Seminário 2 TPS

Convolução Linear

O que é

Imagine que por algum motivo você precisa saber como um elefante “soa” dentro de uma garrafa, como o som dele se comporta dentro desse objeto. Seria difícil colocá-lo lá por meios convencionais, e é por isso que utilizamos convoluções para realizar procedimentos assim.

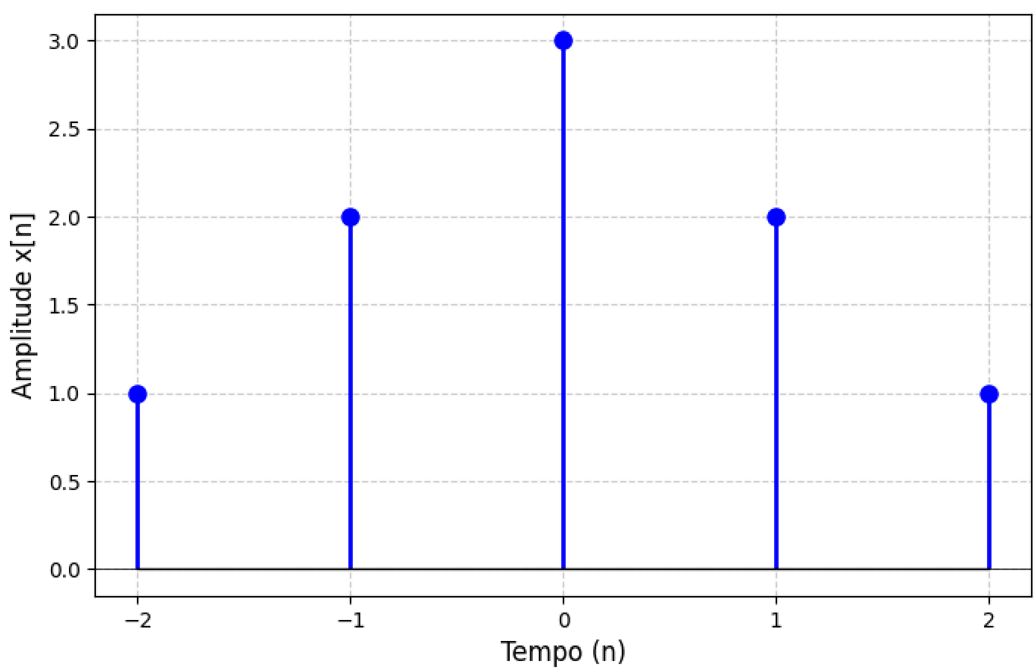
A convolução linear pode ser entendida como a resposta de um sistema dado um impulso de entrada. Você tem uma entrada (o som do elefante) que após entrar em um sistema (som dentro da garrafa) gera uma resposta: o som do elefante dentro da garrafa.

Vídeo inspiração:

https://youtu.be/nWHX_5gfMco?si=_RT2NvB1YBnJfAKy

Sinal Discreto no Tempo

Impulsos unitários deslocados no tempo e multiplicados por uma constante.



$$x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

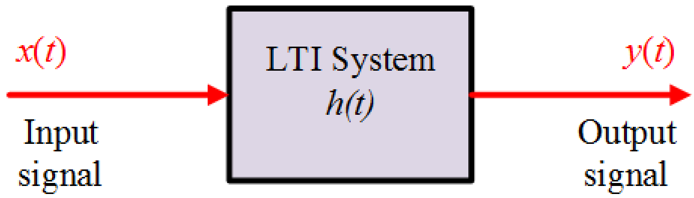
Exemplo:

2º impulso: o valor do sinal no instante k+1 é a constante mutiplicada 2.

Generalizando

$x[n] = \ldots + x[n+2]\delta[n+2] + x[n+1]\delta[n+1] + x[n]\delta[n] + x[n-1]\delta[n-1] + x[n-2]\delta[n-2] + \ldots$

Impulso → SLIT (Sistema Linear Invariante no Tempo) → Resposta ao Impulso



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Confirmar essa afirmação: algumas fórmulas adotam $h[k-n]$, pois usam n ou k como índice temporal.

Tamanho do sinal resultante: $L_y = L_x + L_h - 1$

Teorema da convolução

A convolução de dois sinais no domínio do tempo é equivalente à **multiplicação ponto a ponto** de seus espectros no domínio da frequência.

$x[n] * h[n] \iff X[k] \cdot H[k]$

Com isso, a FFT se torna uma ferramenta para calcular a convolução linear de maneira extremamente rápida, sendo necessário apenas alguns ajustes.

Convolução direta: $O(n^2)$

Usando FFT: $O(n \log_2 n)$

Exemplo:

$x[n] = [1,\ 2,\ 1]$

$h[n] = [1,\ -1]$

$L_y = L_x + L_h - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$

n = 0

$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[0-k] = \sum_{k=0}^{2} x[k] \cdot h[-k]$

- $x[0] \cdot h[0] = 1 \cdot 1 = 1$
- $x[1] \cdot h[-1] = 2 \cdot 0 = 0$
- $x[2] \cdot h[-2] = 1 \cdot 0 = 0$

$y[0] = 1 + 0 + 0 = 1$

n = 1

$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[1-k] = \sum_{k=0}^{2} x[k] \cdot h[1-k]$

- $x[0] \cdot h[1-0] = 1 \cdot (-1) = -1$
- $x[1] \cdot h[1-1] = 2 \cdot 1 = 1$
- $x[2] \cdot h[1-2] = 1 \cdot 0 = 0$

$y[1] = -1 + 2 + 0 = 1$

n = 2

$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[2-k] = \sum_{k=0}^{2} x[k] \cdot h[2-k]$

- $x[0] \cdot h[2-0] = 1 \cdot 0 = 0$
- $x[1] \cdot h[2-1] = 2 \cdot (-1) = -2$
- $x[2] \cdot h[2-2] = 1 \cdot 1 = 1$

$y[2] = 0 - 2 + 1 = -1$

n = 3

$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[3-k] = \sum_{k=0}^{2} x[k] \cdot h[3-k]$

- $x[0] \cdot h[3-0] = 1 \cdot 0 = 0$
- $x[1] \cdot h[3-1] = 2 \cdot 0 = 0$
- $x[2] \cdot h[3-2] = 1 \cdot (-1) = -1$

$y[0] = 0 + 0 - 1 = -1$

$y[n] = [\,1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]$

Usando a FFT

Obs: procurei sobre o problema do expoente positivo na notação usando W_N^{kn}, esqueci de mencionar (assim como na apresentação de um dos colegas) que essa notação omite também o sinal negativo, diferenciando-se da FFT apenas se for visto uma normalização por N antes de todas as operações. Portanto, os calculos coincidem com o cálculo da FFT.

Zero-padding

$x[n] = [1,\ 2,\ 1,\ 0]$

$h[n] = [1,\ -1,\ 0,\ 0]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot W_4^{-kn}$$

onde $W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) - j\sin(\frac{\pi}{2}) = -j$

Sabemos que:

$$W_4^0 = 1,\ W_4^1 = -j,\ W_4^2 = -1,\ W_4^3 = j$$

$X[0] = 1 \cdot W_4^{0\cdot 0} + 2 \cdot W_4^{0\cdot 1} + 1 \cdot W_4^{0\cdot 2} + 0 \cdot W_4^{0\cdot 3} = 1 + 2 + 1 + 0 = 4$

$X[1] = 1 \cdot W_4^{1\cdot 0} + 2 \cdot W_4^{1\cdot 1} + 1 \cdot W_4^{1\cdot 2} + 0 \cdot W_4^{1\cdot 3} = 1 + 2(-j) + 1(-1) + 0 = -2j$

$X[2] = 1 \cdot W_4^{2\cdot 0} + 2 \cdot W_4^{2\cdot 1} + 1 \cdot W_4^{2\cdot 2} + 0 \cdot W_4^{2\cdot 3} = 1 - 2 + 1 + 0 = 0$

$X[3] = 1 \cdot W_4^{3\cdot 0} + 2 \cdot W_4^{3\cdot 1} + 1 \cdot W_4^{3\cdot 2} + 0 \cdot W_4^{3\cdot 3} = 1 + 2j - 1 + 0 = 2j$

$$X[k] = [4, -2j, 0, 2j]$$

FFT para $h[n]$

$X[0] = 1 \cdot W_4^{0\cdot 0} - 1 \cdot W_4^{0\cdot 1} + 0 \cdot W_4^{0\cdot 2} + 0 \cdot W_4^{0\cdot 3} = 1 - 1 + 0 + 0 = 0$

$X[1] = 1 \cdot W_4^{1\cdot 0} - 1 \cdot W_4^{1\cdot 1} + 0 \cdot W_4^{1\cdot 2} + 0 \cdot W_4^{1\cdot 3} = 1 + k + 0 + 0 = 1 + j$

$X[2] = 1 \cdot W_4^{2\cdot 0} - 1 \cdot W_4^{2\cdot 1} + 0 \cdot W_4^{2\cdot 2} + 0 \cdot W_4^{2\cdot 3} = 1 + 1 + 0 + 0 = 0$

$X[3] = 1 \cdot W_4^{3\cdot 0} - 1 \cdot W_4^{3\cdot 1} + 0 \cdot W_4^{3\cdot 2} + 0 \cdot W_4^{3\cdot 3} = 1 - j + 0 + 0 = 1 - j$

$$H[k] = [0, 1 + j, 2, 1 - j]$$

Produto

$$Y[k] = X[k] \cdot H[k]$$

$Y[0] = 4 \cdot 0 = 0$

$Y[1] = (-2j)(1 + j) = -2j - 2j^2 = 2 - 2j$

$Y[2] = 0 \cdot 2 = 0$

$Y[3] = 2j \cdot (1 - j) = 2j - 2j^2 = 2 + 2j$

$$Y[k] = [0, 2 - 2j, 0, 2 + 2j]$$

IFFT

$W_4^{-1} = j$

$W_4^{-2} = -1$

$W_4^{-3} = -j$

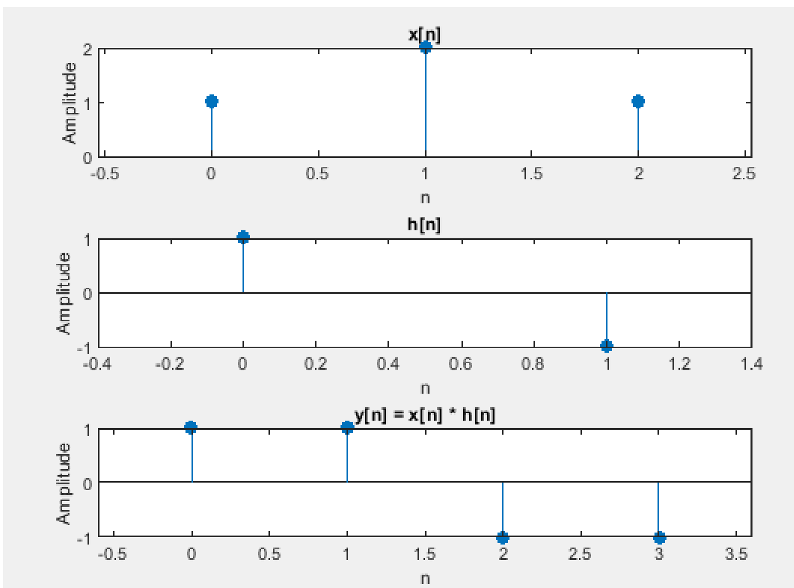
$y[0] = \frac{1}{4}(0 + (2 - 2j) + 0 + (2 + 2j)) = \frac{1}{4}(4) = 1$

$$
\begin{aligned}
y[1] &= \frac{1}{4}\,(0 + (2-2j)(j) + 0 + (2+2j)(-j)) \\
&= \frac{1}{4}\,\left(2j - 2j^2 - 2j - 2j^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\,(2j + 2 - 2j + 2) = \frac{1}{4}(4) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[2] &= \frac{1}{4}\,(0 + (2-2j)(-1) + 0 + (2+2j)(-1)) \\
&= \frac{1}{4}\,(-2 + 2j - 2 - 2j) = \frac{1}{4}(-4) = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[3] &= \frac{1}{4}\,(0 + (2-2j)(-j) + 0 + (2+2j)(j)) \\
&= \frac{1}{4}\,\left(-2j + 2j^2 + 2j + 2j^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\,(-2j - 2 + 2j - 2) = \frac{1}{4}(-4) = -1
\end{aligned}
$$

$$
y[n] = [1\ ,1\ ,-1,-1]
$$



PARTE 2

- Notei que se o zero-padding for maior que n/2, o vetor resultante é o mesmo,apenas com zeros cortados (possível otimização)

Name	Value
h	[1,-1,1,1,0,0,0,0]
hhat	[1,-1,1,1]
i	8
l	8
x	[1,2,3,4,5,0,0,0]
xhat	[6,2,3,4]

- l = tamanho do vetor da convolução, xhat recebe l/2 (4)

h	*1x16 double*
hhat	[1,-1,1,1,1,0,0,0]
i	16
l	16
x	*1x16 double*
xhat	[1,2,3,4,5,0,0,0]

Apenas acrescentei mais um elemento a h, alterando o valor C passado para a compacric para 8.

Ou seja, se N = 5 e M = 5, L = 9 e, portanto L = 16, resultando em um padding maior que N|M/2.

Para valores grandes, em que:

$$L \geq 2^k + 1, M \leq 2^{k-1}, N \leq 2^{k-1}$$

a proporção de zeros em relação ao sinal original é de 75% para sinais de tamanhos iguais.

Nesse case, não há necessidade de aplicar o algoritmo RIC, bastando apenas realizar o zero-padding até L/2.

Análise de complexidade

- FFT normal: FFT em 2 sinais → Multiplicação → IFFT (não considererado zero-padding)

$$10n\log_2 n + 6n + 5n\log_2 n = \boxed{15n\log_2 n + 6n}, \ n = 2^k$$

- RIC FFT: Shift → FFT em 2 sinais → Multiplicação → IFFT
  - $L = N + M - 1, C = \frac{L}{2}$

$$6C + 5L(\log_2 L - 1) + 6L + 5L\log_2 L = 10L\log_2 L + 9L - 5L = \boxed{10L\log_2 L + 4L}$$

Não há necessidade de calcular a RIC, apenas de completar com zeros até $\frac{L}{2}$

Alguns comparativos de cálculo:

N=5 e M=5

L = 9

- FFT:
  - zero-padding de 11 valores em cada sinal
  - total = 22 zeros

- 16 multiplicações complexas (teorema convolução)

- RIC:
  - zero-padding de 3 valores em cada vetor (considerando o cenário acima mencionado)
  - total = 6 zeros
  - 8 multiplicações complexas para shift keying
  - 16 multiplicações complexas (teorema da convolução)

N=9 e M=9

L = 32

- FFT:
  - zero-padding de 23 valores em cada sinal
  - total = 46 zeros
  - 32 multiplicações complexas
- RIC:
  - zero-padding de 7 zeros em cada sinal
  - total = 14 zeros
  - 16 multiplicações complexas para shift keying
  - 32 multiplicações complexas

Conclusão

Utilizando a abordagem dessa maneira, o shift-keying acaba causando um certo overload nos cálculos. No entanto, na primeira FFT, ao invés de computar-se 2 sinais de lamanho L, computa-se 2 sinais de tamanho $\frac{L}{2}$, considerando um caso de sinais iguais. Dessa maneira, pode ser possível computar a convolução linear de 2 sinais de maneira mais eficiente que a convencional. Cálculos devem ser revistos para confirmar essa hipótese.

Por outro lado, foi proveitoso aprender técnicas de otimização com FFT e conhecer ainda mais suas propriedades. O mundo do processamento de sinais é um campo vasto de conhecimento e contém muitas áreas a serem exploradas, como a deste trabalho.