Методы оптимизации, ФИВТ, осень 2019

Домашняя работа 2: Выпуклые множества и функции

Срок сдачи: 3 октября 2019 (четверг), 23:59

1 Пусть K — конус в вещественном векторном пространстве[1]. Покажите, что конус K является выпуклым, если и только если он замкнут относительно суммирования, т. е. $x + y \in K$ для всех $x, y \in K$.

2 Пусть C — выпуклое множество в вещественном нормированном векторном пространстве. Покажите, что замыкание $\overline{C}$ и внутренность $\operatorname{int}(C)$ множества C также являются выпуклыми.

3 Пусть C и D — множества в вещественном векторном пространстве. Покажите, что:

(a) $\operatorname{Conv}(C \cup D) = \operatorname{Conv}(\operatorname{Conv}(C) \cup \operatorname{Conv}(D))$.

(b) $\operatorname{Conv}(C \cap D) \subseteq \operatorname{Conv}(C) \cap \operatorname{Conv}(D)$, причем равенство может не достигаться (приведите пример).

4 Покажите, что $\operatorname{Conv}\{xx^T : x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\} = \{A \in \mathbb{S}^n_+ : \operatorname{Tr}(A) = 1\}$.

5 Пусть E — выпуклое множество в вещественном нормированном векторном пространстве, и пусть $f : \overline{E} \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на замыкании множества E. Покажите, что если f непрерывная, то из выпуклости сужения $f|_E : E \to \mathbb{R}$ следует выпуклость f.

6 Доказать, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})$$

является выпуклой.

7 Опираясь на стандартные примеры выпуклых функций и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость, объясните, почему каждая из следующих функций f является выпуклой:

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \max\{0, \langle a, x\rangle - b\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^n c_i \ln(1 + e^{\langle a_i, x\rangle}) + \frac{\mu}{2}\|x\|^2$, где $\mu, c_1, \ldots, c_n \geq 0$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \max_{1 \leq i \leq n} c_i \ln(1 + e^{|x_i|})$, где $c_1, \ldots, c_n \geq 0$.

(d) $f : E \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := -\ln \operatorname{Det}(B - x_1 A_1 - \cdots - x_n A_n)$, где $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathbb{S}^n$, $E := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \prec B\}$.

8 Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^k x_{[i]}$, где $1 \leq k \leq n$, а символ $x_{[i]}$ обозначает i-ую компоненту отсортированного по убыванию вектора x. Покажите, что функция f выпуклая. (*Подсказка:* Представьте f в виде максимума линейных функций.)

9 Покажите, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle Px, x\rangle \leq \langle c, x\rangle^2;\ \langle c, x\rangle \geq 0\}$, где $P \in \mathbb{S}^n_{++}$, $c \in \mathbb{R}^n$, является выпуклым. (*Подсказка:* Используйте свойство о том, что прообраз выпуклого множества при аффинном преобразовании является выпуклым множеством.)

10 Покажите выпуклость функции

$$f(x) := \cfrac{1}{x_1 - \cfrac{1}{x_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{x_n}}}},$$

определенной на подмножестве $\mathbb{R}^n$, где каждый знаменатель строго положительный. (*Подсказка:* Используйте индукцию и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость.)

[1] Напомним, что множество K в вещественном векторном пространстве называется *конусом*, если $tx \in K$ для всех $x \in K$ и всех $t > 0$.