UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Computação

Controle e Servomecanismo

Prática 2 - Modelagem e obtenção de resposta de um veículo

Professor: Prof. Roberto Santos Inoue

Alexandre Strabello, 770076, Engenharia Física

São Carlos, 5 de junho de 2023

1 Pré Tutorial

Todos os códigos, imagens e documentos utilizados para a escrita do presente relatório estão disponíveis no repositório `https://github.com/alestrab/Controle-e-Servo`, na pasta 'prática 2'.

A segunda Lei de Newton apresenta que a somatória das forças $\vec{F}$ atuando sobre um corpo de massa m é dada por:

$$F_{res} = \sum \vec{F} = \frac{d(m\,\vec{v})}{dt}, \tag{1}$$

em que F_{res} representa a força resultante sobre o corpo, enquanto $\vec{v}$ corresponde à velocidade do mesmo. No caso mais simples, em que a massa do corpo não é alterada ao longo do tempo, (1) é simplificada para

$$\vec{F_{res}} = m\,\vec{a},$$

em que $\vec{a}$ simboliza a aceleração do corpo.

Uma aplicação simples da 2ª Lei de Newton é apresentada na Figura 1, onde um veículo em movimento sofre ação de duas forças opostas.

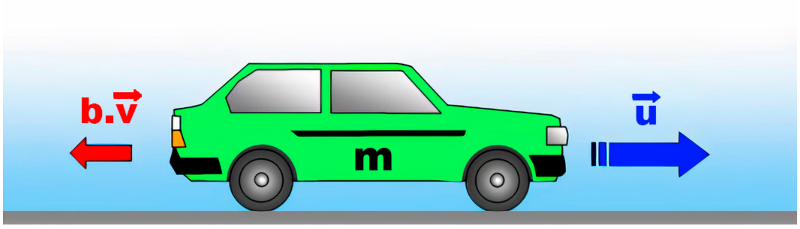


Figura 1: Forças atuantes em um veículo em movimento.

Analisando as forças sobre o sistema, tem-se:

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{u} - b\,\vec{v} \tag{2}$$

Essa equação diferencial pode ser solucionada por diferentes técnicas, indo desde opções com soluções numéricas, até em casos onde utiliza-se a função de transferência ou integração.

2 Execução e Avaliação de Resultados

Como forma geral tomou-se $v(0) = 0$, bem como $m = 1000\,kg$, $u = 500\,N$, $b = 50\,N\,s/m$.

2.1 Solução numérica

A primeira opção para solução da equação consiste em realizar uma solução numérica. Considerando um caso geral dado por:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = a$$

Uma opção seria utilizar um intervalo pequeno de tempo, de modo que:

$$f(t+1) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,dt + f(t)$$

Dessa forma, a expressão para a simulação do veículo será dada por:

$$v(t+1) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} * dt + v(t), \tag{3}$$

em que

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{u - b\,v}{m} \tag{4}$$

Assim, foi implementado o código abaixo para solução do sistema:

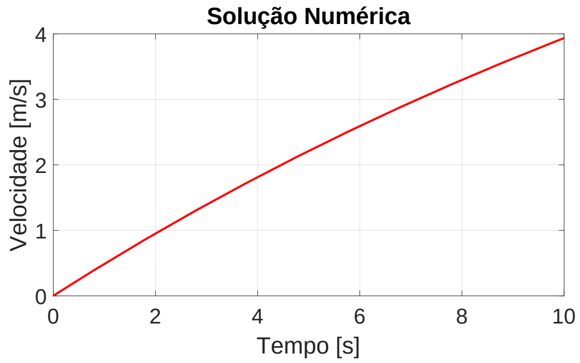
```
%Massa do veiculo
m=1000;
%Coeficiente de atrito
b=50;
%Forca externa
u=500;
t = linspace(0,10,10000);
%Condicao inicial
v0=0;
%Opcoes para apresentacao dos resultados e parametros para a funcao ODE
options = odeset('RelTol',1e-5,'Stats','on','OutputFcn',@odeplot);
solv_ode =ode45(@(t,v) dvdt(t,v,u,b,m) ,t,v0,options);

function dydt = dvdt(t,v,u,b,m)
    dydt= (u-b*v)/m;
end
```

A função $ode45$ foi utilizada dada que não havia um requisito específico para a solução numérica, porém outras opções poderiam ser adotadas. O resultado obtido para a dinâmica do veículo é apresentada na Figura 2.

Observa-se um aumento da velocidade ao longo do tempo de modo não linear, como esperado de acordo com a presença de um coeficiente de atrito não nulo.

Figura 2: Dinâmica do veículo de acordo com a solução numérica



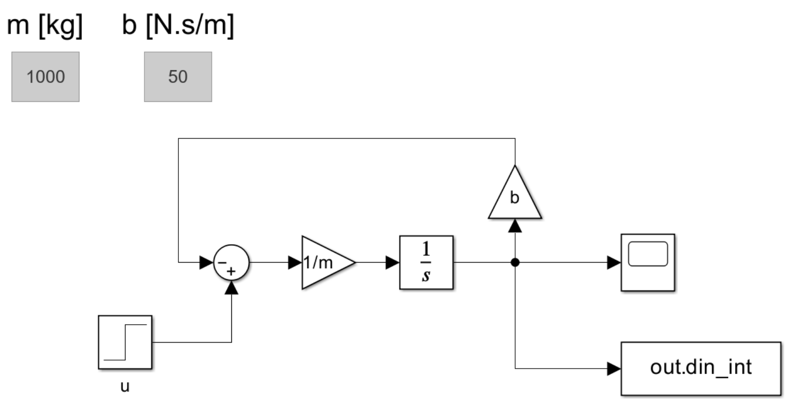
2.2 Solução por integração

Outra maneira de solucionar o problema apresentado é dada pela utilização do Simulink, por meio de blocos integradores. Inicia-se reescrevendo (2) por meio de uma integração, dada por:

$$v(t) = \int_0^t \frac{u - b\,v}{m}\, dt \tag{5}$$

As operações de multiplicação são realizadas por blocos de ganho, além de blocos somadores para construir o integrando. O sistema produzido é apresentado na Figura 3.

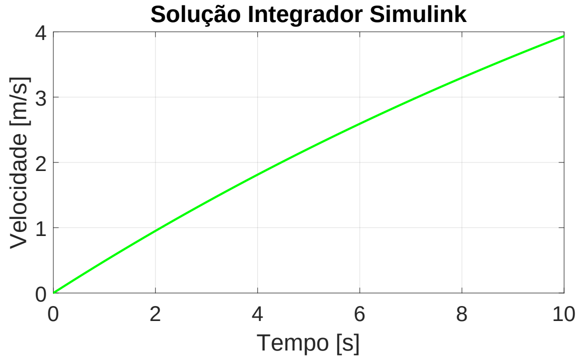
Figura 3: Diagrama de blocos para simulação da dinâmica do veículo por integração



O parâmetro inicial $v(0) = 0$ foi inserido no bloco integrador, bem como a força externa u dada por uma função degrau, definida por $u(t) = 0$ se $t < 0$ e $u(t) = 500$ do contrário. O resultado obtido foi enviado para o ambiente MATLAB para melhor apresentação dos resultados, que estão dados na Figura 4.

Assim como apresentado na Figura 2, observa-se um aumento da velocidade do sistema de modo não linear. Assume-se que o tempo de análise de 10 segundos foi insuficiente para estabilizar o sistema, mas que o mesmo será obtido, dado o padrão presente na equação diferencial apresentado em (2).

Figura 4: Dinâmica do veículo de acordo com a solução numérica



2.3 Solução por função de transferência

A despeito das maneiras anteriores apresentarem soluções adequadas para o problema apresentado, a utilização da função de transferência permite uma solução mais elegante para o problema, bem como é facilmente aplicada para outras simulações. O passo inicial consiste em realizar a transformada de Laplace de (2), que será dada por:

$$m\,(s\,V(s) + v(0)) = U(s) - b\,V(s) \tag{6}$$

A função de transferência $G(s)$ é dada pela razão entre $V(s)$ e $U(s)$, porém a mesma sempre considera que os parâmetros iniciais são nulos, de modo que necessariamente $v(0) = 0$, sem alternativas para customização desse valor. Assim, tem-se:

$$G(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{1}{m\,s + b} \tag{7}$$

Essa função pode então ser aplicada tanto no ambiente MATLAB quanto em Simulink, resultando, em teoria, no mesmo resultado.

2.3.1 Solução no MATLAB

O código implementado para solução no MATLAB é apresentado a seguir:

```
%Parametros do sistema
m=1000;
b=50;
u=500;
%Funcao de transferencia
solv_tf = tf(u,[m,b]);
```

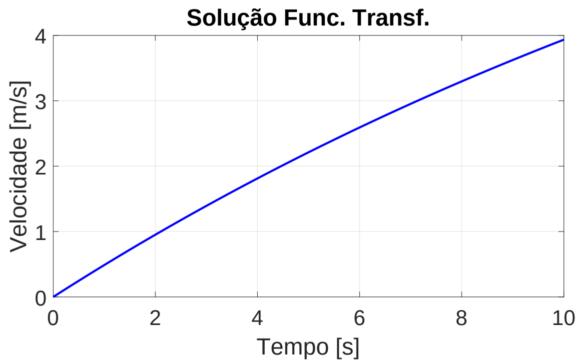
Conforme pode ser observado, não há uma grande complexidade para implementação da função de transferência. A função *tf* assume os dois parâmetros iniciais como sendo um numerador e um denominador, construindo dois polinômios em função dos valores passados. O caso geral é dado por:

$$tf([x_1, x_2, \ldots, x_m], [y_1, y_2, \ldots, y_n]) = \frac{x_1\, s^{n-1} + x_2\, s^{n-2} + \ldots + x_{m-1}\, s + x_m}{y_1\, s^{n-1} + y_2\, s^{n-2} + \ldots + y_{n-1}\, s + y_n} \tag{8}$$

em que $n > m$.

Os resultados obtidos para essa solução estão presentes na Figura 5.

Figura 5: Dinâmica do veículo por função de transferência aplicada ao MATLAB

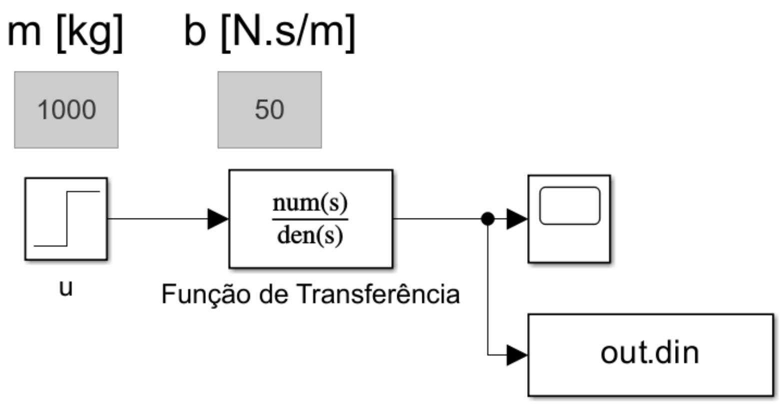


Não houve distinção dos resultados encontrados na Figura 5 frente às demais soluções já apresentadas no presente relatório (vide Figuras 4 e 2), o que era esperado. Contudo, o cenário poderia ser diferente caso a condição inicial $v(0)$ fosse não nula.

2.3.2 Solução no ambiente Simulink

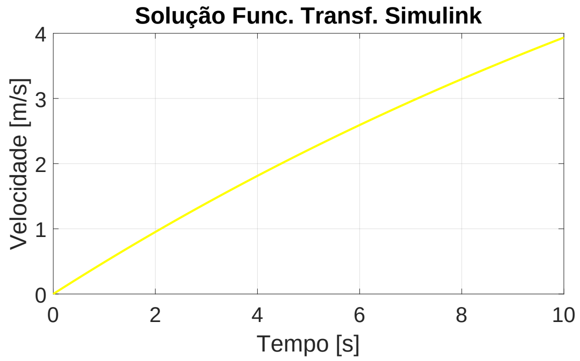
A construção do diagrama de blocos é relativamente simples, consistindo apenas em uma função *step* para $U(s)$ e um bloco contendo a função de transferência apresentada em (7). A construção realizada é dada na Figura 6.

Figura 6: Diagrama de blocos para simulação da dinâmica do veículo por função de transferência



Novamente houve a exportação dos dados para o MATLAB dado que as opções para apresentação dos resultados no Simulink não possuem uma customização adequada. A dinâmica do veículo obtida pelo diagrama de blocos é ilustrada na Figura 7.

Figura 7: Dinâmica do veículo por função de transferência via Simulink



Nota-se o mesmo comportamento presente nas outras três soluções apresentadas, aumentando a confiabilidade dos resultados obtidos. Em comparação com a implementação por bloco integrador, a função de transferência foi mais simples, sendo mais complexa apenas na obtenção dos coeficientes necessários para implementação no respectivo bloco no Simulink.