

# **La distribuzione Normale**

# Obiettivi di apprendimento

- Conoscere le caratteristiche della distribuzione Normale e Normale Standardizzata
- Calcolare e interpretare lo  $z$ -score
- Calcolare la proporzione di individui in una popolazione con una determinata caratteristica
- Calcolare la probabilità di avere degli individui in una popolazione con una determinata caratteristica

# Le fasi della ricerca



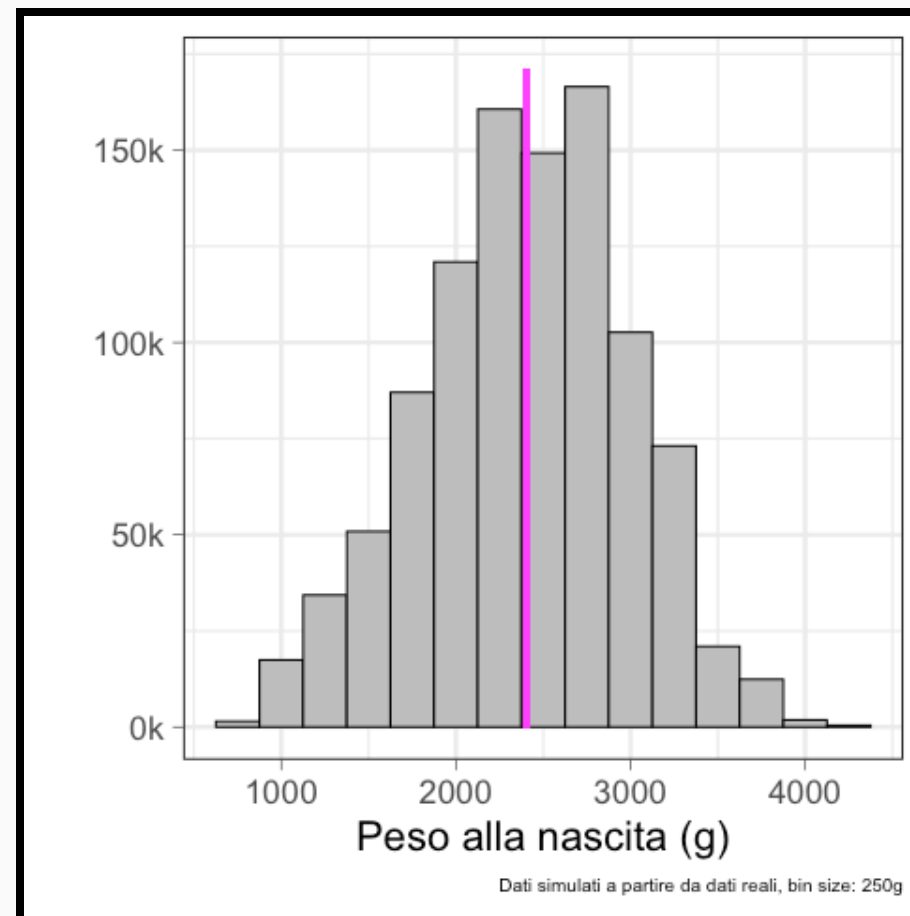
# La distribuzione della popolazione

Qual è la distribuzione del peso  
alla nascita per i gemelli inglesi?

# La distribuzione della popolazione

Qual è la distribuzione del peso alla nascita per i gemelli inglesi?

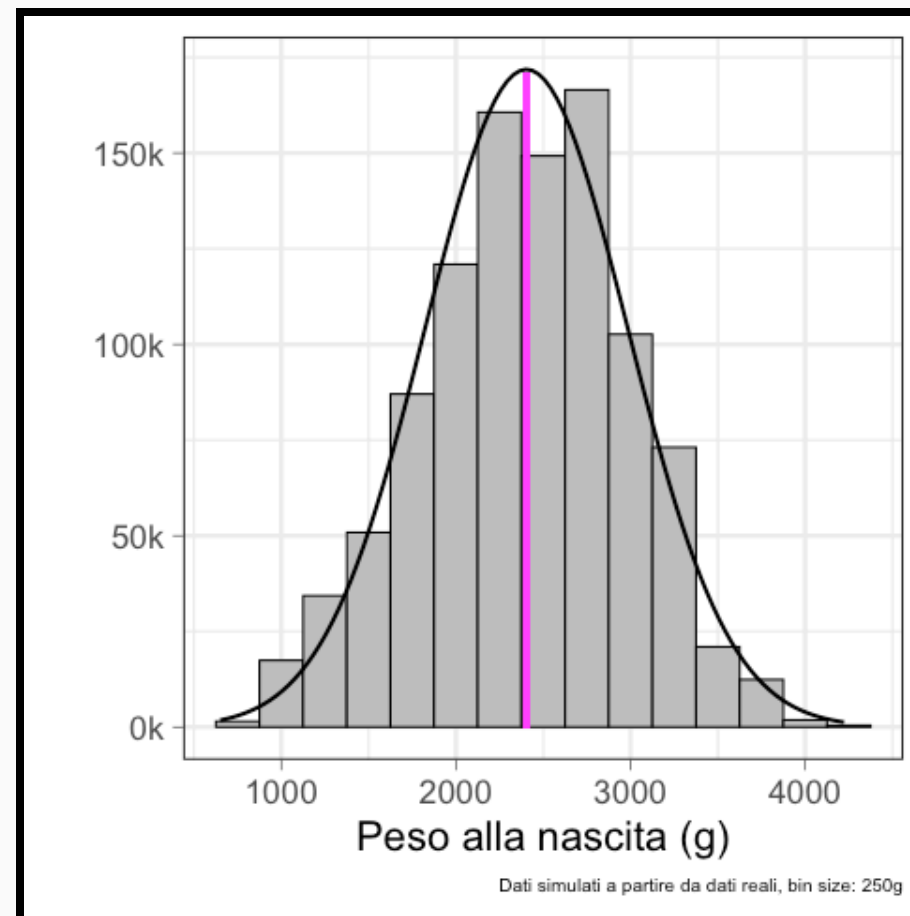
$$\begin{aligned} N &= 1\text{M} \\ \text{mediana} &= 2408 \text{ g} \\ \mu &= 2404 \text{ g}; \sigma = 580 \text{ g} \end{aligned}$$



# La distribuzione della popolazione

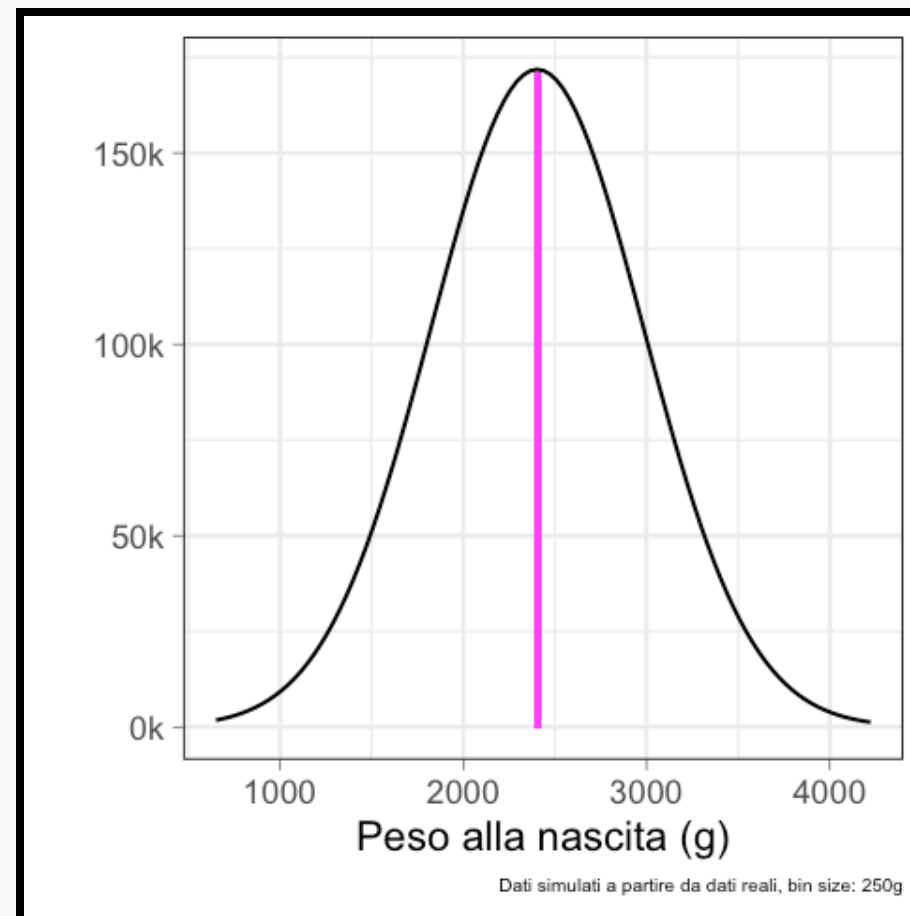
Qual è la distribuzione del peso alla nascita per i gemelli inglesi?

$$\begin{aligned} N &= 1\text{M} \\ \text{mediana} &= 2408 \text{ g} \\ \mu &= 2404 \text{ g}; \sigma = 580 \text{ g} \end{aligned}$$



# La distribuzione Normale

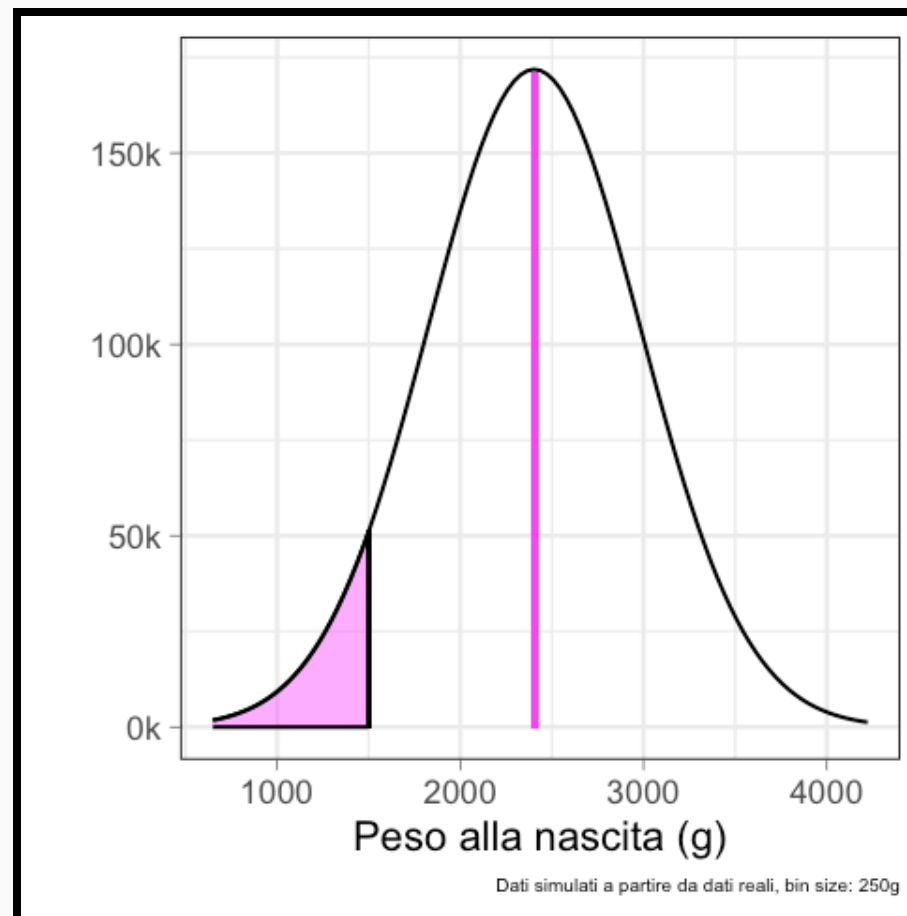
- $\mathcal{N} = (\mu, \sigma^2)$
- moda  $\equiv$  media  $\equiv$  mediana
- Simmetrica



# La distribuzione Normale

- Area sottesa alla curva = 1
- proporzione  $\equiv$  probabilità

“very low birth weight” < 1500 g  
Gemelli “very low birth weight” = 6%  
 $\mathcal{P}(\text{“}\beta \text{ very low birth weight”}) = 0.06$



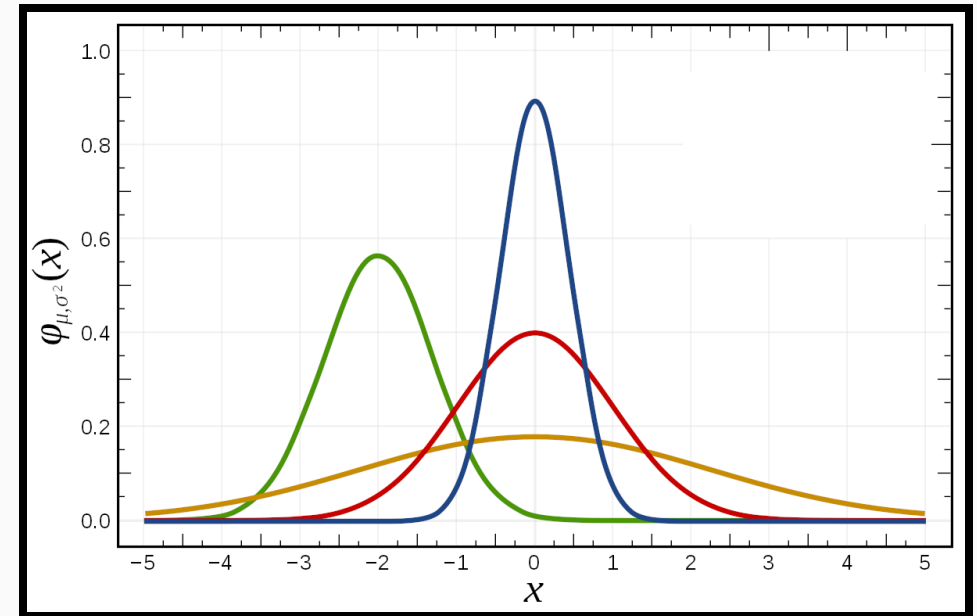


# Esercizio #1



Qual è la curva con la media più grande?

- a) Verde
- b) Blu
- c) Gialla
- d) Non lo posso sapere
- e) Nessuna delle precedenti

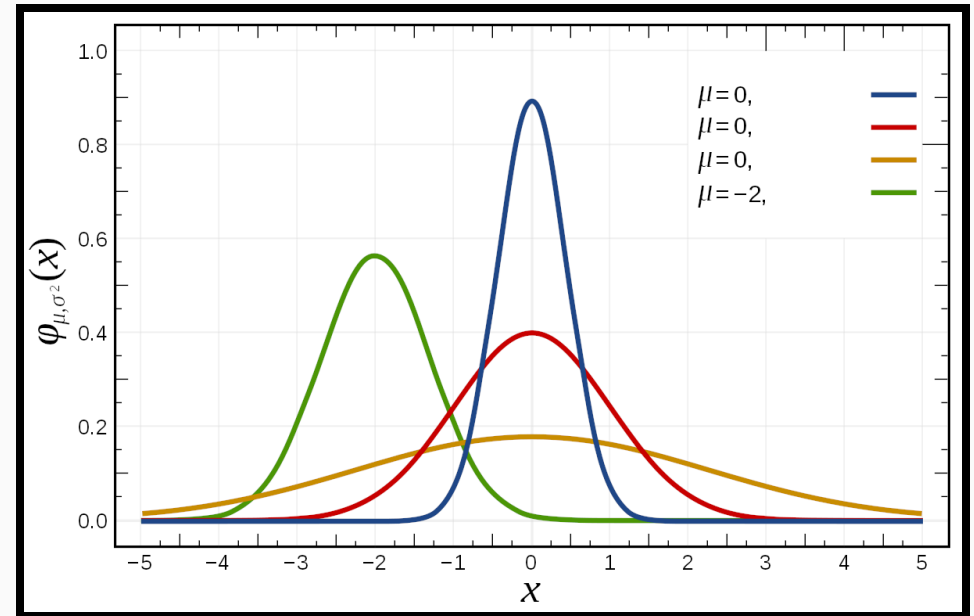


# Esercizio #1 -- Soluzione



Qual è la curva con la media più grande?

- a) Verde
- b) Blu
- c) Gialla
- d) Non lo posso sapere
- e) Nessuna delle precedenti

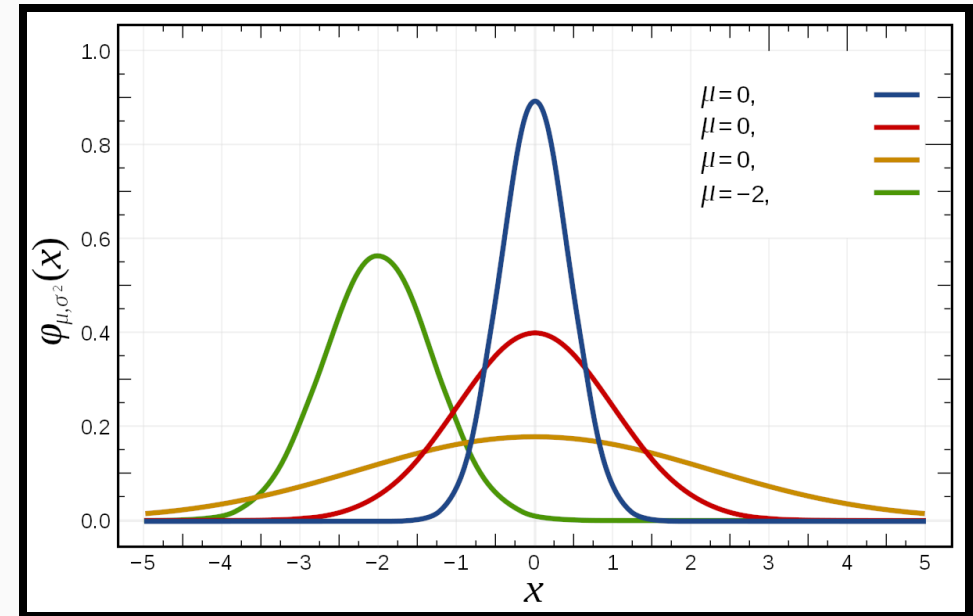


# Esercizio #2



Qual è la curva con la deviazione standard più grande?

- a) Verde
- b) Blu
- c) Gialla
- d) Non lo posso sapere
- e) Nessuna delle precedenti

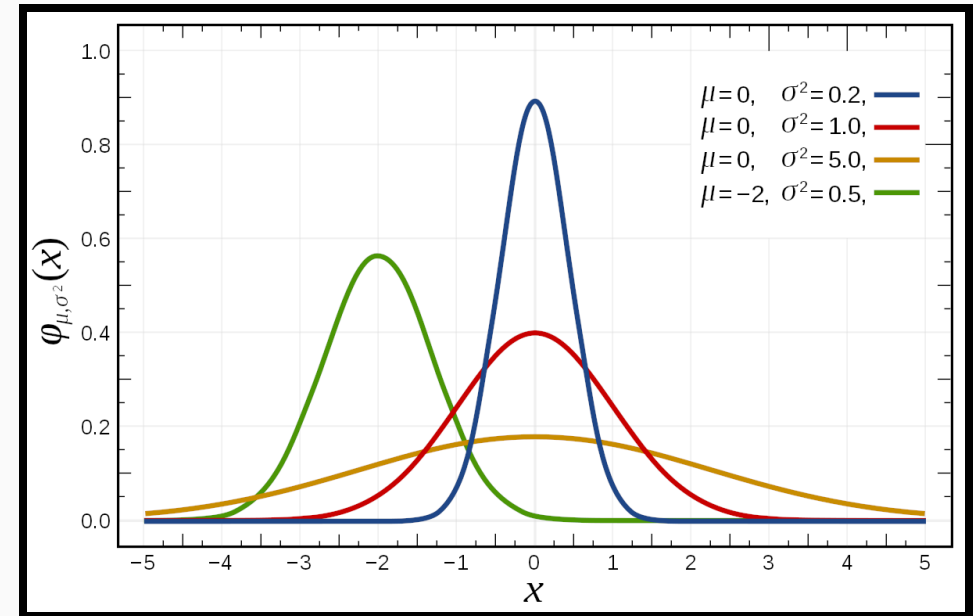


# Esercizio #2 -- Soluzione



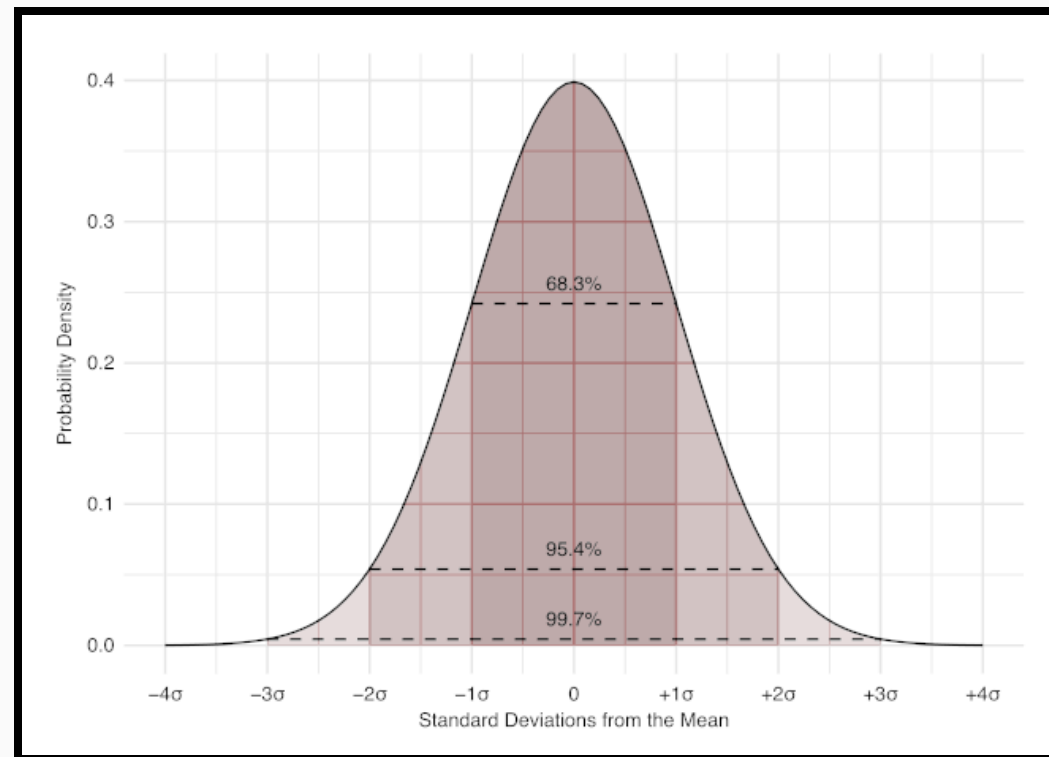
Qual è la curva con la deviazione standard più grande?

- a) Verde
- b) Blu
- c) Gialla ☒
- d) Non lo posso sapere
- e) Nessuna delle precedenti

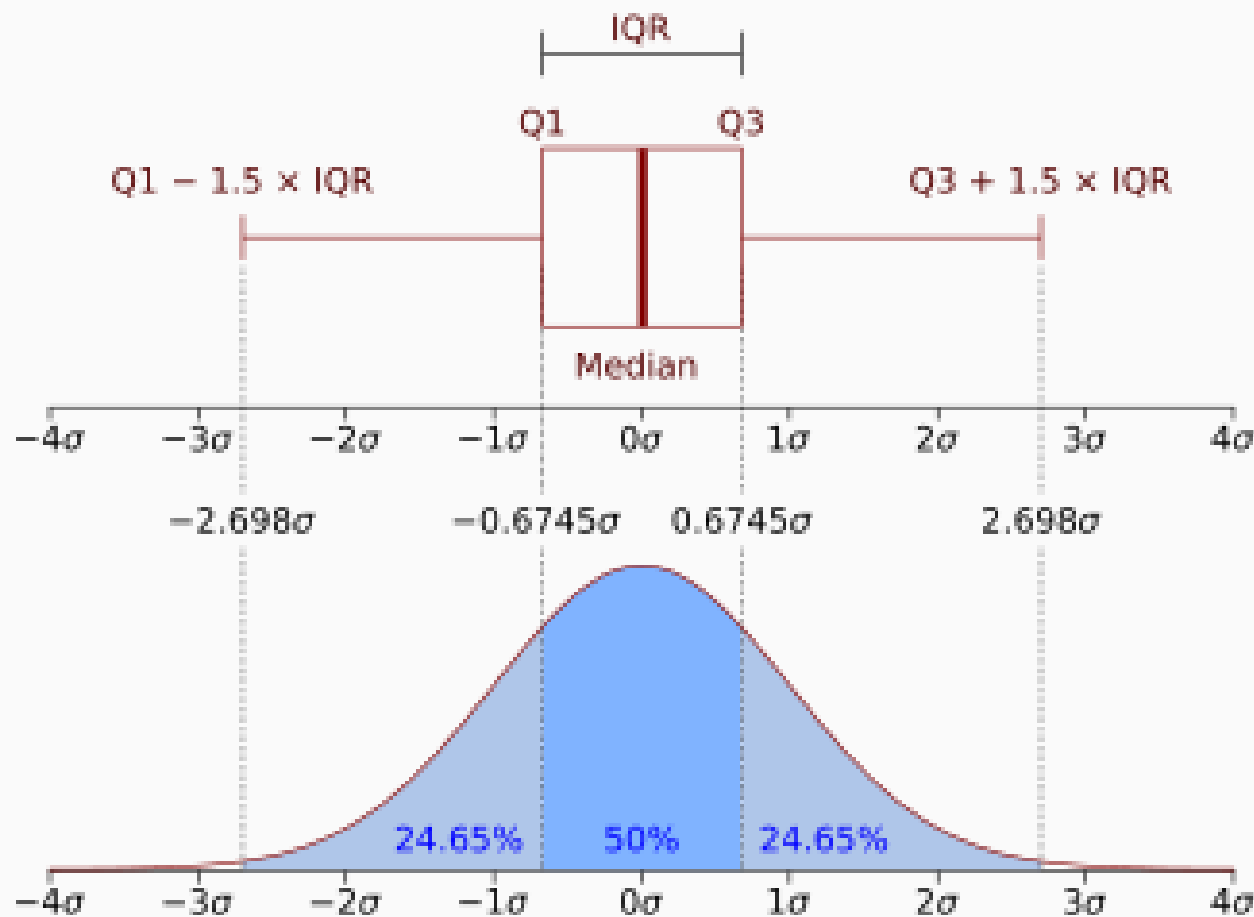


# La distribuzione Normale

- Regola del 3  $\sigma$ :
  - 68% dei valori osservati sono a 1  $\sigma$  dalla media
  - 95% sono a 2  $\sigma$
  - 99.7% sono a 3  $\sigma$
- Regola empirica:
  - valori  $< 2\sigma$  sono "*comuni*"
  - valori  $> 2\sigma$  sono "*inusuali*"
  - valori  $> 3\sigma$  sono "*estremi*"



# I valori estremi



## Esercizio #3

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

- a) La mediana
- b) La proporzione di italiani con altezza  $> 170$  cm
- c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"
- d) L'altezza più comune
- e) L'italiano più alto di sempre

## Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

a) La mediana  $\rightarrow$  coincide con la media = 170 cm

b) La proporzione di italiani con altezza  $> 170$



## Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

a) La mediana  $\rightarrow$  170cm

b) La proporzione di italiani con altezza  $> 170$  cm  $\rightarrow$  sono quelli a destra della mediana, la metà dell'area sottesa dalla curva = 50%

c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"

## Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

a) La mediana  $\rightarrow$  170cm

b) La proporzione di italiani con altezza  $> 170$  cm  $\rightarrow$  50%

c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"  $\rightarrow$  sono quelli  $> 2$  deviazioni standard dalla media  
 $= 170 - 9.5 \times 2 = 151$  cm e  $170 + 9.5 \times 2 = 189$  cm

d) L'altezza più comune

## Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

- a) La mediana  $\rightarrow$  170cm
- b) La proporzione di italiani con altezza  $> 170$  cm  $\rightarrow$  50%
- c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"  
 $\rightarrow < 151$  cm e  $> 189$  cm
- d) L'altezza più comune  $\rightarrow$  è la moda, che coincide con la media  
e la mediana = 170 cm
- e) L'italiano più alto di sempre

## Esercizio #3 -- Soluzione

? L'altezza della popolazione maschile italiana si distribuisce secondo una normale con media 170 cm e deviazione standard 9.5 cm

E' possibile calcolare i seguenti valori? Se sì, quali sono?

- a) La mediana  $\rightarrow$  170cm
- b) La proporzione di italiani con altezza  $> 170$  cm  $\rightarrow$  50%
- c) I "range" di altezze considerabili come "inusuali" o "estremi"  
 $\rightarrow < 151$  cm e  $> 189$  cm
- d) L'altezza più comune  $\rightarrow$  170 cm
- e) L'italiano più alto di sempre  $\rightarrow$  non si può calcolare

# Esercizio #4

Table 1. Demographic Characteristics of the Participants		
Characteristic	All Participants (N=277)	
	Oxytocin (N=139)	Placebo (N=138)
Age		
Mean — yr	10.4±4.1	10.4±4.0
Distribution — no. (%)		
3–6 yr	34 (24)	35 (25)
7–11 yr	54 (39)	53 (38)
12–17 yr	51 (37)	50 (36)
Sex — no. (%)		
Male	122 (88)	120 (87)
Female	17 (12)	18 (13)



Indicativamente, in quale range di età è compreso il 68% dei pazienti nel gruppo di intervento?

- a) 3 – 17 anni
- b) 6.3 – 14.5 anni
- c) 4.1 – 16.7 anni
- d) Non è possibile dirlo

Sikich, L. et al., *Intranasal Oxytocin in Children and Adolescents with Autism Spectrum Disorder*, NEJM, 2021


02:00

# Esercizio #4 -- Soluzione

Table 1. Demographic Characteristics of the Participants		
Characteristic	All Participants (N=277)	
	Oxytocin (N=139)	Placebo (N=138)
Age		
Mean — yr	10.4±4.1	10.4±4.0
Distribution — no. (%)		
3–6 yr	34 (24)	35 (25)
7–11 yr	54 (39)	53 (38)
12–17 yr	51 (37)	50 (36)
Sex — no. (%)		
Male	122 (88)	120 (87)
Female	17 (12)	18 (13)



Indicativamente, in quale range di età è compreso il 68% dei pazienti nel gruppo di intervento?

- a) 3 – 17 anni
- b) 6.3 – 14.5 anni 
- c) 4.1 – 16.7 anni
- d) Non è possibile dirlo

Sikich, L. et al., *Intranasal Oxytocin in Children and Adolescents with Autism Spectrum Disorder*, NEJM, 2021

## Esercizio #5

? Con quale probabilità si potrà trovare nella popolazione soggetti con valori superiori al terzo quartile?

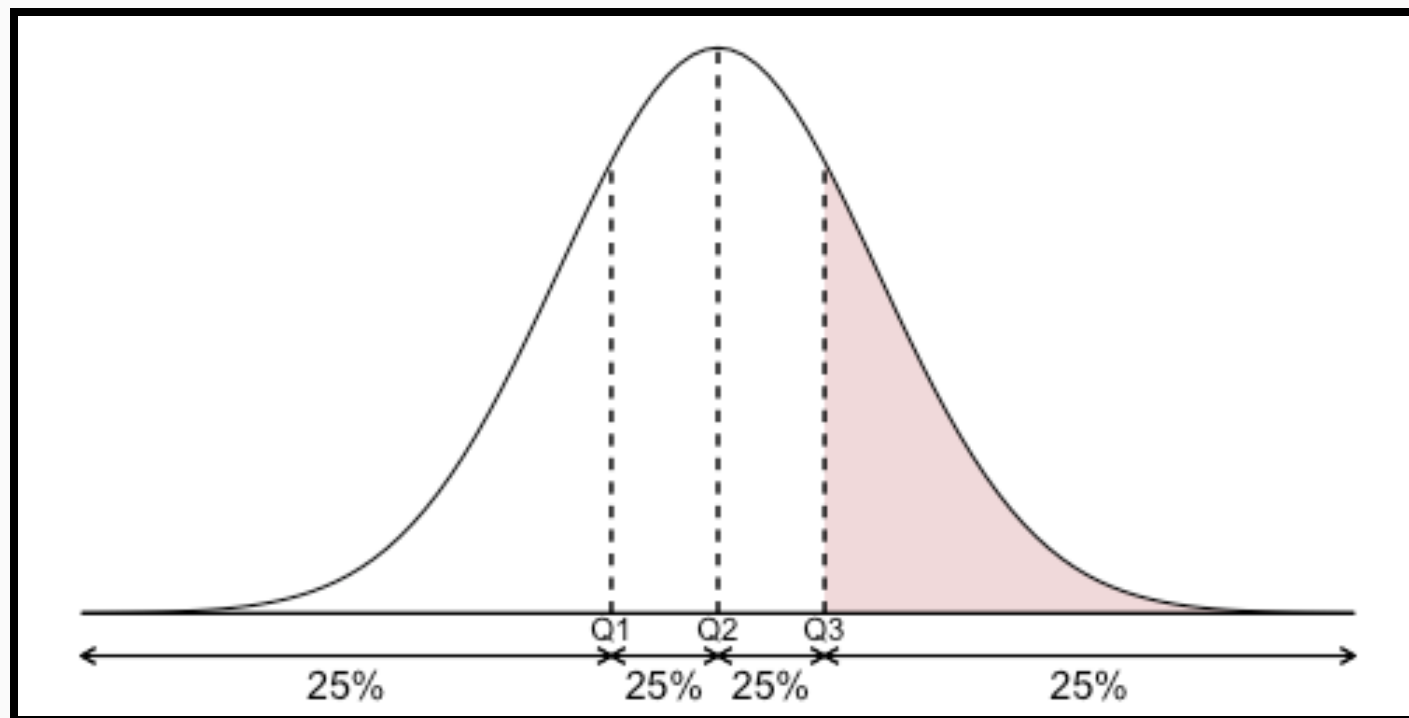
a) 25%

b) 50%

c) 75%

d) Servono più informazioni per poter rispondere


## Esercizio #5 -- Soluzione





## Esercizio #5 -- Soluzione

? Con quale probabilità si potrà trovare nella popolazione soggetti con valori superiori al terzo quartile?

a) 25% 

b) 50%

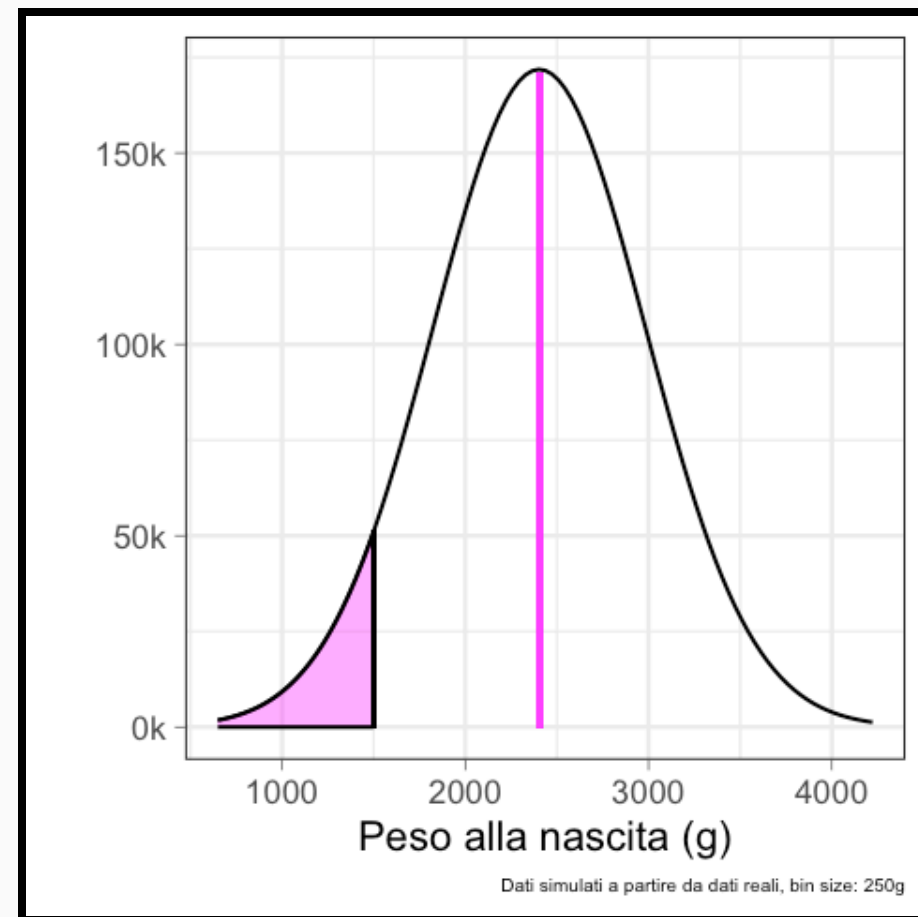
c) 75%

d) Servono più informazioni per poter rispondere

# Proporzione $\equiv$ probabilità

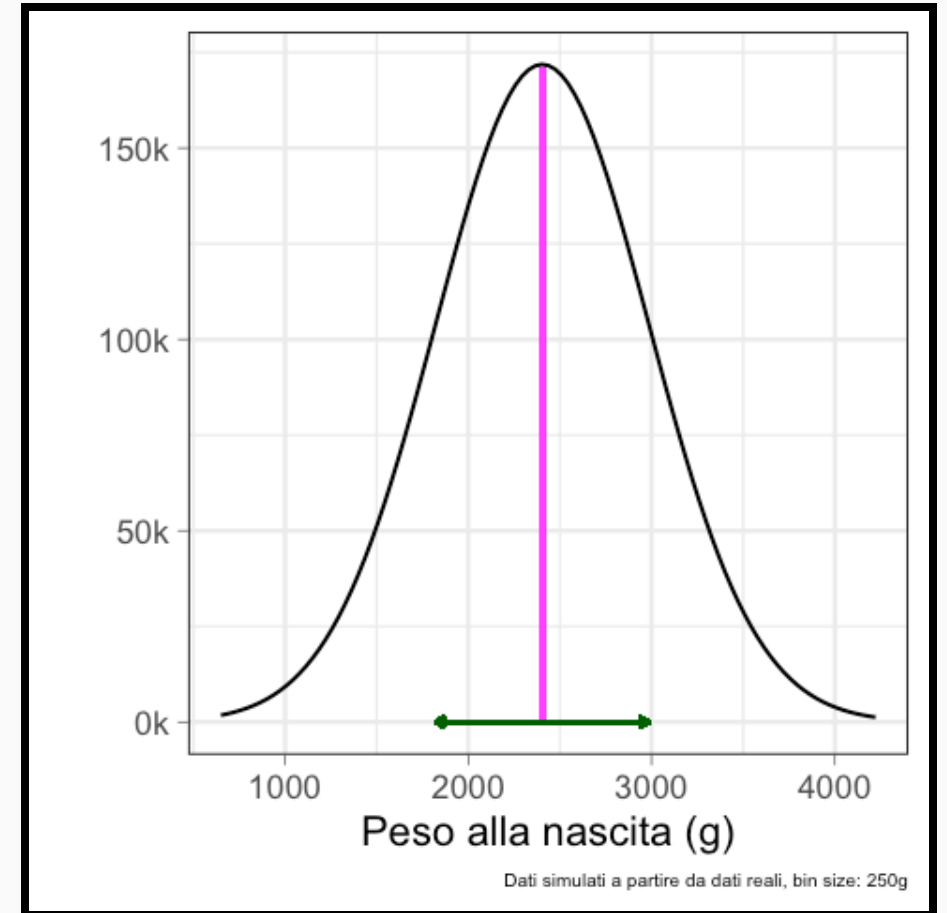
- 6% dei gemelli sono "very low birth weight"
- La probabilità essere "very low birth weight" è 0.06

Ma come è stato calcolato?



# Facciamo un passo indietro...

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione
- La deviazione standard ci dice qual è la distanza "tipica" dalla media



# Per un neonato con "very low birth weight"

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione

$$x = 1454 \text{ g} < \mu = 2404 \text{ g} \quad \rightarrow \quad x - \mu = 1454 \text{ g} - 2404 \text{ g} = -950 \text{ g}$$

→ il neonato pesa meno della media

# Per un neonato con "very low birth weight"

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione

$$x = 1454 \text{ g} < \mu = 2404 \text{ g} \rightarrow x - \mu = 1454 \text{ g} - 2404 \text{ g} = -950 \text{ g}$$

→ il neonato pesa meno della media

- La deviazione standard ci dice qual è la distanza "tipica" dalla media

$$|x - \mu| = 950 \text{ g} > \sigma = 580 \text{ g}$$

→ il peso è a una distanza maggiore di quella "tipica"

# Per un neonato con "very low birth weight"

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione

$$x = 1454 \text{ g} < \mu = 2404 \text{ g} \rightarrow x - \mu = 1454 \text{ g} - 2404 \text{ g} = -950 \text{ g}$$

→ il neonato pesa meno della media

- La deviazione standard ci dice qual è la distanza "tipica" dalla media

$$|x - \mu| = 950 \text{ g} > \sigma = 580 \text{ g} \rightarrow \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{-950 \text{ g}}{580 \text{ g}} = -1.87$$

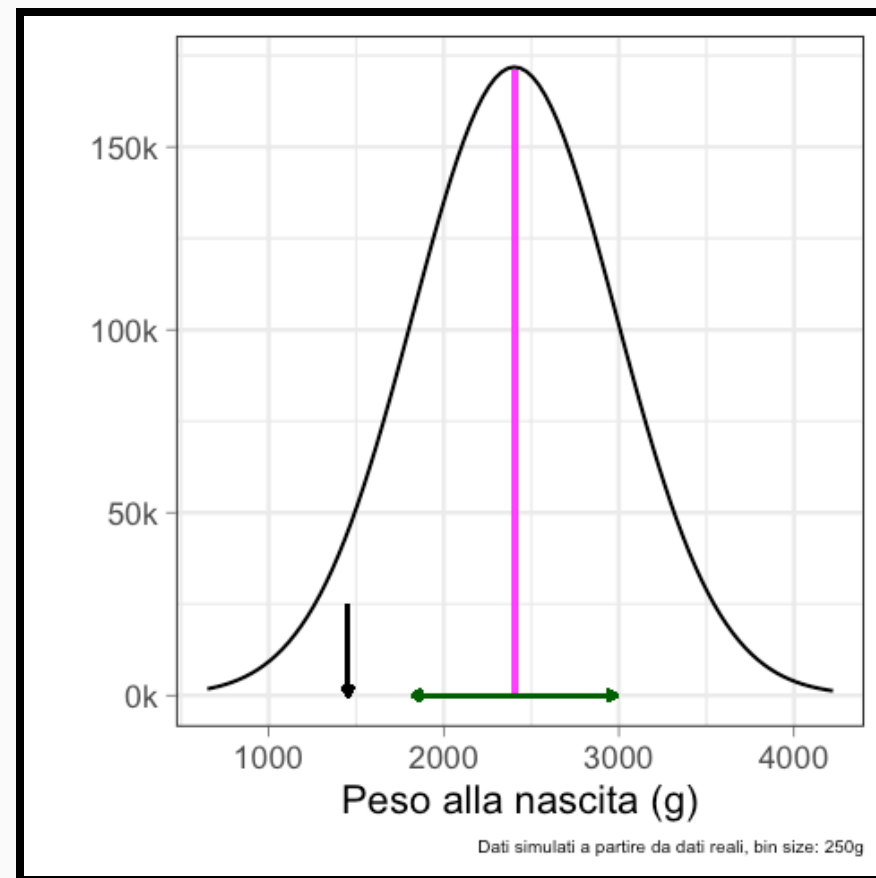
→ il peso è a una distanza maggiore di quella "tipica"

→ è un peso (quasi) "inusuale"

# Per un neonato con "very low birth weight"

Supponiamo di avere presa in cura un neonato (gemello) che pesa 1454g

- La media ci dice qual è il centro di una distribuzione  
→ il neonato pesa meno della media
- La deviazione standard ci dice qual è la distanza "tipica" dalla media  
→ il peso è a una distanza "atipica"  
→ è un peso (quasi) "inusuale"



# Lo $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- ci dice se un'osservazione è maggiore o minore della media della popolazione
- ci dice se la deviazione di un'osservazione dalla media è grande o piccola rispetto alla deviazione tipica nella popolazione



## Esercizio #6

? Quale delle seguenti  $z$ -score rappresenta l'osservazione più atipica?

a)  $-3.20$

b)  $-0.41$

c)  $+1.10$

d)  $+2.40$

? L'osservazione è superiore alla media?

e) Sì              f) No

## Esercizio #6 -- Soluzione

? Quale delle seguenti  $z$ -score rappresenta l'osservazione più atipica?

a)  $-3.20$  

b)  $-0.41$

c)  $+1.10$

d)  $+2.40$

? L'osservazione è superiore alla media?

e) Sì                  f) No

## Esercizio #6 -- Soluzione

? Quale delle seguenti  $z$ -score rappresenta l'osservazione più atipica?

a)  $-3.20$  ☒

b)  $-0.41$

c)  $+1.10$

d)  $+2.40$

? L'osservazione è superiore alla media?

e) Sì

f) No ☒

# Esercizio #7

? Maria ha subito un trauma cranico a seguito di un incidente e il neurologo che l'ha presa in cura la sottopone a 3 test.

1. Maria deve ascoltare delle parole e ripeterle (memory test). Maria ne ricorda 6, la popolazione generale 7, con una deviazione standard di 1.3 parole
2. Maria deve identificare degli oggetti da dei disegni (object naming test). Maria ne riconosce 7, la popolazione generale 10, con una deviazione standard di 0.59 oggetti
3. Maria ha un elenco di colori scritti con inchiostri diversi e deve dire di quale colore è ciascun inchiostro il più velocemente possibile (Stroop test). Maria impiega 15.7 secondi, la popolazione generale 16.2, con una deviazione standard di 1.30 secondi

Nelle prossime viste, il neurologo deve concentrarsi sulla memoria, sull'abilità di nominare le cose o sull'attenzione di Maria?

# Esercizio #7 -- Soluzione

? Maria ha subito un trauma cranico a seguito di un incidente e il neurologo che l'ha presa in cura la sottopone a 3 test.

1. Memory test.  $x = 6$ ;  $\mu = 7$ ,  $\sigma = 1.3$

$$z = \frac{6-7}{1.3} = -0.77$$

2. Object naming test.  $x = 7$ ;  $\mu = 10$ ,  $\sigma = 0.59$

$$z = \frac{7-10}{0.59} = -5.09$$

3. Stroop test.  $x = 15.7$ ;  $\mu = 16.2$ ,  $\sigma = 1.3$

$$z = \frac{15.7-16.2}{1.3} = -0.65$$

Nelle prossime viste, il neurologo deve concentrarsi sulla memoria, sull'abilita di nominare le cose o sull'attenzione di Maria?

# Esercizio #7 -- Soluzione

? Maria ha subito un trauma cranico a seguito di un incidente e il neurologo che l'ha presa in cura la sottopone a 3 test.

1. Memory test.  $x = 6$ ;  $\mu = 7$ ,  $\sigma = 1.3$

$$z = \frac{6-7}{1.3} = -0.77$$

2. Object naming test.  $x = 7$ ;  $\mu = 10$ ,  $\sigma = 0.59$

$$z = \frac{7-10}{0.59} = -5.09$$

3. Stroop test.  $x = 15.7$ ;  $\mu = 16.2$ ,  $\sigma = 1.3$

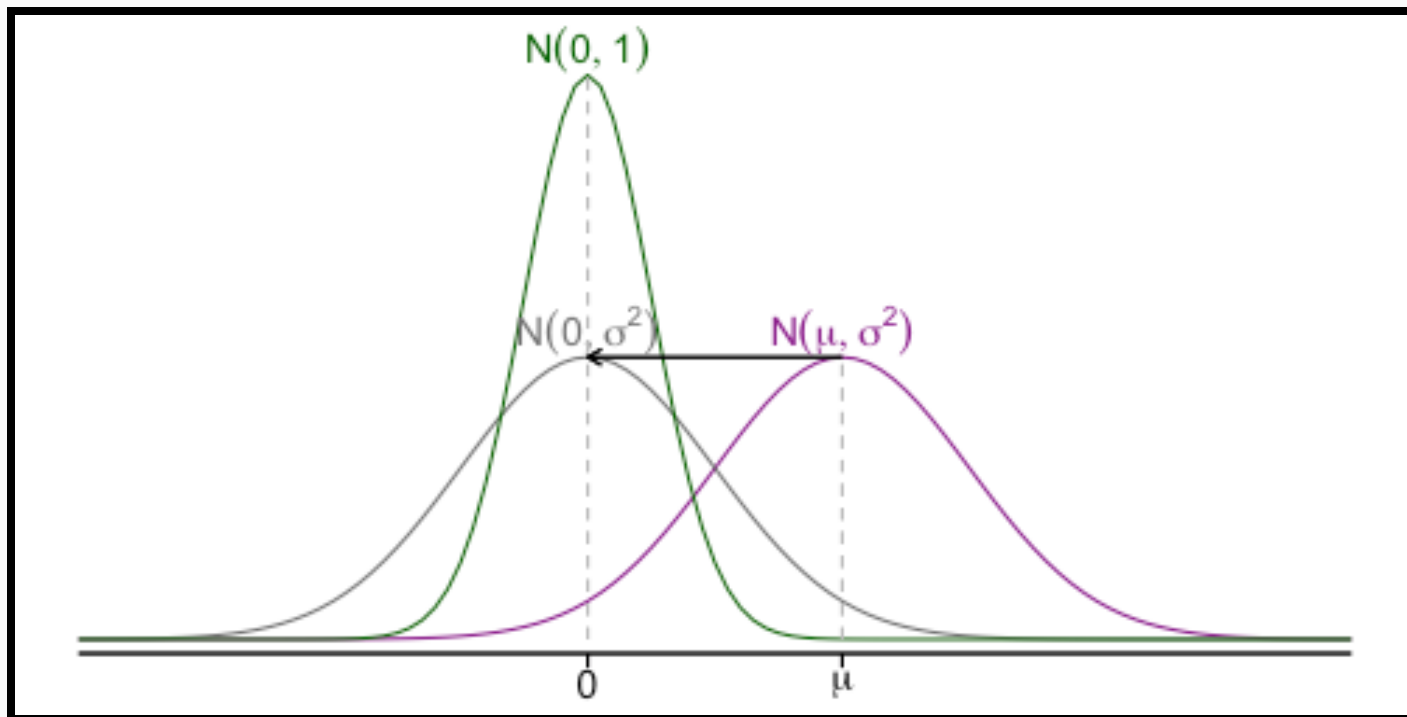
$$z = \frac{15.7-16.2}{1.3} = -0.65$$

Nelle prossime viste, il neurologo deve concentrarsi sulla memoria, sull'abilita di nominare le cose o sull'attenzione di Maria?

→ sull'abilita di nominare le cose

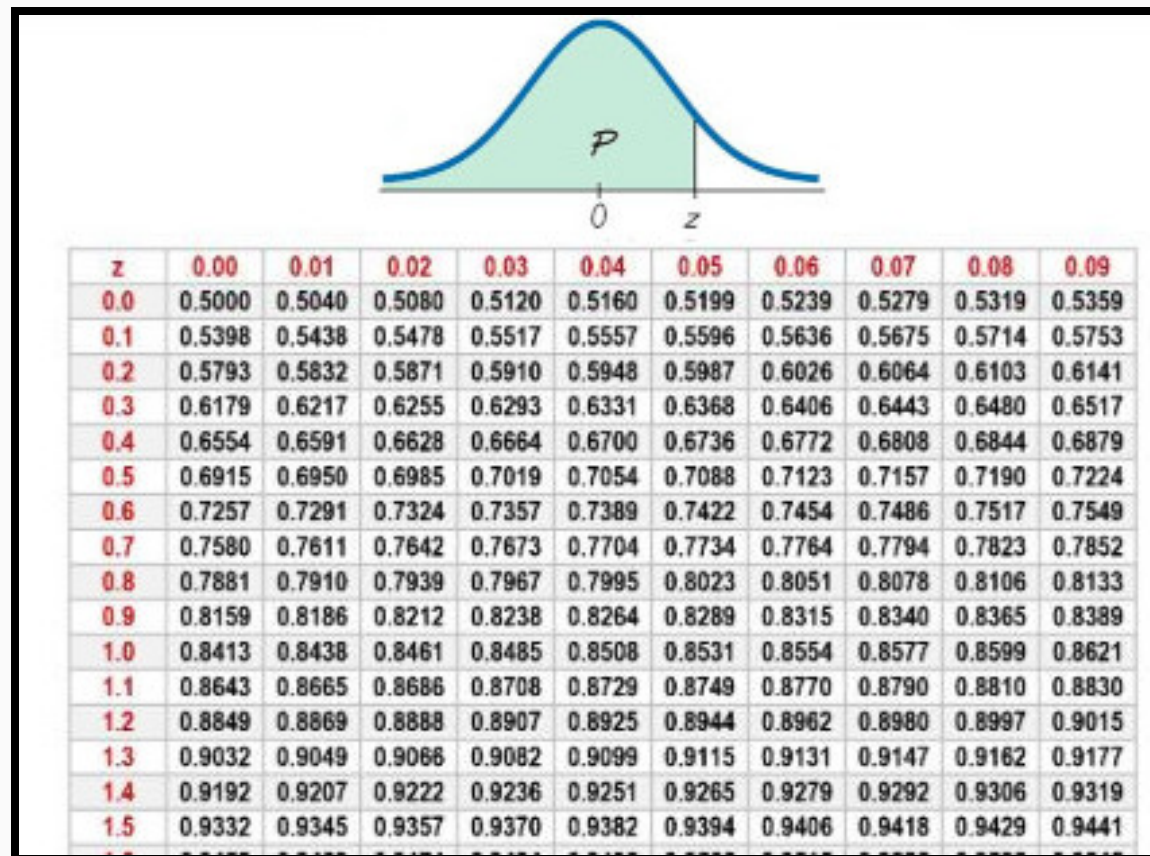
# La standardizzazione

- $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
- $\mathcal{N} = (\mu, \sigma^2) \rightarrow Z = (0, 1)$



# La distribuzione Normale standardizzata

- $Z = (0, 1)$
- Area sottesa alla curva = 1
- proporzione  $\equiv$  probabilità

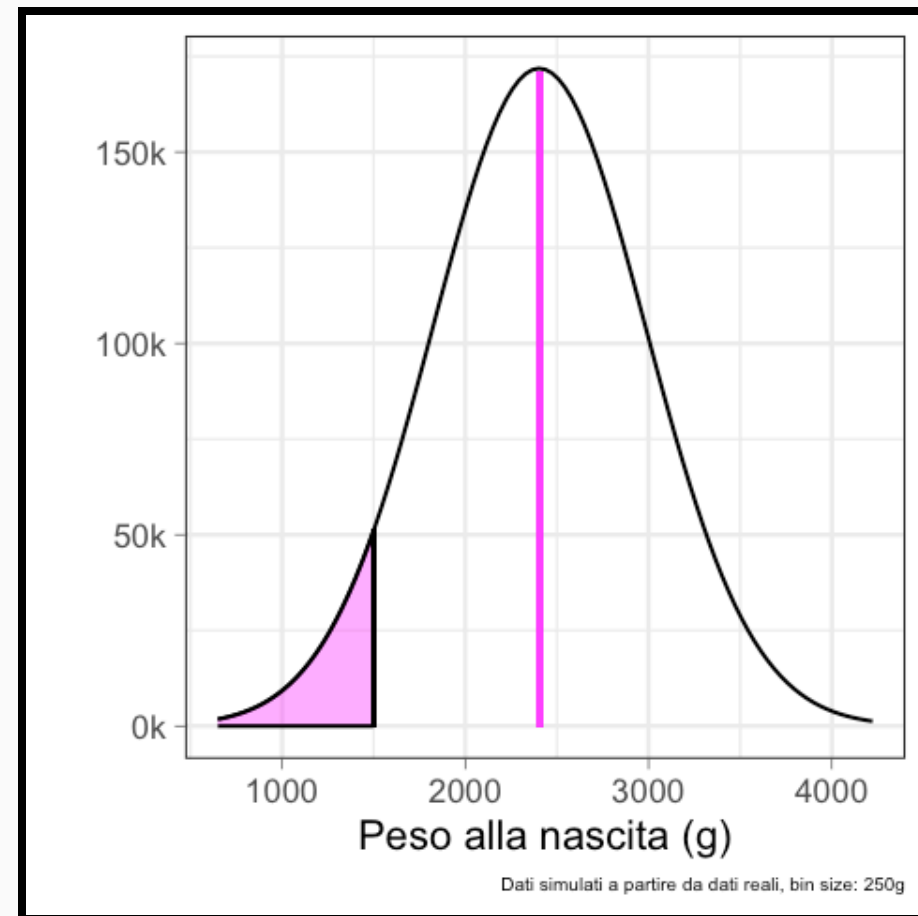




# Proporzione $\equiv$ probabilità

- 6% dei gemelli sono "very low birth weight"
- La probabilità essere "very low birth weight" è 0.06

Ma come è stato calcolato?



# Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità di avere un gemello con "very low birth weight"?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

# Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità di avere un gemello con "very low birth weight"?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo  $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

# Calcoliamo la probabilità/proporzione

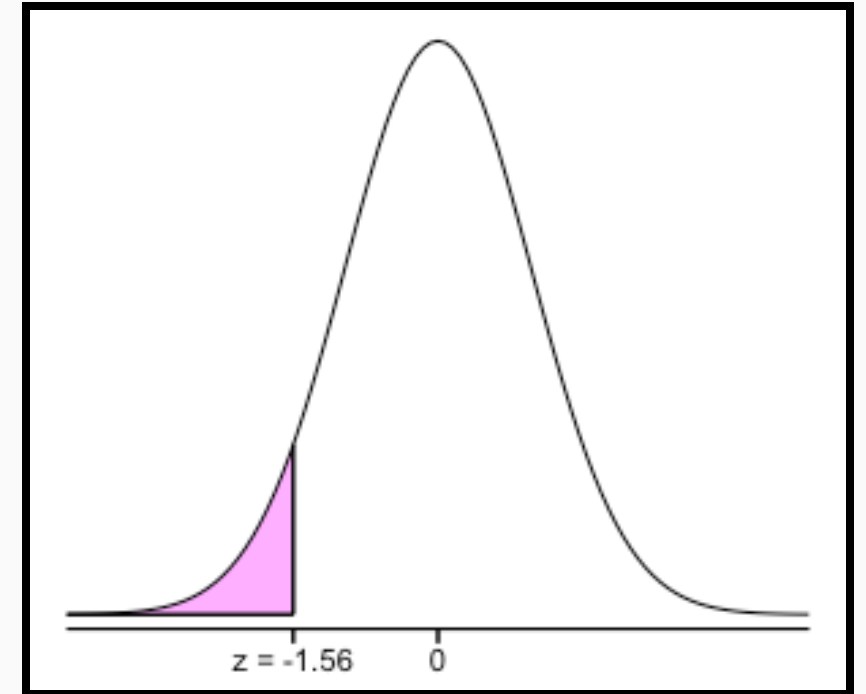
Qual è la probabilità di avere un gemello con "very low birth weight"?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo  $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

2. Identifichiamo l'area



# Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità di avere un gemello con "very low birth weight"?

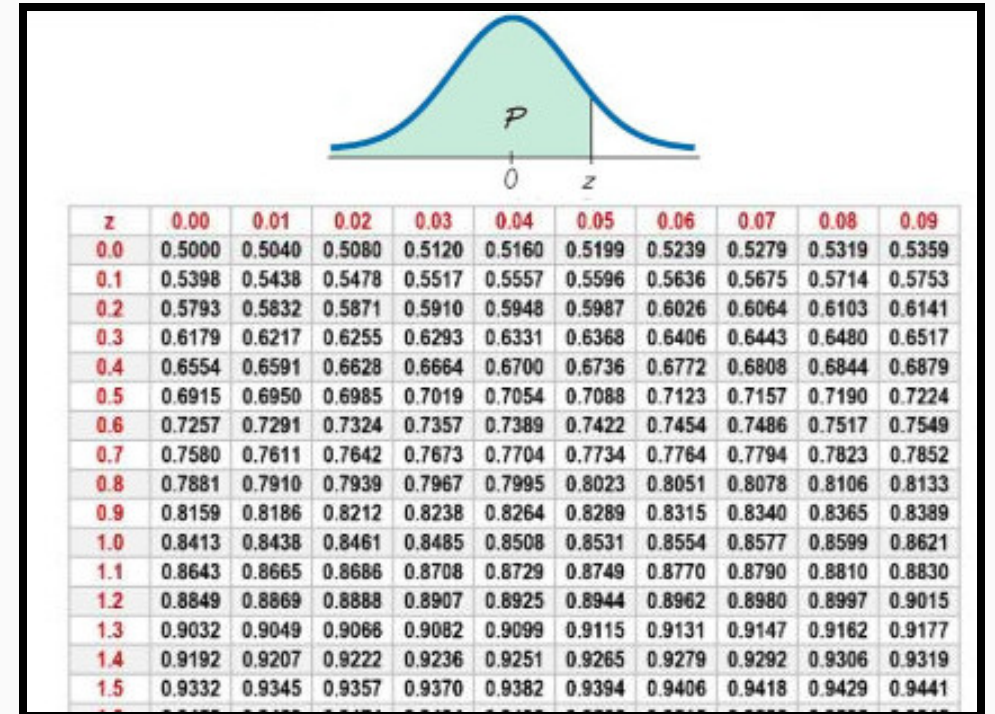
$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo  $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

2. Identifichiamo l'area

3. Cerchiamo lo  $z$ -score sulle tavole e ragioniamo sull'area identificata



# Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità di avere un gemello con "very low birth weight"?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo  $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

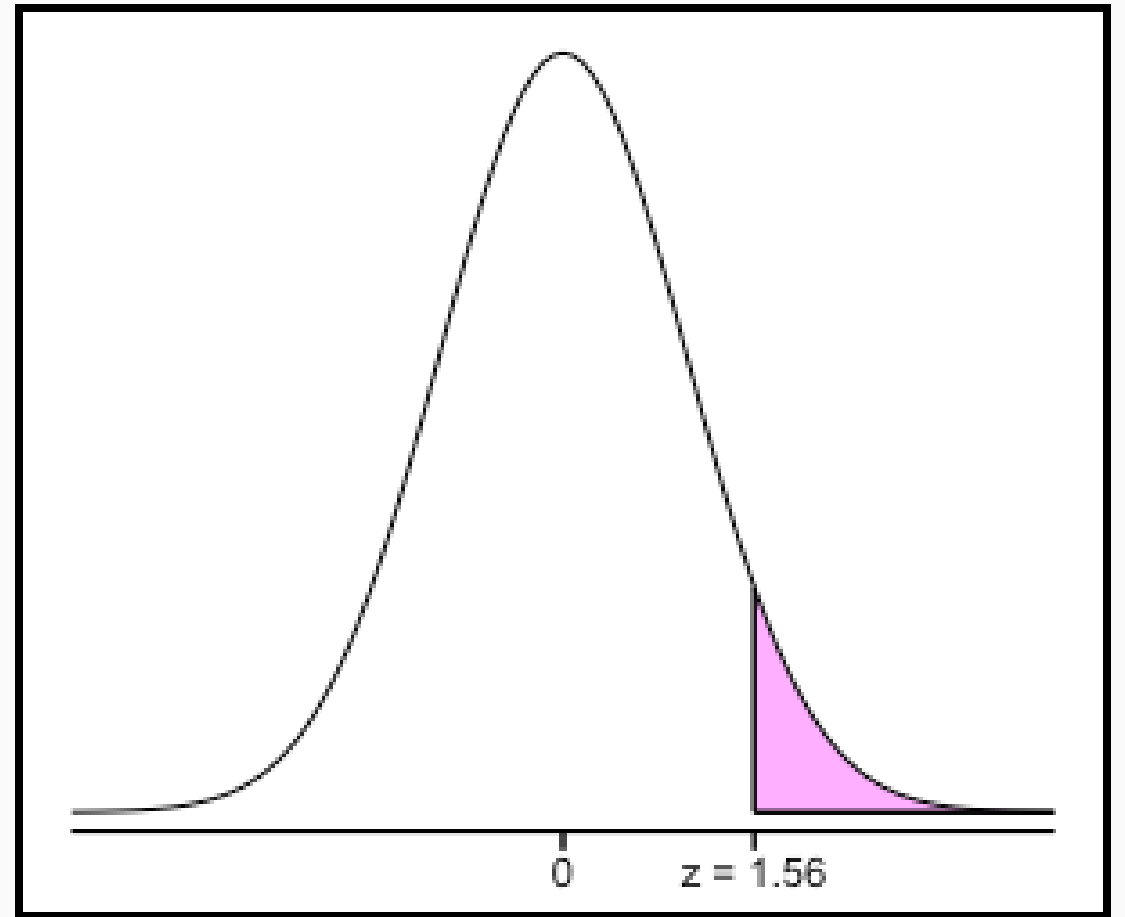
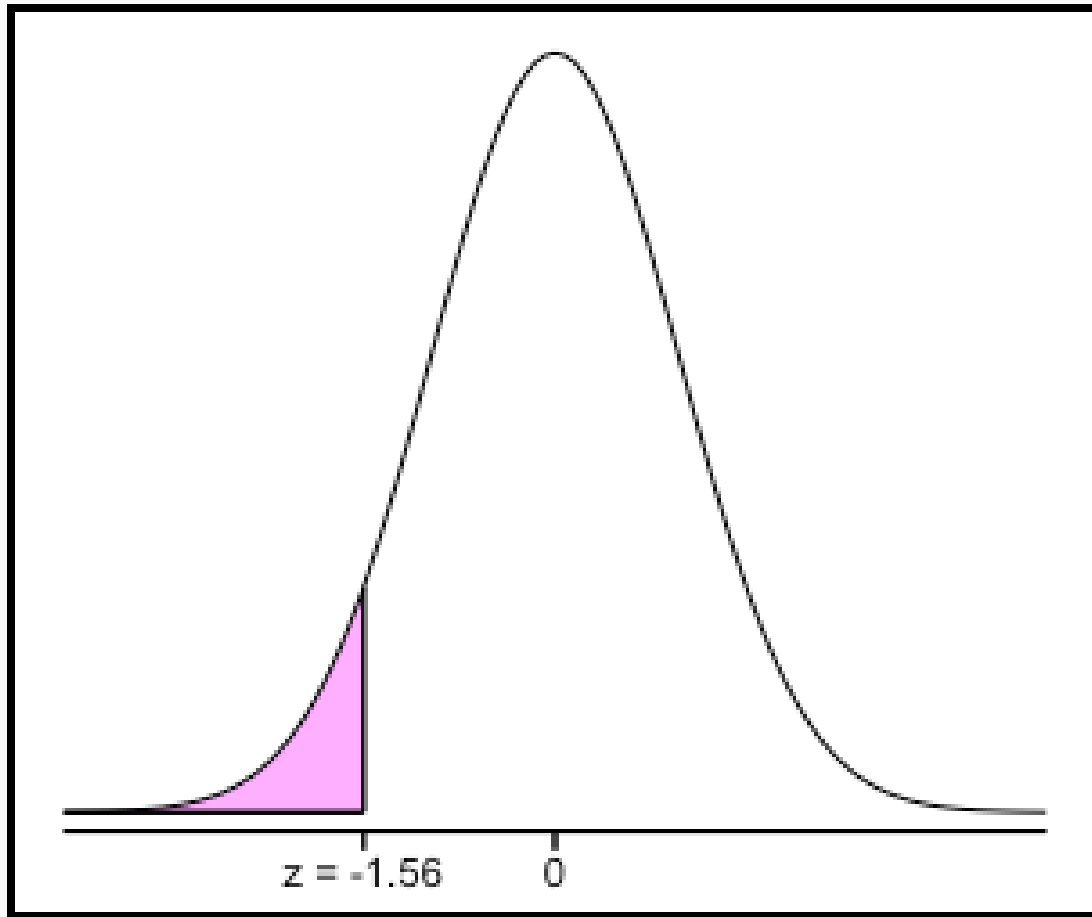
2. Identifichiamo l'area

3. Cerchiamo lo  $z$ -score sulle tavole e  
ragioniamo sull'area identificata  
→ non ci sono  $z$ -score negativi



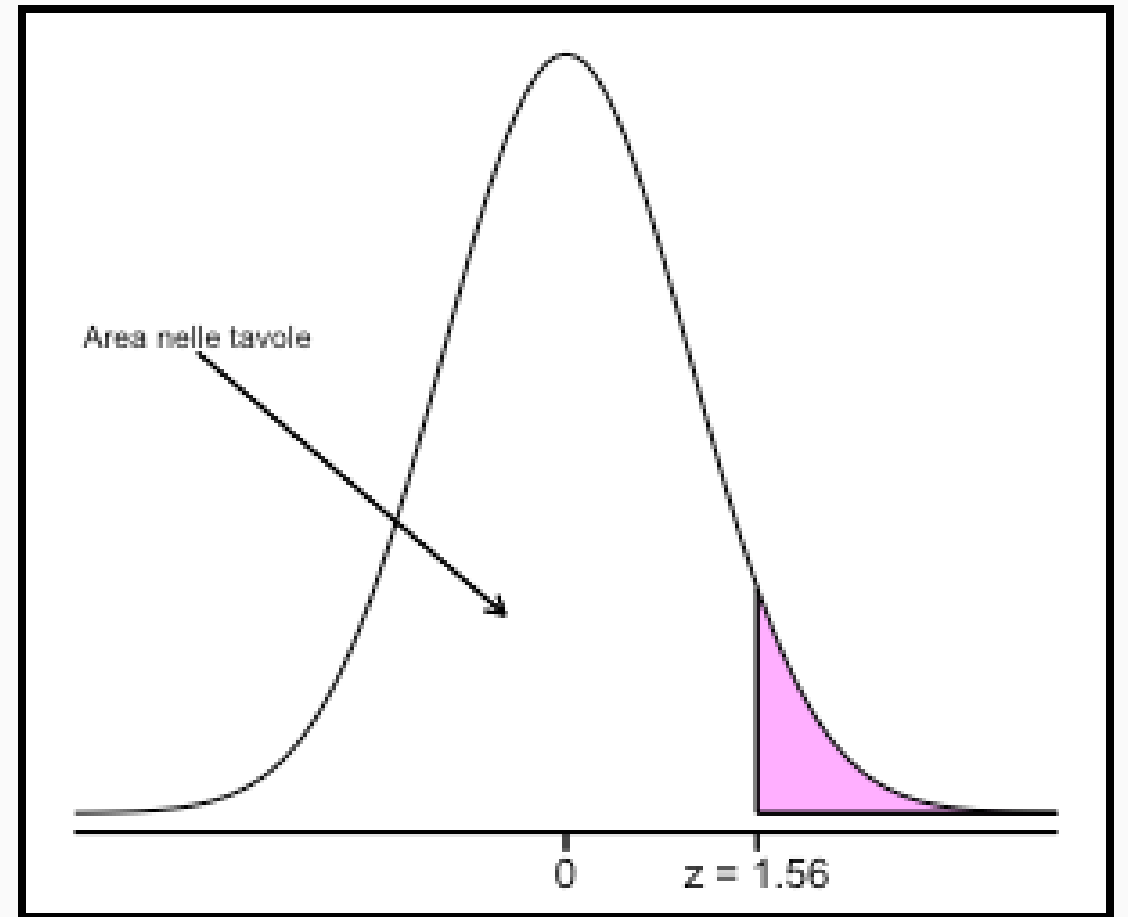
**Ragioniamo sulle aree...**

# Ragioniamo sulle aree...





# Ragioniamo sulle aree...



# Calcoliamo la probabilità/proporzione

Qual è la probabilità di avere un gemello con "very low birth weight"?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

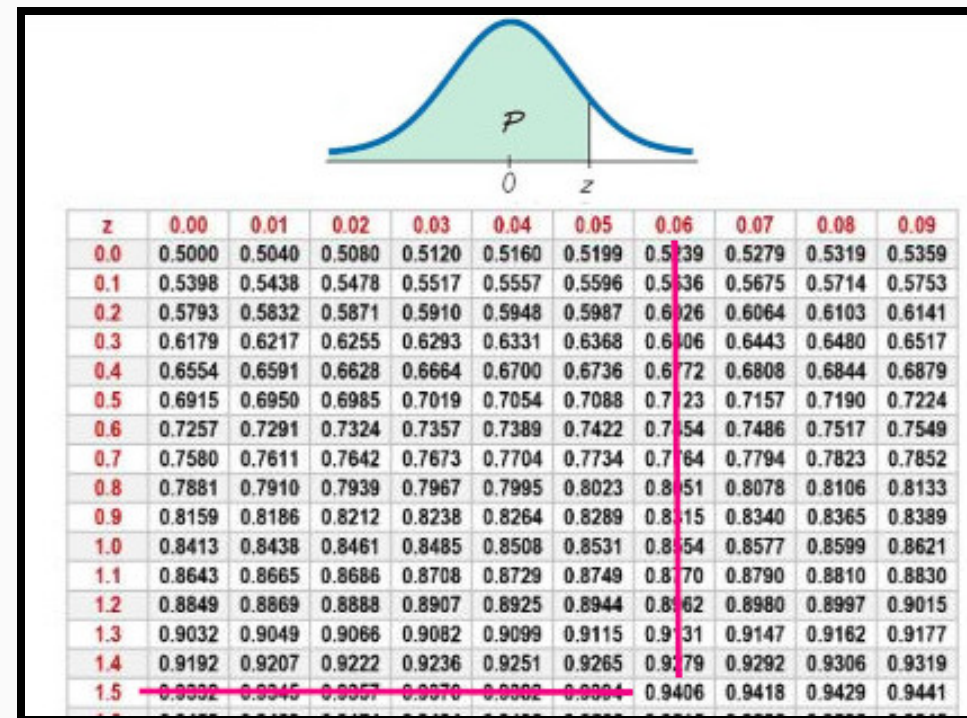
1. Calcoliamo lo  $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1500 - 2404}{580} = \frac{-904}{580} = -1.56$$

2. Identifichiamo l'area

3. Cerchiamo lo  $z$ -score sulle tavole e ragioniamo sull'area identificata

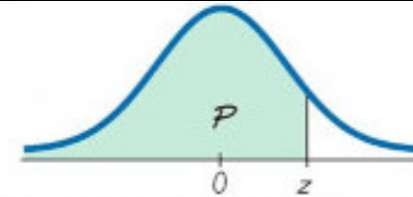
$$P = 1 - 0.9406 = 0.0594 \rightarrow 5.94\%$$



# Esercizio #8

? Non sapendo che il bambino ha un gemello, il pediatra dice alla madre che un peso alla nascita inferiore ai 2500g è inusuale. La madre deve preoccuparsi?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

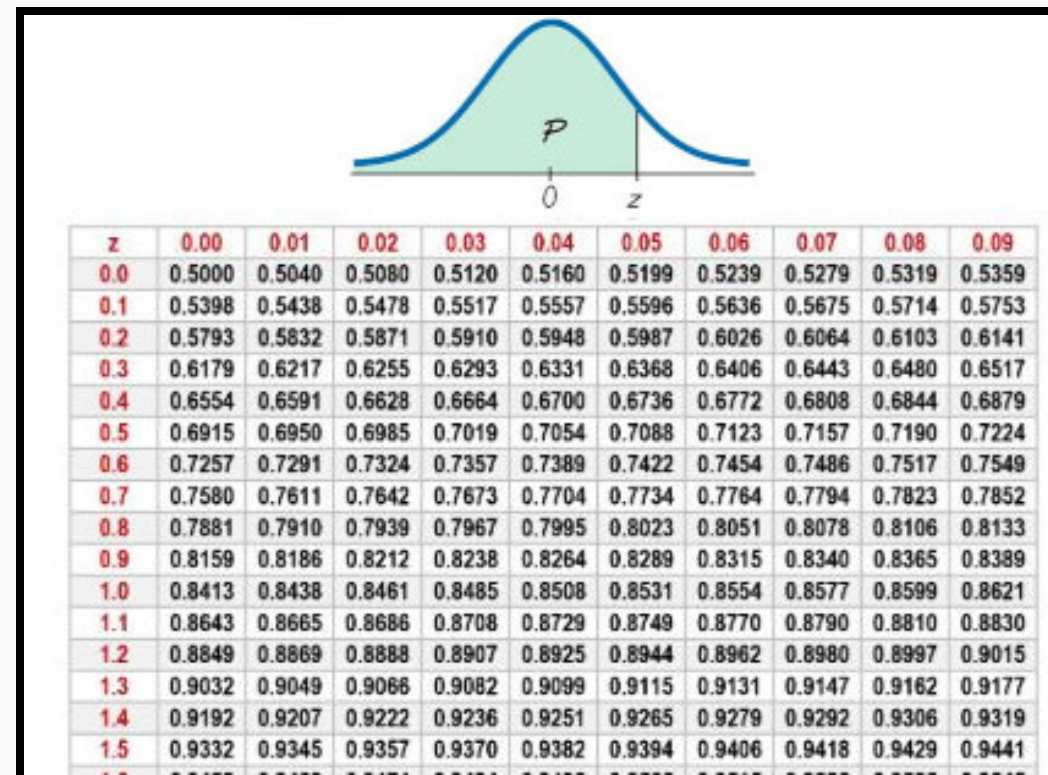
# Esercizio #8 -- Soluzione

? Non sapendo che il bambino ha un gemello, il pediatra dice alla madre che un peso alla nascita inferiore ai 2500g è inusuale. La madre deve preoccuparsi?

$$\mathcal{N} = (2404, 580^2)$$

1. Calcoliamo lo  $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2500 - 2404}{580} = \frac{96}{580} = 0.17$$



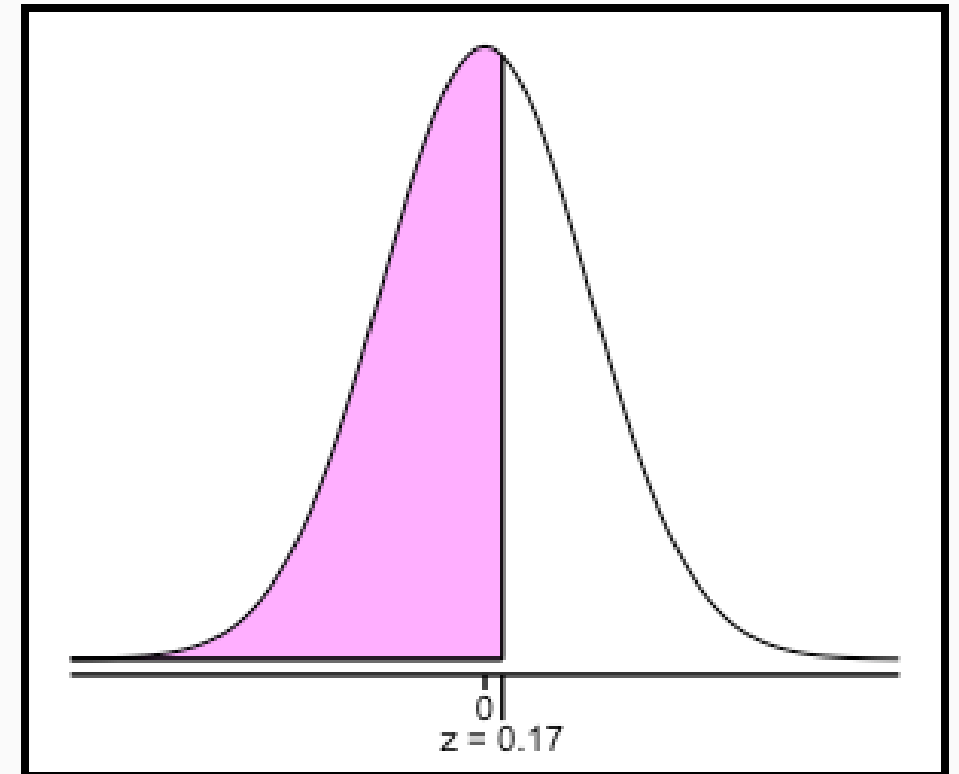
## Esercizio #8 -- Soluzione

? Non sapendo che il bambino ha un gemello, il pediatra dice alla madre che un peso alla nascita inferiore ai 2500g è inusuale. La madre deve preoccuparsi?

1. Calcoliamo lo  $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2500 - 2404}{580} = \frac{96}{580} = 0.17$$

2. Identifichiamo l'area



# Esercizio #8 -- Soluzione

? Non sapendo che il bambino ha un gemello, il pediatra dice alla madre che un peso alla nascita inferiore ai 2500g è inusuale. La madre deve preoccuparsi?

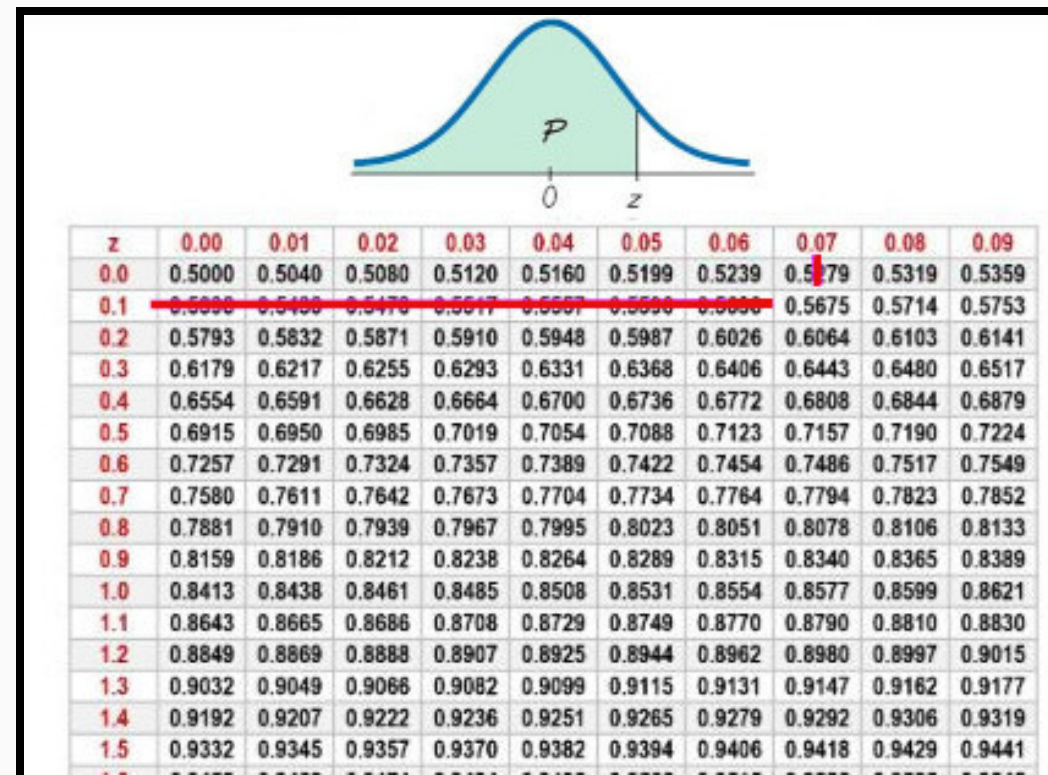
1. Calcoliamo lo  $z$ -score

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2500 - 2404}{580} = \frac{96}{580} = 0.17$$

2. Identifichiamo l'area

3. Cerchiamo lo  $z$ -score sulle tavole e ragioniamo sull'area identificata

$$P = 0.5675 \rightarrow 56.75\%$$



# Cosa abbiamo imparato in questa lezione?

- Diversi fenomeni naturali sono normalmente distribuiti
- La distribuzione Normale è definita dalla media e dalla deviazione standard e corrisponde a una distribuzione di probabilità
- La distribuzione (Normale) di una popolazione ci fornisce la probabilità di estrarre un individuo da quella popolazione, ma anche la sua frequenza
- Se i dati sono normalmente distribuiti, il 68% della popolazione si trova a  $1 \sigma$  dalla media, il 95% a  $2 \sigma$  e il 99.7% a  $3 \sigma$
- Lo  $z$ -score ci permette di "posizionare" un'osservazione rispetto alla popolazione e di confrontare più distribuzioni (anche molto diverse)