Лабораторная работа 1

Теоретическая часть

Задача 1. *(4 балла) Докажите, что следующие условия для дифференцируемой сильно выпуклой функции с константой $\mu > 0$ равносильны*

- $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{\mu}{2}\|y-x\|^2, \forall x, y$
- $g(x) = f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2$ *выпукла,* $\forall x$
- $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x-y) \geq \mu\|x-y\|^2, \forall x, y$
- $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \frac{\alpha(1-\alpha)\mu}{2}\|x-y\|^2, \alpha \in [0,1]$

Задача 2. *(4 балла) Докажите, что следующие условия для непрерывно дифференцируемой функции являются следствием сильной выпуклости с константой $\mu > 0$, (дополнительно: привести примеры того, что обратное не верно).*

- $\frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|^2 \geq \mu\left(f(x) - f^*\right), \forall x$
- $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \geq \mu\|x-y\| \forall x, y$
- $f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|^2, \forall x, y$
- $\left(\nabla f(x) - \nabla f(y)^T\right)(x-y) \leq \frac{1}{\mu}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2, \forall x, y.$

Задача 3. *(1 балл) Пусть $h = f + g$. Докажите, что если f сильно выпукла, а g — выпукла, то h — также сильно выпукла.*

Задача 4. *(7б) Докажите для дифференцируемой функции выполнено*

$$[1] \equiv [2] \to [3] \to [4] \to [5] \equiv [6] \equiv [7] \equiv [8]$$

1. $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|^2, \forall x, y$

2. $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2, \forall x, y \text{ and } \alpha \in [0,1]$

3. $\big(\nabla f(x) - \nabla f(y)^T(x-y) \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2, \forall x, y$

4. $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x-y\|, \forall x, y$

5. $g(x) = \frac{L}{2}x^T x - f(x)$ *выпукла* $, \forall x$

6. $f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{L}{2}\|y-x\|^2, \forall x, y$

7. $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x-y) \leq L\|x-y\|^2, \forall x, y$

8. $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \frac{\alpha(1-\alpha)L}{2}\|x-y\|^2, \forall x, y \text{ and } \alpha \in [0,1]$

Дополнительно (7б) Если f — выпукла, то все они эквивалентны.

Практическая часть

(20 б) Реализовать четыре алгоритма:

1. градиентный спуск
2. метод тяжелого шарика
3. метод спорюженных градиентов
4. ускоренный метод Нестерова

Провести анализ подбора параметров для каждого из методов, а также сравнить скорость сходимости для выпуклой и сильно выпуклой функций.

Оценка будет ставиться по качеству реализации, аккуратности и наглядности графиков, осмысленности выводов. Формат сдачи: ipynb с tex вставками, либо файл с кодом и отчет в техе.