \forall x_0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_l(k) = x_e, \quad \forall x_0$$

- **Instabile:** uno stato di equilibrio x_e si dice **instabile** se esiste almeno uno stato iniziale x_0 a partire dal quale l'evoluzione libera, sul lungo periodo, si allontana indefinitamente da x_e :

$$\exists x_0 : \lim_{t \rightarrow \infty} |x_l(t)| = \infty$$

$$\exists x_0 : \lim_{k \rightarrow \infty} |x_l(k)| = \infty$$

- **Marginalmente stabile:** uno stato di equilibrio x_e che non sia né asintoticamente stabile né instabile è detto **marginalmente stabile**. In questo caso, le traiettorie del sistema restano limitate ma non convergono a x_e .
- **Copie di equilibrio:** la stabilità di una **coppia di equilibrio** $[x_e, u_e]$ è definita in modo analogo, considerando l'ingresso costante u_e . La natura stabile, instabile o marginale della coppia dipende dal comportamento dell'evoluzione del sistema in presenza di tale ingresso costante.

11.6 Stabilità: Sistemi LTI

Se però mi limito ai sistemi lineari, vale il seguente teorema:

Teorema

- Dato un sistema lineare a tempo continuo o a tempo discreto, tutti i suoi stati d'equilibrio hanno la stessa proprietà di stabilità dell'origine dello spazio di stato.
- Dato un sistema lineare a tempo continuo o a tempo discreto, tutte le coppie di equilibrio hanno la stessa proprietà di stabilità dell'origine dello spazio di stato.

Esempio semplice: In un sistema lineare ho due stati: 0 e 5. Se il sistema è lineare, allora se lo stato 0 è stabile, anche lo stato 5 sarà stabile. Questo riflette la proprietà di linearizzazione, per cui le caratteristiche dinamiche valgono per traslazione nello spazio di stato.

Osservazioni

- Il teorema precedente permette, per i sistemi lineari, di studiare la stabilità di tutte le coppie d'equilibrio basandosi unicamente sullo studio delle proprietà di stabilità dell'**origine** dello spazio di stato, che è sempre uno stato di equilibrio.
- Poiché le proprietà di stabilità dell'origine dello spazio di stato determinano in modo univoco la stabilità di tutti gli stati e di tutte le coppie di equilibrio del sistema, ha senso definire la stabilità dell'intero sistema lineare nel modo seguente:

Un sistema lineare si dice **asintoticamente stabile, instabile o marginalmente stabile** se l'origine dello spazio di stato è, rispettivamente, uno stato di equilibrio asintoticamente stabile, instabile o marginalmente stabile.

11.7 Criteri di Stabilità per Sistemi a Tempo Continuo

$$x'_l(t) = Ax_l(t), \quad x(0) = x_0$$

- **Osservazione:** l'origine dello spazio di stato è uno stato di equilibrio **asintoticamente stabile** se e solo se tutti i modi naturali del sistema sono convergenti, ovvero se **tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa**.
- **Osservazione:** l'origine dello spazio di stato è **instabile** se esiste almeno uno stato iniziale a partire dal quale l'evoluzione libera è divergente.
- **Osservazione:** l'origine dello spazio di stato è quindi **instabile** se e solo se almeno uno degli autovalori della matrice A ha parte reale positiva.
- **Osservazione:** si ha **stabilità marginale** dell'origine se e solo se:
 - tutti gli autovalori di A hanno parte reale non positiva ($\Re(\lambda_i) \leq 0$),
 - e almeno uno ha parte reale nulla ($\Re(\lambda_i) = 0$).

Tuttavia, se un autovalore con parte reale nulla ha molteplicità maggiore di 1, ciò determina comunque un comportamento instabile, noto come **instabilità debole**.

Teorema

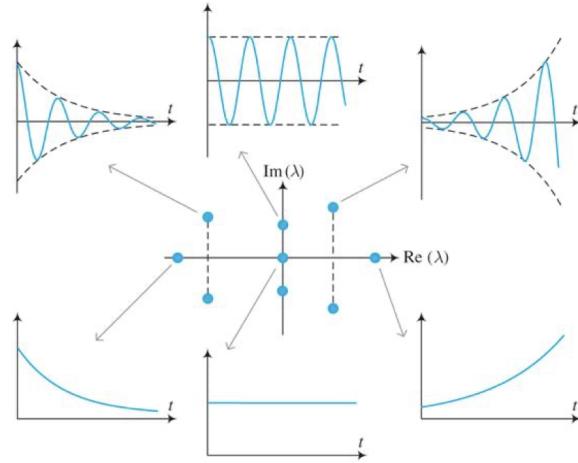
Un sistema lineare a tempo continuo è:

1. **Asintoticamente stabile** $\iff \Re(\lambda_i) < 0$ per ogni autovalore λ_i della matrice A ;
2. **Instabile** \iff esiste almeno un autovalore λ_i della matrice A tale che $\Re(\lambda_i) > 0$;
3. **Marginalmente stabile** \iff

$$\Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall \lambda_i \quad \text{e} \quad \exists \lambda_i : \Re(\lambda_i) = 0$$

con **molteplicità algebrica unitaria**.

❖ **Esempio: autovalori con molteplicità unitaria**



- **Osservazione:** se si hanno autovalori **sull'asse immaginario** (cioè $\Re(\lambda_i) = 0$), la loro molteplicità è cruciale. Infatti:
 - se la molteplicità è unitaria, si può avere stabilità marginale;
 - se la molteplicità è maggiore di 1, il sistema è comunque instabile (**instabilità debole**).

11.8 Stabilità per Sistemi a Tempo Continuo: Il Criterio di Routh

- Il calcolo di tutti gli autovalori della matrice A , ovvero delle radici del suo polinomio caratteristico, richiede la soluzione di un'equazione polinomiale di grado n . In generale, questo non è possibile in forma esplicita per gradi superiori al quarto.
- La stabilità è legata al segno della parte reale degli autovalori. Per stabilire la stabilità del sistema, non è quindi necessario calcolare esplicitamente gli autovalori: è sufficiente verificare se tutti hanno parte reale negativa.
- *Nota:* nel caso di un polinomio di secondo grado, è possibile applicare la **Regola di Cartesio** per verificare il segno delle radici.

Criterio di Routh

In generale, si può utilizzare il **Criterio di Routh** applicato al polinomio caratteristico della matrice A :

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

dove si assume $a_n > 0$ (in caso contrario, si moltiplica il polinomio per -1).

- Se esiste anche un solo coefficiente $a_i \leq 0$, allora il polinomio **non ha tutte le radici con parte reale negativa**, e quindi il sistema non è asintoticamente stabile.
- Se tutti i coefficienti del polinomio sono strettamente positivi, allora si può procedere con la costruzione della **tavola di Routh**.

- Il polinomio ha tutte le radici con parte reale negativa (cioè il sistema è asintoticamente stabile) se e solo se **il primo elemento di ogni riga della tabella di Routh è positivo**.
 - Durante la costruzione, ci si può fermare appena si incontra una riga con primo elemento negativo o nullo, poiché ciò indica la presenza di radici con parte reale non negativa.
- **Attenzione:** se, durante la costruzione della tabella di Routh:
 - compare un elemento nullo nella prima colonna, oppure
 - compare una riga costituita interamente da zeri,

esistono metodi per completare la tabella e applicare comunque il criterio. Tuttavia, in questi casi è certo che **non tutte le radici del polinomio hanno parte reale negativa**. Potrebbero infatti esserci:

- radici sull'asse immaginario (*marginalmente stabile*), oppure
- radici con parte reale positiva (*instabile*).

11.8.1 Il Criterio di Routh

(Ripassa la regola di Cartesio se il polinomio è di secondo grado)

- **Cartesio:** si applica per polinomi di **1º e 2º grado**
- **Routh:** si applica per polinomi di **grado ≥ 3**
- Il calcolo degli autovalori della matrice A , cioè delle radici del suo polinomio caratteristico, richiede la risoluzione di un'equazione polinomiale di grado n . In generale, questa non è risolvibile in forma chiusa per $n > 4$.
- La stabilità dipende dal segno della parte reale degli autovalori. Per valutarla non è necessario calcolare esplicitamente gli autovalori, ma è sufficiente determinare se essi abbiano tutti parte reale negativa.
- *Nota:* nel caso di un polinomio di secondo grado, si può applicare la **regola di Cartesio** per verificare il segno delle radici.
- In generale, è possibile utilizzare il **criterio di Routh**, applicandolo al polinomio caratteristico della matrice A :

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

con $a_n > 0$ (se $a_n < 0$, si moltiplica tutto il polinomio per -1).

Costruzione della tabella di Routh

Supponiamo, ad esempio, che tutti i coefficienti del polinomio siano positivi.

Costruiamo una tabella composta da $n+1$ righe, dove:

$$b_{n-k} = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-k} \\ a_{n-1} & a_{n-k-1} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad c_{n-k} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-k} \\ a_{n-2} & a_{n-k-1} \end{vmatrix}}{a_{n-2}}$$

Esempio: polinomio di quarto grado:

$$p(\lambda) = a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Tabella di Routh:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & a_4 & a_2 & a_0 \\ & a_3 & a_1 & 0 \\ \hline -\left| \begin{array}{cc} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{array} \right| & = b_1 & -\left| \begin{array}{cc} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{array} \right| & = b_2 & -\left| \begin{array}{cc} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{array} \right| = 0 \\ \hline -\left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| & = c_1 & -\left| \begin{array}{cc} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{array} \right| & = 0 & -\left| \begin{array}{cc} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{array} \right| = 0 \\ \hline -\left| \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{array} \right| & = d_1 & -\left| \begin{array}{cc} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{array} \right| & = 0 & -\left| \begin{array}{cc} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right]$$

Criterio di Routh*

Dato un polinomio con tutti i coefficienti positivi, **tutte le radici hanno parte reale negativa** se e solo se **tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono positivi**.

- La presenza di almeno un elemento negativo nella prima colonna implica che esiste almeno una radice con parte reale positiva.
- In tal caso, il sistema è instabile.

11.9 Esempi di Applicazione del Criterio di Routh

11.9.1 ESEMPIO 1

Consideriamo il polinomio:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 10\lambda^2 + 31\lambda + 1030$$

Tabella di Routh:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 1 & 31 & 0 \\ & 10 & 1030 & 0 \\ \hline -\left| \begin{array}{cc} 1 & 31 \\ 10 & 1030 \end{array} \right| & = -72 & -\left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 10 & 0 \end{array} \right| & = 0 & -\left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 10 & 0 \end{array} \right| = 0 \\ \hline -\left| \begin{array}{cc} 10 & 1030 \\ -72 & 0 \end{array} \right| & = 1030 & -\left| \begin{array}{cc} 10 & 0 \\ -72 & 0 \end{array} \right| & = 0 & -\left| \begin{array}{cc} 10 & 0 \\ -72 & 0 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right]$$

Appena si trova una variazione di segno nella **prima colonna**, si conclude che il sistema è **instabile** (se l'unico obiettivo è verificare la stabilità). Infatti:

⇒ esistono almeno due radici con parte reale positiva (due cambi di segno).

Nota: più in generale, ad ogni variazione di segno tra elementi successivi della prima colonna corrisponde una radice con parte reale positiva, ovvero nel semipiano destro di Gauss. Le restanti radici si trovano nel semipiano sinistro (parte reale negativa) o, eventualmente, sull'asse immaginario (parte reale nulla).

11.9.2 ESEMPIO 2

Sia il sistema dinamico descritto dalla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda + 8$$

Poiché **tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh risultano positivi**, si conclude che il sistema è **asintoticamente stabile**.

Osservazioni e Casi Particolari sulla Tabella di Routh

Dato:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

con $a_n > 0$ (altrimenti si moltiplica il polinomio per -1)

- La presenza di una variazione di segno nei coefficienti del polinomio implica che almeno una radice ha parte reale maggiore o uguale a zero.
- Se il polinomio ha tutti i coefficienti **strettamente positivi**, esso ha tutte le radici con parte reale negativa se e solo se il **primo elemento di ogni riga della tabella di Routh è positivo**. In questo caso, la costruzione della tabella può essere interrotta appena si trova una riga con primo elemento negativo.
- Se durante la costruzione:
 - compare un elemento **nullo nella prima colonna**, oppure
 - compare una **riga di tutti zeri**,

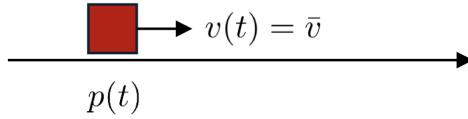
la tabella non è immediatamente completabile.

- In tal caso è certo che esistono radici del polinomio con parte reale ≥ 0 (cioè radici sull'asse immaginario oppure nel semipiano destro). Le possibili situazioni sono:
 1. alcuni elementi della riga sono non nulli;
 2. tutti gli elementi della riga sono nulli.

Esistono tecniche note per proseguire comunque con la costruzione della tabella di Routh.

11.10 Note su Molteplicità e Modi Dominanti

11.10.1 Nota 1: Autovalori con Molteplicità > 1 e Modi Naturali



Esempio: il moto rettilineo con velocità $v(t)$ costante.

Se $p(t)$ è la posizione, allora l'equazione del moto risulta:

$$p''(t) = 0$$

Definizione degli stati:

$$x_1(t) := p(t) \quad (\text{posizione}) \quad x_2(t) := v(t) \quad (\text{velocità})$$

Il modello dinamico del sistema è:

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = 0 \end{cases}$$

Matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolo degli autovalori:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - (0)(1) = \lambda^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore con molteplicità pari a 2

Calcolo degli autovettori: risolviamo $(A - \lambda I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0x + y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad 0x + 0y = 0 \quad (\text{sempre vero})$$

Autovettore:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Osservazione: l'autovalore ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1 (cioè abbiamo un solo autovettore indipendente).

Serve una base di due autovettori per descrivere completamente la dinamica del sistema. Avendone solo uno, ci "manca un pezzo": non possiamo rappresentare l'evoluzione con il solo modo naturale e^{0t} .

Conclusione: la matrice A non è diagonalizzabile. Servirebbe anche un vettore generalizzato per completare la base dello spazio di stato e descrivere correttamente la soluzione del sistema.

11.10.2 Esempio: Il Moto Rettilineo Uniforme (Velocità Costante)

Interpretazione geometrica: immaginiamo una massa che si muove lungo una linea retta con velocità costante. Poiché l'autovalore del sistema è zero, la velocità non cambia mai in modo esponenziale (cioè, non c'è accelerazione né decelerazione). Tuttavia, la presenza di un solo autovettore implica che:

- la velocità resta costante ($x_2(t) = \bar{v}$);
- la posizione $x_1(t)$ cresce linearmente nel tempo, perché si aggiunge un termine proporzionale a t alla soluzione.

Quindi, anche se $\lambda = 0$, la soluzione non è solo un termine costante (come e^{0t}), ma contiene anche un termine lineare in $t \cdot e^{0t} = t$.

In conclusione, la soluzione generale del sistema è:

$$x_1(t) = c_1 e^{0t} + c_2 t e^{0t} = c_1 + c_2 t$$

$$x_2(t) = \bar{v}$$

Si tratta di un sistema dinamico equivalente a un **doppio integratore con ingresso nullo**.

Verifica tramite Trasformata di Laplace

Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema:

$$L\{x'(t)\} = L\{Ax(t)\} \Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

Costruiamo le matrici:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} sx_1(0) + x_2(0) \\ sx_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1(0)}{s} + \frac{x_2(0)}{s^2} \\ \frac{x_2(0)}{s} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando:

$$L^{-1} \left\{ \frac{x_1(0)}{s} + \frac{x_2(0)}{s^2} \right\} = x_1(0) \cdot 1 + x_2(0) \cdot t = x_1(0) + x_2(0)t$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{x_2(0)}{s} \right\} = x_2(0)$$

Soluzione completa:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(0) + x_2(0)t \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Considerazioni sulla Molteplicità e Modi Naturali

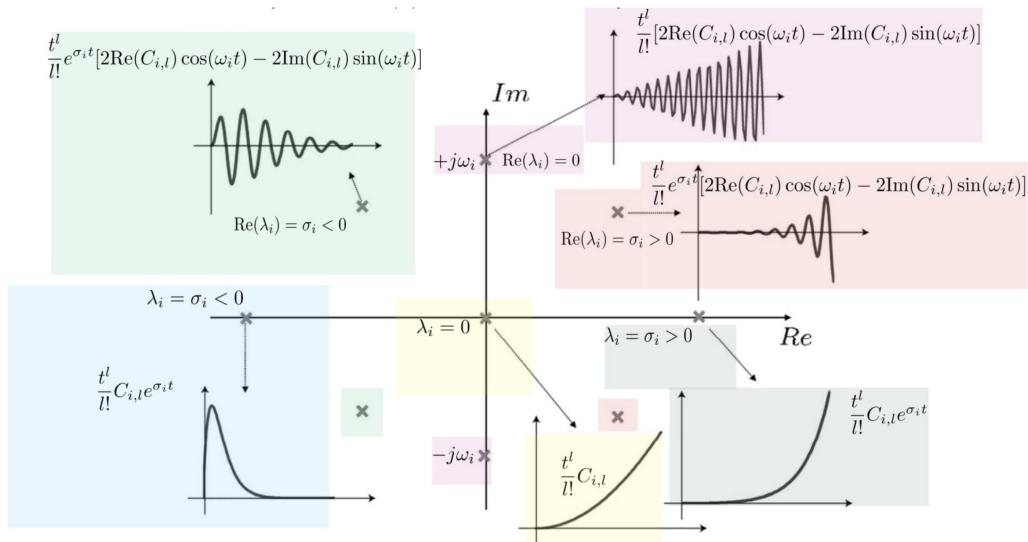
Dato un sistema LTI:

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

Se un autovalore ha molteplicità maggiore di 1, i modi naturali possono assumere due forme:

- Solo termini esponenziali $e^{\lambda t}$, se la matrice A è **diagonalizzabile**.
- Termini del tipo $t^l e^{\lambda t}$ (con l naturale), se la **molteplicità geometrica è strettamente minore della molteplicità algebrica**.

Nota: la molteplicità geometrica indica il numero di autovettori linearmente indipendenti che si possono trovare per un dato autovalore. Se la molteplicità algebrica è maggiore della geometrica, significa che non si riesce a costruire una base completa di autovettori, e quindi A non è diagonalizzabile.



11.10.3 Nota 2: Autovalori Dominanti (Modi Dominanti)

Consideriamo l'evoluzione libera del sistema lineare:

$$x'(t) = Ax(t) \quad (\text{tempo continuo}) \quad x(k+1) = Ax(k) \quad (\text{tempo discreto})$$

A partire dalla condizione iniziale $x(0) = x_0$, la soluzione è:

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (\text{tempo continuo}) \quad x(k) = A^k x_0 \quad (\text{tempo discreto})$$

Al tendere di t (o di k) all'infinito, i modi del sistema possono:

- tendere a zero (sistemi stabili),
- rimanere costanti (sistemi marginalmente stabili),
- o divergere (sistemi instabili),

a seconda dei valori degli autovalori della matrice A .

Tuttavia, alcuni modi naturali tendono a zero **più rapidamente** rispetto ad altri, diventando **trascutibili** nel comportamento asintotico del sistema. I modi più "lenti" a decadere determinano la direzione lungo cui il sistema tende a evolversi nel lungo periodo.

1) Caso con autovalori reali distinti **Definizione:** siano λ_i gli autovalori della matrice A . L'autovalore λ_1 è detto **dominante** se:

- **Nel caso a tempo continuo:**

$$\Re(\lambda_1) > \Re(\lambda_2) \geq \Re(\lambda_3) \geq \cdots \geq \Re(\lambda_n)$$

- **Nel caso a tempo discreto:**

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Proprietà: al tendere di t (o k) all'infinito, l'evoluzione libera $x(t)$ (o $x(k)$) tende ad **appiattirsi lungo il sottospazio** associato all'autovalore dominante λ_1 , cioè quello con parte reale (o modulo) più grande.

2) Caso con autovalori complessi coniugati Una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ viene detta **dominante** se, nel caso tempo continuo:

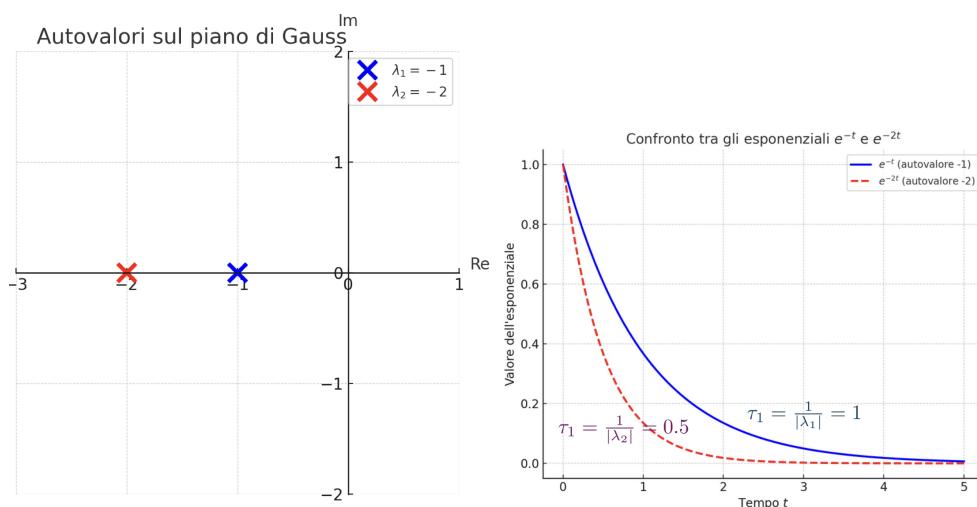
$$\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_1^*) \geq \Re(\lambda_4) \geq \cdots \geq \Re(\lambda_n)$$

Dove $\lambda_1^* = \lambda_2$ indica il complesso coniugato.

Considerazioni analoghe valgono anche per i sistemi a tempo discreto, in cui si confronta il **modulo** anziché la parte reale.

Esempio: Siano gli autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ è l'autovalore dominante (è più vicino all'asse immaginario).

Il corrispondente modo naturale e^{-t} è quello che decresce più lentamente, ed è quindi il più "visibile" nel comportamento del sistema a lungo termine. **La costante di tempo associata** è $\tau = \frac{1}{|\Re(\lambda_1)|} = \frac{1}{1} = 1$, che è più grande rispetto a quella associata a $\lambda_2 = -2$ (la cui costante di tempo è $\frac{1}{2}$).



11.11 Osservazioni Ulteriori sui Criteri di Stabilità

Osservazione: La **Regola dei Segni di Cartesio** fornisce, in generale, solo una **condizione necessaria** (ma non sufficiente) affinché tutte le radici del polinomio $p(\lambda)$ siano a parte reale strettamente negativa.

Regola di Cartesio

Dato un polinomio a coefficienti reali di grado n :

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

Il numero di radici reali **positive** è uguale al numero di variazioni di segno tra coefficienti consecutivi non nulli, oppure è inferiore a tale numero di una quantità pari a un multiplo intero di 2.

Esempio:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$$

C'è una variazione di segno \Rightarrow il polinomio ha una sola radice reale positiva. Infatti:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

11.11.1 Corollario della Regola di Cartesio (Radici Negative)

Il numero di radici reali **negative** è pari al numero di variazioni di segno nei coefficienti consecutivi non nulli del polinomio $p(-\lambda)$, oppure è inferiore a tale numero di una quantità pari a un multiplo di 2.

Esempio:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) \Rightarrow p(-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$$

In $p(-\lambda)$ ci sono due variazioni di segno $\Rightarrow p(\lambda)$ ha due (o zero) radici negative.

Condizione Necessaria Generale (Cartesio)

Affinché tutte le n radici del polinomio $p(\lambda)$ abbiano parte reale strettamente negativa, è necessario che **non vi siano variazioni di segno** tra coefficienti consecutivi non nulli. (*Condizione necessaria, ma non sufficiente*).

Caso Particolare: Grado $n = 2$

Dato:

$$p(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

Una **condizione necessaria e sufficiente** affinché entrambe le radici abbiano parte reale strettamente negativa è che i tre coefficienti a_2, a_1, a_0 siano **tutti dello stesso segno** (cioè tutti > 0 o tutti < 0), quindi **senza variazioni di segno**.

11.11.2 Criterio di Routh

Il criterio di Routh fornisce una **condizione necessaria e sufficiente** affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ abbiano parte reale strettamente minore di 0.

Condizione necessaria: Affinché tutte le n radici di un polinomio reale di grado n :

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

abbiano parte reale strettamente negativa, è necessario che i coefficienti a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 siano **tutti dello stesso segno** (tutti > 0 oppure tutti < 0).

Criterio di Routh-Hurwitz: Condizione **necessaria e sufficiente** affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano a parte reale strettamente negativa:

Tutti gli elementi della **prima colonna** della tabella di Routh devono avere lo stesso segno

11.11.3 Corollario del Criterio di Routh-Hurwitz

Se la tabella di Routh può essere completata (cioè nessun elemento della sua prima colonna è nullo):

- Nessuna radice ha parte reale nulla;
- Il numero di radici con parte reale positiva è **uguale al numero di variazioni di segno** nella prima colonna della tabella.

In pratica: la regola di Cartesio fornisce una condizione necessaria, mentre il criterio di Routh la verifica con maggiore potenza (necessaria e sufficiente).

Altre Osservazioni

- Gli ultimi elementi (non nulli) delle righe con pedici pari della tabella di Routh sono tutti **uguali tra loro** e uguali a a_0 , il coefficiente del termine noto del polinomio.
- Un polinomio i cui zeri hanno tutti parte reale strettamente negativa si dice **Hurwitziano**.
- Il criterio di Routh è spesso chiamato anche **criterio di Routh-Hurwitz**, poiché entrambi i matematici hanno contribuito alla sua formulazione.

11.11.4 Stabilità per Sistemi a Tempo Continuo: Il Criterio di Routh (Casi Particolari)

Osservazioni Generali sulla Tabella di Routh

Dato un polinomio:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

con $a_n > 0$ (altrimenti si moltiplica il polinomio per -1)

- La presenza di una **variazione di segno** nei coefficienti implica che almeno una radice ha parte reale maggiore o uguale a zero.
- Se il polinomio ha **tutti i coefficienti positivi**, esso ha tutte le radici a parte reale negativa **se e solo se** il primo elemento di ogni riga della tabella di Routh (cioè la prima colonna) è positivo.
- Si può interrompere la costruzione della tabella non appena si incontra un primo elemento negativo o nullo.

- Se nella tabella di Routh compare:
 - un **elemento nullo nella prima colonna**, oppure
 - una **riga interamente nulla**,

allora la tabella non è direttamente completabile. In questi casi, si verifica sicuramente la presenza di radici con parte reale ≥ 0 (sull'asse immaginario o nel semipiano destro).

11.11.5 Tecniche di Completamento della Tabella di Routh

Vediamo due tecniche pratiche:

Caso 1: Presenza di uno zero nella prima colonna Esempio:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 0\lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = \lambda^3 + 0\lambda^2 - 3\lambda + 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} \varepsilon & 3 & 1 & -3 \\ & 2 & 0 & 2 \\ & 1 & ?? & \\ \hline & 0 & & \end{array}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -3 \\ 2 & \varepsilon & 2 \\ 1 & \frac{-3\varepsilon - 2}{\varepsilon} & 0 \\ \hline 0 & 2 & \end{array} = \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0^+ & 2 \\ 1 & -\infty & 0 \\ \hline 0 & 2 & \end{array}$$

Quando compare 0 nella prima colonna, si introduce una piccola quantità $\varepsilon > 0$:

Sostituire 0 con ε , poi considerare $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$

Si prosegue la costruzione della tabella e si valutano i segni. In questo caso si trovano **due variazioni di segno** nella prima colonna \Rightarrow **due radici con parte reale > 0** \Rightarrow instabilità.

Osservazione: l'instabilità poteva essere già dedotta applicando la **Regola di Cartesio** al polinomio:

$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$ ha due variazioni di segno \Rightarrow 2 radici reali positive

Caso 2: Presenza di una riga interamente nulla Nota: questo caso si verifica sempre in corrispondenza di una riga con indice dispari.

Esempio:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} 4: \lambda^4 & 1 & -3 & 2 \\ 3: \lambda^3 & 1 & -1 & 0 \\ 2: \lambda^2 & -2 & 2 & 0 \\ 1: \lambda^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0: \lambda^0 & & & \end{array} \Rightarrow \mathcal{A}(\lambda) = -2\lambda^2 + 2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{A}(\lambda)}{d\lambda} = -4\lambda$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 4: \lambda^4 \\
 3: \lambda^3 \\
 2: \lambda^2 \\
 1: \lambda^1 \\
 \text{new: } \lambda^1 \\
 0: \lambda^0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccc}
 1 & -3 & 2 \\
 1 & -1 & 0 \\
 -2 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 -4 & 0 & 0
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 4: \lambda^4 \\
 3: \lambda^3 \\
 2: \lambda^2 \\
 1: \lambda^1 \\
 \text{new: } \lambda^1 \\
 0: \lambda^0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccc}
 1 & -3 & 2 \\
 1 & -1 & 0 \\
 -2 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 -4 & 0 & 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Algoritmo per completare:

1. Si considera il **polinomio ausiliario** $A(\lambda)$ ottenuto dai coefficienti della riga precedente a quella degli zeri;
2. Si calcola la derivata del polinomio ausiliario rispetto a λ ;
3. Si sostituisce la riga nulla con i coefficienti del polinomio derivato;
4. Si continua la costruzione della tabella.

Nel nostro esempio:

$$A(\lambda) = -2\lambda^2 + 2 \Rightarrow \frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = -4\lambda$$

Si analizza la prima colonna della tabella finale. In questo caso si trovano **due variazioni di segno** \Rightarrow due radici con parte reale positiva \Rightarrow instabilità.

11.11.6 Esercizio: Stabilità di un Sistema Dinamico

Dato il sistema dinamico:

$$x'(t) = Ax(t) \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Polinomio caratteristico con regola di Sarrus

Costruiamo il determinante $\det(A - \lambda I)$:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -8 & -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} -\lambda^2(\lambda + 5) - 8 - 2\lambda = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda - 8$$

Il polinomio caratteristico può essere riscritto (senza il segno meno iniziale) come:

$$-p_A(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda + 8$$

Stabilità con Tabella di Routh

Nota: la tabella di Routh è allegata.

$$\begin{array}{c|cc}
 3 & 1 & 2 \\
 2 & 5 & 8 \\
 1 & 2/5 & 0 \\
 0 & 8 &
 \end{array}$$

Analizzando la **prima colonna** della tabella di Routh, si osserva che **tutti gli elementi sono positivi**, quindi:

\Rightarrow il sistema è asintoticamente stabile

Caso con polinomio a coefficienti parametrici

Si consideri ora il seguente polinomio parametrico:

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + (k+3)\lambda + (k-1), \quad \text{con } k > 0$$

Condizione necessaria (criterio di Routh):

$$\begin{cases} k+3 > 0 \\ k-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow k > 1$$

Tabella di Routh:

| | | |
|---|-------------------|-------|
| 3 | 1 | $k+3$ |
| 2 | 5 | $k-1$ |
| 1 | $\frac{4k+16}{5}$ | 0 |
| 0 | $k-1$ | |

Per garantire che tutte le radici abbiano parte reale negativa (cioè per stabilità asintotica), è necessario che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi. Questo avviene se e solo se:

$$\begin{cases} \frac{4k+16}{5} > 0 \quad (\text{sempre per } k > 0) \\ k-1 > 0 \quad (\text{cioè } k > 1) \end{cases} \Rightarrow k > 1$$

Conclusione: Il sistema è **asintoticamente stabile** se e solo se:

$$k > 1$$

Altre Osservazioni

- Gli **ultimi elementi non nulli** delle righe con **pedici pari** della tabella di Routh sono **tutti uguali tra loro e uguali a a_0** , cioè al coefficiente del termine di grado zero nel polinomio assegnato.
- Un polinomio i cui zeri hanno tutti **parte reale strettamente negativa** (cioè < 0) si dice **Hurwitziano**.
- Il **criterio di Routh** è spesso anche chiamato **criterio di Routh-Hurwitz**.

11.11.7 Criteri di Stabilità per Sistemi a Tempo Discreto

Per i sistemi a tempo continuo abbiamo utilizzato il criterio di Routh. Ora vediamo come procedere nel caso dei sistemi a tempo discreto.

- L'origine dello spazio di stato è uno stato d'equilibrio **asintoticamente stabile** se e solo se l'evoluzione libera converge a zero per qualsiasi stato iniziale. Questo accade se e solo se **tutti i modi naturali sono convergenti**, ovvero:

$$|\lambda_i| < 1 \quad \forall \lambda_i \in \text{spettro}(A)$$

- L'origine dello spazio di stato è **instabile** se esiste almeno uno stato iniziale a partire dal quale l'evoluzione libera diverge. Questo accade se e solo se:

$$\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1$$

- Si ha **stabilità marginale** dell'origine se e solo se:
 - $|\lambda_i| \leq 1$ per ogni autovalore λ_i ,
 - almeno un autovalore ha modulo unitario: $|\lambda_i| = 1$,
 - e tale autovalore ha molteplicità unitaria.

Se la molteplicità è maggiore di 1, si ha **instabilità debole**.

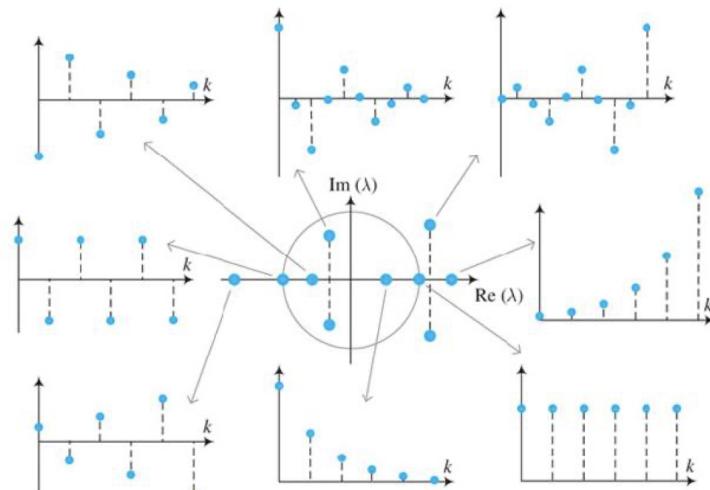
Teorema – Stabilità per Sistemi Lineari a Tempo Discreto

Un sistema lineare a tempo discreto è:

- **Asintoticamente stabile** $\iff |\lambda_i| < 1$ per ogni autovalore λ_i della matrice A ;
- **Instabile** $\iff \exists \lambda_i$ tale che $|\lambda_i| > 1$;
- **Marginalmente stabile** $\iff |\lambda_i| \leq 1$ per ogni λ_i , e almeno un λ_i ha $|\lambda_i| = 1$ con molteplicità unitaria.

Osservazione: Autovalori sul **cerchio unitario** con molteplicità maggiore di 1 causano instabilità (debole).

❖ Esempio: autovalori con molteplicità unitaria



Metodo della Trasformazione Bilineare

Anche per i sistemi a tempo discreto possiamo definire un criterio algebrico di stabilità, analogo a quello di Routh-Hurwitz. Si tratta di una procedura polinomiale per determinare se tutte le radici di un polinomio assegnato si trovano all'interno del **disco unitario**, ovvero se il polinomio è **Jury-stabile**.

Dato:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

Obiettivo: verificare se tutte le radici di $p(\lambda)$ hanno modulo < 1 .

Strategia: trasformare $p(\lambda)$ in una forma per la quale si possa applicare il criterio di Routh, sfruttando la trasformazione bilineare:

$$\lambda = \frac{1+\omega}{1-\omega}$$

Sostituendo nel polinomio:

$$p(\omega) = a_n \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) + a_0$$

Semplificando:

$$p(\omega) = \frac{q(\omega)}{(1-\omega)^n}$$

Osservazione: La trasformazione bilineare mappa il **disco unitario** nel **semipiano sinistro**.

Pertanto:

$$p(\lambda) \text{ ha tutte le radici con } |\lambda| < 1 \iff q(\omega) \text{ ha tutte le radici con } \Re(\omega) < 0$$

E quindi possiamo applicare il criterio di Routh-Hurwitz a $q(\omega)$ per verificare la stabilità del sistema a tempo discreto.

11.11.8 Esempio: Verifica della Stabilità tramite Trasformazione Bilineare

Dato il polinomio:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1$$

Applichiamo la **trasformazione bilineare**:

$$\lambda = \frac{1+\omega}{1-\omega}$$

Sostituendo:

$$p(\omega) = \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^3 + 2 \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^2 + \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) + 1 = \frac{\omega^3 - 3\omega^2 - \omega - 5}{-(1-\omega)^3}$$

Ricaviamo il numeratore:

$$q(\omega) = \omega^3 - 3\omega^2 - \omega - 5$$



| | | |
|---|-----|----|
| | 1 | -1 |
| 3 | -3 | 5 |
| 2 | 2/3 | 0 |
| 1 | 5 | 0 |
| 0 | | |

Ora applichiamo il **criterio di Routh** al polinomio $q(\omega)$.

Osservazione: Se ci interessa solo verificare se il sistema è instabile, è sufficiente guardare la **prima colonna** della tabella di Routh.

Sono presenti 2 cambiamenti di segno $\Rightarrow 2$ radici con $\Re(\omega) > 0 \Rightarrow$ Sistema instabile

Nota aggiuntiva: Anche senza costruire la tabella di Routh, si poteva notare direttamente che $q(\omega)$ non soddisfa la condizione necessaria del criterio (cioè che tutti i coefficienti abbiano lo stesso segno), e quindi il sistema non è stabile.

11.12 Stabilità Interna, Trasformata di Laplace e Trasformata Z

11.12.1 Sistemi LTI a Tempo Continuo

Dato un sistema lineare tempo-invariante:

$$x_l'(t) = Ax_l(t), \quad x_l(0)$$

Autovalori: ottenuti da:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Trasformata di Laplace:

$$L[x_l'(t)] = L[Ax_l(t)] \Rightarrow X_l(s) = (sI - A)^{-1}x_l(0)$$

La matrice inversa può essere espressa come:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{N(s)}{\det(sI - A)} \quad \text{dove } p_A(s) := \det(sI - A)$$

Osservazione: I polinomi $p_A(s)$ e $p_A(\lambda)$ hanno le stesse radici (gli stessi coefficienti a meno di un eventuale cambio di segno complessivo). Quindi l'analisi di stabilità interna (asintotica, marginale o instabilità) può essere condotta, nel dominio della trasformata di Laplace, anche a partire dal **polinomio a denominatore di** $(sI - A)^{-1}$.

11.12.2 Sistemi LTI a Tempo Discreto

Dato:

$$x_l(k+1) = Ax_l(k), \quad x_l(0)$$

Autovalori: ottenuti da:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Trasformata Z:

$$Z[x_l(k+1)] = Z[Ax_l(k)] \Rightarrow X_l(z) = (zI - A)^{-1}zx_l(0)$$

Come nel caso continuo:

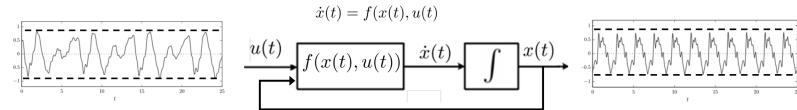
$$(zI - A)^{-1} = \frac{N(z)}{\det(zI - A)} \quad \text{dove } p_A(z) := \det(zI - A)$$

Osservazione: Anche in questo caso, i polinomi $p_A(z)$ e $p_A(\lambda)$ hanno le stesse radici. Pertanto, l'analisi di stabilità interna può essere effettuata nel dominio della trasformata Z, a partire dal **polinomio al denominatore di** $(zI - A)^{-1}$.

11.12.3 Stabilità Esterna: BIBS e BIBO

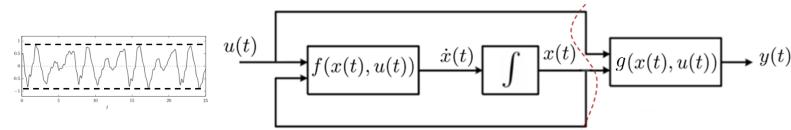
Stabilità BIBS (Bounded Input, Bounded State): In corrispondenza di un ingresso limitato, l'evoluzione dello stato del sistema è limitata.

Osservazione su $[0, +\infty)$, con condizioni iniziali a riposo (c.i. = 0)



Stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output): In corrispondenza di un ingresso limitato, l'uscita del sistema rimane limitata.

Osservazione su $[0, +\infty)$, con condizioni iniziali a riposo (c.i. = 0)

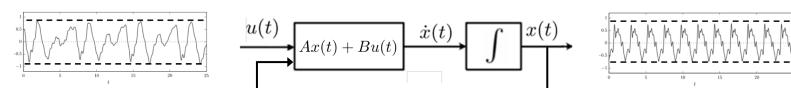


Osservazione: Definizioni analoghe valgono anche per i sistemi a tempo discreto.

11.12.4 Stabilità Esterna BIBS e BIBO per Sistemi LTI

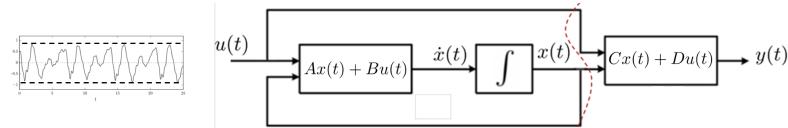
Stabilità BIBS: Un sistema LTI è **BIBS stabile** se, a fronte di un ingresso limitato, l'evoluzione dello stato è limitata.

Condizione: ingresso limitato \Rightarrow stato $x(t)$ limitato



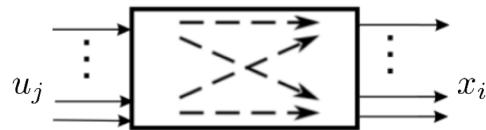
Stabilità BIBO: Un sistema LTI è **BIBO stabile** se, a fronte di un ingresso limitato, l'uscita del sistema è limitata.

Condizione: ingresso limitato \Rightarrow uscita $y(t)$ limitata



Osservazione: Queste definizioni si estendono naturalmente anche ai **sistemi a tempo discreto**, con osservazione nell'intervallo $[0, +\infty)$ e condizioni iniziali nulle.

11.12.5 Stabilità Esterna BIBS per Sistemi LTI – Trasformata di Laplace e Matrice di Trasferimento



Sistemi LTI a tempo continuo (con m ingressi e n stati):

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Trasformata di Laplace:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) = \frac{N(s)}{\det(sI - A)}BU(s)$$

Matrice di Trasferimento:

$$T(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1}B = \frac{N(s)}{\det(sI - A)}B$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & \dots & T_{1m}(s) \\ T_{21}(s) & \dots & T_{2m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1}(s) & \dots & T_{nm}(s) \end{bmatrix}$$

Ogni elemento:

$$T_{ij}(s) = [(sI - A)^{-1}B]_{ij} = \left. \frac{X_i(s)}{U_j(s)} \right|_{U_j \neq 0, U_k = 0 \forall k \neq j}$$

Teorema (BIBS): Il sistema è **BIBS stabile** se e solo se tutte le radici del denominatore della matrice di trasferimento $T(s)$, cioè le radici del polinomio $\det(sI - A)$, hanno parte reale negativa. Ovvero, se il polinomio $\det(sI - A)$ è di tipo **Hurwitz**.

11.12.6 Stabilità Esterna BIBO per Sistemi LTI – Trasformata di Laplace e Funzione di Trasferimento (FDT)

Sistemi LTI a tempo continuo (con n stati, m ingressi, p uscite):

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad \text{dove } G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Funzione di Trasferimento:

$$G_{ij}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]_{ij} = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \Big|_{U_j \neq 0, U_k = 0 \forall k \neq j}$$

(Funzione di trasferimento tra ingresso j e uscita i)

$$(sI - A)^{-1} = \frac{N(s)}{\det(sI - A)}$$

Teorema (BIBO): Il sistema è **BIBO stabile** se e solo se tutte le radici del denominatore delle funzioni di trasferimento (cioè le radici di $\det(sI - A)$) hanno parte reale negativa.

In tal caso, $\det(sI - A)$ è un **polinomio di Hurwitz**, e le sue radici sono dette **poli della FDT**.

11.12.7 Stabilità Esterna BIBS per Sistemi LTI – Trasformata Z e Matrice di Trasferimento

Sistemi LTI a tempo discreto (con m ingressi e n stati):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Trasformata Z:

$$X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) = \frac{N(z)}{\det(zI - A)}BU(z)$$

Matrice di Trasferimento:

$$T(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = (zI - A)^{-1}B = \frac{N(z)}{\det(zI - A)}B$$

$$T(z) = \begin{bmatrix} T_{11}(z) & \dots & T_{1m}(z) \\ T_{21}(z) & \dots & T_{2m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1}(z) & \dots & T_{nm}(z) \end{bmatrix}$$

Ogni elemento:

$$T_{ij}(z) = [(zI - A)^{-1}B]_{ij} = \frac{X_i(z)}{U_j(z)} \Big|_{U_j \neq 0, U_k = 0 \forall k \neq j}$$

Teorema (BIBS): Il sistema è **BIBS stabile** se e solo se tutte le radici del denominatore della matrice di trasferimento $T(z)$, ovvero del polinomio $\det(zI - A)$, hanno **modulo strettamente minore di 1**. In tal caso, il polinomio si dice **Jury-stabile**.

11.12.8 Stabilità Esterna BIBO per Sistemi LTI – Trasformata Z e Funzione di Trasferimento (FDT)

Sistemi LTI a tempo discreto (con n stati, m ingressi, p uscite):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \end{cases}$$

$$Y(z) = G(z)U(z), \quad \text{dove } G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

Funzione di Trasferimento:

$$G_{ij}(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]_{ij} = \frac{Y_i(z)}{U_j(z)} \Big|_{U_j \neq 0, U_k = 0 \forall k \neq j}$$

(Funzione di trasferimento tra ingresso j e uscita i)

Teorema (BIBO): Il sistema è **BIBO stabile** se e solo se tutte le radici del denominatore delle funzioni di trasferimento $G(z)$, cioè le radici del polinomio $\det(zI - A)$, hanno **modulo strettamente minore di 1**. Anche in questo caso, il polinomio è detto **Jury-stabile**, e le sue radici sono chiamate **poli della FDT**.

11.13 Osservazioni per i Sistemi LTI a Tempo Continuo SISO (Single Input – Single Output)



ODE di Ordine n con un Ingresso e una Uscita (SISO) vs Spazio di Stato

Un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine n :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1u'(t) + b_0u(t)$$

Dove:

- $y(t)$ è l'uscita del sistema,
- $u(t)$ è l'ingresso (forzante),
- $m \leq n$,
- a_i, b_i sono coefficienti reali noti,
- $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ sono le condizioni iniziali.

Definendo lo stato:

$$x_1(t) := y(t), \quad x_2(t) := y'(t), \quad x_3(t) := y''(t), \quad \dots, \quad x_n(t) := y^{(n-1)}(t)$$

La forma di stato diventa:

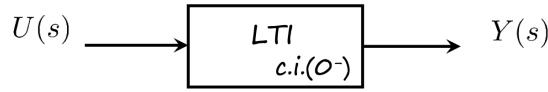
$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0) = [y(0) \quad y'(0) \quad \dots \quad y^{(n-1)}(0)]^T$$

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T$$

Stabilità dell'ODE SISO di Ordine n

Devo passare per la forma di stato per studiare la stabilità? No!

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t) \quad \text{con c.i. } y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$$



Applichiamo la trasformata di Laplace ai due membri, ottenendo:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)}U(s) = \underbrace{\frac{P(s)}{D(s)}}_{Y_l(s)} + \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}U(s)}_{Y_f(s)=G(s)U(s)}$$

Dove:

- $Y_l(s)$ è l'evoluzione libera (dipende dalle condizioni iniziali),
- $Y_f(s)$ è la risposta forzata (dipende dall'ingresso),
- $G(s)$ è la funzione di trasferimento (FdT),
- $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$.

Teoremi di Stabilità

Teorema (Evoluzione Libera): Il sistema è **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le radici del denominatore $D(s)$ hanno **parte reale negativa**. È **marginalmente stabile** se le radici hanno parte reale non positiva, e le radici con parte reale nulla hanno molteplicità unitaria. Negli altri casi, il sistema è **instabile** (o debolmente instabile).

Teorema (Evoluzione Forzata): Il sistema è **BIBO stabile** se e solo se tutte le radici del denominatore della FdT $G(s)$, cioè del polinomio $D(s)$, hanno **parte reale negativa** (ovvero se $D(s)$ è un polinomio di **Hurwitz**).

- Le radici del denominatore di $G(s)$ sono dette **poli della FdT**.
- $G(s)$ è la trasformata di Laplace della **risposta impulsiva**.

Osservazione: Se non ci sono cancellazioni (cioè $N(s)$ non ha fattori comuni con $D(s)$ o con $U(s)$), allora **tutte le radici di $D(s)$ compaiono nella FdT**.

Conclusione:**In generale:**

Se un sistema è asintoticamente stabile \Rightarrow è anche BIBO (e BIBS) stabile

Viceversa: non è necessariamente vero!

Questo perché possono esserci **cancellazioni** tra numeratore e denominatore nella funzione di trasferimento che nascondono autovalori instabili.

11.13.1 Osservazioni Analoghe per i Sistemi LTI SISO a Tempo Discreto

Quanto osservato per i sistemi a tempo continuo si può riportare, con le dovute modifiche (equazioni alle differenze, trasformata Z, ecc.), anche al caso dei sistemi a tempo discreto.

11.13.2 Esempio: Equazione alle Differenze (SISO)

$$a_0y[k] + a_1y[k-1] + \dots + a_ny[k-n] = b_0u[k] + b_1u[k-1] + \dots + b_mu[k-m]$$



Con condizioni iniziali assegnate, si ottiene:

- **Ingresso:** $U(z)$
- **Sistema LTI con c.i. a zero:**

$$Y(z) = \underbrace{\frac{P(z)}{D(z)} U(z)}_{Y_l(z)} + \underbrace{\frac{N(z)}{D(z)} U(z)}_{Y_f(z)=G(z)U(z)}$$

- $G(z)$ è la funzione di trasferimento (FdT)
- $Y_l(z)$ è l'evoluzione libera (dipendente dalle c.i.)
- $Y_f(z)$ è la risposta forzata (dipendente da $U(z)$)

Teoremi di Stabilità per Sistemi Discreti

Teorema (Evoluzione Libera): Il sistema è **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le radici del denominatore $D(z)$ hanno **modulo strettamente minore di 1**.

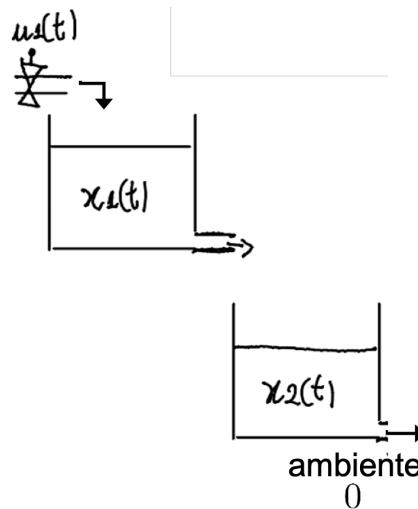
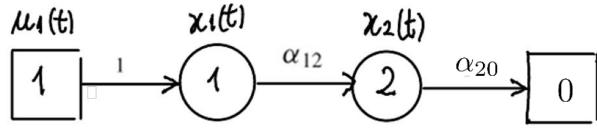
È **marginalmente stabile** se tutte le radici di $D(z)$ hanno modulo ≤ 1 , e quelle con modulo esattamente uguale a 1 hanno molteplicità unitaria.

Negli altri casi il sistema è **instabile** (o debolmente instabile).

Teorema (Evoluzione Forzata): Il sistema è **BIBO stabile** se e solo se tutte le radici del denominatore della funzione di trasferimento $G(z)$ (cioè del polinomio $D(z)$) hanno **modulo strettamente minore di 1**, secondo la **condizione di Jury**.

- Le radici del denominatore di $G(z)$ sono dette **poli della FdT**.
- $G(z)$ è la trasformata Z della **risposta impulsiva** del sistema a tempo discreto.

11.13.3 Esempio: Due Serbatoi in Serie (Tempo Continuo)



Siano $\alpha_{12}, \alpha_{20} > 0$ e $x_1(0), x_2(0)$ assegnati.

$$\begin{cases} x'_1(t) = u(t) - \alpha_{12}x_1(t) \\ x'_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{20}x_2(t) \end{cases}$$

Forma compatta:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t) \quad \text{con} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analisi della Stabilità – Evoluzione Libera

$$x'(t) = Ax(t), \quad u_1(t) = 0$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + \alpha_{12} & 0 \\ -\alpha_{12} & s + \alpha_{20} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}x(0) = \frac{1}{(s + \alpha_{12})(s + \alpha_{20})} \begin{bmatrix} s + \alpha_{20} & 0 \\ -\alpha_{12} & s + \alpha_{12} \end{bmatrix} x(0)$$

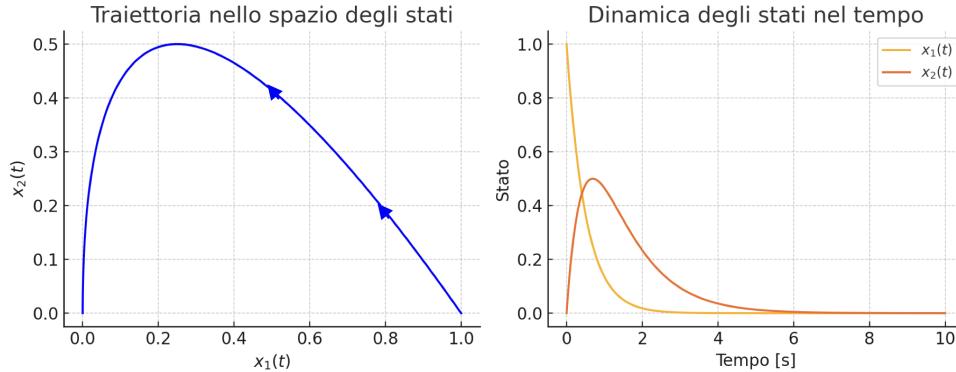
$$\det(sI - A) = (s + \alpha_{12})(s + \alpha_{20}) = 0 \Rightarrow s = -\alpha_{12}, s = -\alpha_{20}$$

Radici reali e negative \Rightarrow il sistema è asintoticamente stabile.

Esempio numerico: $\alpha_{12} = 2$, $\alpha_{20} = 1$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$X_1(s) = \frac{x_1(0)}{s + \alpha_{12}} = \frac{1}{s + 2} \Rightarrow x_1(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

$$X_2(s) = \frac{\alpha_{12}}{(s + \alpha_{12})(s + \alpha_{20})} = \frac{2}{(s + 2)(s + 1)} \Rightarrow x_2(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})\delta_{-1}(t)$$



Analisi della Stabilità BIBS

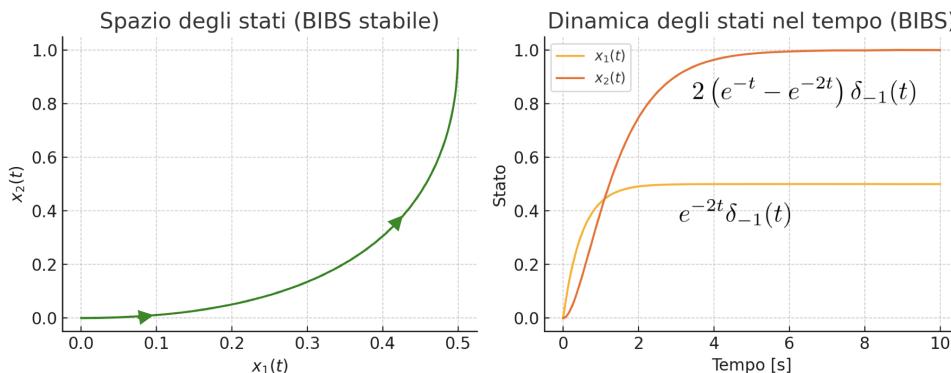
Condizioni iniziali nulle: $x_1(0) = x_2(0) = 0$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU_1(s)$$

$$T(s) = \frac{X(s)}{U_1(s)} = (sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s + \alpha_{12})(s + \alpha_{20})} \begin{bmatrix} s + \alpha_{20} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

\Rightarrow Radici reali e negative \Rightarrow il sistema è BIBS stabile

Osservazione: avevamo già verificato la stabilità asintotica \Rightarrow il sistema è anche BIBS.



Applicazione del Teorema del Valore Finale

Esempio numerico: $\alpha_{12} = 2$, $\alpha_{20} = 1$, $u_1(t) = \delta_{-1}(t) \Rightarrow U_1(s) = \frac{1}{s}$

$$T(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X(s) = T(s)U_1(s)$$

Dato che il sistema è BIBS, possiamo usare il teorema del valore finale:

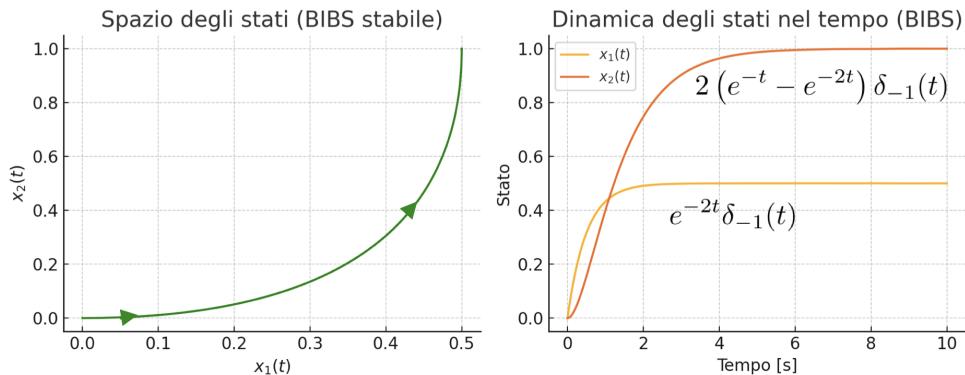
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_1(s) = \frac{1}{\alpha_{12}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

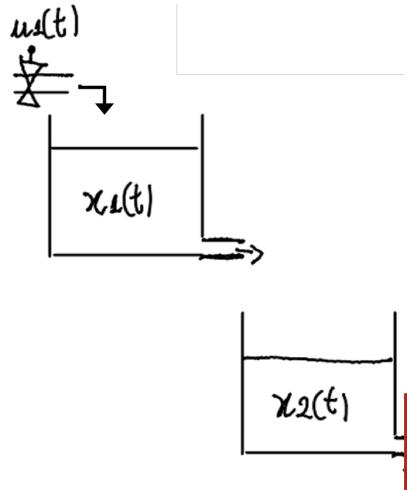
Tempo a regime: circa $5 \times 0.5 = 2.5$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_2(s) = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{20}} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$$

Nota: la dinamica più lenta (che domina l'andamento a lungo termine) è associata al polo più vicino all'asse immaginario:

$$s = -\alpha_{20} = -1 \Rightarrow \text{costante di tempo } \tau = \frac{1}{\alpha_{20}} = 1 \Rightarrow \text{regime raggiunto in circa } 5\tau = 5$$



11.13.4 Esempio: Due Serbatoi in Serie (senza scarico esterno, $\alpha_{20} = 0$)

Consideriamo due serbatoi in serie, con:

$$\alpha_{12} = 2, \quad \alpha_{20} = 0$$

Il sistema dinamico risulta:

$$\begin{cases} x'_1(t) = u_1(t) - \alpha_{12}x_1(t) \\ x'_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) \end{cases} \Rightarrow x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analisi della Stabilità – Evoluzione Libera ($u_1(t) = 0$)

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + \alpha_{12} & 0 \\ -\alpha_{12} & s \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI - A) = s(s + \alpha_{12})$$

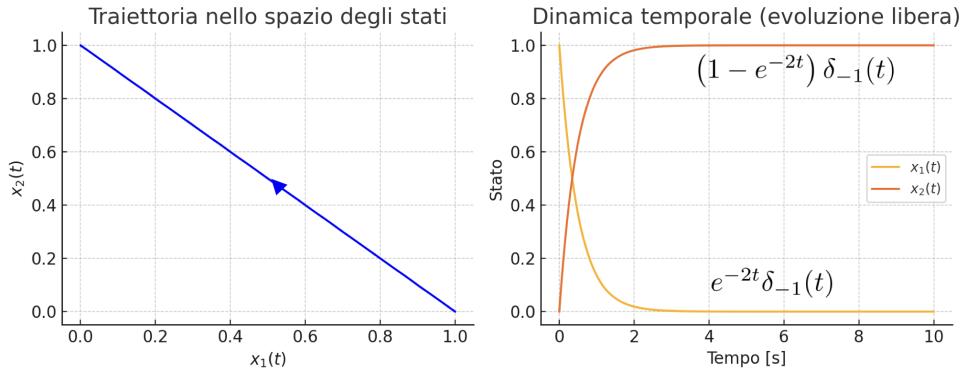
$$\Rightarrow s = 0, \quad s = -\alpha_{12}$$

La radice $s = 0$ (di molteplicità unitaria) implica che la risposta non tende a zero in generale \Rightarrow il sistema è marginalmente stabile (non asintoticamente stabile).

$$\text{Adjunta: } \text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ \alpha_{12} & s + \alpha_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow X(s) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{s(s + \alpha_{12})} x_0$$

Con:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1(t) = 0$$



Analisi della Stabilità BIBS

Condizioni iniziali nulle: $x_1(0) = x_2(0) = 0$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \Rightarrow T(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1}B$$

$$\det(sI - A) = s(s + \alpha_{12}), \quad \text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ \alpha_{12} & s + \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

$$T(s) = \frac{1}{s(s + \alpha_{12})} \begin{bmatrix} s \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{radice } s = 0 \text{ al denominatore} \Rightarrow \text{NO BIBS!}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad (\text{gradino unitario}) \Rightarrow X(s) = T(s)U(s) = \frac{1}{s^2(s + \alpha_{12})} \begin{bmatrix} s \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s + \alpha_{12})} \\ \frac{\alpha_{12}}{s^2(s + \alpha_{12})} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{\alpha_{12}}(1 - e^{-\alpha_{12}t}) \cdot \delta_{-1}(t) \\ x_2(t) = t \cdot \delta_{-1}(t) + \frac{1}{\alpha_{12}}(e^{-\alpha_{12}t} - 1) \cdot \delta_{-1}(t) \end{cases}$$

Osservazioni:

- $\delta_{-1}(t)$ è il gradino unitario.
- $t \cdot \delta_{-1}(t)$ è la rampa.
- Possiamo usare il **teorema del valore finale** per determinare i valori a regime:

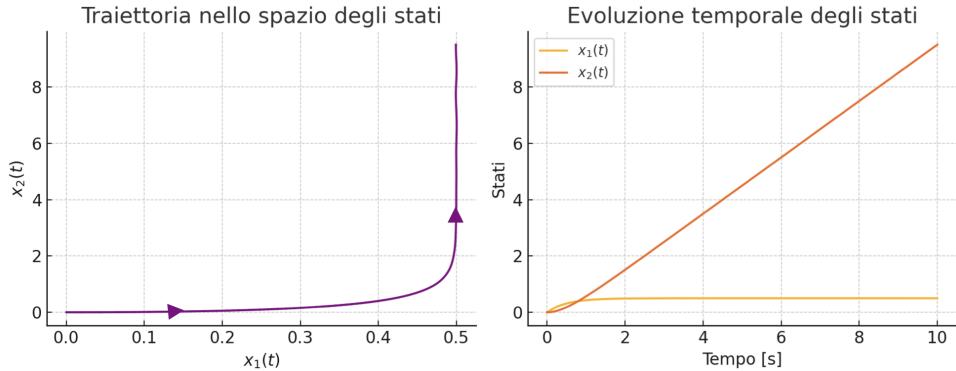
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_1(s) = \frac{1}{\alpha_{12}} = 0.5$$

Conclusione sulla Stabilità BIBS:

- La componente $X_2(s)$ contiene un termine $\frac{1}{s^2} \Rightarrow$ **polo doppio reale in zero** (sull'asse immaginario)
- Comporta che $x_2(t) \sim t$ per $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ **divergenza lineare dello stato**
- Il sistema **non è BIBS stabile**, nonostante l'ingresso sia limitato.

Riepilogo parametri:

$$u_1(t) = \delta_{-1}(t), \quad U_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \alpha_{12} = 2, \quad \alpha_{20} = 0$$



11.13.5 Esempio: Ammortamento di un Debito (Tempo Discreto)

Una banca propone un mutuo pari a P con un tasso di interesse fisso $i > 0$, da estinguere tramite una rata annuale fissa R .

- $x(k)$ è il debito residuo al tempo k (in anni)
- $x(0) = P$
- $u(k) := R \cdot \delta_{-1}(k)$ è l'ingresso (rata pagata ogni anno)

Il modello dinamico risulta:

$$x(k+1) = (1+i)x(k) - u(k)$$

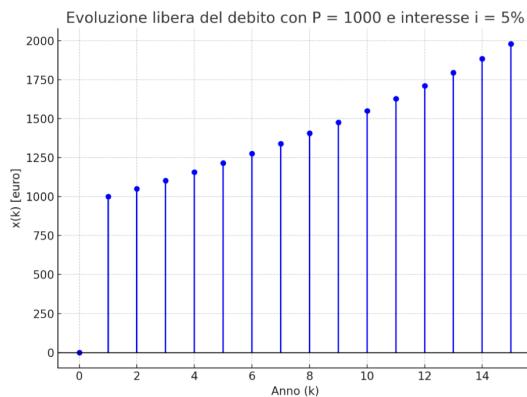
Analisi della Stabilità – Evoluzione Libera

$$x(k+1) = Ax(k), \quad \text{con } A = 1+i$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1}x(0), \quad I = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(zI - A) = z - (1+i)$$

$$\det(zI - A) = 0 \Rightarrow z = 1+i \quad \Rightarrow \quad |1+i| > 1 \Rightarrow \text{Sistema instabile}$$

$$X(z) = \frac{P}{z - (1+i)} \quad \Rightarrow \quad x(k) = P(1+i)^{k-1} \cdot \delta_{-1}(k-1)$$



Analisi della Stabilità BIBS

Sistema con ingresso:

$$x(k+1) = (1+i)x(k) - u(k), \quad x(0) = 0$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z), \quad B = -1$$

$$\det(zI - A) = z - (1+i) = 0 \Rightarrow z = 1+i \quad \Rightarrow \quad |1+i| > 1 \Rightarrow \text{Il sistema NON è BIBS stabile}$$

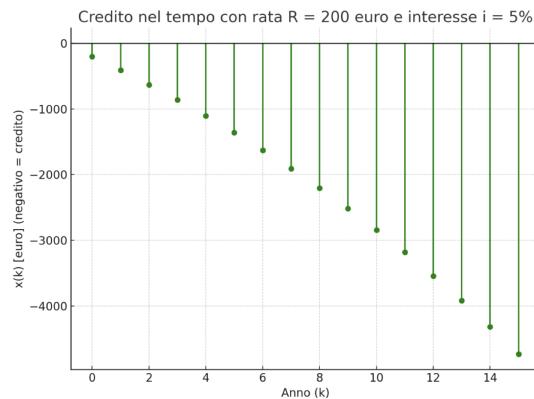
$$U(z) = R \cdot \frac{z}{z-1} \quad (\text{trasformata Z del gradino moltiplicato per } R)$$

$$X(z) = \frac{-R \cdot \frac{z}{z-1}}{z - (1+i)} = \frac{-Rz}{(z-1)(z-(1+i))}$$

Z-anti trasformando:

$$x(k) = \frac{R}{i} [1 - (1+i)^{k+1}] \cdot \delta_{-1}(k)$$

Conclusione: nonostante l'ingresso $u(k)$ sia limitato, lo stato diverge nel tempo \Rightarrow **il sistema non è BIBS stabile.**



Capitolo 12

Proprietà Strutturali dei Sistemi Dinamici

- Stabilità
- Raggiungibilità
- Controllabilità
- Osservabilità

Proprietà intrinseche al sistema che stiamo osservando, descrivono da dentro com'è fatto il sistema ed andremmo a rappresentarle matematicamente.

Come posso con un ingresso influenzare uno stato?

Se io conosco alcune situazioni del sistema:

- es: se parto dallo stato 0, dopo 4h dove mi trovo? (sfrutto il contesto)
- es: se arrivo a questa conclusione, posso capire da che condizioni iniziali sono partito?

Proprietà strutturali: sono caratteristiche intrinseche della struttura interna del sistema, che possono essere quantificate matematicamente per comprenderne l'evoluzione dinamica e valutare quanto sia possibile modificarne il comportamento. Esse non dipendono né dall'esistenza né dalla specifica tipologia degli ingressi e delle uscite del sistema.

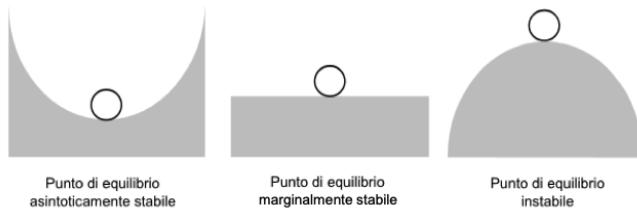
- Tali proprietà, espresse matematicamente, sono applicabili (sotto certe ipotesi) a qualsiasi sistema dinamico, indipendentemente dalla sua natura fisica.
- Sono proprietà di un sistema che descrivono la possibilità di:
 - influire sullo stato x agendo opportunamente sull'ingresso u , oppure
 - determinare lo stato iniziale $x(0)$ o finale $x(t_1)$ di un sistema dalla conoscenza del comportamento ingresso-uscita;
 - ...
- Inoltre, alcune proprietà (ad es. la raggiungibilità) **non sono modificabili tramite il controllo**.

Nota di approfondimento:

Le proprietà strutturali si studiano tipicamente attraverso l'analisi del modello matematico del sistema, espresso in forma di equazioni differenziali o di stato. Esse costituiscono la base per capire:

- se un sistema può essere governato interamente da un controllo esterno (controllabilità),
- se è possibile risalire allo stato interno osservando le uscite (osservabilità),
- se si può raggiungere qualsiasi stato a partire da uno stato iniziale (raggiungibilità),
- se il sistema tende a un equilibrio (stabilità).

12.1 Stabilità

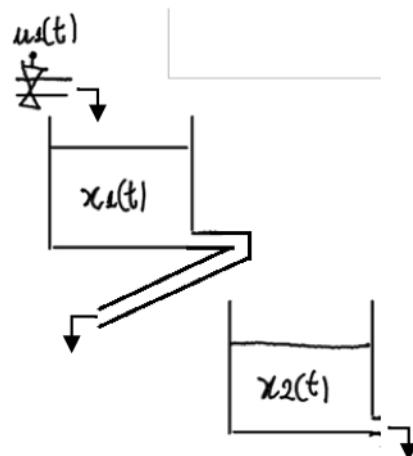


Stabilità: è una proprietà che si riferisce alla capacità di un sistema dinamico di mantenere il suo stato in presenza di perturbazioni, o di tornare ad esso dopo una perturbazione. In sostanza, un sistema stabile è quello che non si allontana significativamente dal suo stato di equilibrio in risposta a variazioni degli ingressi o delle condizioni iniziali.

Per i sistemi LTI (a tempo continuo e a tempo discreto) abbiamo già visto definizioni, la sua formulazione matematica, i relativi teoremi, condizioni necessarie / sufficienti, esempi, etc.

12.2 Esempio: Raggiungibilità

Esempio: due serbatoi "scollegati"



Faccio uno scherzo ed il liquido lo intercetto, cambio la direzione del flusso e ora il liquido va a terra invece che entrare nel secondo serbatoio.

- Il liquido entra nel primo serbatoio tramite l'ingresso $u_1(t)$;
- Il secondo serbatoio non riceve nulla dal primo;
- Il primo serbatoio si svuota verso l'esterno;
- Il secondo serbatoio si svuota.

Condizioni iniziali e parametri:

$$\alpha_{12}, \alpha_{20} > 0, \quad x_1(0), x_2(0) \neq 0$$

Sistema dinamico descritto da:

$$\begin{cases} x'_1(t) = u_1(t) - \alpha_{10}x_1(t) \\ x'_2(t) = -\alpha_{20}x_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases} \quad \text{oppure in forma matriciale:} \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Matrice dei parametri:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{10} & 0 \\ 0 & -\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{l'ingresso } u_1(t) \text{ agisce solo su } x_1(t))$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{lo stato } x_2(t) \text{ evolve "da solo", senza connessione dinamica con } x_1(t))$$

Consideriamo ad esempio, la risposta del sistema a partire da condizioni iniziali nulle:

$$\alpha_{12}, \alpha_{20} > 0, \quad x_1(0), x_2(0) \neq 0$$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} -\alpha_{10} & 0 \\ 0 & -\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformata di Laplace del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{U_1(s)} &= (sI - A)^{-1}B = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B = \frac{1}{(s + \alpha_{10})(s + \alpha_{20})} \begin{bmatrix} s + \alpha_{20} & 0 \\ 0 & s + \alpha_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s + \alpha_{10})} \\ 0 \end{bmatrix} \\ X(s) &= \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = (sI - A)^{-1}BU_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s + \alpha_{10})} \\ 0 \end{bmatrix} U_1(s) \end{aligned}$$

Osservazioni:

- La matrice A descrive come gli stati si propagano internamente al sistema.

- L'ingresso u_1 può influenzare, tramite B , solo lo stato x_1 , che è dunque **raggiungibile**.
- x_2 è sempre zero! Qualunque sia l'ingresso, esso non può influenzare x_2 (tramite B): x_2 **non è raggiungibile**.
- La matrice B ci aiuta a capire se, agendo sull'ingresso, si riescono a "influenzare" gli stati.

12.3 Ricordiamo la Matrice di Trasferimento Ingresso-Uscita

La Matrice di Trasferimento (MdT) è formata da funzioni razionali, cioè rapporti tra due polinomi. Queste funzioni, dette Funzioni di Trasferimento (FdT), sono proprie, ovvero il grado del numeratore è **minore o uguale** al grado del denominatore.

$$\begin{aligned} G_{kj}(s) &= \frac{Y_k(s)}{U_j(s)} = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \\ &= C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D = \sum_i \frac{(Cv_i)(w_i^T B)}{s - \lambda_i} + D \end{aligned}$$

Sommatoria valida nel caso di autovalori semplici, cioè con molteplicità unitaria.

Osservazione: I **poli** della MdT sono necessariamente anche **autovalori** della matrice A . Tuttavia, il viceversa in generale **non è vero**: un autovalore della matrice A può **non comparire** come polo nella MdT.

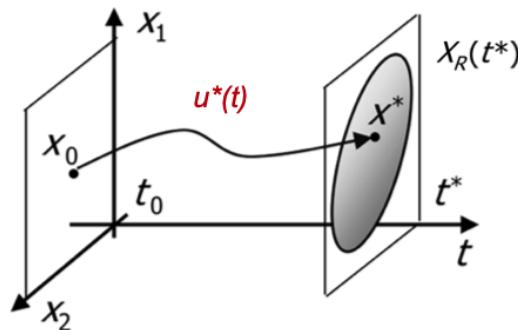
Ci sono tre motivi principali per cui un autovalore di A può non apparire nella MdT:

1. L'ingresso non riesce a "eccitarlo", ovvero $w_i^T B = 0$: **modo non raggiungibile**.
2. L'uscita non riesce a "vederlo", ovvero $Cv_i = 0$: **modo non osservabile**.
3. Presenza di una **cancellazione zero-polo** (situazione in cui uno zero della funzione di trasferimento coincide con un suo polo e lo annulla).

12.4 Raggiungibilità

Raggiungibilità: è una proprietà che descrive le possibilità di modificare lo stato $x(t)$ del sistema a partire da un particolare stato iniziale x_0 agendo opportunamente sull'ingresso $u(t)$.

- Uno stato x^* si dice **raggiungibile** (dallo stato x_0 al tempo t^*) se esistono un istante di tempo t^* e un ingresso $u^*(t)$ tali che: $x(t^*) = x^*$



- L'insieme di tutti gli stati raggiungibili (dallo stato zero x_0 al tempo t^*) rappresenta l'**insieme di raggiungibilità** $X_R(t^*)$ al tempo t^* e forma un sottospazio di X .
- Un sistema è **completamente raggiungibile** se non esistono stati non raggiungibili, e quindi $X = X_R$

Teorema (condizione di raggiungibilità): un sistema è raggiungibile (cioè non esistono stati non raggiungibili) se e solo se il **rango della matrice di raggiungibilità** (detta anche **matrice di Kalman**) è pari a n , cioè alla dimensione dello spazio di stato.

$$R := [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad \text{con } \text{rank}R = n$$

Se è presente un solo ingresso, la condizione di raggiungibilità diventa:

$$\det R \neq 0$$

Esempio: due ($n = 2$) serbatoi scollegati

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{10} & 0 \\ 0 & -\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$R = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rank}R = 1 < 2 \\ \det R = 0 \end{array}$$

⇒ Il sistema non è raggiungibile (esiste infatti $x_2(t)$ non raggiungibile)!

Esempio: due ($n = 2$) serbatoi collegati

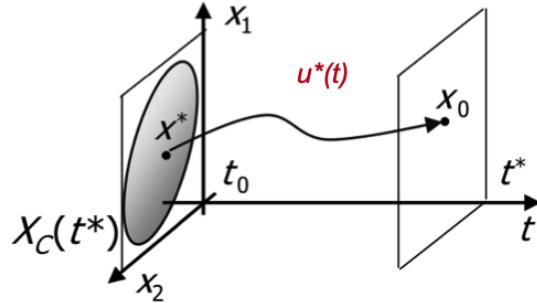
$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$R = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rank}R = 2 \\ \det R = \alpha_{12} \neq 0 \end{array}$$

⇒ Il sistema è raggiungibile!

12.5 Controllabilità

Controllabilità è la proprietà che descrive la possibilità di portare lo stato del sistema da un qualsiasi stato iniziale a uno stato finale desiderato, in un tempo finito, mediante un opportuno segnale di ingresso u .

- Uno stato x^* si dice **controllabile** (allo stato zero x_0 al tempo t^*) se esistono un istante di tempo t_0 e un ingresso $u^*(t)$ tali che $x(t^*) = x^*$

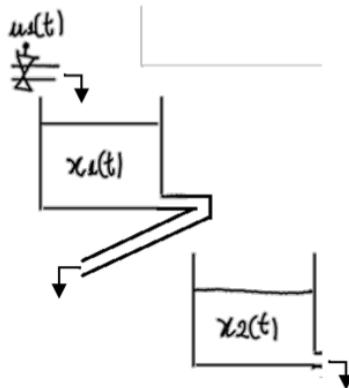


- L'insieme di tutti gli stati controllabili (allo stato zero x_0 al tempo t^*) rappresenta l'**insieme di controllabilità** $X_C(t^*)$ al tempo t^*
- Un sistema dinamico è **completamente controllabile** se $X = X_C$

12.5.1 Raggiungibilità e Controllabilità

- Le proprietà di **raggiungibilità** e **controllabilità** sono equivalenti per sistemi LTI a tempo continuo, ma **non lo sono in generale** per tutte le classi di sistemi dinamici.

Esempio: due serbatoi collegati



Non posso controllare il volume (livello) del secondo serbatoio agendo sull'ingresso del primo serbatoio (infatti x_2 non è raggiungibile).

12.6 Osservabilità

La proprietà di **osservabilità** descrive la possibilità di stimare lo stato iniziale del sistema mediante la misura dell'uscita y e dell'ingresso u su un dato intervallo di tempo.

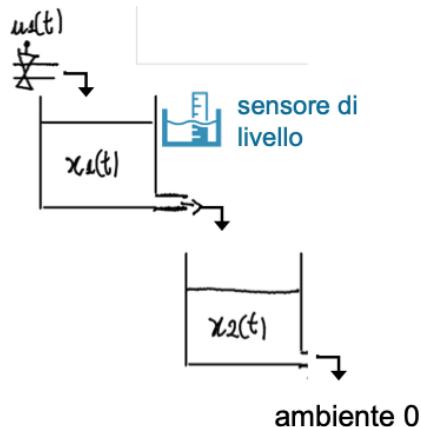
- Uno stato $x^* \neq 0$ si dice **non osservabile** se l'evoluzione libera dell'uscita $y_l(t)$, a partire dalla condizione iniziale $x^* \neq 0$, è identicamente nulla.
- L'insieme di tutti gli stati osservabili rappresenta l'**insieme di osservabilità**.
- Un sistema è (completamente) **osservabile** se non esistono stati non osservabili (esclusa l'origine).

Teorema (condizione di osservabilità): un sistema è osservabile (cioè non esistono stati non osservabili) se e solo se il **rango della matrice di osservabilità** è pari a n , cioè alla dimensione dello spazio di stato.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \text{rank } O = n$$

Se è presente un solo ingresso, la condizione di osservabilità diventa: $\det O \neq 0$

12.6.1 Esempio: 2 serbatoi collegati in serie; si misura solo lo stato del primo serbatoio



(Il secondo serbatoio non ha il sensore, potrebbe essere rotto, costare troppo, ecc.)

$$\begin{cases} x'_1(t) = u(t) - \alpha_{12}x_1(t) \\ x'_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{20}x_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \end{cases} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $\alpha_{12}, \alpha_{20} > 0$

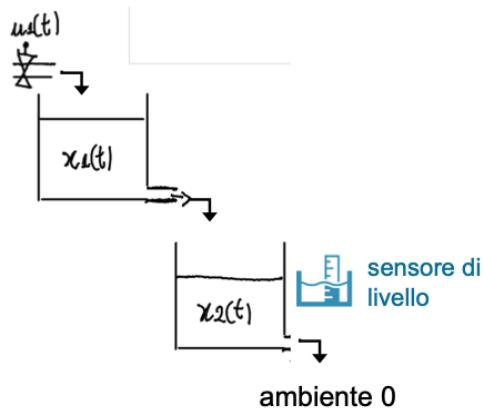
$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad \det O = 0$$

⇒ Il sistema **non è osservabile** se si misura solo il livello del primo serbatoio (infatti x_2 non è osservabile).

Intuizione fisica: misurando solo x_1 non si ha alcuna informazione su x_2 , che può variare liberamente (ad esempio può essere pieno o vuoto) senza che x_1 cambi. Non si può quindi "ricostruire" l'informazione su x_2 .

12.6.2 Ora il caso contrario: si misura solo lo stato del secondo serbatoio



(Il primo serbatoio non ha il sensore, potrebbe essere rotto, costare troppo, ecc.)

$$\begin{cases} x'_1(t) = u(t) - \alpha_{12}x_1(t) \\ x'_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{20}x_2(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $\alpha_{12}, \alpha_{20} > 0$

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad \det O = -\alpha_{12} \neq 0$$

⇒ Il sistema **è osservabile** anche se si misura solo il livello del secondo serbatoio, perché non esistono stati non osservabili.

Intuizione fisica: anche se si misura solo il livello del secondo serbatoio, siccome il suo comportamento dipende dal primo, si può ricostruire cosa sta succedendo anche nel primo serbatoio. Ad esempio, una stima di $x_1(t)$ potrebbe essere data da:

$$\tilde{x}_1(t) = \alpha_{12}^{-1}(y'_2(t) + \alpha_{20}y_2(t))$$

Capitolo 13

Controllo

13.1 Controllo a Tempo Continuo

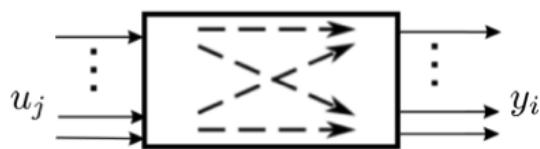
Vediamo inizialmente il sistema a tempo continuo, successivamente con delle modifiche anche a tempo discreto.

13.1.1 Matrice (Funzione) di Trasferimento

- Osservazione: l'effetto degli ingressi (cause) su un sistema dinamico determina le sue uscite (effetti) in termini di risposta forzata (definita a partire da condizioni iniziali nulle, cioè a riposo).
- La relazione tra cause ed effetti è descritta dalla Matrice di Trasferimento (Funzioni di Trasferimento, FdT).

Da uno stato di riposo voglio portare il sistema in un altro stato di equilibrio.

13.1.2 Caso MIMO (Multi Input - Multi Output)



$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) = G(s)U(s) \end{cases}$$

$G(s)$: Matrice di Trasferimento, funzioni razionali proprie

$$\text{FdT: } G_{ij}(s) = \left. \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \right|_{U_j \neq 0, U_k = 0}$$

13.1.3 Caso SISO (Single Input - Single Output)

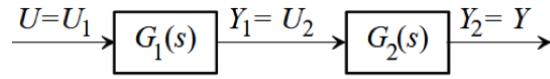
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

FdT: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ = trasformata di Laplace della risposta impulsiva

$$g(t) = y(t) \Big|_{u(t)=\delta(t)}$$

13.1.4 Connessione in Serie e Parallello di Sistemi

Due Sistemi LTI in Serie

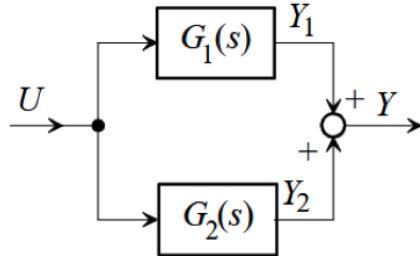


$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

$G_1(s), G_2(s)$: matrici di trasferimento

$$Y(s) = Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

Due Sistemi LTI in Parallello



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = [G_1(s) + G_2(s)]U(s)$$

13.2 Il Problema del Controllo

Decisione / Problema Dinamico

Il desiderio (set point sulla variabile che vado a considerare) è la variabile controllata per raggiungere un desiderio sull'uscita.

Un controllore ha un'unità di misura?

Il controllore prende una decisione al fine di arrivare ad un desiderio.

Stanza deve raggiungere i 20 gradi, il controllore deve decidere quanti watt erogare alla stufetta per scaldare la stanza, non è adimensionale, dipende dal problema.

Problema di controllo: consiste nel determinare la legge di evoluzione della variabile di ingresso $u(t)$, detta anche *variabile manipolata* (o *variabile di controllo*), in modo tale da ottenere un comportamento desiderato per l'uscita $y(t)$, detta anche *variabile controllata*, di un sistema dinamico G (che rappresenta il processo, il fenomeno o l'impianto da controllare).

A tal fine, viene assegnato un riferimento $r(t)$ per l'uscita, chiamato anche *setpoint*, che rappresenta l'obiettivo del controllo.

Il controllore ha il compito di calcolare $u(t)$ in modo da far sì che $y(t)$ segua il riferimento, compensando l'effetto di eventuali disturbi $d(t)$ e incertezze nel modello del processo G .

Due Tipi di Problemi di Controllo

- Problema di regolazione
- Problema di asservimento (tracking)

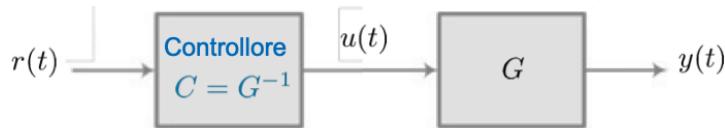
Problema di regolazione: il riferimento $r(t)$ è costante nel tempo.

Esempio: regolare la temperatura di una stanza a 20°C.

Problema di asservimento (tracking): il riferimento $r(t)$ varia nel tempo.

Esempio: un'auto a guida autonoma deve seguire una traiettoria prestabilita lungo una strada.

13.2.1 Soluzione 1: Controllo in Catena Aperta (ad Azione Diretta, Open-loop, Feed-forward)



Desiderio sull'uscita (riferimento, setpoint: $sp(t), r(t), \bar{y}(t)$)

Controllore con condizione: $C = G^{-1}$

- Il controllore non riceve alcuna informazione sull'uscita del sistema.

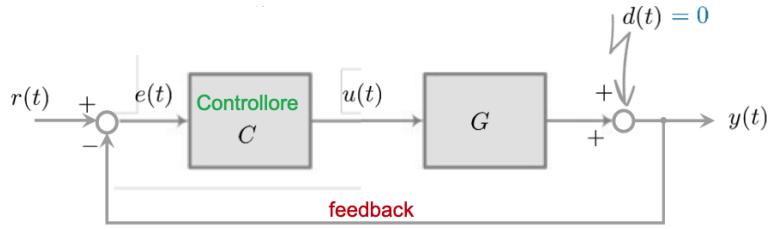
$$Y(s) = R(s)C(s)G(s) = R(s) \Rightarrow C(s)G(s) = 1 \Rightarrow C(s) = G^{-1}(s)$$

$Y(s), R(s)$: desiderio

$$\text{FdT} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{R(s)}{R(s)} = 1$$

Il controllore in open-loop può essere progettato come l'inverso del modello del processo, in modo tale che l'uscita desiderata venga ottenuta direttamente.

Approccio diretto, ma le prestazioni possono ridursi se il sistema G è noto in maniera approssimata e/o soggetto a disturbi esterni.



13.2.2 Soluzione 2: Controllo in Retroazione (Feedback Negativo) dall'Uscita

Se voglio 20 gradi su una stanza, devo aspettare che il sensore legga che fa freddo?

Alle 8:30 iniziamo con 2000 watt, poi all'arrivo dei ragazzi in stanza se fa freddo aumentano i watt.

L'uscita adesso non è lasciata lì, c'è qualcuno che analizza i dati (come un sensore), analizzo l'uscita, la confronto con dei dati e opero ragionevolmente per calcolare quanto sono distante dal mio desiderio. Se l'errore è nullo significa che coincide col desiderio.

- Approccio più complicato (richiede sensori di misura, ad es. di y), ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni.

Caso SISO (Single Input - Single Output), con $d(t) = 0$

$$Y(s) = U(s)G(s) = E(s)C(s)G(s) = [R(s) - Y(s)]C(s)G(s) = R(s)C(s)G(s) - Y(s)C(s)G(s)$$

$$Y(s)[1 + C(s)G(s)] = R(s)C(s)G(s)$$

$$Y(s) = R(s) \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = R(s)W(s)$$

Funzione di trasferimento del mio sistema a catena chiusa **IMPORTANTE**:

$$\text{FdT: } W_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Per ricordarsi la formula: *catena diretta diviso 1+ catena diretta*.

Supponiamo che il prodotto $C(s)G(s) > 1$, C la progettiamo noi, G è dato dal problema.

Significa che, fissato l'insieme di frequenze di interesse (dinamiche lente \rightarrow frequenze basse / controllo veloce, vibrazioni importanti), l'intervallo in cui $C(s)G(s) > 1$ cambia il modulo nel diagramma di Bode.

Qualitativamente:

$$C(s)G(s) \gg 1 \Rightarrow W_r(s) \approx 1 \Rightarrow Y(s) = R(s) \quad \text{L'uscita "insegue" il riferimento!}$$

Errore: Caso SISO con $d(t) \neq 0$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - E(s)C(s)G(s)$$

$$E(s)[1 + C(s)G(s)] = R(s)$$

$$E(s) = R(s) \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

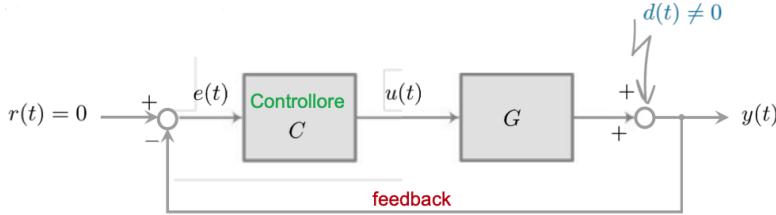
Funzione di trasferimento del mio sistema a catena chiusa **IMPORTANTE**:

$$\text{FdT: } W_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

Per ricordarsi la formula: *1 diviso 1+ catena diretta*

Qualitativamente:

$$C(s)G(s) \gg 1 \Rightarrow W_e(s) \approx 0 \Rightarrow E(s) = R(s)W_e(s) \approx 0 \quad \text{errore "nullo" (piccolo)!}$$



Caso SISO con $d(t) \neq 0$ e $r(t) = 0$

$$Y(s) = D(s) + U(s)G(s) = D(s) + E(s)C(s)G(s) = D(s) - Y(s)C(s)G(s)$$

$$Y(s)[1 + C(s)G(s)] = D(s)$$

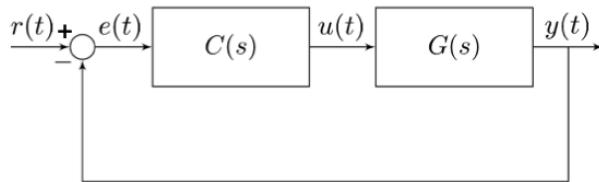
$$Y(s) = D(s) \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

$$\text{FdT: } W_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

Qualitativamente:

$$C(s)G(s) \gg 1 \Rightarrow W_d(s) \approx 0 \Rightarrow Y(s) = D(s)W_d(s) \approx 0 \quad \text{Il controllore contrasta, attenua/fa reiezione del disturbo}$$

13.2.3 Cancellazione fra Zeri e Poli



FdT in anello (catena) aperto (open-loop): $L(s) := C(s)G(s)$

$$L(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n_C(s)}{d_C(s)} \cdot \frac{n_G(s)}{d_G(s)} \Rightarrow \text{zeri}\{L(s)\} \in \text{zeri}\{C(s)\} \cup \text{zeri}\{G(s)\}$$

Osservazione: è se e solo se ci sono cancellazioni zero-polo

FdT in anello (catena) chiuso:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{n(s)}{d(s)}}{1 + \frac{n(s)}{d(s)}} = \frac{n(s)}{d(s) + n(s)}$$

- Il numero di poli della FdT $W(s)$ del sistema complessivo coincide con il numero degli autovalori corrispondenti a modi raggiungibili e osservabili del sistema nel ramo diretto.
- La retroazione **non cambia** la posizione degli zeri: gli zeri di $W(s)$ coincidono con gli zeri di $L(s)$.

- Quindi, la retroazione **cambia** la posizione dei poli del sistema in retroazione rispetto a quelli in anello aperto.
- $s = p$ è un polo di $W(s)$ se e solo se $s = p$ è uno zero di $d(s) + n(s)$.
- Osservazione: la retroazione sposta solo i poli associati ai modi **raggiungibili e osservabili**.
- Assumeremo che, a meno di casi particolari che verranno segnalati, il sistema da controllare sia **raggiungibile e osservabile**.

Attenzione: è fondamentale evitare che la FdT $C(s)$ cancelli poli e/o zeri della FdT $G(s)$ a **parte reale non negativa**. Tali cancellazioni possono rendere **non asintoticamente stabile** il sistema ad anello chiuso $W(s)$, provocando nella pratica un comportamento divergente e non controllabile.

Infatti: tali cancellazioni incrociate sono puramente ipotetiche nel senso che, in generale, la FdT $G(s)$ non è in pratica nota in modo esatto, e quindi i suoi zeri e poli sono noti solo in modo approssimato. Al più ci possono essere delle *quasi-cancellazioni*.

13.2.4 Esempio

Sia idealmente:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{s-1}{s}, & G(s) &= \frac{1}{s-1} \\ L(s) &= C(s)G(s) = \frac{s-1}{s} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} \\ W(s) &= \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad W(s) \text{ BIBO stabile} \end{aligned}$$

Sia ora nella realtà, con $\epsilon \neq 0$, positivo e sufficientemente piccolo, tale che:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s-1-\epsilon} \\ L(s) &= C(s)G(s) = \frac{s-1}{s(s-1-\epsilon)} \\ W(s) &= \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{s-1}{s(s-1-\epsilon)+(s-1)} = \frac{s-1}{s^2-\epsilon s-1} \end{aligned}$$

Osservazione: il sistema **non è Hurwitz** (secondo la regola di Cartesio), quindi **BIBO NON è stabile**.

(Scegliendo invece $C(s) = \frac{2s+1}{s}$, $W(s)$ risulta BIBO stabile.)

Capitolo 14

Sistemi Elementari del Primo e Secondo Ordine

Sistemi elementari del primo ordine: $n = 1$

Sistemi elementari del secondo ordine: $n = 2$

L'ordine del sistema corrisponde al grado del denominatore della funzione di trasferimento (FdT), ed equivale al numero di poli del sistema:

ordine del sistema = grado del denominatore della FdT = numero di poli = n

La forma generale di una funzione di trasferimento razionale è data da:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

dove:

- m è il grado del numeratore (può essere minore, uguale o maggiore di n a seconda del tipo di sistema),
- n è il grado del denominatore ed è quello che determina l'ordine del sistema,
- i coefficienti a_i e b_i sono numeri reali.

La funzione $G(s)$ descrive il comportamento del sistema nel dominio complesso di Laplace, e viene usata per analisi e progettazione dei sistemi dinamici.

14.1 Sistemi elementari del primo ordine ($n = 1$)

$$G(s) = \frac{1}{s + p_1} = \frac{1}{-p_1 \left(\frac{1}{-p_1} s + 1 \right)} = \frac{T_1}{T_1 s + 1} = \frac{K_1}{T_1 s + 1}$$

Rappresentazione zero-polo: $\frac{1}{s + p_1}$

Rappresentazione costanti di tempo: $\frac{K_1}{T_1 s + 1}$

- $p_1 < 0 \rightarrow$ sistema BIBO stabile
- $T_1 := \frac{1}{-p_1} > 0$: costante di tempo che caratterizza il comportamento dinamico

- $K_1 := T_1 > 0$: guadagno statico che caratterizza il comportamento a transitorio

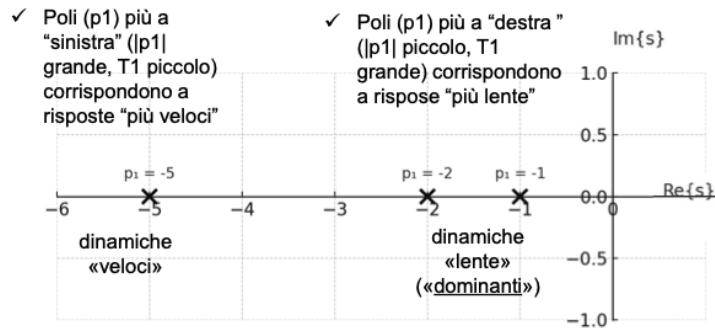
Risposta al gradino unitario:

$$Y(s) = \frac{1}{s}G(s) \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1}{s(T_1 s + 1)}\right] = K_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

Osservazione sul guadagno statico:

$$K_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} G(s) = G(0) = T_1 = \frac{1}{-p_1}$$

14.1.1 Esempio:



$$G(s) = \frac{-p_1}{s - p_1} = \frac{1}{sT_1 + 1}$$

Guadagno unitario: $G(0) = 1$

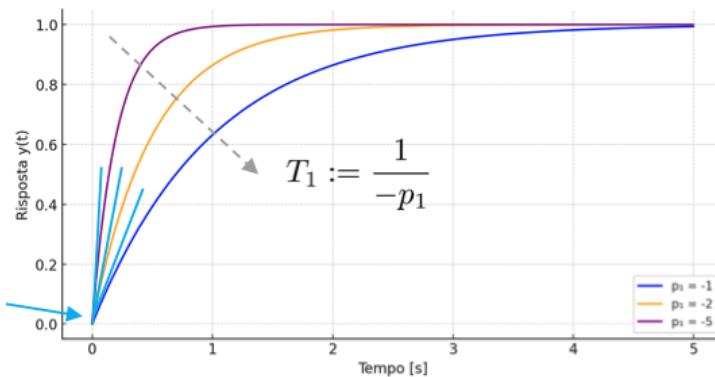
Risposta al gradino unitario:

$$Y(s) = \frac{1}{s}G(s)$$

$$y(t) = (1 - e^{p_1 t}) > 0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -p_1 e^{p_1 t} > 0$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = -p_1 = \frac{1}{T_1} \quad (\text{pendenza iniziale})$$



14.1.2 Esempio:

$$G(s) = \frac{-p_1}{s - p_1}$$

Guadagno unitario: $G(0) = 1$

$$T_1 = \frac{1}{-p_1}$$

Risposta al gradino unitario:

$$Y(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

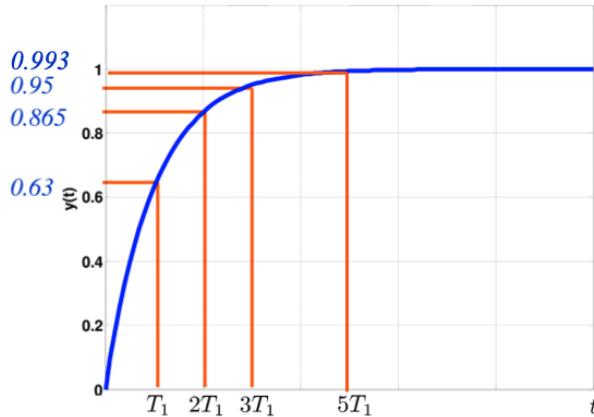
$$y(t) = 1 - e^{\frac{t}{T_1}}$$

$$t = T_1 \Rightarrow y(T_1) \approx 0.63$$

$$t = 2T_1 \Rightarrow y(2T_1) \approx 0.865$$

$$t = 3T_1 \Rightarrow y(3T_1) \approx 0.95$$

$$t = 5T_1 \Rightarrow y(5T_1) \approx 0.993$$



14.1.3 Esempio:

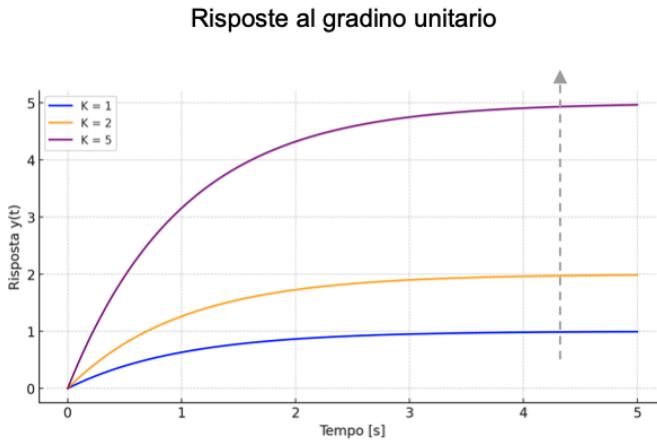
$$G(s) = K \cdot \frac{1}{s + 1}$$

Risposta al gradino unitario:

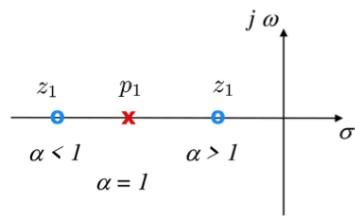
$$Y(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{K}{s(s+1)} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+1}$$

$$y(t) = K(1 - e^{-t}), \quad t \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} G(s) = G(0) = K$$



Caso con zero e polo (sistema proprio):



$$G(s) = \frac{1 + \hat{T}_1 s}{1 + \hat{T}_1 s} = \frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_1} + \frac{1 - \frac{\hat{T}_1}{T_1}}{1 + \hat{T}_1 s} = \alpha + \frac{1 - \alpha}{1 + T_1 s}$$

$$\alpha := \frac{\hat{T}_1}{T_1} \quad (\text{rapporto tra le costanti di tempo}) \Rightarrow z_1 = \frac{p_1}{\alpha}$$

Risposta al gradino:

$$Y(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

$$y(t) = 1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$y(0) = \alpha$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1 - \alpha}{T_1}$$

Nota sul calcolo tramite scomposizione:

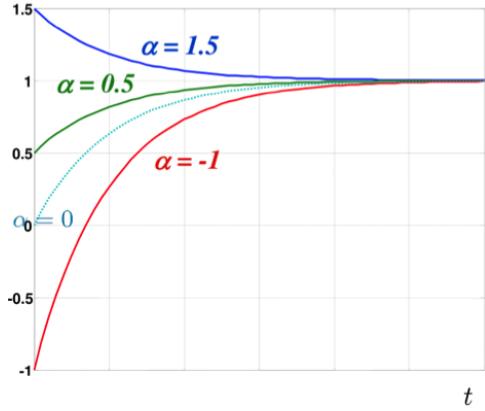
$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1 + \hat{T}_1 s}{1 + \hat{T}_1 s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_1 s} + \frac{1}{s} \cdot \hat{T}_1 s \cdot \frac{1}{1 + T_1 s}$$

Definiamo:

$$\tilde{Y}(s) := \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_1 s} \quad \Rightarrow \quad s\tilde{Y}(s) := \hat{T}_1 s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_1 s}$$

Passando all'inverso di Laplace:

$$L^{-1}[\tilde{Y}(s)] = \tilde{y}(t) = \frac{1}{1 + T_1 s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_0^t \tilde{y}(\tau) d\tau + \hat{T}_1 \tilde{y}(t)$$



14.2 Sistemi elementari del secondo ordine ($n = 2$)

Il tipico sistema del secondo ordine, a meno di un fattore costante, si può rappresentare con una funzione di trasferimento (FdT) del tipo:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\epsilon \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

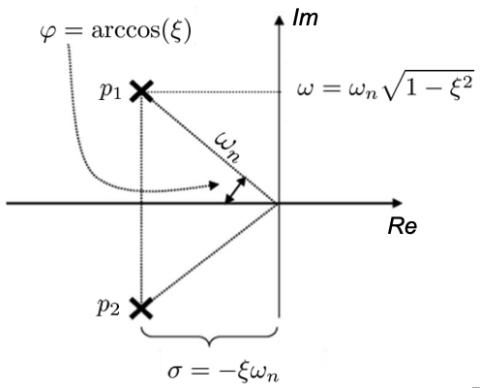
Dove i poli della FdT sono dati da:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -\epsilon\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2} = -\omega_n \cos \phi \pm j\omega_n \sin \phi$$

- $\omega_n = |s_1| = |s_2| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$: pulsazione naturale
- $\epsilon = \cos \phi = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$: fattore di smorzamento

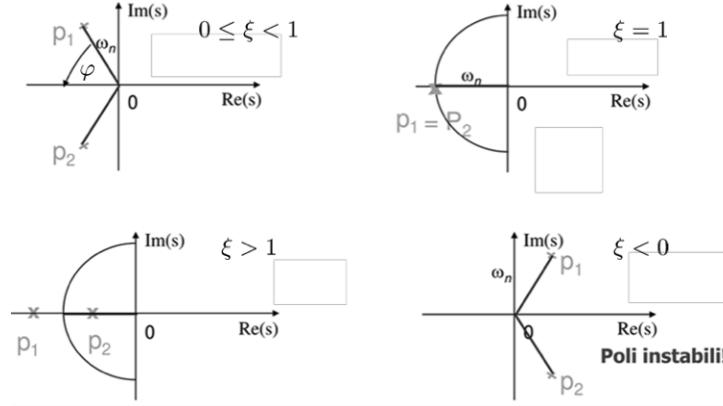
Casi particolari:

- $\epsilon = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\omega_n$: poli immaginari puri (oscillazioni non smorzate)
- $\epsilon = 1 \Rightarrow s_{1,2} = -\omega_n$: poli reali e coincidenti (caso critico)



Posizione dei poli della FdT al variare di $\epsilon = \cos \phi$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$



Classificazione in base a ϵ :

- $0 \leq \epsilon < 1$: sistema sottosmorzato (poli complessi coniugati a parte reale negativa)
- $\epsilon = 1$: sistema criticamente smorzato (poli reali coincidenti)
- $\epsilon > 1$: sistema sovrasmorzato (poli reali distinti e negativi)
- $\epsilon < 0$: poli instabili (parte reale positiva)

Risposta al gradino unitario

La risposta al gradino si ottiene calcolando la trasformata di Laplace inversa di $Y(s) = \frac{1}{s}G(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - Ae^{-\epsilon\omega_n t} \sin(\omega_n t + \phi)$$

- $A = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$
- $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2}$
- $\phi = \arccos(\epsilon)$

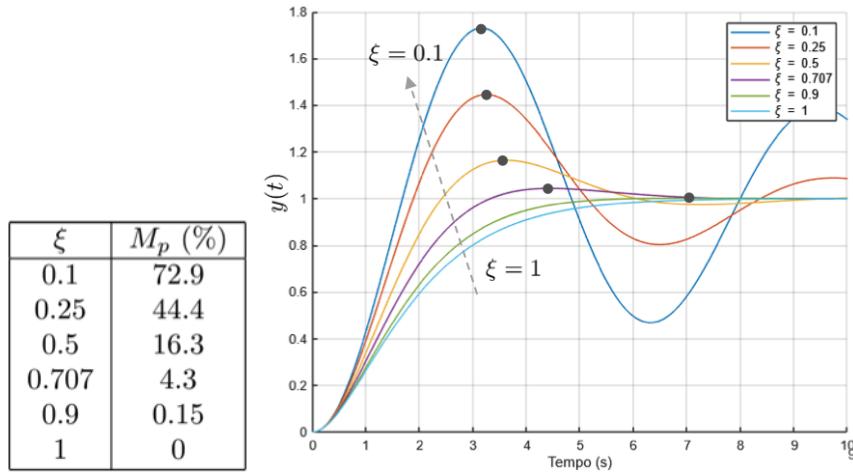
14.2.1 Overshoot (massima sovraelongazione)

$$M_p = e^{-\left(\frac{\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)} \cdot 100\%$$

Proprietà importante:

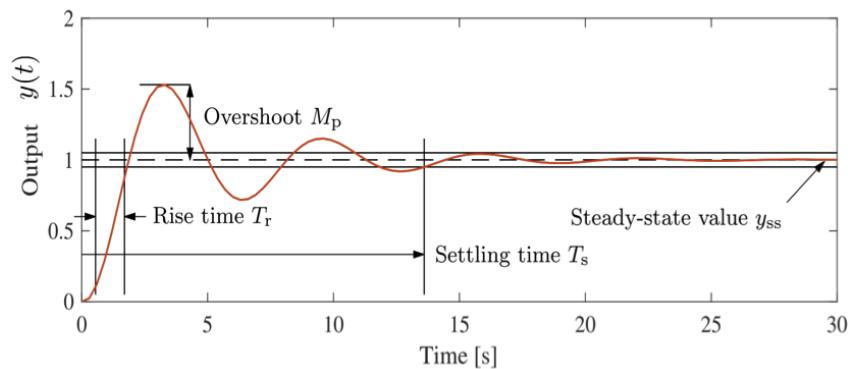
Se ϵ diventa piccolo, aumentano le oscillazioni. Esiste l'**overshoot**, ovvero il valore massimo della risposta del sistema oltre il valore di regime.

- $\epsilon = 1$: non si ha sovraelongazione (poli reali coincidenti)
- $\epsilon = 0$: oscillazione che permane nel tempo, né decresce né diverge (poli immaginari puri)



- $\epsilon < 0$: sistema instabile, divergenza della risposta e sovraelongazione crescente

Parametri caratterizzanti la risposta al gradino (risposta indiciale):



- y_{ss} : steady-state, valore di regime
- M_p : overshoot, massima sovraelongazione
- T_r : rise time, tempo di salita (es. 10%–90%)
- T_s : settling time, tempo di assestamento (es. entro il 5% del valore finale)

Per un sistema del secondo ordine valgono, ad esempio, le seguenti relazioni:

- **Overshoot:**

$$M_p = e^{-\left(\frac{\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)}$$

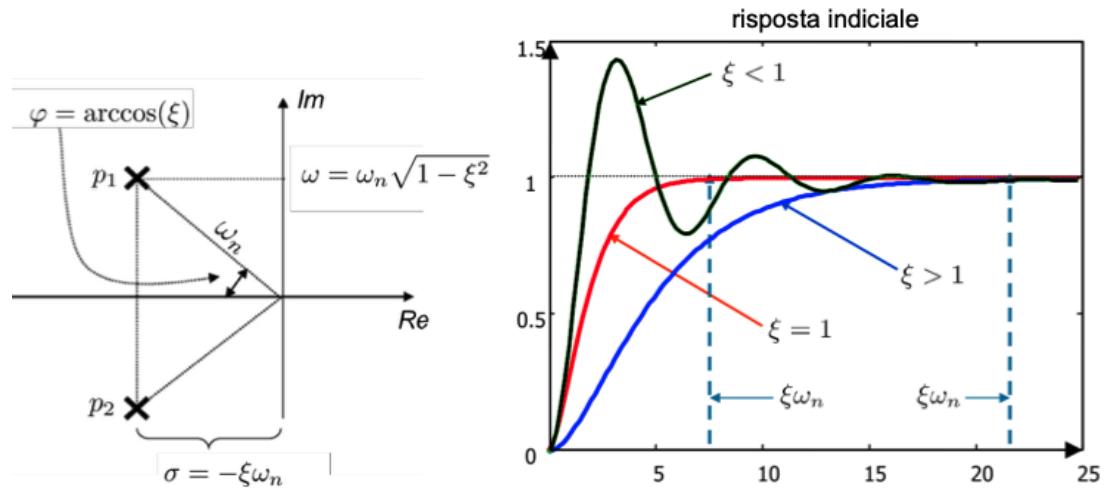
- **Tempo di salita:**

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n \sqrt{1-\epsilon^2}} \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

- **Tempo di assestamento (entro il 5%):**

$$T_s \Big|_{5\%} \approx \frac{3 - \ln \sqrt{1-\epsilon^2}}{\omega_n \epsilon} \approx \frac{3}{\epsilon \omega_n}$$

Legame tra poli della FdT e caratteristiche della risposta indiciale:



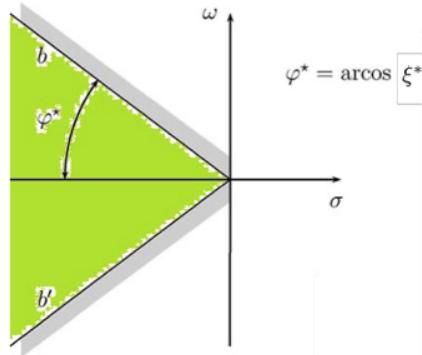
Due approcci progettuali possibili:

- sistema **lento e docile**
- sistema **veloce e aggressivo** (ma potenzialmente instabile)

Osservazioni:

- Il coefficiente di smorzamento ϵ dipende dalla posizione dei poli complessi coniugati nel piano di Laplace.
- Se il valore dell'overshoot M_p non deve superare un valore massimo assegnato M_p^* , allora i poli devono trovarsi entro un settore delimitato dalle rette b e b' (in termini di angolo ϕ).

$$M_p = e^{-\left(\frac{\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)} \leq M_p^* \Rightarrow \epsilon = \cos \phi \geq \frac{|\ln(M_p^*)|}{\sqrt{(\ln^2 M_p^*) + \pi^2}} = \epsilon^* \Rightarrow \phi \leq \arccos \epsilon^*$$

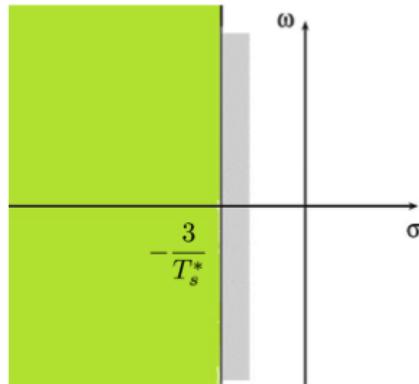


Osservazioni aggiuntive:

- Spesso si specifica anche un limite massimo al tempo di assestamento T_s , ad esempio entro il 5%:

$$T_s \approx \frac{3}{\epsilon \omega_n} < T_s^* \Rightarrow \epsilon \omega_n \geq \frac{3}{T_s^*} \Rightarrow \sigma = -\epsilon \omega_n \leq -\frac{3}{T_s^*}$$

Questo rappresenta un **vincolo sulla parte reale dei poli** del sistema: essa deve essere più negativa di una soglia, ossia i poli devono trovarsi **a sinistra di una retta verticale** nel piano complesso.



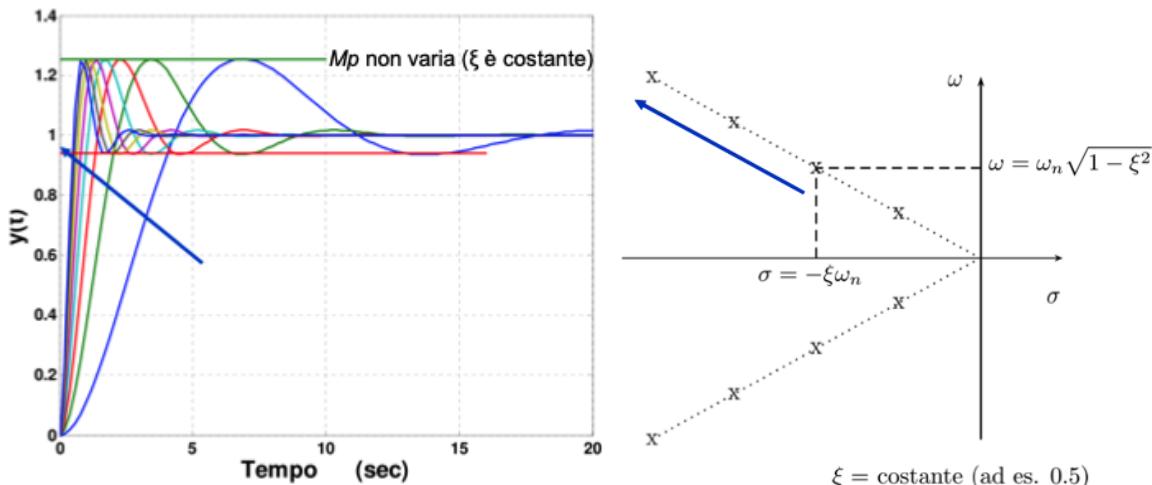
14.2.2 Osservazioni sulla risposta al variare di ω_n e ϵ

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)}$$

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n \sqrt{1-\epsilon^2}} \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

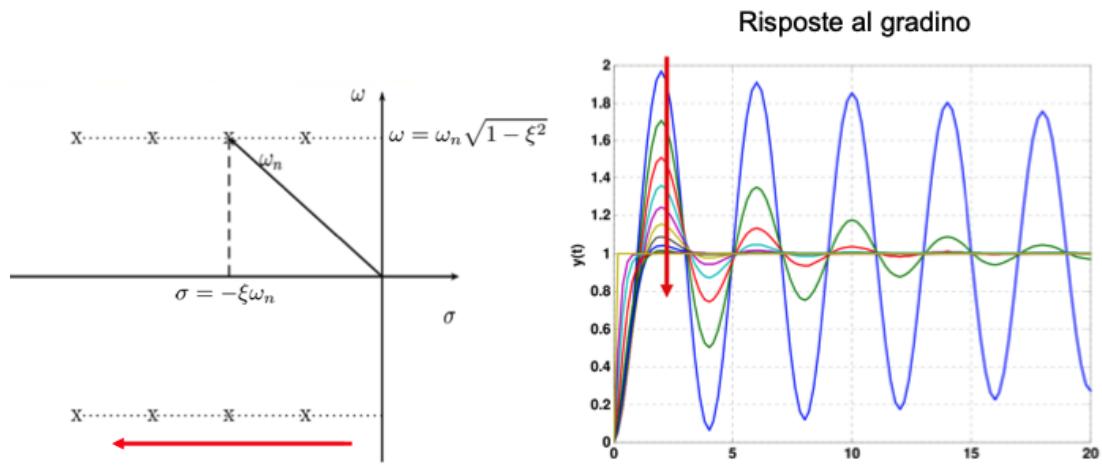
Osservazione: al variare di ω_n (con ϵ costante, ad esempio $\epsilon = 0.5$) si ottengono risposte al gradino di questo tipo:



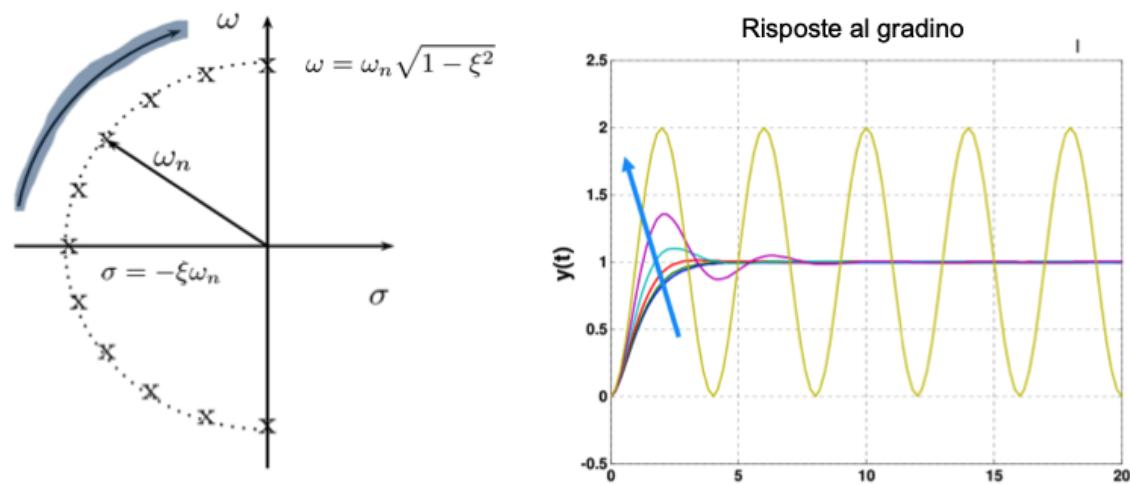
$$T_{po} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad : \text{periodo della prima oscillazione}$$

ϵ = costante (es. 0.5)

Se i poli complessi coniugati variano come in figura:



Se i poli complessi variano come in figura, con ω_n costante e $\epsilon \in [1, 0]$:



14.2.3 Vincoli sulla posizione dei poli della FdT nel piano complesso

Affinché la risposta al gradino (risposta indiciale) di un sistema del secondo ordine soddisfi nel tempo determinati criteri prestazionali, i poli della funzione di trasferimento devono rispettare i seguenti vincoli:

1. **Tempo di assestamento:**

$$T_s \approx \frac{3}{\epsilon \omega_n} \leq T_s^*$$

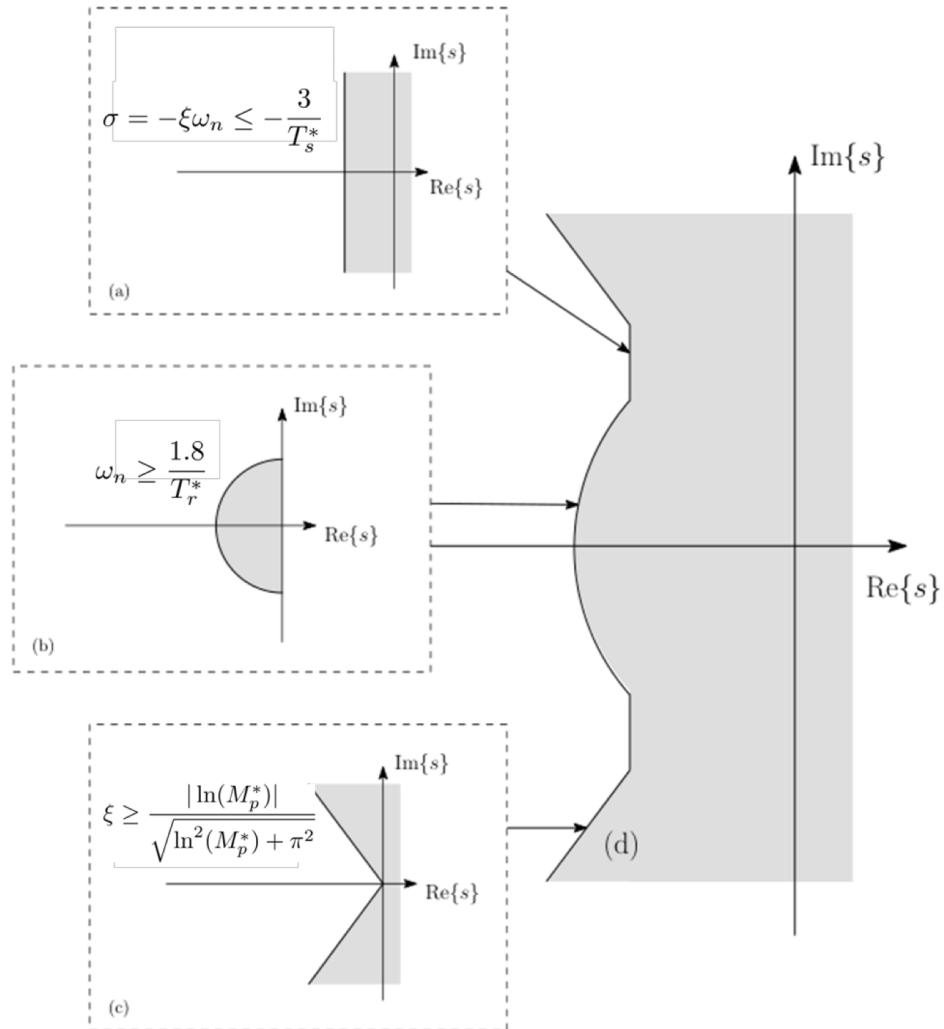
2. **Tempo di salita:**

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \leq T_r^*$$

3. **Overshoot:**

$$M_p = e^{-\left(\frac{\pi \epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)} < M_p^*$$

I poli devono trovarsi nel **semipiano sinistro** del piano complesso, e in particolare **a sinistra della regione grigia** che rappresenta i vincoli desiderati sulle prestazioni temporali del sistema.



14.3 Sistemi di ordine superiore al secondo ($n > 2$)

- Rappresentazione polinomiale:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad n \geq m$$

- Forma fattorizzata di Evans (guadagno, zeri/poli):

$$G(s) = K_E \cdot \frac{1}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n-v} (s - p_i)}$$

- Forma fattorizzata di Bode (guadagno, costanti di tempo):

$$G(s) = K_B \cdot \frac{1}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (1 + s\hat{T}_i) \cdot \prod_{i=1}^c \left(1 + 2\frac{\hat{\epsilon}_i}{\hat{\omega}_{n,i}}s + \frac{s^2}{\hat{\omega}_{n,i}^2}\right)}{\prod_{i=1}^r (1 + sT_i) \cdot \prod_{i=1}^c \left(1 + 2\frac{\epsilon_i}{\omega_{n,i}}s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2}\right)}$$

Espressione equivalente:

$$(s - z_i)(s - z_i^*) \rightarrow \prod_{i=1}^{\hat{r}} (1 + s\hat{T}_i) \cdot \prod_{i=1}^{\hat{c}} \left(1 + 2\frac{\hat{\epsilon}_i}{\hat{\omega}_{n,i}}s + \frac{s^2}{\hat{\omega}_{n,i}^2}\right)$$

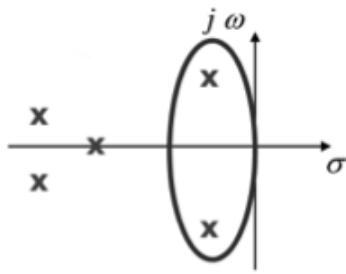
$$(s - p_i)(s - p_i^*) \rightarrow \prod_{i=1}^r (1 + sT_i) \cdot \prod_{i=1}^c \left(1 + 2\frac{\epsilon_i}{\omega_{n,i}}s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2}\right)$$

Definizioni dei parametri:

- $K_B = \lim_{s \rightarrow 0} s^v G(s)$: guadagno statico
- $T_i = \frac{1}{|p_i|} > 0$: costante di tempo associata ai poli
- $\hat{T}_i = \frac{1}{|z_i|} > 0$: costante di tempo associata agli zeri
- $\omega_n, \hat{\omega}_n > 0$: pulsazione naturale
- $\epsilon, |\epsilon| \leq 1$: coefficiente di smorzamento

Modelli approssimati di ordine ridotto

- Nei sistemi di ordine elevato è possibile ottenere un **modello approssimato di ordine ridotto**, la cui risposta al gradino sia simile a quella del sistema originale.
- Si trascurano eventuali coppie di poli e zeri **vicini tra loro e lontani dall'asse immaginario**, poiché hanno una dinamica molto veloce (parte reale molto negativa) e influenzano poco il comportamento globale.
- Si identificano quindi i **poli dominanti**, reali o complessi, più prossimi all'asse immaginario, responsabili delle principali componenti dinamiche del sistema.
- La risposta al gradino del sistema può quindi essere approssimata da quella del sistema ridotto, con stessa struttura nei poli dominanti e stesso guadagno statico.



14.3.1 Esempio: coppia di poli complessi coniugati dominante

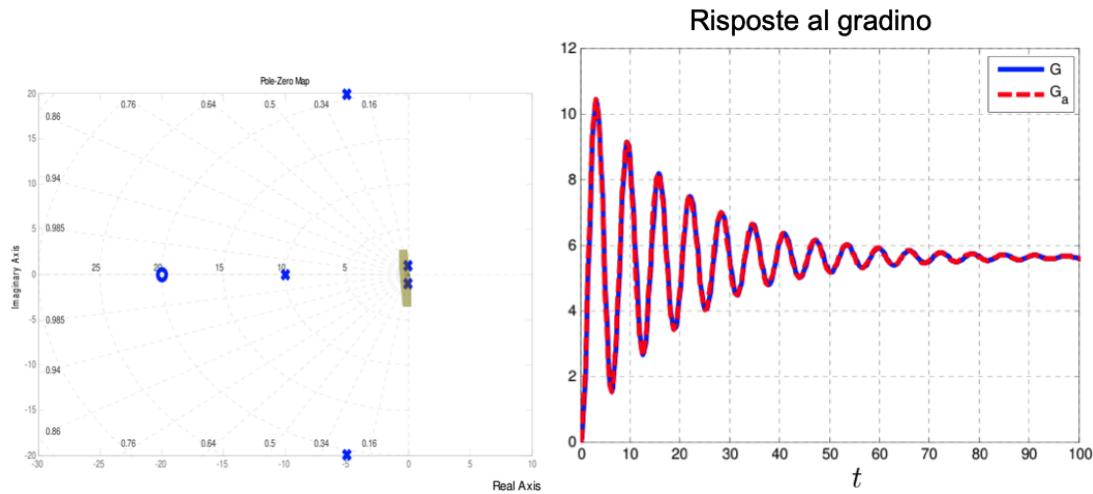
$$G(s) = \frac{1200(s+20)}{(s+10)(s^2 + 0.1s + 1.0025)(s^2 + 10s + 425)} \approx G_a(s) = \frac{5.633}{\frac{s^2}{1.0025} + \frac{0.1}{1.0025}s + 1}$$

Guadagno statico della FdT:

$$G(0) = \frac{1200 \cdot 20}{10 \cdot 1.0025 \cdot 425} = 5.633$$

Dati sui poli e zeri:

- $z_1 = -20$
- $p_1 = -10$
- $p_{2,3} = -0.05 \pm j1$
- $p_{4,5} = -5 \pm j20$



14.3.2 Esempio: polo reale dominante

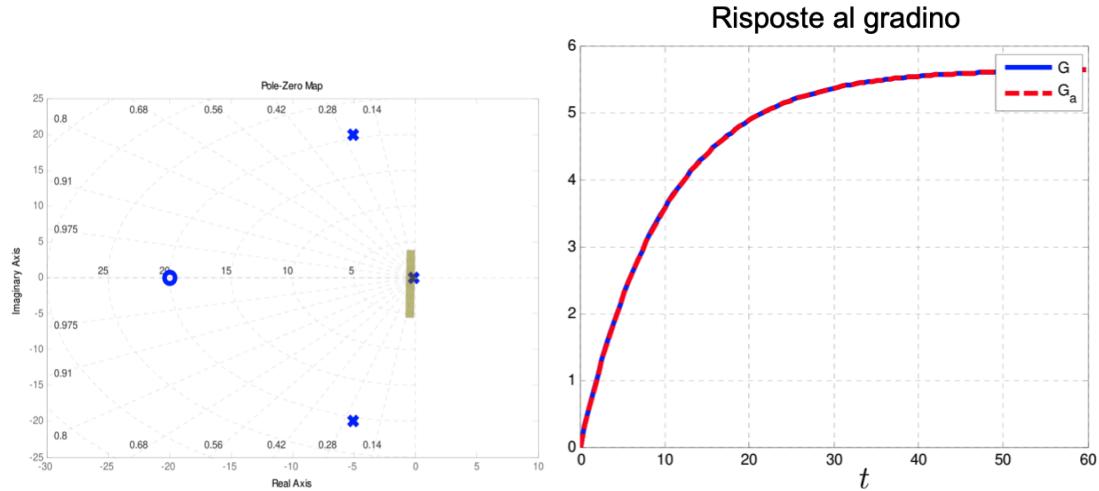
$$G(s) = \frac{12(s+20)}{(s+0.1)(s^2 + 10s + 425)} \approx \frac{5.6471}{s + 0.1} \quad (\text{FdT approssimante})$$

Guadagno statico della FdT:

$$G(0) = \frac{12 \cdot 20}{0.1 \cdot 425} = 5.6471$$

Dati sui poli e zeri:

- $z_1 = -20$
- $p_1 = -0.1$ (polo dominante)
- $p_{4,5} = -5 \pm j20$ (poli complessi trascurabili)



Capitolo 15

Fedeltà della Risposta, Specifiche e Prestazioni

Controllo: Fedeltà della Risposta, Specifiche e Prestazioni

Obiettivo del controllo: fedeltà della risposta

Il cuore del problema del controllo è far sì che il sistema segua il riferimento desiderato nel modo più fedele possibile.

Questo significa minimizzare l'errore tra l'uscita $y(t)$ e il riferimento $r(t)$, definito come:

$$e(t) = y(t) - r(t)$$

La fedeltà della risposta può voler dire:

- Raggiungere il setpoint (problema di regolazione).
- Seguire un riferimento variabile (tracking).
- “Resistere” all’effetto di disturbi e incertezze nel modello (robustezza).

Prestazioni vs. Robustezza

- Una buona prestazione (es. risposta veloce, precisa) può entrare in conflitto con la robustezza (capacità di funzionare bene anche con errori nel modello o disturbi).
- Solitamente, la soluzione di controllo “migliore” è un compromesso tra queste esigenze.

Commento. In un sistema di controllo, l’obiettivo principale è garantire la fedeltà della risposta dell’uscita, cioè ottenere un errore il più piccolo possibile, idealmente nullo. Questo obiettivo si traduce in un insieme di *specifiche di progetto*, che guidano la progettazione del controllore.

Il progettista deve trovare il giusto compromesso tra:

- Prestazioni desiderate (rapidità, precisione)
- Robustezza (resistenza a incertezze e disturbi)

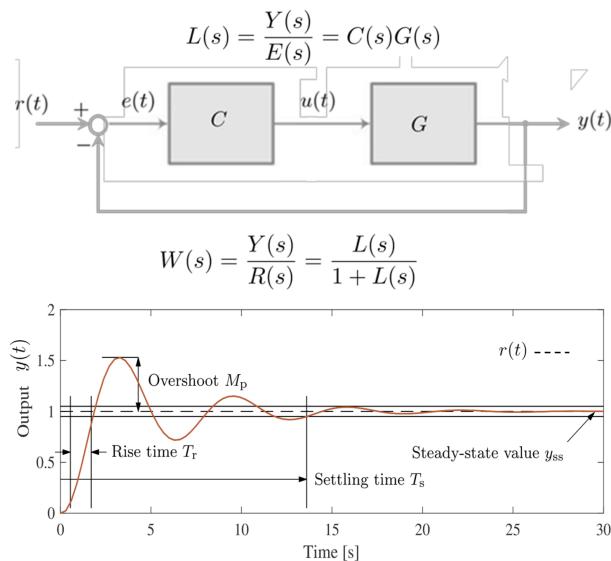
tenendo conto delle limitazioni fisiche, tecniche e pratiche del sistema reale.

Specifiche di progetto

Sono criteri numerici o qualitativi imposti alla risposta del sistema. Tipicamente includono:

- **Specifiche a regime:** si riferiscono al comportamento nel lungo periodo (a transitorio esaurito), ad esempio:
 - Errore a regime, che dipende dalla tipologia del sistema e dalla natura del riferimento (gradino, rampa, ecc.).
- **Specifiche dinamiche (durante il transitorio):**
 - Sovraelongazione (overshoot)
 - Tempo di salita (rise time)
 - Tempo di assestamento (settling time)

Questi parametri descrivono qualità e rapidità della risposta nel breve periodo.



Nota terminologica.

- **Accurato:** in media il sistema fornisce buoni risultati, ma può presentare varianza.
- **Preciso:** la varianza è bassa, anche se i risultati non centrano esattamente il valore desiderato.

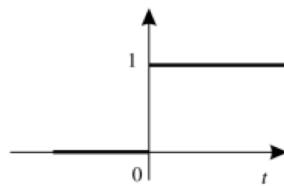
Conclusione. Le specifiche non sono solo “numeri” da soddisfare, ma riflettono esigenze reali del sistema fisico: accuratezza, precisione, velocità, stabilità, robustezza.

15.1 Fedeltà della Risposta: Errore a Regime (∞) - Tipo di un Sistema

Soltamente si considerano ingressi per $W(s)$, cioè riferimenti $r(t)$, “canonici” che hanno un andamento polinomiale t^h , di “ordine h ”:

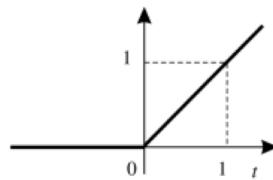
- **Gradino unitario (ordine 0):**

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}$$



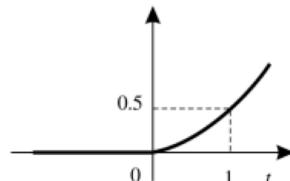
- **Rampa unitaria (ordine 1):**

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta_{-2}(t)\} = \frac{1}{s^2}$$



- **Rampa parabolica (ordine 2):**

$$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta_{-3}(t)\} = \frac{1}{s^3}$$



Nota. In questa analisi, non ci concentriamo sul comportamento durante il transitorio, ma piuttosto su cosa accade **dopo che il transitorio è terminato**, cioè sul comportamento a regime. Questo è importante per valutare la capacità del sistema di seguire il riferimento nel lungo termine (fedeltà a regime).

15.1.1 IMPORTANTE: Tipo di un Sistema ed Errore a Regime

Definizione di Tipo di un Sistema. Un sistema con funzione di trasferimento (FdT) ad anello chiuso $W(s)$, **razionale, strettamente propria e BIBO stabile**, si dice di **tipo h** se la funzione di trasferimento ad anello aperto $L(s)$ ha esattamente h poli nell'origine, ovvero:

$$L(s) = \frac{\tilde{L}(s)}{s^h} = s^{-h}\tilde{L}(s)$$

Risultato fondamentale. In tal caso:

- Per un riferimento polinomiale di ordine h , l'errore a regime è finito e costante.
- Per riferimenti di ordine inferiore, l'errore a regime è nullo.
- Per riferimenti di ordine superiore, l'errore tende all'infinito.

Errore a regime: analisi con Guadagno Statico. Definendo il **guadagno statico** ad anello aperto come:

$$L(0) := \lim_{s \rightarrow 0} L(s)$$

l'errore a regime si calcola come segue (tenendo presente che $E(s) = \frac{1}{1 + L(s)}R(s)$):

- **Tipo 0**, riferimento a gradino $r(t) = \delta_{-1}(t)$:

$$e_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + L(0)}$$

- **Tipo 1**, riferimento a rampa $r(t) = \delta_{-2}(t)$:

$$e_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tilde{L}(s)}{s}} = \frac{1}{L(0)}$$

- **Tipo 2**, riferimento parabolico $r(t) = \delta_{-3}(t)$:

$$e_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^3} \cdot \frac{1}{1 + s^{-2}\tilde{L}(s)} = \frac{1}{L(0)}$$

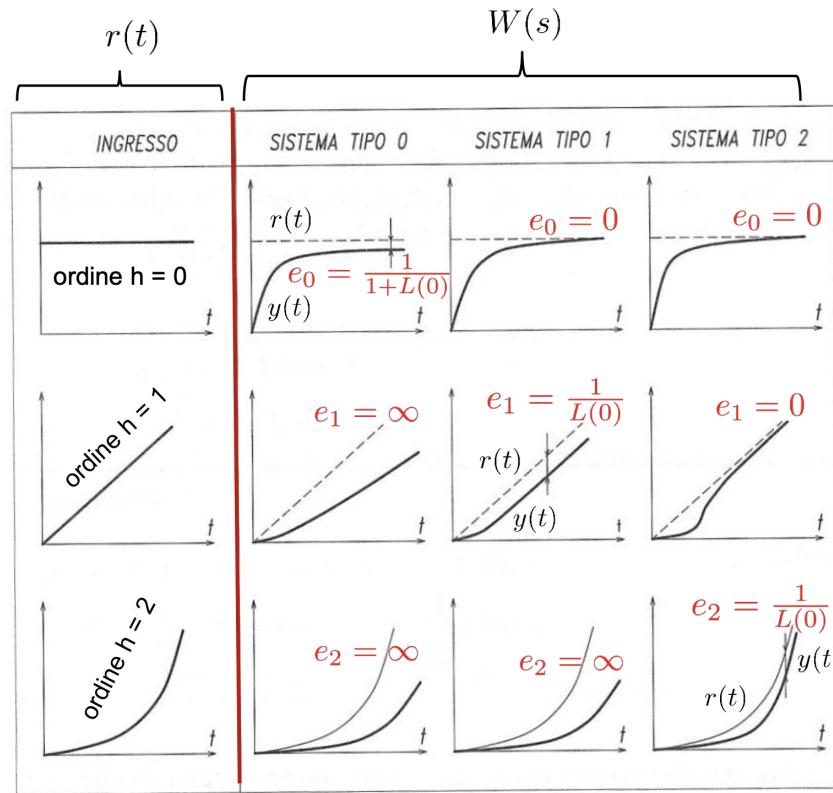
Nota tecnica. Nel caso in cui $W(s)$ sia di tipo 1, ossia $L(s) = \frac{\tilde{L}(s)}{s}$, l'errore a regime si può esprimere anche come:

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} 1 \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tilde{L}(s)}{s}} = \frac{s}{s + \tilde{L}(s)}$$

(il risultato dipende dal comportamento di $\tilde{L}(s)$ vicino all'origine).

Conclusione

- Un sistema che **non ha poli nell'origine** (tipo 0) presenta un errore costante per un riferimento a gradino.
- Un sistema che ha **un polo nell'origine** (tipo 1) presenta errore costante su una rampa.
- Un sistema con **due poli nell'origine** (tipo 2) mostra errore costante su una rampa parabolica.

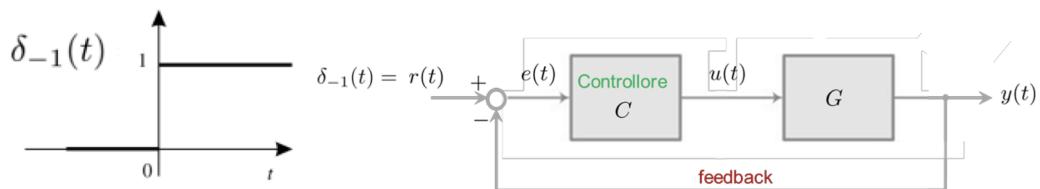


Lettura del Grafico

- Il riferimento è rappresentato dalla **prima colonna**.
- Nelle altre tre colonne:
 - Il riferimento è indicato dalla **linea tratteggiata** (uguale alla prima colonna).
 - L'uscita è indicata dalla **linea continua**.
- L'**errore** è calcolato come differenza tra riferimento e uscita:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

15.2 Fedeltà della Risposta: Errore Transitorio per Riferimenti Costanti



Domanda chiave: Se considero anche l'errore nel transitorio, quanto velocemente il sistema si avvicina all'obiettivo desiderato?

Dato un sistema $G(s)$ BIBO stabile, si considera in genere un riferimento a gradino.

- $e(t)$: errore complessivo nel tempo
- e_∞ : errore sul lungo periodo (a regime)
- $e_t(t)$: errore sul transitorio

Si ha quindi:

$$e(t) = e_\infty + e_t(t)$$

Esempio (sistema di tipo 0):

$$e_\infty = \frac{1}{1 + L(0)}$$

Funzioni di trasferimento associate:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$W_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s)$$

Nel caso di riferimento a gradino $R(s) = \frac{1}{s}$:

$$E(s) = \frac{1}{s} e_\infty + E_t(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

Ricaviamo la parte transitoria:

$$E_t(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e_\infty$$

Espressione generale tramite espansione in fratti semplici:

$$E_t(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(s - p_i)^k} \quad \Rightarrow \quad e_t(t) = \mathcal{L}^{-1}[E_t(s)] = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} a_{i,k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t)$$

Interpretazione. L'errore transitorio $e_t(t)$ può essere espresso come una combinazione di modi naturali associati ai poli del sistema a ciclo chiuso $W(s)$ (cioè le soluzioni di $1 + L(s) = 0$).

Se nel progettare il mio controllo introduco poli associati a modi rapidi, allora l'errore transitorio sarà piccolo o nullo, il che è desiderabile.

Infatti, il comportamento dell'errore transitorio dipende dalla dinamica del denominatore del sistema, cioè dalle radici di $1 + L(s)$. Un controllore progettato con dinamiche rapide (poli più negativi) migliora questo aspetto.

$$e(t) = e_\infty + e_t(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} a_{i,k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t)$$

Condizione di rapidità desiderata. Per ottenere una risposta rapida e contenere la durata dell'errore transitorio, si impone che tutti i poli del sistema a ciclo chiuso abbiano parte reale inferiore a un valore negativo fissato:

$$\Re(p_i) < -\sigma \quad \text{per ogni polo } p_i$$

dove $\sigma > 0$ rappresenta il livello minimo desiderato di rapidità nella risposta. Questo garantisce che:

$$|e_t(t)| \leq K e^{-\sigma t} \quad \text{per qualche costante } K > 0$$

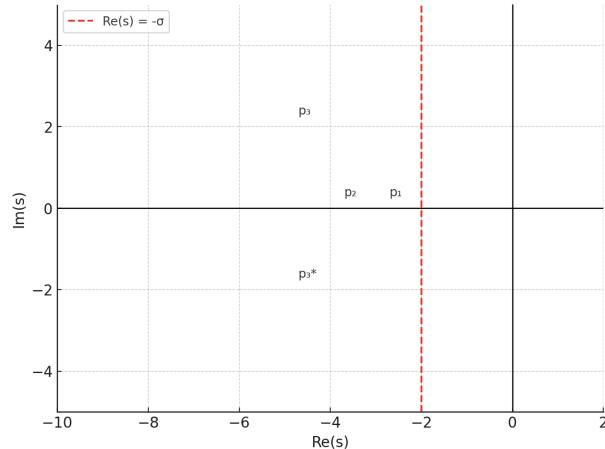
Osservazione: verifica con criterio di Routh-Hurwitz. Si può verificare che le radici del polinomio al denominatore del sistema a ciclo chiuso $d_W(s)$ si trovino tutte nel semipiano sinistro delimitato da $\Re(s) = -\sigma$:

- Si considera il polinomio traslato $d_W(s + \sigma)$.
- Se tutte le sue radici hanno parte reale negativa, allora i poli originali sono a sinistra della retta $\Re(s) = -\sigma$.
- Di conseguenza, l'errore transitorio si annulla con la rapidità desiderata.

Conclusione. L'errore transitorio, in risposta a riferimenti costanti, riflette la dinamica temporanea del sistema prima di raggiungere il regime.

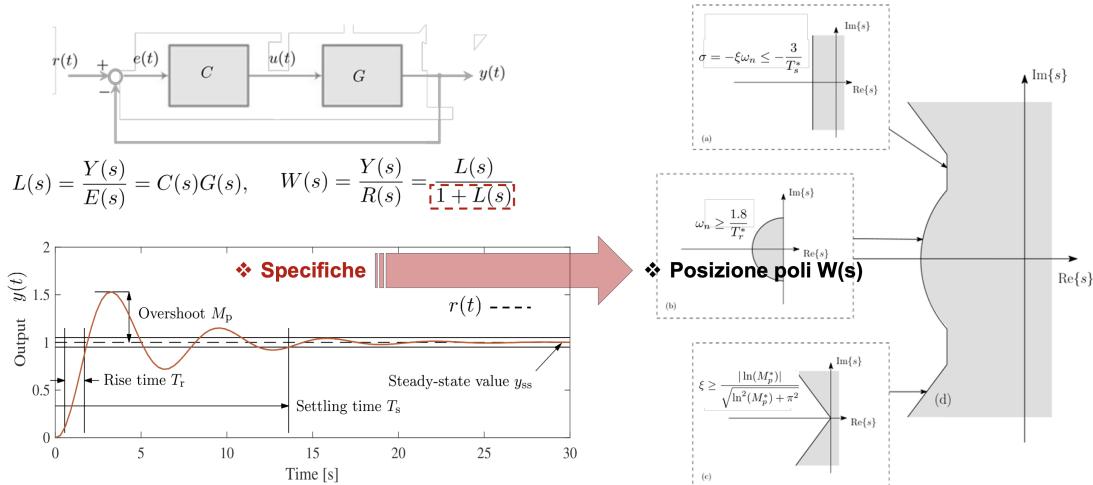
Esso dipende direttamente dalla posizione dei poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

- Più a sinistra si trovano i poli nel piano s , più rapida è la convergenza.
- Il progetto del controllore deve quindi mirare a posizionare i poli per soddisfare:
 - Vincoli sull'errore a regime.
 - Vincoli sulla dinamica transitoria.



15.3 Fedeltà della Risposta: Specifiche nel Tempo → Posizione dei Poli di $W(s)$, Radici di $1 + L(s) = 0$

- Le prestazioni desiderate della risposta del sistema a catena chiusa si possono tradurre in **specifiche** che impongono vincoli sulla **posizione dei poli** della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$.
- Il controllore $C(s)$ viene progettato in modo da garantire il rispetto di tali vincoli.



Principio. Una risposta si considera fedele a un desiderio quando il sistema:

- Raggiunge rapidamente l'obiettivo,
- Non presenta overshoot (sovraelongazioni) o undershoot eccessivi.

Questo si traduce in:

“Vincoli sui poli, che devono stare a sinistra di certe regioni del piano complesso.”

Richiami sulle funzioni di trasferimento:

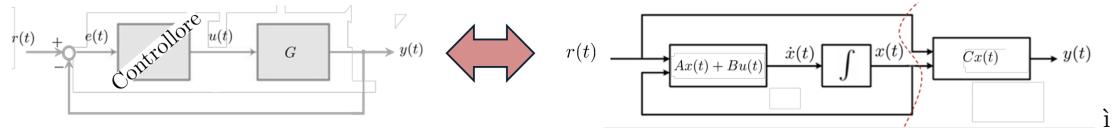
$$L(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = C(s)G(s)$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Nota. Le radici dell'equazione caratteristica $1 + L(s) = 0$ determinano i poli del sistema in anello chiuso $W(s)$: sono quindi le radici del denominatore di $W(s)$, e il loro posizionamento nel piano s è ciò che regola la dinamica della risposta nel tempo.

Curiosità: Errore a Regime per un Sistema SISO in Spazio di Stato

Si consideri una rappresentazione del sistema a catena chiusa in forma di stato, dove $x(t)$ è lo stato del sistema, $r(t)$ è l'ingresso (riferimento), e $y(t)$ è l'uscita.



Errore in funzione della risposta:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = R(s) \cdot T(s)$$

dove $T(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso.

Rappresentazione in spazio di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

Derivazione dell'errore in Laplace:

$$E(s) = R(s) \cdot [1 - T(s)] = R(s) \cdot [1 - C(sI - A)^{-1}B]$$

Errore a regime:

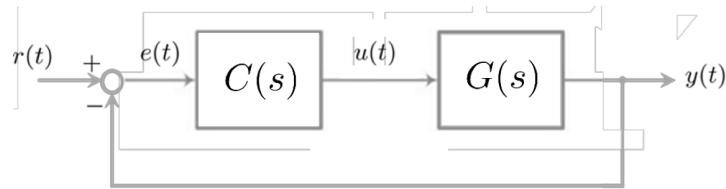
$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot [1 - C(sI - A)^{-1}B]$$

Osservazione. Questa espressione mostra come sia possibile calcolare l'errore a regime anche nel dominio dello spazio di stato, utilizzando la funzione di trasferimento ottenuta da $C(sI - A)^{-1}B$. Il risultato è coerente con le analisi condotte nel dominio di Laplace e fornisce una connessione diretta tra la rappresentazione a stati e l'analisi dell'errore a regime.

Capitolo 16

Controllori Standard

Progetto di Controllori Standard:



- Proporzionale (P)
- Proporzionale-Integrale (PI)
- Proporzionale-Integrale-Derivativo (PID)

Questi controllori sono utilizzati in oltre l'80% dei casi nelle applicazioni pratiche di controllo automatico.

Esistono diverse varianti di controllori che combinano le caratteristiche delle tre componenti fondamentali:

- **Proporzionale (P)**: reagisce istantaneamente all'errore presente.
- **Integrale (I)**: elimina l'errore a regime, integrando l'errore nel tempo.
- **Derivativo (D)**: anticipa l'andamento dell'errore, reagendo alla sua variazione.

Quando mi accontento dei Controllori Standard?

Quando il sistema da controllare è di primo o di secondo ordine.

Nota: I sistemi del primo e secondo ordine sono più semplici da controllare e spesso non richiedono tecniche avanzate di controllo ottimo o robusto. I controllori standard, se ben tarati, sono in grado di garantire prestazioni accettabili in termini di stabilità, rapidità e accuratezza.

16.1 Controllori Standard: P, PI, PID

Il controllore standard $C(s)$ è formato dalla combinazione delle seguenti azioni:

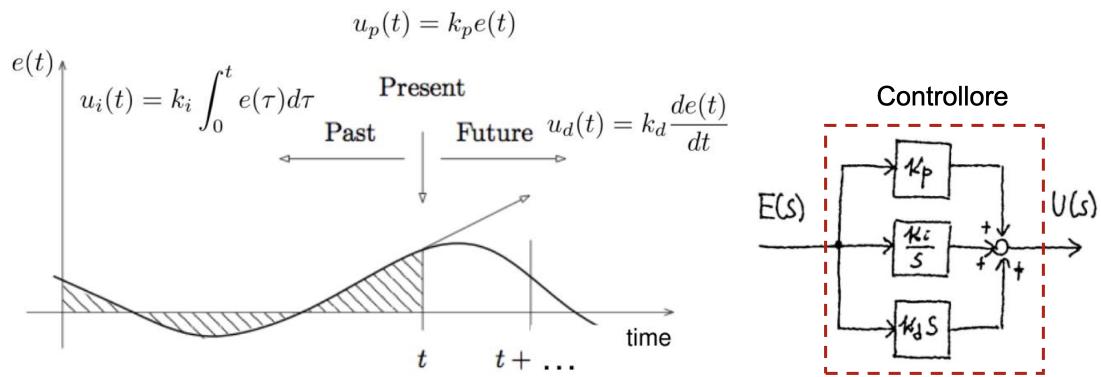
- Proporzionale (P)
- Integrale (I)
- Derivativo (D)

Se in questo momento ho un errore, mi ci vorrà un po' per sistemarlo, e probabilmente l'ho avuto anche in precedenza. Posso sistemare tenendo in memoria anche l'errore del passato. Come? Con un integrale.

- **Azione integrativa (passato):** $u_i = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau$
- **Azione proporzionale (presente):** $u_p(t) = k_p e(t)$
- **Azione derivativa (futuro):** $u_d(t) = k_d \frac{de(t)}{dt}$

Grazie a questi strumenti, in base all'errore posso capire come andrà la tendenza della curva.

Espressione complessiva del controllore PID:



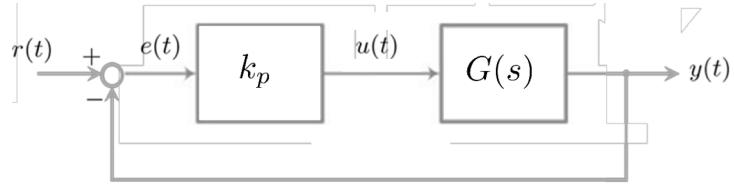
$$u(t) = u_p(t) + u_i(t) + u_d(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt}$$

Nel caso che segue, le azioni si considerano in parallelo e non più in somma come nello scorso esempio. Nella rappresentazione a blocchi (ad esempio mostrata in figura), si possono notare le tre "scatole" in parallelo, da cui è possibile calcolare la Trasformata di Laplace di ciascun contributo. (I tre membri sono già stati trasformati.)

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s$$

- $E(s)$: ingresso (errore trasformato)
- $U(s)$: uscita del controllore

16.2 Progetto di Controllori Proporzionali ($k_p > 0$)



Definizione del riferimento

$$r(t) = \delta_{-1}, \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

Definizione del controllore proporzionale

$$\begin{aligned} u(t) &= k_p e(t) \quad \text{con } k_p > 0 \\ U(s) &= k_p E(s), \quad C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p \end{aligned}$$

Funzione di anello aperto:

$$L(s) = C(s)G(s) = k_p G(s)$$

Funzione di trasferimento in retroazione unitaria

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{k_p \frac{n_G(s)}{d_G(s)}}{1 + k_p \frac{n_G(s)}{d_G(s)}} = \frac{k_p n_G(s)}{d_G(s) + k_p n_G(s)}$$

Condizione di stabilità BIBO:

Il denominatore $d_G(s) + k_p n_G(s)$ deve essere un polinomio di Hurwitz (tutti i poli con parte reale negativa) per garantire la stabilità del sistema.

Funzione di trasferimento dell'errore

$$W_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + k_p G(s)}$$

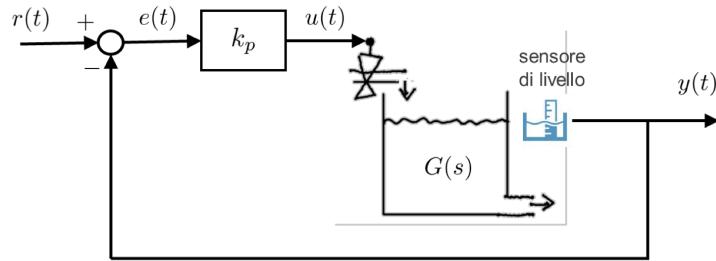
Errore a regime (errore di posizione)

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + k_p G(0)}$$

Osservazione:

All'aumentare di k_p , l'errore a regime diminuisce. Tuttavia, la stabilità del sistema deve essere sempre verificata, assicurandosi che i poli di $W(s)$, ovvero le radici di $d_G(s) + k_p n_G(s) = 0$, abbiano parte reale negativa (giacciono a sinistra dell'asse immaginario nel piano s).

16.2.1 Esempio: controllo proporzionale del livello di un serbatoio



- Variabile controllata: altezza $y(t)$ [m]
- Superficie del serbatoio: 1 [m^2]
- Variabile manipolata: apertura della valvola
- Condizione iniziale: $y(0) = 0$

Inizialmente ho solo risposta forzata. Impongo un riferimento desiderato per la quota e progetto un controllo proporzionale.

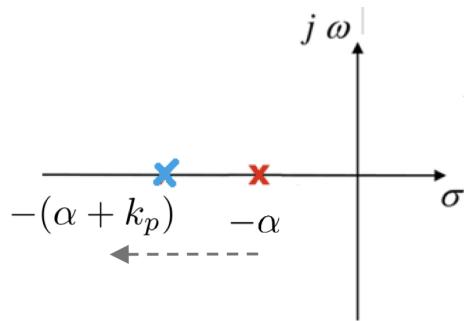
Dinamica del sistema:

$$y'(t) = u(t) - \alpha \cdot 1 \cdot y(t), \quad \alpha > 0$$

$$sY(s) = U(s) - \alpha Y(s) \Rightarrow (s + \alpha)Y(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + \alpha}$$

Osservazione:

Il sistema ha un solo polo reale negativo in $s = -\alpha$, quindi è un sistema di tipo 0. Ne consegue che **non potrà mai azzerare l'errore a regime** in presenza di un riferimento a gradino.



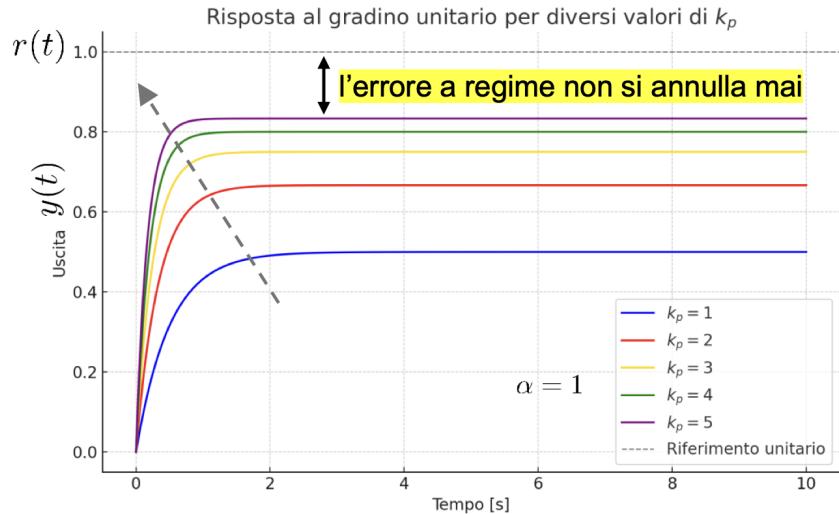
Progetto del controllore proporzionale

$$W(s) = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} = \frac{k_p}{s + \alpha + k_p}$$

$$s + \alpha + k_p = 0 \Rightarrow s = -(\alpha + k_p)$$

Osservazione:

Il polo del sistema in retroazione resta sempre con parte reale negativa, quindi il sistema è BIBO stabile per ogni $k_p > 0$.



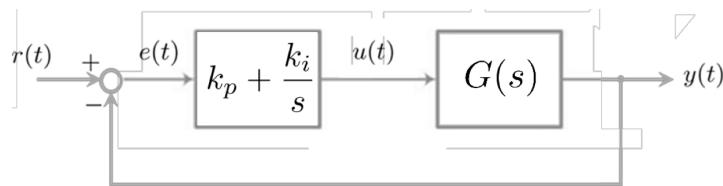
Errore a regime e valore finale della risposta

$$e_{\infty} = \frac{1}{1 + k_p G(0)} = \frac{\alpha}{\alpha + k_p}$$

Se k_p è grande, l'errore tende a 0

$$y(\infty) = 1 - e_{\infty} = \frac{k_p}{\alpha + k_p}$$

16.3 Progetto di Controllori Proporzionali-Integrali ($k_p > 0$, $k_i > 0$)



L'integratore introduce un termine $\frac{1}{s}$, che rappresenta un polo nell'origine. Questo rende il sistema complessivo di tipo 1, il che implica che, su un riferimento costante, **l'errore a regime sarà nullo**.

Definizione del riferimento

$$r(t) = \delta_{-1}(t), \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

Espressioni del controllore PI

$$U(s) = k_p E(s) + \frac{k_i}{s} E(s) \Rightarrow C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{s k_p + k_i}{s}$$

Anello aperto

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{sk_p + k_i}{s} G(s)$$

Funzione di trasferimento in retroazione unitaria

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{n_C(s)}{d_C(s)} \cdot \frac{n_G(s)}{d_G(s)}}{1 + \frac{n_C(s)}{d_C(s)} \cdot \frac{n_G(s)}{d_G(s)}} = \frac{(sk_p + k_i)n_G(s)}{sd_G(s) + (sk_p + k_i)n_G(s)}$$

Condizione di stabilità BIBO:

Il denominatore $sd_G(s) + (sk_p + k_i)n_G(s)$ deve essere un polinomio di Hurwitz, cioè con poli a parte reale negativa, per garantire la stabilità BIBO del sistema.

Funzione di trasferimento dell'errore

$$W_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s) = \frac{1}{1 + \frac{sk_p + k_i}{s} G(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s + (sk_p + k_i)G(s)}$$

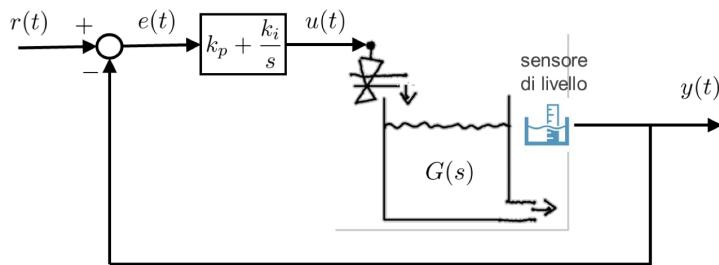
Errore a regime

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0 \cdot \frac{1}{0 + (0k_p + k_i)G(0)} = 0$$

Osservazione:

Poiché $L(s)$ è un sistema di ordine almeno 1 (avendo un polo nell'origine), l'errore a regime in risposta a un riferimento unitario è nullo.

16.3.1 Esempio con sistema $G(s) = \frac{1}{s+\alpha}$



$$C(s) = \frac{sk_p + k_i}{s}$$

$$W(s) = \frac{sk_p + k_i}{s(s + \alpha) + sk_p + k_i} = \frac{sk_p + k_i}{s^2 + (\alpha + k_p)s + k_i}$$

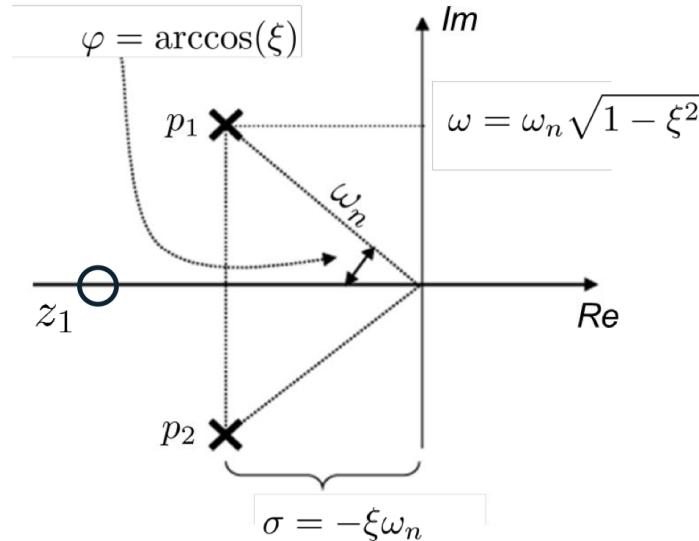
Caratteristiche del sistema

- **Zero:** $z_1 = -\frac{k_i}{k_p}$
- **Poli:** radici dell'equazione:

$$s^2 + (\alpha + k_p)s + k_i = s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Parametri del sistema

$$\omega_n := \sqrt{k_i}, \quad \epsilon := \frac{\alpha + k_p}{2\sqrt{k_i}}, \quad p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

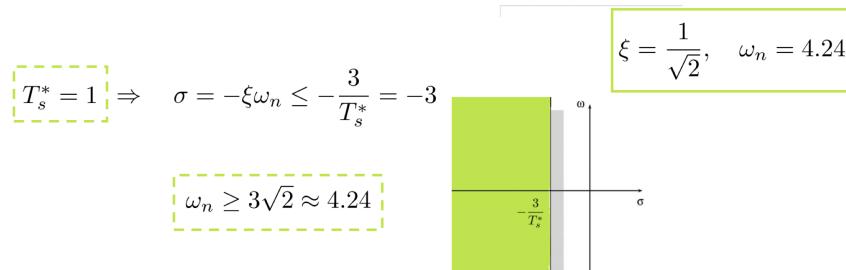
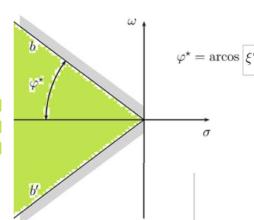
□ Piano s

16.3.2 IMPORTANTE: Specifiche sul Sistema del Secondo Ordine

Si considerino le seguenti specifiche per un sistema del secondo ordine (trascurando lo zero al numeratore):

- **Overshoot** inferiore al 5%
- **Tempo di assestamento** inferiore a 1 [s]

| ξ | M_p (%) |
|-------|-----------|
| 0.1 | 72.9 |
| 0.25 | 44.4 |
| 0.5 | 16.3 |
| 0.707 | 4.3 |
| 0.9 | 0.15 |
| 1 | 0 |

$$\Rightarrow \varphi \leq \arccos \xi^* = 45^\circ$$



Scelta dei parametri tramite tabella $\epsilon \leftrightarrow M_p$

Si utilizza una tabella che collega il coefficiente di smorzamento ϵ all'overshoot percentuale $M_p(\%)$. Ad esempio, scegliendo la seguente riga:

$$\epsilon^* = 0.707, \quad M_p(\%) = 4.3$$

$$\Rightarrow \phi \leq \arccos(\epsilon^*) = 45^\circ$$

Parametri caratteristici del sistema

$$\omega_n := \sqrt{k_i}, \quad \epsilon := \frac{\alpha + k_p}{2\sqrt{k_i}}$$

Condizione sul tempo di assestamento:

Dato $T_s^* = 1$, si richiede:

$$\sigma = -\epsilon\omega_n \leq \frac{3}{T_s^*} = -3 \Rightarrow \omega_n \geq 3\sqrt{2} \approx 4.24$$

Scelta dei parametri per soddisfare le specifiche

Assumendo:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \omega_n = 4.24 \Rightarrow \begin{cases} k_i = \omega_n^2 \approx 18 \\ k_p = 2\omega_n\epsilon - \alpha = 6 - \alpha \end{cases}$$

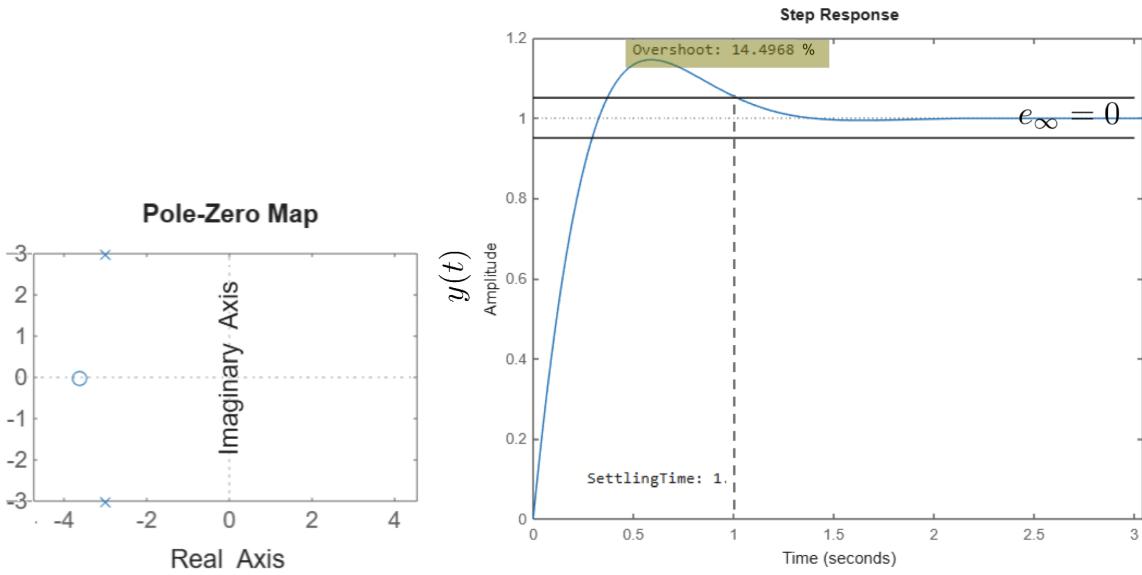
16.3.3 Esempio con $\alpha = 1$, $k_p = 5$, $k_i = 18$

$$W(s) = \frac{sk_p + k_i}{s^2 + (\alpha + k_p)s + k_i} = \frac{5s + 18}{s^2 + 6s + 18}$$

$$W(0) = 1, \quad e_\infty = 0$$

Caratteristiche del sistema

- Zero: $z_1 = -3.6$
- Poli: $p_{1,2} = -3 \pm j3$



16.4 Nota: Sistemi Elementari del Secondo Ordine con uno Zero

$$V(s) = \frac{1}{s} \rightarrow H(s) \rightarrow Y(s)$$

Sia $V(s)$ l'ingresso, che supponiamo essere un gradino unitario. La sua trasformata di Laplace vale:

$$V(s) = \frac{1}{s}$$

Sia $Y(s)$ l'uscita del sistema.

Funzione di trasferimento con uno zero

$$H(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \hat{T}s)}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2} = H_2(s) + \hat{T}sH_2(s)$$

dove:

$$H_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2}$$

Risposta del sistema al gradino unitario

Dato un ingresso a gradino unitario:

$$v(t) = 1 \cdot \delta_{-1}(t) \Rightarrow V(s) = \frac{1}{s}$$

La risposta in frequenza è:

$$Y(s) = H(s) \cdot V(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \hat{T}s)}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

Questa è la trasformata di Laplace della risposta del sistema all'ingresso unitario.

Risposta nel dominio del tempo

$$Y(s) = H(s)V(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Applichiamo la trasformata inversa di Laplace:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[s \cdot \frac{H_2(s)}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)] + \mathcal{L}^{-1}[sY_2(s)] \\ &\Rightarrow y(t) = y_2(t) + \hat{T} \cdot y'_2(t) \end{aligned}$$

Interpretazione: l'uscita è data dalla somma della risposta del secondo ordine (senza lo zero) più \hat{T} volte la sua derivata.

Valore finale della risposta

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} H(s) = H(0) = 1$$

(applicazione del teorema del valore finale)

Valore iniziale della risposta

$$y(0) = y_2(0) + \hat{T}y'_2(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY_2(s) + \hat{T} \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY_2(s)) = 0 + \hat{T} \cdot 0 = 0$$

Valore iniziale della derivata

$$y'(0) = y'_2(0) + \hat{T}y''_2(0)$$

$$y'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY_2(s)) + \hat{T} \lim_{s \rightarrow \infty} s(s^2Y_2(s)) = 0 + \hat{T} \cdot \omega_n^2 = \hat{T}\omega_n^2$$

Osservazione:

Sebbene il valore iniziale $y(0) = 0$, la derivata iniziale dipende da \hat{T} .

Se $\hat{T} \neq 0$, la risposta iniziale del sistema non sarà piatta: partirà con una derivata positiva o negativa a seconda del segno di \hat{T} .

16.4.1 Caso: Sistema a fase non minima

Due poli reali negativi e uno zero con parte reale positiva:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \hat{T}s)}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \hat{T} < 0$$

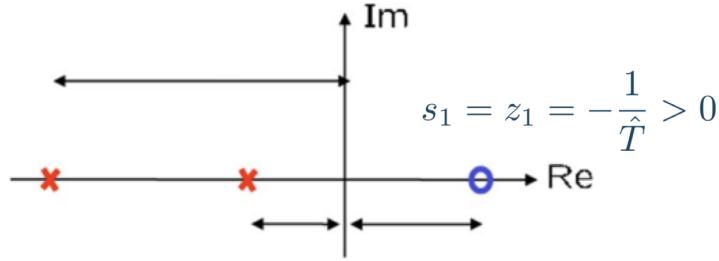
Osservazione:

Poiché:

$$y'(0) = \hat{T} \cdot \omega_n^2 < 0$$

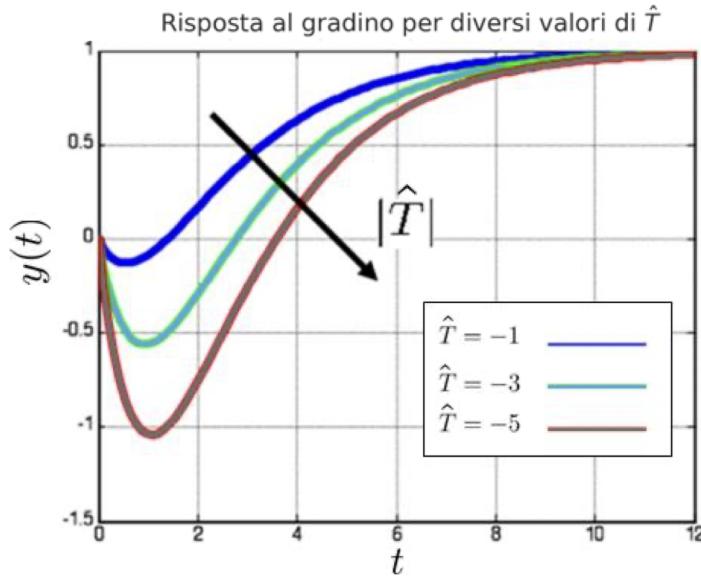
la risposta presenta una **sottoelongazione iniziale**: il sistema inizia a muoversi in direzione opposta rispetto al valore di regime.

Comportamento dinamico:



- Il sistema ha due poli reali negativi → comportamento stabile e smorzato.
- In assenza dello zero (cioè senza \hat{T}), l'uscita partirebbe da 0, crescerebbe lentamente e si stabilizzebbe sul valore desiderato senza overshoot.
- Quando $\hat{T} \ll 0$, ad esempio con $\hat{T} = -5$, si osserva un comportamento molto marcato:
 - L'uscita parte da 0,
 - ma inizialmente **diminuisce** (risposta negativa),
 - poi si inverte e cresce verso il valore di riferimento (es. 1).

In sintesi: il sistema parte con la derivata negativa e “rimbalza” prima di convergere, a causa della posizione dello zero in $s > 0$.



16.4.2 Caso: Sistema a fase minima

Due poli reali negativi e uno zero con parte reale negativa, ma posizionato **più a destra** dei poli:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \hat{T}s)}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \hat{T} > 0$$

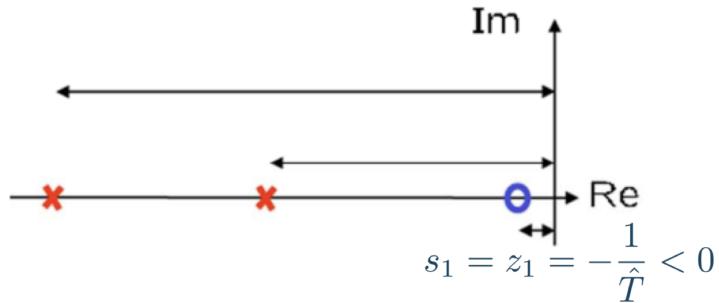
Osservazione:

Poiché:

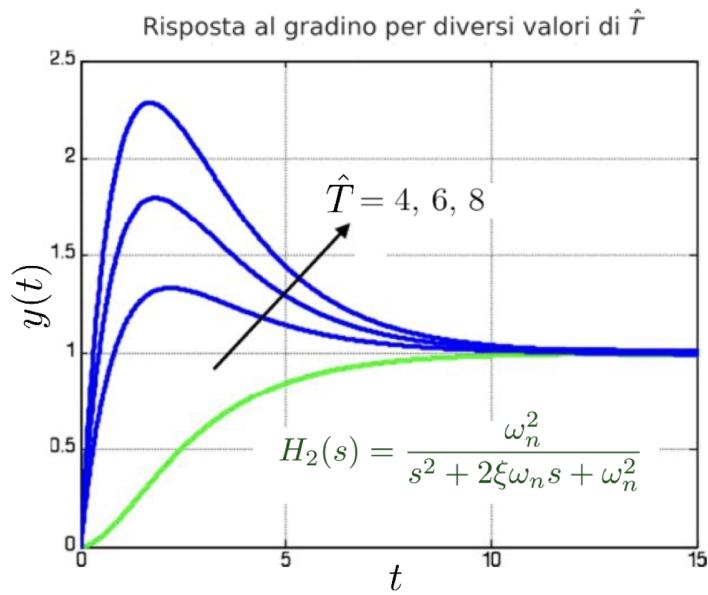
$$y'(0) = \hat{T} \cdot \omega_n^2 > 0$$

la risposta $y(t)$ parte con derivata positiva, cioè nella **direzione corretta** verso il valore finale di regime.

Comportamento dinamico:



- Lo zero ha parte reale negativa (quindi il sistema è a fase minima), ma è posizionato più vicino all'origine rispetto ai poli.
- All'aumentare di \hat{T} , lo zero si avvicina sempre più all'origine.
- Di conseguenza:
 - L'**overshoot** della risposta aumenta.
 - La risposta resta **non oscillatoria**.
 - La risposta $y(t)$ risulta **più brusca e nervosa** rispetto a quella del sistema senza lo zero ($H_2(s)$).

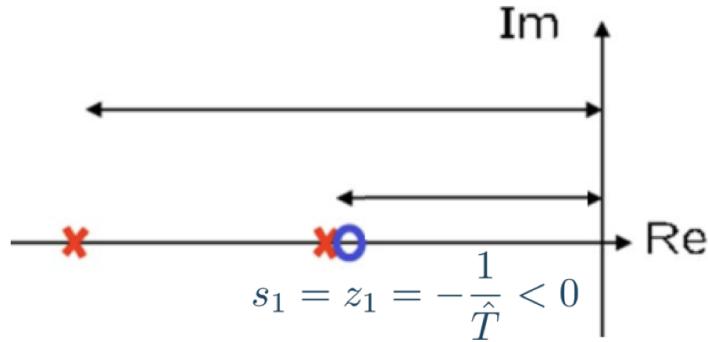


16.4.3 Caso: Sistema a fase minima con quasi cancellazione polo/zero

Due poli reali negativi e uno zero con parte reale negativa, molto vicino a uno dei poli (ma non coincidente):

$$H(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \hat{T}s)}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \hat{T} > 0$$

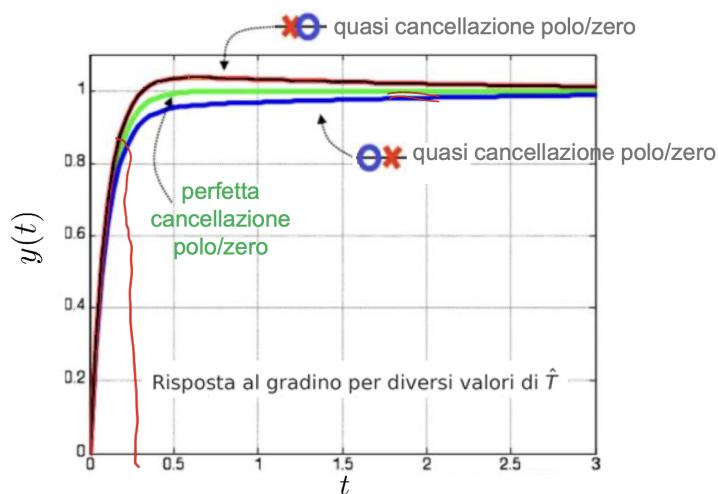
Comportamento dinamico:



- L'andamento iniziale di $y(t)$ è molto simile a quello di un **sistema del primo ordine**, dominato dal polo più veloce (il più a sinistra nel piano complesso).
- Con il passare del tempo emerge un **contributo più lento e subdolo**, che tende a esaurirsi gradualmente.
- Questo decadimento lento è governato dalla costante di tempo associata allo zero, che non è perfettamente cancellato dal polo.
- Si osserva la presenza di una **coda di assestamento**, tipica di una **quasi cancellazione polo/zero** (diversa dalla cancellazione perfetta, che eliminerebbe completamente il contributo associato).
- Di conseguenza, il sistema impiega **più tempo** a raggiungere il valore finale desiderato rispetto a un sistema senza tale configurazione.

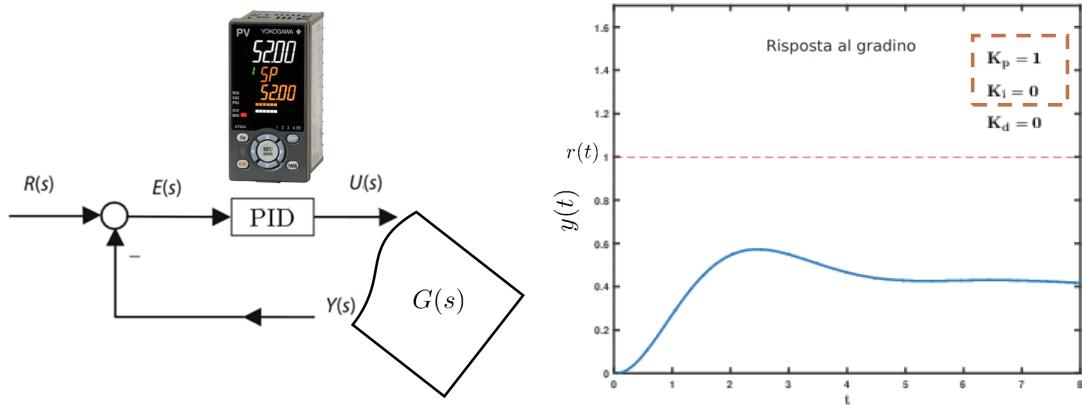
Osservazione:

Lo **zero**, in base al suo **segno** e alla sua **posizione relativa ai poli**, introduce contributi qualitativamente diversi alla risposta del sistema. Può rallentarlo, anticiparlo o invertirne temporaneamente la direzione.



16.5 Effetto dei Parametri K_p , K_i , K_d sulle Prestazioni del Sistema in Catena Chiusa

| Parameter | Rise time | Overshoot | Settling time | Steady-state error | Stability |
|----------------|--------------|-----------|---------------|---------------------|------------------------|
| $K_p \uparrow$ | Decrease | Increase | Small change | Decrease | Degrade |
| $K_i \uparrow$ | Decrease | Increase | Increase | Eliminate | Degrade |
| $K_d \uparrow$ | Minor change | Decrease | Decrease | No effect in theory | Improve if K_d small |



Si analizzano gli effetti dell'aumento di un singolo parametro del controllore PID, mantenendo costanti gli altri due.

16.5.1 Effetto dell'aumento di K_p (guadagno proporzionale)

- La risposta del sistema diventa **più veloce**.
- Aumenta la **sovraelongazione** (overshoot).
- Il comportamento risulta **più nervoso**.
- L'errore a regime diminuisce, ma **non si annulla**.
- La **stabilità** peggiora: possono comparire oscillazioni indesiderate.

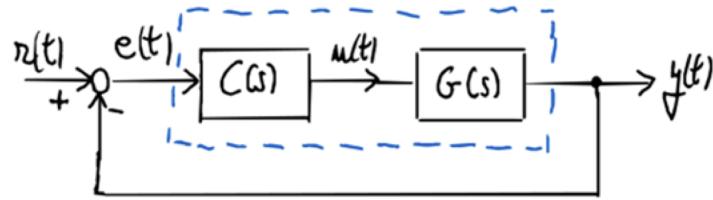
16.5.2 Effetto dell'aumento di K_i (guadagno integrativo)

- Il sistema diventa **più rapido**, ma:
- Aumenta la **sovraelongazione** e l'**overshoot è più accentuato**.
- Aumenta il **tempo di assestamento** (settling time).
- Migliora notevolmente l'**errore a regime**: l'integrale consente di annullarlo completamente.
- Con il solo K_p l'errore a regime non può essere eliminato, mentre con K_i sì.

16.5.3 Effetto dell'aumento di K_d (guadagno derivativo)

- Riduce il **nervosismo** del sistema.
- Contribuisce a **smorzare** la risposta e a migliorare la stabilità.
- Agisce principalmente sulla derivata dell'errore, aiutando a contrastare le variazioni rapide.

16.6 Progetto del Controllore



$$L(s) = C(s) \cdot G(s)$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Ipotesi

- $G(s)$ è una funzione di trasferimento razionale.
- I poli di $G(s)$ appartengono all'insieme:

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}[s] < 0\} \cup \{0\}$$

- La funzione $G(s)$ può essere scritta come:

$$G(s) = \frac{k_B}{s} \cdot G_1(s)$$

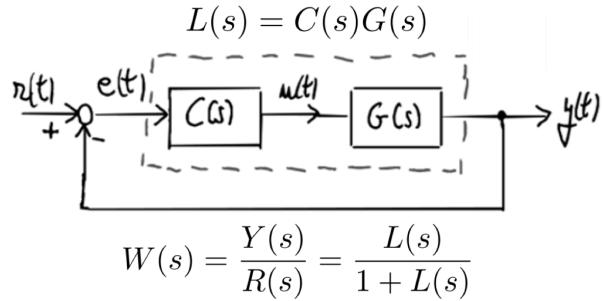
dove:

- $G_1(s)$ è razionale,
- $G_1(0) = 1$

- Il **guadagno statico** di $G(s)$ è:

$$k_B = G(0)$$

Obiettivo



Progettare $C(s)$, funzione razionale e propria, con poli in:

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}[s] < 0\} \cup \{0\}$$

tale che la funzione in catena chiusa $W(s)$ soddisfi le seguenti specifiche di controllo:

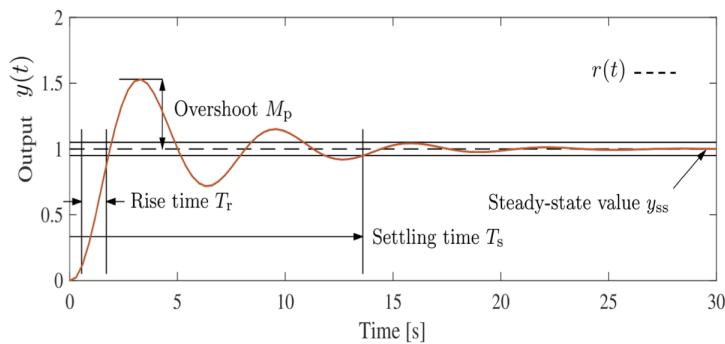
0) $W(s)$ sia **BIBO stabile**

1) $W(s)$ sia di **tipo h**

2) $e_\infty \leq e_\infty^*$

3) $M_p \leq M_p^*$

4) $T_r \leq T_r^*$ oppure $T_s \leq T_s^*$



Significato delle Specifiche

- **Specifiche 0 e 1:** riguardano il **comportamento a regime permanente**, ovvero per $t \rightarrow \infty$
- **Specifiche 2:** è una **specificazione di precisione**, ovvero impone un limite sull'errore a regime:

$$e_\infty \leq e_\infty^*$$

- **Specifiche 3 e 4:** si riferiscono al comportamento del sistema in risposta a un **gradino** $\delta_-(t)$ e rappresentano specifiche **sul transitorio**:

- 3) Overshoot: $M_p \leq M_p^*$
- 4) Tempo di salita $T_r \leq T_r^*$ oppure tempo di assestamento $T_s \leq T_s^*$

Tecnica di Progetto

Si progetta $C(s)$ in modo da **allocare i poli** del sistema a catena chiusa $W(s)$, cioè le radici dell'equazione:

$$1 + L(s) = 0$$

nel piano complesso s , sulla base dei vincoli imposti dalle specifiche di controllo.

- (**x rosse**): sono i **poli desiderati** del sistema $W(s)$, posizionati per soddisfare i vincoli su overshoot, tempo di salita, tempo di assestamento durante il transitorio della risposta $y(t)$.
- (**x blu**): rappresentano i poli nell'origine, necessari per soddisfare le specifiche di regime permanente. Servono ad assicurare il tipo del sistema (e quindi il comportamento dell'errore a regime). L'esistenza di poli in zero in $L(s)$ influenza positivamente il raggiungimento di errori statici nulli o accettabili.
- Si tiene conto anche della posizione degli **zeri** (simbolo \circ) della funzione $W(s)$, perché influenzano la forma della risposta anche se non determinano la stabilità.

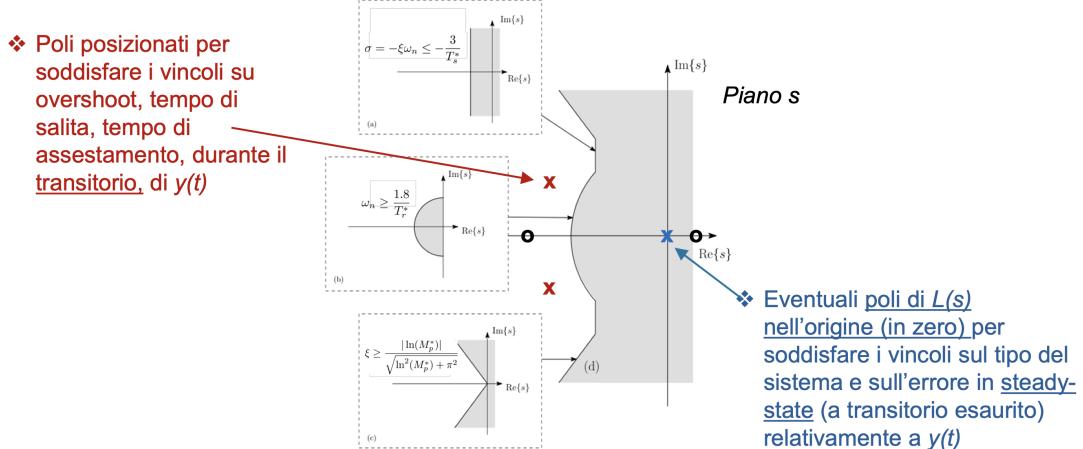
Osservazione importante

Se desidero ottenere un errore a regime **inferiore all'11%**, posso scegliere di rilassare la specifica classica del 5% o 10%. In tal caso, posso fissare il parametro di smorzamento:

$$\epsilon = 0.707$$

valore per cui:

- l'overshoot è circa 4.3%,
- non è necessario ricordare formule complesse, poiché si lavora con valori noti e già mostrati nel problema trattato in questo capitolo.

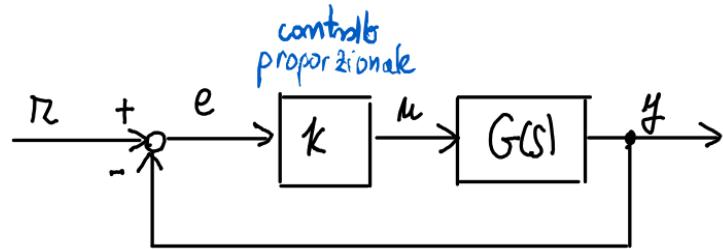


Capitolo 17

Luogo delle Radici

Consideriamo una **catena di trasferimento** relativa a un **sistema lineare SISO** (Single Input Single Output). L'analisi è condotta nel dominio di Laplace, poiché compare la variabile complessa s .

Sia $G(s)$ una funzione di trasferimento (fdt) razionale e propria, e sia $k \in \mathbb{R}$ un guadagno scalare reale.



Poniamo:

$$U(s) = kE(s)$$

che rappresenta un esempio di **controllo proporzionale**, in cui l'uscita del controllore è semplicemente una moltiplicazione del segnale di errore $E(s)$ per un guadagno k .

La funzione di trasferimento a catena chiusa risulta quindi:

$$W(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)}$$

- La **stabilità** di $W(s)$ varia al variare del parametro k . Questo perché i poli della funzione di trasferimento a catena chiusa (le radici del denominatore $1 + kG(s)$) dipendono da k .
- Le **prestazioni** di $W(s)$, in termini di tempo di salita, tempo di assestamento, massima sovraeleggazione, ecc., dipendono dalla **posizione dei poli** di $W(s)$. Poiché tali poli variano con k , anche le prestazioni del sistema ne risultano influenzate.

L'insieme dei luoghi assunti dai poli di $W(s)$ al variare di k costituisce il **Luogo delle Radici** (*Root Locus*), che è uno strumento grafico fondamentale per l'analisi della stabilità e delle prestazioni di sistemi di controllo.

17.0.1 Esempio

Sia:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Studiare la **stabilità** di:

$$W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)} \quad \text{al variare di } k \geq 0$$

Sostituendo $G(s)$, otteniamo:

$$W(s) = \frac{k}{s(s+1)+k} = \frac{k}{s^2+s+k}$$

Calcolo delle radici

Poniamo:

$$p_k(s) = s^2 + s + k$$

che è il cosiddetto **polinomio caratteristico** del sistema in retroazione.

Le radici del polinomio caratteristico (ovvero i **poli della funzione di trasferimento a catena chiusa**) sono:

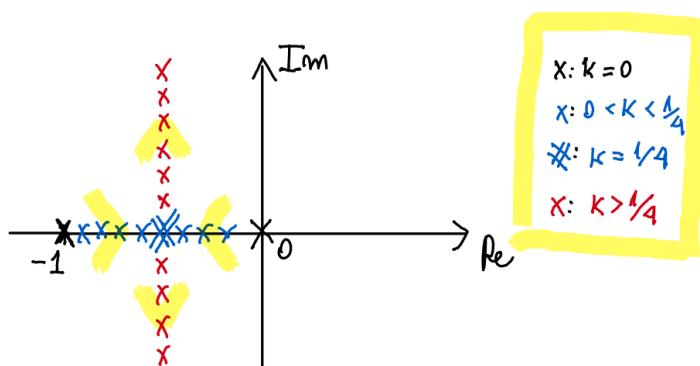
$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4k}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4k}}{2}$$

Analizziamo i casi:

- Se $k = 0$, allora $p_{1,2} = 0, -1$: radici reali e distinte, entrambe non positive.
- Se $0 < k < \frac{1}{4}$, allora $1 - 4k > 0$: le radici sono **reali e distinte**, e il sistema è stabile (poli a parte reale negativa).
- Se $k = \frac{1}{4}$, allora $1 - 4k = 0$: le radici sono **reali e coincidenti** (doppio polo reale), e ugualmente con parte reale negativa.
- Se $k > \frac{1}{4}$, allora $1 - 4k < 0$: le radici sono **coniugate complesse** con parte reale:

$$\Re[p_{1,\alpha}] = -\frac{1}{2} < 0$$

Anche in questo caso, il sistema è stabile.



Rappresentazione sul piano complesso (piano s)

Vogliamo rappresentare graficamente le radici del polinomio caratteristico $p_k(s)$, ovvero i **poli della funzione $W(s)$** al variare del parametro $k \geq 0$. Questo procedimento prende il nome di **Luogo delle Radici (Root Locus)**.

- Le **radici del numeratore** di $W(s)$, chiamate anche **zeri**, vengono indicate con dei **cerchietti** nel piano s .
- I **poli** (cioè le radici del denominatore), vengono indicati con delle **crocette**.

Il **Luogo delle Radici positivo** (cioè per $k > 0$) è la rappresentazione grafica della posizione dei poli di $W(s)$ nel piano complesso al variare del parametro k .

Disegnare il luogo delle radici *per via analitica* può risultare un procedimento laborioso, soprattutto per sistemi di ordine superiore. Tuttavia, in questo caso semplice, le traiettorie sono ricavabili direttamente dalla formula delle radici del polinomio quadratico.

17.1 Osservazioni sul Luogo delle Radici (LDR)

Nel seguito considereremo solo valori di k **positivi**, ovvero $k \geq 0$.

Ipotesi

- 0) $k \geq 0$, e si consideri la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{con} \quad \deg\{N(s)\} = m \leq \deg\{D(s)\} = n$$

- 1) $N(s)$ e $D(s)$ siano **coprimi**, cioè non abbiano fattori in comune:

$$\text{MCD}\{N(s), D(s)\} = 1$$

- 2) $N(s)$ e $D(s)$ siano **monici**, ovvero con coefficienti direttori unitari.

Nota: se le ipotesi (1) o (2) non sono verificate, si può sempre scrivere:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\alpha_m N_1(s)}{\beta_n D_1(s)} = k_1 \cdot \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

dove:

$$k_1 = \frac{\alpha_m}{\beta_n} \quad \text{e} \quad N_1(s), D_1(s) \text{ sono monici}$$

In tal caso, possiamo **incorporare** il fattore costante k_1 nel guadagno k , ovvero porre:

$$k := k \cdot k_1$$

Obiettivo

Vogliamo studiare come variano le radici del **polinomio al denominatore** della funzione di trasferimento a catena chiusa:

$$W(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{kN(s)}{D(s) + kN(s)}$$

La stabilità e la dinamica del sistema dipendono dai poli di $W(s)$, cioè dalle radici del polinomio:

$$p_k(s) = D(s) + kN(s)$$

al variare del parametro $k \geq 0$.

Definizione del Luogo delle Radici positivo:

$$L_+ := \{s \in \mathbb{C} \text{ t.c. } p_k(s) = D(s) + kN(s) = 0, k \geq 0\}$$

Ovvero:

$$\text{LDR positivo} = \{\text{radici di } p_k(s) \text{ al variare di } k \geq 0\}$$

Caso in cui l'ipotesi (1) non è verificata

Se $N(s)$ e $D(s)$ non sono coprimi, esiste un polinomio $C(s) \neq 1$ tale che:

$$\text{MCD}\{N(s), D(s)\} = C(s)$$

Allora possiamo scrivere:

$$N(s) = N_1(s)C(s) \quad \text{e} \quad D(s) = D_1(s)C(s)$$

dove $N_1(s)$ e $D_1(s)$ sono coprimi.

Il polinomio caratteristico diventa:

$$p_k(s) = D(s) + kN(s) = [D_1(s) + kN_1(s)] \cdot C(s) = 0$$

- Il termine $D_1(s) + kN_1(s)$ fornisce un insieme di radici che **variano** al variare di k .
- Le radici del polinomio $C(s)$, invece, sono **fisse** al variare di k e appaiono sempre come radici di $p_k(s)$.

Quindi, anche in questo caso:

$$L_+ = \{\text{radici di } p_k(s) \text{ al variare di } k \geq 0\}$$

include sia le radici mobili (dipendenti da k) che quelle fisse (dovute a $C(s)$).

17.2 Altre osservazioni preliminari sul Luogo delle Radici (LDR)

- 0) Fissato un valore $k > 0$, il grado del polinomio caratteristico è:

$$\deg\{p_k(s)\} = \max(n, m) = n$$

Poiché $\deg\{D(s)\} = n$ e $\deg\{N(s)\} = m \leq n$, il grado del polinomio $p_k(s) = D(s) + kN(s)$ resta pari a n per ogni $k > 0$.

- 1) La funzione che associa a $p_k(s) = D(s) + kN(s)$ le sue n radici (contate con la loro molteplicità) è una **funzione continua**. In altre parole, a variazioni "piccole" di k corrispondono variazioni "piccole" dei coefficienti del polinomio, e quindi variazioni continue delle radici nel piano complesso.

Ciò implica che il movimento delle radici (cioè dei poli della funzione di trasferimento a catena chiusa) al variare del parametro k è un **fenomeno continuo**.

- 2) Al variare del parametro $k \in [0, +\infty]$, ciascuna radice di $p_k(s)$ descrive una **curva continua nel piano complesso \mathbb{C}** , detta **ramo del Luogo delle Radici**, che può essere parametrizzata rispetto a k .
- 3) Il Luogo delle Radici ha in totale n **rami**, uno per ciascuna delle n radici (contate con molteplicità) del polinomio $p_k(s)$.
- 4) I rami del LDR possono **intersecarsi** eventualmente per quei valori di $k \geq 0$ tali che $p_k(s)$ abbia radici **multiple** (cioè con molteplicità maggiore di 1).

Viceversa, ogni punto di **intersezione** tra due rami del Luogo delle Radici corrisponde necessariamente a una **radice multipla** del polinomio $p_k(s)$.

Nota importante sull'intersezione dei rami del LDR



NO: un ramo del Luogo delle Radici non può mai intersecare se stesso.

Supponiamo, per assurdo, che esistano $k_1 \neq k_2$ tali che uno stesso punto $s_0 \in L_+$ corrisponda sia a k_1 che a k_2 . Allora:

$$p_{k_1}(s_0) = D(s_0) + k_1 N(s_0) = 0$$

$$p_{k_2}(s_0) = D(s_0) + k_2 N(s_0) = 0$$

Sottraendo membro a membro:

$$p_{k_1}(s_0) - p_{k_2}(s_0) = (k_1 - k_2)N(s_0) = 0$$

Poiché $k_1 \neq k_2$, segue:

$$N(s_0) = 0 \Rightarrow D(s_0) = 0$$

Dunque sia $N(s_0)$ che $D(s_0)$ si annullano nello stesso punto s_0 . Questo implica che entrambi i polinomi sono divisibili per $(s - s_0)$, ovvero:

$$(s - s_0) \mid N(s) \quad \text{e} \quad (s - s_0) \mid D(s)$$

Ma questo è un **assurdo**, in quanto per ipotesi $N(s)$ e $D(s)$ sono **coprimi** (non hanno fattori in comune).



SI: due rami distinti del LDR possono intersecarsi.

In questo caso, l'intersezione corrisponde ad una radice **multipla** del polinomio $p_k(s)$ per un certo valore di k , come già discusso nelle osservazioni precedenti.

5. Il Luogo delle Radici (LDR) può essere tracciato anche **graficamente** seguendo semplici regole di costruzione, senza dover risolvere analiticamente il polinomio $p_k(s)$ per ogni valore di k .
6. Poiché:

$$p_k(s) = D(s) + kN(s)$$

allora, per $k = 0$, risulta:

$$p_k(s) = D(s)$$

cioè le radici del polinomio $p_k(s)$ coincidono con le radici di $D(s)$, ovvero con i **poli della funzione di trasferimento della catena diretta $G(s)$** .

⇒ I rami del Luogo delle Radici positivo (L_+) **originano** dai poli di $G(s)$

7. Per $k \rightarrow \infty$, si può riscrivere:

$$p_k(s) = D(s) + kN(s) = k \left(\frac{1}{k} D(s) + N(s) \right)$$

Al crescere di k , il termine $\frac{1}{k} D(s) \rightarrow 0$, quindi:

$$p_k(s) \rightarrow kN(s)$$

Le radici di $p_k(s)$ si avvicinano quindi a quelle di $N(s)$, ovvero agli **zeri della funzione $G(s)$** .

- m rami del LDR tendono agli **zeri** di $N(s)$, cioè agli **zeri della funzione $G(s)$** .
- Gli altri $n - m$ rami **tendono all'infinito**.

Osservazione: Poiché la funzione $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ ha **grado relativo** $n - m$, possiamo interpretare questa differenza come se $G(s)$ avesse uno **zero all'infinito** di molteplicità $n - m$.

⇒ Con questa interpretazione, tutti i n rami del LDR positivo (L_+)

tendono, per $k \rightarrow +\infty$, agli zeri (finiti o all'infinito) della funzione $G(s)$

Ovvero:

Il comportamento asintotico del LDR riflette completamente la distribuzione degli zeri della catena diretta $G(s)$

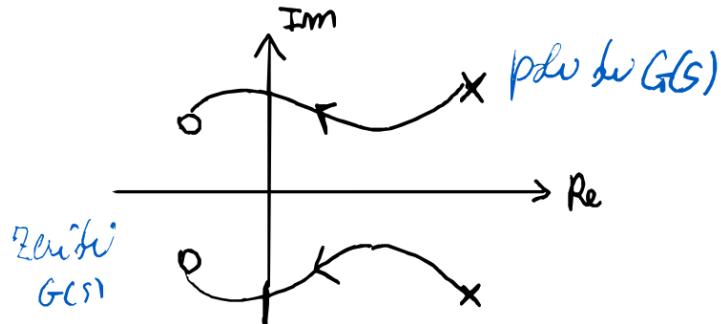
8. Il polinomio $p_k(s)$ ha **coefficienti reali** per ogni $k \geq 0$:

$$p_k(s) = D(s) + kN(s) \quad \text{con} \quad D(s), N(s) \in \mathbb{R}[s]$$

⇒ Gli zeri di $p_k(s)$ (cioè le radici del polinomio) sono distribuiti in

coppie di complessi coniugati, quando complessi.

⇒ Di conseguenza, i rami del Luogo delle Radici (LDR) sono **simmetrici rispetto all'asse reale** nel piano complesso.



Questo significa che se un punto $s = \sigma + j\omega$ appartiene a un ramo del LDR, allora anche il punto $\bar{s} = \sigma - j\omega$ ne farà parte.

17.3 Regole per il tracciamento del Luogo delle Radici (LDR)

- 0) Si suppone che $G(s)$ sia posta nella **forma di Evans**, ovvero:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

dove z_i sono gli zeri (finiscono al numeratore) e p_i i poli (al denominatore) della funzione di trasferimento.

- 1) Il luogo L_+ è composto da n **rami**, ciascuno rappresentato da una curva continua e orientata nel piano complesso \mathbb{C} . Per ogni $k \geq 0$, il polinomio $p_k(s)$ ha esattamente n radici (contate con molteplicità).
- 2) Tutti i rami **originano** dai poli p_i . Da ciascun polo p_i originano tanti rami quanta è la sua **molteplicità** come polo della funzione $G(s)$.
- 3) m dei n rami tendono, per $k \rightarrow +\infty$, agli zeri z_i . Il numero di rami che tendono a ciascun zero z_i è pari alla sua molteplicità come zero della funzione $G(s)$. I rimanenti $n - m$ rami **tendono all'infinito**.
- 4) Il luogo L_+ è **simmetrico rispetto all'asse reale** del piano complesso.
- 5) Fanno parte del luogo L_+ tutti i punti **dell'asse reale** che lasciano alla loro **destra** un numero complessivamente **dispari** di poli p_i e zeri z_i . Inoltre, anche i poli reali p_i appartengono a L_+ .
- 6) Se $n - m$ è **dispari**, allora **uno dei rami che tende all'infinito** vi tende lungo il **semiasse reale negativo**.

Notazione grafica:

- \times : rappresenta un polo semplice p_i

- \circ : rappresenta uno zero semplice z_i
- $\#$: rappresenta un polo multiplo
- $@$: rappresenta uno zero multiplo

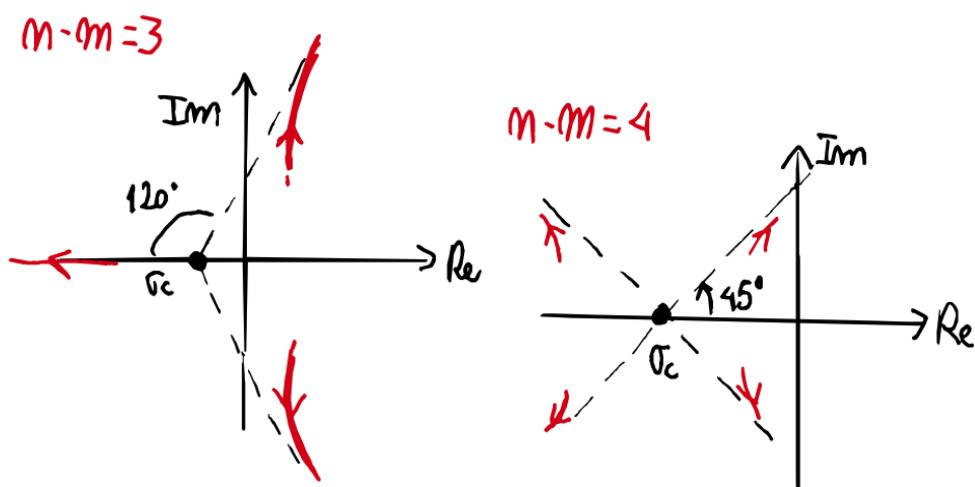
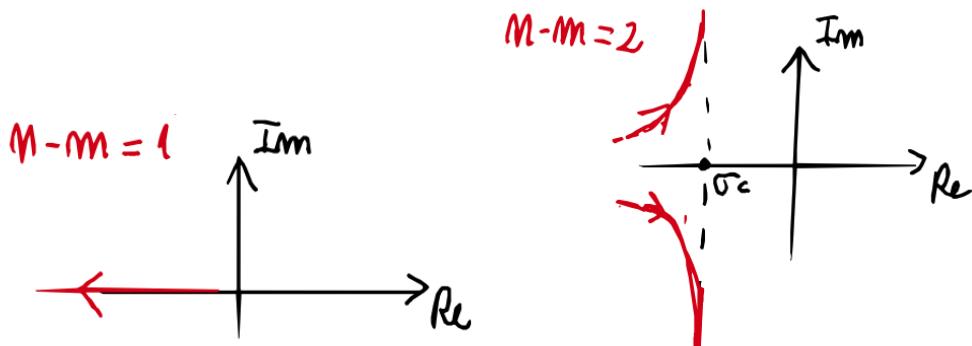
7) Gli $n - m$ rami che tendono a ∞ lo fanno seguendo $n - m$ **asintoti**, che sono semirette orientate nel piano complesso.

Tali asintoti:

- **originano tutti** dallo stesso punto:

$$\sigma_c := \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \in \mathbb{R}$$

- **dividono l'angolo giro** in $n - m$ settori equiangolari.
- Se $n - m$ è **dispari**, allora **uno degli asintoti coincide con il semiasse reale negativo**.
- Se $n - m$ è **pari**, allora il **semiasse reale negativo** è la **bisettrice** di uno dei settori delimitati dagli asintoti.



17.3.1 Esempi in base al grado relativo ($n - m$)

Grado relativo: è definito come la differenza tra il grado del polinomio al denominatore e il grado del polinomio al numeratore della funzione di trasferimento:

$$n - m = \deg\{D(s)\} - \deg\{N(s)\}$$

Di seguito, esempi di Luoghi delle Radici in base al valore del grado relativo:

8. È possibile utilizzare il **criterio di Routh** per determinare i valori del parametro k per cui il Luogo delle Radici attraversa l'**asse immaginario** \Im .

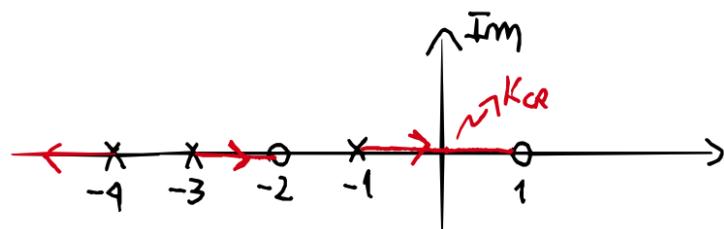
Questo consente di stabilire per quali valori critici di k il sistema passa da una configurazione stabile a instabile (o viceversa), identificando il **margine di stabilità**.

Esempio

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Da cui:

$$n = 3, \quad m = 2, \quad n - m = 3 - 2 = 1 \quad (\text{dispari})$$



Importante:

In questo caso, il **polo dominante** è reale (posto a $s = -1$).

Si sceglie un valore di k **minore di 6 e maggiore di 0**, per evitare sia l'instabilità (oltre 6), sia la mancanza di controllo (con $k = 0$).

La funzione di trasferimento a catena chiusa è:

$$W(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)}$$

Questa è **BIBO stabile** (Bounded-Input Bounded-Output) per:

$$0 \leq k \leq k_{CR}$$

Determinazione di k_{CR}

Calcoliamo:

$$p_k(s) = D(s) + kN(s) = s^3 + (8+k)s^2 + (19+k)s + 12 - 2k$$

Costruiamo la **tavola di Routh-Hurwitz**:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 19+k \\ s^2 & 8+k & 12-2k \\ s^1 & \alpha & 0 \\ s^0 & 12-2k \end{array}$$

Descrizione:

- Riga s^3 : si riportano i coefficienti dei termini dispari (grado 3 e 1).
- Riga s^2 : si riportano i coefficienti dei termini pari (grado 2 e 0).
- Riga s^1 : si calcola il termine α .
- Riga s^0 : è la propagazione del secondo termine della riga s^2 .

Calcoliamo:

$$\alpha = -\frac{1}{k+8} ((12-2k) - (8+k)(19+k))$$

Sviluppando:

$$\alpha = \frac{k^2 + 29k + 140}{k+8}$$

Poiché il numeratore e il denominatore sono positivi per ogni $k \geq 0$, segue:

$$\alpha > 0 \quad \forall k \geq 0$$

Condizione di stabilità:

Il polinomio $p_k(s)$ è **Hurwitziano** (cioè ha tutte le radici con parte reale negativa) se e solo se:

$$12-2k > 0 \Leftrightarrow k < k_{CR} = 6$$

Quindi, il sistema è BIBO stabile per:

$$0 \leq k < 6$$

9. Punti multipli

(cioè punti in cui convergono 2 o più rami del Luogo delle Radici L_+)

- Sono valori $\hat{s} \in \mathbb{C}$ che sono **zeri multipli** del polinomio:

$$p_k(s) = D(s) + kN(s)$$

per qualche valore $\hat{k} \geq 0$.

- Si devono trovare le **coppie** (\hat{k}, \hat{s}) , con $\hat{k} \geq 0$, tali che \hat{s} sia zero almeno doppio di $p_k(s)$.
- Ciò equivale a imporre che \hat{s} annulli sia il polinomio che la sua derivata:

$$\begin{cases} p_k(s) = D(s) + kN(s) = 0 \\ \frac{dp_k(s)}{ds} = D'(s) + kN'(s) = 0 \end{cases}$$

- Sostituendo, otteniamo:

$$\begin{cases} \hat{k} = -\frac{D(\hat{s})}{N(\hat{s})} & (1) \\ D'(\hat{s}) - \frac{D(\hat{s})}{N(\hat{s})} N'(\hat{s}) = 0 & (2) \end{cases}$$

- Le soluzioni \hat{s} della (2) sono **candidati punti multipli**. Tali \hat{s} sono effettivamente multipli se il valore di \hat{k} ricavato dalla (1) è reale e non negativo:

$$\hat{k} \in \mathbb{R}, \quad \hat{k} \geq 0$$

Osservazione: Al posto della (2), si può considerare l'equazione equivalente:

$$D(\hat{s})N'(\hat{s}) = N(\hat{s})D'(\hat{s}) \quad (*)$$

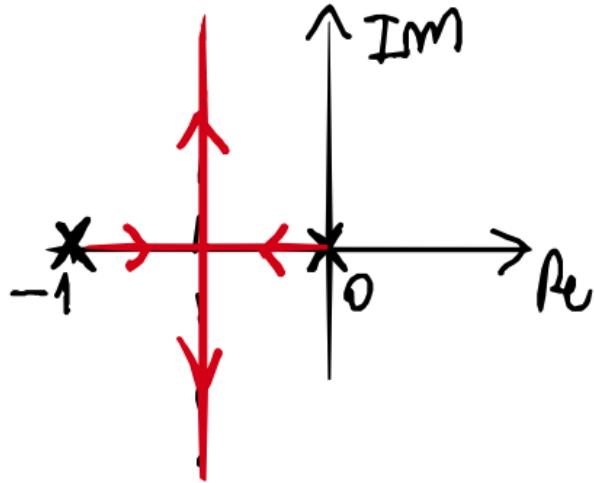
ottenuta dalla (2) moltiplicando entrambi i membri per $N(\hat{s})$.

- Le soluzioni della (*) comprendono:
 - le soluzioni effettive della (2) (corrispondenti a $\hat{k} \in \mathbb{R}_+$) → **veri punti multipli** di L_+ ,
 - e gli **zeri multipli di** $N(s)$, che soddisfano (*) ma per cui il corrispondente \hat{k} è infinito.
- Tali zeri di $N(s)$ non appartengono a L_+ , bensì alla sua **chiusura** $\overline{L_+}$.

Esempio

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$n = 2, \quad m = 0, \quad n - m = 2$$



$$N(s) = 1, \quad D(s) = s(s+1)$$

Verifichiamo la condizione dei punti multipli con:

$$D(s)N'(s) = N(s)D'(s)$$

$$s(s+1) \cdot 0 = 1 \cdot \left(\frac{d}{ds}[s(s+1)] \right) = 1 \cdot (s + (s+1)) = 2s + 1$$

$$\Rightarrow 2s + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{s} = -\frac{1}{2}$$

Ora calcoliamo il corrispondente valore di \hat{k} tramite:

$$\hat{k} = -\frac{D(\hat{s})}{N(\hat{s})} = -\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2} + 1)}{1} = \frac{1}{4}$$

Questo valore $\hat{k} = \frac{1}{4}$ è esattamente quello che faceva **annullare il denominatore** della funzione di trasferimento a catena chiusa:

$$W(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)}$$

Conclusione: abbiamo identificato un **punto doppio** nel Luogo delle Radici. In $\hat{s} = -\frac{1}{2}$, i due rami del LDR si **incontrano**, formando un'**intersezione doppia**.

(Inserire grafico del luogo delle radici)

17.3.2 Riassunto sugli zeri almeno doppi di $p_k(s)$

Un punto $s \in \mathbb{C}$ è **zero almeno doppio** del polinomio $p_k(s)$ se e solo se:

$$\begin{cases} p_k(s) = 0 \\ \frac{dp_k(s)}{ds} = 0 \end{cases}$$

Strategia per l'individuazione dei punti multipli:

1. **Candidati punti multipli:** risolvere l'equazione:

$$D(s)N'(s) = N(s)D'(s)$$

2. **Verifica del parametro k :**

$$k(s) = \frac{-D(s)}{N(s)} \geq 0$$

Questo garantisce che la coppia (k, s) corrisponda effettivamente a un punto del Luogo delle Radici positivo L_+ .

3. Tra le soluzioni dell'equazione $D(s)N'(s) = N(s)D'(s)$, troviamo:

- **Punti multipli al finito:** cioè quelli per cui $0 < k < +\infty$, che appartengono a L_+ ;
- **Punti multipli per $k = 0$:** corrispondenti a **zeri multipli di $D(s)$** , ovvero ai **poli multipli della funzione $G(s)$** ;
- **Punti multipli asintotici per $k = +\infty$:** corrispondenti a **zeri multipli di $N(s)$** , ovvero agli **zeri multipli della funzione $G(s)$** .

Esempio

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+1)^3}{(s-1)^4}$$

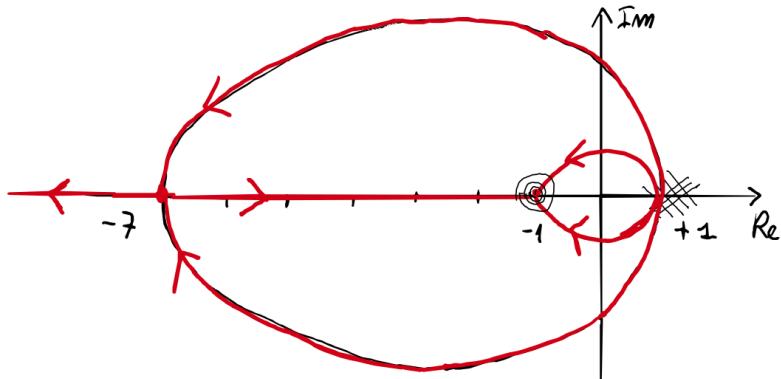
$$n - m = 4 - 3 = 1 \quad (\text{dispari})$$

Poiché compaiono potenze elevate, sappiamo già che:

- $s = 1$ è un **polo multiplo** (di molteplicità 4),

- $s = -1$ è uno **zero multiplo** (di molteplicità 3).

Il problema diventa ora quello di individuare eventuali altri **punti multipli** del luogo delle radici.



Ricerca dei candidati punti multipli

Condizione:

$$D(s)N'(s) = N(s)D'(s)$$

Calcoliamo entrambi i membri:

$$(s-1)^4 \cdot 3(s+1)^2 = (s+1)^3 \cdot 4(s-1)^3$$

Semplificando:

$$(s-1)^3(s+1)^2[3s-3-4s-4] = 0$$

$$(s-1)^3(s+1)^2(s+7) = 0$$

Le soluzioni sono:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = -7$$

Nota: Consideriamo solo i punti diversi dagli zeri multipli di $N(s)$ e $D(s)$, poiché questi corrispondono a $k = 0$ o $k = \infty$, e dunque appartengono alla chiusura $\overline{L_+}$, non a L_+ stesso.

Calcolo dei corrispondenti valori di k

- $s_1 = 1 \rightarrow$

$$k_1 = -\frac{D(1)}{N(1)} = 0$$

- $s_2 = -1 \rightarrow$

$$k_2 = -\frac{D(-1)}{N(-1)} = \infty$$

- $s_3 = -7 \rightarrow$

$$k_3 = -\frac{D(-7)}{N(-7)} \approx 19$$

Interpretazione grafica (da allegare)

(Inserire grafico del luogo delle radici)

- Dal polo multiplo in $s = 1$ escono 4 rami:
 - Due rami vanno direttamente agli zeri $s = -1$ (per simmetria rispetto all'asse reale),
 - Altri due rami vanno a incontrarsi nel punto $s = -7$, il candidato punto multiplo che abbiamo trovato.
- Nel punto $s = -1$ arrivano **tre rami**:
 - Due provenienti da $s = 1$,
 - Uno proveniente da $s = -7$.

Conclusione: i rami del Luogo delle Radici si intersecano nei punti:

$$s = -7 \quad \text{e} \quad s \approx -1 \quad (\text{chiusura del luogo, non interno})$$

con il valore critico $k \approx 19$ per l'intersezione interna.

Capitolo 18

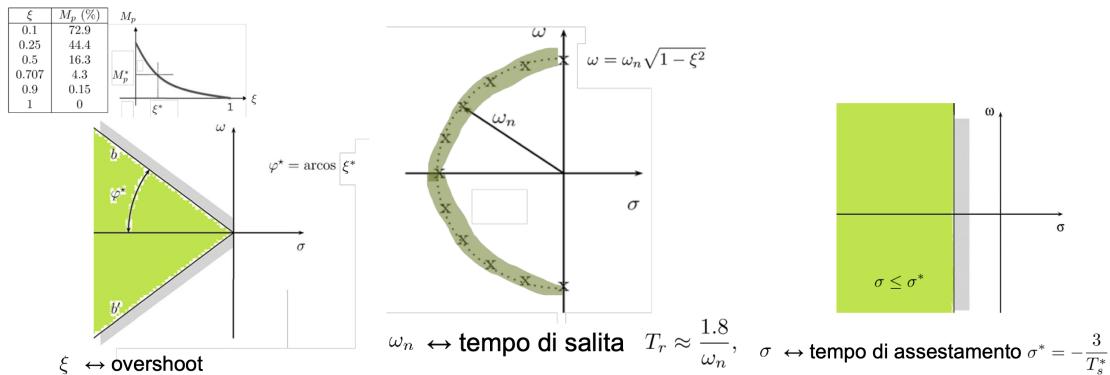
Uso del Luogo delle Radici nella Sintesi del Controllore

Uso del LDR per il Progetto del Sistema di Controllo

- Il Luogo delle Radici (LDR) può essere impiegato per il progetto del controllore.
- Il metodo è utile per trattare problemi dove gli obiettivi del controllo sono direttamente esprimibili in termini di posizione nel piano complesso dei poli in anello chiuso.
- Ad esempio, quando l'unico requisito riguarda la stabilità del sistema o quando si vogliono prescrivere le caratteristiche dei poli dominanti.

Esempi di vincoli di progetto sulla posizione dei poli (coppia dominante) in anello chiuso (retroazione):

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -\epsilon\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\epsilon^2} = -\omega_n \cos \phi \pm j\omega_n \sin \phi$$



- La formula sopra esprime la posizione di una coppia di poli complessi coniugati in funzione di parametri tipici del secondo ordine:

- ϵ è il coefficiente di smorzamento (damping ratio),
- ω_n è la pulsazione naturale (natural frequency),
- ϕ è l'angolo che la coppia di poli forma con l'asse reale negativo nel piano complesso.

- Questa relazione è utile perché i poli complessi coniugati determinano la risposta dinamica del sistema (ad esempio, overshoot e tempo di assestamento).

Valori spesso utilizzati di riferimento:

$$\epsilon = 0.707$$

- Questo valore corrisponde a un sistema criticamente smorzato, in cui si ha un buon compromesso tra rapidità e sovraelongazione.

Relazioni pratiche per l'analisi e il progetto:

- **Overshoot:** dipende direttamente da ϵ .
- **Tempo di salita (T_r):** è approssimativamente legato a ω_n da

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

- **Tempo di assestamento (T_s):** legato alla parte reale dei poli (σ) da

$$\sigma = -\frac{3}{T_s}$$

oppure, scrivendo σ^* come stima della parte reale dominante,

$$\sigma^* = -\frac{3}{T_s^*}$$

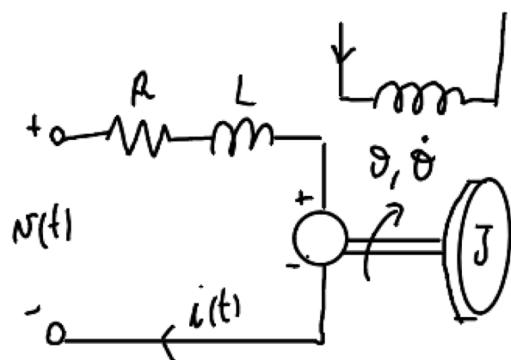
Nota: se invece che muovermi tramite semirette (linee a inclinazione costante, cioè a ϕ costante) mi muovo tramite circonferenze (a ω_n costante), allora:

- In prima approssimazione so che il tempo di salita (10% - 90% della risposta) è determinato da:

$$\omega_n$$

18.0.1 Esempio: Controllo della Posizione di un Motore Elettrico (SISO)

Sistema composto da: mix tra meccanica e motore elettrico



Dati del sistema

- Resistenza: $R = 0.3 \Omega$
- Induttanza: $L = 0.025 \text{ H}$
- Momento d'inerzia: $J = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Costante di coppia: $h = 0.9994 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$
- Attrito viscoso: $q_r = 0.002 \frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$

Specifiche di Controllo

Le seguenti specifiche rappresentano i requisiti desiderati imposti al sistema da progetto. Esse costituiscono la parte "ideale" o "di controllo" che si aggiunge al modello fisico del sistema.

1. $e_\infty = 0$, per $r(t) = \delta_{-1}(t)$

- Questo significa che, in risposta a un riferimento di tipo gradino (step negativo), l'errore a regime deve essere nullo.
- *Interpretazione:* se do un riferimento di posizione, voglio che il motore raggiunga esattamente quella posizione senza errore permanente.

2. $M_p \leq 5\%$

- Il massimo overshoot della risposta (cioè quanto la risposta supera temporaneamente il valore finale) deve essere inferiore o uguale al 5%.
- *Interpretazione:* non voglio un eccessivo "nervosismo" o sovraelongazione, per evitare instabilità o comportamenti troppo oscillatori.

3. $T_s \leq 6 \text{ s}$

- Il tempo di assestamento (tempo necessario affinché la risposta rimanga entro un certo margine attorno al valore finale, ad esempio $\pm 2\%$) deve essere al massimo 6 secondi.
- *Interpretazione:* il sistema deve raggiungere il comportamento desiderato in un tempo finito e contenuto.

18.0.2 Soluzione

Rappresentazione dello stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ \theta'(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

Equazioni dello stato e di uscita:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Dove:

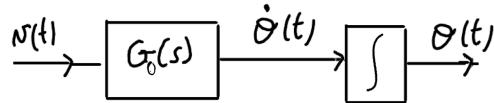
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{h}{L} & 0 \\ \frac{h}{J} & -\frac{q_r}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Funzione di trasferimento

$$G_0(s) := \frac{s\theta(s)}{V(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s}G_0(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)}$$

«la posizione è l'integrale della velocità»



Questo passaggio si basa sul fatto che:

- La posizione $\theta(t)$ è l'integrale della velocità angolare $\theta'(t)$;
- Di conseguenza, moltiplicare per s nel dominio di Laplace equivale a derivare, mentre dividere per s equivale a integrare.

Struttura a blocchi concettuale del sistema

- **Input:** $v(t)$ (tensione applicata)
- **Elaborazione 1:** tramite $G_0(s)$ si ottiene $\theta'(t)$ (velocità angolare)
- **Elaborazione 2:** tramite un integratore (divisione per s) si ottiene $\theta(t)$ (posizione)

Perché questa struttura?

Perché risulta più utile rappresentare il sistema separando la generazione della velocità angolare da quella della posizione. In questo modo, posso considerare un sottosistema (fino a $\theta'(t)$) e, separatamente, descrivere l'ulteriore elaborazione necessaria per ottenere $\theta(t)$.

Mi ricordo che:

- La posizione è l'integrale della velocità,
- oppure, equivalentemente, la velocità è la derivata della posizione,
- oppure ancora, la velocità è l'integrale dell'accelerazione.

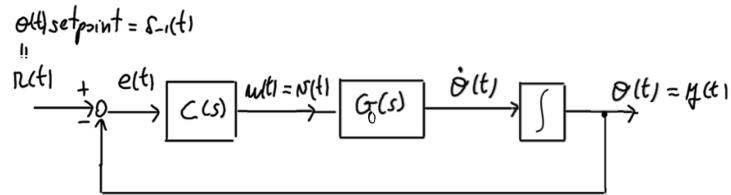
Quindi posso dire: considero un sottosistema fino alla velocità, e poi descrivo a parte il sistema che mi restituisce la posizione.

Sistema Complessivo

Condizione di riferimento e uscita:

$$r(t) = \theta(t)_{\text{setpoint}} = \delta_{-1}(t), \quad y(t) = \theta(t)$$

Poiché vogliamo che l'uscita segua il riferimento, si implementa un controllo in **feedback**, ovvero si chiude una retroazione.



Funzione di trasferimento in retroazione

$$W(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = C(s) \cdot \frac{1}{s} G_0(s)$$

La funzione di trasferimento in anello aperto $G_0(s)$ viene ottenuta come:

$$G_0(s) = \frac{s\theta(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

Calcolo di $(sI - A)$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s - \frac{R}{L} & \frac{h}{L} \\ -\frac{h}{J} & s + \frac{q_r}{J} \end{bmatrix}$$

L'inversa si calcola tramite la formula della matrice inversa 2×2 :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s + \frac{q_r}{J} & -\frac{h}{L} \\ \frac{h}{J} & s - \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \left(s - \frac{R}{L} \right) \left(s + \frac{q_r}{J} \right) + \frac{h^2}{JL}$$

Passaggi per ottenere $G_0(s)$

- $(sI - A)^{-1}$ è la matrice calcolata sopra (denotata con *)
- $(sI - A)^{-1}B$ si ottiene moltiplicando la **prima colonna** di * per $\frac{1}{L}$ (denotata con **)
- Infine, $C(sI - A)^{-1}B$ si ottiene prendendo la **seconda riga** di **

Risultato finale

$$G_0(s) = \frac{h}{\Delta} = \frac{\frac{h}{JL}}{s^2 + \left(\frac{q_r}{J} - \frac{R}{L}\right)s + \frac{h^2}{JL} - \frac{Rq_r}{LJ}} = \frac{20}{s^2 + 125 + 20} = \frac{20}{(s+2)(s+10)}$$

La funzione di trasferimento completa dell'anello aperto (considerando anche l'integratore per la posizione):

$$L(s) = C(s) \cdot \frac{1}{s} \cdot G_0(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s} G_0(s)$$

Dove:

- $\frac{1}{s}$ rappresenta l'operazione di integrazione (per passare da velocità θ' a posizione θ);
- $C(s)$ è il controllore da progettare;
- $G_0(s)$ rappresenta la parte dinamica del motore che restituisce la velocità.

Analisi del Sistema a Catena Chiusa

Osservo che $L(s)$ include un polo nell'origine, quindi il sistema a catena chiusa $W(s)$ è di tipo 1. Questo assicura errore nullo a riferimento costante, cioè:

\Rightarrow soddisfo la specifica sull'errore a regime permanente.

Conclusione: sarà quindi sufficiente utilizzare un controllore di tipo proporzionale.

Funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{20}{(s+2)(s+10)}$$

Definisco $G_1(s)$ come $G(s)$ ma senza il coefficiente 20:

$$G_1(s) := \frac{1}{(s+2)(s+10)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^3 + 12s^2 + 20s}$$

Nota: sia $N(s)$ che $D(s)$ sono polinomi monici.

Problema e soluzione

- **Problema:** ora $G_1(s)$ non è più $G(s)$.
- **Soluzione:** moltiplico $G_1(s)$ per il coefficiente 20 che avevo tolto prima.

$$k_1 := 20k$$

Funzione di trasferimento in retroazione

$$W_1(s) = \frac{k_1 G_1(s)}{1 + k_1 G_1(s)} = \frac{k_1 N(s)}{D(s) + k_1 N(s)}$$

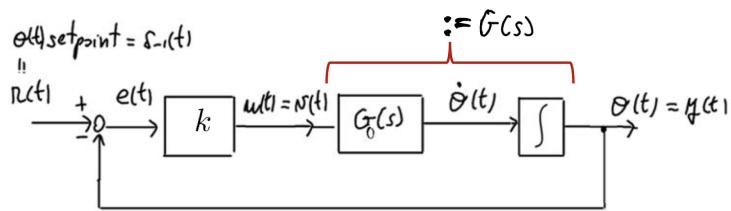
In questo caso, il Luogo delle Radici si definisce come:

$$\text{LDR}_+ = \{s \in \mathbb{C} : p_{k_1}(s) = D(s) + k_1 N(s) = s^3 + 12s^2 + 20s + k_1 = 0\}$$

Con:

$$k_1 = 1 \quad (\text{e in generale } k_1 \geq 0)$$

Analisi del Luogo delle Radici — Esame dei polinomi



- Grado del denominatore: $n = 3$
- Grado del numeratore: $m = 0$
- Differenza: $n - m = 3$

Questo significa che ci sono 3 rami del luogo delle radici che tendono all'infinito. Essendo il numero dispari, almeno uno di questi rami uscirà lungo il semiasse reale negativo.

Zeri e poli del sistema

$$z_i = \{\} \quad (\text{nessuno zero})$$

$$p_i = \{0, -2, -10\}$$

Il **centro della stella** (cioè il centro di simmetria degli asintoti) si calcola come:

$$\sigma_c = \frac{0 - 2 - 10}{3} = -4$$

L'angolo tra i rami asintotici è:

$$\frac{360^\circ}{n - m} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

Tratti del luogo delle radici

- Appena si raggiunge uno zero da destra (se presente), si lascia una crocetta (in questo caso non ci sono zeri, quindi il luogo si estende verso l'infinito).
- L'intervallo da -2 a -10 **non** appartiene al luogo delle radici (non cambia segno della funzione caratteristica).

- I tratti del luogo che appartengono all'asse reale sono:

$$(-\infty, -10) \text{ e } (-2, 0)$$

Calcolo del centro della stella (richiamo)

$$\sigma_c = \frac{0 - 2 - 10}{3} = -4$$

Punti doppi (Self-Intersection / Cuspidi)

Per trovare eventuali punti doppi sul luogo delle radici, si impone la condizione:

$$D(s)N'(s) = N(s)D'(s)$$

Nel nostro caso:

$$D(s) = s^3 + 12s^2 + 20s, \quad N(s) = 1$$

$$D(s) \cdot 0 = 0 = 1 \cdot (3s^2 + 24s + 20)$$

Risolviamo:

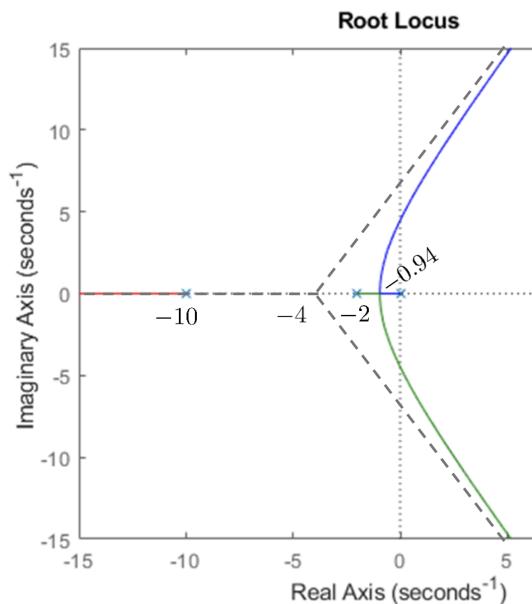
$$3s^2 + 24s + 20 = 0 \Rightarrow s_{1,2} \approx \{-7, -0.94\}$$

- $s = -7$ è da escludere perché si trova fuori dal luogo delle radici.

- $s = -0.94$ è un **punto doppio candidato**.

Verifica del valore di k_1^* corrispondente:

$$k_1^* = -\frac{D(s = -0.94)}{N(s = -0.94)} \approx 9.03 > 0 \Rightarrow \text{OK, punto doppio!}$$



Verifica della Stabilità tramite Tabella di Routh — Polinomio caratteristico

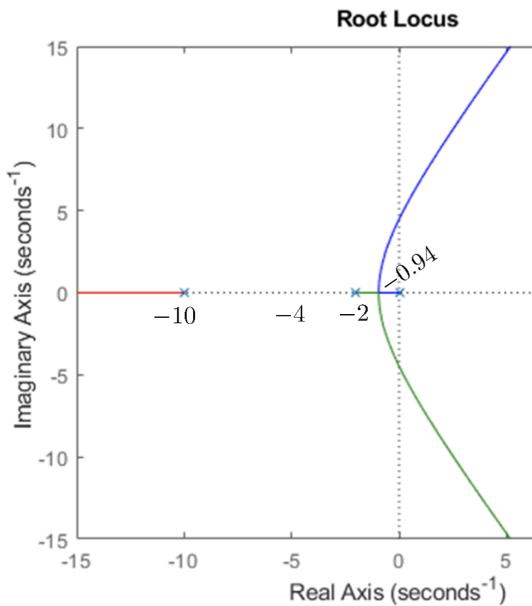
$$p_{k_1}(s) = s^3 + 12s^2 + 20s + k_1 = 0$$

Tabella di Routh

| | | |
|-------|------------------------|-------|
| s^3 | 1 | 20 |
| s^2 | 12 | k_1 |
| s^1 | $\frac{240 - k_1}{12}$ | 0 |
| s^0 | k_1 | |

Per la stabilità del sistema, tutti i coefficienti della prima colonna devono essere positivi. Da ciò otteniamo la condizione:

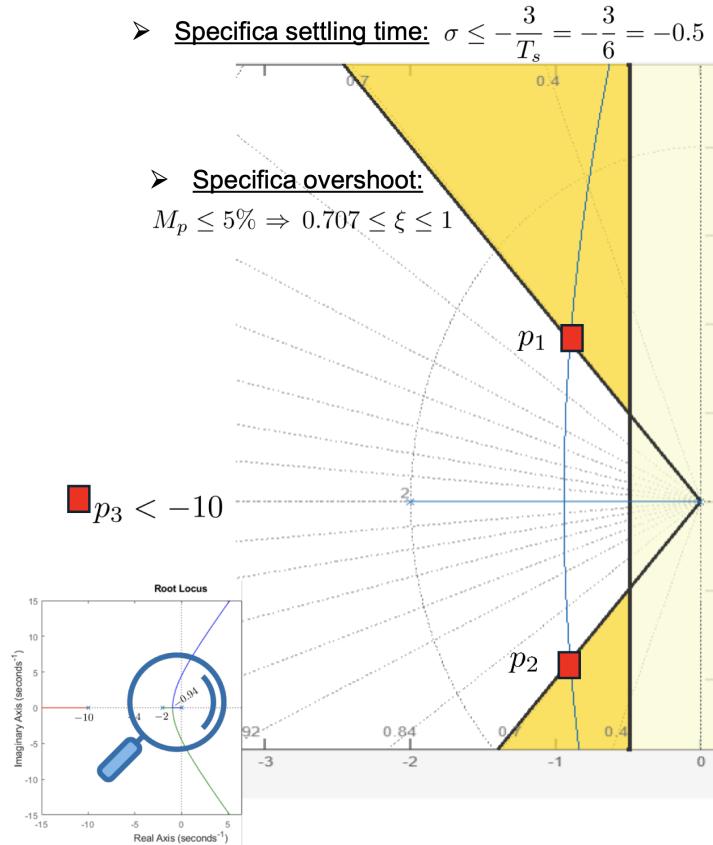
$$\frac{240 - k_1}{12} > 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 < 240$$

**Conclusione**

\Rightarrow Il sistema a catena chiusa è stabile se $0 < k_1 < 240$

Ricordando che $k_1 = 20k$, allora $0 < k = \frac{k_1}{20} < 12$

18.1 Analisi Raffinata del Luogo delle Radici



Vincoli aggiuntivi

- Impongo che i poli dominanti siano a sinistra della retta verticale $s = -\frac{1}{2}$.
- Voglio che siano dentro un settore angolare corrispondente a $\epsilon = 0.707$ (tipico per $M_p \leq 5\%$).
- Se trovo i poli dominanti all'intersezione di questi due vincoli (sul grafico: *quadrati rossi*), ho soddisfatto tutte le specifiche.

Costruzione desiderata dei poli

$$p_{k_1}(s) = s^3 + 12s^2 + 20s + k_1 = 0$$

- Voglio $p_3 \leq -10$ (polo non dominante sufficientemente lontano).
- Poli dominanti complessi coniugati:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -\omega_n \cos \phi \pm j\omega_n \sin \phi$$

- Vincolo su sovraelongazione:

$$M_p \leq 5\% \Rightarrow 0.707 \leq \epsilon \leq 1$$

- Assumo $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (valore standard per 5% di overshoot):

$$\cos \phi = \epsilon, \quad \sin \phi = \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

- Da ciò:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \pm j \frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad (s - p_1)(s - p_2) = s^2 + \sqrt{2}\omega_n s + \omega_n^2$$

Inserendo anche il terzo polo reale p_3 :

$$p_{k_1}(s) = (s^2 + \sqrt{2}\omega_n s + \omega_n^2)(s - p_3)$$

Espandendo:

$$p_{k_1}(s) = s^3 + (\sqrt{2}\omega_n - p_3)s^2 + (\omega_n^2 - \sqrt{2}\omega_n p_3)s - \omega_n^2 p_3$$

Sistema di equazioni da confrontare con il polinomio originale

$$\begin{cases} \sqrt{2}\omega_n - p_3 = 12 \\ \omega_n^2 - \sqrt{2}\omega_n p_3 = 20 \\ k_1 = -\omega_n^2 p_3 \end{cases}$$

Soluzioni numeriche

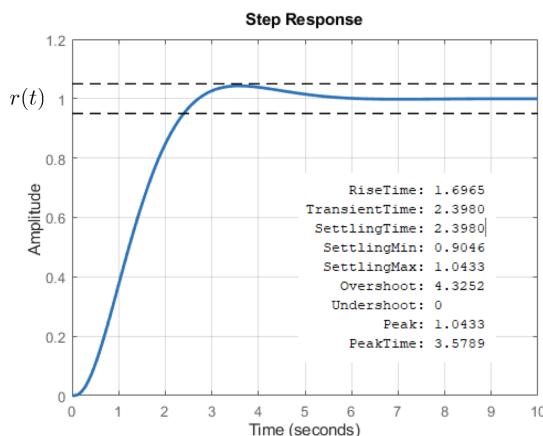
$$\omega_n \approx 1.2743, \quad p_3 \approx -10.198, \quad k_1 \approx 16.56$$

Quindi i poli del sistema sono:

$$p_1 = -0.9 + j 0.9, \quad p_2 = -0.9 - j 0.9, \quad p_3 = -10.198$$

E il valore di guadagno associato è:

$$k_1 = 16.56 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{k_1}{20} \approx 0.83$$



Cheat per evitare i conti

Osservo che esiste un **polo doppio sull'asse reale** che:

- soddisfa tutte le specifiche di progetto;
- si trova nella zona "bianca" di interesse (area ammissibile nel piano complesso);
- è stato già individuato durante il tracciamento del Luogo delle Radici.

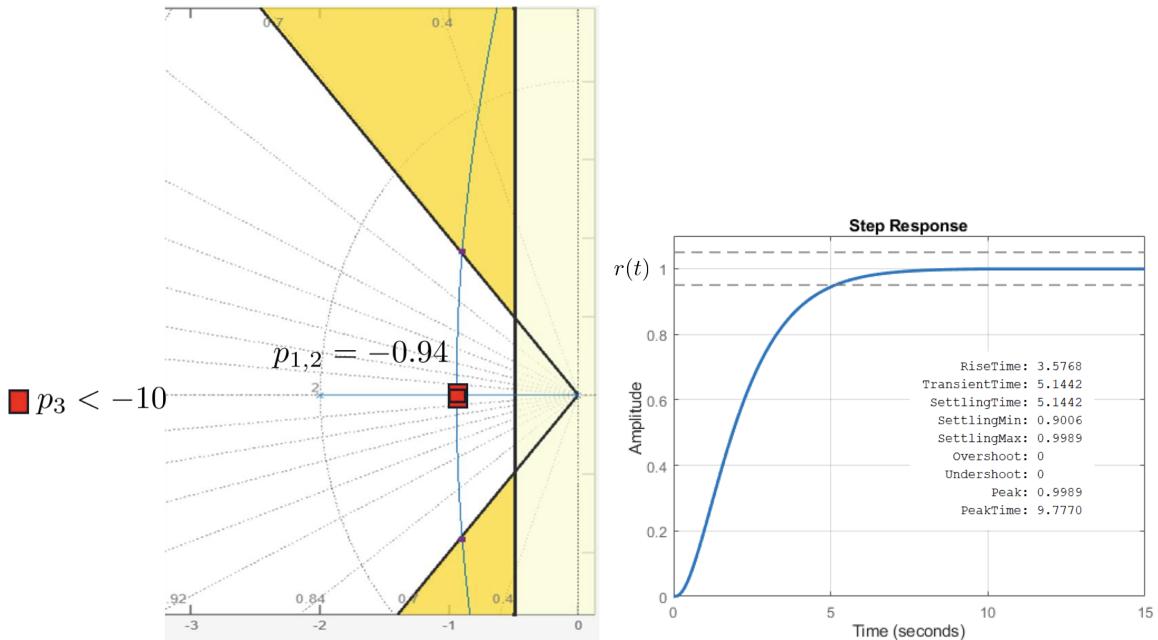
Nota da esame: le specifiche non sono espresse come uguaglianze, ma come disuaglianze (\leq). Questo significa che c'è **libertà** nella scelta dei poli, purché restino dentro i vincoli.

Validità della scelta

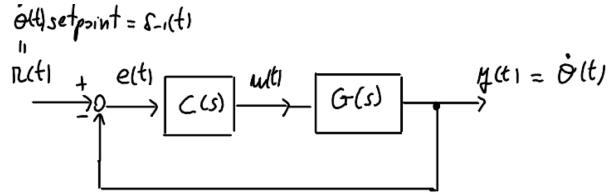
- L'overshoot associato al polo doppio è inferiore al 5%.
- In particolare: **overshoot = 4.3%**, quindi rientra pienamente nelle specifiche.
- È dunque perfettamente accettabile utilizzare questo polo per evitare tutti i conti precedenti.

Valore corrispondente del guadagno

$$k_1^* \approx 9 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{k_1^*}{20} \approx 0.45$$



18.1.1 Esempio: Controllo della Velocità di un Motore Elettrico



Cambio problema: ora non vogliamo più controllare la *posizione* del motore, ma solo la sua **velocità**.

$$G_0(s) = \frac{s\theta(s)}{U(s)} = \frac{20}{(s+2)(s+10)}$$

Per soddisfare la specifica sull'errore nullo a regime (per un riferimento a gradino), è necessario introdurre un **polo nell'origine**, rendendo il sistema di tipo 1. Per questo si utilizza un **controllore PI**.

Specifiche di Controllo

1. $e_\infty = 0$, per $r(t) = \delta_{-1}(t)$
2. $M_p \leq 5\%$
3. $T_s \leq 6$ secondi

Forma del controllore PI

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} = k_p \frac{s + \frac{k_i}{k_p}}{s} = k_p \frac{s + z_1}{s}$$

$$s = -z_1 = -\frac{k_i}{k_p}$$

Il sistema ad anello aperto diventa:

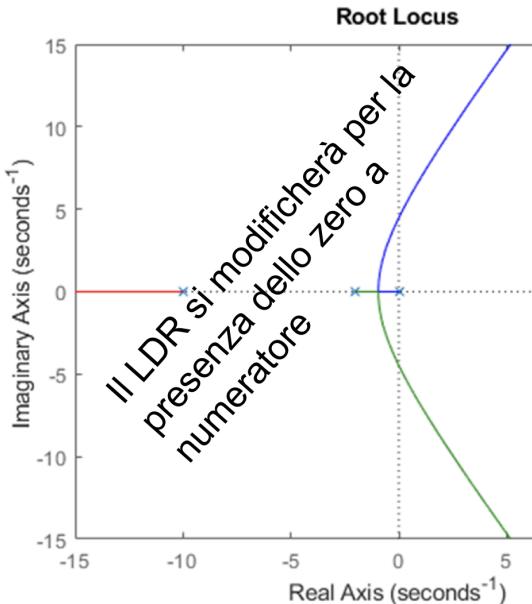
$$C(s)G(s) = k_p(s + z_1) \cdot \frac{20}{s(s+2)(s+10)}$$

Ridenominazione

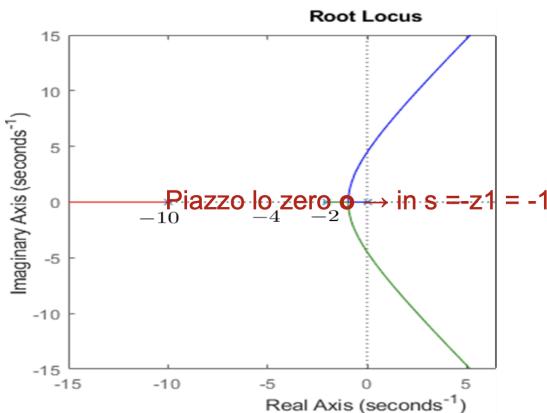
$$G_1(s) = \frac{s + z_1}{s^3 + 12s^2 + 20s}, \quad G_2(s) := \frac{20(s + z_1)}{s(s+2)(s+10)}$$

$$k_2 := 20k_p$$

$$C(s)G(s) = k_2G_2(s) = k_2(s + z_1)G_1(s)$$



Nota: Il Luogo delle Radici (LDR) si modificherà a causa della presenza dello **zero** al numeratore.



Scelta della posizione dello zero del PI

- Posizionare lo zero tra l'origine e il polo dominante (il più lento) del sistema è una strategia efficace.
- Lo zero "attira" il LDR verso una regione desiderata, bilanciando:
 - rapidità di risposta (vicino all'origine),
 - smorzamento (vicino al polo dominante).
- **Compromesso:** lo zero a metà strada permette spesso di soddisfare T_s , overshoot $\leq 5\%$, ecc.

Scelgo quindi di piazzare lo zero in:

$$s = -z_1 = -1$$

$$k_2 G_2(s) = k_2(s+1)G_1(s) = k_2 \frac{s+1}{s(s+2)(s+10)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Analisi

$$n = 3, \quad m = 1, \quad n - m = 2$$

Vincolo sulla rapidità:

$$\sigma \leq -\frac{3}{T_s} = -\frac{3}{6} = -0.5$$

$$\Rightarrow \frac{k_i}{k_p} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_i = k_p$$

Costruzione del Luogo delle Radici

$$LDR_+ = \{s \in \mathbb{C} : p_{k_2}(s) = D(s) + k_2 N(s) = 0\}$$

$$p_{k_2}(s) = s^3 + 12s^2 + (20 + k_2)s + k_2$$

Vincolo: fisso il polo dominante in $s = -0.5$. Essendo radice del polinomio, deve valere:

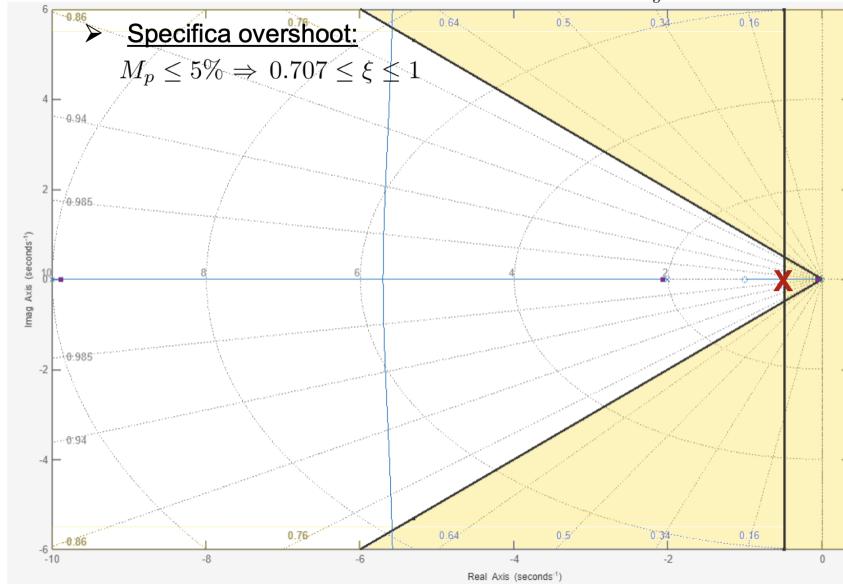
$$p_{k_2}(-0.5) = (-0.5)^3 + 12(-0.5)^2 + (20 + k_2)(-0.5) + k_2 = 0$$

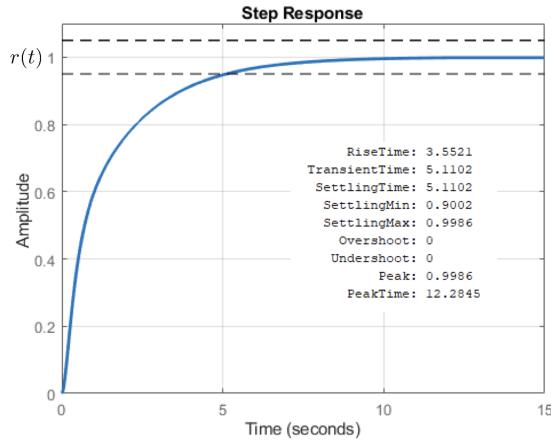
$$-0.125 + 3 + (-10 - 0.5k_2) + k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -7.125 + 0.5k_2 = 0$$

$$k_2 = \frac{7.125}{0.5} = 14.25 \quad \Rightarrow \quad k_p = \frac{k_2}{20} \approx 0.7 = k_i$$

➤ Specific settling time:

$$\sigma \leq -\frac{3}{T_s} = -\frac{3}{6} = -0.5$$





Esempio su MatLab

- Definizione del sistema in forma di zeri, poli e guadagno:

$$G = \text{zpk}([], [0, -2, -10], 20)$$

Da questa definizione ricavo la funzione di trasferimento:

$$G = \frac{20}{s(s+2)(s+10)}$$

- Utilizzo del comando:

```
sisotool(G)
```

Questo comando apre un'interfaccia grafica interattiva che consente di analizzare e progettare sistemi di controllo in retroazione.

- Il tool genera automaticamente:

- Il diagramma di Bode (ampiezza e fase)
- Il luogo delle radici (Root Locus)
- La risposta al gradino

- L'interfaccia consente di modificare graficamente i parametri del sistema, in particolare il guadagno k , permettendo di gestire le caratteristiche dinamiche del sistema (come le elongazioni, il tempo di assestamento, ecc.).

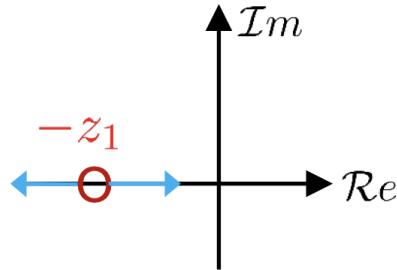
Progetti di Controllori PID usando LDR

Osservazione: utilizzando il LDR (Luogo delle Radici), con procedimenti analoghi a quelli appena descritti, si possono progettare diversi tipi di controllori standard, che includono anche l'azione derivativa D .

- Controllo Proporzionale-Derivativo (PD):** nella forma di Evans include un guadagno e uno zero reale negativo:

$$C(s) = PD(s) = k_p + k_d s = k_d(s + z_1)$$

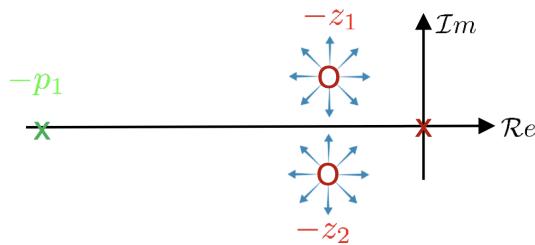
Nota: in relazione ai due esempi precedenti, il controllo di velocità del motore con un controllore PI ha una struttura equivalente a un ipotetico controllo di posizione del motore con un controllore PD. Questo significa che la presenza dell'integratore nel PI (che annulla l'errore a regime) corrisponde, dal punto di vista strutturale, all'effetto del derivatore nel PD (che agisce anticipando la variazione dell'errore).



- **Controllo Proporzionale-Integrale-Derivativo (PID):** include un guadagno, un polo nell'origine e due zeri (potenzialmente complessi coniugati):

$$C(s) = PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s} = k_d \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + p_1)}$$

Nota: la funzione $C(s)$ è impropria, cioè il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore. Questo comporta che il controllore non è fisicamente realizzabile. In pratica, si aggiunge un polo "sufficientemente" a sinistra nel piano complesso (cioè con parte reale molto negativa), in modo da influenzare il meno possibile la dinamica del sistema, ma rendere il controllore realizzabile.



Osservazione: Criterio dell'Angolo del Luogo delle Radici

Sia

$$L(s) = k \frac{N(s)}{D(s)}$$

la funzione d'anello di un sistema, e siano z_j gli zeri e p_i i poli della funzione.

Il luogo delle radici è definito come l'insieme dei punti $s \in \mathbb{C}$ tali che l'equazione caratteristica sia soddisfatta:

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad L(s) = -1$$

Scriviamo $L(s)$ come numero complesso in forma polare:

$$L(s) = |L(s)|e^{j\angle L(s)}$$

Poiché -1 in forma polare è:

$$-1 = 1 \cdot e^{j\pi}$$

Segue che la condizione per cui $L(s) = -1$ è:

- **Condizione di modulo:** $|L(s)| = 1$
- **Condizione di fase:** $\angle L(s) = \pm(180^\circ + 360^\circ \cdot k)$, con $k \in \mathbb{Z}$

Questa è la cosiddetta **condizione dell'angolo**.

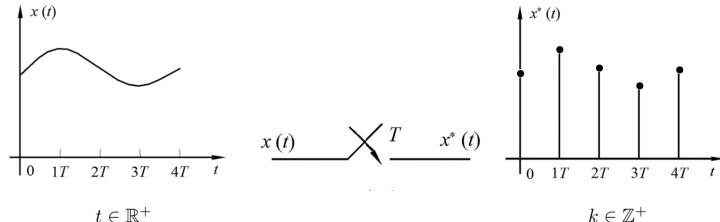
La condizione dell'angolo può essere utilizzata per verificare se un punto $s \in \mathbb{C}$ appartiene al luogo delle radici. Essa è **necessaria e sufficiente**. Se questa condizione è verificata, allora s appartiene al luogo delle radici per un opportuno valore di $K > 0$.

Capitolo 19

Progetto di Sistemi di Controllo - Tempo Discreto

Descriviamo con la trasformata Z in tempo discreto. **Non ci saranno esercizi con costruzione luogo delle radici in tempo discreto.**

19.1 Tempo Continuo vs Tempo Discreto



| | Tempo Continuo Trasformata di Laplace | Tempo Discreto Trasformata Z |
|-----------------------------|---|--|
| Impulso (delta) | 1 | 1 |
| Gradino unitario | $\frac{1}{s}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| Rampa | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| Teorema del valore iniziale | $\lim_{t \rightarrow 0^+} e(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s)$ | $\lim_{k \rightarrow 0} e(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z)$ |
| Teorema del valore finale | $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ | $\lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)E(z)$ |
| Piano complesso | Piano s | Piano z |

Nota sulle trasformate: Nel dominio del tempo continuo, si utilizza la trasformata di Laplace per passare dal dominio temporale a quello complesso (frequenza), utile per l'analisi di stabilità e risposta. Nel dominio del tempo discreto, si utilizza la trasformata Z, che svolge un ruolo analogo alla Laplace, ma è adatta alla natura campionata dei segnali.

| Tempo Continuo $t \in \mathbb{R}_+$ | Tempo Discreto $k \in \mathbb{Z}_+$ |
|---|--|
| $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ | $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ |
| $x(t) = x_l(t) + x_f(t)$ | $x(k) = x_l(k) + x_f(k)$ |
| $x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$, modi naturali $e^{\lambda_i t} v_i$ | $x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$, modi naturali $\lambda_i^k v_i$ |
| $e^{\lambda_i t}$: $\lambda_i < 0$ (convergente), $\lambda_i = 0$ (costante), $\lambda_i > 0$ (divergente) | λ_i^k : $ \lambda_i < 1$ (convergente), $ \lambda_i = 0$ (costante), $ \lambda_i > 1$ (divergente). Se $\lambda_i < 0$, i modi naturali sono alternati |
| $x'_l(t) = Ax_l(t)$, $x_0 \rightarrow x_l(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots = e^{At} x_0$ | $x_l(k+1) = Ax_l(k)$, $x_0 \rightarrow x_l(k) = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \dots = A^k x_0$ |
| $x'_f(t) = Ax_f(t) + Bu(t) _{x_0=0} \rightarrow x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$ | $x_f(k+1) = Ax_f(k) + Bu(k) _{x_0=0} \rightarrow x_f(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} Bu(h)$ |
| $x'_f(t) = Ax_f(t) + B\bar{u} _{x_0=0} \rightarrow x_f(t) = \left(\int_0^t e^{A\epsilon} B d\epsilon \right) \bar{u}$ | $x_f(k+1) = Ax_f(k) + B\bar{u} _{x_0=0} \rightarrow x_f(k) = \left(\sum_{\epsilon=0}^{k-1} A^\epsilon B \right) \bar{u}$ |
| Ingressi: $\frac{p}{\sum_{i=1}^p \left(\int_0^1 e^{A\epsilon} [B]_i d\epsilon \right) \bar{u}_i} > 1$ $x_f(t) =$ | Ingressi: $\frac{p}{\sum_{i=1}^p \left(\sum_{\epsilon=0}^{k-1} A^\epsilon [B]_i \right) \bar{u}_i} > 1$ $x_f(k) =$ |
| Trasformata di Laplace | Trasformata Zeta |

La tabella seguente mostra una corrispondenza tra modelli in tempo continuo ($t \in \mathbb{R}_+$) e i loro equivalenti in tempo discreto ($k \in \mathbb{Z}_+$). I concetti sono presentati in modo alternato per evidenziare l'analogia diretta.

19.1.1 Tempo Continuo vs Tempo Discreto: Piano s - Piano Z

- Nel dominio continuo, la variabile complessa è definita come:

$$s = \sigma + j\omega$$

- Passando al dominio discreto tramite campionamento con periodo T , si ottiene la trasformazione:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} (\cos \omega T + j \sin \omega T)$$

- Il modulo della parte immaginaria complessa (rotazione sul piano complesso) è unitario:

$$|e^{j\omega T}| = |\cos \omega T + j \sin \omega T| = 1$$

- L'argomento dell'esponenziale complesso rappresenta la fase:

$$\arg[e^{j\omega T}] = \omega T$$

- Il modulo complessivo di z risulta:

$$|z| = |e^{\sigma T}| |e^{j\omega T}| = |e^{\sigma T}|$$

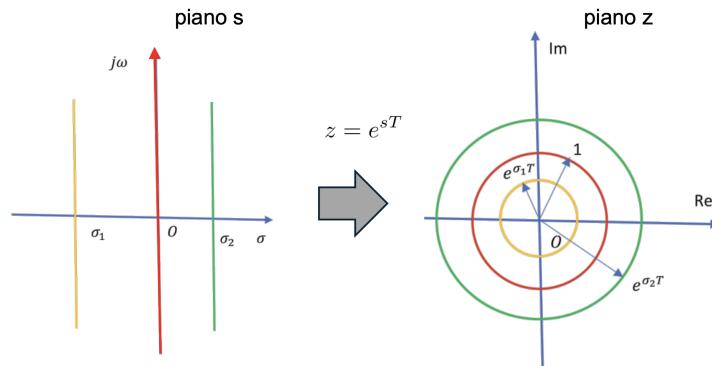
- L'argomento di z (cioè l'angolo nel piano z) è:

$$\arg[z] = \angle z = \omega T$$

- Quindi si può scrivere la rappresentazione polare:

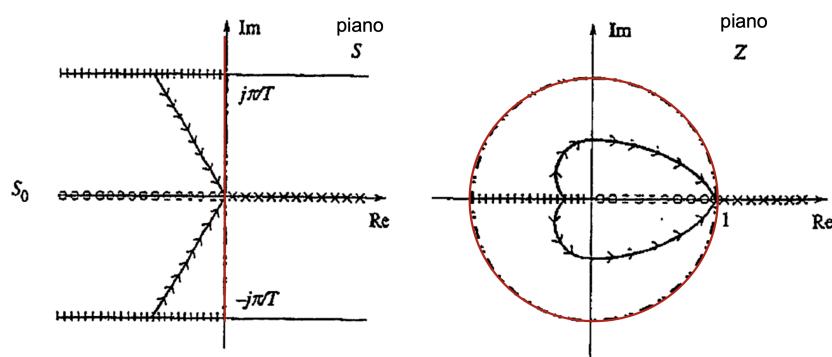
$$z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} \angle \omega T$$

Nota: Questa trasformazione mostra come ogni punto del piano s (tempo continuo) si mappa nel piano z (tempo discreto) attraverso la trasformazione esponenziale $z = e^{sT}$. La parte reale σ determina il modulo di z , mentre la parte immaginaria ω ne determina l'angolo (frequenza).



19.1.2 Corrispondenza Piano s - Piano Z

- Vogliamo osservare come alcune regioni di particolare interesse per le **caratteristiche dinamiche del sistema** si trasformano passando dal piano s al piano z . Questo è importante per mantenere coerenza tra l'analisi in tempo continuo e quella in tempo discreto.



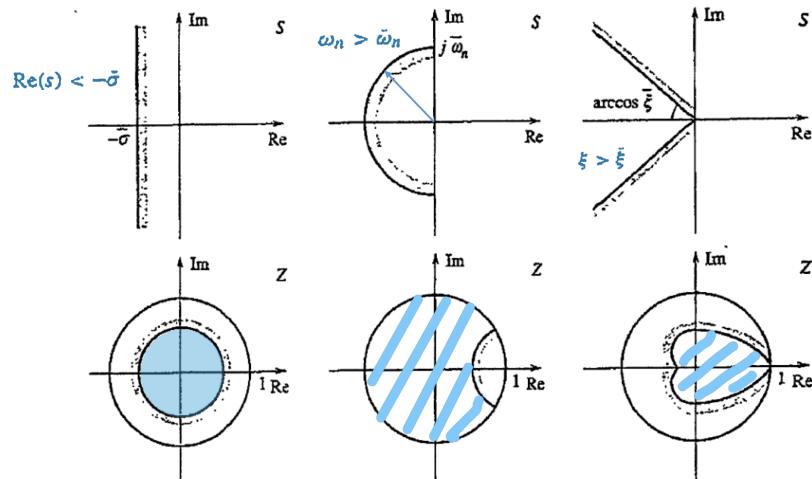
- La trasformazione fondamentale è:

$$s = \sigma + j\omega \rightarrow z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} \angle \omega T$$

- Le proprietà dinamiche come:

- Sovraelongazione massima
- Tempo di salita
- Tempo di assestamento

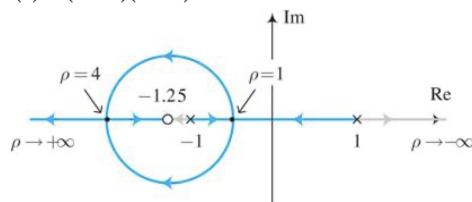
sono collegate alla posizione dei poli nel piano s . Quando si lavora in tempo discreto, queste regioni vengono mappate nel piano z , e quindi bisogna interpretarle correttamente in quel contesto.



19.1.3 Curiosità: Luogo delle Radici per Sistemi a Tempo Discreto

Esempio: $n(z) = (z + 1.25)$
 $d(z) = (z + 1)(z - 1)$

$$p_k(z) = d(z) + kn(z) = 0$$



- Consideriamo il seguente esempio:

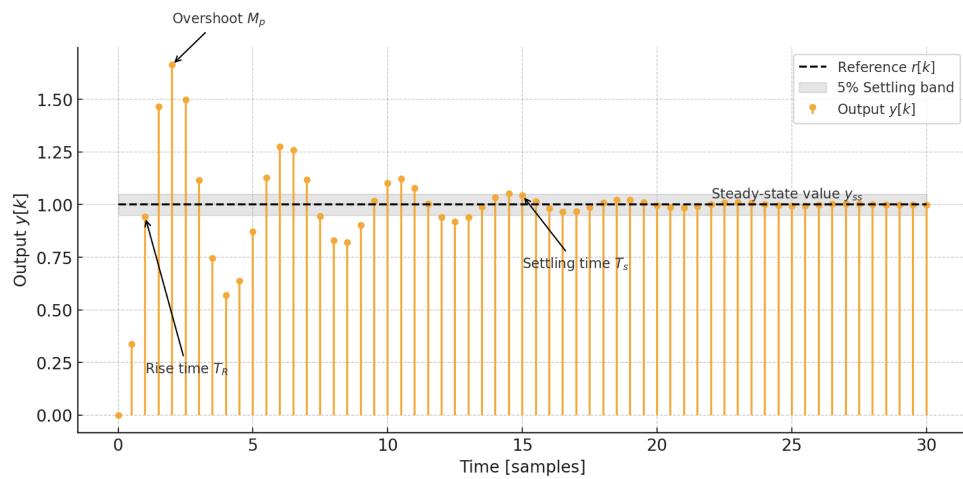
$$n(z) = (z + 1.25) \quad (\text{numeratore})$$

$$d(z) = (z + 1)(z - 1) \quad (\text{denominatore})$$

$$p_k(z) = d(z) + kn(z) = 0$$

- Le regole di tracciamento del **Luogo delle Radici** (Root Locus) nei sistemi a tempo discreto sono **strutturalmente simili** a quelle del tempo continuo.
- Tuttavia, queste vanno interpretate nel **piano z** , dove:
 - La stabilità non è legata alla parte reale negativa dei poli (come in s),
 - Ma alla **posizione entro il cerchio unitario** $|z| < 1$.
- Nota importante:** In questo corso **non trattiamo** le regole specifiche di tracciamento del LDR per sistemi a tempo discreto!

19.1.4 Sistemi LTI a Tempo Discreto: Controllo, Fedeltà della Risposta, Specifiche e Prestazioni, Tipo di Sistema, etc.



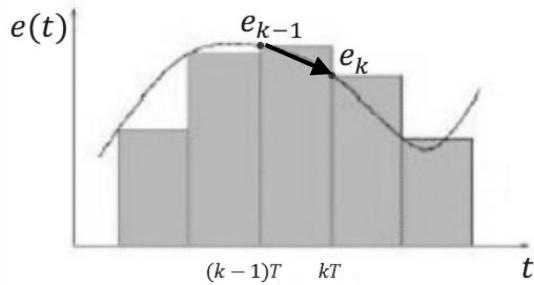
Nei sistemi LTI (Lineari e Tempo Invarianti) a tempo discreto, i concetti fondamentali di:

- controllo,
- fedeltà della risposta,
- specifiche e prestazioni,
- tipo di sistema,

rimangono validi e concettualmente analoghi a quelli usati per i sistemi a tempo continuo.

Tuttavia, devono essere adattati al dominio del **tempo campionario**, dove le grandezze vengono osservate e regolate a intervalli discreti e non in modo continuo.

PID a Tempo Discreto



La legge di controllo PID discreta si scrive:

$$u(k) = k_p e(k) + k_i T \sum_{j=1}^k e(j) + k_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

Dove:

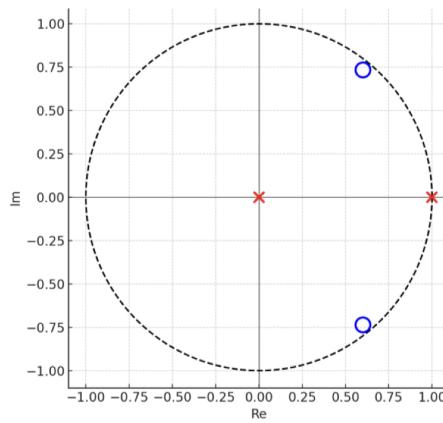
$\frac{e(k) - e(k-1)}{T}$ è una: Approssimazione di Eulero all'indietro (backward)

Applicando la trasformata Z, la funzione di trasferimento del regolatore PID in tempo discreto diventa:

$$PID(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = k_p + k_i \frac{z}{z-1} T + k_d \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{T}$$

che si può riscrivere in forma razionale come:

$$PID(z) = \frac{(k_p + k_i T + \frac{k_d}{T}) z^2 - (k_p + \frac{2k_d}{T}) z + \frac{k_d}{T}}{z(z-1)}$$

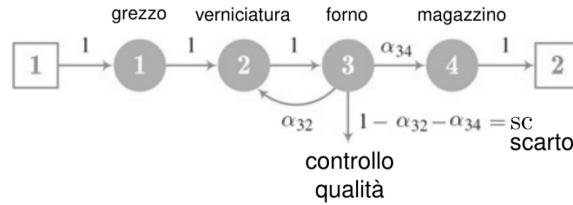


Osservazione:

$\frac{z}{z-1}$ è l'integratore a tempo discreto, che ha un polo in $z = 1$,

analogamente all'integratore continuo che ha un polo nell'origine del piano s.

19.1.5 Esempio: Controllo Catena di Produzione con Test di Qualità



- Variabili di stato:

$$\begin{aligned}x_1(k) &= \text{numero di pezzi grezzi} \\x_2(k) &= \text{numero di pezzi verniciati} \\x_3(k) &= \text{numero di pezzi essiccati} \\x_4(k) &= \text{numero di pezzi confezionati e disponibili in magazzino}\end{aligned}$$

- Ingressi:

$$\begin{aligned}u_1(k) &= \text{numero di pezzi non lavorati} \\u_2(k) &= \text{numero di pezzi completati e venduti} =: d(k)\end{aligned}$$

- Osservazione: Il disturbo $d(k)$ è interpretato come **vendite non controllabili**.

Il sistema dinamico è descritto da:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad \text{con } u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ d(k) \end{bmatrix}$$

Poiché ci interessa l'uscita relativa ai pezzi confezionati disponibili:

$$y(k) = x_4(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha_{32} = 0.1, \alpha_{34} = 0.8$$

Funzione di Trasferimento Ingresso $u_1(k) \rightarrow$ Uscita $y(k)$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U_1(z)} = C(zI - A)^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (zI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{0.8}{z(z-1)(z^2-0.1)}$$

Disturbo di Vendita Costante con Ritardo

Ipotesi: il disturbo $d(k) = u_2(k)$ è inizialmente nullo e poi assume un valore costante:

$$d(k) = u_2(k) = \begin{cases} 0 & \text{per } k < 5 \\ d^* & \text{per } k \geq 5 \end{cases}$$

Ciò riflette il fatto che il magazzino si riempie solo dopo 4 intervalli di lavorazione.

Funzione di Trasferimento Disturbo $d(k) \rightarrow$ Uscita $y(k)$

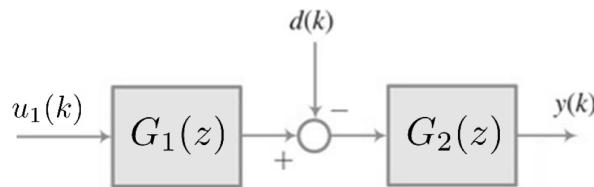
$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{D(z)} = C(zI - A)^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (zI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{z-1}$$

Rappresentazione del Sistema come Prodotto di Sottosistemi

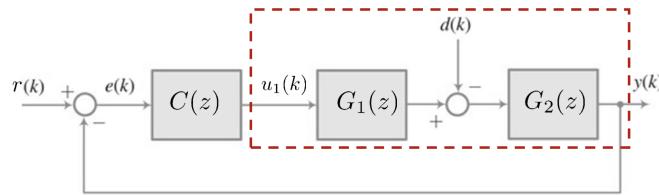
Poiché c'è una parte comune nel denominatore, si scrive:

$$G(z) = G_1(z)G_2(z), \quad \text{con:}$$

$$G_1(z) = \frac{0.8}{z(z^2 - 0.1)}, \quad G_2(z) = \frac{1}{z-1}$$



Obiettivo del Controllo



Vogliamo che il numero di pezzi finiti sia vicino al riferimento $r(k)$. Sia:

$$L(z) := C(z)G(z), \quad C(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$W(z) = \frac{Y_r(z)}{R(z)} = \frac{L(z)}{1 + L(z)} \quad \Rightarrow \quad W_{re}(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + L(z)}$$

$$W_{de}(z) = \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{G_2(z)}{1 + L(z)}$$

Controllore Proporzionale

$$u(k) = k_p e(k), \quad \text{quindi: } C(z) = k_p$$

$$L(z) = k_p \cdot G(z) = k_p \cdot \frac{0.8}{z(z-1)(z^2-0.1)}$$

Errore a Regime

Poiché $L(z)$ ha un polo in $z = 1$, il sistema è di tipo 1:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)W_{re}(z)R(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1) \cdot \frac{1}{1+L(z)} \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{z}{1+L(z)} = \frac{1}{1+k_p \cdot \frac{0.8}{1 \cdot (1-1) \cdot (1^2-0.1)}} = 0 \end{aligned}$$

(quando il sistema a ciclo chiuso è stabile)

Stabilità del Sistema a Ciclo Chiuso

Denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

$$W(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{k_p \cdot \frac{0.8}{z(z-1)(z^2-0.1)}}{1+k_p \cdot \frac{0.8}{z(z-1)(z^2-0.1)}}$$

$$\Rightarrow \text{Denominatore: } d_W(z) = z(z-1)(z^2-0.1) + 0.8k_p = z^4 - z^3 - 0.1z + 0.8k_p$$

Stabilità tramite Trasformazione Bilineare

Applichiamo:

$$z = \frac{1+v}{1-v} \quad \Rightarrow \quad d_W(z) = \frac{N(v)}{D(v)}$$

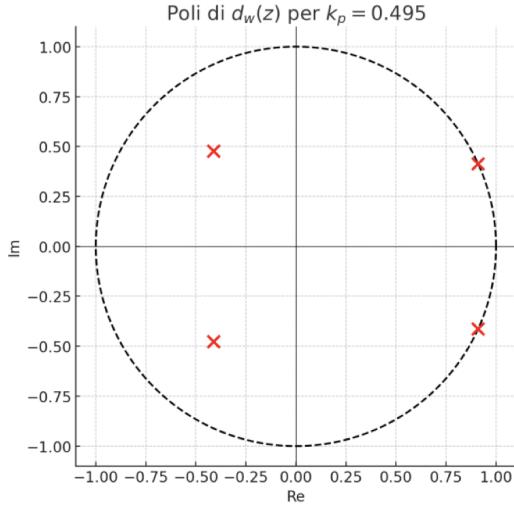
$$N(v) = (0.8k_p + 1.8)v^4 + (6.2 - 3.2k_p)v^3 + (4.8k_p + 6.2)v^2 + (1.8 - 3.2k_p)v + 0.8k_p$$

$$\Rightarrow \quad 0 < k_p < 0.495$$

(valori compatibili con stabilità asintotica del sistema a tempo discreto)

19.1.6 Metodo Alternativo

Per determinare il **valore critico del guadagno** k_p , imponiamo che il **modulo di z** sia unitario. Cerchiamo quindi soluzioni del tipo:



$$|z| = |e^{\sigma T}| |e^{j\omega T}| = |e^{\sigma T}| = 1 \Rightarrow z = e^{j\omega}$$

Sostituendo in $d_W(z)$, otteniamo:

$$d_W(e^{j\omega}) = e^{j4\omega} - e^{j3\omega} - 0.1e^{j2\omega} + 0.1e^{j\omega} + 0.8k_p = 0$$

Sfruttando la forma trigonometrica:

$$e^{jn\omega} = \cos(n\omega) + j \sin(n\omega)$$

Separando la parte reale e immaginaria:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[d_W(e^{j\omega})] &= \cos(4\omega) - \cos(3\omega) - 0.1 \cos(2\omega) + 0.1 \cos(\omega) + 0.8k_p \\ \operatorname{Im}[d_W(e^{j\omega})] &= \sin(4\omega) - \sin(3\omega) - 0.1 \sin(2\omega) + 0.1 \sin(\omega) \end{aligned}$$

Uguagliando ciascuna parte a zero e risolvendo numericamente:

$$\omega \approx 0.4258 \text{ rad}, \quad k_p^{\text{critico}} = 0.495$$

Tuttavia, in questo esempio, l'**effetto del disturbo non è trascurabile** poiché è *intrinsecamente parte del processo*.

Effetto del Disturbo sull'Errore

$$E(z) = W_{de}(z)D(z) = \frac{G_2(z)}{1 + L(z)} D(z) = \frac{\frac{-1}{z-1}}{1 + k_p \frac{0.8}{z(z-1)(z^2-0.1)}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Analizziamo l'errore a regime:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1) \cdot \frac{\frac{-1}{z-1}}{1 + k_p \frac{0.8}{z(z-1)(z^2-0.1)}} \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{-1}{1 + k_p \cdot \frac{0.8}{1 \cdot (1^2-0.1)}} \cdot 1 = \frac{-1}{1 + k_p \cdot 0.89} \\ \Rightarrow \quad e(\infty) &= \frac{1}{1 + k_p \cdot 0.89}\end{aligned}$$

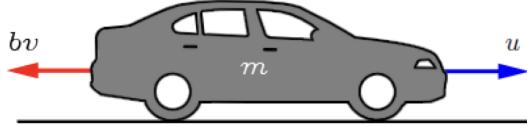
- **Conclusione:** All'aumentare di k_p , l'errore sul lungo periodo **diminuisce**, ma **non si annulla**.
 - Per ottenere **errore nullo**, è necessario un controllore **proporzionale-integrale (PI)**.

Nota finale: In un esempio realistico di vendite, un controllore solo proporzionale porta a riempire il magazzino in eccesso, producendo sempre un errore (sistematicamente sottostimando o sovrastimando il numero di pezzi necessari). Per garantire la **disponibilità esatta dei pezzi richiesti quando si manifestano le vendite**, è fondamentale impiegare un controllore **PI**.

Capitolo 20

Retroazione Statica dallo Stato

20.0.1 Esempio - Controllo di Posizione (Sistema SISO)



Controllo posizione veicolo: l'obiettivo è raggiungere/mantenere una posizione p desiderata per un veicolo nonostante la presenza di disturbi esterni (vento, pendenza della strada, etc.)

- $m = 1000 \text{ kg}$ (massa del veicolo)
- $b = 50 \text{ N} \cdot \frac{s}{m}$ (coefficiente di attrito viscoso)
- $v(t) = p'(t)$ (velocità come derivata della posizione)
- $a(t) = v'(t) = p''(t)$ (accelerazione come derivata seconda della posizione)

Equazione del moto

$$\begin{cases} mp''(t) = u(t) - bp'(t) \\ y(t) = p(t) \end{cases} \quad (20.1)$$

L'equazione rappresenta la dinamica del veicolo: la forza applicata $u(t)$ è contrastata dalla forza di attrito $bp'(t)$, e il sistema restituisce come uscita la posizione $p(t)$.

Modello in spazio di stato

Definiamo le variabili di stato:

$$x_1(t) := p(t), \quad x_2(t) := p'(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Riscrivendo il sistema in termini di x_1 e x_2 :

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = \frac{1}{m}(-bx_2(t) + u(t)) \end{cases} \quad (20.2)$$

In forma matriciale:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (20.3) \\ & A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

20.0.2 Controllo di Posizione (Sistema SISO) con Retroazione dall'Uscita

Funzione di Trasferimento (FdT):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

Calcoliamo la matrice $sI - A$:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s + \frac{b}{m})} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

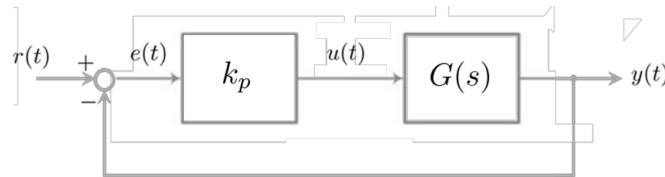
Ora calcoliamo $G(s)$:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{s(s + \frac{b}{m})} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Il prodotto matriciale porta:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + \frac{b}{m})} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{ms(s + \frac{b}{m})}$$

Considerazioni sulla Retroazione dell'Uscita



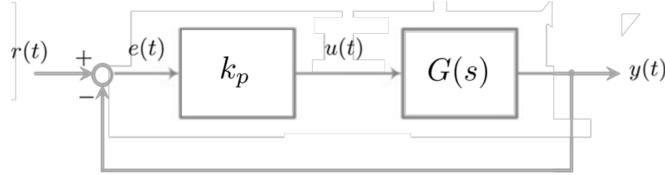
Finora abbiamo considerato soluzioni di controllo con la retroazione dall'uscita, dove l'unica informazione utilizzata dal controllore è la misura dell'uscita del sistema che vogliamo controllare.

Ad esempio:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)}$$

20.0.3 Analisi della Funzione di Trasferimento con Controllo Proporzionale



Partendo dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{ms(s + \frac{b}{m})} = \frac{1}{m} \cdot \frac{s^0}{s^2 + \frac{b}{m}s}$$

Definiamo il guadagno proporzionale (normalizzato rispetto a m):

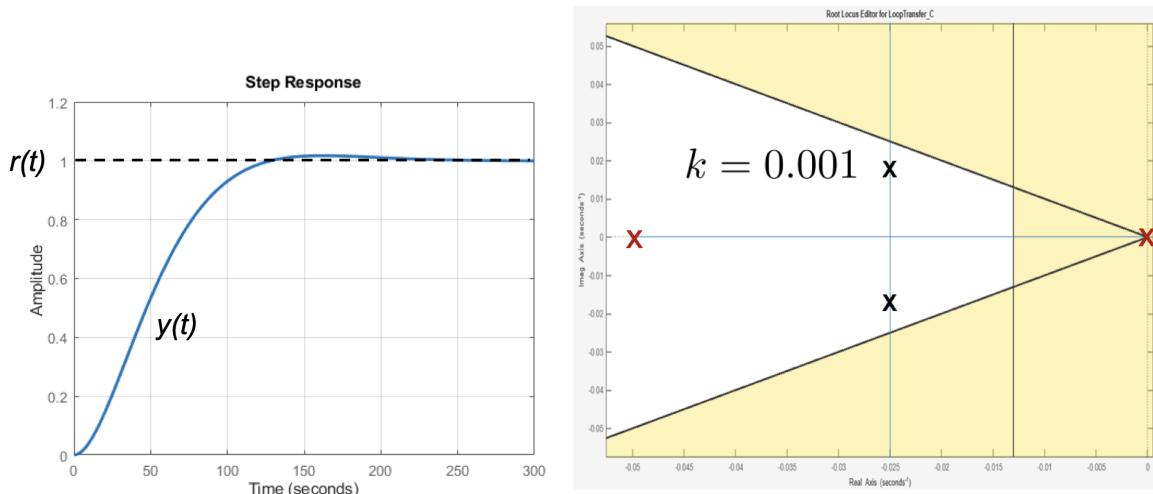
$$k_p := \frac{k_p}{m}, \quad k = mk = 1$$

Otteniamo quindi la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$W(s) = \frac{k \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s}}{1 + k \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s}}$$

Il polinomio caratteristico del sistema in retroazione è:

$$p_k(s) = s^2 + \frac{b}{m}s + k = 0$$



Vincoli Progettuali

- Tempo di assestamento fissato a $T_s = 300$ s: in 5 minuti il sistema deve raggiungere la destinazione.
- Vincolo sulla sovraelongazione: $\epsilon = 0.707$ (corrisponde a smorzamento critico approssimato), per evitare oscillazioni.
- Guadagno $k = 0.001 \Rightarrow k_p = 1$: fissato per soddisfare le specifiche e garantire la stabilità (le due radici sul piano complesso risultano accettabili).

La risposta al gradino unitario con $k_p = 1$ mostra che il sistema corregge l'errore tramite il feedback. Si ottiene:

- Sovraelongazione contenuta sotto il 5%.
- Tempo di risposta accettabile: il sistema raggiunge il riferimento in circa 200–250 secondi.

Interpretazione del Controllo Proporzionale

Un controllo proporzionale sull'uscita guarda solo **quanto siamo lontani dall'obiettivo** (cioè l'errore sulla posizione), ma **non sa nulla di come ci stiamo muovendo**.

È come guidare un'auto guardando solo il contachilometri (cioè la distanza residua dal target), ma ignorando completamente la velocità con cui ci stiamo avvicinando. Questo può comportare un comportamento non ottimale, ad esempio una risposta lenta o una sovraelongazione se il sistema ha inerzia significativa.

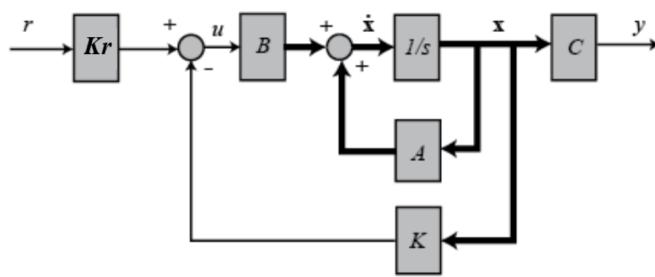
20.0.4 Controllo di Posizione (Sistema SISO) con Retroazione Statica dallo Stato

Se il controllore disponesse di un'informazione *più ricca* che include le variabili di stato del sistema, si intuisce che ci si troverebbe in una situazione *più favorevole* per il progetto di controllo. Questo porta al concetto di **retroazione statica dallo stato**.

Retroattore a Due Gradi di Libertà

Il sistema dinamico considerato è:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{con } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



Metodologia

- Il termine BK è una matrice che possiamo **scegliere liberamente**.
- Sceglieremo K per poter **allocare gli autovalori** (o poli) del sistema in modo desiderato, ovvero:
 - Garantire la **stabilità** (nessun modo divergente).
 - Ottenere un comportamento **veloce ma non nervoso**.

- In pratica: moltiplichiamo gli stati per dei pesi opportuni (componenti di K) per ottenere la dinamica desiderata.
- Vogliamo che gli autovalori della matrice chiusa $A_{cl} = A - BK$ siano nella **parte sinistra del semipiano complesso** (cioè con parte reale negativa).
- Se tutti gli autovalori sono reali negativi, il sistema sarà stabile e privo di oscillazioni indesiderate.

Osservazioni

Il sistema ha un **polo nell'origine**, il che implica che è un sistema **di tipo 1**. Questo comporta:

- La presenza di un **integratore**, che annulla l'errore a regime.
- Il sistema è capace di **raggiungere un equilibrio** dove l'uscita $y(t)$ coincide con il riferimento $r(t)$.
- In queste condizioni è possibile determinare un **guadagno** K_r per correggere l'errore statico.

20.0.5 Progetto del Controllore con Retroazione Statica dallo Stato

1. Implementazione della legge di controllo:

$$u(t) := -Kx(t) + K_r r(t)$$

2. Allocazione dei poli (autovalori):

scegliamo i poli del sistema a catena chiusa in modo che soddisfino i requisiti di progetto (stabilità, rapidità, assenza di oscillazioni indesiderate). Calcoliamo quindi K .

$$x'(t) = [A - BK]x(t) + BK_r r(t)$$

3. Calcolo di K_r :

nel caso del controllo della posizione del veicolo, il sistema è **di tipo 1**, quindi per garantire **errore a regime nullo**:

- Poniamo la derivata dello stato nulla a regime.
- Impostiamo l'uscita a regime uguale al riferimento: $y(\infty) = r$.

Da cui segue:

$$K_r = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1}$$

20.0.6 Esempio Simulink

I poli (autovalori) della matrice $A - BK$ sono stati allocati in $-0,13$ e uno sufficientemente a sinistra nel piano complesso, garantendo:

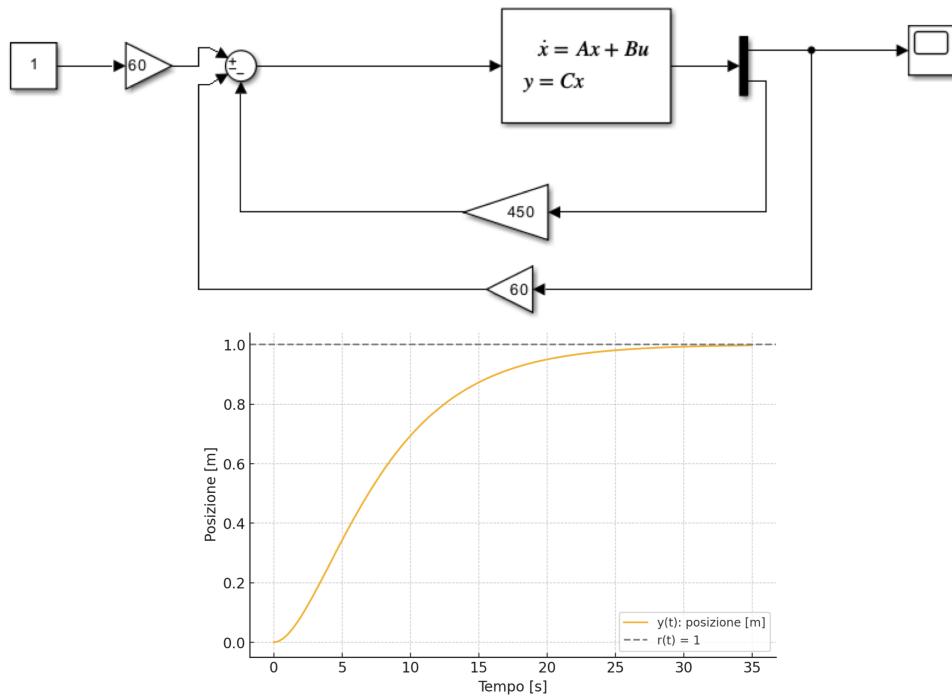
- **Stabilità**
- **Risposta moderatamente rapida**

Con questa scelta si è ottenuto:

$$K = [60, 450]$$

Successivamente si calcola:

$$K_r = 60$$



Considerazioni

La retroazione dello stato considera:

- **Dove siamo** (cioè la posizione),
- **Come ci stiamo muovendo** (cioè la velocità).

Questo ci permette di:

- **Prevedere il comportamento futuro** del sistema,
- **Controllarlo in modo più efficace**.

Risultato:

- In soli 30 secondi si raggiunge la destinazione.
- Prestazione migliorata rispetto ai 250 secondi ottenuti con il solo controllo proporzionale.
- Nessun **overshoot** osservato.

Se invece si usa un controllore **posizionale derivativo**, è possibile applicare una correzione che tenga conto della **velocità**, migliorando ulteriormente la risposta dinamica.

Nota conclusiva

Questo documento è stato redatto e organizzato da Alessio Veni, a partire dalle slide, note ed esercizi forniti dal professor Rampazzo, con l'aggiunta di spiegazioni personali a fini di studio.

Il contenuto non rappresenta materiale ufficiale: potrebbero esserci imprecisioni o semplificazioni. Si consiglia sempre di confrontare con le fonti originali e con quanto spiegato a lezione.

Le slide del professor Rampazzo si basano sul testo *Sistemi dinamici. Modellistica, analisi e controllo* di Benvenuti, De Santis e Farina (McGraw-Hill, 2009), adottato come riferimento principale.

Tutti i diritti sui contenuti originali appartengono al professor Rampazzo e agli autori dei materiali didattici utilizzati.

Avviso sull'uso: Questo file è stato redatto e riorganizzato da Alessio Veni con lavoro personale. Non è consentita la modifica, la diffusione o la ripubblicazione del contenuto senza esplicita autorizzazione. È vietato appropriarsi del lavoro, anche parzialmente, senza citarne la fonte.