Домашнее задание № 2. *Алеся Демешко, 797*

Задача 1. *Докажите, что конус K, является выпуклым ⇔ он замкнут относительно суммирования, т. е. $x + y \in K$ для всех $x, y \in K$*

Решение. Если K - замкнут $\Rightarrow \forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0,1]$, будет выполняться $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$. Возьмём $\alpha = \frac{1}{2}$, тогда $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in K$. Т. к. K - конус, то $\forall t > 0\ \forall x \in K, tx \in K \Rightarrow 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) = x + y \in K$
С другой стороны, поскольку K - конус $\Rightarrow \forall t > 0\ \forall x \in K,\ tx \in K \Rightarrow \forall \alpha \in [0,1], \alpha x \in K, (1-\alpha)y \in K$ и замкнут относительно суммирования $\Rightarrow \forall z \in K, \forall w \in K, z + w \in K \Rightarrow$ возьмём $z = \alpha x$ и $w = (1-\alpha)y$, тогда $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$. □

Задача 2. *Пусть C - выпуклое множество в вещественном нормированном векторном пространстве. Покажите, что замыкание $\overline{C}$ и внутренность (C) множества C также являются выпуклыми.*

Решение. Рассмотрим две последовательности точек, лежащих внутри C и x, y лежащих в замыкании $\overline{C}$: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие что $x_n \to x, y_n \to y$ при $n \to \infty$. Пусть $z_n(\alpha) = \alpha x_n + (1-\alpha)y_n$, $z(\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y$, тогда $z_n(\alpha) \to z(\alpha)$ при $n \to \infty$. Т. к. C - выпуклое, поэтому $\forall \alpha \in [0,1]$ выполнено $z_n(\alpha) \in C$ и $z(\alpha) \in \overline{C} \Rightarrow \overline{C}$ - выпуклое.
Докажем от противного: пусть $int(C)$ не замкнуто, тогда $\exists \alpha \in [0,1]\ \exists x, y \in int(C)$ такие что $z = \alpha x + (1-\alpha)y \notin int(C)$. Возьмём некоторую окрестность точки z и в ней точку d ⇒ d не лежит в C. Возьмём точку x_1 из некоторой окрестности x и y_1 из некоторой окрестности y, так чтобы d попала в $[x, y]$ (это всегда можно сделать так как мы выбираем окрестность произвольно). В итоге мы получим $\exists x_1 y_1 \in C, \exists d \in [x_1, y_1] u \notin C$, что противоречит выпуклости C. □

Задача 3. *Пусть C и D - множества в вещественном векторном пространстве. Покажите, что:*

(a) *$Conv(C \cup D) = Conv\ (Conv\ (C) \cup\ Conv\ (D))$.*

(b) *$Conv\ (C \cap D) \subseteq\ Conv\ (C) \cap\ Conv\ (D)$, причем равенство может не достигаться (приведите пример).*

Решение. (a) Пусть $LHS = Conv(C \cup D)$, $RHS = Conv(Conv(C) \cup Conv(D))$
Пусть $x \in RHS \Leftrightarrow \forall$ выпуклого P, что $P \supset Conv(C) \cup Conv(D)$ верно, что $x \in P \Leftrightarrow \forall$ выпуклого P, что $Conv(C) \subset P$ и $Conv(D) \subset P$ верно $x \in P$. (1)
Пусть $x \in LHS \Leftrightarrow \forall$ выпуклого P, что $(C \cup D) \subset P\ x \in P \Leftrightarrow \forall$ выпуклого P, что $C \subset P$ и $D \subset P : x \in P$. (2)
$\forall C$ и выпуклого P верно $C \subset P \Leftrightarrow Conv(C) \subset P \Rightarrow (1) = (2)$

(b) Пусть $x \in RHS \Leftrightarrow x \in Conv(C)$ и $x \in Conv(D) \Leftrightarrow \forall$ выпуклого P, что $C \subset P\ x \in P$ и $\forall$ выпуклого P, что $D \subset P\ x \in P$
Пусть $x \in LHS \Leftrightarrow \forall$ выпуклого $P \subset (C \cap D)\ x \in P \Rightarrow \forall$ выпуклого $P \supset C\ x \in P$ и $\forall$ выпуклого $P \supset D\ x \in P \Leftrightarrow x \in RHS$
Пример, когда равенство не достигается: Пусть C это множество из трёх точек, D аналогично, причём точки не пересекаются - пересечение пустое множество. Разместим точки так, чтобы треугольники, которые они образовывают пересекались - выпуклые оболочки пересекаются.

□

Задача 4.

Решение. □

Задача 5. *Пусть E — выпуклое множество в вещественном нормированном векторном пространстве, и пусть $f : \overline{E} \to$ — функция, определенная на замыкании множества E. Покажите, что если f непрерывная, то из выпуклости сужения $f|_E : E \to$ следует выпуклость f.*

Решение. По определению $\forall x, y \in \overline{E}\ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, такие что $x_n \to x, y_n \to y$ при $n \to \infty$. Так как f выпукла на $E \Rightarrow \forall \alpha \in [0,1]\ f(\alpha x_n + (1-\alpha)y_n) \leq \alpha f(x_n) + (1-\alpha)f(y_n)$ (определение выпуклости). По условию f непрерывна $\Rightarrow f(\alpha x_n + (1-\alpha)y_n) \to f(\alpha x + (1-\alpha)y), f(x_n) \to f(x), f(y_n) \to f(y)$. В итоге получим $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \Rightarrow$ f - выпукла на $\overline{E}$ □

Задача 6. *Докажите, что функция $f(x) = ln(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})$ является выпуклой.*

Решение. x выпуклая функция $\Rightarrow \exp(x)$ тоже выпукла как монотонная суперпозиция $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$ выпукла как положительная взвешенная сумма с $c_i = 1 \Rightarrow ln(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})$ выпукла как монотонная суперпозиция. □

Задача 7. *Опираясь на стандартные примеры выпуклых функций и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость, объясните, почему каждая из следующих функций f является выпуклой:*

(a) *$f : R^n \to R$ — функция $f(x) := \max\{0, \langle a, x\rangle - b\}$, где $a \in^n$, $b \in$.*

(b) *$f : R^n \to R$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i \ln(1 + e^{\langle a_i, x\rangle}) + \frac{\mu}{2}\|x\|^2$, где $\mu, c_1, \ldots, c_n \geq 0$, $a_1, \ldots, a_n \in^n$.*

(c) *$f : R^n \to R$ — функция $f(x) := \max_{1\leq i\leq n} c_i \ln(1 + e^{|x_i|})$, где $c_1, \ldots, c_n \geq 0$.*

(d) *$f : E \to R$ — функция $f(x) := -\ln(B - x_1A_1 - \cdots - x_nA_n)$, где $A_1, \ldots, A_n, B \in \S^n$, $E := \{x \in^n : x_1A_1 + \cdots + x_nA_n \prec B\}$.*

Решение. (a) $f(x) = x$ выпуклая, афинное преобразование сохраняет выпуклость, значит $f(x) = \langle a, x\rangle - b$ выпуклая. Max тоже сохраняет выпуклость $\Rightarrow f(x) := \max\{0, \langle a, x\rangle - b\}$ выпуклая.

(b) $f(x) = \langle a_i, x\rangle$ выпуклая, монотонная суперпозиция сохраняет выпуклость $\Rightarrow f(x) = e^{\langle a_i, x\rangle}$ выпуклая. Афинное преобразование сохраняет выпуклость $\Rightarrow f(x) = 1 + e^{\langle a_i, x\rangle}$ выпуклая. Монотонная суперпозиция сохраняет выпуклость $\Rightarrow f(x) = ln(1 + e^{\langle a_i, x\rangle})$ выпуклая. $f(x) = \mu/2\|x\|^2$ выпуклая, также положителная взвешенная сумма сохраняет выпуклость $\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i ln(1 + e^{\langle a_i, x\rangle}) + \mu/2\|x\|^2$ выпукла.

(c) $f(x) = e^x + 1$ выпуклая, монотонная суперпозиция сохраняет выпуклость $\Rightarrow f(x) = ln(1 + e^{|x_i|})$ выпуклая. Монотонная суперпозиция сохраняет выпуклость $\Rightarrow f(x) = c_i ln(1 + e^{|x_i|}))$ выпукла. Max сохраняет выпуклость $\Rightarrow f(x) = max_{1\leq i\leq n}(c_i ln(1 + e^{|x_i|}))$ выпуклая.

□

Задача 8. *Пусть $f :^n \to R$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^{k} x_{[i]}$, где $1 \leq k \leq n$, а символ $x_{[i]}$ обозначает i-ую компоненту отсортированного по убыванию вектора x. Покажите, что функция f выпуклая.* (Подсказка: *Представьте f в виде максимума линейных функций.*)

Решение. Зафиксируем на месте все координаты вектора. Количество способов выбрать из n координат k это C_k^n. Возьмём C_k^n функций, каждая из которых равна сумме этих k координат. Так как координаты зафиксированны, то все функции линейны. Теперь наша задача свелась к нахождению максимума среди этих линейных функций, а это выпуклая функция так как это частный случай супремума. □

Задача 9.

Решение. □

Задача 10. *Покажите выпуклость функции*

$$f(x) := \cfrac{1}{x_1 - \cfrac{1}{x_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{x_n}}}},$$

определенной на подмножестве R^n, где каждый знаменатель строго положительный. (Подсказка: *Используйте индукцию и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость.)*

Решение. Докажем по индукции: База x_1: $f(x) = \frac{1}{x_1}$ является выпуклой. Переход: пусть верно при x_n, докажем, что функция будет выпукла при x_{n+1}. Получим $f(x) = \frac{1}{x_{n+1} - F(x)}$, где $F(x)$ это выпуклая функция. x_{n+1} выпукла вниз и вверх, $F(x)$ - выпукла, $-F(x)$ - вогнута $\Rightarrow x_{n+1} - F(x)$ - вогнута. Функция $\frac{1}{y}$ является монотонно невозрастающей. Получим композицию вогнутой и монотонно невозрастающей, что является выпуклой функцией. □