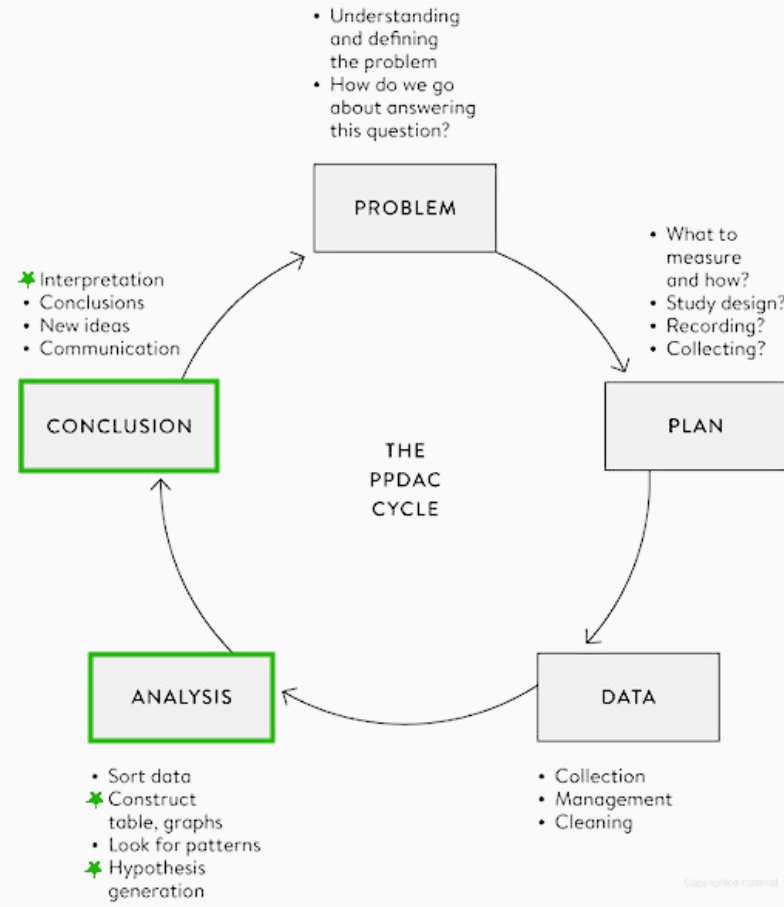


La distribuzione Normale

Obiettivi di apprendimento

- Conoscere le caratteristiche della distribuzione Normale e Normale Standardizzata
- Calcolare e interpretare lo z -score
- Calcolare la proporzione di individui in una popolazione con una determinata caratteristica
- Calcolare la probabilità di avere degli individui in una popolazione con una determinata caratteristica

Le fasi della ricerca



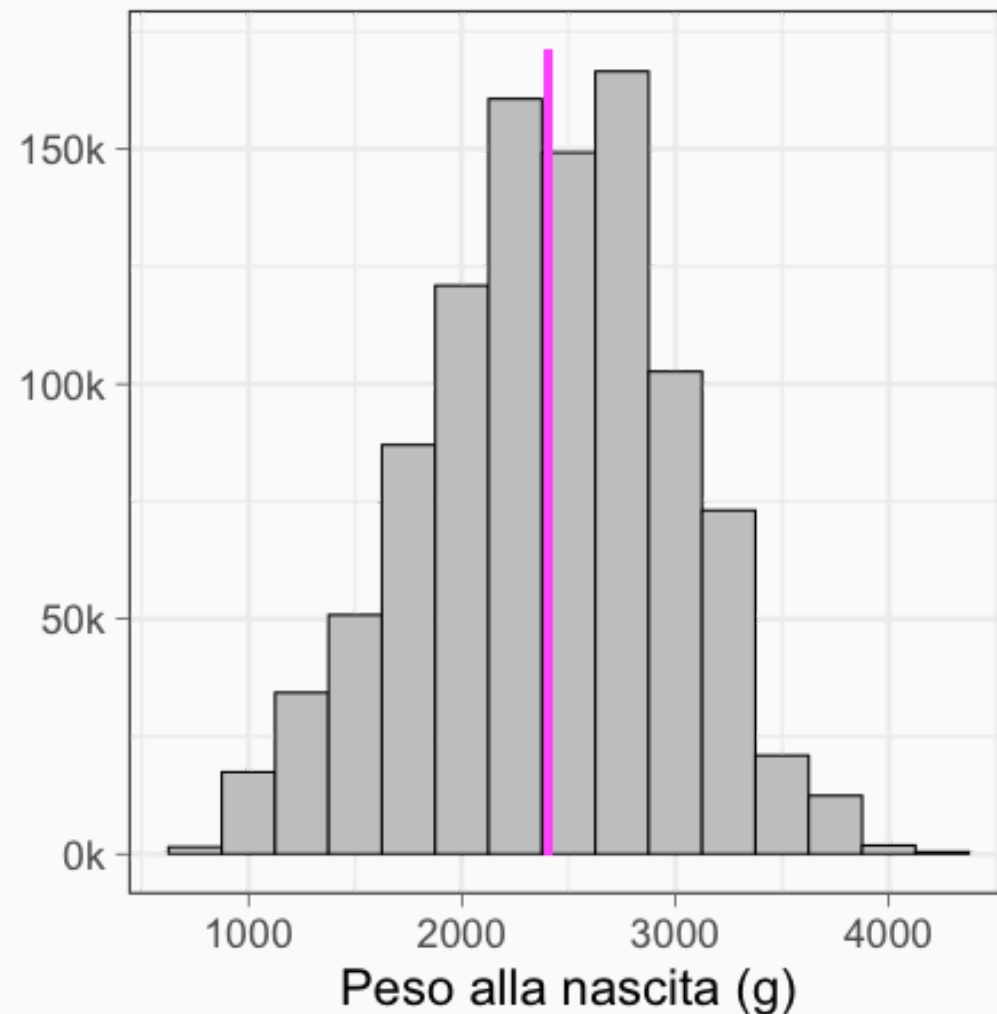
La distribuzione della popolazione

Qual è la distribuzione del peso
alla nascita per i gemelli inglesi?

La distribuzione della popolazione

Qual è la distribuzione del peso alla nascita per i gemelli inglesi?

$N = 1\text{M}$
 $\text{mediana} = 2408 \text{ g}$
 $\mu = 2404 \text{ g}; \sigma = 580 \text{ g}$

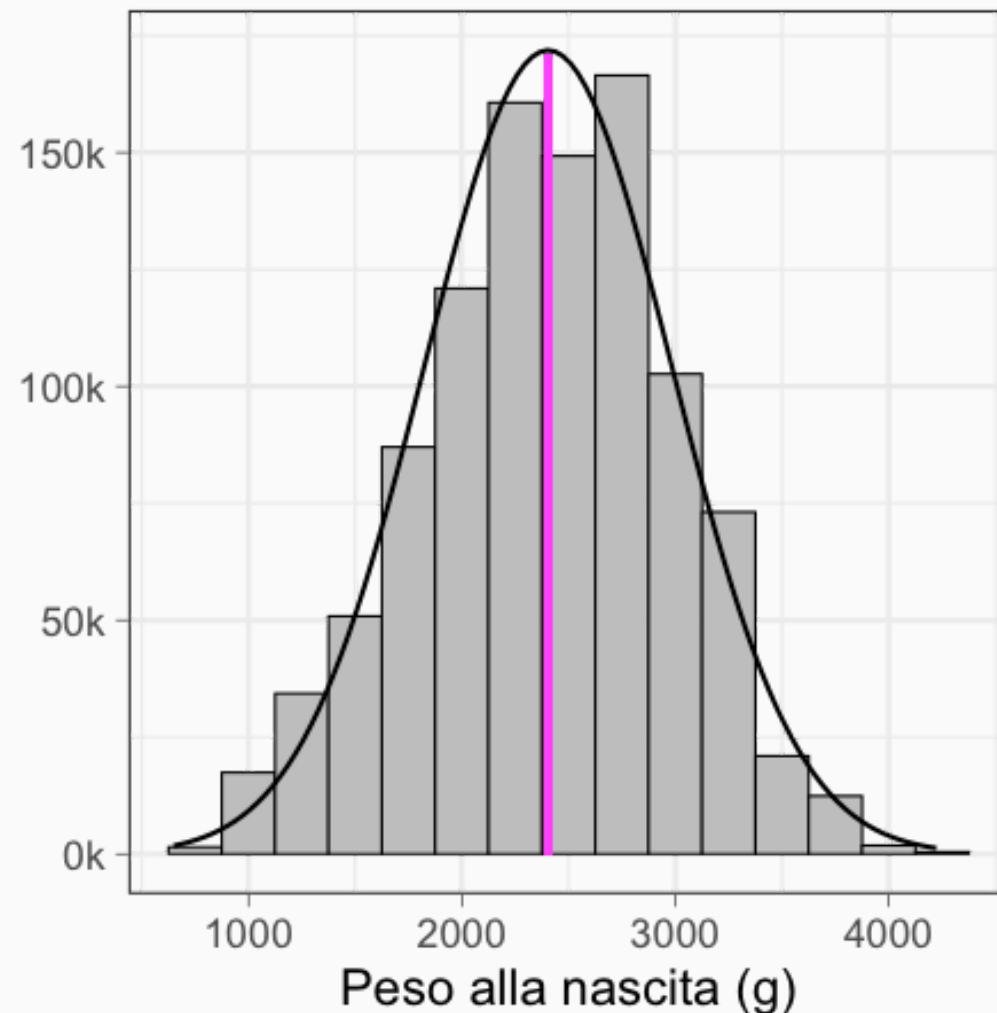


Dati simulati a partire da dati reali, bin size: 250g

La distribuzione della popolazione

Qual è la distribuzione del peso alla nascita per i gemelli inglesi?

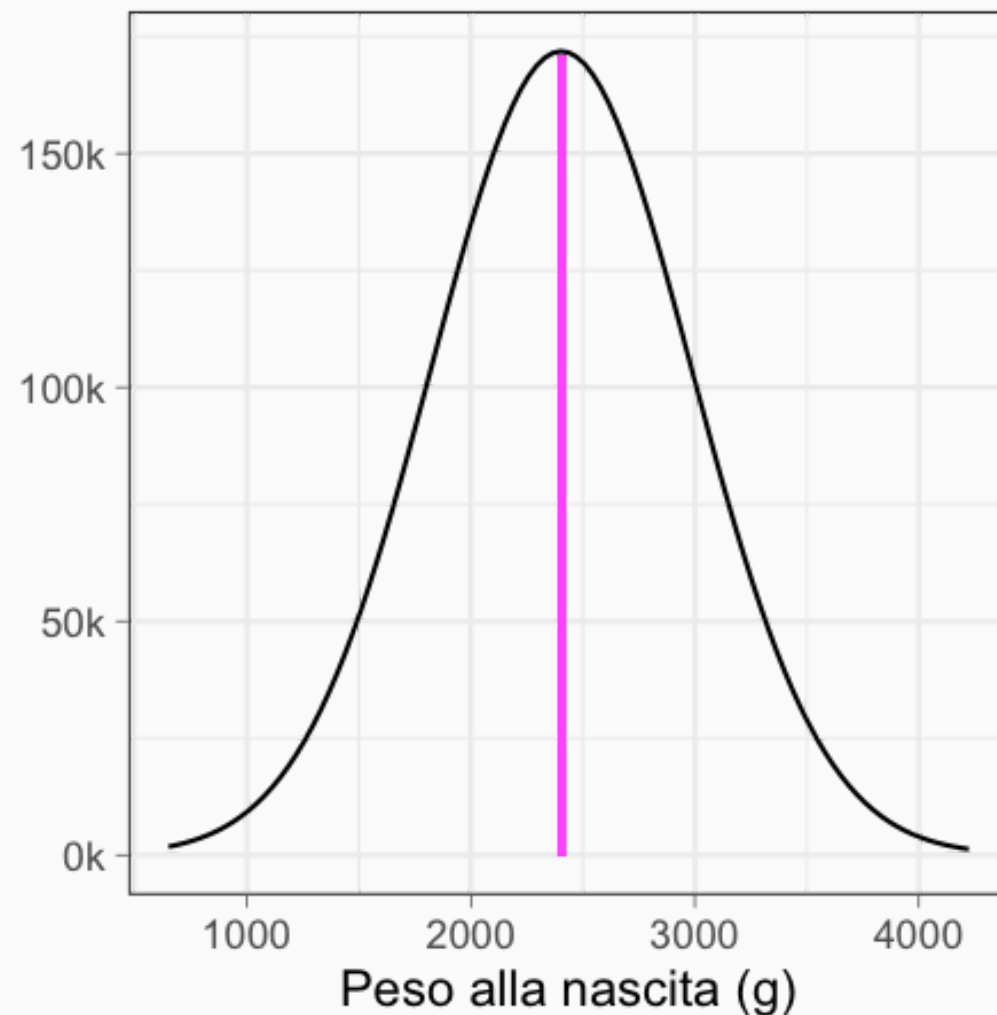
$N = 1\text{M}$
 $\text{mediana} = 2408 \text{ g}$
 $\mu = 2404 \text{ g}; \sigma = 580 \text{ g}$



Dati simulati a partire da dati reali, bin size: 250g

La distribuzione Normale

- $\mathcal{N} = (\mu, \sigma^2)$
- moda \equiv media \equiv mediana
- Simmetrica

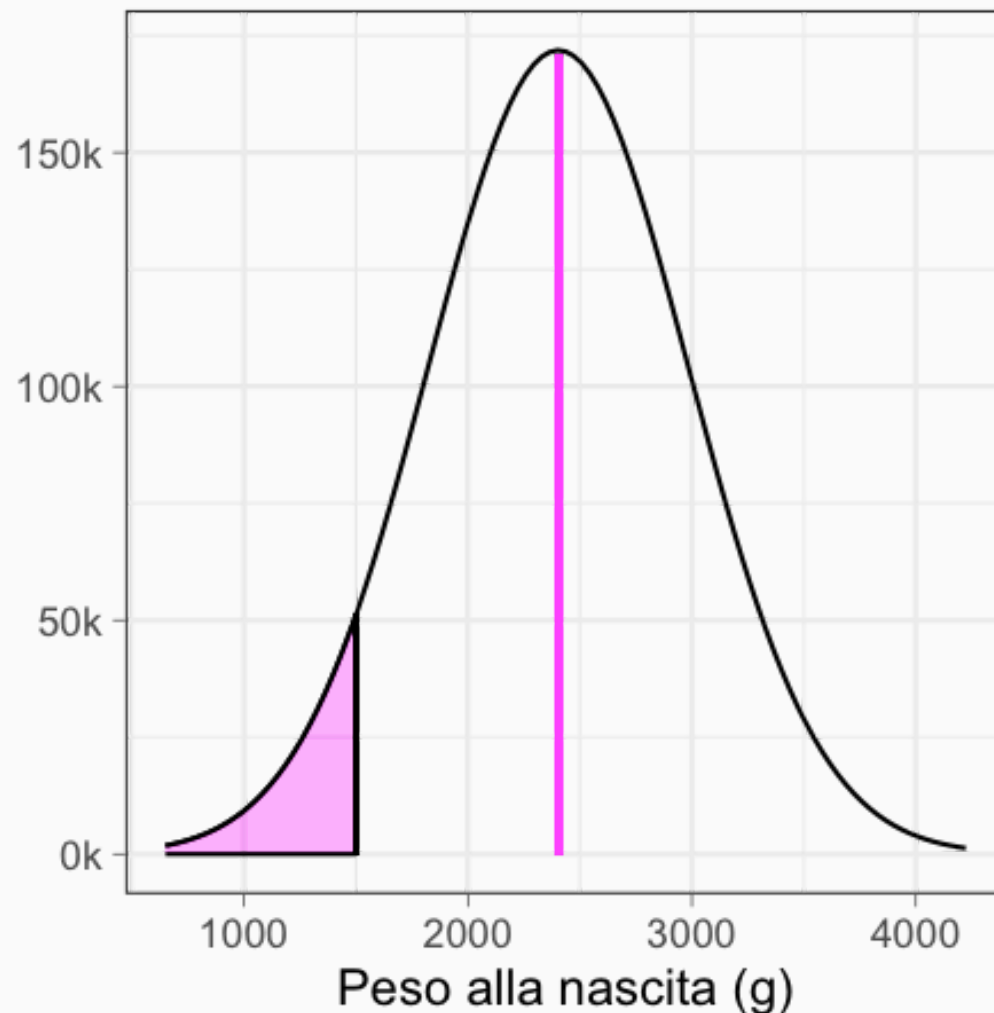


Dati simulati a partire da dati reali, bin size: 250g

La distribuzione Normale

- Area sottesa alla curva = 1
- proporzione \equiv probabilità

neonati di peso molto basso se < 1500 g
neonati di peso molto basso = 6%
 $\mathcal{P}(\text{neonati di peso molto basso}) = 0.06$



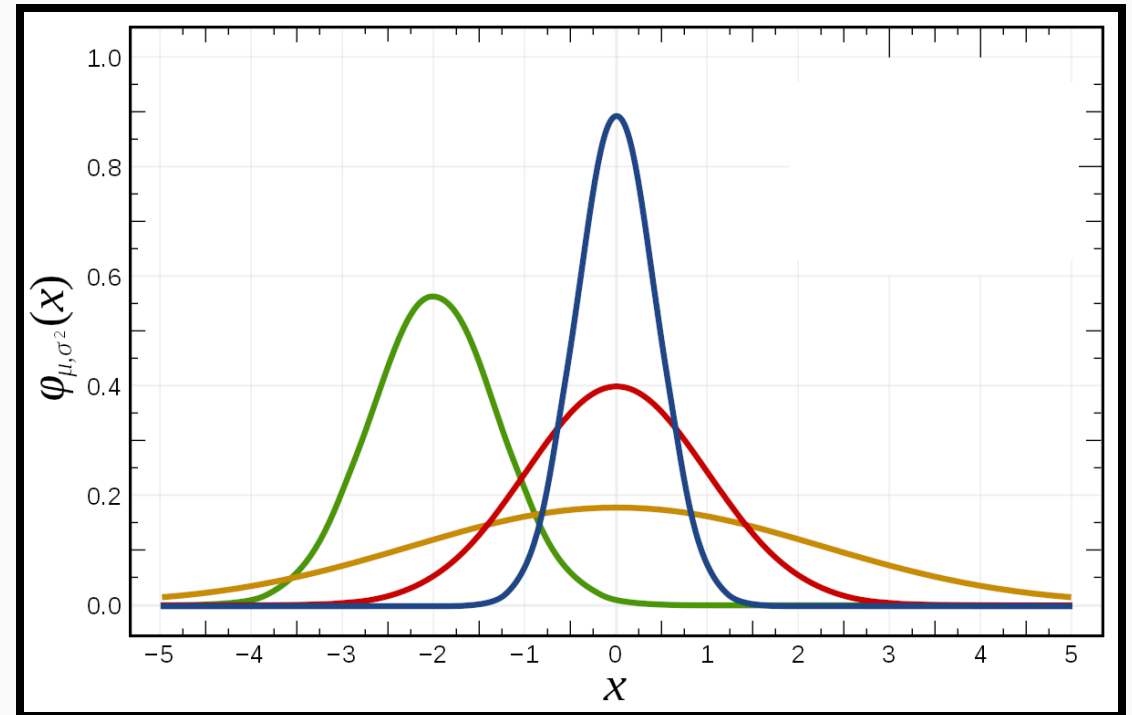
Dati simulati a partire da dati reali, bin size: 250g

Esercizio #1



Qual è la curva con la media più grande?

- a) Verde
- b) Blu
- c) Gialla
- d) Non lo posso sapere
- e) Nessuna delle precedenti

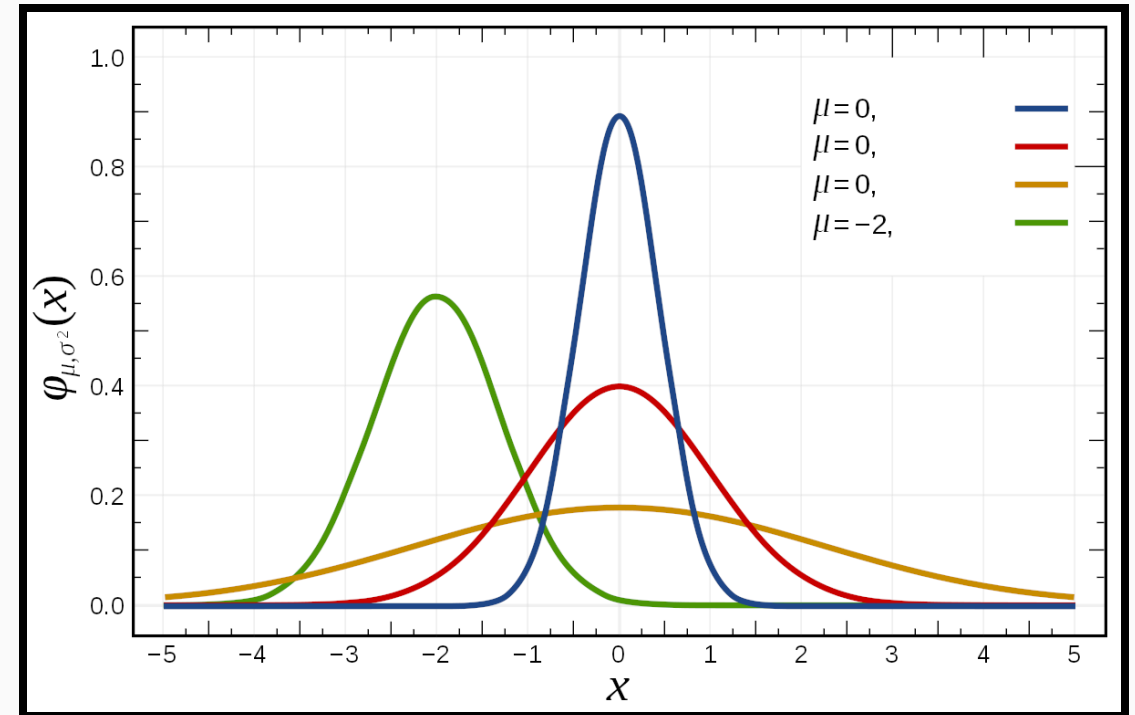


Esercizio #1 -- Soluzione



Qual è la curva con la media più grande?

- a) Verde
- b) Blu
- c) Gialla
- d) Non lo posso sapere
- e) Nessuna delle precedenti

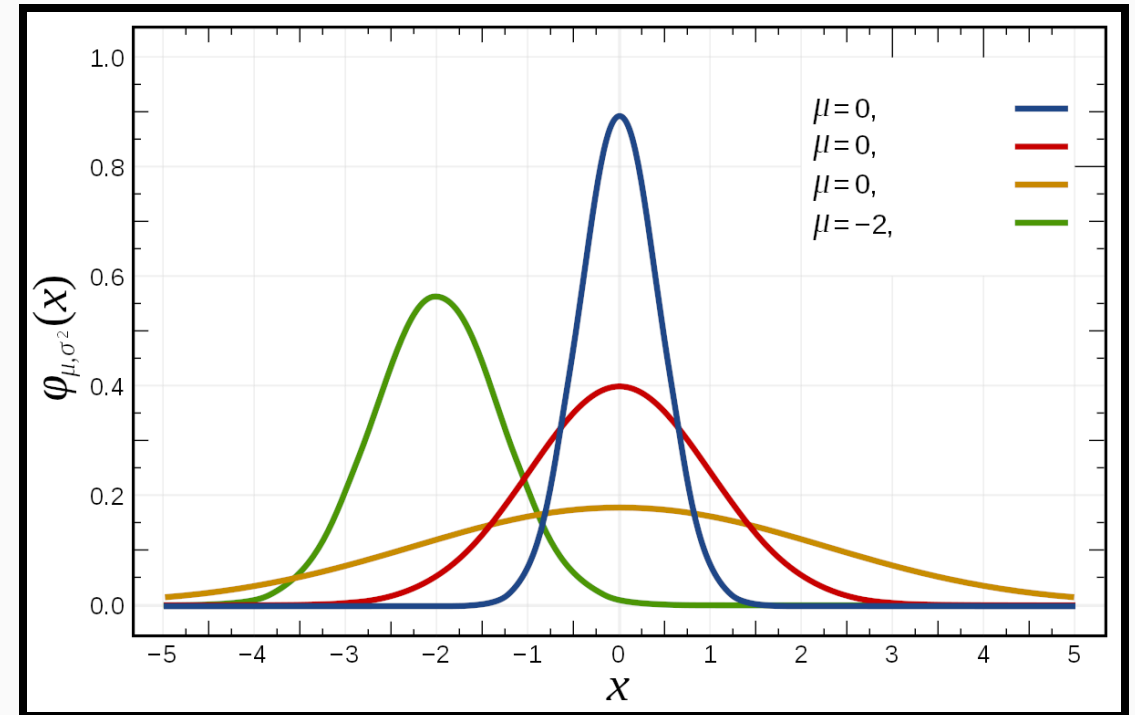


Esercizio #2



Qual è la curva con la deviazione standard più grande?

- a) Verde
- b) Blu
- c) Gialla
- d) Non lo posso sapere
- e) Nessuna delle precedenti

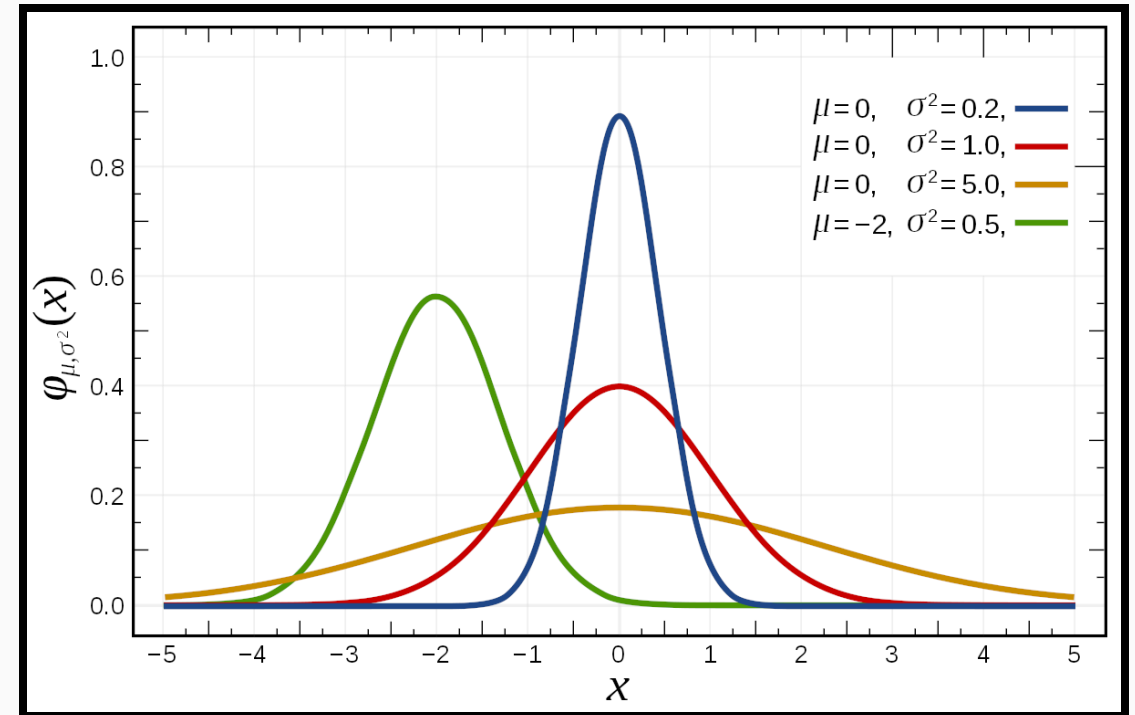


Esercizio #2 -- Soluzione



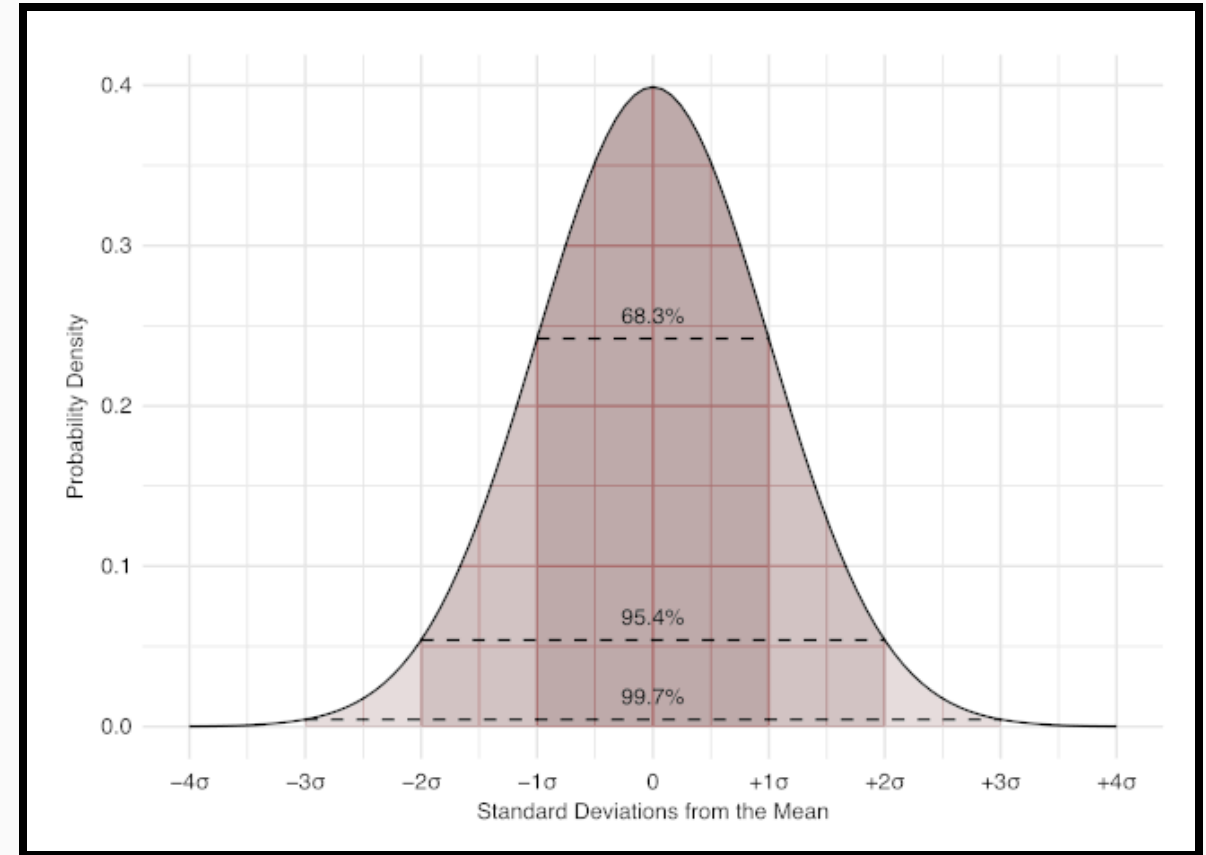
Qual è la curva con la deviazione standard più grande?

- a) Verde
- b) Blu
- c) Gialla ☒
- d) Non lo posso sapere
- e) Nessuna delle precedenti

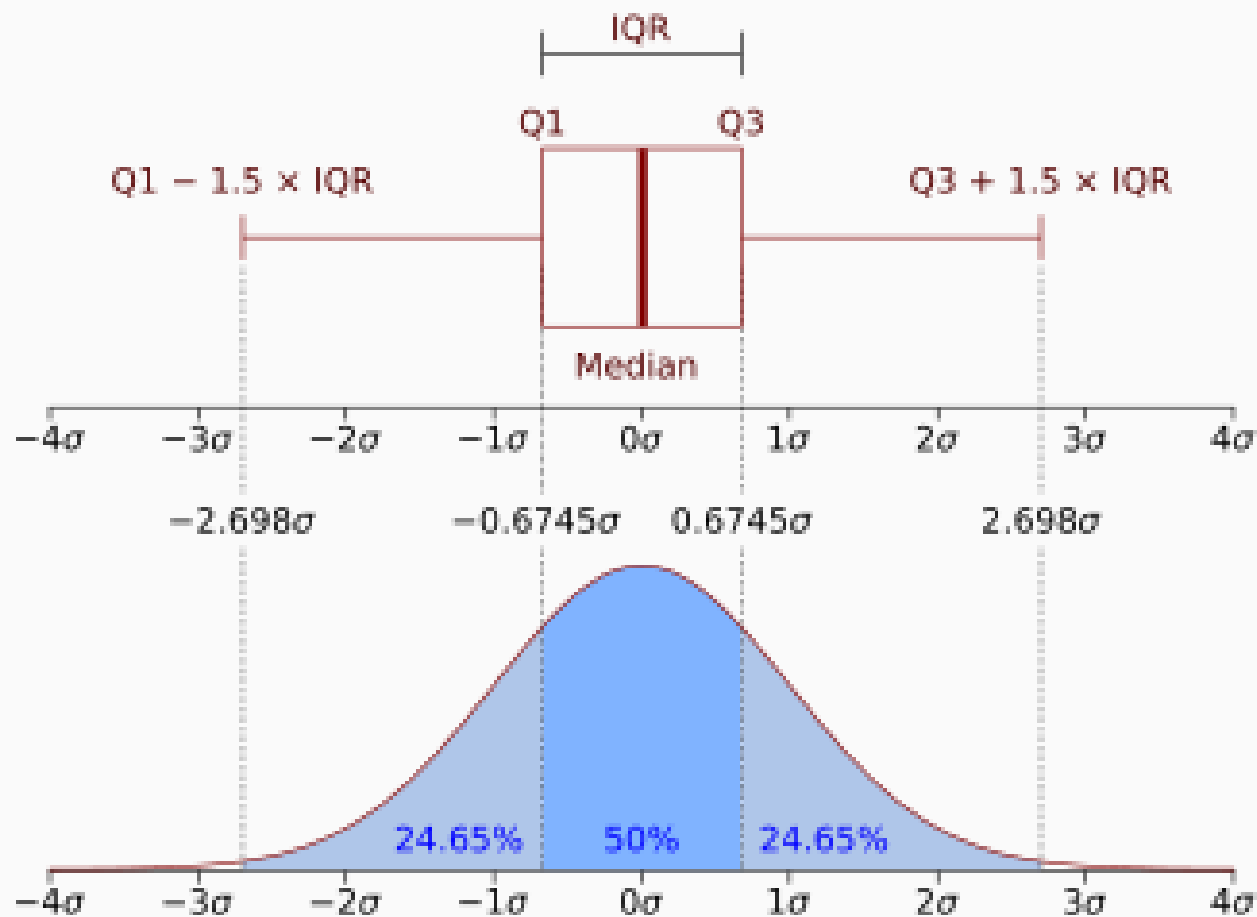


La distribuzione Normale

- Regola del 3 σ :
 - 68% dei valori osservati sono a 1 σ dalla media
 - 95% sono a 2 σ
 - 99.7% sono a 3 σ
- Regola empirica:
 - valori $< 2\sigma$ sono "*comuni*"
 - valori $> 2\sigma$ sono "*inusuali*"
 - valori $> 3\sigma$ sono "*estremi*"



I valori estremi



Esercizio #3

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

- a) La mediana
- b) La proporzione di italiani con altezza > 170 cm
- c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"
- d) L'altezza più comune
- e) L'italiano più alto di sempre

Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

a) La mediana \rightarrow coincide con la media = 170 cm

b) La proporzione di italiani con altezza > 170

Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

a) La mediana \rightarrow 170cm

b) La proporzione di italiani con altezza > 170 cm \rightarrow sono quelli a destra della mediana, la metà dell'area sottesa dalla curva = 50%

c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"

Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

a) La mediana \rightarrow 170cm

b) La proporzione di italiani con altezza > 170 cm \rightarrow 50%

c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi" \rightarrow sono quelli > 2 deviazioni standard dalla media
 $= 170 - 9.5 \times 2 = 151$ cm e $170 + 9.5 \times 2 = 189$ cm

d) L'altezza più comune

Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

- a) La mediana \rightarrow 170cm
- b) La proporzione di italiani con altezza > 170 cm \rightarrow 50%
- c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"
 $\rightarrow < 151$ cm e > 189 cm
- d) L'altezza più comune \rightarrow è la moda, che coincide con la media
e la mediana = 170 cm
- e) L'italiano più alto di sempre

Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

- a) La mediana \rightarrow 170cm
- b) La proporzione di italiani con altezza > 170 cm \rightarrow 50%
- c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"
 $\rightarrow < 151$ cm e > 189 cm
- d) L'altezza più comune \rightarrow 170 cm
- e) L'italiano più alto di sempre \rightarrow non si può calcolare

Esercizio #4

Table 1. Demographic Characteristics of the Participants		
Characteristic	All Participants (N=277)	
	Oxytocin (N=139)	Placebo (N=138)
Age		
Mean — yr	10.4±4.1	10.4±4.0
Distribution — no. (%)		
3–6 yr	34 (24)	35 (25)
7–11 yr	54 (39)	53 (38)
12–17 yr	51 (37)	50 (36)
Sex — no. (%)		
Male	122 (88)	120 (87)
Female	17 (12)	18 (13)



Indicativamente, in quale range di età è compreso il 68% dei pazienti nel gruppo di intervento?

- a) 3 – 17 anni
- b) 6.3 – 14.5 anni
- c) 4.1 – 16.7 anni
- d) Non è possibile dirlo

Sikich, L. et al., *Intranasal Oxytocin in Children and Adolescents with Autism Spectrum Disorder*, NEJM, 2021


02:00

Esercizio #4 -- Soluzione

Table 1. Demographic Characteristics of the Participants		
Characteristic	All Participants (N=277)	
	Oxytocin (N=139)	Placebo (N=138)
Age		
Mean — yr	10.4±4.1	10.4±4.0
Distribution — no. (%)		
3–6 yr	34 (24)	35 (25)
7–11 yr	54 (39)	53 (38)
12–17 yr	51 (37)	50 (36)
Sex — no. (%)		
Male	122 (88)	120 (87)
Female	17 (12)	18 (13)



Indicativamente, in quale range di età è compreso il 68% dei pazienti nel gruppo di intervento?

- a) 3 – 17 anni
- b) 6.3 – 14.5 anni 
- c) 4.1 – 16.7 anni
- d) Non è possibile dirlo

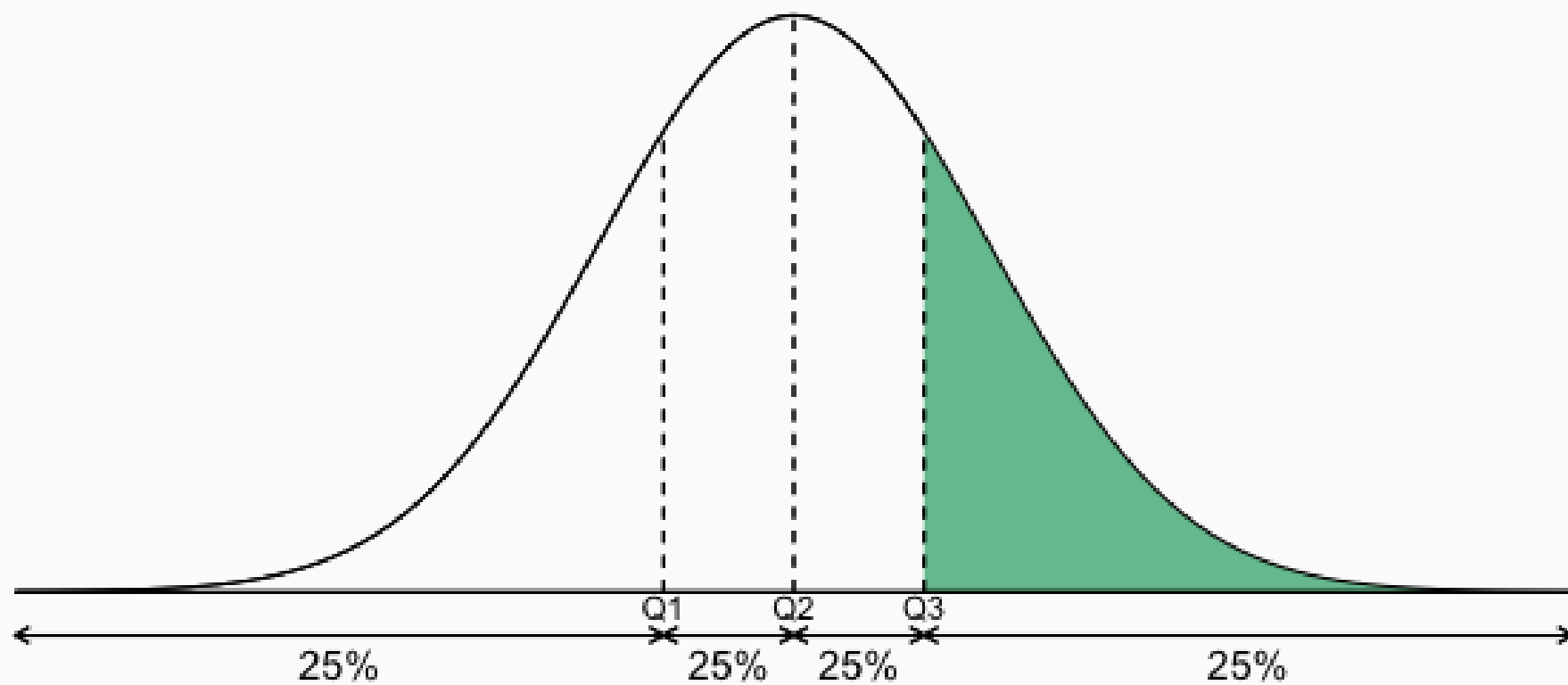
Sikich, L. et al., *Intranasal Oxytocin in Children and Adolescents with Autism Spectrum Disorder*, NEJM, 2021

Esercizio #5

? Con quale probabilità si potrà trovare nella popolazione soggetti con valori superiori al terzo quartile?


- a) 25%
- b) 50%
- c) 75%
- d) Servono più informazioni per poter rispondere

Esercizio #5 -- Soluzione



Esercizio #5 -- Soluzione

? Con quale probabilità si potrà trovare nella popolazione soggetti con valori superiori al terzo quartile?

a) 25% 

b) 50%

c) 75%

d) Servono più informazioni per poter rispondere

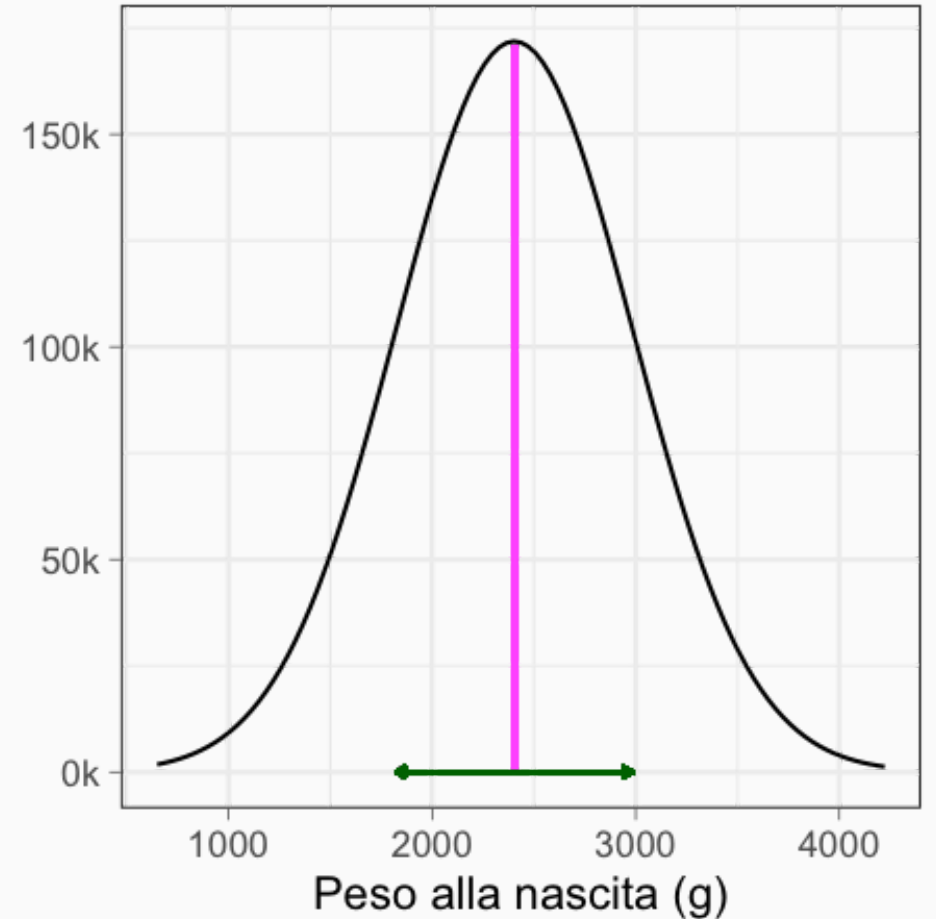
Caratterizzare una singola osservazione

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g.

Come si caratterizza rispetto all'intera popolazione dei neonati (gemelli)?

Facciamo un passo indietro...

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione
- La deviazione standard ci dice qual è la distanza "tipica" dalla media



Dati simulati a partire da dati reali, bin size: 250g

Caratterizzare una singola osservazione

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione

$$x = 1454 \text{ g} < \mu = 2404 \text{ g} \quad \rightarrow \quad x - \mu = 1454 \text{ g} - 2404 \text{ g} = -950 \text{ g}$$

→ il neonato pesa meno della media

Caratterizzare una singola osservazione

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione

$$x = 1454 \text{ g} < \mu = 2404 \text{ g} \rightarrow x - \mu = 1454 \text{ g} - 2404 \text{ g} = -950 \text{ g}$$

→ il neonato pesa meno della media

- La deviazione standard ci dice qual è la distanza "tipica" dalla media

$$|x - \mu| = 950 \text{ g} > \sigma = 580 \text{ g}$$

→ il peso è a una distanza maggiore di quella "tipica"

Caratterizzare una singola osservazione

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione

$$x = 1454 \text{ g} < \mu = 2404 \text{ g} \rightarrow x - \mu = 1454 \text{ g} - 2404 \text{ g} = -950 \text{ g}$$

→ il neonato pesa meno della media

- La deviazione standard ci dice qual è la distanza "tipica" dalla media

$$|x - \mu| = 950 \text{ g} > \sigma = 580 \text{ g} \rightarrow \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{-950 \text{ g}}{580 \text{ g}} = -1.87$$

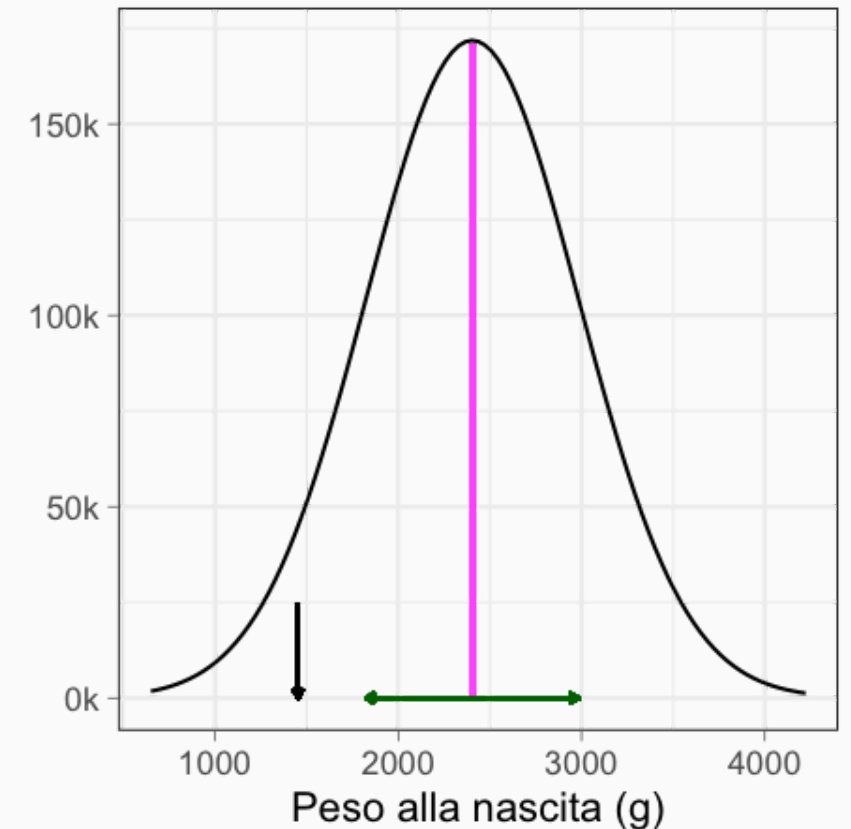
→ il peso è a una distanza maggiore di quella "tipica"

→ è un peso (quasi) "inusuale"

Caratterizzare una singola osservazione

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione
 - il neonato pesa meno della media
- La deviazione standard ci dice qual è la distanza "tipica" dalla media
 - il peso è a una distanza "atipica"
 - è un peso (quasi) "inusuale"



Dati simulati a partire da dati reali, bin size: 250g

Lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- ci dice se un'osservazione è maggiore o minore della media della popolazione
- ci dice se la deviazione di un'osservazione dalla media è grande o piccola rispetto alla deviazione tipica nella popolazione

Esercizio #6

? Quale delle seguenti z -score rappresenta l'osservazione più atipica?

a) -3.20

b) -0.41

c) $+1.10$

d) $+2.40$

? L'osservazione è superiore alla media?

e) Sì f) No

Esercizio #6 -- Soluzione

? Quale delle seguenti z -score rappresenta l'osservazione più atipica?

a) -3.20 

b) -0.41

c) $+1.10$

d) $+2.40$

? L'osservazione è superiore alla media?

e) Sì f) No

Esercizio #6 -- Soluzione

? Quale delle seguenti z -score rappresenta l'osservazione più atipica?

a) -3.20 

b) -0.41

c) $+1.10$

d) $+2.40$

? L'osservazione è superiore alla media?

e) Sì

f) No 

Esercizio #7

? Maria ha subito un trauma cranico a seguito di un incidente e il neurologo che l'ha presa in cura la sottopone a 3 test.

1. Maria deve ascoltare delle parole e ripeterle (memory test). Maria ne ricorda 6, la popolazione generale 7, con una deviazione standard di 1.3 parole
2. Maria deve identificare degli oggetti da dei disegni (object naming test). Maria ne riconosce 7, la popolazione generale 10, con una deviazione standard di 0.59 oggetti
3. Maria ha un elenco di colori scritti con inchiostri diversi e deve dire di quale colore è ciascun inchiostro il più velocemente possibile (Stroop test). Maria impiega 15.7 secondi, la popolazione generale 16.2, con una deviazione standard di 1.30 secondi

Nelle prossime viste, il neurologo deve concentrarsi sulla memoria, sull'abilità di nominare le cose o sull'attenzione di Maria?

Esercizio #7 -- Soluzione

? Maria ha subito un trauma cranico a seguito di un incidente e il neurologo che l'ha presa in cura la sottopone a 3 test.

1. Memory test. $x = 6$; $\mu = 7$, $\sigma = 1.3$

$$z = \frac{6-7}{1.3} = -0.77$$

2. Object naming test. $x = 7$; $\mu = 10$, $\sigma = 0.59$

$$z = \frac{7-10}{0.59} = -5.09$$

3. Stroop test. $x = 15.7$; $\mu = 16.2$, $\sigma = 1.3$

$$z = \frac{15.7-16.2}{1.3} = -0.65$$

Nelle prossime viste, il neurologo deve concentrarsi sulla memoria, sull'abilita di nominare le cose o sull'attenzione di Maria?

Esercizio #7 -- Soluzione

? Maria ha subito un trauma cranico a seguito di un incidente e il neurologo che l'ha presa in cura la sottopone a 3 test.

1. Memory test. $x = 6$; $\mu = 7$, $\sigma = 1.3$

$$z = \frac{6-7}{1.3} = -0.77$$

2. Object naming test. $x = 7$; $\mu = 10$, $\sigma = 0.59$

$$z = \frac{7-10}{0.59} = -5.09$$

3. Stroop test. $x = 15.7$; $\mu = 16.2$, $\sigma = 1.3$

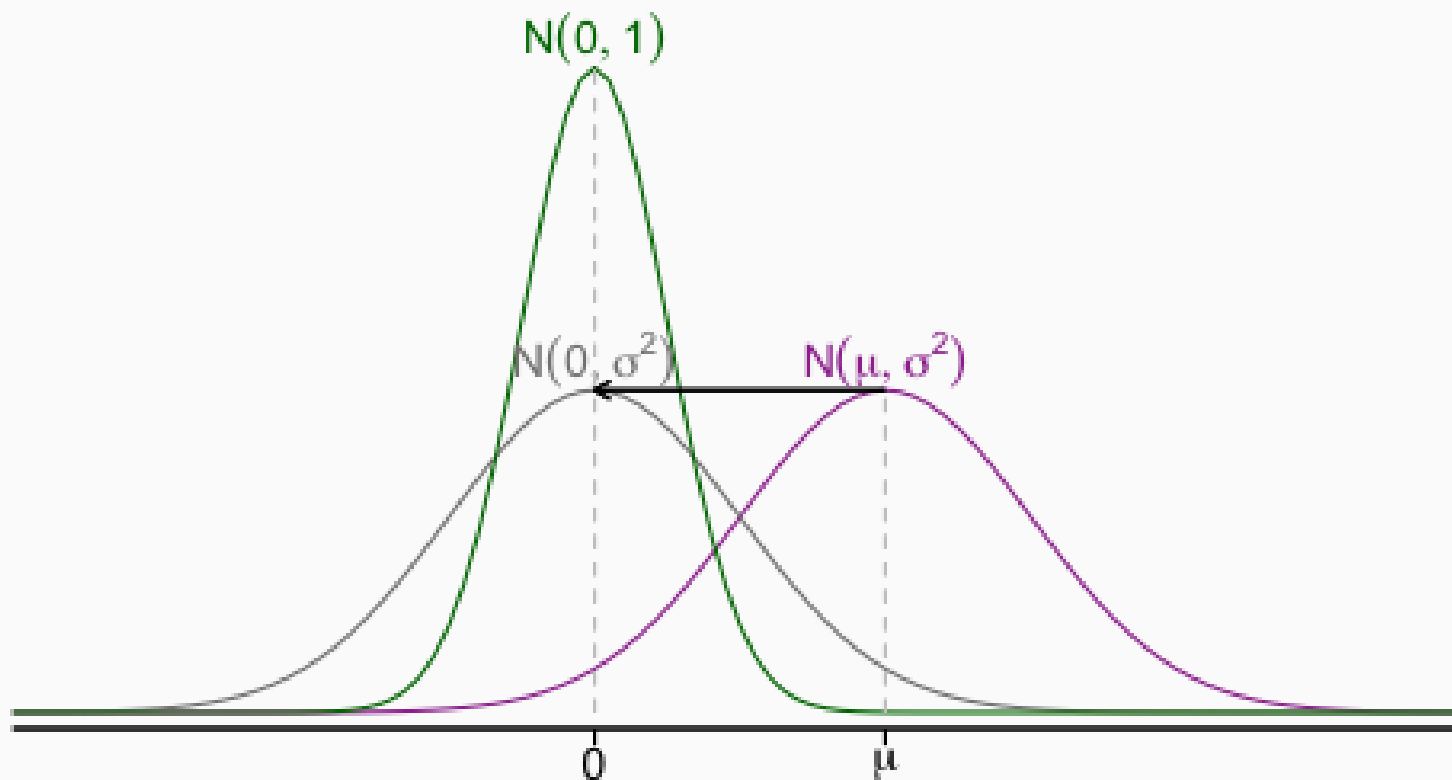
$$z = \frac{15.7-16.2}{1.3} = -0.65$$

Nelle prossime viste, il neurologo deve concentrarsi sulla memoria, sull'abilita di nominare le cose o sull'attenzione di Maria?

→ sull'abilita di nominare le cose

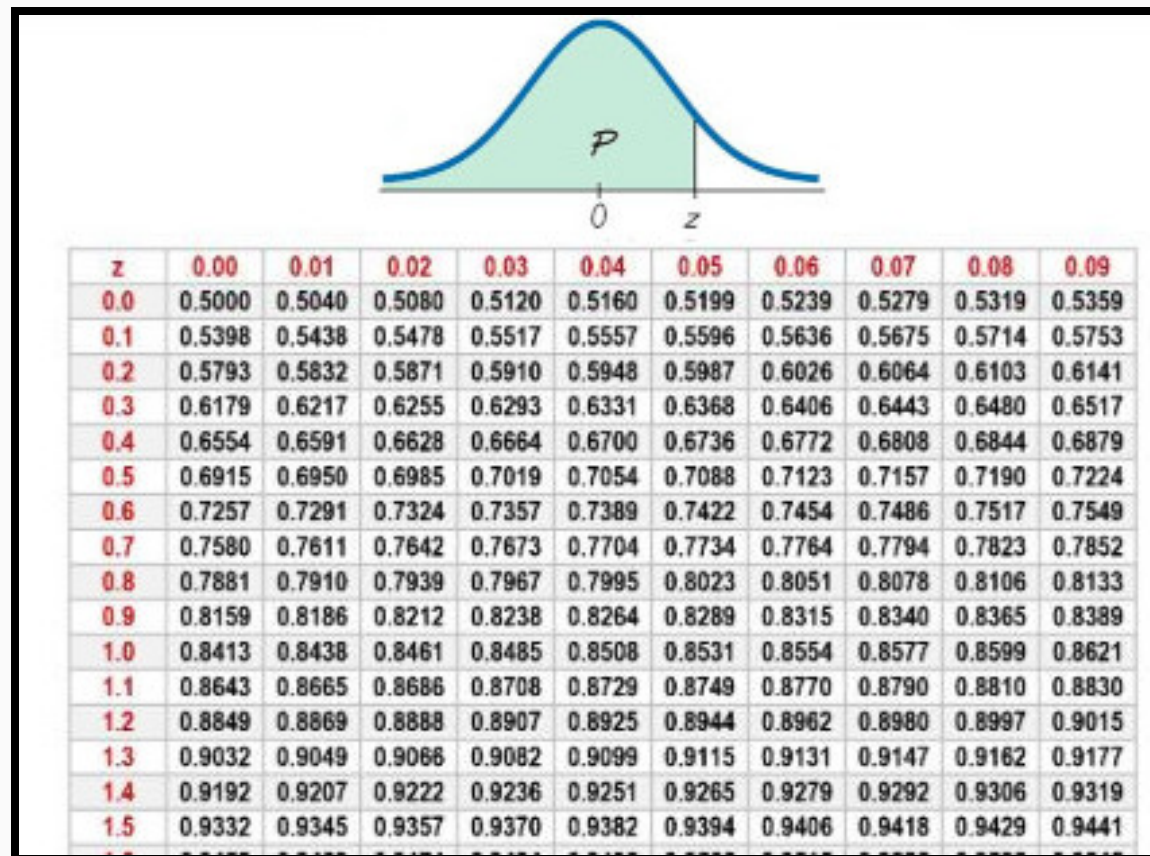
La standardizzazione

- $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
- $\mathcal{N} = (\mu, \sigma^2) \rightarrow Z = (0, 1)$



La distribuzione Normale standardizzata

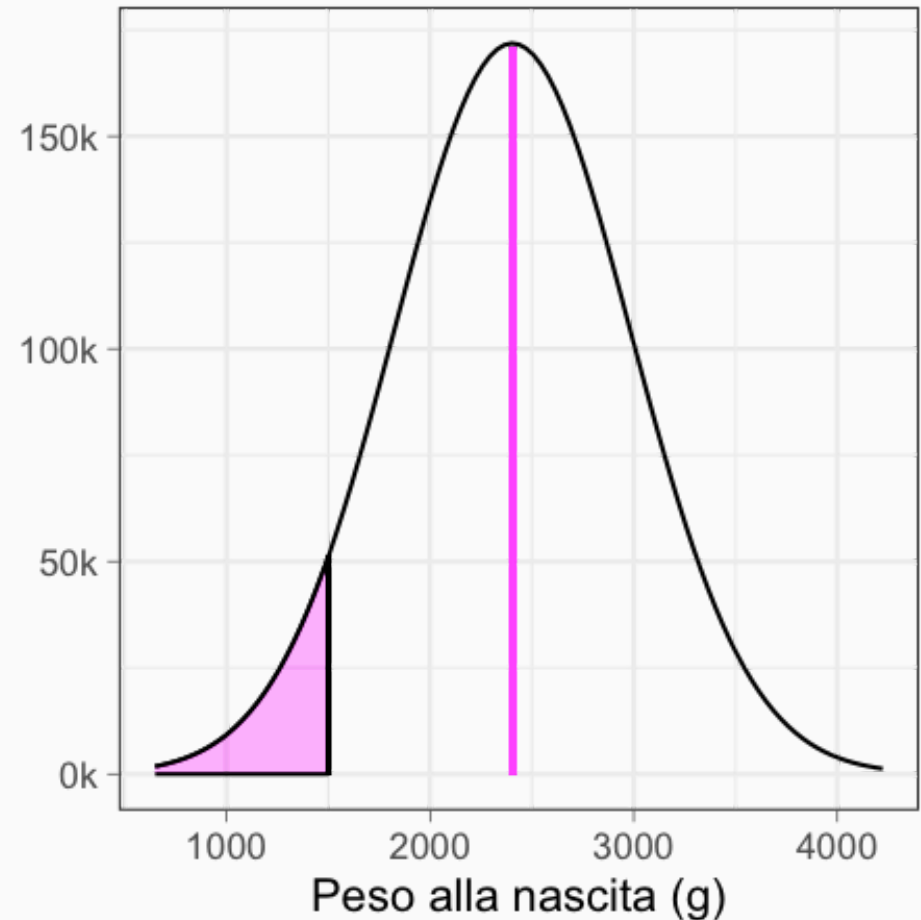
- $Z = (0, 1)$
- Area sottesa alla curva = 1
- proporzione \equiv probabilità



Proporzione \equiv probabilità

- 6% dei gemelli nascono con un peso molto basso
- La probabilità di nascere con un peso molto basso è 0.06

Ma come è stato calcolato?



Dati simulati a partire da dati reali, bin size: 250g

Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità, per un gemello, di nascere con un peso molto basso?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità, per un gemello, di nascere con un peso molto basso?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

Calcoliamo la probabilità/proporzione

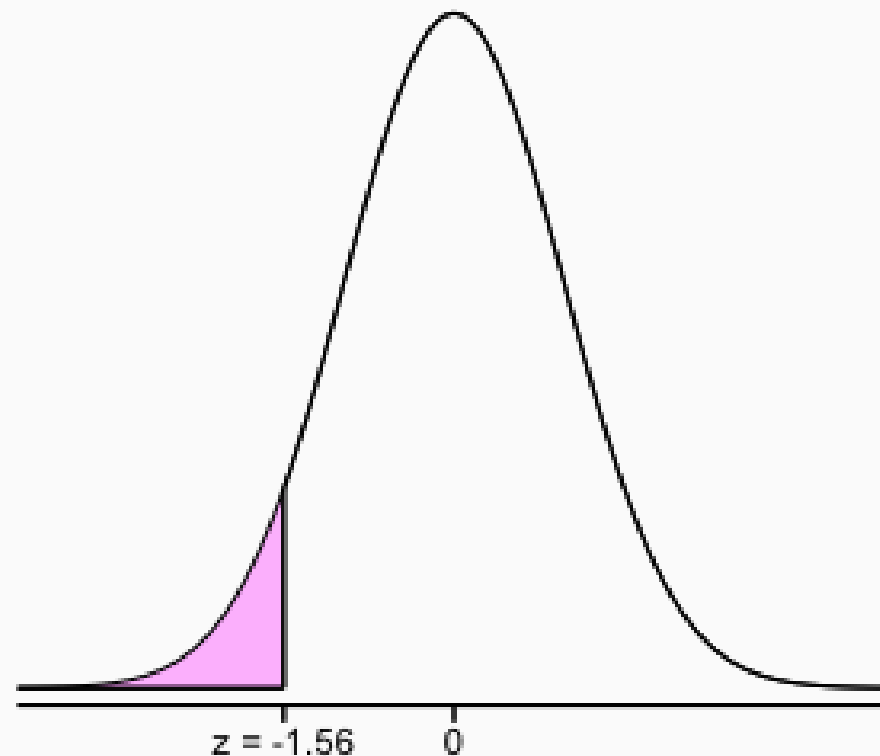
Qual è la probabilità, per un gemello, di nascere con un peso molto basso?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

2. Identifichiamo l'area



Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità, per un gemello, di nascere con un peso molto basso?

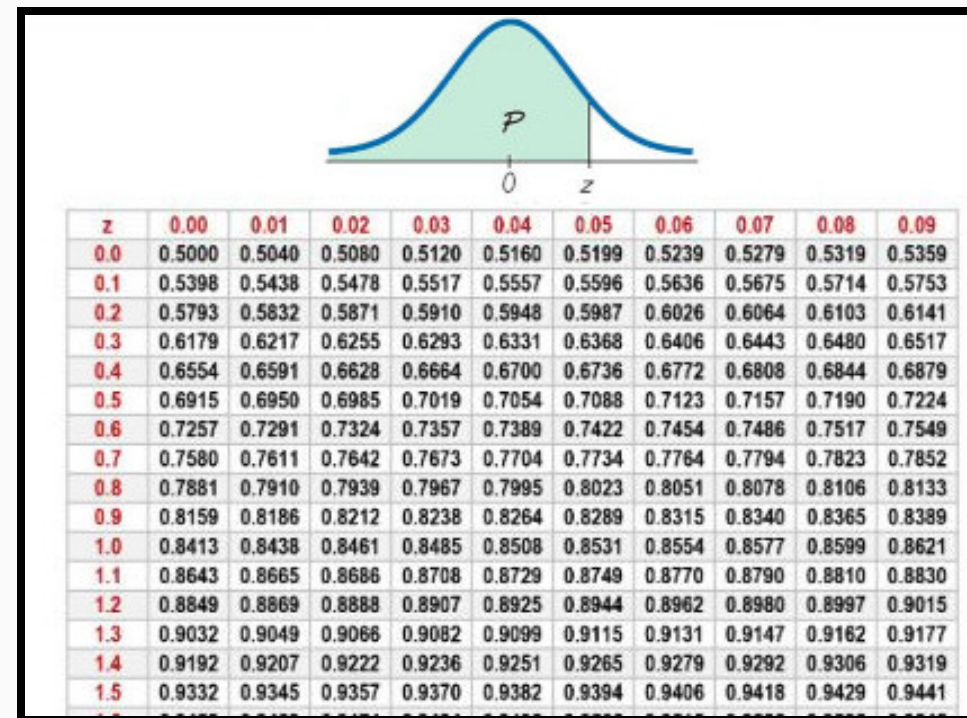
$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

2. Identifichiamo l'area

3. Cerchiamo lo z -score sulle tavole e ragioniamo sull'area identificata



Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità, per un gemello, di nascere con un peso molto basso?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

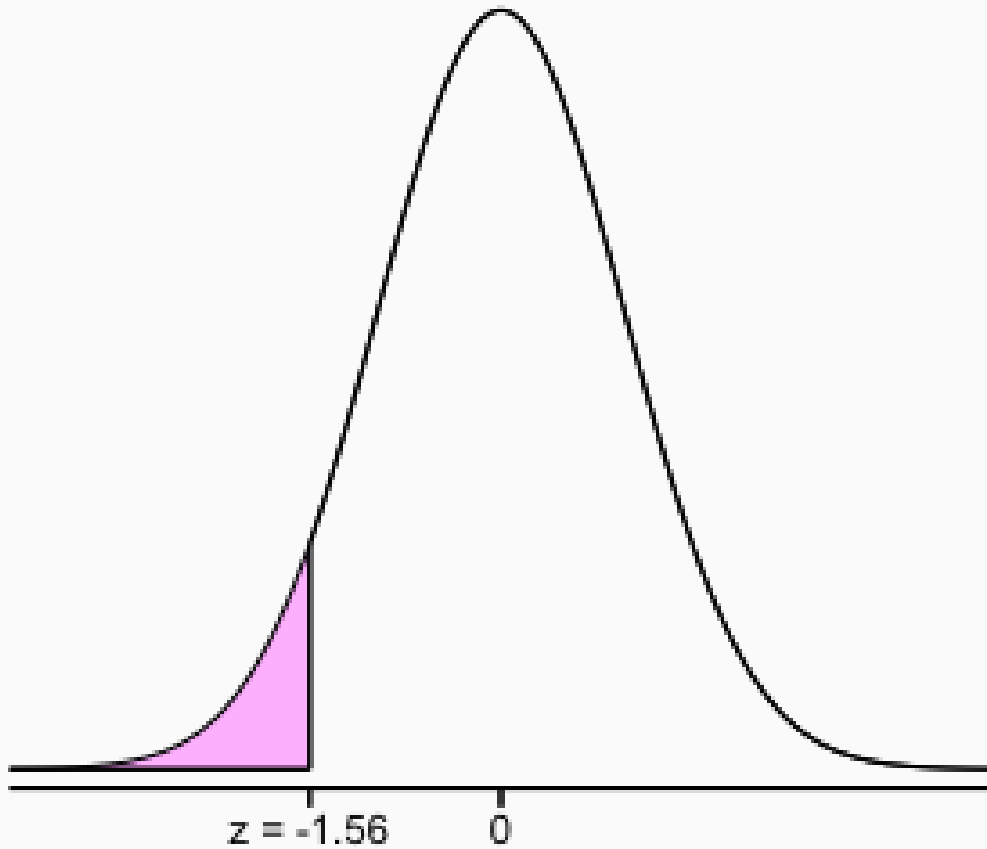
2. Identifichiamo l'area

3. Cerchiamo lo z -score sulle tavole e
ragioniamo sull'area identificata
→ non ci sono z -score negativi

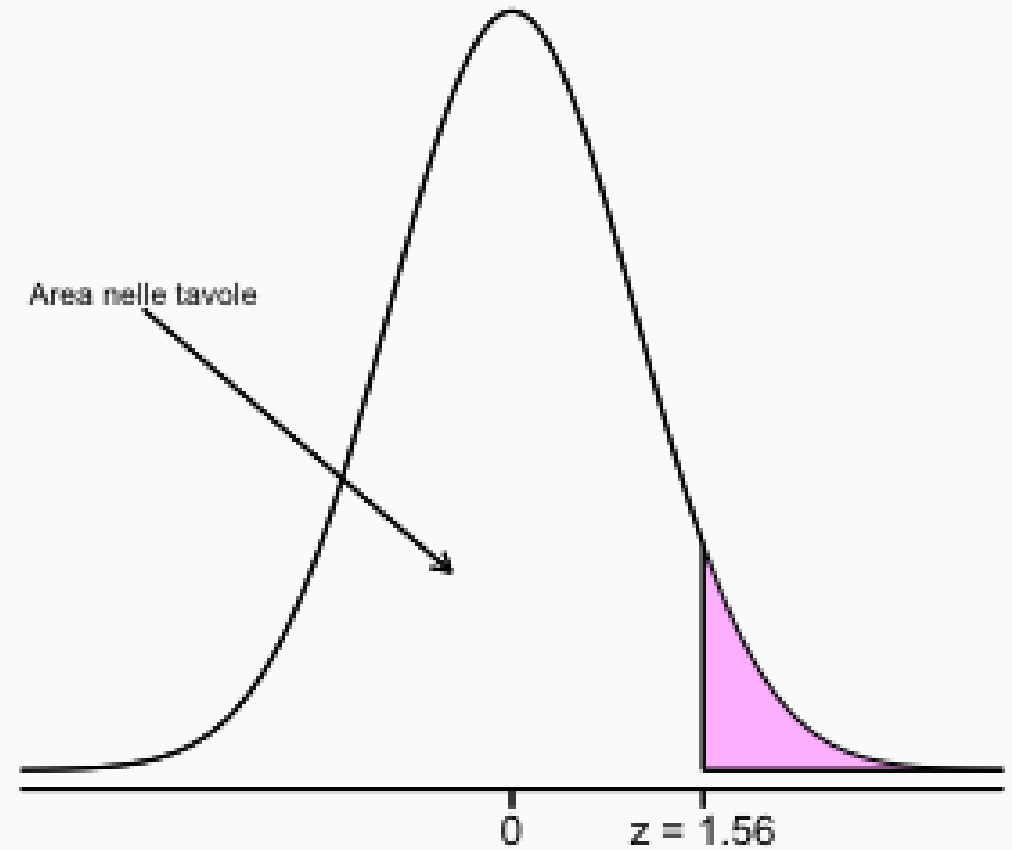


Ragioniamo sulle aree...

Ragioniamo sulle aree...



Ragioniamo sulle aree...



Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità, per un gemello, di nascere con un peso molto basso?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

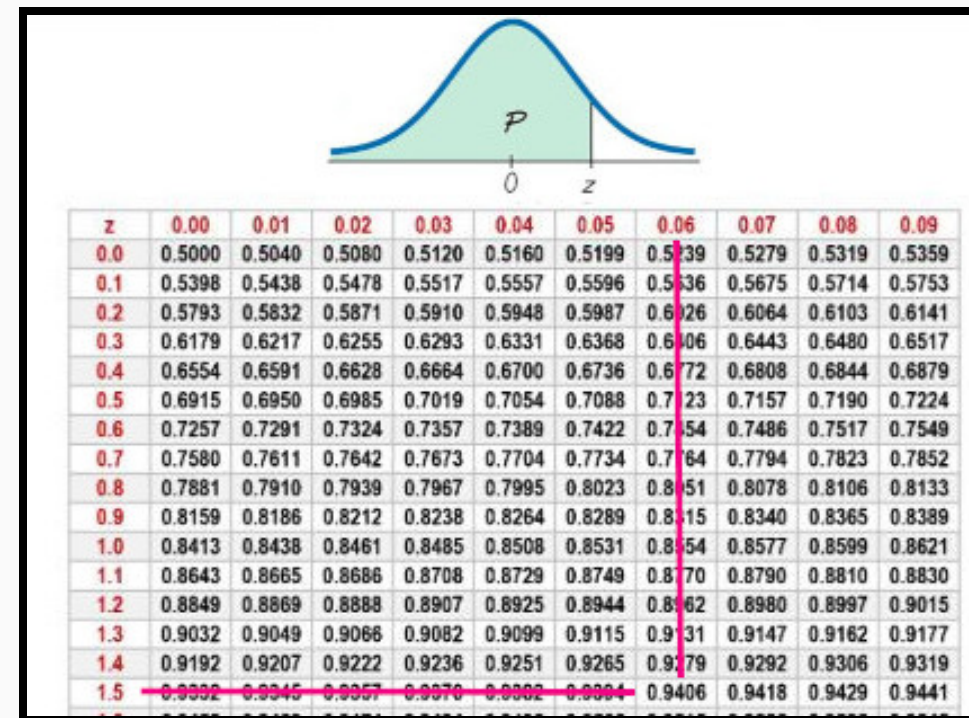
1. Calcoliamo lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

2. Identifichiamo l'area

3. Cerchiamo lo z -score sulle tavole e ragioniamo sull'area identificata

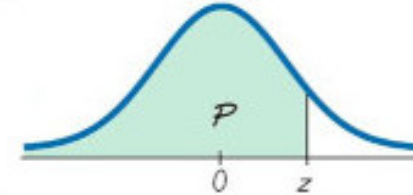
$$P = 1 - 0.9406 = 0.0594 \rightarrow 5.94\%$$



Esercizio #8

? Non sapendo che il bambino ha un gemello, il pediatra dice alla madre che un peso alla nascita inferiore ai 2500g è inusuale. La madre deve preoccuparsi?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

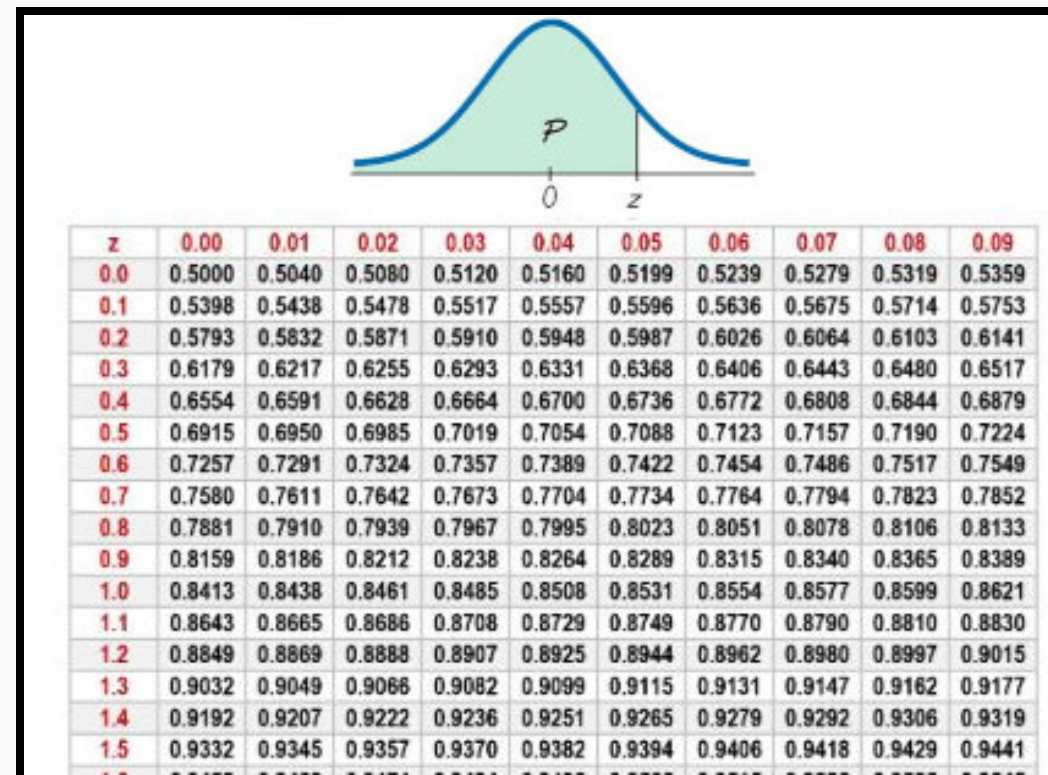
Esercizio #8 -- Soluzione

? Non sapendo che il bambino ha un gemello, il pediatra dice alla madre che un peso alla nascita inferiore ai 2500g è inusuale. La madre deve preoccuparsi?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2500 - 2404}{580} = \frac{96}{580} = 0.17$$



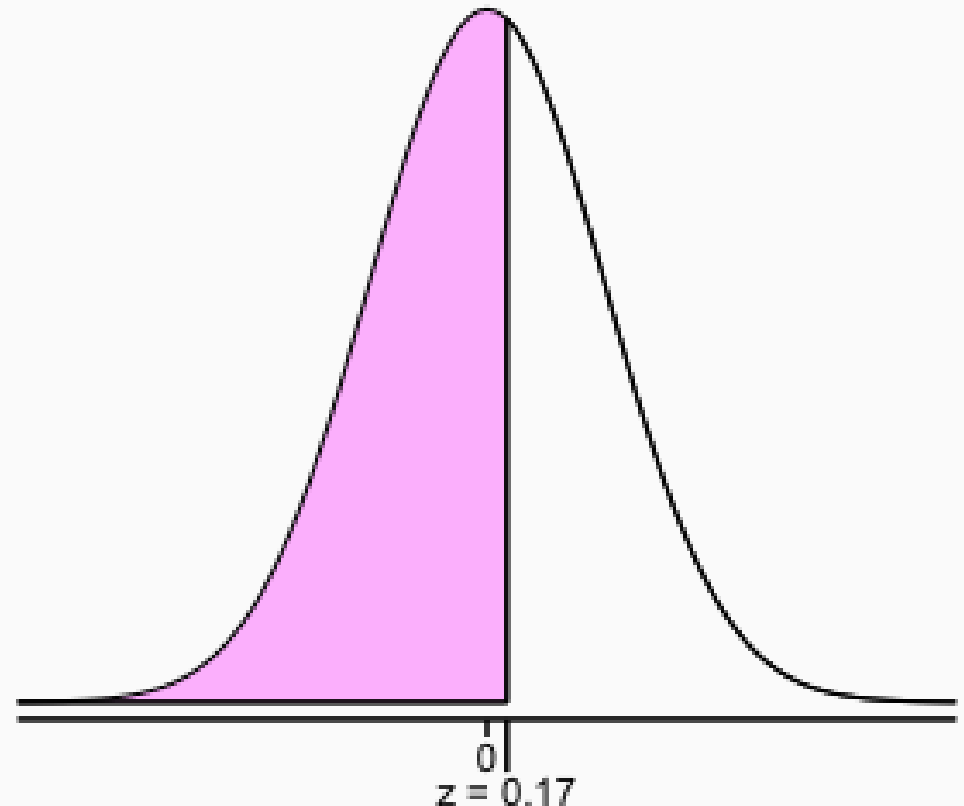
Esercizio #8 -- Soluzione

? Non sapendo che il bambino ha un gemello, il pediatra dice alla madre che un peso alla nascita inferiore ai 2500g è inusuale. La madre deve preoccuparsi?

1. Calcoliamo lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2500 - 2404}{580} = \frac{96}{580} = 0.17$$

2. Identifichiamo l'area



Esercizio #8 -- Soluzione

? Non sapendo che il bambino ha un gemello, il pediatra dice alla madre che un peso alla nascita inferiore ai 2500g è inusuale. La madre deve preoccuparsi?

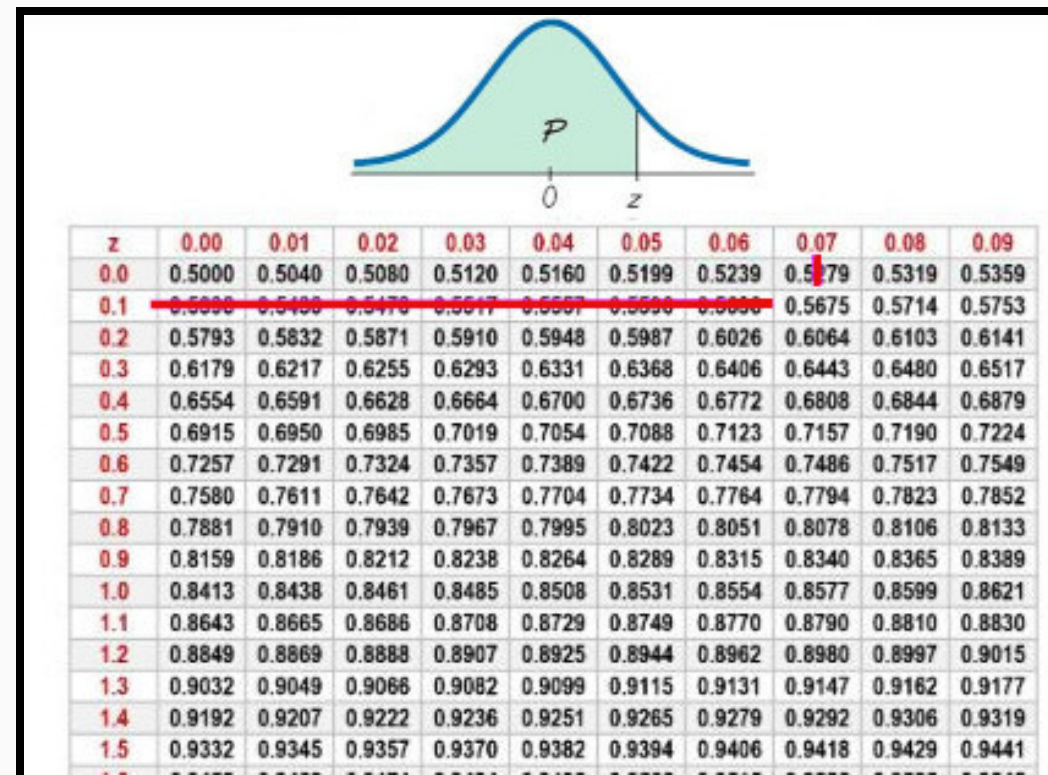
1. Calcoliamo lo z -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2500 - 2404}{580} = \frac{96}{580} = 0.17$$

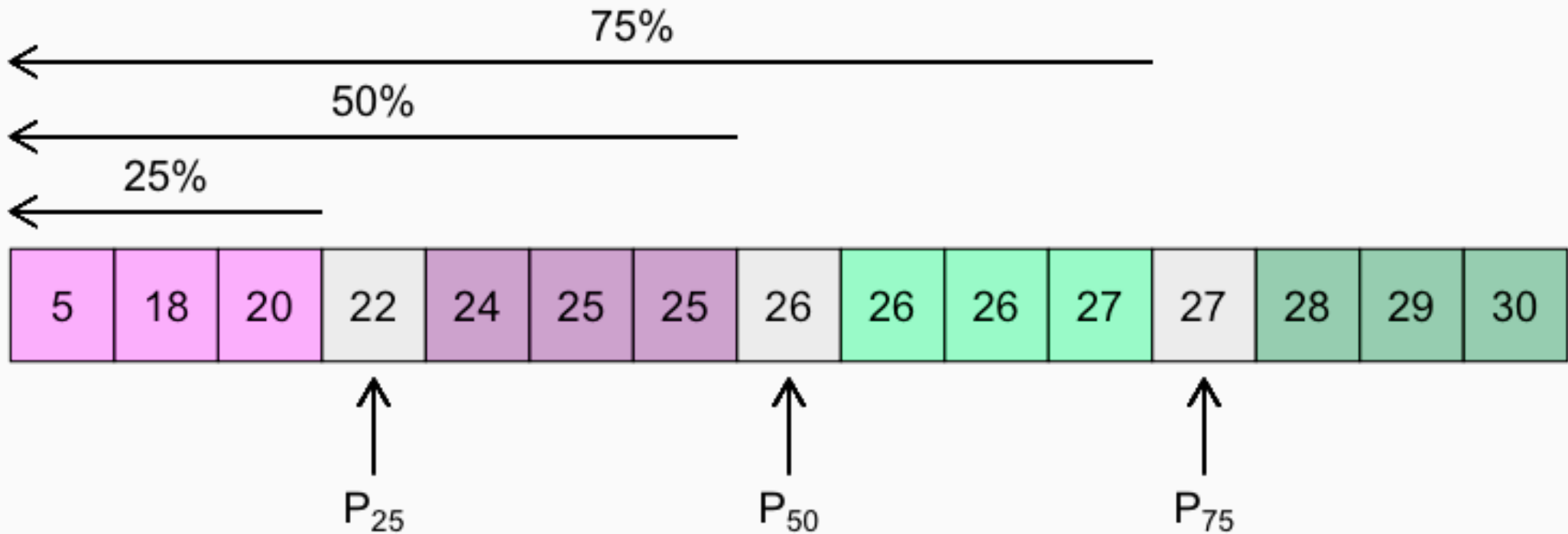
2. Identifichiamo l'area

3. Cerchiamo lo z -score sulle tavole e ragioniamo sull'area identificata

$$P = 0.5675 \rightarrow 56.75\%$$



Percentili



$\mathcal{P} = 56.75\%$ ci dice che il nostro bambino è nel 56.75^o percentile

Cosa abbiamo imparato in questa lezione?

- Diversi fenomeni naturali sono normalmente distribuiti
- La distribuzione Normale è definita dalla media e dalla deviazione standard e corrisponde a una distribuzione di probabilità
- La distribuzione (Normale) di una popolazione ci fornisce la probabilità di estrarre un individuo da quella popolazione, ma anche la sua frequenza
- Se i dati sono normalmente distribuiti, il 68% della popolazione si trova a 1σ dalla media, il 95% a 2σ e il 99.7% a 3σ
- Lo z -score ci permette di "posizionare" un'osservazione rispetto alla popolazione e di confrontare più distribuzioni (anche molto diverse)