

mr
manual de referencia

INFORMÁTICA | TELECOMUNICACIONES

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE FILTROS

Santiago Cogollos Borrás

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Fundamentos de la Teoría de Filtros

Santiago Cogollos Borrás

2016

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Colección Manual de Referencia

Los contenidos de esta publicación han sido revisados mediante el sistema *doble ciego*, ***siguiendo el procedimiento que se recoge en:***

<http://www.upv.es/entidades/AEUPV/info/891747normalc.html>

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: COGOLLOS BORRÁS, S. (2016) *Fundamentos de la teoría de filtros*. Valencia: Universitat Politècnica de València

Primera edición, 2016 (versión impresa)

Primera edición, 2016 (versión electrónica)

© Santiago Cogollos Borrás

© imagen de portada: Bobina de Oudin (1908). Frederick Finch Strong (1908). High Frequency Currents, Rebman Co., New York, p.69. Recuperado de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/20/Oudin_coil.png

© de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.:6277_01_01_01

ISBN: 978-84-9048-443-2 (versión impresa)

ISBN: 978-84-9048-444-9 (versión electrónica)

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edición@editorial.upv.es.

Prefacio

La idea de escribir un libro de filtros desde el punto de vista académico, puede parecer mala debido a que los filtros tienen un objetivo final eminentemente práctico. El enfoque de tipo “manual de instrucciones” suele imponerse en las empresas que se dedican al diseño y la fabricación, y no un libro de texto. Aplicar recetas que resuelvan el problema y minimicen el tiempo de producción es su objetivo final. Cada profesional ha intentado seguir sus criterios, y lo que ha aprendido de otros profesionales. Sin embargo, en tiempos recientes, el diseño de filtros ha cobrado interés por la aparición de nuevas técnicas de diseño y la mejora de otras existentes. Una uniformidad de conceptos, notación, criterios y sobre todo de conocimientos del proceso, se ha revelado como una arma muy potente para acabar con el caos imperante en las metodologías propias de la empresa privada.

El uso de una convención única de polinomios y de parámetros a representar ha destapado unas carencias que existían en la teoría de filtros “clásica”, y que recientemente se han subsanado. Por ejemplo, el diseño de las respuestas en magnitud (teorema del filtro analógico) ha sido durante mucho tiempo el método habitual de diseño. El desprecio de la fase ha destapado la violación de la unitariedad en diseños sobre el papel (por la omisión de una constante compleja) que luego se subsana en la fase de producción de forma injustificada. Otra justificación que me animó a escribir el libro es la laxitud de algunos profesionales al hablar de términos referentes a filtros. Decir que el filtro tiene N polos, y señalar los ceros de reflexión en un analizador de redes, diciendo que esas son las frecuencias de los polos es algo que, aparte de ser completamente falso, siempre me ha resultado molesto. Mi justificación final viene dada por la tendencia del profesional, no dedicado al mundo académico, de ocultar sus métodos y técnicas para poder hacer a su empresa supuestamente más competitiva. Esos métodos, a veces, se transmiten mal o, en el peor de los casos, no son correctos y en ningún caso benefician al progreso de la técnica. Por todo esto, considero que un libro con los conceptos fundamentales, asentados sobre una notación estándar moderna, puede ayudar tanto a estudiantes como a profesionales.

La ingeniería de comunicaciones se ha ocupado del filtrado desde que los ingenieros se dieron cuenta del simple hecho que el espectro radioeléctrico es un bien escaso. En palabras de Leo Young¹:

... El espectro de microondas es un recurso finito el cual debe ser dividido, cuidado y tratado con respeto. Y aquí es donde aparecen los filtros de microondas.

Aunque este libro está dedicado al estudio de principios generales de filtros, el hecho de que muchas aplicaciones de comunicaciones se encuentren en el campo de las microondas (o en general de la alta frecuencia donde los circuitos clásicos no son viables), ha supuesto que muchas técnicas se hayan desarrollado ex-profeso para ese campo. Algunas de ellas serán tratadas por su interés y por la genialidad e inventiva de sus autores que han conseguido empujar la tecnología más allá de lo que algunos pioneros consideraban factible.

Este libro no se ha centrado exclusivamente en los conceptos de procesamiento de señal, que suelen ser más conocidos, sino que se ha añadido una perspectiva desde el punto de vista de las microondas. Esto ha implicado que en muchos apartados se vea la necesidad de utilizar, no sólo la función de transferencia típicamente asociada al concepto de parámetro de transmisión, sino también el parámetro de reflexión. En la mayoría de los casos, utilizar dos parámetros relacionados entre sí, permite dar un giro más simple a desarrollos que de otra manera serían innecesariamente largos.

Espero que este libro sirva principalmente a alumnos de cursos avanzados que quieran profundizar sobre conceptos que, aunque fundamentales, no han sido tratados con detalle en los cursos correspondientes donde el concepto de filtro apareció por primera vez.

Espero que el lector lo lea sin prisas. Todo lo escrito tiene su intención. Los desarrollos, algunas veces muy largos, recogen técnicas que posiblemente al lector le sean conocidas pero en algunos casos no será así (funciones elípticas, fracciones continuas, etc.). Para hacer el libro más autónomo, se han detallado en cada apartado los pasos a seguir. Ello conlleva manejar una gran diversidad de técnicas y la probabilidad de ser poco preciso o deslizar errores aumenta con el tamaño de la obra y su nivel de detalle. Espero que si el lector encuentra errores, de los cuales asumo toda la responsabilidad, me lo haga saber para mejorar el texto en lo posible. El trabajo de mecanografiado de un texto técnico siempre es delicado y, para muchos, una tarea ingrata.

¹Leo Young murió el 14 de Septiembre de 2006. El Dr. Young, un experto en tecnología de microondas, con 20 patentes, publicó numerosos artículos y fue autor, co-autor o editor de 14 libros incluyendo "Microwave Filters, Impedance-Matching Networks and Coupling Structures" (1964). El libro ha sido considerado "la biblia" para los expertos en el campo.

El contenido del libro puede resumirse por capítulos ordenados lógicamente:

Los capítulos 1, 2 y 3 están referidos a la definición de términos, condiciones que debe cumplir un filtro y relaciones que podemos deducir entre las diferentes formas de escribir la respuesta teórica de un filtro.

Los capítulos 4 y 5 están dedicados a los filtros más usados en la actualidad. El capítulo 4 está dedicado a los filtros sin ceros de transmisión (los más antiguos) y el capítulo 5 a los filtros con ceros de transmisión que conllevan una mayor complejidad en las funciones de transferencia.

El capítulo 6 describe las transformaciones que sufre cualquiera de los prototipos de filtro expuestos en los capítulos anteriores para que la respuesta esté situada en la banda de frecuencias de diseño deseada.

El capítulo 7 es un resumen de cómo se sintetizaban filtros básicos en electrónica antes de que la necesidad de usar frecuencias más altas forzara la intervención de los inversores de inmitancia que aparecen en el capítulo 8. En el capítulo 8 se introducen los inversores como solución a las limitaciones de la síntesis expuesta en el capítulo 7 y como forma de simplificar, escalar circuitos y poder usarlos a frecuencias más altas con diseños no concentrados.

En el capítulo 9 se diseñan los filtros distribuidos típicos de radiofrecuencia y microondas usando elementos como líneas de transmisión que no tienen sus parámetros concentrados en un punto como las bobinas o condensadores, sino distribuidos a lo largo de su estructura.

En el capítulo 10 se hace una introducción al diseño actual de filtros usando resonadores acoplados generalmente a través de elementos idealizados como inversores. La formulación con matrices de acoplo se describe de forma muy resumida para poder mostrar la potencia y flexibilidad actual de la síntesis de filtros.

La cantidad de apéndices se ha hecho necesaria para poder explicar en profundidad ciertos aspectos accesorios de los anteriores temas. Casi todos los apéndices tienen ejemplos donde se muestra su utilidad y se justifica su existencia.

La experiencia docente en clases prácticas, resolviendo problemas de diseño o en el mismo laboratorio te enseña que el diablo está en los detalles. Pequeños errores o imprecisiones pueden llegar a arruinar diseños o desperdiciar una cantidad enorme de tiempo hasta encontrar una solución, es por ello que he intentado ser muy preciso, sobre todo en las definiciones. El lector juzgará si lo he conseguido o he fracasado en el intento.

Soy de los que piensan que no tiene sentido que se exponga una teoría sin un ejemplo práctico o un ejercicio para poder poner a punto las habilidades del lector. Al fin y al cabo la ingeniería es una disciplina práctica y no tiene sentido si no se

puede aplicar y para ello hay que ejercitar al ingeniero. Los ejemplos dentro de los temas y los ejercicios al final de cada tema, espero que aclaren muchos aspectos del diseño de filtros.

Otro hecho que me motivó a redactar este libro, fue el esfuerzo que supuso buscar la información fundamental sobre filtros requerida para labores de investigación. El lector, dada la dispersión de la bibliografía y la falta de libros de referencia (muchos de ellos agotados y nunca reimpresos), puede llegar a vislumbrar en ello cierta intencionalidad o al menos cierto oscurantismo en el campo de la síntesis y el diseño de filtros. Muchas veces se dan cosas por supuestas (y no referenciadas) como punto de partida de artículos científicos sobre el tema y esas suposiciones son demasiado críticas para poder obviarlas rápidamente.

Sirva este esfuerzo para que se dé un poco más de rigor y didáctica al trabajo encomiable que muchos ingenieros realizan en el tema, y que ese trabajo redunde en una mayor difusión de resultados relevantes que de otro modo caerían en el olvido.

Dr. Santiago Cogollos
Valencia a 28 de enero de 2016

Índice general

Prefacio	III
Índice general	VII
1 Introducción	1
1.1 Conocimientos previos y notación	1
1.2 Propiedades de los filtros tratados	3
1.3 Filtros como redes de 2 puertos	9
1.4 Relación de parámetros S e impedancias	10
1.5 Pérdidas de retorno y pérdidas de inserción	11
1.6 Nota histórica: Darlington	11
Problemas propuestos	14
2 La función de transferencia	15
2.1 Definiciones	16
2.2 Expresiones ideales	16
2.3 Propiedades básicas de $H(s)$	18
2.3.1 Funciones reales	18
2.3.2 Causalidad	19
2.3.3 Racionalidad	19
2.3.4 Estabilidad	21
2.4 Parámetros de un filtro	23
2.4.1 Dominio de la frecuencia	24

2.4.2 Dominio del tiempo	24
2.5 Propiedades de $ H(j\omega) ^2$	27
2.6 Relación de $H(s)$ con $S_{21}(s)$	29
2.7 Polinomios de $S_{11}(s)$ y $S_{21}(s)$	32
2.8 La función característica	36
Problemas propuestos	38
3 Relaciones para la función de transferencia	39
3.1 Introducción	39
3.2 Relación entre parte real e imaginaria de $H(s)$	43
3.3 Relación entre módulo y la fase de $H(s)$	46
3.4 Casos teóricos	46
3.4.1 Filtro de amplitud constante	46
3.4.2 Filtro con atenuación polinomial	48
3.4.3 Filtro de retardo de grupo constante	49
3.5 Teorema de Paley-Wiener	50
3.6 Filtros de fase mínima y redes paso-todo	51
Problemas propuestos	57
4 Funciones de transferencia clásicas	59
4.1 Introducción	59
4.2 Concepto de filtro todo-polos	60
4.3 El filtro de Butterworth	61
4.3.1 Localización de los polos	63
4.3.2 Condiciones en el límite de la banda	64
4.3.3 Determinación del orden	65
4.3.4 El roll-off	67
4.4 El filtro de Chebyshev	67
4.4.1 Localización de los polos	71
4.4.2 Condiciones en el límite de la banda	72
4.4.3 Determinación del orden	73
4.4.4 El roll-off	76
4.5 El filtro de Bessel-Thompson	76
4.5.1 Propiedades generales	79

4.5.2	Expresiones alternativas	81
4.6	Otros filtros todo-polos	85
4.6.1	El filtro Gaussiano	85
4.6.2	El filtro de Legendre	86
4.6.3	El filtro de Papoulis	87
4.6.4	Más filtros todo-polos	89
	Problemas propuestos	91
5	Introducción a los filtros con ceros de transmisión	93
5.1	Filtros de Butterworth generalizados	94
5.2	Filtros inversos de Chebyshev	94
5.2.1	Construcción de $P(s)$	95
5.2.2	Construcción de $E(s)$	97
5.2.3	Valores de ε y ε_R	98
5.3	Filtros elípticos	101
5.3.1	La máscara	102
5.3.2	Condiciones de la función característica	104
5.3.3	Funciones elípticas	107
5.3.4	Expresión analítica del filtro elíptico	120
5.3.5	Cálculo de los parámetros fundamentales	127
5.4	Filtros de Chebyshev generalizados	132
5.4.1	Función característica	133
5.4.2	Procedimiento de síntesis polinomial	139
	Problemas propuestos	143
6	Transformaciones en frecuencia	145
6.1	Escalado en impedancia y frecuencia	146
6.2	Transformación paso-bajo a paso-bajo	148
6.3	Transformación paso-bajo a paso-alto	149
6.4	Transformación paso-bajo a paso-banda	149
6.5	Transformación paso-bajo a banda eliminada	151
6.6	Transformación paso-bajo a multiples bandas de paso	152
6.7	Transformaciones generales	157
	Problemas propuestos	160

7	Métodos de síntesis de filtros con elementos concentrados	163
7.1	Síntesis de filtros todo-polos. Redes en escalera	165
7.2	Redes en escalera de los filtros más comunes	168
7.2.1	Filtro de Butterworth	170
7.2.2	Filtro de Chebyshev	170
7.3	Métodos generales para diseños en escalera	172
7.3.1	Parámetros de impedancia y admitancia	173
7.3.2	Relaciones con el coeficiente de reflexión y transmisión	174
7.3.3	Síntesis en escalera	181
7.3.4	Extensión a filtros asimétricos	189
7.4	Nota histórica: Norton	199
7.5	Nota histórica: Belevitch	202
	Problemas propuestos	205
8	Inversores de Inmitancias	207
8.1	Propiedades	209
8.1.1	Conversión de impedancias en admitancias	210
8.1.2	Escalado de impedancias	211
8.1.3	Homogeneización de redes	213
8.2	Matrices de inmitancia y ABCD	215
8.3	Circuitos equivalentes	217
8.3.1	Inversores con FIRs	217
8.3.2	Inversores con bobinas y condensadores	218
8.3.3	Inversores con circuitos generales	219
8.3.4	Circuitos habituales usados como inversores	221
8.4	Usos prácticos de inversores	225
8.5	Nota histórica: Marcuvitz	232
	Problemas propuestos	234
9	Filtros distribuidos	237
9.1	Aproximación de líneas cortas: Filtros de salto de impedancia	238
9.2	La transformación de Richards	242
9.2.1	Transformación de la variable compleja s	242
9.2.2	Variaciones de la transformación	245

9.2.3	Identidades de Kuroda.	249
9.3	El teorema de Richards	253
9.3.1	Síntesis con UEs en cascada	255
9.3.2	El filtro de Butterworth	259
9.3.3	El filtro de Chebyshev	260
9.3.4	Procedimiento de diseño.	260
9.4	Transformaciones generalizadas.	266
	Problemas propuestos	267
10	Filtros de resonadores acoplados	269
10.1	Filtros en línea (todo-polos)	270
10.1.1	Prototipo paso-bajo.	270
10.1.2	Equivalencia de bobinas acopladas e inversores	272
10.1.3	Prototipo paso-banda.	273
10.1.4	Prototipo distribuido	274
10.2	Filtros con cavidades múltiplemente acopladas	280
10.2.1	Formulación de matrices de acoplo	282
10.2.2	Características de las matrices	287
10.2.3	Proceso de análisis	288
10.2.4	Proceso de síntesis	291
10.3	Nota histórica: Cohn	296
	Problemas propuestos	298
A	El criterio de Hurwitz	299
A.1	Algoritmo para coeficientes reales	300
A.2	Versión matricial	302
A.3	Extensión a coeficientes complejos	303
B	La técnica de polos alternados	307
B.1	Condición de unitariedad	308
B.2	Obtención de $E(s)$ a partir de $F(s)$ y $P(s)$	309
C	La media aritmético-geométrica y las integrales elípticas	313
C.1	La integral elíptica.	313

C.2	La media aritmético-geométrica	315
C.3	Cálculo de integrales elípticas con la AGM	316
C.4	Calculo de las funciones elípticas Jacobianas con la AGM	316
D	La solución de Cauver para la ecuación diferencial de R_N	319
D.1	La ecuación diferencial de partida	319
D.2	Una forma alternativa para la integral elíptica	320
D.3	Funciones elípticas y R_N	322
D.4	El periodo de $ R_N $	324
D.5	Determinación del grado de los filtros elípticos	327
D.6	Determinación de L	329
D.7	La expresión racional para R_N	332
D.8	Sobre el procedimiento de diseño	334
D.8.1	Datos: N, RL, A_{\min}	334
D.8.2	Datos: RL, A_{\min}, ω_s	335
D.8.3	Datos: RL, N, ω_s	336
E	La función impedancia	337
E.1	Funciones positivas reales	337
E.2	Propiedades	339
E.3	Condiciones	342
E.4	Teoremas útiles	343
E.5	Extracción de impedancias	345
E.6	Funciones reactancia	348
E.6.1	Propiedades de las funciones reactancia	352
E.6.2	Realizaciones canónicas	354
F	Matrices Z, Y, ABCD, S de elementos básicos	359
F.1	La impedancia serie	359
F.2	La admitancia paralelo	360
F.3	La sección en Π	360
F.4	La sección en T	361
F.5	El transformador	362
F.6	El inversor	363

F.7 La línea de transmisión	364
Bibliografía	367
Índice Alfabético	373

Capítulo 1

Introducción

— *Un tipo extraño. Habla de un modo preciso: claramente, sin ambigüedades, como cortando las palabras con una navaja.*

[...]

— *Un tipo científico.*

Dune, Frank Herbert (1920-1986)

Eso es lo que todo autor de libros de texto técnicos desearía: hablar de modo preciso y sin ambigüedades. El hecho de utilizar un lenguaje científico ayuda mucho. El único inconveniente, si se le puede reprochar algo a este tipo de lenguaje, es el poco margen a la libre interpretación que proporciona. A cambio, este mismo lenguaje permite ir más allá de lo que cualquier literatura fantástica permite alcanzar: construir una tecnología que a muchos les parece ciencia-ficción. Este lenguaje y la notación que conlleva no está exento de imaginación ni de inventiva y, aunque a muchos les pueda parecer árido, a la mente habituada le proporciona una herramienta poderosa con la que diseccionar la realidad con un filo mejor que el de cualquier navaja.

1.1 Conocimientos previos y notación

Para la correcta comprensión de este libro, se recomienda que el lector tenga unos conocimientos básicos de sistemas lineales, teoría de circuitos, líneas de transmisión, electrónica analógica y un cierto dominio del cálculo y análisis (transformadas de Fourier y Laplace). Para sistemas lineales y transformadas de Fourier y Laplace el lector puede consultar (Oppenheim, Willsky y Hamid 1996). Para un curso de circuitos (Parra 1991a) y (Parra 1991b) son una elección excelente. Finalmente,

para líneas de transmisión y temas afines a radiofrecuencia y microondas el texto (Bará 1996) es una buena referencia.

Aunque muchos conceptos se intentan explicar desde su base, es un problema del autor tener que establecer cuál es esta base, a partir de la cual construir todo el arsenal necesario para que el lector pueda manejar con soltura los conceptos y técnicas que se desarrollarán a lo largo del libro.

El bagaje técnico necesario suele ser bastante común para alumnos de ingeniería eléctrica, electrónica o de telecomunicaciones, así como ingeniería de sistemas de control. Este libro está dirigido a los que pretenden profundizar un poco en los orígenes del funcionamiento de los filtros de ondas y a sus conceptos básicos, que muchas veces se obvian en un primer contacto, con el objetivo de poder dar un enfoque práctico a los cursos de ingeniería.

Es intención del autor explicar o, al menos, referenciar adecuadamente los conceptos más importantes de la teoría de filtros.

A lo largo del libro se va a operar con números reales y complejos, y se utilizará el lenguaje universal de las matemáticas con las convenciones más habituales. Un pequeño resumen de los símbolos más utilizados es:

- Notación de conjuntos: el conjunto de los enteros se denota por \mathbb{Z} , el de los reales por \mathbb{R} y el de los complejos por \mathbb{C} .
- Los símbolos: \forall “para todo” o “para cualquier”; \in “pertenace a”; \approx “aproximadamente”; \triangleq “igual por definición”; \rightarrow “tiende a”; \Rightarrow “implica”; \Leftrightarrow “si y solo si”.
- Notación compleja: $j = \sqrt{-1}$; $\Re\{z\}$ parte real de z ; $\Im\{z\}$ parte imaginaria de z ; z^* conjugado de z ; $\angle z$ “ángulo” o “argumento” de z ; $|z|$ “módulo” de z .
- Variables más comunes: f para la frecuencia; t para tiempo; s para la variable de Laplace; ω para la variable de Fourier o para la pulsación $\omega = 2\pi f$.
- Las matrices y vectores aparecerán en negrita, \mathbf{A}^T indica la traspuesta de la matriz \mathbf{A} , \mathbf{A}^+ es la matriz traspuesta y conjugada de \mathbf{A} y \mathbf{A}^{-1} su inversa.

Otros símbolos se irán definiendo a lo largo del texto asociados a conceptos de filtros.

Finalmente, a veces se incluye la notación \mathcal{O} según el contexto:

- La expresión $N = \mathcal{O}(p)$ significa que el orden de p es N si p es un polinomio y N es un entero.

- La expresión $g = \mathcal{O}(f)$ si f y g son dos funciones se interpreta, siguiendo la notación de Landau¹, en el contexto de la ecuación, que su comportamiento es el mismo. De forma precisa:

$$g = \mathcal{O}(f) \Leftrightarrow \frac{g}{f} = M$$

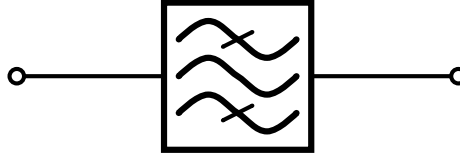
donde M es una constante. Por ejemplo si se dice que $g(\omega) = \mathcal{O}(\omega^2)$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ significa que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{g(\omega)}{\omega^2} = M$$

donde $M < \infty$ es una constante.

1.2 Propiedades de los filtros tratados

Un filtro es un elemento que discrimina una determinada frecuencia o gama de frecuencias de una señal eléctrica que pasa a través de él, pudiendo modificar tanto su amplitud como su fase. El propósito de los filtros es separar la información de interferencias, ruido y distorsión indeseada. Este elemento se modela con su función de transferencia. Su representación es una caja con tres ondas representando bandas. La banda inferior incluye $f = 0$ Hz la superior incluye $f \rightarrow \infty$ y la intermedia cualquier rango que no incluya ninguna de estas dos frecuencias. Si no se especifica nada respecto a las bandas, lo habitual es usar el símbolo



Entre las características básicas de un filtro (aunque se supone que esto es familiar para el lector) están los conceptos de:

Banda de paso: Es el margen de frecuencias que el filtro permite que pase a su través sin apenas atenuación o distorsión. Generalmente se caracteriza por sus frecuencias límite inferior f_1 y superior f_2 . En la figura 1.1 aparece señalada la banda de paso de un filtro genérico.

¹Edmund Landau (1877–1938) fue un famoso matemático alemán que hizo importantes contribuciones a la matemática. En (Apostol 1989) se utiliza la notación o minúscula para la fórmula de Taylor. La notación $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow a$ significa que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 0$. En (Apostol 2001) se emplean las dos notaciones \mathcal{O} y o en el contexto de las sucesiones.

Ancho de banda: Es simplemente la diferencia $\Delta f = f_2 - f_1$. En el caso de la figura 1.1 $\Delta f = 1$ GHz.

Frecuencia central: Se denota por f_0 y se calcula generalmente como $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$ como se verá más adelante y que para anchos de banda estrechos es aproximadamente $f_0 \approx (f_1 + f_2)/2$. En el caso de la figura 1.1 tenemos que $f_0 \approx 4.5$ GHz.

Ancho de banda relativo o fraccional: Es $\mathcal{W} = \Delta f / f_0$. Si se mide en porcentaje simplemente multiplicamos la anterior cantidad por 100. En el caso de la figura 1.1 tenemos $\mathcal{W} \approx 22\%$.

Banda atenuada: Rango de frecuencias que el filtro no permite que pasen a su través sin sufrir una atenuación severa². En el caso de la figura 1.1 la banda atenuada superior empieza donde la transmisión es inferior a -40 dB hasta $f \rightarrow \infty$ y la banda atenuada inferior va desde 0 Hz hasta que la transmisión supera los -40 dB. En este caso el filtro se diseñó para que la atenuación de la banda atenuada fuera de 40 dB.

Banda de transición: Rango de frecuencias entre la banda de paso y la banda atenuada. La atenuación no es muy elevada pero mayor que la requerida en la banda de paso y menor que la deseada en la banda atenuada. Idealmente se quiere que esta banda sea lo menor posible. Esta banda aparece señalada también en la figura 1.1 (la inferior y la superior).

Se supone que el lector intuye qué es la atenuación pero será definida de manera sistemática posteriormente en la ecuación (2.42).

La clasificación de los filtros en el dominio de la frecuencia atendiendo a sus bandas de interés es de sobra conocida:

Filtros paso-bajo: dejan pasar la señal desde frecuencia nula hasta cierta frecuencia f_c denominada de corte³ con una atenuación baja dada por las especificaciones. A partir de esa frecuencia de corte, la señal empieza a atenuarse de forma gradual (banda de transición) y finalmente se llega a la banda atenuada donde la atenuación es la requerida en las especificaciones. En la figura 1.2 aparece un filtro típico donde la frecuencia de corte es $f_c = 1$ GHz. Se ha considerado que la atenuación de 40 dB es la especificación para la banda atenuada. En este tipo de filtros no tiene sentido el ancho de banda relativo porque se considera que la frecuencia central es $f_0 = 0$ Hz.

²Severa es un término relativo. La atenuación requerida en la banda atenuada suele ser un parámetro dado al diseñador y depende de la aplicación.

³En inglés este término aparece como band-edge frequency.

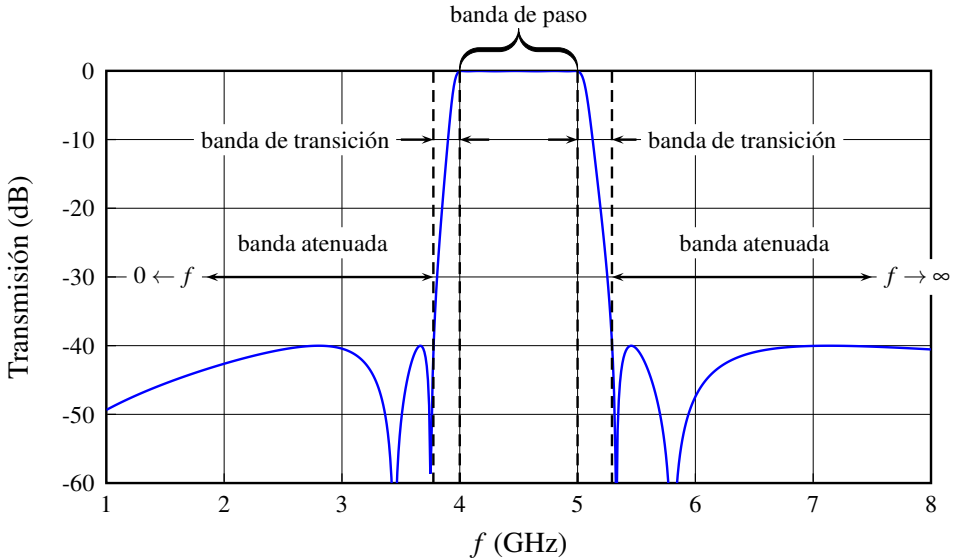


Figura 1.1: Filtro paso-banda con $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz. La banda de paso, de transición y atenuada aparecen señaladas. Al ser un filtro paso banda hay una banda de transición inferior y una superior así como una banda atenuada superior e inferior.

Filtros paso-alto: dejan pasar las frecuencias altas desde una frecuencia de corte hasta (teóricamente) frecuencia infinita. En la figura 1.3 se muestra una respuesta típica de un filtro de este tipo con $f_c = 10$ GHz.

Filtros paso-banda: dejan pasar un rango de frecuencias desde f_1 hasta f_2 siendo estas frecuencias $0 < f_1 < f_2 < \infty$. Un filtro típico de este tipo tiene una respuesta como la que aparece en la figura 1.1 donde $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz.

Filtros de banda eliminada: atenúan una banda delimitada por las frecuencias f_1 y f_2 donde $0 < f_1 < f_2 < \infty$ que marcan el límite de las bandas de paso. La banda atenuada se especifica, como siempre, dependiendo del caso. En la figura 1.4 aparece la respuesta de un filtro de este tipo con $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz, la banda atenuada se ha marcado como límite a partir de una atenuación mayor de 40 dB.

Filtros paso-todo: dejan pasar todas las frecuencias pero modifican la fase de la señal. El módulo de una respuesta de un filtro paso-todo es totalmente plano y por tanto la banda de paso, como tal, no existe. Sin embargo, en cierta banda útil el filtro mantiene unas especificaciones sobre la fase.

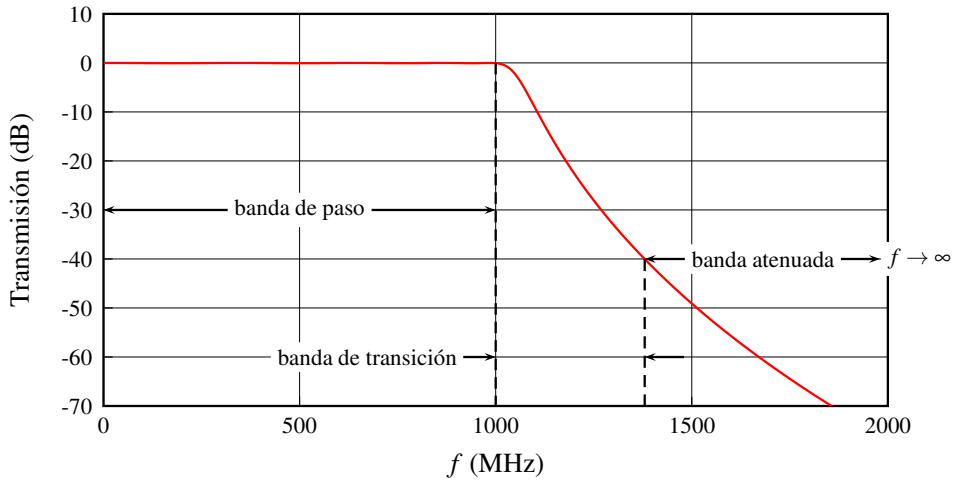


Figura 1.2: Filtro paso-bajo con frecuencia de corte $f_c = 1$ GHz. La banda de paso, de transición y atenuada aparecen señaladas. Se ha considerado que a partir de la frecuencia con atenuación de 40 dB (transmisión de -40 dB) empieza la banda atenuada.

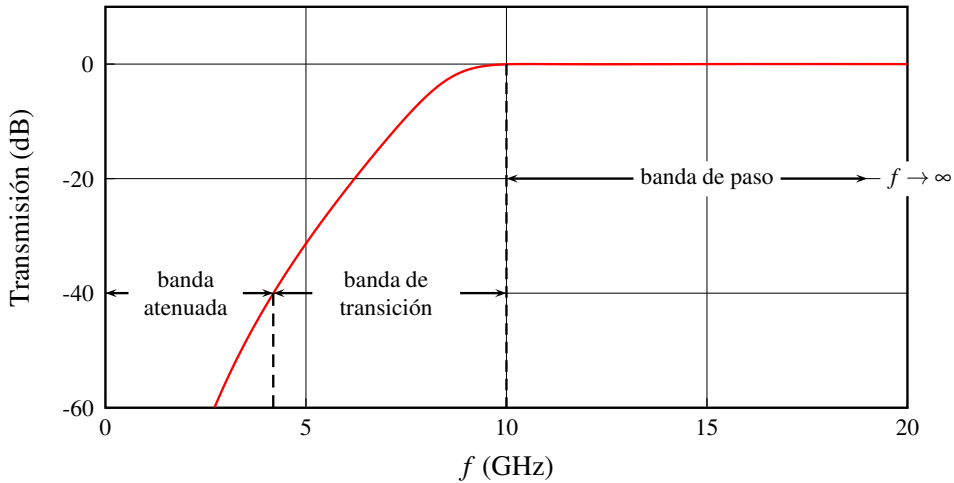


Figura 1.3: Filtro paso-alto con frecuencia de corte $f_c = 10$ GHz. La banda de paso, de transición y atenuada aparecen señaladas. Se ha considerado que la atenuación de 40 dB (transmisión de -40 dB) marca la banda atenuada.

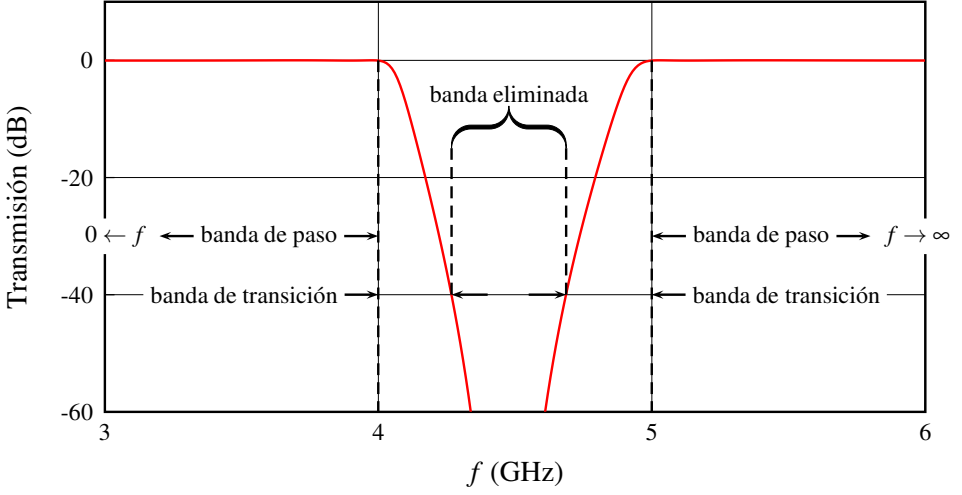


Figura 1.4: Filtro de banda eliminada con frecuencias $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz. La banda de paso, de transición y atenuada aparecen señaladas. Se ha considerado que la atenuación de 40 dB (transmisión de -40 dB) marca la banda eliminada.

Aunque los tipos son variados, se verá más adelante que sólo es necesario estudiar los filtros paso-bajo normalizados ($\omega_c = 1$ rad/s) y mediante transformaciones se consigue obtener cualquier otro tipo de filtros.

A lo largo de todo el libro, los tipos de filtro que se van a tratar van a tener una serie de características comunes, todas ellas deseables desde el punto de vista del análisis sistemático.

Suponemos una función de transferencia $H(s)$ que es la relación entre la señal de salida $Y(s)$ y la señal de entrada $X(s)$ donde s es la variable en el dominio de Laplace.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (1.1)$$

donde $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ es la transformada inversa de Laplace de $H(s)$, $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ son las transformadas de Laplace de la entrada y la salida respectivamente. En el dominio del tiempo, la salida es una convolución de la entrada con la función de transferencia $y(t) = x(t) * h(t)$. En la figura 1.5 se observan las relaciones mencionadas.

Las suposiciones para la función de transferencia que utilizaremos para modelar filtros serán:

LTI: La función de transferencia es lineal e invariante en el tiempo. La linealidad implica que si un filtro con entrada $x_i(t)$ provoca una salida $y_i(t)$ y si la

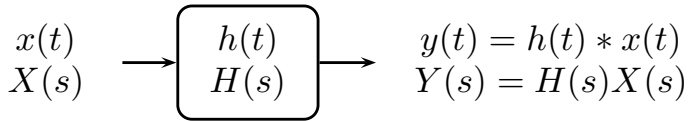


Figura 1.5: Función de transferencia y su relación con la entrada y la salida en ambos dominios.

entrada es una combinación lineal de señales de la forma

$$x(t) = \sum_i \alpha_i x_i(t) \quad (1.2)$$

la salida será de la forma

$$y(t) = \sum_i \alpha_i y_i(t) \quad (1.3)$$

La invarianza temporal indica que el filtro se comporta de la misma forma con el tiempo. Es decir, si la entrada del sistema es $x(t)$ y la salida es $y(t)$ (simbolizado como $x(t) \rightarrow y(t)$) entonces un desplazamiento temporal de la entrada provocaría un desplazamiento temporal de la salida, es decir:

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0) \quad (1.4)$$

Causal: La salida nunca se anticipa a la entrada. La salida en un instante t dependerá de valores de la entrada anteriores a t .

Real: La función $h(t)$ es real. Esta condición se puede violar en filtros de microondas para conseguir respuestas con características especiales como se verá más adelante. Si no se especifica nada, asumiremos que $h(t)$ es real.

Hay que añadir que, trabajar en el dominio de Laplace, de Fourier o en el dominio temporal, supone una ventaja en ciertos casos y un inconveniente en otros, debido a que la relación entre unos dominios y otros se realiza a través de integrales generalmente impropias.

La salvedad aparece en la conversión del dominio de Laplace al dominio de Fourier. En nuestro caso, esta conversión será inmediata por sustitución ($s = j\omega$) si las funciones tienen ciertas características deseables que hacen que la integral de Fourier y la de Laplace sean formalmente equivalentes (ausencia de singularidades en el semiplano derecho del plano complejo). Esto provoca que se puede obtener una función en el dominio de Fourier (en función de la frecuencia) con sólo evaluar la función en la variable de Laplace en el eje imaginario. La conversión de Fourier a Laplace simplemente consiste en aplicar el principio de prolongación analítica (en un entorno sin singularidades) haciendo la sustitución $\omega = s/j$. La relación entre dominios se puede ver gráficamente en la figura 1.6.

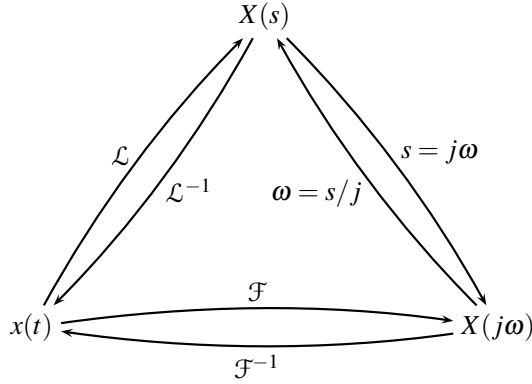


Figura 1.6: Relación entre los dominios del tiempo, de Fourier (o de la frecuencia) y de Laplace.

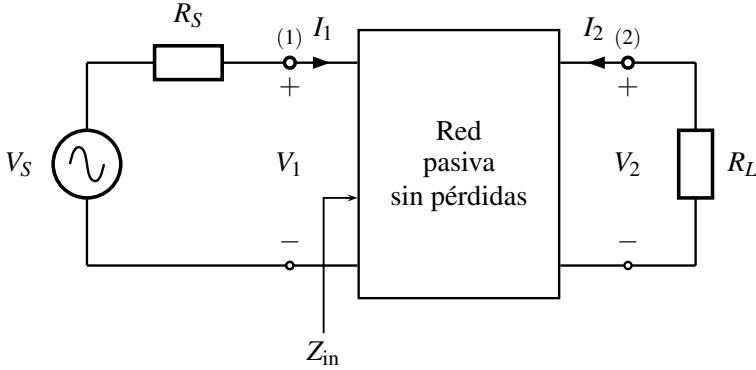


Figura 1.7: Red sin pérdidas conectada a un generador y una carga genéricos.

1.3 Filtros como redes de 2 puertos

Los filtros son dispositivos de dos accesos (la entrada y la salida). En este libro se van a tratar filtros pasivos y eso da propiedades adicionales a la función de transferencia, a la impedancia y, como no, a los parámetros de dispersión (o parámetros S). También se va a considerar que, salvo que se diga lo contrario, los filtros van a ser recíprocos ($S_{12} = S_{21}$) y sin pérdidas.

Un esquema general se muestra en la figura 1.7 donde el filtro puede estar conectado a una fuente de señal de impedancia interna R_S y a una carga R_L .

La matriz de parámetros S de un filtro es de tamaño 2×2 con la propiedad de unitariedad ($\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^+$) que, eliminando las ecuaciones redundantes, proporciona las

siguientes relaciones importantes:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (1.5a)$$

$$S_{11}S_{21}^* + S_{12}S_{22}^* = 0 \quad (1.5b)$$

donde el asterisco indica conjugación compleja. Como regla importante recordar que ningún parámetro de dispersión puede superar en módulo la unidad en una red pasiva y sin pérdidas.

1.4 Relación de parámetros S e impedancias

La impedancia de entrada se puede relacionar con el parámetro de dispersión S_{11} con la conocida relación:

$$\rho = S_{11} = \frac{Z_{\text{in}} - Z_0}{Z_{\text{in}} + Z_0} \quad (1.6)$$

donde Z_0 es la impedancia de referencia del puerto de entrada. Así mismo se puede obtener la impedancia de entrada a partir del parámetro de reflexión con:

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (1.7)$$

y como la condición de unitariedad (1.5a) relaciona ambos parámetros, es posible bajo ciertas condiciones relacionar la impedancia de entrada con S_{21} que es el parámetro que proporciona la información sobre la transmisión del filtro.

Este es un buen momento para recalcar que S_{11} y el parámetro o coeficiente de reflexión ρ no son exactamente lo mismo. Cuando se habla de parámetros de dispersión de una red siempre se elige para cada puerto (o de forma más común para todos simultáneamente) una impedancia de referencia Z_0 con la que se supone que se cargan los puertos. Los parámetros de dispersión dependen pues de esa impedancia. S_{11} es el parámetro de reflexión de la red si la impedancia del acceso 1 es Z_0 , es decir

$$S_{11} = \frac{Z_{\text{in}} - Z_0}{Z_{\text{in}} + Z_0} \quad (1.8)$$

Sin embargo, ρ es el coeficiente de reflexión de la red teniendo en cuenta que tiene la forma que aparece en la figura 1.7 y, como la fuente suele estar representada por su equivalente de Thevenin, la impedancia que se escoge es R_S y por tanto

$$\rho = \frac{Z_{\text{in}} - R_S}{Z_{\text{in}} + R_S} \quad (1.9)$$

Por ello, $\rho = S_{11}$ si $R_S = Z_0$. A lo largo del libro se considerará que éste es el caso y por tanto no se va a hacer distinción entre ρ y S_{11} .

El problema de trabajar con impedancias o con parámetros de dispersión se presentará frecuentemente en la teoría de filtros. Históricamente se empezó a utilizar

la impedancia de entrada para sintetizar una red que proporcionara dicha impedancia. Posteriormente a la invención de los parámetros S , toda la teoría de síntesis desarrollada pudo reutilizarse gracias a la relación existente entre ellos. Además, los parámetros de dispersión se revelaron como una herramienta muy potente para la obtención directa de redes sin la necesidad de utilizar la impedancia de entrada como medio necesario.

1.5 Pérdidas de retorno y pérdidas de inserción

Dos parámetros muy importantes en el diseño de filtros de microondas son las pérdidas de retorno RL y las pérdidas de inserción IL que suelen ser especificaciones dadas al diseñador, en unidades logarítmicas, en la banda de interés. Su definición es:

$$RL = -20 \log_{10} |S_{11}| \quad (1.10)$$

$$IL = -20 \log_{10} |S_{21}| \quad (1.11)$$

y sus unidades son dB. RL es la abreviatura inglesa de *return loss* e IL proviene de la abreviatura de *insertion loss*. Como se ha dicho, las especificaciones de ambas se suelen dar sobre la banda de paso del filtro ya que fuera de la banda IL es simplemente la atenuación en la banda atenuada y RL fuera de la banda de paso es prácticamente 0 dB. En capítulos posteriores se estudiarán algunas relaciones que involucren a estas definiciones.

1.6 Nota histórica: Darlington

Antes de que los filtros tuvieran un método de diseño evolucionado, el proceso de síntesis era bastante embrollado. Requería ajustes constantes y no tenía base sistemática.

Sin embargo, parece que los primeros intentos de síntesis sistemática tuvieron lugar en las primeras décadas del siglo XX cuando Karl Willy Wagner en Alemania y George Ashley Campbell en los Estados Unidos trabajaron independientemente en tales aproximaciones (Darlington 1999).

Otros métodos, en particular el de la síntesis por el método de las pérdidas de inserción, se empezaron a desarrollar en la década de 1930 por Darlington (EEUU) y Cauer (Alemania) de forma independiente con contribuciones de Brune. Ya en los años 30 y 40 empezaron a aparecer diseños de filtros activos entre los cuales H. Bode tiene un papel destacado. De Cauer y de Brune hablaremos más adelante, pero merece la pena detenerse en Darlington (figura 1.8) porque fue una figura muy destacada en la historia de los filtros.

Paralelamente, los diseños de filtros se formalizaron. Una función matemática lo más deseable posible y, al mismo tiempo, realista se convirtió en el Santo Grial para los pioneros del diseño. En 1930 Stephen Butterworth desarrolló el primer tipo. En los 1931 Cauer dio un golpe maestro al desarrollar los filtros elípticos⁴. Posteriormente, en 1949 se desarrollaron los filtros de Bessel por Thomson. Los filtros de Chebyshev, basados en los polinomios del conocido matemático ruso, fueron desarrollados en los 1950s a partir del trabajo póstumo de Cauer. Es curioso que los filtros de Chebyshev, aunque se estudian después de los de Butterworth en cualquier texto académico, fueron desarrollados mucho después de los filtros elípticos cuya complejidad es la mayor alcanzada hasta el momento (Paarmann 2001). De hecho, hoy en día se sabe que los filtros de Butterworth (maximalmente planos en la banda de paso y atenuada), Chebyshev (rizado constante en la banda de paso y maximalmente planos en la banda atenuada) y Chebyshev inversos (maximalmente planos en la banda de paso y rizado constante en la banda atenuada) son un caso límite de filtros elípticos (rizado constante en la banda de paso y en la atenuada).

Siguiendo el hilo académico y no histórico, en este libro se van a estudiar los filtros de Chebyshev antes de los elípticos. Otros filtros más modernos se han desarrollado haciendo que los filtros clásicos sean casos especiales de una clase más general (por ejemplo, los filtros ultraesféricos pueden incluir como casos particulares a los filtros de Butterworth, Chebyshev y Legendre).

Todo esta historia ha supuesto un gran avance que surgió de muchos científicos trabajando por separado, pero algunos vieron un común denominador muy útil: usar las pérdidas de inserción como piedra angular de la teoría de aproximación. Darlington fue el artífice de su creación y su popularización en los Bell Telephone Laboratories. Este método empezó a dejar de lado el método de los parámetros imagen que era el preferido por usar secciones idénticas para un diseño global (aunque aproximado). El problema fue que el método de los parámetros imagen no se pudo abandonar de inmediato porque el coste de cálculo era enorme para el método de pérdidas de inserción. No había ordenadores y los cálculos involucrados eran muchas veces inasumibles en la práctica. Hoy en día el método de pérdidas de inserción es el método que ha prevalecido.

Sidney Darlington (18 de julio de 1906–31 de octubre de 1997) fue un ingeniero eléctrico (ver figura 1.8). En 1929 se unió a los Bell Labs. Su primer jefe fue Edward Lawry Norton y después fue Hendrik Wade Bode ambos con nombre propio en el campo de la ingeniería eléctrica. Darlington permaneció en los laboratorios Bell hasta que se retiró en 1971.

⁴Provocó (según confesó Darlington) que muchos ingenieros de la Bell buscaran información en la biblioteca de Nueva York sobre las funciones elípticas, al demostrar que eran los filtros más óptimos en cuanto a rapidez de aumento de la atenuación en la banda de transición. Sobre estos filtros hablaremos largo y tendido en el capítulo 5 para ver la belleza que entrañan y la complejidad que los acompaña.



Figura 1.8: Sidney Darlington nació en Pittsburgh, Pennsylvania, el 18 de julio de 1906, y creció en Nueva Inglaterra. Recibió su B.S. en Física, Magna Cum Laude, por Harvard en 1928. En 1929 obtuvo su B.S. en ingeniería eléctrica del MIT, y su Ph.D. en Física por la universidad de Columbia en 1940. Los profesores G. W. Pierce de Harvard y E. A. Guillemin del MIT espolearon en él una fascinación por los aspectos teóricos de la ingeniería de comunicaciones. Cortesía del IEEE History Center y la Engineering and Technology History Wiki.

En 1945, recibió la medalla presidencial de la libertad, el mayor honor civil en EEUU, por sus contribuciones durante la segunda guerra mundial. En 1975 recibió la medalla Edison del IEEE y la medalla de honor del IEEE en 1981.

Publicó varios artículos sobre la historia de la síntesis de redes y filtros. Estos artículos han servido para aclarar el trabajo independiente de varios ingenieros hacia soluciones cada vez más útiles, simples y de diseño más sistemático (Darlington 1999). Su figura es omnipresente en la historia de la teoría de circuitos (Belevitch 1962) y su trabajo pionero le valió el reconocimiento recibido. Aparte de sus avances en la teoría de síntesis de filtros, también inventó en 1953 la configuración de transistores que lleva su nombre. Desarrolló el radar por compresión de pulsos chirp en 1947 y dispositivos para soltar bombas de forma precisa (bombsights). También desarrolló de forma importante las ecuaciones del guiado de cohetes integrando la información de muchas fuentes (trayectorias de blancos, datos de radar que sigue al cohete y telemetría del propio cohete) para formar un flujo de datos que guiaría al cohete a su blanco.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.1 Demostrar que:

1. $\sin x = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \rightarrow 0$
2. $\tan x = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \rightarrow 0$
3. $\sin x = x + o(x)$ cuando $x \rightarrow 0$
4. $\log(1+x) = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \rightarrow 0$
5. $\frac{1}{1-x} = 1+x+\mathcal{O}(x^2) = 1+x+o(x)$ cuando $x \rightarrow 0$
6. $\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{b_0+b_1x} = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$ (a_i y b_i constantes)

1.2 Demostrar que en un filtro centrado a f_0 de banda estrecha (Δf pequeño respecto a f_0) la expresión de $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$ se puede aproximar por $f_0 \approx (f_1 + f_2)/2$ donde f_1 y f_2 son los límites inferior y superior respectivamente de la banda de paso.

1.3 Sea un filtro paso-banda con $f_0 = 2.45$ GHz y $BW = 100$ MHz. Determinar los límites de la banda f_1 y f_2 y el ancho de banda fraccional W en tanto por cien.

1.4 Sea un filtro paso-banda con $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz. Determinar f_0 , BW , W en tanto por cien.

1.5 Si un filtro en su banda de paso tiene unas pérdidas de inserción mínimas de 0.5 dB,

- ¿Cuál es el valor de S_{21} máximo en escala lineal?
- Si este filtro no tiene pérdidas (y cumple unitariedad), ¿cuál debería ser su nivel máximo de pérdidas de retorno? ¿cuál es el valor correspondiente de S_{11} ? Indicar si este valor es el mínimo o el máximo posible.

1.6 Si un filtro sin pérdidas en su banda de paso tiene un rizado de 1 dB (su S_{21} oscila entre 0 y -1 dB),

- ¿Cuál es el valor de sus pérdidas de inserción mínimas y máximas en su banda de paso?
- ¿Cuál es el valor de sus pérdidas de retorno mínimas y máximas en su banda de paso?

Capítulo 2

La función de transferencia

Empieza por el principio — dijo el Rey con gravedad — y sigue hasta llegar al final; allí te paras.

Alicia en el país de las maravillas, Lewis Carroll (1832–1898)

Lo último que uno sabe, es por donde empezar.

Blaise Pascal (1623-1662)

Es cierto, es difícil escribir una obra sin tener muy claro dónde acabará, pero empezar... eso sí que es complicado. Elegir notación para cada término introducido y arrastrar esa notación por toda la obra, intentando ser consistente requiere bastante reflexión y planificación (y algunas veces borrar y reescribir). Algunas fuentes discrepan de los términos, las definiciones y sobretodo cómo contar de forma bien hilvanada, sin demasiados traumas para el lector, una teoría que a la vez se entienda y que sea útil. Ahí va un primer intento...

En este capítulo se tratará la función de transferencia $H(s)$, sus propiedades y su relación con los parámetros de transmisión. Esto nos permitirá saber qué funciones pueden ser funciones de transferencia a partir de sus diagramas de polos y ceros o de su expresión matemática.

Según la conveniencia se utilizará s o ω como variables de la función de transferencia y de sus parámetros derivados¹.

¹Recuérdese que $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

2.1 Definiciones

Si la función de transferencia es una función compleja en general que depende de la pulsación $\omega = 2\pi f$ podemos escribir:

$$H(j\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} \quad (2.1)$$

donde $H_R = \Re\{H(j\omega)\}$ es la parte real de $H(j\omega)$ y $H_I(s) = \Im\{H(j\omega)\}$. Se definen para una función de transferencia los siguientes términos:

Módulo:

$$|H(j\omega)| \triangleq \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)}$$

Fase:

$$\theta(\omega) \triangleq \angle H(j\omega) = \arctan \left[\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \right]$$

Retardo de fase:

$$\phi(s) \triangleq -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$$

Retardo de grupo:

$$\tau_g \triangleq -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

2.2 Expresiones ideales

El filtrado consiste en separar las frecuencias para un fin concreto. Es por ello que la respuesta ideal buscada es algo muy claro. Antes de pasar a explicar sus características hay que decir que se va a tratar el filtro paso-bajo (filtro que deja pasar las señales por debajo de ciertas frecuencias y rechaza el resto) debido a que los demás tipos de filtro pueden tratarse como un filtro paso-bajo transformado en frecuencia como se verá más adelante en el capítulo 6.

La respuesta de un filtro ideal deberá de ser:

- Su módulo deberá de ser del tipo “brick wall” como se muestra en la figura 2.1. El valor de la función de transferencia en el ancho de banda es $A = 1$ para no alterar el valor original de amplitud de la señal. Por ello

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \forall |\omega| \leq \omega_c; \\ 0, & \forall |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

donde ω_c es la pulsación de corte definida en el capítulo 1.

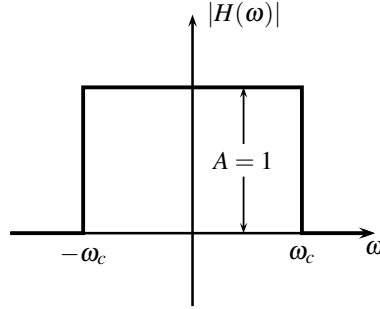


Figura 2.1: Módulo para la función de transferencia de un filtro ideal.

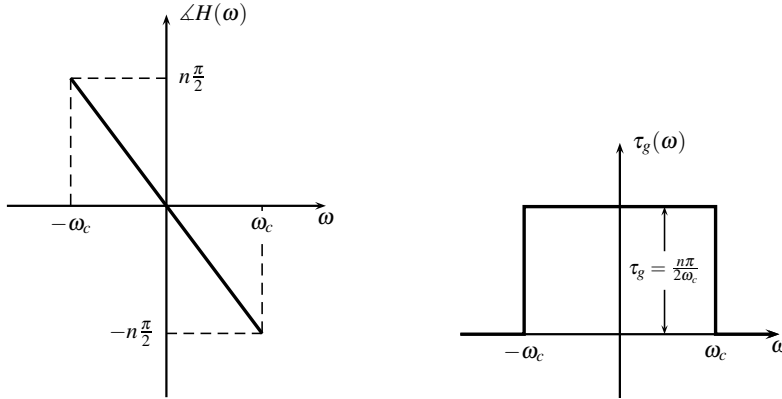


Figura 2.2: Ejemplo de fase (izquierda) y de retardo de grupo (derecha) para la función de transferencia de un filtro ideal.

- Su fase deberá ser idealmente nula a todas las frecuencias. $\theta(\omega) = 0 \quad \forall \omega$.

De entrada, estamos abocados al fracaso porque no es posible conseguir ninguna de las dos cosas por separado y menos simultáneamente, como se verá a continuación.

Ya que la fase no se puede conseguir que sea nula, sí es posible que en un cierto entorno sea lo más lineal posible para que el retardo de grupo sea una constante. Ya que sabemos que el retardo de grupo no puede ser negativo porque eso significaría una violación de la causalidad, ello implica que la fase ideal sería una recta con pendiente negativa que pase por el origen (para mantener cierta simetría como se verá más adelante). Por ello la fase ideal tendrá un aspecto como el que aparece en la figura 2.2 (izquierda). Con una expresión similar a:

$$\theta = -\frac{n\pi}{2\omega_c}\omega$$

que da la cota superior (en módulo) para todo ω ya que para una expresión racional de grado n para $H(\omega)$ cada singularidad proporciona una fase menor que $-\pi/2$ como se verá posteriormente². El retardo de grupo ideal tendría la forma que se observa en la figura 2.2 (derecha).

Hay que remarcar que tanto la fase como el retardo de grupo a partir de ω_c no es importante debido a que la amplitud ideal sería cero. Tampoco olvidar que la pendiente y el retardo de grupo son orientativos y que dependen del orden del filtro (del que se hablará posteriormente) y de la frecuencia de corte.

2.3 Propiedades básicas de $H(s)$

Partiendo de las expresiones ideales para el módulo y la fase, se pueden establecer varias propiedades como la de la causalidad y la de realizabilidad.

2.3.1 Funciones reales

Si nuestra función de transferencia forzamos a que sea real, es decir, que la respuesta al impulso $h(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t$, en el dominio de la frecuencia tenemos que $H(j\omega) = H^*(-j\omega)$. Esto genera las siguientes propiedades de simetría para las partes real, imaginaria, módulo y fase.

- La parte real de $H(j\omega)$ es par. $\Re\{H(j\omega)\} = \Re\{H(-j\omega)\}$
- La parte imaginaria de $H(j\omega)$ es impar. $\Im\{H(j\omega)\} = -\Im\{H(-j\omega)\}$
- La magnitud es par. $|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$ (véase la figura 2.1)
- La fase es impar. $\angle H(j\omega) = -\angle H(-j\omega)$ (véase la figura 2.2)

Es algo frecuente que la respuesta al impulso sea real pero si nuestra función de transferencia es el parámetro de transmisión de un circuito de microondas, esta condición no se cumple y se puede perder la simetría y la estructura de microondas sigue siendo realizable. Sobre este tema se volverá a incidir más adelante.

²Esto es evidente si descomponemos el denominador de grado n en términos del tipo $(s - p_i)$. Si evaluamos s en el eje imaginario la fase de cada término es mayor que $\pi/2$ y como los términos están en el denominador hay que cambiar el signo de todas las fases. Si $H(s)$ tiene numerador no constante la fase del mismo se añade a la del denominador pero nunca se podrá compensar la fase negativa del denominador porque el denominador tiene mayor orden y porque la distribución de los ceros de transmisión que se verá en la sección 2.7 no lo permite.

2.3.2 Causalidad

Como ya se ha indicado, la causalidad implica en un sistema LTI que la salida en un instante t dependa de valores de la entrada anteriores a t . La respuesta ideal en el dominio de la frecuencia de la figura 2.1 se puede expresar de forma compacta como

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \quad (2.2)$$

que es un pulso rectangular de anchura $2\omega_c$. La expresión temporal de $h(t)$ es

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad (2.3)$$

la cual es claramente no causal ya que para forzar causalidad $h(t) = 0$ para $t < 0$ debido a que la salida es la convolución de la entrada con $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

Por este motivo se suele utilizar la transformada de Laplace unilateral para trabajar con señales que al final se convierten al dominio del tiempo. En la definición de esta transformada se considera la integración a partir de $t = 0$:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

y por ello las expresiones temporales con las que vamos a trabajar se asume que son nulas para $t < 0$ o, expresándolo de manera compacta, una función de t multiplicada por la función escalón $u(t)$.

2.3.3 Racionalidad

Si asumimos que un circuito va a realizar físicamente nuestra función de transferencia, este circuito va a ser, obviamente, finito. Cualquier circuito finito, si se analiza por métodos transformados para obtener una ecuación algebraica en lugar de diferencial, genera una función de transferencia racional:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son los polinomios numerador y denominador de orden M y N respectivamente. La condición de que la función de transferencia sea racional no es

necesaria en teoría, pero un circuito genera ese tipo de funciones y, como nuestra función va a ser realizada a través de un circuito, es de esperar que nuestro campo de trabajo final sean funciones de transferencia racionales.

Una ecuación diferencial de orden N describe la relación entrada/salida de una red de N elementos de almacenamiento. La transformada de Laplace transforma esta ecuación en una función racional de orden N , donde N es el orden del denominador de la función de transferencia como se verá a continuación.

Los coeficientes a_k y b_k son coeficientes reales si $h(t)$ es real. Si los polinomios numerador y denominador se escriben en forma factorizada podemos obtener información de cómo son las raíces:

$$H(s) = K \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (s - \gamma_k) \prod_{k=1}^{M_2} (s - \alpha_k)(s - \alpha_k^*)}{\prod_{k=1}^{N_1} (s - \mu_k) \prod_{k=1}^{N_2} (s - \beta_k)(s - \beta_k^*)} \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= \frac{b_M}{a_N} \\ M &= M_1 + 2M_2 \\ N &= N_1 + 2N_2 \end{aligned}$$

El dominio de las constantes que aparecen en (2.4) es:

$$\begin{aligned} \gamma_k, \mu_k &\in \mathbb{R} \\ \alpha_k, \beta_k &\in \mathbb{C} \end{aligned}$$

En la ecuación (2.4) se observa que las raíces reales aparecen en términos aislados y las complejas por parejas ya que si los coeficientes de los polinomios son reales al aparecer una raíz compleja, aparece su conjugada. Las raíces del numerador son los ceros de la función de transferencia y las raíces del denominador son los polos de la función de transferencia.

Para obtener la expresión temporal de una expresión racional, el proceso más común suele ser descomponer en fracciones simples la expresión (2.4) y, con una tabla, obtener la transformada inversa de Laplace.

Un filtro suele tener una función de transferencia que a altas frecuencias se anule. En caso contrario el filtro no sería selectivo en frecuencia. Esto fuerza una condición sobre el número de polos y ceros: el número de ceros es menor que el de polos o a

Tabla 2.1: Transformadas más comunes. Los parámetros α y ω son reales.

$H(s)$	$h(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{1}{s-a}$	$u(t)e^{at}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$u(t) \sin(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$u(t) \cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$u(t)e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$
$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$u(t)e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$

lo sumo igual. Esto es fácil de ver:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{b_M(j\omega)^M}{a_N(j\omega)^N}$$

es decir

$$M \leq N$$

o de lo contrario la respuesta a altas frecuencias tendería a infinito.

2.3.4 Estabilidad

Si la función que se está tratando es racional y causal, la transformación inversa de Laplace tiene formas muy limitadas. Viendo la tabla 2.1, las exponenciales negativas fuerzan polos en el semiplano izquierdo del plano complejo. Las exponenciales positivas hacen que la respuesta sea inestable ya que el valor de $h(t)$ se dispararía sin límite, y esto es del todo inadecuado. Finalmente, si los polos están justo en el eje imaginario, la respuesta oscila sin crecer ni decrecer en amplitud.

EJEMPLO 2.1 Sea la función de transferencia:

$$H(s) = 5 \frac{s^3 - 3s^2 + 9s + 13}{s^4 + 12s^3 + 69s^2 + 198s + 200}$$

Hallar los polos y ceros de $H(s)$, factorizar $H(s)$ sin utilizar complejos, dibujar el diagrama de polos y ceros y verificar su estabilidad.

Solución: Los coeficientes del numerador y denominador son reales. Por lo tanto las raíces, de ser complejas, aparecerían por pares conjugados.

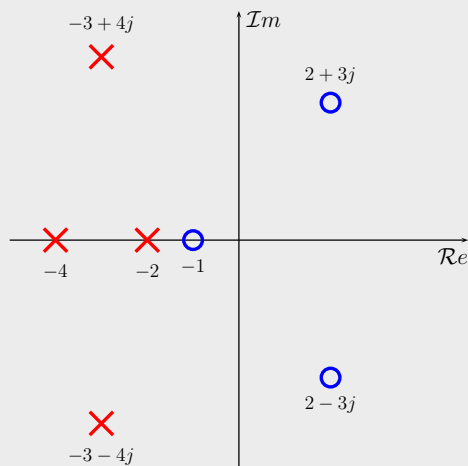
Los polos son: $-2, -4, -3 + 4j, -3 - 4j$

Los ceros son: $-1, 2 + 3j, 2 - 3j$

Por tanto, la función de transferencia puede escribirse como

$$H(s) = 5 \frac{(s+1)(s-2-3j)(s-2+3j)}{(s+4)(s+2)(s+3+4j)(s+3-4j)} = 5 \frac{(s+1)(s^2-4s+13)}{(s+4)(s+2)(s^2+6s+25)}$$

El diagrama de polos y ceros es:



Ninguno de los polos de $H(s)$ está en el semiplano derecho y por tanto la respuesta es estable.

Como se ha visto, las funciones de transferencia que nos van a interesar tienen un denominador que es un polinomio cuyas raíces tienen la parte real negativa. Estos polinomios se les denomina polinomios de Hurwitz³. En algunas referencias, se dice que un polinomio es estrictamente de Hurwitz si sus raíces tienen parte real negativa y si las raíces tienen parte real no positiva (es decir, negativa o cero) se dice que el polinomio simplemente es de Hurwitz. En este libro, si no se especifica lo contrario, utilizaremos la definición “estricta” para que las raíces no puedan estar en el eje imaginario del plano complejo.

³El matemático alemán Adolf Hurwitz (26 de Marzo de 1859 - 18 de Noviembre de 1919) estudió estos polinomios por primera vez en 1896.

Definición 2.1 Sea un polinomio $P(s)$ de grado N con coeficientes complejos en general. Sean sus raíces $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$. Si se cumple que

$$\Re\{s_i\} < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

entonces se dice que el polinomio es de Hurwitz.

Las principales características de un polinomio de Hurwitz es que no tiene coeficientes negativos y que si el polinomio es real nunca le falta ninguna potencia entre el término de mayor orden y el de menor orden. Sin embargo, esto no es suficiente para asegurar que un polinomio es Hurwitz. Para verificar que todas las raíces estén en el semiplano izquierdo se utiliza un método llamado criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz⁴ (Van Valkenburg 1960). El apéndice A desarrolla algunos métodos para identificar si un polinomio es de Hurwitz.

Resumiendo las restricciones para $H(s)$:

- Lineal.
- Causal.
- Invariante en el tiempo.
- Racional con $M \leq N < \infty$.
- Coeficientes reales si $h(t)$ real.
- Estable: polos en el semiplano izquierdo.

2.4 Parámetros de un filtro

En el estudio de filtros siempre es útil saber qué filtro tiene mejores características que otro para un orden dado. Para comparar las respuestas de diferentes filtros, a veces es muy sencillo inspeccionar visualmente las respuestas pero, otras veces, esto no es suficiente. Es por ello que la definición de ciertos parámetros de un filtro ayuda en el proceso de comparación.

⁴La idea es saber que un polinomio es de Hurwitz sin tener que calcular sus raíces. Hoy en día con rutinas de ordenador es muy fácil obtener las raíces si el orden del polinomio es bajo. En cualquier caso, es útil tener un método para poder saber si un polinomio es de Hurwitz para un orden cualquiera.

2.4.1 Dominio de la frecuencia

Si la función de un filtro es seleccionar o discriminar frecuencias es de sentido común suponer que la selectividad del filtro sea un parámetro importante. La selectividad es una medida de lo abrupta que es la caída de su respuesta en frecuencia. Si el filtro ideal consiste en una respuesta tipo “brick wall”, una caída vertical es lo más deseable pero, como ya se ha dicho, esto no es posible. Asumiremos que la caída de $H(s)$ a la frecuencia de corte debe ser alta pero no vertical. Una medida de esta “verticalidad” es la selectividad que se define como:

$$F_s \triangleq - \left. \frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (2.5)$$

donde la pulsación ω_c es la pulsación a la que la respuesta cae 3 dB. Es decir, la pulsación ω_c cumple

$$20 \log_{10} |H(j\omega_c)| = 10 \log_{10}(1/2) \approx -3 \text{ dB}$$

La definición de selectividad es una pendiente a una frecuencia. Suponiendo que la función de transferencia es adimensional, las unidades de la selectividad son s/rad. Sin embargo, lo habitual es trabajar en unidades logarítmicas y en frecuencias y por ello se suele dar la selectividad en dB/Hz.

Otro parámetro que mide de manera diferente la bondad de la respuesta en frecuencia del filtro es el shaping factor o factor de forma. Este factor requiere la definición de dos puntos de atenuación de la respuesta en frecuencia a y b donde se va a medir el ancho de banda. Supongamos que se mide el factor de forma en un prototipo paso-bajo (generalmente, tanto el factor de forma como la selectividad, se dan en el prototipo paso-bajo). La atenuación a es la menor y producirá un ancho de banda menor BW_a , que es el rango de frecuencias donde la atenuación es menor que a . La atenuación b será mayor que a y producirá un ancho de banda BW_b , que es el rango de frecuencias donde la atenuación es menor que b (véase la figura 2.3). El factor de forma S_a^b se define como:

$$S_a^b \triangleq \frac{BW_b}{BW_a} \quad (2.6)$$

donde se observa que el factor de forma es adimensional y siempre es mayor que la unidad.

2.4.2 Dominio del tiempo

Para definir algunos parámetros útiles en el dominio del tiempo, vamos a suponer que tenemos un filtro ideal en el dominio de la frecuencia⁵ como el propuesto en

⁵Asumiremos que no tiene retardo. El propósito de este ejemplo es definir unos parámetros que se pueden definir de la misma forma aunque el retardo exista.

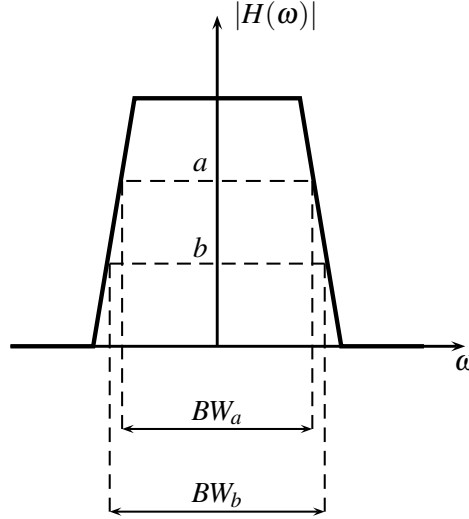


Figura 2.3: Definición de dos niveles de atenuación a y b para obtener el factor de forma a partir de los anchos de banda BW_a y BW_b .

(2.2), y cuya respuesta al impulso es la descrita por (2.3). Si a este filtro a la entrada se le excita con un escalón unitario $u(t)$, la respuesta (llamada respuesta al escalón) se puede obtener por convolución como:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Si}(\omega_c t) \right]$$

donde $\text{Si}(x)$ es la integral seno definida como sigue:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

y que se puede calcular fácilmente de manera numérica. La respuesta al escalón se puede ver en la figura 2.4 para una pulsación normalizada ($\omega_c = 1$ rad/s).

Sobre la figura podemos definir tres parámetros muy utilizados (Paarmann 2001):

Tiempo de subida: Es el tiempo que tarda la respuesta al escalón para pasar del 10 % al 90 % del valor definitivo después del escalón. A este valor definitivo lo denominaremos $y(\infty)$ ya que

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

En algunos casos se utilizan otros valores en lugar de 10 % y 90 %, pero estos son los más comunes.

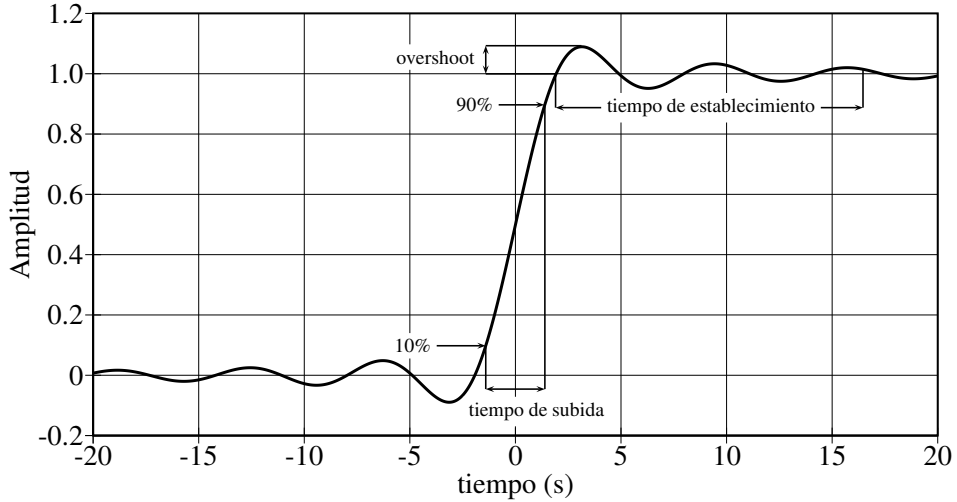


Figura 2.4: Respuesta al escalón del filtro ideal paso-bajo para una pulsación de corte normalizada a $\omega_c = 1$ rad/s.

Overshoot: Es el exceso y_{\max} sobre $y(\infty)$ que va a tener como máximo la respuesta $y(t)$. El overshoot se suele expresar como un valor absoluto o como un porcentaje sobre el tiempo de establecimiento. Es decir:

$$Os \triangleq y_{\max} - y(\infty) \quad Os(\%) \triangleq \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$$

Tiempo de establecimiento: Presupone que hay un overshoot. Es el tiempo que tarda $y(t)$ en pasar por primera vez por $y(\infty)$ hasta que $y(t)$ cae y se mantiene por debajo de un cierto valor, que suele ser 0.01. Es decir:

$$t_s = t_1 - t_0$$

donde t_0 y t_1 se definen como

$$\begin{array}{ll} \text{primera vez que sucede} & y(t_0) = y(\infty) \\ \text{última vez que sucede} & |y(t_1) - y(\infty)| = 0.01 \end{array}$$

2.5 Propiedades de $|H(j\omega)|^2$

Tradicionalmente, la principal preocupación a la hora de diseñar un filtro ha sido el asegurar que la amplitud se mantuviera en la banda de paso. El retardo de grupo ha sido un tema que, aunque fue tratado en los filtros de Bessel-Thomson⁶ hace muchos años, en general, ha sido un tema secundario a la hora de diseñar filtros.

Un recurso para eliminar la fase del proceso de diseño es considerar la función $|H(j\omega)|^2$. En este caso, al ser una función con valores reales, la fase es nula para cualquier frecuencia.

Asumiendo las propiedades de $H(s)$, podemos escribir como punto de partida del diseño que:

$$\begin{aligned}|H(j\omega)|^2 &= H(j\omega)H(j\omega)^* = H(j\omega)H(-j\omega) \\ |H(s)|^2 &= H(s)H(s)^* = H(s)H(-s)\end{aligned}$$

ya que $H(s) = H(-s)^*$ porque asumimos que $h(t)$ es real.

Supongamos que $P(s)$ es un polinomio de orden n de la forma:

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \cdots + p_ns^n$$

El polinomio conjugado es $P(s)^* = P^*(s^*) = P^*(-s)$. Donde $P^*(s)$ significa conjugar los coeficientes y no la variable. Es decir:

$$\begin{aligned}P^*(s) &= p_0^* + p_1^*s + p_2^*s^2 + \cdots + p_n^*s^n \\ P^*(s^*) = P^*(-s) &= p_0^* - p_1^*s + p_2^*s^2 + \cdots + p_n^*s^n \quad (n \text{ par}) \\ P^*(s^*) = P^*(-s) &= p_0^* - p_1^*s + p_2^*s^2 + \cdots - p_n^*s^n \quad (n \text{ impar})\end{aligned}$$

Si expresamos el mismo polinomio $P(s)$ en forma factorizada tenemos:

$$P(s) = p_n \prod_{k=1}^n (s - s_k)$$

Conjugando $P(s)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}P(s)^* &= p_n^* \prod_{k=1}^n (s - s_k)^* = p_n^* \prod_{k=1}^n (s^* - s_k^*) \\ &= p_n^* \prod_{k=1}^n -(s + s_k^*) = p_n^* (-1)^n \prod_{k=1}^n (s + s_k^*)\end{aligned}$$

⁶Los filtros de Bessel-Thomson son los diseñados para conseguir un retardo de grupo maximalmente plano en la banda de paso. No son muy selectivos en frecuencia y sus aplicaciones son muy concretas. Se tratarán en el capítulo 4.

Es evidente que si los polos de $H(s)$ eran $\{s_{p0}, s_{p1}, \dots, s_{pn}\}$ y estaban en el semiplano izquierdo, los polos de $H(-s)$ son $\{-s_{p0}^*, -s_{p1}^*, \dots, -s_{pn}^*\}$ y están en el semiplano derecho. Esto es debido a que cambiar el signo y conjugar provoca que el eje imaginario sea un eje de simetría para reflejar las raíces de los polinomios. Esta transformación de cambiar el signo y conjugar se denomina paraconjugación (Cameron, Kudsia y Mansour 2007).

Si la función $H(s)$ es real, sus polos y ceros, si son complejos, tienen su conjugado formando parte de la función $H(s)$. Además, el eje real es un eje de simetría para los diagramas de polos y ceros (ver figura del ejemplo 2.1). Además, si estamos tratando con la función $|H(s)|^2$, los polos y los ceros tienen simetría respecto al eje real y al eje imaginario. A esto se le llama simetría cuadrantal.

Otra consecuencia importante para $|P(s)|^2$ es que la factorización conduce a una propiedad curiosa si hablamos en términos de pulsación. Supongamos el polinomio anterior $P(s)$ con raíces s_1, s_2, \dots, s_n y llamamos a $\omega_i = s_i/j \forall i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= P(s)|_{s=j\omega} = p_n \prod_{k=1}^n (j\omega - j\omega_k) = p_n \prod_{k=1}^n j(\omega - \omega_k) \\ P(-j\omega) &= P(-s)|_{s=j\omega} = p_n \prod_{k=1}^n (-j\omega - j\omega_k) = p_n \prod_{k=1}^n -j(\omega + \omega_k) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos obtenemos

$$P(j\omega)P(-j\omega) = p_n^2 \prod_{k=1}^n (\omega - \omega_k)(\omega + \omega_k) = p_n^2 \prod_{k=1}^n (\omega^2 - \omega_k^2)$$

Lo cual implica que ambos, tanto el numerador como el denominador de $|H(j\omega)|^2$, son polinomios reales (debido a que están las raíces y sus conjugadas) y, además, sólo tienen potencias pares de ω (debido a que están las raíces y sus paraconjugadas). Es decir:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)} = \frac{a_0 + a_1\omega^2 + \dots + a_M\omega^{2M}}{b_0 + b_1\omega^2 + \dots + b_N\omega^{2N}}$$

donde $M = \mathcal{O}(N(s))$ y $N = \mathcal{O}(D(s))$.

Para concluir, decir que al ser el denominador un polinomio de Hurwitz en s , no tiene raíces en el eje imaginario. Al pasar a ω significa que el denominador no tiene raíces reales. Del numerador, se puede afirmar que puede tener raíces en el eje imaginario y, por tanto, en ω puede tener raíces reales. Aplicando la restricción de simetría cuadrantal, se fuerza a que los ceros del numerador deben ser dobles si son imaginarios puros en s (reales en ω).

En algunas referencias (Paarmann 2001) a esto se le llama teorema de diseño del filtro analógico y se puede enunciar como:

Teorema 2.1 (Teorema del diseño del filtro analógico) *Una función de ω dada es una $|H(j\omega)|^2$ apropiada, que proviene de una $H(s)$ con las restricciones dadas en la sección 2.3, si y solo si cumple:*

- $|H(j\omega)|^2$ es un cociente de polinomios con coeficientes reales.
- Los polinomios sólo contienen potencias pares de ω .
- El orden del numerador no es mayor que el del denominador.
- Los polos de $|H(j\omega)|^2$ no pueden ser reales.
- Los ceros de $|H(j\omega)|^2$, si son reales, son también dobles.

La simetría cuadrantal es una consecuencia del anterior teorema.

2.6 Relación de $H(s)$ con $S_{21}(s)$

En electrónica se escoge normalmente como función de transferencia al cociente entre tensiones a la salida y a la entrada de un circuito:

$$H(s) = \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} \quad (2.7)$$

y así poder estimar la ganancia de tensión en el mencionado circuito. Sin embargo, en microondas, la definición de parámetros de dispersión fuerza a que el circuito esté referido a una impedancia de referencia; que el generador tenga una cierta impedancia interna R_S y que el circuito esté cargado con una impedancia de carga R_L . Así, la función de transferencia se asigna al parámetro de transmisión S_{21} en el caso de que el circuito tenga 2 accesos. Este hecho añade una condición más en el circuito: la de unitariedad en el caso de que no existan pérdidas. Por tanto, debe cumplirse que

$$|S_{11}(s)|^2 + |S_{21}(s)|^2 = 1 \quad (2.8)$$

y recordar que, en general, estos parámetros de dispersión son complejos y la simetría cuadrantal no se cumplirá si se desea un filtro con respuesta asimétrica.

Si partimos de una red ideal (sin pérdidas), podemos considerar el analizar el circuito genérico mostrado en la figura 2.5.

Vamos a relacionar las tensiones, corrientes e impedancias con los parámetros de dispersión (reflexión y transmisión) básicos de una red de 2 puertos.

Separando la impedancia de entrada:

$$Z_{\text{in}} = R_{\text{in}} + jX_{\text{in}} \quad (2.9)$$

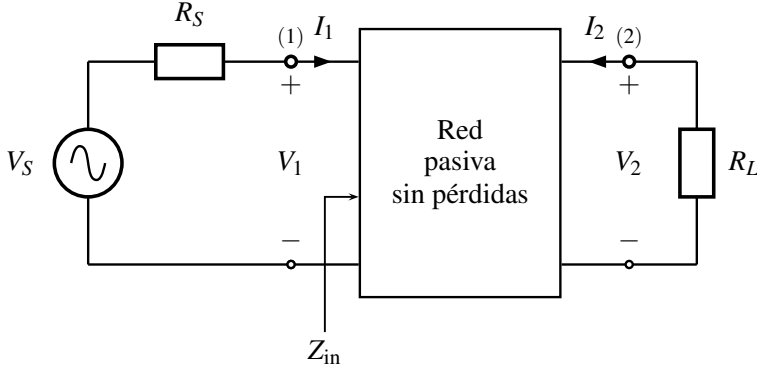


Figura 2.5: Red sin pérdidas conectada a un generador y una carga genéricos.

la potencia en el acceso 1 de la red es

$$P_1 = |I_1(j\omega)|^2 \Re \{Z_{in}(j\omega)\} = |I_1(j\omega)|^2 R_{in} \quad (2.10)$$

Además, se sabe que la potencia máxima que es capaz de entregar la fuente al acceso 1 (teorema de máxima transferencia de potencia) es

$$P_{1,\max} = \frac{|V_s(j\omega)|^2}{4R_S} \quad (2.11)$$

En el acceso 2 la potencia que pasa a la carga es simplemente

$$P_2 = \frac{|V_2(j\omega)|^2}{R_L} \quad (2.12)$$

Podemos afirmar que, si la red no tiene pérdidas, se cumple forzosamente

$$P_1 = P_2 \leq P_{1,\max} \quad (2.13)$$

Se define la función de transferencia en este caso a la potencia entregada a la carga dividido por la máxima que podría entregarse a la red⁷. Así la función de transferencia es siempre menor que la unidad:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_2}{P_{1,\max}} = 4 \frac{R_S}{R_L} \left| \frac{V_2(j\omega)}{V_s(j\omega)} \right|^2 \leq 1 \quad (2.14)$$

Aquí hay que hacer un inciso sobre la definición de $H(s)$. En algunas referencias, $H(s)$ se define como se ha expresado en (2.7) con la notación de la figura 2.5:

$$H(s) = \frac{V_2}{V_S} \quad (2.15)$$

⁷Esta definición se ajusta a lo que representa el parámetro de transmisión S_{21} .

y por tanto

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = 4 \frac{R_S}{R_L} |H(j\omega)|^2 \quad (2.16)$$

Por ejemplo en (Wing 2008) se usa este convenio. En este libro se va a usar el convenio de que la función de transferencia es, por defecto, aquella que se ha definido como tal. En particular, nuestra función de transferencia es el parámetro de transmisión $S_{21}(s) = H(s)$. La diferencia entre esta definición y la de (2.7) es una simple constante multiplicativa⁸, que en la fase de diseño puede obviarse hasta el momento de realizar la implementación práctica.

Así pues, con el convenio de que $S_{21}(s) = H(s)$, se procede a deducir alguna propiedad de la ecuación (2.14). Primeramente, hay que obtener alguna relación entre el cociente de tensiones y las impedancias Z_{in} , R_S y R_L por ello sabiendo que

$$I_1 = \frac{V_s}{R_S + Z_{in}}$$

podemos igualar potencias en los dos accesos y obtener

$$P_1 = P_2 \quad (2.17a)$$

$$|I_1(j\omega)|^2 R_{in} = \frac{|V_2(j\omega)|^2}{R_L} \quad (2.17b)$$

$$\frac{R_{in} |V_s(j\omega)|^2}{|R_S + Z_{in}|^2} = \frac{|V_2(j\omega)|^2}{R_L} \quad (2.17c)$$

obteniéndose

$$\left| \frac{V_2(j\omega)}{V_s(j\omega)} \right|^2 = \frac{R_L R_{in}}{|R_S + Z_{in}|^2} \quad (2.18)$$

Volviendo otra vez a (2.14), la función de transferencia queda

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{4R_S R_{in}}{|R_S + Z_{in}|^2} \leq 1 \quad (2.19)$$

Operando se obtiene

$$|H(j\omega)|^2 = |S_{21}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{|R_S - Z_{in}|^2}{|R_S + Z_{in}|^2} = 1 - |\rho(j\omega)|^2 \quad (2.20)$$

donde $\rho(j\omega)$ representa el parámetro de reflexión S_{11} que cumple

$$|\rho(j\omega)|^2 = |\rho(s)| |\rho(s)|_{s=j\omega} = \frac{|R_S - Z_{in}(j\omega)|^2}{|R_S + Z_{in}(j\omega)|^2} \quad (2.21)$$

⁸Cualquiera que sea el convenio que se use, los polos y los ceros son exactamente los mismos.

Eliminando los cuadrados obtenemos la expresión del parámetro de reflexión como la habíamos definido en (1.6):

$$\rho(s) = \pm \frac{R_S - Z_{in}(s)}{R_S + Z_{in}(s)} \quad (2.22)$$

con una ambigüedad en el signo debido a que se ha obtenido a partir de un módulo al cuadrado.

Despejando la impedancia de entrada se obtienen dos soluciones según el signo escogido:

$$Z_{in}(s) = R_S \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} \quad (2.23a)$$

$$Z_{in}(s) = R_S \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} \quad (2.23b)$$

En 1939 Sidney Darlington (Darlington 1939) demostró que dada la impedancia de entrada, siempre es posible encontrar el circuito que la sintetice. Con las dos ecuaciones dadas por (2.23) se pueden sintetizar dos circuitos que generen la misma $|H(j\omega)|^2$. A estos circuitos se les denomina *duales*.

En conclusión: es el lector el que debe decidir si su función de transferencia es un cociente de tensiones entrada/salida o el parámetro de transmisión S_{21} siempre que sea consistente en el resto del proceso. Generalmente, los cocientes de tensiones y los parámetros de reflexión pueden relacionarse directamente a través de constantes como en (2.14).

Es importante recordar que en filtros pasivos siempre se puede asumir que la función de transferencia es menor que la unidad. En filtros activos esta condición no tiene porqué cumplirse. La anterior derivación ha partido de la premisa de una red pasiva y sin pérdidas y por ello la condición de unitariedad puede invocarse sin problemas.

2.7 Polinomios de $S_{11}(s)$ y $S_{21}(s)$

Después de asumir que, tanto el coeficiente de reflexión como el coeficiente de transmisión, son cocientes de polinomios, sólo resta uniformizar la nomenclatura para una posterior comodidad en el momento de establecer alguna característica de cierto polinomio.

El primer hecho importante que hay que remarcar es que los parámetros S de un filtro pasivo, recíproco y sin pérdidas comparten numerador. Esto es debido a la condición de unitariedad:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \Rightarrow |S_{21}|^2 = 1 - |S_{11}|^2 \quad (2.24)$$

Si las funciones que representan a los parámetros son racionales:

$$\frac{|N_{21}|^2}{|D_{21}|^2} = 1 - \frac{|N_{11}|^2}{|D_{11}|^2} = \frac{|D_{11}|^2 - |N_{11}|^2}{|D_{11}|^2} \quad (2.25)$$

donde N y D representan numerador y denominador respectivamente y los subíndices representan la numeración del parámetro S correspondiente.

De la ecuación (2.25) se deduce que $D_{11} = D_{12}$. A este polinomio tradicionalmente se le denomina E (Cameron, Kudsia y Mansour 2007) y es un polinomio Hurwitz de orden N (siendo N el orden del filtro), como ya se ha demostrado anteriormente si queremos que los parámetros S sean estables.

Para simplificar algunas demostraciones conviene normalizar los polinomios a su mayor coeficiente, quedando todos los polinomios con el coeficiente de mayor orden igual a la unidad. A estos polinomios se les denomina *mónicos*. Es decir:

$$E(s) = s^N + e_{N-1}s^{N-1} + \dots + e_2s^2 + e_1s + e_0 \quad (2.26)$$

donde los coeficientes e_i son complejos en general.

Los parámetros de reflexión y transmisión tienen, por tanto, el siguiente aspecto:

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)/\varepsilon_R}{E(s)} \quad S_{21} = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)} \quad (2.27)$$

donde ε y ε_R son constantes que tienen en cuenta que los polinomios han sido normalizados. La constante ε se halla forzando que el filtro tenga en cierto punto unas pérdidas de retorno RL fijadas de antemano. Por ejemplo, en un filtro de Chebyshev, se puede fijar el rizado constante de la banda de paso y en el borde de la banda S_{11} en dB siempre vale su valor máximo $-RL$ donde

$$RL = -20 \log |S_{11}| \quad (2.28)$$

Dividiendo la ecuación $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$ por $|S_{11}|^2$ se obtiene

$$1 + \left| \frac{S_{21}}{S_{11}} \right|^2 = \left| \frac{1}{S_{11}} \right|^2 \quad (2.29)$$

la parte derecha son las pérdidas de retorno en unidades lineales

$$1 + \left| \frac{S_{21}}{S_{11}} \right|^2 = 10^{RL/10} \quad (2.30)$$

como $E(s)$ es común a S_{11} y a S_{21} desaparece de la ecuación

$$1 + \left| \frac{P(s)/\varepsilon}{F(s)/\varepsilon_R} \right|^2 = 10^{RL/10} \Rightarrow 1 + \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon^2} \left| \frac{P(s)}{F(s)} \right|^2 = 10^{RL/10} \quad (2.31)$$

Esta ecuación se suele particularizar en un punto donde RL sea un valor conocido (por ejemplo en $s = j$ que es el límite de la banda en un prototipo normalizado). Esto proporciona el valor de ε necesario para alcanzar las mencionadas pérdidas de retorno RL . Solamente faltaría obtener el valor de ε_R en función de ε .

La constante ε_R se obtiene a partir de ε aplicando unitariedad. El polinomio $F(s)$ se forma con los ceros de reflexión y el polinomio $P(s)$ con los ceros de transmisión⁹.

$$F(s) = \prod_{i=1}^N (s - r_i) \quad P(s) = \prod_{i=1}^{n_{tz}} (s - t_i) \quad (2.32)$$

donde los r_i son los ceros de reflexión y los filtros se suelen diseñar para que todos estén dentro de la banda y aprovecharlos para bajar el coeficiente de reflexión lo máximo posible. De ahí que N sea el número de ceros de reflexión. Los t_i son los ceros de transmisión $n_{tz} \leq N$. Si el filtro no tiene ceros de transmisión se le denomina filtro todo-polos y $|P(s)| = 1$. Las ventajas e inconvenientes de tener ceros de transmisión se verán claramente en capítulos posteriores.

En el caso de que el filtro tenga menos de N ceros de transmisión, es decir, $n_{tz} < N$ entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{F(s)/\varepsilon_R}{E(s)} &= 1 \Rightarrow \varepsilon_R = 1 \end{aligned}$$

ya que si S_{21} tiende a cero y queremos que se cumpla la unitariedad, entonces S_{11} debe tender a 1. Si los polinomios están normalizados, el límite fuerza a que $\varepsilon_R = 1$ y que los polinomios $F(s)$ y $E(s)$ tengan el mismo orden.

En el caso de que $N = n_{tz}$ el filtro se le llama canónico¹⁰. Todos los polinomios son de orden N . Esto hace que a altas frecuencias S_{21} no tienda a cero. Debido a que ε ha fijado las pérdidas de retorno en la banda de paso, cuando la frecuencia tiende a ser muy alta el nivel de S_{21} viene fijado:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S_{21}(s)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)} \right| = \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.33)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S_{11}(s)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{F(s)/\varepsilon_R}{E(s)} \right| = \frac{1}{\varepsilon_R} \quad (2.34)$$

Como la unitariedad se debe mantener a cualquier frecuencia

$$|S_{11}(\infty)|^2 + |S_{21}(\infty)|^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_R^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} = 1 \quad (2.35)$$

⁹No hace falta más información para obtener los polinomios $F(s)$ y $P(s)$ debido a que están normalizados.

¹⁰En inglés si $N = n_{tz}$ se denomina al filtro *fully canonical* (Cameron, Kudsia y Mansour 2007).

de aquí se obtiene la relación entre ε y ε_R :

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (2.36)$$

Sustituyendo (2.36) en (2.31) se obtiene:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{1}{10^{RL/10} - 1} \left| \frac{P(s)}{F(s)} \right|^2} \quad (2.37)$$

que particularizando en un punto de RL conocida proporciona el valor de ε para un filtro de $N = n_{tz}$ ceros de transmisión. En el caso de que $n_{tz} < N$ entonces $\varepsilon_R = 1$ y de (2.31) se obtiene directamente

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \left| \frac{P(s)}{F(s)} \right| \quad (2.38)$$

Finalmente, hay que discutir la forma de S_{12} y de S_{22} . Ya que el filtro es recíproco sabemos que $S_{12} = S_{21}$. Ya que se cumple unitariedad $|S_{11}| = |S_{22}|$ pero además, en (Cameron, Kudsia y Mansour 2007) se demuestra que:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{E(s)} \begin{pmatrix} \frac{F(s)}{\varepsilon_R} & \frac{P(s)}{\varepsilon} \\ \frac{P(s)}{\varepsilon} & (-1)^{n_{tz}+1} \frac{F(s)^*}{\varepsilon_R} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Por añadidura, el polinomio $P(s)$ debe tener las siguientes características:

- Sus ceros son los ceros de transmisión. Sólo pueden estar en el eje imaginario o simétricamente emplazados a los lados del eje imaginario. De lo contrario las relaciones de unitariedad no se pueden cumplir.
- La normalización, si se pretende establecer correctamente las relaciones de unitariedad, no siempre permite que el coeficiente del mayor exponente de $P(s)$ sea la unidad. Para obtener la normalización correcta se calcula el entero $(N - n_{tz})$. Si el entero es impar, entonces el coeficiente de mayor grado de $P(s)$ es 1. En caso contrario, se multiplica $P(s)$ por j .

La razón de multiplicar por j el polinomio $P(s)$ es fundamental, no solamente por mantener la unitariedad, sino también el poder obtener a partir de parámetros S los parámetros Z o Y de manera adecuada. Si un filtro se considera que no tiene pérdidas se debe cumplir:

- La matriz \mathbf{S} cumple la condición de unitariedad.

- Las matrices \mathbf{Z} o \mathbf{Y} son imaginarias puras.
- La matriz \mathbf{ABCD} cumple que $\Im\{A\} = \Im\{D\} = \Re\{B\} = \Re\{C\} = 0$.

En posteriores capítulos se ampliarán las características de los polinomios $P(s)$, $F(s)$ y $E(s)$. De momento, las que se han enunciado son suficientes para seguir el curso de los razonamientos posteriores.

2.8 La función característica

La función característica es un concepto de la teoría clásica de filtros que indica lo que la respuesta del filtro difiere de la unidad (Schaumann y Van Valkenburg 2001). Denotando $K(s)$ a la función característica, la función de transferencia se puede escribir en términos de la función característica como:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} \quad (2.40)$$

En filtros clásicos todo-polos $|H(j\omega)|^2$ es cercano a 1 cuando la frecuencia tiende a 0 y se acerca a 0 cuando $\omega \rightarrow \infty$. La función característica es cercana a 0 a bajas frecuencias¹¹ y se dispara sin límite cuando $\omega \rightarrow \infty$ como lo haría un polinomio sin término independiente. Además, teniendo en cuenta la simetría cuadrantal, $|K(j\omega)|^2$ solo dependería de potencias pares en ω . Es decir, $|K(j\omega)|^2$ para un filtro todo-polos clásico de orden N sería un polinomio de la forma:

$$|K(j\omega)|^2 = \sum_{k=0}^N a_k \omega^{2k} = a_0 + a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 + \dots + a_N \omega^{2N} \quad (2.41)$$

Volviendo al caso general, la atenuación se define como (Zverev 2005):

$$A \triangleq \frac{1}{|S_{21}|} = \frac{1}{|H|} = \sqrt{1 + |K|^2} \quad (2.42)$$

En unidades logarítmicas

$$A(\text{dB}) = -20 \log_{10} |S_{21}| \quad (2.43)$$

y la función característica o *discriminación* como

$$K(s) \triangleq \frac{S_{11}(s)}{S_{21}(s)} = \frac{\varepsilon F(s)}{\varepsilon_R P(s)} \quad (2.44)$$

¹¹A bajas frecuencias la función característica es cercana a cero y la función de transferencia es cercana a la unidad. Esto no significa que forzosamente la función característica tenga que ser exactamente cero en el origen (aunque si es deseable que este valor sea lo más bajo posible).

donde se ha acomodado la notación de (Zverev 2005) a las anteriores definiciones de los polinomios que forman los parámetros de dispersión. Para un filtro todo-polos $|P(s)| = 1$ y la función característica es un polinomio que definiría todo el filtro¹². En el caso de que el filtro tenga ceros de transmisión, el función característica es racional.

Finalmente, es fácil de ver que la función característica no solamente define el parámetro de transmisión (su módulo al cuadrado) sino también el de reflexión:

$$|S_{21}|^2 = \frac{1}{1 + |K|^2} \quad (2.45a)$$

$$|S_{11}|^2 = \frac{1}{1 + |K|^{-2}} \quad (2.45b)$$

Obviamente, las relaciones anteriores han sido particularizadas para el caso de que el filtro sea sin pérdidas. En el caso con pérdidas se define un factor de pérdida de potencia que alteraría la condición de unitariedad. Véase (Zverev 2005) para más detalles.

¹²Obviamente $E(s)$ se determinaría aplicando la condición de unitariedad.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 2.1** Si un filtro es todo-polos, determina la expresión de ε en función de RL y la evaluación del menor número de polinomios posible.
- 2.2** Sea un filtro canónico con un S_{21} que cumple que a altas frecuencias $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S_{21}| = -20$ dB. Determinar $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S_{11}|$ y obtener ε y ε_R .
- 2.3** Sea la función característica K un cociente de polinomios $K(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$. Determinar la expresión de $|S_{11}|$, $|S_{21}|$ y la atenuación A en función de los polinomios N y D .
- 2.4** Si $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |K(j\omega)| = K_0$ donde K_0 es una constante, ¿qué podemos decir del filtro? ¿podemos obtener ε y ε_R a partir de K_0 ?
- 2.5** Si $H(s)$ es una función de transferencia,
- ¿qué podemos decir de los polos de $H(-s)$ ¿el polinomio denominador de $H(-s)$ es Hurwitz?
 - ¿dónde están los polos de $H(s)^*$? ¿el polinomio denominador de $H(s)^*$ es Hurwitz?
 - ¿dónde están los polos de $H(-s)^*$? ¿el polinomio denominador de $H(-s)^*$ es Hurwitz?

2.6 Sea

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^6}$$

Determina si cumple las condiciones del teorema del diseño del filtro analógico y en caso afirmativo proporciona $H(s)$ y $H(-s)$.

Capítulo 3

Relaciones para la función de transferencia

«¡Datos, datos, datos!» —exclamaba con impaciencia—. «¡No puedo hacer ladrillos sin arcilla!»

El misterio de Copper Beeches, Arthur Conan Doyle (1859-1930)

De eso mismo trata este capítulo: obtener datos de cómo es la función que deseamos que produzca el filtrado. De lo que se puede hacer y lo que no. Lo que aspiramos a conseguir y la triste realidad a la que nos fuerza la naturaleza. Curiosamente lo que deseamos es una pared de ladrillos (brick wall) de ahí la famosa cita de la aventura de Sherlock Holmes¹. Veamos porqué...

3.1 Introducción

En el capítulo anterior se ha discutido sobre las propiedades de $h(t)$ y su transformada $H(s)$. Si se asume que $h(t)$ es una función real se obtenían ciertas propiedades de simetría sobre las partes real e imaginaria de $H(s)$. En esta sección se van a probar estas propiedades como punto de partida de las herramientas que se van a desarrollar en el resto de capítulo.

¹En el original:

“Data! Data! Data!” he cried impatiently. “I can’t make bricks without clay.”

The adventure of the Copper Beeches pertenece a la recopilación *Las Aventuras de Sherlock Holmes* (1892).

Sea $h(t)$ una función compleja en general. Expresándola en función de su parte real e imaginaria se puede escribir como

$$h(t) = h_r(t) + jh_i(t) \quad (3.1)$$

Haciendo lo mismo para su transformada de Fourier:

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (3.2)$$

Si se pretende recuperar $h(t)$ de su transformada $H(\omega)$ se aplica la transformación inversa de Fourier y se obtiene

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3)$$

Lo cual se puede escribir como

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + jX(\omega)] [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] d\omega \quad (3.4)$$

Identificando partes reales e imaginarias se obtiene:

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \cos(\omega t) - X(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (3.5a)$$

$$h_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \sin(\omega t) + X(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (3.5b)$$

Si $h(t)$ es real significa que $h_i(t) = 0$ y esto sucede si $R(\omega)$ es par y $X(\omega)$ es impar:

$$R(\omega) = R(-\omega) \quad (3.6a)$$

$$X(\omega) = -X(-\omega) \quad (3.6b)$$

de esa manera se consigue que la integral (3.5b) se anule ya que las expresiones $R(\omega) \sin(\omega t)$ y $X(\omega) \cos(\omega t)$ serán ambas funciones impares. De forma similar (3.5a) tiene un integrando que será par y, por tanto, el dominio de integración se puede restringir a las frecuencias positivas:

$$h(t) = h_r(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos(\omega t) - X(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (3.7)$$

lo que concluye que si $h(t)$ es real, la información de las frecuencias positivas es suficiente para reconstruir $h(t)$.

Si además $h(t)$ corresponde a un sistema causal $h(t) = 0$ si $t < 0$. Para obtener más información de la función $h(t)$ con la nueva premisa, se definen las partes par e impar como:

$$\text{Ev}\{h(t)\} \triangleq \frac{h(t) + h(-t)}{2} \quad (3.8a)$$

$$\text{Od}\{h(t)\} \triangleq \frac{h(t) - h(-t)}{2} \quad (3.8b)$$

Obsérvese que $\text{Ev}\{h(-t)\} = \text{Ev}\{h(t)\}$ y que $\text{Od}\{h(-t)\} = -\text{Od}\{h(t)\}$ y así se puede escribir la función $h(t)$ en función de sus partes par e impar:

$$h(t) = \text{Ev}\{h(t)\} + \text{Od}\{h(t)\} = h_e(t) + h_o(t) \quad (3.9)$$

donde

$$h_e(t) = \text{Ev}\{h(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (3.10a)$$

$$h_o(t) = \text{Od}\{h(t)\} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty X(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (3.10b)$$

Si ahora se supone que $t < 0$, $h_e(t) = h_e(-t)$ y $h_o(t) = -h_o(-t)$. Por tanto

$$h(t) = h_e(t) - h_o(t) \quad \forall t < 0 \quad (3.11)$$

De esta última ecuación se desprende que si el sistema es causal $h(t) = 0$ para $t < 0$ y por tanto $h_e(t) = h_o(t)$. Retomando (3.9) se puede reescribir $h(t)$ de dos formas:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 2h_e(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 2h_o(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

y por tanto

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \cos(\omega t) d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (3.14)$$

Esto demuestra que $R(\omega)$ y $X(\omega)$ están relacionados (Papoulis 1962), (Carlin y Ciavalleri 1998). Para dilucidar cómo se podría despejar $R(\omega)$ en función solamente de $X(\omega)$ y, análogamente, despejar $X(\omega)$ en función de $R(\omega)$, basta con escribir $H(j\omega)$ en función de sus partes par e impar como sigue:

$$H(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^\infty [h_e(t) + h_o(t)] e^{-j\omega t} dt \quad (3.15)$$

Desarrollando la exponencial y separando los términos se observa que solamente los términos pares contribuyen a la integral:

$$\begin{aligned} R(\omega) + jX(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty h_e(t) \cos(\omega t) - jh_e(t) \sin(\omega t) + h_o(t) \cos(\omega t) - jh_o(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty h_e(t) \cos(\omega t) - jh_o(t) \sin(\omega t) dt \\ &= 2 \int_0^\infty h_e(t) \cos(\omega t) dt - 2j \int_0^\infty h_o(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

Separando partes reales e imaginarias se obtiene:

$$R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} h_e(t) \cos(\omega t) dt = R(-\omega) \quad (3.17a)$$

$$X(\omega) = -2 \int_0^{\infty} h_o(t) \sin(\omega t) dt = -X(-\omega) \quad (3.17b)$$

tomando (3.10a) y sustituyendo en (3.17a) se obtiene

$$R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} h_e(t) \cos(\omega t) dt \quad (3.18)$$

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R(\lambda) \cos(\lambda t) \cos(\omega t) dt d\lambda \quad (3.19)$$

y haciendo uso de (3.14) se puede escribir

$$R(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(\lambda) \sin(\lambda t) \cos(\omega t) d\lambda dt \quad (3.20)$$

Siguiendo el mismo procedimiento y tomando (3.10b), sustituyendo en (3.17b) y haciendo uso de (3.14) se obtiene que

$$X(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R(\lambda) \cos(\lambda t) \sin(\omega t) d\lambda dt \quad (3.21)$$

En definitiva, se ha demostrado que las partes real e imaginaria de $H(j\omega)$ no son independientes y que se puede obtener la una de la otra:

$$X(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R(\lambda) \cos(\lambda t) \sin(\omega t) d\lambda dt \quad (3.22a)$$

$$R(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(\lambda) \sin(\lambda t) \cos(\omega t) d\lambda dt \quad (3.22b)$$

lo cual no es muy atrayente pero se puede reescribir de forma más amigable con la transformada de Hilbert como se verá más adelante.

En conclusión, si $h(t)$ es real y causal entonces $H(j\omega)$ cumple que:

- $R(\omega)$ es par.
- $X(\omega)$ es impar.
- $R(\omega)$ y $X(\omega)$ están relacionadas y se pueden obtener una a partir de la otra utilizando (3.22).
- La información de las frecuencias positivas es suficiente para reconstruir $h(t)$ a partir de $R(\omega)$ o de $X(\omega)$ usando (3.14).

3.2 Relación entre parte real e imaginaria de $H(s)$

En la sección anterior se ha definido la parte par e impar de $h(t)$ real y causal en (3.10) como se muestra gráficamente en la figura 3.1. Si transformamos la parte par se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{h_e(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) \cos(\omega t) dt \\
 &= 2 \int_0^{\infty} h_e(t) \cos(\omega t) dt \\
 &= R(\omega)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde se han utilizado las propiedades de simetría y se ha aplicado (3.17a). Si transformamos la parte impar se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{h_o(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= -j \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= -2j \int_0^{\infty} h_o(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= jX(\omega)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde se han utilizado las propiedades de simetría y se ha aplicado (3.17b).

De la figura 3.1 se pueden observar las siguientes relaciones:

$$h_o(t) = h_e(t) \operatorname{sgn}(t) \tag{3.25a}$$

$$h_e(t) = h_o(t) \operatorname{sgn}(t) \tag{3.25b}$$

donde la función $\operatorname{sgn}(t)$ es la función signo cuya transformada de Fourier es $2/j\omega$ (Carlson y Crilly 2010). Transformando la ecuación (3.25a) y usando (3.24) y

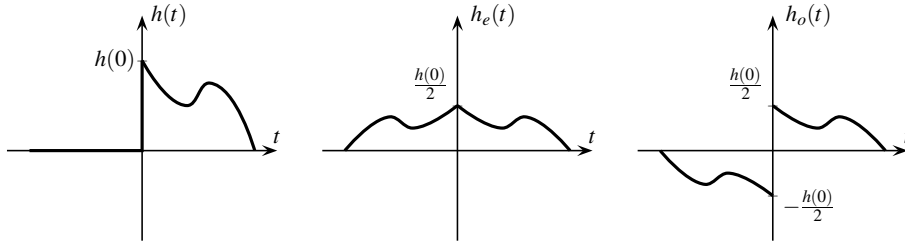


Figura 3.1: Función arbitraria causal $h(t)$ y sus partes par $h_e(t)$ e impar $h_o(t)$.

(3.23) se obtiene:

$$jX(\omega) = \frac{1}{2\pi} R(\omega) * \frac{2}{j\omega} \quad (3.26)$$

donde el factor $1/2\pi$ aparece por que la convolución se realiza con la variable pulsación y no frecuencia ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f_1(t)\} * \mathcal{F}\{f_2(t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) F_2(\omega - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.27)$$

por tanto (3.26) puede escribirse como:

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\tau)}{\omega - \tau} d\tau \quad (3.28)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se transforma ahora (3.25b) obteniéndose:

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\tau)}{\omega - \tau} d\tau \quad (3.29)$$

Las ecuaciones (3.28) y (3.29) son en realidad expresiones muy conocidas. La transformada de Hilbert² de una función $f(t)$ es su convolución con la función $1/\pi t$:

$$\mathcal{H}\{f(t)\} = f(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3.30)$$

Obsérvese que la transformada de Hilbert no cambia de dominio. En el dominio transformado se tiene que

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}\{f(t)\}\} = \mathcal{F}\left\{f(t) * \frac{1}{\pi t}\right\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j \operatorname{sgn}(\omega) H(\omega) \quad (3.31)$$

²El lector interesado en la aplicación de la transformada de Hilbert al procesamiento de señal puede consultar (Carlson y Crilly 2010) donde se encuentra su definición, propiedades principales y aplicaciones.

En el caso que nos ocupa, la transformación de Hilbert tiene lugar en la variable ω y no en la variable del tiempo y se puede seguir todo el razonamiento expuesto aquí aplicando la propiedad de dualidad.

Resumiendo lo aprendido en esta sección:

- Una función de transferencia real y causal genera dos funciones: su parte par $h_e(t)$ y su parte impar $h_o(t)$.
- La transformada de Fourier de la parte par es $R(\omega)$:

$$\mathcal{F}\{h_e(t)\} = \Re\{H(\omega)\} = R(\omega) \quad (3.32)$$

- La transformada de Fourier de la parte impar es $jX(\omega)$:

$$\mathcal{F}\{h_o(t)\} = j\Im\{H(\omega)\} = jX(\omega) \quad (3.33)$$

- La relación entre la parte real y la parte imaginaria de $H(\omega)$ viene dada por la transformada de Hilbert con el signo adecuado:

$$R(\omega) = \mathcal{H}\{X(\omega)\} \quad (3.34a)$$

$$X(\omega) = -\mathcal{H}\{R(\omega)\} \quad (3.34b)$$

Comentario: Se ha supuesto que $h(t)$ no contiene impulsos en el origen. Esto impone la restricción de que a altas frecuencias $H(\omega)$ tiende a cero según el teorema del valor inicial (Papoulis 1962). Es decir

$$|h(0)| < \infty \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 0 \quad (3.35)$$

Supongamos que a altas frecuencias $H(\omega) \rightarrow k_0$. Entonces sucede que el término $k_0\delta(t)$ aparece en $h(t)$ y en $h_e(t)$ pero no en $h_o(t)$ porque la delta es un término par. Por lo tanto, (3.25a) es válido pero $k_0\delta(t)$ se ha perdido en (3.25b). Como conclusión: (3.28) proporciona el valor correcto de $X(\omega)$ pero de (3.29) sólo se recupera $R(\omega) - k_0$. En la ecuación (3.29) hay una incertidumbre de una constante para obtener $R(\omega)$ a partir de $X(\omega)$. Claramente $R(\omega) \rightarrow k_0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, y por ello (3.29) debe ser escrita como:

$$R(\omega) = R(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\tau)}{\omega - \tau} d\tau \quad (3.36)$$

3.3 Relación entre módulo y la fase de $H(s)$

Supongamos que $H(\omega)$ se escribe de la siguiente forma:

$$H(\omega) = e^{-\alpha(\omega) - j\theta(\omega)} \quad (3.37)$$

En general, $\theta(\omega)$ no determina unívocamente $\alpha(\omega)$ a menos que se hagan más suposiciones sobre $H(\omega)$ (como por ejemplo que sea de fase mínima³). Si hacemos esta suposición, entonces la función $\ln H(s)$ es analítica en el semiplano derecho y la atenuación y fase de $H(\omega)$ están relacionadas por:

$$\ln H(\omega) = \ln |H(\omega)| + j\angle H(\omega) = -\alpha(\omega) - j\theta(\omega) \quad (3.38a)$$

$$\theta(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\tau)}{\tau^2 - \omega^2} d\tau \quad (3.38b)$$

$$\alpha(\omega) = \alpha(0) - \frac{\omega^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\tau)}{\tau(\tau^2 - \omega^2)} d\tau \quad (3.38c)$$

Estas relaciones no son las únicas que pueden relacionar $\alpha(\omega)$ con $\theta(\omega)$ (Papoulis 1962). También es posible reconstruir $H(\omega)$ a partir de $\alpha(\omega)$ dada en un intervalo del eje imaginario si $\theta(\omega)$ está dado en el intervalo complementario.

3.4 Casos teóricos

En este apartado se van a tratar ejemplos de interés para el filtrado. Sin embargo, la idealidad de los ejemplos solamente indica la tendencia de un filtro real cuando éste tiende a ser cada vez más ideal. Ello nos indicará los principales compromisos que hay que asumir en el diseño de filtros.

3.4.1 Filtro de amplitud constante

Consideremos un filtro paso bajo de fase mínima con la característica de amplitud:

$$|S_{21}(\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c; \\ A_s, & |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

donde $A_s < 1$ es la atenuación en la banda atenuada que asumiremos que es constante con la frecuencia.

En este caso nuestra $H(\omega)$ es precisamente $S_{21}(\omega)$ y el objetivo es encontrar una expresión para la fase (y del retardo de grupo) a partir del módulo. Como primer

³Un filtro es de fase mínima si los ceros del numerador de la función de transferencia están en el semiplano izquierdo. Esto genera un $\angle S_{21}(\omega)$ mínimo en el rango $-\infty < \omega < \infty$ para un $|S_{21}(\omega)|$ dado. Véase (Blinchikoff y Zverev 2006).

paso obtenemos $\alpha(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = -\ln |H(\omega)| = -\ln |S_{21}(\omega)| = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c; \\ -\ln A_s, & |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

y usando (3.38b) y sabiendo que $\alpha(\omega)$ es una función par:

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\tau)}{\tau^2 - \omega^2} d\tau = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha(\tau)}{\tau^2 - \omega^2} d\tau \\ &= \frac{2\omega}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{-\ln A_s}{\tau^2 - \omega^2} d\tau = -\frac{2\omega}{\pi} \ln A_s \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2 - \omega^2} \\ &= -\frac{\ln A_s}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau - \omega} - \frac{1}{\tau + \omega} \right) d\tau \\ &= \frac{\ln A_s}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega_c}{\omega + \omega_c} \right| \end{aligned}$$

La fase tiene el aspecto mostrado en la figura 3.2. El retardo de grupo asociado es:

$$\tau_g = -\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \frac{2\omega_c \ln A_s}{\pi(\omega^2 - \omega_c^2)}$$

Obsérvese que el retardo de grupo es negativo a partir de ω_c y que tiene una discontinuidad no evitable en $\omega = \omega_c$. Esto no es posible en un filtro real en el que el retardo de grupo es siempre positivo y continuo. Sin embargo, se pueden extraer conclusiones de este ejemplo:

- El retardo de grupo es proporcional a la atenuación en la banda atenuada ($\ln A_s$) y tiende a infinito cuando A_s tiende a cero.
- En el origen el retardo de grupo es:

$$\tau_g(0) = \frac{2|\ln A_s|}{\pi\omega_c}$$

y también es proporcional a la atenuación. El retardo de grupo cerca del origen tiene la expresión:

$$\tau_g(\omega) = \tau_g(0) \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^4 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^6 + \dots \right] \quad (3.39)$$

- La expresión del retardo de grupo dista de una respuesta real debido a la asíntota vertical y al comportamiento del retardo de grupo en $\omega > \omega_c$. En general, aumentar la pendiente de la amplitud (filtro con mayor selectividad) tiende a aumentar el retardo de grupo y en este caso el retardo se dispara precisamente a la frecuencia de corte porque la pendiente es infinita.

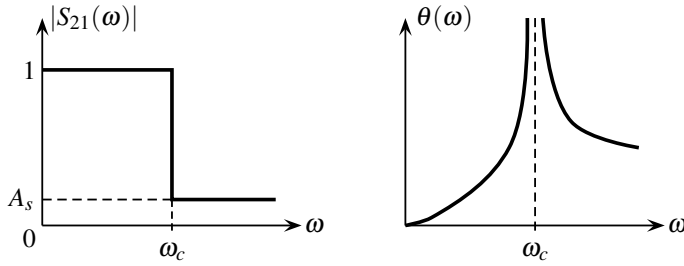


Figura 3.2: Módulo del filtro de amplitud constante y la correspondiente fase $\phi = -\theta(\omega)$ obtenida a partir de la expresión del módulo.

3.4.2 Filtro con atenuación polinomial

Obviamente el caso anterior es muy ideal. Es un intento de aproximar a trozos un problema de aproximación en dos bandas (la de paso y la atenuada), como puede ser la aproximación de un filtro elíptico donde se especifica una atenuación mínima en la banda atenuada. Sin embargo, un filtro de Butterworth o de Chebyshev tienen una banda atenuada que es maximalmente plana en $\omega \rightarrow \infty$. Por ello, una aproximación a trozos que cumpla esta característica podría ser (Rhodes 1976):

$$|S_{21}(\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1; \\ \frac{1}{|\omega|^n}, & |\omega| > 1. \end{cases}$$

donde, para simplificar el ejemplo, se ha supuesto que la frecuencia de corte es la unidad. Ya que la fase no proporciona una información tan útil como el retardo de grupo, y debido a que la integración puede ser un tanto farragosa, es preferible calcular directamente el retardo de grupo:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau) \frac{\tau^2 + \omega^2}{(\tau^2 - \omega^2)^2} d\tau$$

donde

$$\alpha(\omega) = -\ln |H(\omega)| = -\ln |S_{21}(\omega)| = \begin{cases} 0, & |\omega| < 1; \\ n \ln |\omega|, & |\omega| > 1. \end{cases}$$

Sustituyendo la atenuación se obtiene

$$\tau_g(\omega) = \frac{n}{\pi} \int_1^{\infty} \ln \tau \left[\frac{1}{(\tau - \omega)^2} + \frac{1}{(\tau + \omega)^2} \right] d\tau$$

Integrando por partes se puede simplificar cada término:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(x \pm a)^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x \pm a)}$$

Por tanto, la expresión de τ_g queda como:

$$\tau_g(\omega) = \frac{n}{\pi} \int_1^\infty \frac{2 d\tau}{(\tau + \omega)(\tau - \omega)} = \frac{n}{\omega\pi} \int_1^\infty \left(\frac{1}{\tau - \omega} - \frac{1}{\tau + \omega} \right) d\tau$$

y finalmente

$$\tau_g(\omega) = \frac{n}{\omega\pi} \ln \left| \frac{1 + \omega}{1 - \omega} \right|$$

En el origen se tiene que

$$\tau_g(0) = \frac{2n}{\pi}$$

Desarrollando en serie de potencias τ_g a bajas frecuencias se obtiene:

$$\tau_g(\omega) = \tau_g(0) \left(1 + \frac{\omega^2}{3} + \frac{\omega^4}{5} + \frac{\omega^6}{7} + \dots \right) \quad (3.40)$$

Las conclusiones que se pueden extraer de este ejemplo (ver figura 3.3) son:

- El retardo de grupo se sigue disparando a la frecuencia de corte.
- El retardo en el origen depende del orden del filtro n (a mayor orden, mayor retardo).
- Por la misma razón, a mayor atenuación fuera de la banda de paso mayor retardo. Esto explica uno de los más conocidos compromisos en teoría de filtros: aumentar el orden del filtro no significa mejorar todo el diseño. Se empeora el retardo de grupo y también el número de elementos necesarios para conseguir ese orden.
- Comparando (3.39) con (3.40) se observa que alrededor del origen el retardo de grupo es mayor cuanto mayor es la pendiente (selectividad) del filtro.
- Finalmente, la tasa de variación del retardo de grupo alrededor de $\omega = 0$ se incrementa al incrementarse la tasa de variación de la amplitud en la frecuencia de corte.

3.4.3 Filtro de retardo de grupo constante

Un estudio similar se puede realizar para filtros de retardo de grupo lo más ideal posible en la banda de paso (constante), y gran caída de este retardo fuera de la banda. Se deja para el lector los detalles de la obtención de las expresiones pero las conclusiones que se pueden extraer de realizar los mismos pasos que en las secciones anteriores son:

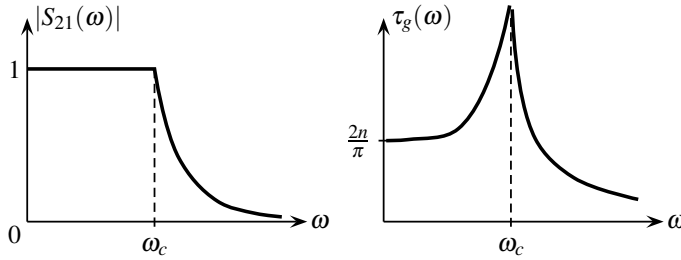


Figura 3.3: Módulo del filtro de atenuación polinomial y el correspondiente retardo de grupo obtenido a partir de la expresión del módulo.

- Un filtro de retardo de grupo constante no puede generar una amplitud constante en la banda de paso.
- Aumentar el cambio del retardo de grupo cerca de la frecuencia de corte implica que la atenuación alrededor del origen tiene una tasa de cambio mayor. Es decir, que el compromiso respecto al retardo de grupo es similar al visto en la sección anterior: a mayor cambio del retardo de grupo cerca de la frecuencia de corte, peor comportamiento de la atenuación en el origen.

3.5 Teorema de Paley-Wiener

Ya se ha visto la utilidad de la función de transferencia $H(j\omega)$. Esta función da una descripción muy intuitiva de la acción del filtro sobre las diferentes componentes frecuenciales de la señal de entrada del sistema. Lo más habitual para un ingeniero que diseñe este tipo de dispositivos es trabajar en el dominio de la frecuencia. Llegados a este punto la pregunta que surge de manera natural es si la $H(j\omega)$ que se ha elegido corresponde a un sistema físicamente realizable. Ya que si el filtro no es causal necesariamente es imposible su realización física, la causalidad fue la piedra angular de la demostración del teorema de Paley-Wiener. Hoy se le denomina condición de Paley-Wiener y su enunciado es:

Teorema 3.1 (Paley-Wiener) *Dada una $|H(j\omega)|$ de cuadrado integrable, es decir,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$$

entonces una condición suficiente y necesaria para que $|H(j\omega)|$ sea el módulo de una función de transferencia perteneciente a una $h(t)$ causal es que se cumpla la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

La demostración aparece desarrollada en (Paley y Wiener 1934) aunque fue publicada un año antes en un trabajo corto (Paley y Wiener 1933). Papoulis da una demostración informal que se puede seguir en (Papoulis 1962). Las conclusiones más importantes que se pueden obtener de la condición de Paley-Wiener son:

- Obsérvese que se excluyen de esta condición los filtros paso-alto y de banda eliminada ya que no cumplen que tengan un módulo de cuadrado integrable. Aunque se puede aplicar al prototipo paso-bajo del que parten todos los filtros.
- El teorema de Paley-Wiener no garantiza que una $H(j\omega)$ que cumpla la condición tenga una inversa causal. Más bien dado un $|H(j\omega)|$ que satisfaga la condición el teorema establece que existe una fase asociada que produce una $H(j\omega)$ con una $h(t)$ asociada causal.
- El teorema puede parecer chocante porque para nada se habla de la fase de la función de transferencia, pero a lo largo del capítulo hemos visto que hay una relación entre ambas.
- Hay otras restricciones sobre la función de transferencia, como ya se ha visto en el capítulo anterior.
- Pueden haber algunos puntos donde $H(j\omega) = 0$ pero deben estar aislados o la condición de Paley-Wiener no puede cumplirse. Es decir, la función de transferencia no puede ser nula en un segmento de frecuencias, y ello descarta cualquier filtro ideal que anule la respuesta completamente en una banda de frecuencias.

3.6 Filtros de fase mínima y redes paso-todo

Básicamente, un filtro de fase mínima es aquel que no tiene ceros de transmisión en el semiplano derecho. La razón de establecer esta distinción es que una misma respuesta en magnitud puede tener diferentes fases. Véase por ejemplo la figura 3.4 que muestra dos diagramas de polos y ceros. El diagrama de la izquierda corresponde a la función $H_1(s)$. El diagrama de la derecha corresponde a $H_2(s)$. Ambos comparten la posición de los polos y, sin embargo, los ceros de $H_2(s)$ son los mismos pero localizados en el semiplano derecho simétricamente respecto al eje imaginario.

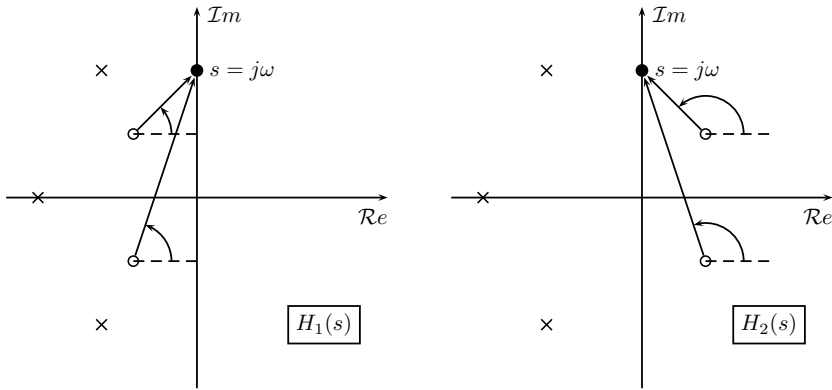


Figura 3.4: Diagrama de polos y ceros de dos funciones de transferencia $H_1(s)$ (izquierda) y $H_2(s)$ (derecha) con la misma magnitud. Sin embargo, para cualquier punto $s = j\omega$ en el eje imaginario la fase de $H_1(s)$ es claramente menor.

La respuesta de $H_1(s)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 H_1(s) &= k \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \\
 &= k \frac{M_1 M_2 e^{j(\phi_{z1} + \phi_{z2})}}{N_1 N_2 N_3 e^{j(\phi_{p1} + \phi_{p2} + \phi_{p3})}} \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

donde se ha llamado a cada factor del numerador y denominador

$$\begin{aligned}
 s - z_i &= |s - z_i| e^{j\angle(s - z_i)} = M_i e^{j\phi_{z_i}} \\
 s - p_i &= |s - p_i| e^{j\angle(s - p_i)} = N_i e^{j\phi_{p_i}} \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Para $H_2(s)$ se obtiene de forma análoga (asumiendo que los polos son los mismos, pero los ceros están localizados al otro lado del eje imaginario) la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 H_2(s) &= k \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} = \frac{(s - z'_1)(s - z'_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \\
 &= k \frac{M_1 M_2 e^{j(\phi'_{z1} + \phi'_{z2})}}{N_1 N_2 N_3 e^{j(\phi_{p1} + \phi_{p2} + \phi_{p3})}} \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

De esta expresión se observa que el módulo es exactamente el mismo, pero las fases no. Además para cada factor del numerador se observa en la figura 3.4 que $\phi_{zi} < \phi'_{zi}$ para cualquier pulsación ω .

Cabe, por último, definir un filtro paso-todo como aquel que cumple que su módulo es la unidad para cualquier frecuencia pero su fase es susceptible de diseño. Estos filtros son de la forma

$$H_{\text{ap}}(s) = \frac{E(s)^*}{E(s)} = \frac{E(-s)}{E(s)} \quad (3.44)$$

donde $E(s)$ es un polinomio Hurwitz. Observando la definición de filtro paso-todo es obvio que los polos están en el semiplano izquierdo pero los zeros están simétricamente colocados en el semiplano derecho. Con esta propiedad se puede deducir que un filtro cualquiera de fase no mínima se puede expresar como el producto de dos funciones de transferencia: una de fase mínima y otra paso-todo.

$$H_{\text{no-min}}(s) = H_{\text{ap}}(s)H_{\text{min}}(s) \quad (3.45)$$

Para el ejemplo que se ha seguido hasta el momento, el filtro paso todo requerido sería

$$H_{\text{ap}}(s) = \frac{(s - z'_1)(s - z'_2)}{(s - z_1)(s - z_2)} \quad (3.46)$$

y por tanto

$$H_2(s) = H_1(s)H_{\text{ap}}(s) \quad (3.47)$$

Los diagramas de polos y ceros se pueden observar en la figura 3.5.

Un comentario final debe incluirse aquí. En el capítulo anterior se dijo que los ceros de transmisión deben estar situados simétricamente respecto al eje imaginario. Tanto en la red paso-todo como en un filtro de fase mínima (o no mínima) como el de la figura 3.5 no cumplen esta condición. La razón es que aquí no se ha dicho en ningún momento que se deba cumplir la condición de unitariedad. La condición de unitariedad debe cumplirse si se trata de una red pasiva y sin pérdidas y ello provoca la simetría de los ceros de transmisión.

Esto nos plantea la pregunta: ¿Una red paso-todo puede cumplir unitariedad? Parece que no, ya que los polos están en el semiplano izquierdo y los ceros en el derecho. Pues bien, la respuesta es ‘sí’ pero usando un truco similar al anterior. Sea una red paso todo de orden N . Esto significa que tiene N polos en el semiplano izquierdo (es Hurwitz) y tiene N ceros de transmisión en el semiplano derecho siendo imagen especular de los polos. Esto es equivalente a una red con $2N$ polos (N polos de multiplicidad 2) con los N ceros de transmisión originales en el semiplano derecho y otros N ceros de transmisión simétricos respecto al eje imaginario de forma que cada cero está exactamente sobre un polo de multiplicidad 2 (para

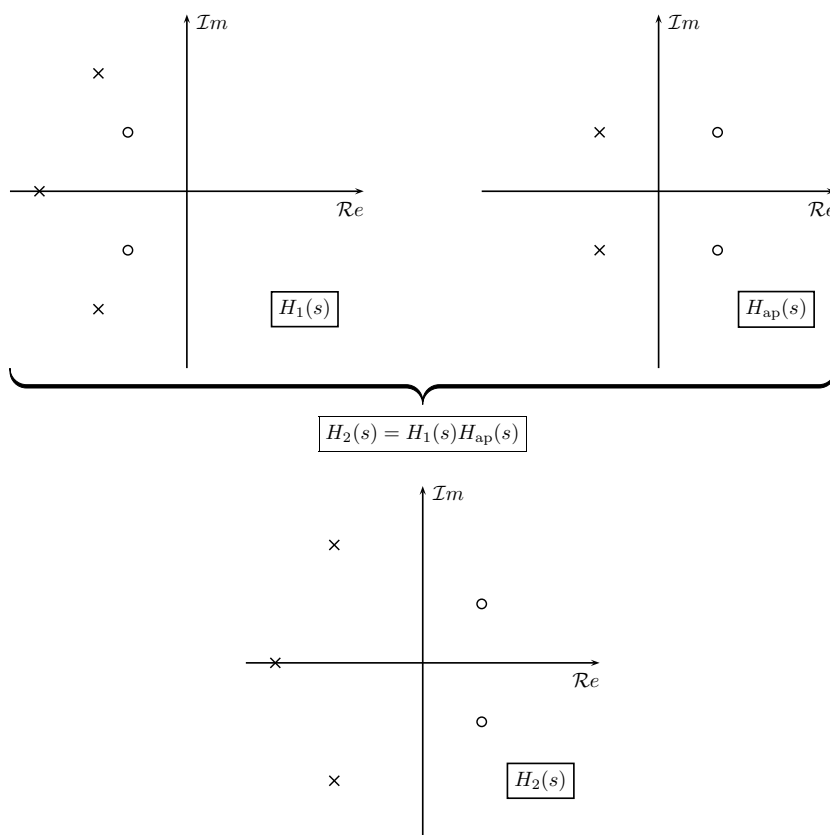


Figura 3.5: Diagrama de polos y ceros de $H_1(s)$ (fase mínima) combinado con el diagrama del filtro paso todo $H_{ap}(s)$. Obsérvese que los ceros de H_1 se cancelan con los polos de $H_{ap}(s)$ produciendo el diagrama de $H_2(s)$ (fase no mínima).

que la respuesta analítica tenga una cancelación polo-cero). Esto hace que la red resultante sea de orden $2N$ con $2N$ ceros de transmisión.

De la misma forma, un filtro de orden N de fase no mínima sin simetría en N_1 ceros de transmisión se puede construir con una red que cumpla unitariedad si dicha red tiene orden $N + N_1$.

EJEMPLO 3.1 Se pretende diseñar un filtro paso-todo de orden 2 con los ceros de transmisión en $\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$. Determinar las expresiones de la matriz de dispersión \mathbf{S} y la matriz de admitancias \mathbf{Y} .

Solución: Los polos de multiplicidad 2 están en $-\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$ (tomando los ceros y reflejándolos simétricamente respecto al eje imaginario) y por tanto

$$E(s) = \left[s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \right) \right]^2 \left[s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right) \right]^2 = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + \frac{1}{4}$$

Los ceros de transmisión son cuatro (todos de multiplicidad simple), dos de ellos situados sobre los polos y los otros dos reflejados respecto al eje imaginario. Como la cantidad $N - n_{tz} = 0$, los coeficientes de $P(s)$ aparecerán multiplicados por j .

$$\begin{aligned} P(s) &= j \left[s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \right) \right] \left[s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right) \right] \left[s - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \right) \right] \left[s - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right) \right] \\ &= js^4 + j\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por supuesto $F(s) = 0$ ya que en una red paso-todo no hay reflexión. Además $\varepsilon = \varepsilon_R = 1$.

Finalmente

$$\begin{aligned} S_{11}(s) &= 0 \\ S_{22}(s) &= 0 \\ S_{21}(s) &= j \frac{s^4 + \frac{1}{4}}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + \frac{1}{4}} = j \frac{s^2 - s + \frac{1}{2}}{s^2 + s + \frac{1}{2}} \\ &= j \frac{\left[s - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \right) \right] \left[s - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right) \right]}{\left[s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \right) \right] \left[s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right) \right]} \\ S_{12}(s) &= S_{21}(s) \end{aligned}$$

Es decir

$$\mathbf{S} = \frac{1}{s^2 + s + \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & j(s^2 - s + \frac{1}{2}) \\ j(s^2 - s + \frac{1}{2}) & 0 \end{bmatrix}$$

Como se observa, la cancelación de los ceros de transmisión en el semiplano izquierdo con los polos dobles situados en la misma posición deja todos los polos en

el semiplano izquierdo con multiplicidad simple, y todos los ceros en el semiplano derecho con multiplicidad simple también.

Sin embargo, la red paso-todo implementada físicamente será de orden $N = 4$ aunque el orden original de la red paso-todo era aparentemente la mitad. Esto se demuestra obteniendo por ejemplo la matriz de admitancias \mathbf{Y} a partir de la matriz de dispersión \mathbf{S} . Usando las transformaciones $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{Y}$ recogidas en (Pozar 2011) se puede obtener directamente

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{s^4 + 2s^2 + \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 2s^3 + s & -j(s^4 + \frac{1}{4}) \\ -j(s^4 + \frac{1}{4}) & 2s^3 + s \end{bmatrix}$$

Lo cual indica que la red es de orden $N = 4$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.1 Sea la función de transferencia definida en el dominio del tiempo como

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0; \\ 1 - t, & t \in [0, 1]; \\ 0, & \forall t > 1. \end{cases}$$

Determinar $h_e(t)$ y $h_0(t)$ y las transformadas de Fourier de $h(t)$, $h_e(t)$ y $h_0(t)$.

3.2 Calcular el retardo de grupo de la función de transferencia del problema 3.1. Determinar si hay puntos singulares en el mismo.

3.3 Sea la función de transferencia cuyo módulo está definido en el dominio de la frecuencia como

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 0, & \forall \omega < -2; \\ \omega + 2, & \omega \in [-2, -1]; \\ 1, & \omega \in [-1, 1]; \\ 2 - \omega, & \omega \in [1, 2]; \\ 0, & \forall \omega > 2. \end{cases}$$

determinar el retardo de grupo correspondiente a $H(j\omega)$.

3.4 Determinar los parámetros de dispersión de un filtro paso-todo con un cero en $z_1 = 1$ y un polo en $p_1 = -1$. Obtener su matriz de admitancias y dar el orden real de la red.

3.5 Demuestra que $|H(j\omega)| = e^{-\sqrt{|\omega|}}$ satisface el teorema de Paley-Wiener.

3.6 Demuestra que $|H(j\omega)| = e^{-k|\omega|}$, donde k es un número real y positivo, no satisface el teorema de Paley-Wiener.

3.7 Demuestra que $|H(j\omega)| = e^{-\frac{\alpha^2 \omega^2}{2}}$, no satisface el teorema de Paley-Wiener a pesar de ser de cuadrado integrable para $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3.8 Indica cuál es el ancho de banda a -3 dB de las funciones de transferencia de los 3 problemas anteriores.

Capítulo 4

Funciones de transferencia clásicas

Se llama clásicos a los libros que constituyen una riqueza para quien los ha leído y amado, pero que constituyen una riqueza no menor para quien se reserva la suerte de leerlos por primera vez en las mejores condiciones para saborearlos.

Por qué leer los clásicos, Italo Calvino (1923-1985)

4.1 Introducción

Los viejos libros de síntesis de filtros que hoy se consideran ‘clásicos’ es preferible leerlos con perspectiva. La notación y nomenclatura han cambiado a lo largo de los años haciendo más eficiente la asimilación de conceptos. Esto no debería de evitar una lectura profunda ya que de cada libro se puede extraer una moraleja diferente. Unas veces es la simplicidad en un desarrollo. Otras la exaltación de una característica no muy conocida. Y muchas veces, es el simple enfoque de otro tiempo que hoy posiblemente sería difícil de repetir si no fuera por esos pioneros que se pusieron al frente de una idea nueva.

En este capítulo se van a tratar de las respuestas de filtrado más conocidas y la razón de su desarrollo. Se obtendrán las expresiones más conocidas del campo del filtrado analógico y se van a particularizar las expresiones para las funciones de transferencia al caso de poder hallar los parámetros de dispersión $S_{11}(s)$ y $S_{21}(s)$ de un filtro a partir de unas especificaciones básicas.

Se van a tratar prototipos paso-bajo porque el resto de filtros se pueden obtener transformando esos prototipos con una función matemática adecuada que se verá en el capítulo 6. Por tanto, todos los filtros en este capítulo estarán centrados

alrededor del origen de frecuencias y el límite de la banda de paso se considerará $\omega_c = \pm 1$ si no se especifica lo contrario.

También se va a suponer que los filtros son pasivos sin pérdidas. Esto supone la normalización típica de las respuestas para los parámetros de dispersión $|S_{ij}(s)| \leq 1$. Afortunadamente, esto no cambia para nada el método de síntesis desde el punto de vista matemático ya que un filtro con ganancia (no pasivo) se puede sintetizar a partir de un pasivo multiplicado por una constante.

En el presente capítulo se va a utilizar la notación desarrollada en la sección 2.7 para polinomios que forman S_{11} y S_{21} .

4.2 Concepto de filtro todo-polos

Se denomina filtro todo-polos a aquel que no tiene ceros de transmisión a frecuencias finitas y por tanto $P(s) = 1$ para N impar y $P(s) = j$ para N par. De este modo $\varepsilon_R = 1$ para cualquier orden N .

En el caso de un filtro todo-polos el polinomio $F(s)$ tiene el mismo orden que el $E(s)$ (es decir N). Es por ello que se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} |S_{11}| &= 1 \\ \lim_{s \rightarrow \infty} |S_{21}| &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si el filtro cumple la condición de unitariedad se puede escribir:

$$\begin{aligned} |S_{11}(s)|^2 + |S_{21}(s)|^2 &= 1 \\ 1 + \left| \frac{S_{11}(s)}{S_{21}(s)} \right|^2 &= \left| \frac{1}{S_{21}(s)} \right|^2 \\ 1 + \left| \frac{F(s)/\varepsilon_R}{P(s)/\varepsilon} \right|^2 &= \left| \frac{1}{S_{21}(s)} \right|^2 \\ 1 + |K(s)|^2 &= \left| \frac{1}{S_{21}(s)} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

En un filtro todo-polos se define la función característica $K(s)$ (ver sección 2.8):

$$|K(s)|^2 = \left| \frac{S_{11}(s)}{S_{21}(s)} \right|^2 = \varepsilon^2 |F(s)|^2 \quad (4.3)$$

El módulo al cuadrado del parámetro de transmisión puede escribirse en función de la función característica

$$|S_{21}(s)|^2 = \frac{1}{1 + |K(s)|^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 |F(s)|^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 |E(s)|^2} \quad (4.4)$$

Por tanto, para un filtro todo-polos la función característica da toda la información necesaria para caracterizar el filtro (de ahí su nombre):

- $K(s)$ y $F(s)$ tienen el mismo orden, que es el orden del filtro N .
- Con una condición sobre la respuesta se puede obtener la constante ε , y si se sabe $K(s)$ se puede obtener $F(s)$.
- El polinomio $E(s)$ se obtiene usando (4.4) haciendo $\varepsilon^2|E(s)|^2 = 1 + |K(s)|^2$. Se obtienen las raíces y, de ellas, se escogen las del semiplano izquierdo del plano complejo para construir $E(s)$ ya que éste es Hurwitz.

Finalmente, otra característica fundamental de un filtro todo-polos es que a partir de cierta frecuencia superior a la banda de paso el filtro tiene un comportamiento monótono. Su $|S_{21}|$ decrece de manera continua e indefinida.

4.3 El filtro de Butterworth

El filtro de Butterworth¹ es uno de los más simples. El objetivo es que cerca del origen de frecuencias/pulsaciones tenga una respuesta en amplitud lo más plana posible. Los filtros de Butterworth se denominan también maximalmente planos. $|S_{21}(0)| = 1$ y por tanto $S_{11}(0) = 0$. Esto matemáticamente se puede expresar de varias formas. La más inmediata es forzar a que todas las derivadas posibles de $|S_{21}(\omega)|^2$ se anulen en el origen y forzar que la función característica se anule en el origen. Se va a trabajar por comodidad para los cálculos en la variable ω y preferentemente con $|S_{21}(j\omega)|^2$ porque la expresión es más sencilla² y no aparecen cantidades complejas.

¹El filtro de Butterworth fue descrito por primera vez en 1930 por Stephen Butterworth en (Butterworth 1930). Stephen Butterworth (1885 Rochdale, Inglaterra-1958 Isla de Wight, Inglaterra) fue un físico británico. En 1904 ingresó en la Universidad de Manchester. Consiguió el título de B.S. en física y un certificado de maestro en 1907. En 1908 recibió el título de Master. Durante los siguientes 11 años impartió clases de física en el Manchester Municipal College of Technology. Posteriormente trabajó en el National Physical Laboratory en la determinación de estándares de inductancia. En 1921 ingresó en la plantilla del Admiralty's Research Laboratory. Sus investigaciones allí eran material reservado y no se publicaron. Se sabe que trabajó en numerosos campos, entre ellos la determinación de campo electromagnético alrededor de cables submarinos y la investigación de explosiones y estabilidad de torpedos submarinos. En 1939, fue "Principal Scientific Officer" en el Admiralty Research Laboratory en el Admiralty's Scientific Research and Experiment Department. Durante la segunda guerra mundial investigó las minas magnéticas y como desmantalar los barcos para prevenirlos de esas minas. Fue un matemático aplicado de primer orden conocido por resolver problemas que otros consideraban irresolubles. Usaba aproximaciones muy juiciosas, visión física penetrante, experimentos ingeniosos y habilidoso uso de modelos. Era un hombre tranquilo y modesto. Era respetado por sus colegas y reverenciado por sus subordinados. En 1942 fue galardonado con la Orden del Imperio Británico. En 1945 se retiró y murió en 1958.

²Recuérdese que $|S_{21}(j\omega)|^2$ tiene numerador la unidad por ser un filtro todo-polos y denominador un polinomio en ω^2 .

La condición sobre el coeficiente de transmisión en el origen se puede expresar como:

$$|S_{21}(0)|^2 = \frac{1}{1 + |K(0)|^2} = 1 \Rightarrow K(0) = 0 \quad (4.5)$$

por tanto la función característica es de la forma:

$$|K(j\omega)|^2 = k_2\omega^2 + k_4\omega^4 + \dots + k_{2N}\omega^{2N} \quad (4.6)$$

Ahora se puede forzar que alrededor del origen de frecuencias el parámetro $|S_{21}(j\omega)|^2$ sea lo más plano posible. Para simplificar los cálculos basta darse cuenta de que esa condición equivale a que $|K(j\omega)|^2$ tenga una forma maximalmente plana alrededor de 0. Esto se consigue anulando todas las derivadas de $|K(j\omega)|^2$ en el punto $\omega = 0$:

$$\left. \frac{d^i (|K(j\omega)|^2)}{d(\omega^2)^i} \right|_{\omega=0} = 0 \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (4.7)$$

Si se forzaran más derivadas de $|K(j\omega)|^2$, al ser una función polinomial, se anularían todos los coeficientes.

Por tanto, la expresión final de la función característica es:

$$|K(j\omega)|^2 = k_{2N}\omega^{2N} \quad (4.8)$$

De la ecuación (4.3) podemos deducir el valor del coeficiente k_{2N} :

$$|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 |F(j\omega)|^2 = k_{2N}\omega^{2N} \Rightarrow k_{2N} = \varepsilon^2 \quad (4.9)$$

Como consecuencia, el polinomio normalizado $F(s)$ tiene N ceros en el origen y por ello

$$F(s) = s^N \quad (4.10)$$

La expresión de $|S_{21}(j\omega)|^2$ queda:

$$|S_{21}(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2N}} \quad (4.11)$$

Generalmente se usa ε para ajustar el valor de la respuesta en el límite de la banda donde la atenuación vale $A = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$. Tradicionalmente la respuesta de Butterworth es la que tiene $\varepsilon = 1$ y, por tanto, la atenuación en el límite de la banda son 3 dB. Si ε tiene otro valor, el filtro es llamado maximalmente plano en general. En este libro se utilizarán las dos denominaciones indistintamente.

Para obtener el polinomio $E(s)$ se hace el cambio $\omega = s/j$

$$|S_{21}(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (s/j)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-1)^N s^{2N}} = \frac{1}{\varepsilon^2 E(s)E(-s)} = S_{21}(s)S_{21}(-s) \quad (4.12)$$

finalmente se obtienen las raíces de $1 + \varepsilon^2(-1)^N s^{2N}$ y se escogen las del semiplano izquierdo del plano complejo. Las $2N$ raíces tienen simetría cuadrantal y, por tanto, con la información de un cuadrante es posible reconstruir la posición de todas las raíces. Las $2N$ se obtienen resolviendo la ecuación

$$1 + \varepsilon^2(-1)^N s^{2N} = 0 \Rightarrow s = -j \left(\frac{-1}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2N}} \quad (4.13)$$

Las raíces s_k de la anterior ecuación se pueden escribir, aplicando la fórmula de De Moivre, como:

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{\sqrt[2N]{\varepsilon}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N}\right)} \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt[2N]{\varepsilon}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N}\right) - j \cos\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N}\right) \right] \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.3.1 Localización de los polos

Obsérvese que las $2N$ raíces s_k de $|E(s)|^2$ se distribuyen en un círculo de radio $1/\sqrt[2N]{\varepsilon}$. La mitad de ellas estarán en un semiplano y las demás en el otro. Las raíces de $E(s)$ están en el semiplano izquierdo del plano complejo y por tanto tienen la expresión:

$$s_k = \frac{1}{\sqrt[2N]{\varepsilon}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N}\right)} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.15)$$

Debido a la simetría cuadrantal mencionada, y sabiendo que el polinomio $E(s)$ es real, hay una forma más simple de calcular $E(s)$ de manera automatizada. Sólo hay que observar las siguientes características de la solución:

- Las raíces están en la circunferencia de radio $R = 1/\sqrt[2N]{\varepsilon}$. Por tanto, las raíces de $E(s)$ se pueden calcular en la circunferencia unidad y luego escalarlas multiplicando por R .
- Para N impar siempre una sola raíz aparece en $s = -R$. Esto fuerza a que $E(s)$ tenga en su interior el factor $(s + R)$.
- Para cualquier N , dada la simetría de la respuesta del filtro de Butterworth, $E(s)$ tiene todos sus coeficientes reales. Esto permite que las raíces se puedan agrupar por pares conjugados para factorizar el polinomio $E(s)$ en términos de factores cuadráticos de la forma $s^2 + 2sR \cos \psi_k + R^2$. Donde el ángulo $\psi_k < \pi/2$ es el ángulo de la raíz compleja tomando como origen de ángulos al semieje real negativo (ver Fig. 4.1).
- El ángulo de las raíces complejas ψ_k se determina como:

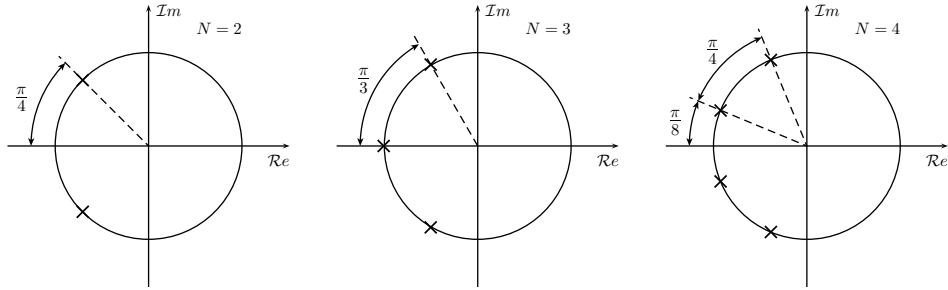


Figura 4.1: Localización de los ceros de $E(s)$ en el círculo de radio $R = 1/\sqrt[N]{\varepsilon}$ y ángulos ψ_k para la fórmula (4.14). Izquierda: $N = 2$ donde $\psi_1 = \pi/4$. Centro: $N = 3$ donde $\psi_1 = \pi/3$. Derecha: $N = 4$ donde $\psi_1 = \pi/8$, $\psi_2 = 3\pi/8$.

- Si N es impar hay una raíz en $\psi = 0$.
- Si N es par las dos raíces (simétricas) más cercanas al eje real tienen $\psi = \pm\pi/(2N)$.
- Todas las raíces cumplen que su separación es π/N .

Finalmente, el polinomio $E(s)$ se construye como:

$$E(s) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{N/2} (s^2 + 2sR \cos \psi_k + R^2), & N \text{ par;} \\ (s + R) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (s^2 + 2sR \cos \psi_k + R^2), & N \text{ impar.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Esta descomposición tiene la ventaja de que no involucra complejos y que no contiene ningún coeficiente de signo negativo como corresponde a un polinomio de Hurwitz.

4.3.2 Condiciones en el límite de la banda

Tan solo queda por establecer una condición sobre la respuesta en un punto para obtener ε . Es típico que se de esta condición en las pulsaciones $\omega_c = \pm 1$ que forma el límite de la banda del prototipo paso-bajo normalizado (por ejemplo que las pérdidas de retorno RL se fueren a esas frecuencias). Aplicando de nuevo la

condición de unitariedad a esa frecuencia en particular, $s_c = j\omega_c$ se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 &= 1 \\
 1 + \left| \frac{S_{21}}{S_{11}} \right|^2 &= \frac{1}{|S_{11}|^2} \\
 1 + \left| \frac{1}{\varepsilon F(s_c)} \right|^2 &= \frac{1}{|S_{11}|^2} \\
 1 + \frac{1}{\varepsilon^2 |F(s_c)|^2} &= 10^{RL/10}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

De ahí resulta inmediato obtener

$$\varepsilon = \frac{1}{|F(s_c)|\sqrt{10^{RL/10} - 1}} = \frac{1}{|\omega_c|^N \sqrt{10^{RL/10} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \tag{4.18}$$

ya que, como se ha visto, $F(s)$ tiene una raíz de orden N en cero y por tanto $F(s_c) = s_c^N$. Si $\omega_c = 1$ estamos en el límite de la banda donde $|S_{21}(j\omega)|^2$ tiene el menor valor, ya que descende de manera monótona al aumentar ω .

4.3.3 Determinación del orden

Otro problema fundamental es conseguir el orden necesario N (en caso de que éste sea desconocido) del filtro para alcanzar cierta atenuación mínima A_{\min} a partir de una frecuencia dada ω_s . Dado que la atenuación se define como el inverso del coeficiente de transmisión, se puede despejar fácilmente el orden N :

$$A_{\min}(\text{dB}) = 10 \log_{10} (1 + \varepsilon^2 \omega_s^{2N}) \Rightarrow N = \left\lceil \frac{\log_{10} [(10^{A_{\min}/10} - 1)/\varepsilon^2]}{2 \log_{10} \omega_s} \right\rceil \tag{4.19}$$

donde $\lceil x \rceil$ significa ‘redondeo hacia arriba de x ’.

EJEMPLO 4.1 Obtener la expresión de $S_{11}(s)$, $S_{21}(s)$, $|S_{11}(j\omega)|^2$ y $|S_{21}(j\omega)|^2$ para un filtro de Butterworth que tenga unas pérdidas de retorno a $\omega_c = 1$ (rad/s) de $RL = 20$ dB y que consiga una atenuación mínima de $A_{\min} = 20$ dB a la frecuencia normalizada $\omega_s = 2$ (rad/s). Representar la respuesta en función de la pulsación normalizada ω .

Solución: De la ecuación (4.18) se obtiene $\varepsilon = 0.1005$. De la ecuación (4.19) se obtiene que el orden más próximo que consigue cumplir las especificaciones es $N = 7$. De la ecuación (4.10) se obtiene que $F(s) = s^7$. En la sección 4.2 se explicó que $\varepsilon_R = 1$ en un filtro todo-polos y que $P(s) = 1$ si el orden era impar. Finalmente, sólo queda determinar el polinomio $E(s)$. Los polos se obtienen siguiendo la expresión

(4.15) o cualquiera de sus equivalentes.

$$p_{1,2} = -0.3090 \pm j1.3537$$

$$p_{3,4} = -0.8657 \pm j1.0856$$

$$p_{5,6} = -1.2510 \pm j0.6024$$

$$p_7 = -1.3885$$

Finalmente, el polinomio $E(s)$ se obtiene a partir de sus raíces:

$$E(s) = s^7 + 6.2399s^6 + 19.4679s^5 + 39.0611s^4 + 54.2363s^3 + 52.1141s^2 + 32.2034s + 9.9499$$

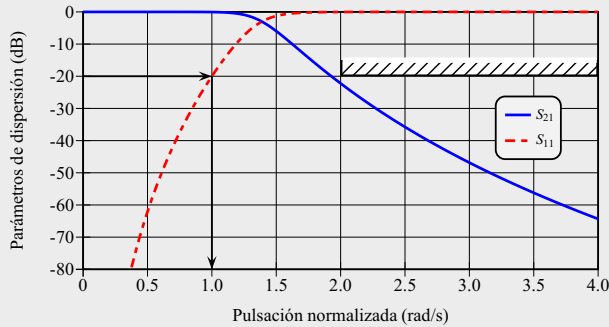
Con los polinomios definidos se tienen las expresiones de los parámetros de dispersión:

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{E(s)}; \quad S_{21}(s) = \frac{1}{\varepsilon E(s)}$$

Las expresiones de las magnitudes al cuadrado son por lo tanto:

$$|S_{11}(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 \omega^{14}}{1 + \varepsilon^2 \omega^{14}}; \quad |S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{14}}$$

La magnitud de los parámetros de dispersión se observa en la siguiente gráfica



El parámetro S_{11} muestra un cero en el origen (de orden 7). En el límite de la banda se cumple exactamente la condición de que las pérdidas de retorno tengan un valor de 20 dB. En la banda atenuada también se cumplen las especificaciones pero esta vez el margen con 20 dB es debido a que el orden N ha sido redondeado al primer entero superior. Se han representado las frecuencias positivas ya que el filtro es simétrico respecto a $\omega = 0$.

4.3.4 El roll-off

En un filtro todo-polos es importante saber cual es la atenuación del filtro a frecuencias altas para poder comparar diferentes tipos de filtros.

Un filtro todo-polos puede considerarse como un filtro en el que todos los ceros de transmisión están en el infinito. La atenuación a altas frecuencias está determinada por la función característica $K(s)$ y el grado de crecimiento del polinomio que la forma. El filtro de Butterworth es el más sencillo y por ello es normal comparar los roll-off de los demás filtros con éste.

La cuantificación típica para medir el roll-off es establecer a altas frecuencias la atenuación a una pulsación ω_1 y compararla con la atenuación a $\omega_2 = 10\omega_1$ y así medir el factor de roll-off en dB/década³.

$$\begin{aligned} A(\omega_1) &= 10 \log_{10} (1 + \varepsilon^2 \omega_1^{2N}) \\ A(\omega_2) &= 10 \log_{10} (1 + \varepsilon^2 \omega_2^{2N}) \\ \Delta A &= A(\omega_2) - A(\omega_1) = 10 \log_{10} \frac{1 + \varepsilon^2 \omega_2^{2N}}{1 + \varepsilon^2 \omega_1^{2N}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

El roll-off para un filtro de Butterworth se define como

$$\begin{aligned} Rf &= \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \Delta A = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} 10 \log_{10} \frac{1 + \varepsilon^2 \omega_2^{2N}}{1 + \varepsilon^2 \omega_1^{2N}} = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} 10 \log_{10} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^{2N} \\ &= 20N \text{ dB/década} \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.4 El filtro de Chebyshev

Supongamos que en lugar de tener una respuesta que cerca del origen sea lo más ideal posible (y desgraciadamente lejos del origen se va degradando) queremos confinar el error (desviación respecto a la respuesta ideal) dentro de una zona prefijada. La zona prefijada se extenderá a toda la banda de paso y por ello el parámetro ϵ definirá esa zona (véase la figura 4.2). En el filtro de Butterworth la desviación respecto a la idealidad (marcada por la función característica K) variaba desde cero en el origen hasta ϵ en el extremo de la banda de paso de manera monótona. La idea es conseguir lo mismo pero se quiere disminuir la desviación máxima de forma óptima y no monótona para conseguir una mejor selectividad del filtro fuera de la banda de paso.

³Una alternativa es medir el roll-off entre una frecuencia y el doble de esa frecuencia para obtener el roll-off en dB/octava.

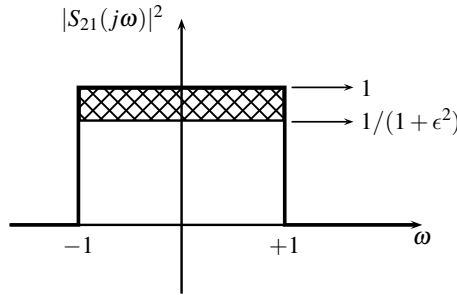


Figura 4.2: Area de confinamiento del parámetro de transmisión dentro de la banda de paso.

Las condiciones a imponer sobre K son:

- $K(j\omega)$ es un polinomio de orden N .
- $K(j\omega)$ podrá oscilar entre $\pm\epsilon$ en el intervalo $[-1, +1]$ y por tanto $|K(j\omega)|$ tendrá los valores en el rango $[0, \epsilon]$

Es conocido que los polinomios de Chebyshev⁴ cumplen estas condiciones y por tanto

$$|K(j\omega)|^2 = \epsilon^2 T_N^2(\omega) \quad (4.22a)$$

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega)} \quad (4.22b)$$

$$|S_{11}(j\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 T_N^2(\omega)}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega)} \quad (4.22c)$$

donde

$$T_N(\omega) = \cos[N \arccos(\omega)] \quad (4.23)$$

y la forma iterativa de generar los polinomios es:

$$T_0(\omega) = 1 \quad (4.24a)$$

$$T_1(\omega) = \omega \quad (4.24b)$$

$$T_{N+1}(\omega) = 2\omega T_N(\omega) - T_{N-1}(\omega) \quad \forall N \in \mathbb{Z}^+ \quad (4.24c)$$

⁴Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894). Algunos autores utilizan la transliteración Chebyshev, Chebysheff, Chebyshov, Tschebyshev, Tchebycheff (francés) o Tschebyscheff (alemán). Las diferentes iniciales del apellido según la transliteración es la razón por la que algunas veces estos polinomios se denoten por C_N . La notación usada aquí es la más extendida.

Finalmente los ceros de $T_N(\omega)$ son:

$$\omega_k = \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right] \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.25)$$

Con estos datos ya se pueden obtener los polinomios $P(s)$ y $F(s)$:

- $P(s)$ es el mismo que para el filtro de Butterworth. Un filtro todo-polos tiene $P(s) = 1$ si N es impar y $P(s) = j$ si N es par.
- $F(s)$ se formará a partir de los ceros del polinomio de Chebyshev de orden N :

$$F(s) = \prod_{k=1}^N (s - s_k) \quad (4.26)$$

donde

$$s_k = j\omega_k = j \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2k-1) \right], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.27)$$

Como característica fundamental de los polinomios de Chebyshev el siguiente teorema nos asegura que (Aigner y Ziegler 2009):

Teorema 4.1 Para cualquier $N \geq 1$ dado, entre los polinomios mónicos⁵ de grado N es

$$p(\omega) = \frac{1}{2^{N-1}} T_N(\omega) = \tilde{T}_N(\omega)$$

el único polinomio que hace que su máximo valor absoluto en el intervalo $[-1, +1]$ es el mínimo posible. Este valor máximo es

$$\frac{1}{2^{N-1}}$$

y $|p(\omega)|$ alcanza este valor exactamente $N+1$ veces en

$$\omega_k = \cos \frac{k\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (4.28)$$

En el caso de filtros de Chebyshev, el parámetro $|S_{11}(j\omega)|^2$ está directamente relacionado con $T_N(\omega)$. Si se buscan los máximos de $|S_{11}(j\omega)|^2$ se deduce que estos máximos están relacionados con los máximos de $T_N(\omega)$ en la banda y el valor en el límite de la banda $[-1, +1]$. Se propone al lector demostrar este hecho en el problema 4.3. Como resultado se puede afirmar que el filtro de Chebyshev es el que proporciona una reflexión menor para un orden dado⁶.

⁵Se hace notar al lector que un polinomio de Chebyshev de grado N no es mónico debido a que su coeficiente de mayor grado es precisamente 2^{N-1} . Este hecho se puede deducir de la fórmula de recurrencia (4.24). Por ello, para conseguir un polinomio mónico de Chebyshev hay que dividir por esa misma cantidad pero eso hace que el valor máximo del polinomio sea $\frac{1}{2^{N-1}}$ y no 1. Esto no altera para nada la posición de los ceros, los máximos o los mínimos.

⁶Obviamente también para un ϵ dado.

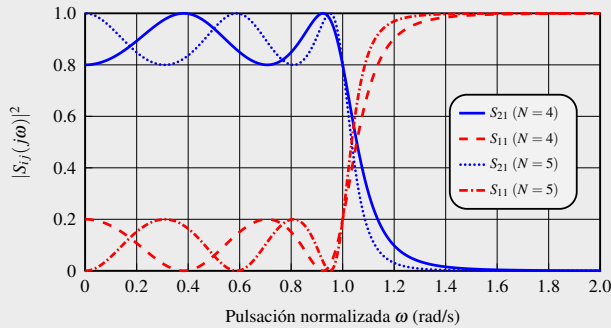
EJEMPLO 4.2 Representar en unidades lineales $|S_{11}(j\omega)|^2$ y $|S_{21}(j\omega)|^2$ para un filtro de Chebyshev de orden $N = 4$ y de orden $N = 5$ en el que el rizado (maxima variación de $|S_{21}(j\omega)|^2$) sea para ambos filtros de 0.2.

Solución: Si el rizado máximo es de 0.2 significa que $|S_{21}(j\omega)|^2$ variará dentro de la banda de paso en el intervalo $[0.8, 1]$. Es decir, dentro del intervalo $\omega \in [-1, +1]$ tenemos que

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega)} \geq \frac{1}{1 + \epsilon^2} = 0.8$$

por tanto $\epsilon = 0.5$.

La respuesta de los filtros se observa en siguiente gráfica



Como característica importante de los filtros de Chebyshev hay que resaltar que, aparte de la simetría alrededor del origen que tienen todos los filtros de coeficientes reales, hay una simetría del polinomio $T_N(\omega)$ alrededor del origen y, además, para N impar $T_N(0) = 0$ y por tanto $|S_{21}(0)|^2 = 1$, mientras que para N par $T_N(0) = 1$ y por ello $|S_{21}(0)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2)$.

Se observa en la figura anterior que al aumentar el orden aumenta la selectividad, pero para cualquier orden N todas las respuestas de S_{21} pasan por el mismo punto en $\omega = \pm 1$. Este punto es $|S_{21}(\pm j)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2)$ debido a que $T_N(1) = 1$ para cualquier N . Este hecho se aprovechará para fijar de forma sencilla la condición de pérdidas de retorno RL en el límite de la banda (ver sección 4.4.2).

Finalmente, se puede encontrar la posición de los mínimos y los máximos de $|S_{21}|$ que obviamente coinciden con los máximos y mínimos de $|S_{11}|$ respectivamente:

- Los máximos de $|S_{21}|$ (cuando vale 1) coinciden con los nulos de $T_N(\omega)$ y por tanto son los dados por (4.25). En el intervalo $\omega \in [-1, +1]$ hay N máximos. Si N es par hay $N/2$ máximos para $\omega > 0$. Si N es impar hay un máximo en el origen y $(N - 1)/2$ para $\omega > 0$.
- Los mínimos de $|S_{21}|$ en la banda (cuando alcanza el valor $1/(1 + \epsilon^2)$) coinciden con los máximos de $T_N(\omega)$ en el intervalo $[-1, 1]$ y por tanto son los dados por

(4.28). Como hay $N + 1$ máximos de $T_N(\omega)$ en ese intervalo, habrá el mismo número de mínimos de $|S_{21}|$. Si N es impar habrán $(N + 1)/2$ mínimos en $\omega > 0$. Si N es par habrá un mínimo en el origen y $N/2$ veces se alcanzará el mínimo en $\omega \in]0, 1]$.

4.4.1 Localización de los polos

Los polos de un filtro de Chebyshev son los ceros de $E(s)$ y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo. Sin embargo, de momento no tenemos disponible $E(s)$ sino $|S_{21}(j\omega)|^2$. El punto de partida de la obtención de $E(s)$ o $S_{21}(s)$ es:

$$S_{21}(s)S_{21}(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(s/j)} \Rightarrow E(s)E(-s) = 1 + \epsilon^2 T_N^2(s/j) \quad (4.29)$$

Igualando a cero $E(s)E(-s)$ obtendremos las raíces de $|E(s)|^2$ (habrá $2N$), y tan solo habrá que seleccionar las que estén en el semiplano izquierdo para obtener $E(s)$ con sus N raíces.

$$|E(s)|^2 = 0 \Rightarrow T_N(s/j) = \pm \frac{j}{\epsilon} \quad (4.30)$$

asumiendo $\omega < 1$ para utilizar cosenos no hiperbólicos se obtiene:

$$T_N(s/j) = \cos[N \arccos(s/j)] = \cos Nw \quad (4.31)$$

donde w es un número complejo

$$w = \arccos(s/j) = u + jv \quad (4.32)$$

Ahora se calcula $\cos Nw$ para igualarlo a (4.30).

$$\begin{aligned} \cos Nw &= \cos(Nu + jNv) \\ &= \cos Nu \cosh Nv - j \sin Nu \sinh Nv \\ &= \pm \frac{j}{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Igualando parte real y parte imaginaria tenemos que de la parte real (al nunca ser nulo el cosh) se obtiene

$$u_k = \frac{\pi(2k-1)}{2N} \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad (4.34)$$

para estos valores de u_k , se obtiene que $\sin Nu_k = \pm 1$ y por tanto la parte imaginaria de (4.33) queda

$$v_k = \pm \frac{1}{N} \operatorname{asenh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) = \pm \frac{1}{N} \ln \left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right) = \pm \eta \quad (4.35)$$

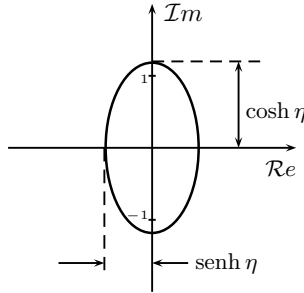


Figura 4.3: Geometría de la elipse donde se localizan los polos de Chebyshev en el plano complejo.

Ahora para cada $w_k = u_k + jv_k$ corresponde un valor de s_k :

$$s_k = j \cos w_k = j \cos \left[\frac{\pi(2k-1)}{2N} + j\eta \right] \quad (4.36)$$

y separando partes reales e imaginarias $s_k = \sigma_k + j\omega_k$ y reteniendo las que tengan parte real negativa se obtiene

$$\sigma_k = -\sinh \eta \sin \frac{\pi(2k-1)}{2N}, \quad \omega_k = \cosh \eta \cos \frac{\pi(2k-1)}{2N}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.37)$$

Para determinar dónde exactamente están los polos, se puede comprobar que

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sinh \eta} \right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\cosh \eta} \right)^2 = 1 \quad (4.38)$$

que es la ecuación de una elipse (si las variables fueran continuas) de semiejes $\cosh \eta$ (el mayor) y $\sinh \eta$ (el menor) y focos en $\pm j$ (véase la figura 4.3).

Finalmente el polinomio $E(s)$ se forma como

$$E(s) = \prod_{k=1}^N (s - s_k) \quad (4.39)$$

donde los $s_k = \sigma_k + j\omega_k$ vienen dados por (4.37).

4.4.2 Condiciones en el límite de la banda

Una vez determinada la forma de la respuesta y los polinomios correspondientes queda por determinar una forma práctica para establecer el valor ϵ . Como ya se ha visto, este valor depende del rizado que se quiera dar a la respuesta.

La deducción del valor de ε sigue el mismo patrón que para el filtro de Butterworth. La ecuación (4.18) se mantiene ya que en el límite de la banda el valor de $|S_{11}|^2$ (en dB y cambiado de signo) es exactamente el valor de las pérdidas de retorno RL que se desean fijar como máximo dentro de la banda. Si el valor elegido para el cálculo de ε es precisamente $s_c = \pm j$ se obtiene

$$\varepsilon = \frac{1}{|F(s_c)|\sqrt{10^{RL/10} - 1}} = \frac{1}{|\tilde{T}_N(1)|\sqrt{10^{RL/10} - 1}} = \frac{2^{N-1}}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \quad (4.40)$$

donde \tilde{T}_N es el polinomio mónico de Chebyshev de orden N . Se ha hecho uso del teorema 4.1 y usando (4.26) y (4.27) se tiene la útil relación para $F(s)$ en el límite de la banda

$$F(s = j) = \prod_{k=1}^N (j - j\omega_k) = j^N \prod_{k=1}^N (1 - \omega_k) = j^N \tilde{T}_N(\omega = 1) \quad (4.41)$$

Obsérvese que el parámetro ϵ se puede obtener a partir de las pérdidas de retorno como

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \quad (4.42)$$

es decir que $\varepsilon = 2^{N-1}\epsilon$. En el filtro de Butterworth al ser el polinomio s^N normalizado se tenía que $\epsilon = \varepsilon$ y por ello no se hizo en ningún momento distinción entre ambos.

4.4.3 Determinación del orden

Siguiendo la misma pauta que para el caso del filtro de Butterworth, se determina el orden de forma que el filtro tenga una atenuación mínima a cierta frecuencia $\omega_s > 1$:

$$A_{\min}(dB) = 10 \log_{10} [1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega_s)] \quad (4.43)$$

ya que para $\omega > 1$ el polinomio de Chebyshev se puede escribir como $T_N(\omega) = \cosh[N \operatorname{acosh}(\omega)]$ es inmediato obtener el orden N :

$$N = \left\lceil \frac{\operatorname{acosh} \left(\frac{\sqrt{10^{A_{\min}/10} - 1}}{\epsilon} \right)}{\operatorname{acosh} \omega_s} \right\rceil \quad (4.44)$$

EJEMPLO 4.3 Obtener la expresión de $S_{11}(s)$, $S_{21}(s)$, $|S_{11}(j\omega)|^2$ y $|S_{21}(j\omega)|^2$ para un filtro de Chebyshev que tenga unas pérdidas de retorno a $\omega_c = 1$ (rad/s) de $RL = 20$ dB y que consiga una atenuación mínima de $A_{\min} = 20$ dB a la frecuencia normalizada $\omega_s = 2$ (rad/s). Representar la respuesta en función de la pulsación normalizada ω .

Solución: Siguiendo (4.42) se obtiene $\epsilon = 0.1005$. El orden necesario para cumplir las especificaciones dado por (4.44) es $N = 5$. Recuérdese que para las mismas especificaciones el filtro de Butterworth requiere un orden $N = 7$ (véase el ejemplo 4.1). Ya que las pérdidas de retorno son altas, el rizado máximo permitido en la banda de paso (pérdidas de inserción IL) es muy pequeño. Usando unitariedad es fácil calcular (ver capítulo 5)

$$IL = -10 \log_{10} \left(1 - 10^{-RL/10} \right) = 0.0436 \text{ dB} \quad (4.45)$$

El valor requerido de ϵ es inmediato $\epsilon = 2^4 \epsilon = 1.6081$. El polinomio $P(s) = 1$ ya que es un filtro todo-polos de orden impar. Las raíces de $F(s)$ (ceros de reflexión) son:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \pm j0.9511 \\ z_{3,4} &= \pm j0.5878 \\ z_5 &= 0 \end{aligned}$$

con lo que se puede construir $F(s)$:

$$F(s) = s^5 + 1.2500s^3 + 0.3125s$$

Los polos del filtro (raíces de $E(s)$) son:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -0.1962 \pm j1.1266 \\ p_{3,4} &= -0.5138 \pm j0.6963 \\ p_5 &= -0.6350 \end{aligned}$$

Con lo que el polinomio $E(s)$ queda:

$$E(s) = s^5 + 2.0551s^4 + 3.3616s^3 + 3.1998s^2 + 2.0192s + 0.6219$$

Una vez completado el proceso, las expresiones de $S_{11}(s)$ y la de $S_{21}(s)$ son:

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{E(s)} \quad S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\epsilon E(s)}$$

Las expresiones de $|S_{11}(j\omega)|^2$ y de $|S_{21}(j\omega)|^2$ son más simples:

$$|S_{11}(j\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 T_5^2(\omega)}{1 + \epsilon^2 T_5^2(\omega)} \quad |S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_5^2(\omega)}$$

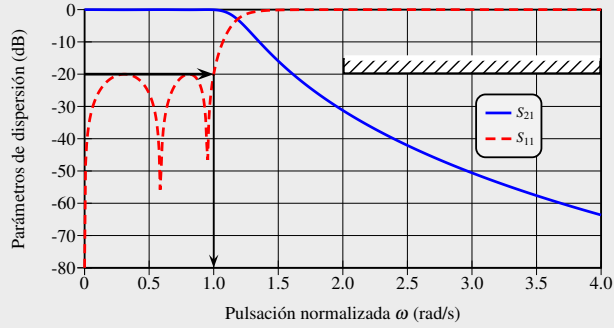
donde

$$\begin{aligned} T_5(\omega) &= 16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega \\ T_5^2(\omega) &= 256\omega^{10} - 640\omega^8 + 560\omega^6 - 200\omega^4 + 25\omega^2 \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} |S_{11}(j\omega)|^2 &= \frac{2.5859\omega^{10} - 6.4646\omega^8 + 5.6566\omega^6 - 2.0202\omega^4 + 0.2525\omega^2}{2.5859\omega^{10} - 6.4646\omega^8 + 5.6566\omega^6 - 2.0202\omega^4 + 0.2525\omega^2 + 1} \\ |S_{21}(j\omega)|^2 &= \frac{1}{2.5859\omega^{10} - 6.4646\omega^8 + 5.6566\omega^6 - 2.0202\omega^4 + 0.2525\omega^2 + 1} \end{aligned}$$

Si se representan ambas funciones en unidades logarítmicas se obtiene la gráfica



Se observa que el filtro cumple las especificaciones y que el rizado de S_{21} no se aprecia. Sin embargo, el rizado de S_{11} que se relaciona con el anterior por la condición de unitariedad tiene el límite especificado de pérdidas de retorno de 20 dB y que, justamente cuando $\omega = 1$, entonces la curva de S_{11} pasa exactamente por $|S_{11}| = -20$ dB.

Obsérvese también que un filtro de Chebyshev de orden N tiene N nulos para S_{11} como ya se ha mencionado. La respuesta, al ser simétrica para $\omega < 0$, permite ver el número total de nulos de S_{11} : dos nulos para $\omega > 0$, dos nulos para $\omega < 0$ y el nulo característico en el origen que tienen todos los filtros de Chebyshev de orden impar.

4.4.4 El roll-off

Siguiendo el mismo razonamiento que se realizó en la sección 4.3.4 para el filtro de Butterworth se obtiene

$$\begin{aligned} A(\omega_1) &= 10 \log_{10} [1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega_1)] \\ A(\omega_2) &= 10 \log_{10} [1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega_2)] \\ \Delta A &= A(\omega_2) - A(\omega_1) = 10 \log_{10} \frac{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega_2)}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega_1)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

El roll-off para un filtro de Chebyshev se define como

$$\begin{aligned} Rf &= \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \Delta A = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} 10 \log_{10} \frac{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega_2)}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega_1)} = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} 10 \log_{10} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^{2N} \\ &= 20N \text{ dB/década} \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde $\omega_2 = 10\omega_1$. Sin embargo, aunque el roll-off es igual que el filtro de Butterworth, comparando las atenuaciones:

$$\begin{aligned} A_B(\omega) &= 10 \log_{10} [1 + \epsilon^2 \omega^{2N}] \\ A_C(\omega) &= 10 \log_{10} [1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega)] \\ \Delta A(\omega) &= A_C - A_B = 10 \log_{10} \frac{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega)}{1 + \epsilon^2 \omega^{2N}} \end{aligned}$$

donde A_B identifica a la atenuación de Butterworth y A_C a la de Chebyshev. A altas frecuencias se tiene que si $\epsilon = \epsilon$ (es decir que ambos filtros tienen el mismo valor de RL en el límite de la banda)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 10 \log_{10} \frac{\epsilon^2 2^{2N-2} \omega^{2N}}{\epsilon^2 \omega^{2N}} = 20(N-1) \log_{10} 2 \approx 6.02(N-1)$$

Es decir que $A_C \approx 6.02(N-1)A_B$ y así la atenuación del filtro de Chebyshev es mucho mayor que la de Butterworth del mismo orden. Si $N = 5$ obtendríamos que a altas frecuencias el filtro de Chebyshev de orden 5 tiene una atenuación más de 24 veces mayor que el filtro de Butterworth del mismo orden.

4.5 El filtro de Bessel-Thompson

El filtro de Bessel-Thomson surgió como el paso natural para tratar el mismo problema que se trataba con la amplitud (conseguir que fuera maximalmente plana) pero aplicándolo al retardo de grupo. Los filtros de Bessel-Thompson se caracterizan por la propiedad de que el retardo de grupo es maximalmente plano alrededor

del origen. La respuesta al escalón de este tipo de filtros exhibe un overshoot muy bajo (típicamente menor del 1 %).

El retardo de grupo de un filtro de Bessel-Thompson tiene una expresión cuya aproximación polinomial carece de potencias menores en ω que el orden del filtro. Esta fue la estrategia original utilizada por Thompson (Thomson 1949). En el ejemplo 4.4 se puede seguir el razonamiento que conduce a la expresión del filtro de Bessel-Thompson.

EJEMPLO 4.4 Hallar la función de transferencia de un filtro todo-polos de orden $N = 3$ con retardo de grupo maximalmente plano.

Solución: Asumiendo una función de transferencia genérica de orden $N = 3$ todo-polos, la forma de la misma se puede escribir como:

$$H(s) = \frac{1}{\varepsilon E(s)} = \frac{1/\varepsilon}{s^3 + e_2 s^2 + e_1 s + e_0}$$

donde $E(s)$ es un polinomio de Hurwitz, mónico y de coeficientes reales. La expresión en función de la frecuencia es

$$H(j\omega) = \frac{1/\varepsilon}{e_0 - e_2 \omega^2 + j(e_1 \omega - \omega^3)}$$

y cuya fase es

$$\angle H(j\omega) = -\arctan \frac{e_1 \omega - \omega^3}{e_0 - e_2 \omega^2} = -\arctan \left[\frac{n(\omega)}{m(\omega)} \right]$$

donde $m(\omega) = e_0 - e_2 \omega^2$ es un polinomio par en ω y $n(\omega) = e_1 \omega - \omega^3$ es un polinomio impar en ω .

El retardo de grupo se calcula como

$$\begin{aligned} \tau_g(\omega) &= -\frac{d}{d\omega} [\angle H(j\omega)] = \frac{1}{1 + \left[\frac{n(\omega)}{m(\omega)} \right]^2} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{n(\omega)}{m(\omega)} \right] = \frac{mn' - nm'}{m^2 + n^2} \\ &= \frac{e_0 e_1 + (e_1 e_2 - 3e_0) \omega^2 + e_2 \omega^4}{e_0^2 + (e_1^2 - 2e_0 e_2) \omega^2 + (e_2^2 - 2e_1) \omega^4 + \omega^6} \end{aligned}$$

La expresión del retardo de grupo puede desarrollarse en serie de McLaurin obteniéndose

$$\tau_g(\omega) = M_0 + M_2 \omega^2 + M_4 \omega^4 + \dots$$

donde se observa el hecho ya resaltado en (Thomson 1949) de que el retardo de grupo solamente tiene potencias pares en ω . Los primeros coeficientes del desarrollo tras laboriosas pero mecánicas operaciones son

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{e_1}{e_0} \\ M_2 &= \frac{3e_0 e_1 e_2 - 3e_0^2 - e_1^3}{e_0^3} \\ M_4 &= [e_1^5 + 5e_0 (e_0 e_1^2 + e_0 e_1 e_2^2 - e_0^2 e_2 - e_1^3 e_2)] / e_0^5 \end{aligned}$$

Solamente queda forzar las condiciones sobre el retardo de grupo para obtener los coeficientes $\{e_i\}$. Estas condiciones son que el retardo de grupo en el origen sea la unidad y que para un grado del filtro N desaparezcan todos los términos de orden menores que $\mathcal{O}(\omega^{2(N-1)})$. En este caso al ser $N = 3$ deben de anularse M_2 y M_4 y que $M_0 = 1$. Las condiciones extraídas de cada término del desarrollo son:

$$\begin{aligned} M_0 = 1 & \Rightarrow e_0 = e_1 \\ M_2 = 0 & \Rightarrow e_2 = 1 + \frac{e_0}{3} \\ M_4 = 0 & \Rightarrow e_0 = 15 \end{aligned}$$

donde para obtener M_2 se ha utilizado la condición dada por M_0 y para obtener M_4 se ha utilizado la condición dada por M_2 y M_0 .

Finalmente el polinomio $E(s)$ queda

$$E(s) = s^3 + 6s^2 + 15s + 15$$

La expresión del retardo queda por tanto

$$\tau_g(\omega) = \frac{225 + 45\omega^2 + 6\omega^4}{225 + 45\omega^2 + 6\omega^4 + \omega^6}$$

cuya aproximación en serie de McLaurin es

$$\tau_g(\omega) \approx 1 - \frac{1}{225}\omega^6 + \frac{1}{1125}\omega^8 + \dots$$

es decir que el retardo de grupo tiende a la unidad cuando la pulsación tiende a cero a un ritmo de $\mathcal{O}(\omega^6)$. Aumentar el orden del filtro supondría aumentar el orden de esta tendencia. En general para un filtro de Bessel-Thompson de orden N tenemos que el $\tau_g(\omega) = 1 + \mathcal{O}(\omega^{2N})$ cuando $\omega \rightarrow 0$.

Para terminar, se debe obtener la constante ε y para ello se aplica una condición adicional. En este tipo de filtros suele ser que, en el origen, la función de transferencia sea la unidad, es decir, que $H(0) = 1$. Por tanto, $\varepsilon = 1/15$ y la función de transferencia obtenida finalmente sería

$$H(s) = \frac{1}{\varepsilon E(s)} = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

4.5.1 Propiedades generales

Como se ha podido observar en el ejemplo 4.4, los cálculos para conseguir la expresión de la función de transferencia de orden $N = 3$ han sido bastante laboriosos. Aumentar el orden supone un trabajo infame para el diseñador. Calcular derivadas de una expresión racional de orden $2N$ resulta bastante molesto cuando $N > 3$. Afortunadamente Thomson pudo generalizar los resultados al poder relacionar las expresiones de los polinomios obtenidos con los polinomios de Lommel, los cuales tienen una relación recursiva.

Un paso más allá fue dado por Storch en (Storch 1954) donde se muestra un método más simple para obtener la función de transferencia de este tipo de filtros. El punto de partida es igualar la función de transferencia al retardo ideal:

$$H(s) = e^{-s} = \frac{1}{e^s} = \frac{1}{\sinh s + \cosh s} = \frac{1/\sinh s}{1 + \coth s} \quad (4.48)$$

Convirtiendo la cotangente hiperbólica en una fracción continua infinita se obtiene:

$$\coth s = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{7}{s} + \dots}}} \quad (4.49)$$

En el método de Storch, la fracción continua (4.49) se trunca después de n términos para conseguir la aproximación de orden n . La expresión obtenida se convierte, de nuevo, a fracción con un polinomio numerador y otro denominador. La suma de ambos da la aproximación de e^s que es el denominador de la función de transferencia. Como ejemplo, se obtendrá el filtro de Bessel-Thompson de orden $N = 3$ obtenido en el ejemplo 4.4:

$$\coth s = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s}}} = \frac{6s^2 + 15}{s^3 + 15s} = \frac{m(s)}{n(s)}$$

ahora simplemente

$$E(s) = m(s) + n(s) = s^3 + 6s^2 + 15s + 15$$

es decir, el mismo obtenido en el ejemplo 4.4 tras laboriosos cálculos.

Cualquiera podría poner objeciones a este método argumentando que no es necesario obtener la fracción continua para hallar la aproximación de e^s , con simplemente

obtener el desarrollo de McLaurin de e^s se obtendría el mismo resultado. Esto no es cierto ya que un polinomio formado por los primeros N términos de la serie de McLaurin de e^s no es Hurwitz cuando $N > 4$.

Otro gran logro de Storch fue poder identificar de manera analítica los polinomios resultantes tras truncar la fracción continua y sumar numerador y denominador. Estos polinomios se denominan polinomios inversos⁷ de Bessel $\mathcal{B}(s)$ y se caracterizan por:

- Cumplen la ecuación diferencial

$$s\mathcal{B}_n''(s) - 2(s+n)\mathcal{B}_n'(s) + 2n\mathcal{B}_n(s) = 0 \quad (4.50)$$

- Se pueden generar de forma recursiva mediante

$$\mathcal{B}_0(s) = 1 \quad (4.51a)$$

$$\mathcal{B}_1(s) = s + 1 \quad (4.51b)$$

$$\mathcal{B}_n(s) = (2n-1)\mathcal{B}_{n-1}(s) + s^2\mathcal{B}_{n-2}(s) \quad (4.51c)$$

- Se pueden generar directamente a partir de la expresión

$$\mathcal{B}_n(s) = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!} \frac{s^k}{2^{n-k}} \quad (4.52)$$

La función de transferencia de un filtro de Bessel-Thomson se puede escribir como

$$H(s) = \frac{b_0}{\mathcal{B}_n(s)} \quad (4.53)$$

donde b_0 es el coeficiente de orden cero del polinomio \mathcal{B}_n y que tiene la expresión

$$b_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (4.54)$$

A día de hoy, todavía no se conoce una expresión para las raíces de los polinomios de Bessel aunque existen tablas con las raíces de estos polinomios para órdenes de interés práctico.

⁷Se denominan inversos porque los coeficientes del polinomio inverso de Bessel $\mathcal{B}(s)$ son los coeficientes del polinomio de Bessel $y(s)$ en orden inverso y por tanto $\mathcal{B}_n(s) = s^n y_n(1/s)$. Como ejemplo $y_3(s) = 15s^3 + 15s^2 + 6s + 1$ y $\mathcal{B}_3(s) = s^3 + 6s^2 + 15s + 15$.

4.5.2 Expresiones alternativas

Un problema de los filtros de Bessel-Thompson es que la frecuencia de corte varía según el orden del filtro y esto no es conveniente desde el punto de vista del diseñador.

La variación más popular de las expresiones de este tipo de filtros se basa en la normalización aplicada en (Rabiner y Gold 1975). Esta normalización⁸ se basa en que

$$|H(j\omega)|^2 = \left(\frac{b_0}{b_n}\right)^2 \mathcal{O} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-2n} \right] = b_0^2 \mathcal{O} \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{2n} \right] \quad \text{cuando } \omega \rightarrow \infty \quad (4.55)$$

ya que el coeficiente de mayor exponente de $\mathcal{B}_n(s)$ es siempre $b_n = 1$. En la ecuación (4.55) ω_c es la frecuencia de escalado que se debe aplicar para que coincida con la expresión asintótica de un filtro de Butterworth cuya pulsación esté normalizada a $\omega_c = 1$ rad/s. Esta expresión sería

$$|H_B(j\omega)|^2 = \mathcal{O}(\omega^{-2n}) \quad \text{cuando } \omega \rightarrow \infty \quad (4.56)$$

donde $H_B(j\omega)$ es la función de transferencia de Butterworth.

Por tanto, si las dos expresiones deben ser asintóticamente iguales se obtiene que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{|H(j\omega)|^2}{|H_B(j\omega)|^2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{b_0^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{2n}}{\omega^{-2n}} = 1 \quad (4.57)$$

o lo que es lo mismo $b_0^2 \omega_c^{2n} = 1$ y por tanto

$$\omega_c = b_0^{-1/n} \quad (4.58)$$

Conclusión: el filtro de Bessel-Thompson modificado para forzar el comportamiento asintótico de un filtro de Butterworth normalizado es:

$$H(s) = \frac{\mathcal{B}_n(0)}{\mathcal{B}_n\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} \quad (4.59)$$

donde

$$\omega_c = b_0^{-1/n} = \left[\frac{2^n n!}{(2n)!} \right]^{1/n} = 2 \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} \quad (4.60)$$

⁸El resultado obtenido en (Rabiner y Gold 1975) es correcto aunque la demostración es fundamentalmente incorrecta. Aquí se ha intentado corregir el problema.

o lo que es lo mismo

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt[n]{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}} \quad (4.61)$$

Esto implica que:

- Los polos de la función de transferencia se obtienen multiplicando las raíces del polinomio correspondiente de Bessel por ω_c .
- El retardo de grupo en el origen ya no es la unidad sino

$$\tau_g(0) = \left[\frac{(2n)!}{2^n n!} \right]^{1/n} \quad (4.62)$$

- A la frecuencia de corte $\omega = 1$ rad/s la función de transferencia vale $|H(j)|^2 < 1/2$.

EJEMPLO 4.5 Determinar la expresión de $S_{11}(s)$ y de $S_{21}(s)$ de un filtro de Bessel-Thompson de orden $N = 5$ modificado para que asintóticamente tenga el mismo comportamiento que un filtro de Butterworth del mismo orden. Compararlos gráficamente tanto en módulo como en retardo de grupo.

Solución: El polinomio de Bessel de orden 5 es

$$\mathcal{B}_5(s) = s^5 + 15s^4 + 105s^3 + 420s^2 + 945s + 945$$

La frecuencia de normalización es $\omega_c = [\mathcal{B}_5(0)]^{-1/5} = 0.2540$

Lo que conduce a que

$$S_{21}(s) = \frac{\mathcal{B}_5(0)}{\mathcal{B}_5(s/\omega_c)} = \frac{1}{s^5 + 3.8107s^4 + 6.7767s^3 + 6.8864s^2 + 3.9363s + 1}$$

de ahí que

$$S_{21}(s) = \frac{1}{\varepsilon E(s)}$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 \\ E(s) &= s^5 + 3.8107s^4 + 6.7767s^3 + 6.8864s^2 + 3.9363s + 1 \end{aligned}$$

Aplicando unitariedad se obtiene que los ceros de reflexión de $|F(s)|^2$ son $\{z_i\}$ y sus negativos conjugados $\{-z_i^*\}$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5$. A continuación se listan los $\{z_i\}$

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= -0.9858 + 0.3224j \\ z_3 &= -0.9858 - 0.3224j \\ z_4 &= -0.6464 + 0.8954j \\ z_5 &= -0.6464 - 0.8954j \end{aligned}$$

y escogemos el conjunto $\{z_i | \Re\{z_i\} \leq 0\}$. Se pueden escoger los $\{-z_i^* | \Re\{-z_i^*\} \geq 0\}$ pero con la elección del ejemplo se garantiza que S_{11} tiene la fase menor. Recuérdese que si un polinomio $F(s)$ tiene unas raíces $\{s_i\}$, las raíces del polinomio $F(s)^*$ son $\{-s_i^*\}$. Esto implica que si 0 es una raíz de $F(s)$ también lo es de $F(s)^*$. Como curiosidad, $F(s)$ tiene todas las raíces menos una fuera del eje imaginario. Es de esperar que, en el origen, el filtro de Butterworth sea claramente superior en cuanto a comportamiento plano.

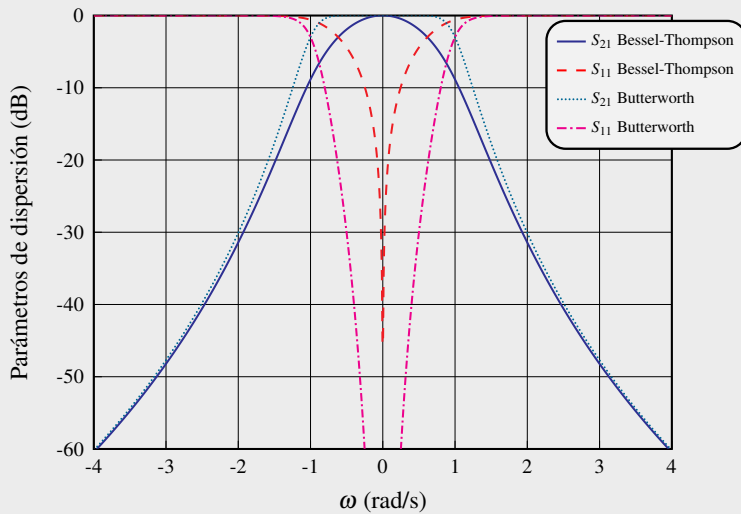
El polinomio $F(s)$ queda:

$$F(s) = s^5 + 3.2645s^4 + 4.8446s^3 + 3.7956s^2 + 1.3121s$$

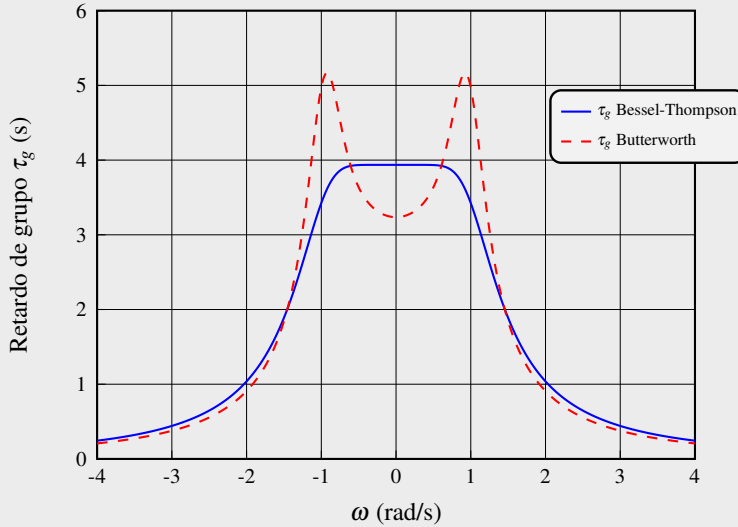
Finalmente, el parámetro de reflexión tiene la expresión

$$S_{11}(s) = \frac{s^5 + 3.2645s^4 + 4.8446s^3 + 3.7956s^2 + 1.3121s}{s^5 + 3.8107s^4 + 6.7767s^3 + 6.8864s^2 + 3.9363s + 1}$$

La representación gráfica de los parámetros de dispersión del filtro de Bessel-Thompson comparados con los del filtro de Butterworth del mismo orden se muestran en la siguiente gráfica.



La comparativa del retardo de grupo del filtro de Bessel-Thompson de orden $N = 5$ con el filtro de Butterworth del mismo orden se muestra en la siguiente gráfica



Se pueden apreciar varias características:

- Cuando la pulsación crece, las respuestas tienden a ser iguales.
- El retardo de grupo alrededor del origen es prácticamente plano para el filtro de Bessel-Thompson.
- Se puede ver lo que se demostró en el capítulo 3: mayor selectividad significa peor comportamiento del retardo de grupo.

Existen expresiones alternativas del filtro de Bessel-Thompson ya que la pulsación de normalización ω_c de la ecuación (4.59) puede elegirse con diferentes criterios. Otro criterio popular aparece en (Paarmann 2001) y en (Bianchi y Sorrentino 2007) donde se escoge la pulsación de normalización de manera que el filtro a la pulsación ω_c cumple que

$$|H(j\omega_c)|^2 = \frac{1}{2} \quad (4.63)$$

es decir, que la respuesta cae 3 dB en potencia si $H(j\omega)$ expresa un cociente de tensiones.

Esta forma alternativa de normalizar tiene la ventaja de fijar exactamente el ancho de banda, pero el inconveniente es que la atenuación no es la misma que un filtro de Butterworth. Además, ω_c no tiene una expresión analítica y cambia con el orden del filtro (pero puede hallarse de forma aproximada). En (Bianchi y Sorrentino 2007) aparece una buena aproximación con una fórmula analítica. Para $N = 1$, $\omega_c = 1$ y

$$\omega_c \approx \sqrt{(2N-1) \ln 2} \quad \forall N > 1 \quad (4.64)$$

La primera opción que se ha desarrollado es la más utilizada en paquetes informáticos de uso muy extendido⁹. Tiene la ventaja de que $S_{21}(s)$ es muy simple porque $\varepsilon = 1$ y el polinomio mónico $E(s)$ tiene su término independiente igual a la unidad.

4.6 Otros filtros todo-polos

En esta sección se van a considerar otros filtros de forma resumida debido a su menor importancia en el uso práctico habitual. Se resumirán asimismo las características más importantes que pueden ser encontradas en (Paarmann 2001) y en (Blinchikoff y Zverev 2006).

4.6.1 El filtro Gaussiano

La función de transferencia del filtro gaussiano se define como:

$$|H(j\omega)|^2 = e^{-\gamma\omega^2} \quad (4.65)$$

donde $\gamma = \ln(2)/\omega_c^2$. Desarrollando la exponencial en serie de McLaurin se obtiene que la función de transferencia puede expresarse en forma de cociente de polinomios como

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \frac{\gamma^k}{k!} \omega^{2k}} \quad (4.66)$$

Para conseguir la expresión de $H(s)$ se procede de la forma habitual: se obtienen las raíces del denominador ω_k y se realiza el cambio de variable $s_k = j\omega_k$. Se asignan las raíces del semiplano izquierdo del plano complejo a $H(s)$ y el resto a $H(-s)$. De esta forma queda definido $E(s)$. Finalmente, $F(s)$ se obtiene aplicando la condición de unitariedad.

Tradicionalmente, se suele comparar el filtro gaussiano con el de Bessel. Las características generales más importantes a tener en cuenta son:

⁹La función `[z,p,k]=besselap(N)` de MatlabTM proporciona los ceros (vector siempre vacío por ser un filtro todo-polos), los polos y la ganancia ($k = 1/\varepsilon$ que es siempre la unidad) de un filtro de Bessel-Thompson de orden N siguiendo el criterio de normalización explicado en esta sección.

- Tanto la magnitud como la fase y el retardo de grupo de un filtro gaussiano son muy similares a los del filtro de Bessel.
- El filtro de Bessel tiene un poco mejor factor de forma y un retardo de grupo ligeramente más plano.
- El filtro gaussiano tiene un menor retardo, para un orden fijo, que el filtro de Bessel.
- La atenuación en la banda de paso es ligeramente peor que la del filtro de Bessel.
- El overshoot del filtro gaussiano es mejor que el de Bessel.

En general, el filtro de Bessel consigue el retardo de grupo más plano, y el filtro gaussiano el overshoot menor. Conforme el orden $N \rightarrow \infty$ ambas aproximaciones se aproximan a la exponencial.

4.6.2 El filtro de Legendre

Las principales características de este filtro son:

- El factor de forma es muy bueno.
- Tiene rizado en la banda de paso pero el rizado no es constante.
- La respuesta del retardo de grupo es más plana (para los de primera y segunda clase) que el filtro de Chebyshev.

La función de transferencia es:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[P_N^{(m)}(\omega/\omega_p) \right]^2} \quad (4.67)$$

donde $P_N^{(m)}$ es el polinomio asociado m -ésimo de Legendre modificado de orden N .

Los polinomios de Legendre ($m = 0$) pueden ser obtenidos fácilmente de la recursión siguiente:

$$P_0(\omega) = 1 \quad (4.68a)$$

$$P_1(\omega) = \omega \quad (4.68b)$$

$$P_{N+1}(\omega) = \frac{2N+1}{N+1} \omega P_N(\omega) - \frac{N}{N+1} P_{N-1}(\omega) \quad (4.68c)$$

El m -ésimo polinomio asociado se calcula como

$$P_{N,m}(\omega) = \frac{d^m}{d\omega^m} P_{N+m}(\omega) \quad (4.69)$$

Debido a que se requiere que $P_N^{(m)}(1) = 1$, se calcula el polinomio m -ésimo asociado y modificado como

$$P_N^{(m)}(\omega) = K P_{N,m}(\omega) \quad (4.70)$$

donde K es una constante multiplicativa tal que $P_N^{(m)}(1) = 1$. Por tanto

$$K = \frac{1}{P_{N,m}(1)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N L_i} \quad (4.71)$$

donde los L_i son los coeficientes del polinomio $P_{N,m}(\omega) = L_0 + L_1\omega + L_2\omega^2 + \dots + L_N\omega^N$.

Finalmente, el valor de ϵ se puede calcular directamente como

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \quad (4.72)$$

donde RL son las pérdidas de retorno en dB en el límite de la banda de paso $\omega = 1$. Obsérvese que es la misma expresión obtenida para el filtro de Chebyshev que aparece en la fórmula (4.42).

4.6.3 El filtro de Papoulis

También llamados filtros “L”-óptimos, fueron propuestos por A. Papoulis¹⁰ en 1958 (Papoulis 1958). En general, los filtros de Chebyshev tienen la mejor selectividad sin embargo, tienen un comportamiento muy pobre en el dominio del tiempo. Por otra parte, los filtros de Butterworth son muy insatisfactorios desde el punto de vista de la selectividad y los filtros de Bessel son una opción peor en este sentido.

Los filtros propuestos por Papoulis (Kuo 1966) fueron llamados *Óptimos* o filtros “L”, los cuales tienen las siguientes propiedades:

- La respuesta en amplitud es monótona (no posee rizado).
- La selectividad es la máxima si se asume la monotonía.

¹⁰Athanasios Papoulis (1921-2002) fue un ingeniero griego-americano y matemático aplicado. Fue miembro de la facultad del Instituto Politécnico de Brooklyn (hoy día Instituto Politécnico de la Universidad de Nueva York) desde 1952. Contribuyó a las áreas de procesamiento de señal, comunicaciones y teoría de señales y sistemas.

- Es un filtro todo-polos.

La función de transferencia de un filtro de Papoulis tiene la forma

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 L_N^2(\omega)} \quad (4.73)$$

donde, como siempre, ϵ controla la atenuación en el límite de la banda

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \quad (4.74)$$

y los polinomios $L_N(\omega)$ cumplen las siguientes propiedades:

1. $L_N^2(0) = 0$. La atenuación en el origen es nula para cualquier orden N .
2. $L_N^2(1) = 1$. El polinomio está normalizado en el límite de la banda.
3. $\frac{dL_N^2(\omega)}{d\omega} \leq 0$. Esto asegura que la respuesta es monótona decreciente para cualquier frecuencia.
4. $\left. \frac{dL_N^2(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=1} = M$. Donde M es un máximo. Esto asegura que en el límite de la banda la pendiente será máxima y así asegurar que la selectividad es la máxima posible¹¹.

Construcción de filtros de orden impar

Sea $N = 2k + 1$ el orden del filtro. La expresión para $L_N^2(\omega)$ se puede escribir como

$$L_N^2(\omega) = \int_{-1}^{2\omega^2-1} v^2(x) dx \quad (4.75)$$

donde

$$v(x) = \sum_{i=0}^k a_i P_i(x) = a_0 + a_1 P_1(x) + \cdots + a_k P_k(x) \quad (4.76)$$

y los coeficientes a_i vienen dados por

$$a_0 = \frac{a_1}{3} = \frac{a_2}{5} = \cdots = \frac{a_k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}(k+1)} \quad (4.77)$$

y $P_i(x)$ es el polinomio i -ésimo de Legendre que se construye según se ha descrito en (4.68).

¹¹Esto no es estrictamente cierto ya que la selectividad se mide, según la definición dada en (2.5), a la frecuencia tal que la función de transferencia cae 3 dB. Sería más correcto decir que la caída de $H(j\omega)$ es lo más abrupta posible en el límite de la banda

Construcción de filtros de orden par

Sea $N = 2k + 2$ el orden del filtro. La expresión de $L_N^2(\omega)$ viene dada por

$$L_N^2(\omega) = \int_{-1}^{2\omega^2-1} (x+1) \left[\sum_{i=0}^k a_i P_i(x) \right]^2 dx \quad (4.78)$$

donde las constantes a_i se calculan, según si k es par o impar, de la siguiente forma:

k par:

$$a_0 = \frac{a_2}{5} = \dots = \frac{a_k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \quad (4.79a)$$

$$a_1 = a_3 = a_{k-1} = 0 \quad (4.79b)$$

k impar

$$a_1 = \frac{a_3}{5} = \dots = \frac{a_k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \quad (4.80a)$$

$$a_0 = a_2 = a_{k-1} = 0 \quad (4.80b)$$

Hay que decir que antes de dar por terminado el cálculo de $L_N^2(\omega)$ hay que normalizar su expresión multiplicándola por una constante para que se cumpla $L_N^2(1) = 1$.

4.6.4 Más filtros todo-polos

Existen varios tipos de filtros todo-polos que no se han nombrado aquí. Por ejemplo los filtros que en lugar de conseguir un retardo de grupo maximalmente plano (Bessel-Thompson) consiguen que el retardo de grupo tenga un rizado constante máximo permitido. También se han estudiado filtros con fase equidistante (retardo de grupo pasa por cierto valor N veces de forma equiespaciada en frecuencia). Ambos se encuentran desarrollados en (Rhodes 1976) de manera extensiva.

Los filtros transicionales son filtros cuyo diseño está entre dos diseños existentes.

Los filtros ultraesféricos utilizan polinomios de Jacobi modificados (polinomios de Gegenbauer) con ciertos parámetros de forma que los filtros de Butterworth y los filtros de Chebyshev son casos particulares.

Los filtros de Halpern (Paarmann 2001) son una variación de los de Papoulis (respuesta monótona) pero el parámetro que se intenta mejorar no es la caída en la banda de paso sino el factor de forma. Los filtros de Halpern tienen una respuesta

monótona al escalón y una máxima caída asintótica (en lugar de a la pulsación $\omega = 1$). El problema es que los filtros de Papoulis dan una menor distorsión de la magnitud en la banda de paso.

Generalmente, los filtros de Gauss, Bessel y Halpern son de un interés poco más que académico debido a su mala respuesta en magnitud.

Finalmente, los filtros de fase compensada son filtros paso-todo cuya característica de fase se diseña para compensar alguna respuesta de fase del sistema adyacente al filtro. Generalmente la idea suele ser conseguir un retardo de grupo plano en la banda de interés aunque sea un retardo mayor.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 4.1** Determinar para un filtro todo-polos las expresiones de $|S_{11}(j\omega)|^2$ y de $|S_{21}(j\omega)|^2$ en función del polinomio $F(j\omega)$ y de constantes pero no de $E(j\omega)$. Este tipo de expresiones es útil cuando el polinomio $F(s)$ es mucho más simple que $E(s)$, lo cual sucede en la mayoría de los casos.
- 4.2** Determinar la selectividad de un filtro de Butterworth de orden N .
- 4.3** Determinar los puntos que hacen máximo $|S_{11}(j\omega)|^2$ en el intervalo $[-1, +1]$ para un filtro de Chebyshev y determinar el valor de los máximos en función de ϵ .
- 4.4** Deducir la fórmula (4.45) para obtener en dB el rizado máximo dentro de la banda para un filtro de Chebyshev en función de las pérdidas de retorno RL .
- 4.5** Demostrar que en un filtro de Bessel, modificado para que asintóticamente tenga un comportamiento igual que un filtro de Butterworth, el parámetro $S_{21}(s)$ es de la forma

$$S_{21}(s) = \frac{1}{\varepsilon E(s)}$$

donde ε y el coeficiente independiente e_0 del polinomio mónico $E(s) = s^N + e_{N-1}s^{N-1} + \dots + e_1s + e_0$ valen ambos 1 para cualquier orden N del filtro.

- 4.6** Demostrar que en un filtro de Bessel de orden n , modificado para que asintóticamente tenga un comportamiento igual que un filtro de Butterworth, el parámetro $S_{21}(s)$ tiene un retardo de grupo en el origen

$$\tau_g(0) = \left[\frac{(2n)!}{2^n n!} \right]^{1/n}$$

- 4.7** Demostrar que en un filtro de Bessel de orden $n > 2$, modificado para que asintóticamente tenga un comportamiento igual que un filtro de Butterworth, el valor de $|S_{21}(s)|^2$ a la frecuencia de corte es menor que $1/2$.
- 4.8** Los polinomios de Bessel inversos tienen la expresión dada por (4.52). Estos polinomios se pueden generar como

$$\mathcal{B}_N(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k$$

donde los coeficientes se pueden hallar de forma recursiva

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_{k+1} &= \frac{2(N-k)}{(k+1)(2N-k)} a_k \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Demostrar con las anteriores expresiones que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{B}_N(s)} = e^{-s}$$

4.9 Obtener la expresión $|S_{21}(j\omega)|^2$ de un filtro de Papoulis de orden $N = 5$ y representar gráficamente $|S_{21}(j\omega)|^2$ y $|S_{11}(j\omega)|^2$.

4.10 Sea un filtro todo-polos de Chebyshev de ancho de banda normalizado con pérdidas de retorno RL (dB). $|S_{21}|^2$ tiene una expresión dada por

$$|S_{21}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + k^2 T_N^2(\omega)}$$

donde $T_N(x)$ es el polinomio de Chebyshev de orden N y queremos expresarlo de manera normalizada como

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)}$$

donde $P(s)$ y $E(s)$ son polinomios mónicos (coeficiente de mayor exponente igual a 1). Se pide:

1. La expresión de $P(s)$.
2. La expresión de $E(s)$.
3. La expresión de k .
4. La expresión de ε .

Capítulo 5

Introducción a los filtros con ceros de transmisión

*¡Cuánto los envidio [...] por haber sido los creadores de tal obra de arte!
Como pobre mortal entrego mi pluma, les rindo homenaje y espero que mi
ejecución de su sinfonía no ofenda a nadie que tenga oídos para escuchar la
música de la esferas.*

Elliptic Functions and Applications, D.K. Lawden

En el capítulo anterior se han tratado los filtros todo-polos, es decir, los filtros cuyos ceros de transmisión son inexistentes dado que $P(s)$ es una constante. También se podría considerar que un filtro todo-polos tiene todos los ceros de transmisión en el infinito.

Los ceros de transmisión son útiles si se desea disminuir la función de transferencia en el entorno de cierta frecuencia. El filtro se hace más selectivo en ese entorno pero el precio a pagar es el roll-off y la complicación tecnológica para construirlo. El roll-off disminuye proporcionalmente al número de ceros de transmisión y la complejidad tecnológica aparece por la necesidad de conseguir un camino alternativo de la señal para que a cierta frecuencia haya una interferencia destructiva de la misma y se anule $H(j\omega)$. A continuación se tratarán los principales tipos de filtros de este tipo, que están muy en boga hoy en día, porque el espectro electromagnético se está considerando un bien escaso.

5.1 Filtros de Butterworth generalizados

Extender la respuesta de Butterworth al caso con ceros de transmisión es inmediato, ya que para conseguir la respuesta maximalmente plana alrededor del origen es necesario situar un cero del máximo orden posible en el origen para la reflexión. Ello fuerza de forma absoluta el polinomio $F(s) = s^N$ que es el mismo que el que se obtenía para el filtro todo-polos de Butterworth.

El siguiente paso es construir el polinomio $P(s)$ que se formará a partir de los ceros de transmisión elegidos por el diseñador. Se seguirá el mismo criterio que se explicó en la sección 2.7, es decir, se multiplicará todo el polinomio por j si $(N - n_{tz})$ es un número par.

El siguiente paso es obtener los parámetros ε y ε_R a partir de las condiciones en el límite de la banda (pulsación ω_c):

- Si $N = n_{tz}$ entonces se obtiene ε a partir de (2.37) y ε_R a partir de (2.36).
- Si $N < n_{tz}$ entonces $\varepsilon_R = 1$ y ε se obtiene a partir de (2.38).

Finalmente, se obtendrá el polinomio $E(s)$ utilizando la condición de unitariedad $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$. Como esta condición se aplica sobre el módulo al cuadrado de los parámetros de dispersión, se obtendrá en realidad $|E(s)|^2$ y al hallar sus raíces se seleccionarán las del semiplano izquierdo del plano complejo para construir $E(s)$. Esto implica obtener las raíces de un polinomio de grado $2N$. Si se quiere evitar este problema, en el apéndice B se muestra una técnica donde, para aumentar la precisión de la búsqueda de raíces, se hallan los ceros de un polinomio de grado N . En el mismo apéndice se incluye un ejemplo de este tipo de filtros y la generación de sus polinomios de forma detallada.

5.2 Filtros inversos de Chebyshev

Estos filtros son una variación del filtro de Chebyshev clásico¹. En aquellos se conseguía un rizado constante en la banda de paso y en éste se consigue un rizado constante en la banda atenuada. Respecto al comportamiento en la banda de paso, este filtro es maximalmente plano y, por tanto, se puede partir del hecho de que $F(s) = s^N$ para un filtro de orden N .

El filtro de Chebyshev inverso se consigue con una transformación sencilla. Se parte de la expresión del parámetro de reflexión y se intercambia por el de transmisión y se le aplica la transformación $\omega \rightarrow 1/\omega$ que hace que la banda de paso ($|\omega| < 1$)

¹Algunas veces a estos filtros se les denomina Chebyshev tipo II y a los clásicos filtros de Chebyshev se les denomina Chebyshev tipo I.

se convierta en la banda atenuada y viceversa. Es decir:

$$|S_{21}(j\omega)|_{\text{Inv}}^2 = |S_{11}(j/\omega)|_{\text{Cheb}}^2 = \frac{\epsilon^2 T_N^2(1/\omega)}{1 + \epsilon^2 T_N^2(1/\omega)} \quad (5.1)$$

Donde $|S_{21}(j\omega)|_{\text{Inv}}^2$ es el parámetro de transmisión (al cuadrado) del filtro inverso de Chebyshev y $|S_{11}(j/\omega)|_{\text{Cheb}}^2$ es el parámetro de reflexión del filtro de Chebyshev (al cuadrado) del mismo orden. El proceso se observa gráficamente en la figura 5.1.

Con la notación de polinomios F , P y E se tiene que es muy fácil conseguir la expresión para cada uno de los polinomios:

- $F(s) = s^N$ como ya se ha observado.
- $P(s)$ se obtiene convirtiendo los ceros de reflexión de un polinomio de Chebyshev clásico en ceros de transmisión con la transformación $s \rightarrow 1/s$.
- A partir de los polinomios anteriores ya se puede obtener $E(s)$ aplicando unitariedad pero esto no es necesario ya que si sabemos la posición de los polos del filtro de Chebyshev clásico se puede obtener la del filtro inverso de Chebyshev simplemente invirtiendo su valor.

Se observa que la transformación hace que el límite de la banda $\omega = 1$ quede de la misma forma y por tanto a $\omega = 1$ sucede que el filtro tiene la atenuación/transmisión prescrita que será

$$|S_{21}(j)|^2 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \quad (5.2)$$

y de esta ecuación se puede despejar el valor de ϵ requerido para que se consiga un rizado constante en la banda de atenuación.

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{A_{\min}/10} - 1}} \quad (5.3)$$

donde A_{\min} es la atenuación mínima en la banda de paso.

5.2.1 Construcción de $P(s)$

Partiendo de la ecuación (5.1), el numerador contiene a los ceros de transmisión del cuadrado de S_{21} . También está claro que el número de ceros de transmisión es N (el máximo posible). Por tanto se tiene que

$$T_N(1/\omega_k) = 0 \Rightarrow \omega_k = \sec \frac{\pi(2k-1)}{2N}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.4)$$

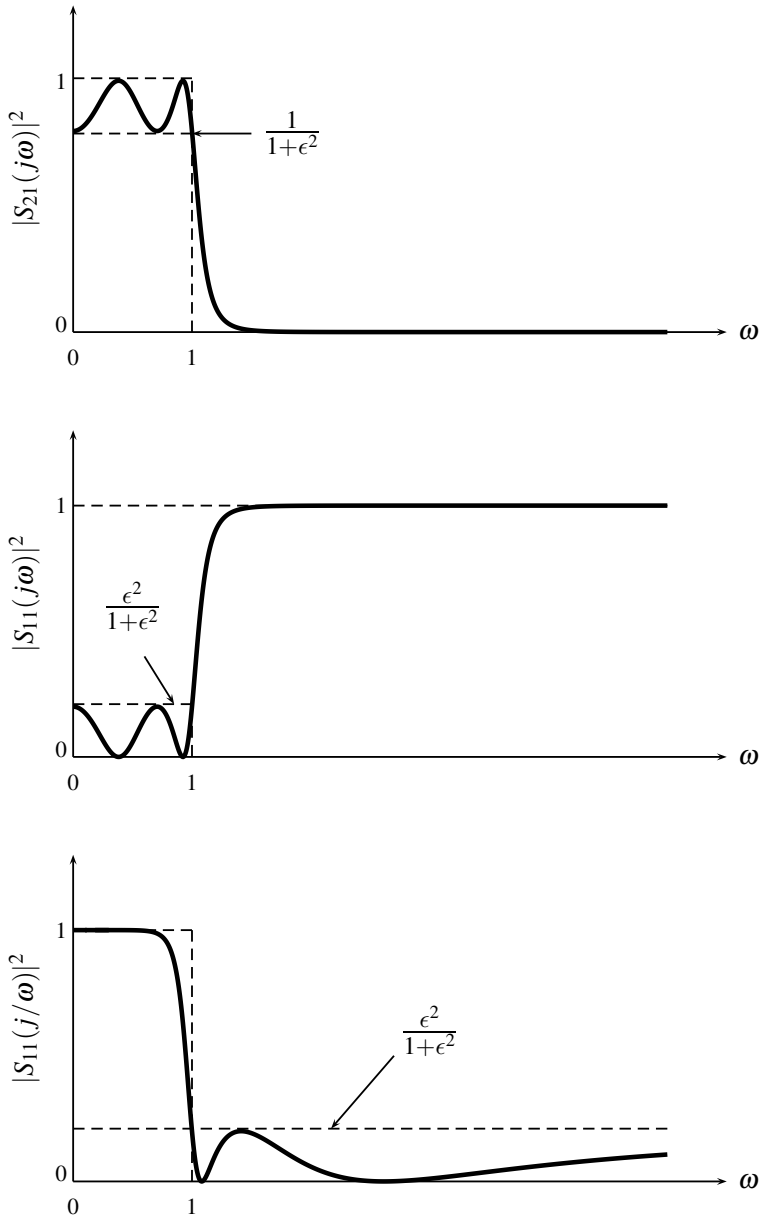


Figura 5.1: Construcción del parámetro de transmisión del filtro de Chebyshev inverso a partir del parámetro de transmisión del filtro de Chebyshev (arriba). Se calcula el parámetro de reflexión (centro) y se realiza el cambio de variable (abajo).

y por tanto en la variable s , los ceros de $P(s)$ son

$$s_k = j \sec \frac{\pi(2k-1)}{2N}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.5)$$

Desgraciadamente, si el orden es impar siempre hay un $k = (N+1)/2$ que cumple $s_k \rightarrow j\infty$ como sucedía en el filtro de Chebyshev clásico, donde siempre había un cero de reflexión en el origen si el orden era impar. Esto implica que el cero de transmisión estará en el infinito y por tanto habrá que eliminarlo de la lista de ceros consiguiendo un polinomio $P(s)$ de orden $N-1$.

Finalmente, se construye $P(s)$ como

$$P(s) = \begin{cases} j \prod_{k=1}^N (s - s_k), & N \text{ par;} \\ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{N+1}{2}}}^N (s - s_k), & N \text{ impar.} \end{cases} \quad (5.6)$$

La consecuencia de todo esto es que, si el orden es par, el filtro es completamente canónico ya que el numero de ceros de transmisión iguala al orden del filtro y por tanto $N - n_{tz} = 0$ provocando que $P(s)$ esté multiplicado por j como aparece en (5.6) y además habrá que calcular el factor ε_R como se explicó en la sección 2.7.

5.2.2 Construcción de $E(s)$

Una vez conocidos $P(s)$ y $F(s)$, el polinomio $E(s)$ se puede obtener aplicando la condición de unitariedad con los mismos problemas ya mencionados anteriormente ya que hay que encontrar raíces de polinomios de grado $2N$. Sin embargo, también se puede obtener a partir de los polos de un filtro de Chebyshev clásico simplemente invirtiéndolos ya que los denominadores de (5.1) y (4.22b) son formalmente iguales salvo por la variable que pasa de ser ω a ser $1/\omega$. El único problema radica en la extensión de lo que sucede con la variable ω a lo que debe suceder con la variable s .

Para un filtro de Chebyshev inverso de orden N , el polinomio $E(s)$ se puede escribir como

$$E(s) = \prod_{k=1}^N (s - s_k) \quad (5.7)$$

donde las raíces s_k son los polos del filtro. Todos deben estar en el semiplano izquierdo del plano complejo por estabilidad. Si en la transformación $1/\omega$ sustituimos $\omega = s/j$ como es habitual, se pierde la característica de estabilidad y por ello

no es una transformación válida. Como alternativa se pueden utilizar las transformaciones $1/s$ o $1/s^*$. Las dos son equivalentes si el eje real es un eje de simetría para los polos, lo cual es cierto si el filtro es simétrico (y el filtro de Chebyshev inverso lo es). Partiendo de un polo cualquiera de un filtro de Chebyshev clásico s_k ,

$$s_k = |s_k|e^{j\angle s_k} = |s_k|e^{j\phi_k} \quad (5.8)$$

el polo correspondiente del filtro de Chebyshev inverso s_k^I quedaría

$$s_k^I = \frac{1}{s_k} = \frac{1}{|s_k|}e^{-j\phi_k} \quad (5.9)$$

y por tanto, aunque el módulo simplemente se ha invertido, la fase ha cambiado de signo. Por ello, los polos que estaban en el segundo cuadrante pasan a estar en el tercer cuadrante y viceversa. Si hay simetría del diagrama de polos-ceros respecto al eje real esto es irrelevante. Para hacer el proceso de comprensión más simple, la transformación utilizada suele ser $1/s^*$ ya que transforma un polo s_k en un complejo que está en la misma línea radial (misma fase) ya que $1/s^*$ es una transformación que mapea el interior del círculo unidad en el plano complejo al exterior del mencionado círculo y a cada punto le asigna su recíproco respecto a la circunferencia unidad que actúa como imagen de si mismo. Esta transformación, al no cambiar la fase de ningún polo, preserva la estabilidad del filtro.

En definitiva, hallar los polos del filtro de Chebyshev inverso es tan sencillo como invertir y conjugar los polos de un filtro de Chebyshev clásico determinados por la fórmula (4.36). Si se calculan los polos en forma polar, tan solo es necesario invertir el módulo y mantener la fase.

5.2.3 Valores de ε y ε_R

Debido a que el filtro es completamente canónico si el orden N es par y no lo sería si N fuera impar, se hace necesario tratar los casos por separado.

Caso impar

El filtro no es completamente canónico y por lo tanto $\varepsilon_R = 1$.

Con el dato de la atenuación mínima en la banda atenuada A_{\min} que se da exactamente para el punto $\omega = 1$ se obtiene que

$$A_{\min} = -20 \log_{10} |S_{21}(s=j)| = 10 \log_{10} \frac{1}{|S_{21}(j)|^2} \quad (5.10)$$

y despejando

$$\frac{1}{|S_{21}(j)|^2} = 10^{A_{\min}/10} \quad (5.11)$$

Aplicando unitariedad en $s = j$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 |S_{11}(j)|^2 + |S_{21}(j)|^2 &= 1 \\
 \left| \frac{S_{11}(j)}{S_{21}(j)} \right|^2 + 1 &= \frac{1}{|S_{21}|^2} \\
 \varepsilon^2 \left| \frac{F(j)}{P(j)} \right|^2 + 1 &= 10^{A_{\min}/10} \\
 \varepsilon &= \sqrt{10^{A_{\min}/10} - 1} \left| \frac{P(j)}{F(j)} \right| \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

Finalmente, sabiendo que $|F(j)| = 1$ y aplicando (5.3) se obtiene la expresión compacta

$$\varepsilon = \frac{1}{\epsilon} |P(j)| \quad (5.13)$$

Caso par

Siguiendo los pasos del apartado anterior, pero esta vez considerando $\varepsilon_R \neq 1$, se obtiene

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} = \frac{1}{\epsilon} |P(j)| \quad (5.14)$$

y, aplicando la conocida relación (2.36), es inmediato que

$$\varepsilon = \sqrt{\left| \frac{P(j)}{\epsilon} \right|^2 + 1} \quad (5.15)$$

EJEMPLO 5.1 Determinar la expresión de los parámetros $S_{11}(s)$ y $S_{21}(s)$ para un filtro de Chebyshev inverso de orden $N = 6$ que produzca una atenuación mínima en la banda atenuada de $A_{\min} = 50$ dB y dibujar la respuesta.

Solución: Es inmediato sin cálculos previos que $F(s) = s^6$. También se pueden calcular los ceros de transmisión de forma inmediata usando (5.5):

$$\begin{aligned}
 z_1 &= j \sec \frac{\pi}{12} = j1.0353 \\
 z_2 &= j \sec \frac{\pi}{4} = j1.4142 \\
 z_3 &= j \sec \frac{5\pi}{12} = j3.8637 \\
 z_4 &= j \sec \frac{7\pi}{12} = -j3.8637 \\
 z_5 &= j \sec \frac{3\pi}{4} = -j1.4142 \\
 z_6 &= j \sec \frac{11\pi}{12} = -j1.0353
 \end{aligned}$$

y por tanto, el polinomio $P(s)$ ya se puede construir a partir de sus raíces:

$$P(s) = j(s^6 + 18s^4 + 48s^2 + 32)$$

donde la j es necesaria ya que $N - n_{tz} = 0$. Además, el filtro será completamente canónico y todos los polinomios tendrán orden N .

El polinomio $E(s)$ requiere hallar previamente los polos del filtro de Chebyshev clásico (para un $RL = A_{\min}$ y mismo N) y después transformarlos:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.3350 + j1.5798 \Rightarrow \frac{1}{s_1^*} = -0.1284 + j0.6057 \\ s_2 &= -0.9152 + j1.1565 \Rightarrow \frac{1}{s_2^*} = -0.4208 + j0.5317 \\ s_3 &= -1.2501 + j0.4233 \Rightarrow \frac{1}{s_3^*} = -0.7176 + j0.2430 \\ s_4 &= -1.2501 - j0.4233 \Rightarrow \frac{1}{s_4^*} = -0.7176 - j0.2430 \\ s_5 &= -0.9152 - j1.1565 \Rightarrow \frac{1}{s_5^*} = -0.4208 - j0.5317 \\ s_6 &= -0.3350 - j1.5798 \Rightarrow \frac{1}{s_6^*} = -0.1284 - j0.6057 \end{aligned}$$

El polinomio $E(s)$ se calcula a partir de las anteriores raíces

$$E(s) = s^6 + 2.5336s^5 + 3.2098s^4 + 2.5917s^3 + 1.4170s^2 + 0.5060s + 0.1012$$

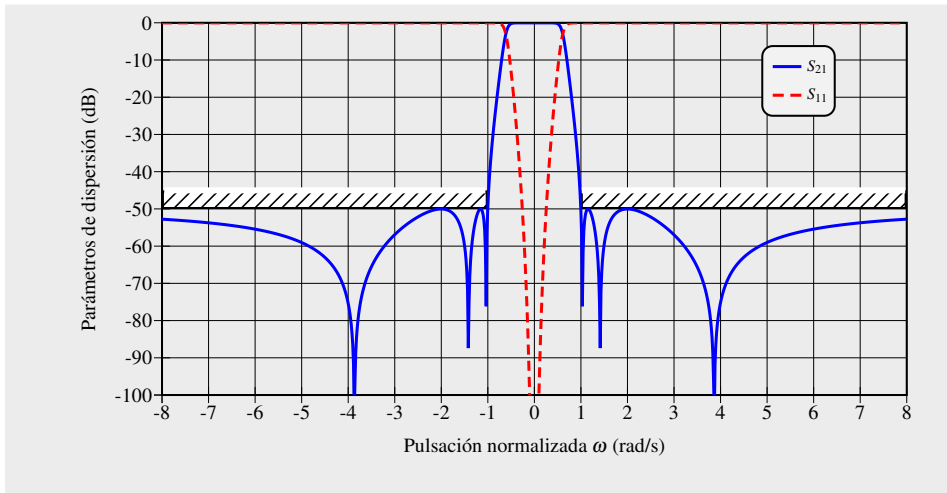
El parámetro auxiliar ϵ se calcula como

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^5 - 1}} = 0.0032$$

y aplicando (5.15) y (2.36) se obtiene que

$$\begin{aligned} \epsilon &= 316.2278 \\ \epsilon_R &= 1.000005 \end{aligned}$$

El filtro, por lo tanto, queda completamente definido y los parámetros de dispersión se pueden representar gráficamente.



5.3 Filtros elípticos

En esta sección se van a tratar los filtros elípticos, también llamados filtros de Cauer². Su nombre proviene de la utilización de las funciones elípticas que aparecen en la definición de su función de transferencia. La teoría de funciones elípticas aún a una gran belleza como reza la cita de este capítulo y, al mismo tiempo, una gran complejidad. Esta complejidad ha relegado a la teoría de filtros elípticos fuera de cualquier plan de estudios universitario en la actualidad. Cuando Cauer usó esa teoría para crear la función de transferencia más selectiva y de menor orden simultáneamente hizo que muchos desempolvaren la teoría de funciones elípticas creada a lo largo del siglo XIX.

En esta sección se tratarán de exponer, de la manera más clara posible, unas nociones básicas de las funciones elípticas para poder comprender mejor el funcionamiento de dichos filtros.

²Wilhelm Adolf Eduard Cauer (1900-1945) fue un matemático y científico alemán. Será recordado por su trabajo en análisis y síntesis de filtros eléctricos. Su trabajo supuso el inicio del campo de la síntesis de redes. Cauer usó su teoría de síntesis de filtros para resolver un problema de diseño para la industria telefónica alemana. Su nuevo diseño alcanzó las especificaciones con una bobina menos que los diseños hechos hasta el momento. El mundo conoció su método no a través de una publicación académica sino a través de una revelación de patente. Trabajó para una empresa alemana subsidiaria de la Bell Telephone Company, esto le llevó a contactar con los ingenieros americanos líderes en el campo de diseño de filtros. Cauer, en una propuesta de vender sus patentes, dio unas conferencias a las que asistieron los ingenieros de la Bell. El mismo Darlington, a raíz de esto, buscó y encontró el artículo original de Jacobi de 1829 escrito en latín sobre funciones elípticas en la biblioteca de Nueva York (Darlington 1999).

5.3.1 La máscara

Los filtros elípticos tienen como finalidad cumplir las especificaciones que se puedan dar simultáneamente en la banda de paso y en la banda atenuada. Recuérdese que los filtros de Chebyshev tienen un rizado constante en la banda de paso pero su función de transferencia es monótonamente decreciente en la banda atenuada (todos los ceros de transmisión están en $\omega = \infty$). Los filtros de Chebyshev inversos tienen un rizado constante en la banda atenuada sin embargo son maximalmente planos en la banda de paso (todos los ceros de reflexión están en $\omega = 0$). Los filtros elípticos pretenden, con un rizado prefijado en la banda de paso y en la banda atenuada, tener una banda de transición lo menor posible. De esta forma, la selectividad se incrementará manteniendo el orden del filtro.

El objetivo del diseño de un filtro elíptico es cumplir, para un orden dado N , con:

- Un rizado máximo en la banda de paso R_p para S_{21} relacionado directamente con las pérdidas de retorno RL .
- Un rizado máximo permitido para S_{21} en la banda atenuada o, lo que es equivalente, una atenuación mínima A_s en la banda atenuada.

Cuando las pérdidas de retorno RL son mínimas las pérdidas de inserción IL son máximas y valen exactamente R_p en un filtro sin pérdidas. Es por ello que las conocidas definiciones

$$\begin{aligned} RL &= -20 \log_{10} |S_{11}| \\ IL &= -20 \log_{10} |S_{21}| \end{aligned}$$

se pueden combinar en la misma ecuación

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 &= 1 \\ 10^{-RL/10} + 10^{-IL/10} &= 1 \end{aligned}$$

y, finalmente, despejar las pérdidas de retorno en función de las de inserción (rizado) o viceversa

$$RL = -10 \log_{10} \left(1 - 10^{-R_p/10} \right) \quad (5.16a)$$

$$R_p = -10 \log_{10} \left(1 - 10^{-RL/10} \right) \quad (5.16b)$$

Por todo ello, es una práctica común establecer una máscara de especificaciones en ambas bandas. Esto ya se ha hecho en los diferentes ejemplos de filtros de

Butterworth (ejemplo 4.1) y Chebyshev (ejemplo 4.3) donde se especificaba un valor máximo para S_{11} en la banda de paso y una atenuación mínima en la banda atenuada.

EJEMPLO 5.2 Sea una máscara que marque las especificaciones de un filtro elíptico de orden $N = 5$ en unidades lineales. En la banda de paso el rizado permitido es de $r_p = 0.1$ (atenuación de un 10 % del máximo de señal) y en la banda atenuada la atenuación mínima es de $a_s = 0.9$ (atenuación de un 90 % de la señal). Determinar las especificaciones en unidades logarítmicas y dibujar la máscara en escala lineal.

Solución: El rizado permitido en la banda de paso hace que S_{21} pueda oscilar entre 0.9 y 1. Por tanto, se tiene que

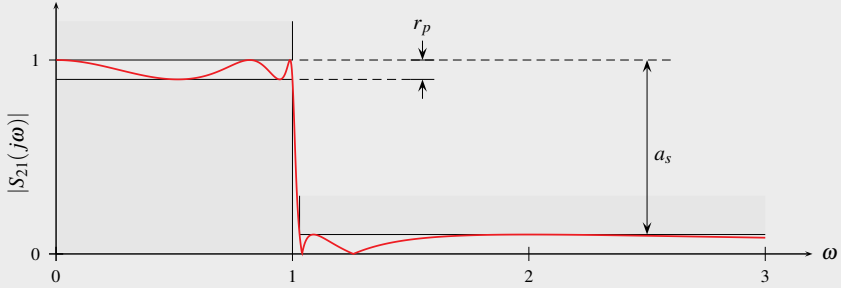
$$Rp = -20 \log_{10} |S_{21}| = -20 \log_{10} (1 - r_p) = 0.9151 \text{ dB}$$

Las pérdidas de retorno se calculan como

$$RL = -10 \log_{10} (1 - 10^{-Rp/10}) = 7.21 \text{ dB}$$

Si el filtro permite que como máximo $|S_{21}| = 0.1$ en la banda atenuada se tiene que la atenuación mínima será de

$$A_s = -20 \log_{10} |S_{21}| = -20 \log_{10} (1 - a_s) = 20 \text{ dB}$$



Finalmente, cabe definir la banda de transición como el margen de frecuencias que hay entre las especificaciones en el límite de la banda de paso y las especificaciones en el límite de la banda atenuada. En un filtro normalizado como el de la figura del ejemplo 5.2, la banda de transición se extiende desde $\omega = 1$ hasta la frecuencia donde $|S_{21}|$ cruza la especificación de $A_s = 20 \text{ dB}$. Como se observa, la banda de transición del filtro elíptico es muy reducida. De hecho, es la más reducida posible. El filtro de Caer consigue cumplir unas especificaciones dadas con el menor orden N posible. Esto era previsible ya que, de los filtros todo-polos, el de

Chebyshev (rizado constante en la banda de paso) era el más selectivo. Para los filtros con ceros de transmisión, conseguir rizado constante en la banda de paso y en la atenuada provoca que la selectividad del filtro sea la máxima posible para un orden N fijo.

5.3.2 Condiciones de la función característica

Según la definición de función característica dada en la sección 2.8, tenemos que:

$$K(s) = \frac{\varepsilon F(s)}{\varepsilon_R P(s)} \quad (5.17)$$

y, por tanto, se puede expresar la función de transferencia como

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} \quad (5.18)$$

En la banda de paso de un filtro de Chebyshev y de Cauer el rizado fuerza a que $|K(j\omega)| \leq \epsilon$.

En la banda atenuada tenemos que $|K(j\omega)| \geq K_{\min}$ y por lo tanto en términos de atenuación se cumple que

$$A_{\max} = 10 \log_{10} (1 + \epsilon^2) \quad |\omega| \leq 1 \quad (5.19a)$$

$$A_{\min} = 10 \log_{10} (1 + K_{\min}^2) \quad |\omega| \geq \omega_s \quad (5.19b)$$

donde ω_s es la pulsación donde empieza la especificación de la banda atenuada.

Hay infinidad de soluciones, pero buscamos aquella con rizado constante en ambas bandas. Tal respuesta proporciona el crecimiento más pronunciado de la atenuación y conducirá a una respuesta que involucrará funciones elípticas (también conocida como respuesta elíptica). Se denota R_N a la función racional³ de orden N y parámetro L

$$|K(j\omega)|^2 = \epsilon^2 R_N^2(\omega, L) \Rightarrow |R_N(\omega, L)| = \frac{\epsilon}{\epsilon \varepsilon_R} \left| \frac{F(j\omega)}{P(j\omega)} \right| \quad (5.20)$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. R_N es par si N es par.
2. R_N tiene sus ceros en el intervalo $-1 < \omega < 1$ y todos sus polos fuera de ese mismo intervalo. Recuérdese que los ceros de $F(s)$ son los ceros de reflexión y que los ceros de $P(s)$ son los ceros de transmisión.

³En algunas referencias a R_N se la denomina función racional de Chebyshev.

3. $R_N \in [-1, 1] \quad \forall \omega \in]-1, 1[$. Es decir, R_N se comporta como un polinomio de Chebyshev aunque es una función racional.
4. $R_N(1, L) = 1$ y en general $R_N(\pm 1, L) = (\pm 1)^N$.
5. $1/R_N$ oscila entre $\pm 1/L$ para pulsaciones superiores al límite inferior de la banda atenuada $\omega > \omega_s$.
6. La pendiente de R_N es lo mayor posible (mayor que la de un polinomio de Chebyshev del mismo orden).

Como se ve en las condiciones anteriores, en la banda de paso la función R_N está acotada entre -1 y 1 y en la banda atenuada $1/R_N$ está acotada entre $-1/L$ y $1/L$. No es cierto que R_N esté acotada entre $-L$ y L porque los ceros de $P(s)$ hacen que R_N no esté acotada en la banda atenuada (atenuación infinita en los ceros de transmisión).

El parámetro L se relaciona con la atenuación mínima requerida en la banda atenuada

$$A_{\min} = 10 \log_{10} (1 + \epsilon^2 L^2) \quad (5.21)$$

y usando las ecuaciones (5.19) se puede deducir el valor de L como

$$L^2 = \frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1} = \frac{K_{\min}^2}{\epsilon^2} \quad (5.22)$$

Como ejemplo de una función R_N se ha dibujado en la figura 5.2 la de orden $N = 5$ para un valor genérico de L . La forma de la expresión es simple porque si es de orden $N = 5$ significa que tiene 5 ceros de reflexión repartidos de forma simétrica en el eje de pulsaciones. Uno en el origen $\omega = 0$ y 4 ceros en el intervalo $] -1, 1[$ repartidos simétricamente ($\pm \omega_{z1}$ y $\pm \omega_{z2}$). Respecto a los ceros de transmisión (polos de R_5) no puede haber 5 para no romper la simetría. Por tanto, hay 4 (2 en frecuencias positivas y 2 en negativas $\pm \omega_{p1}$ y $\pm \omega_{p2}$). La función en la variable s tendría el siguiente aspecto:

$$R_5(s, L) = C_5 s \frac{(s^2 + \omega_{z1}^2)(s^2 + \omega_{z2}^2)}{(s^2 + \omega_{p1}^2)(s^2 + \omega_{p2}^2)} \quad (5.23)$$

donde $C_5 = \epsilon/(\epsilon \epsilon_R)$ es una constante que depende de L , que a su vez depende de los límites del rizado en la banda de paso y en la banda atenuada.

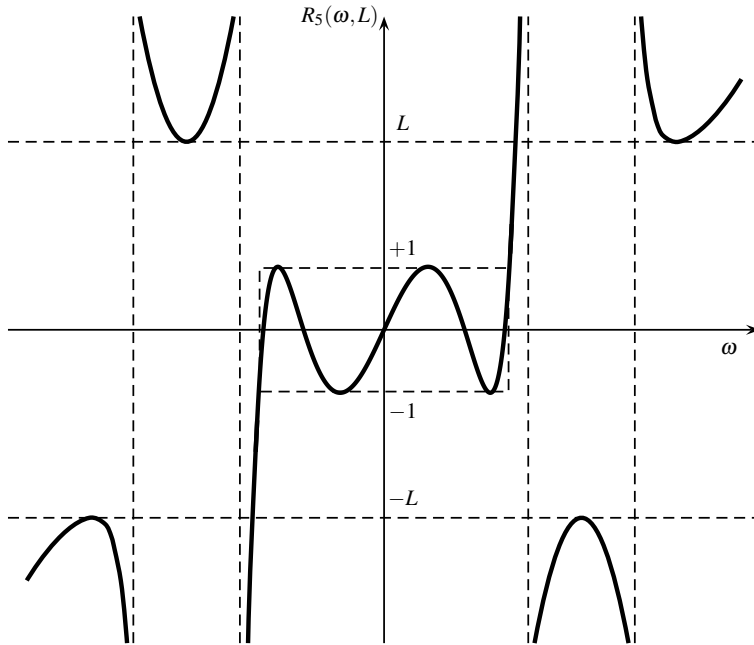


Figura 5.2: Representación de $R_5(\omega, L)$. El rectángulo central es $[-1, +1] \times [-1, +1]$.

En general, la expresión de R_N es de la forma

$$R_N(s, L) = \begin{cases} C_N \frac{\prod_{i=1}^N (s - s_{zi})}{\prod_{i=1}^N (s - s_{pi})} & \forall N \text{ par} \\ C_N s \frac{\prod_{i=1}^{N-1} (s - s_{zi})}{\prod_{i=1}^{N-1} (s - s_{pi})} & \forall N \text{ impar} \end{cases} \quad (5.24)$$

donde C_N es una constante que depende de L , los s_{zi} son los ceros de reflexión (ceros de $F(s)$) y los s_{pi} son los polos de R_N (ceros de $P(s)$).

La función racional $R_N(\omega, L)$ posee la importante propiedad

$$R_N(\omega, L) = \frac{L}{R_N(\omega_s/\omega, L)} \quad (5.25)$$

donde ω_s es la primera frecuencia de la banda atenuada donde la atenuación alcanza el valor A_{\min} (límite inferior de la banda atenuada).

Para comprender el porqué esta propiedad es tan importante, recuérdese que

$$|R_N(\omega, L)| \leq 1 \quad \forall |\omega| \leq 1 \quad (5.26)$$

pero usando (5.25) implica que

$$|R_N(\omega, L)| \geq L \quad \forall |\omega| > \omega_s \quad (5.27)$$

Por lo tanto, si R_N es descrita por (5.25) entonces un rizado constante en la banda de paso produce de forma automática un rizado constante en la banda atenuada.

La ecuación (5.25) tiene unas implicaciones importantes:

- Si $\omega = \omega_p$ es un polo de $R_N(\omega, L)$ entonces $\omega = \omega_s/\omega_p$ es un cero.
- Ya que R_N es una función par o impar, si ω_p es un polo entonces $-\omega_p$ también lo es.

Por lo tanto, todos los ceros y los polos de R_N están relacionados a través de la expresión

$$\omega_{zi}\omega_{pi} = \omega_s \quad (5.28)$$

También las bandas de paso y atenuada están relacionadas por

$$\omega_m^2 = \omega_p \omega_s \quad (5.29)$$

donde ω_m es una pulsación correspondiente a la banda de transición, ω_s es el límite de la banda atenuada y ω_p es el límite de la banda de paso que para un filtro normalizado (caso que nos ocupa) tenemos que $\omega_p = 1$. Por tanto $\omega_m = \sqrt{\omega_s}$.

La consecuencia directa de esta propiedad de reciprocidad es que los polos de R_N se pueden obtener a partir de los ceros y viceversa. Equivalentemente, los ceros de reflexión y los ceros de transmisión de un filtro elíptico están relacionados.

5.3.3 Funciones elípticas

El problema de obtener la expresión de un filtro elíptico se reduce ahora a la determinación de una función racional $R_N(\omega, L)$ que posea las propiedades mencionadas en la sección anterior. La forma habitual es a partir de una ecuación diferencial.⁴ Este es el procedimiento seguido aquí de forma similar a como Cauer lo ideó (Daniels 1974).

⁴Aunque no es la forma habitual en la literatura sobre filtros, sí lo es en la literatura matemática. Los polinomios de Chebyshev se pueden obtener a partir de la ecuación diferencial asociada $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ cuya solución es $T_n(x)$. De la misma forma, Cauer intentó generar una ecuación diferencial cuya solución fuesen las funciones racionales R_N .

Viendo las curvas de R_N para algunos órdenes como la mostrada en la figura 5.2 se pueden hacer algunas generalizaciones. Todos los puntos en $|\omega| < 1$ y $|\omega| > \omega_s$ donde $|R_N(\omega, L)| = 1$ y $|R_N(\omega, L)| = L$ respectivamente deben representar un máximo o un mínimo de R_N por lo tanto:

$$\left. \frac{dR_N(\omega, L)}{d\omega} \right|_{|R_N(\omega, L)|=1} = 0 \quad \text{excepto } |\omega| = 1 \quad (5.30)$$

$$\left. \frac{dR_N(\omega, L)}{d\omega} \right|_{|R_N(\omega, L)|=L} = 0 \quad \text{excepto } |\omega| = \omega_s \quad (5.31)$$

por lo tanto, $dR_N/d\omega$ tiene $N - 1$ ceros que suceden en la banda de paso cuando $R_N = \pm 1$. La derivada tiene $N - 1$ ceros también en la banda atenuada donde $R_N = \pm L$ (si N es par uno de esos ceros sucede en $\omega = \infty$). Por tanto:

1. $\left(\frac{dR_N}{d\omega}\right)^2$ tiene $4(N - 1)$ ceros (los ceros de segundo orden se cuentan dos veces). Son de segundo orden y ocurren cuando $R_N = \pm 1, \pm L$ (sin incluir $\omega = \pm 1, \pm \omega_s$). Ahora considérese la función $R_N + 1$, esta función tiene N ceros y ocurren en los mínimos de la banda de paso de R_N . De la misma forma $R_N - 1$ tiene N ceros que suceden en los máximos de la banda de paso de R_N . También $R_N + L$ y $R_N - L$ tienen N ceros.
2. $(R_N + 1)(R_N - 1)(R_N + L)(R_N - L) = (R_N^2 - 1)(R_N^2 - L^2)$ tiene $4N$ ceros. Los ceros suceden cuando $R_N = \pm 1, \pm L$. Los ceros en $\omega = \pm 1, \pm \omega_s$ son de primer orden y los demás son de segundo orden.

Combinando las condiciones 1 y 2 vemos que $\left(\frac{dR_N}{d\omega}\right)^2$ tiene los mismos ceros que la expresión

$$\frac{(R_N^2 - 1)(R_N^2 - L^2)}{(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega_s^2)}$$

y por lo tanto

$$\left(\frac{dR_N}{d\omega}\right)^2 = M^2 \frac{(R_N^2 - 1)(R_N^2 - L^2)}{(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega_s^2)} \quad (5.32)$$

o también

$$\frac{\pm C dR_N}{\sqrt{(1 - R_N^2)(L^2 - R_N^2)}} = \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2)(\omega_s^2 - \omega^2)}} \quad (5.33)$$

donde C y M son constantes. La solución de (5.33) involucra integrales elípticas y de ahí el nombre de los filtros (elípticos o de Cauer). Esta solución ha sido expresada de diferentes formas a lo largo de los años, unas aproximadas y otras exactas y con diferentes expresiones para una mayor compacidad o comprensión. Es por ello, que antes de dar su solución (ver apéndice D) se impone un recorrido por las nociones básicas de las funciones elípticas (Orchard y Willson 1997).

Periodicidad

Las funciones elípticas se distinguen como funciones doblemente periódicas de variable compleja. Una función simplemente periódica de periodo p cumple que

$$f(z + p) = f(z) \quad \forall z \quad (5.34a)$$

$$f(z + mp) = f(z) \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (5.34b)$$

La función elemental e^z es simplemente periódica de periodo imaginario $p = j2\pi$. Este periodo imaginario es compartido por $\sinh z$ y $\cosh z$ que son meras combinaciones lineales de e^z y e^{-z} . Cambiando z por jz en la función exponencial se convierte en una función de periodo real 2π , el cual es compartido por las funciones circulares $\sin z$ y $\cos z$.

El plano complejo puede representarse dividido por bandas paralelas al eje imaginario jy para funciones circulares $\sin z$ y $\cos z$. Cada banda tiene un ancho de 2π . Para las funciones hiperbólicas $\sinh z$ y $\cosh z$ las bandas son paralelas al eje x y de la misma anchura. Cualquier punto z dentro de una banda tendrá un punto congruente en cada otra banda $z + mp$ tal que la función periódica tenga exactamente el mismo valor.

Si hay funciones simplemente periódicas puede pensarse que podrían construirse funciones con 2 o más periodos distintos. Hay que decir que se puede demostrar que no hay funciones con 3 o más periodos⁵ y que si una función tiene 2 periodos la relación entre ambos no puede ser real. Con esto, se puede construir una función doblemente periódica con periodos p y q de manera que

$$f(z + mp + nq) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (5.35)$$

La doble periodicidad asocia con cada valor de z una malla de puntos $z + mp + nq$ en el plano complejo en la cual los valores de la función son idénticos. Se puede visualizar el plano complejo como dividido en una cuadrícula⁶ de lados p y q .

Las características fundamentales de $f(z)$ dentro de cada paralelogramo que forma la cuadrícula en la que se divide z son:

- $f(z)$ debe tener al menos una singularidad. Si no tuviera ninguna por el teorema de Liouville⁷ sería una constante.

⁵En 1835 Jacobi demostró que las únicas funciones meromorfas con 3 periodos son constantes (Armitage y Eberlein 2006).

⁶Los puntos de la malla $z + mp + nq$ pueden ser descritos igualmente como $z + (m-n)p + (p+q)n$ o como $z + m(p+q) + (n+m)q$. Queda claro que los periodos no son únicos y pueden tomarse como p , q o como $p \pm q$. Esto cambiaría la forma pero no el área de los paralelogramos que forman el periodo.

⁷Es curioso que en 1847 Liouville demostró, usando la teoría de funciones elípticas, exactamente esto: El dominio de una función elíptica no constante no puede ser \mathbb{C} . Fue en realidad Cauchy el que demostró el teorema de Liouville como se conoce hoy en día.

- La integral de $f(z)$ alrededor del contorno de un paralelogramo que forma un periodo debe anularse debido a la periodicidad. Por lo tanto, por el teorema de residuos de Cauchy, la suma de los residuos en todas las singularidades dentro del paralelogramo debe anularse. Eso obliga a que un polo simple no puede tener residuo nulo o no sería un polo. La función elíptica mas simple debe tener un polo doble con residuo cero o dos polos simples con residuos iguales y opuestos.
- La complejidad u orden de una función elíptica se mide por la suma de órdenes de los polos dentro de un paralelogramo. Por tanto, no hay funciones elípticas de orden 1 pero hay dos tipos de orden 2.
- Si $f(z)$ es una función elíptica, también lo es $1/f(z)$ con el mismo orden y periodos. Por tanto, una función elíptica tiene un cero doble o dos ceros en cada paralelogramo.

Una función elíptica de orden 2, con un polo doble de residuo cero por cada paralelogramo fue descrita por primera vez por Weierstrass y lleva su nombre⁸. Su simplicidad hace que su uso en la teoría de funciones elípticas sea muy extendido y puede usarse para construir las funciones elípticas de orden 2 con polos simples. Estas funciones con 2 polos simples por paralelogramo son las funciones Jacobianas que son las que trataremos en la teoría de filtros por ser mucho más útiles. Tienen dos polos simples y dos ceros simples.

Funciones Jacobianas

De la misma forma que hay 6 funciones trigonométricas circulares (seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente), hay 12 funciones elípticas Jacobianas. Así como los periodos del seno y la tangente son 2π y π respectivamente, las funciones elípticas tienen periodos que difieren en un factor de 2. La práctica estándar es usar lo que se llama cuarto de periodo que juega el mismo papel que la cantidad $\pi/2$ para las funciones circulares e hiperbólicas.

El cuarto de periodo se simboliza por K si es real y jK' si es imaginario, que es la periodicidad más comúnmente encontrada en aplicaciones prácticas. Al rectángulo en el primer cuadrante del plano complejo que tiene sus vértices en los puntos $0, K, jK', K + jK'$ se le denomina *rectángulo fundamental* (ver la figura 5.3). Los vértices de este rectángulo se denominan con letras con una sencilla regla mnemotécnica:

- El vértice en el origen se denomina S (de Starting point).
- El vértice diagonalmente opuesto es llamado D (de Diagonal).

⁸Se simboliza por \wp y se denomina función P de Weierstrass o función elíptica de Weierstrass.

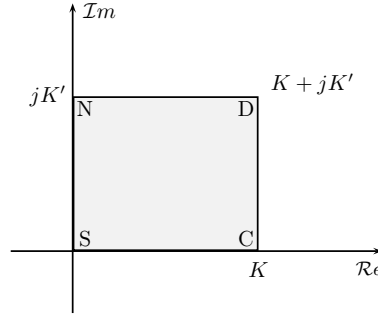


Figura 5.3: El rectángulo fundamental.

- El vértice que coincide con el eje real se llama C (de Coincidente).
- El vértice del lado perpendicular al eje real se denomina N (de Normal).

Cada función Jacobiana tiene un cero en un vértice y un polo en otro vértice del mismo rectángulo fundamental. Las posibles combinaciones⁹ de configuraciones polo-cero distintas son 12 y cada una genera la correspondiente función Jacobiana. Cada función tiene un nombre de dos letras que se obtiene de la letra del vértice que tiene el cero seguida de la letra del vértice que tiene el polo. La función $\text{sn}(z, k)$ por ejemplo tiene un cero en el vértice S y un polo en el vértice N del rectángulo fundamental¹⁰.

La distribución total polo-cero es una extensión del rectángulo fundamental según la expresión $A + 2mK + j2nK'$ con m, n enteros y siendo A el desplazamiento respecto al origen del polo o cero en cuestión. Por ejemplo, la función sn tiene el cero en el origen (vértice S , $A = 0$) y el polo en el vértice N ($A = jK'$) la expresión para los polos y ceros queda como:

$$\begin{aligned} \text{ceros: } z &= A + 2mK + j2nK' = 2mK + j2nK' \\ \text{polos: } z &= A + 2mK + j2nK' = 2mK + j(2n + 1)K' \end{aligned}$$

y su representación en el plano complejo se muestra en la Fig. 5.4.

Alrededor del contorno del rectángulo fundamental hay dos caminos posibles desde el cero al polo de cada función Jacobiana. El que incluye el lado del rectángulo que coincide con el eje real positivo tendrá como imagen de la función todo el eje

⁹Las posibles combinaciones son un cero en cualquier vértice de los 4 posibles y un polo en uno de los 3 vértices restantes. Esto proporciona $4 \times 3 = 12$ posibilidades. Estas funciones son sn , sd , sc , cn , cd , cs , dn , dc , ds , ns , nd y nc .

¹⁰El argumento de las funciones Jacobianas es, en general, un número complejo. También se especifica en la notación el módulo correspondiente, como se verá más adelante. Por ejemplo, la función sn en un complejo z con un módulo k se expresaría como $\text{sn}(z, k)$.

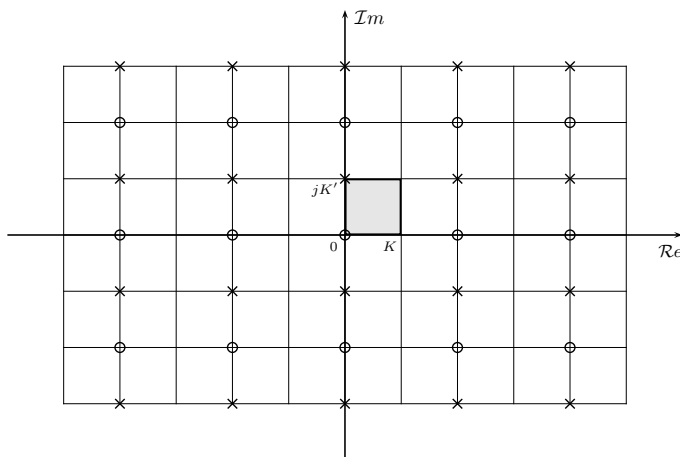


Figura 5.4: Distribución de polos y ceros de la función $\text{sn}(z)$.

positivo real. El otro camino tendrá como imagen todo el eje imaginario positivo o negativo. El valor de la función siempre cambia de real a imaginario o viceversa en la esquina donde hay un polo o un cero. Esto significa que cada función Jacobiana tiene como imagen del rectángulo fundamental el primer o el cuarto cuadrante del plano complejo.

Si visualizamos todo el plano de la variable z cubierto por rectángulos congruentes la rectángulo fundamental de una función elíptica $w = f(z)$ y teniendo esquinas en $mK + jnK'$ como en la figura 5.4, entonces cada rectángulo tendrá como imagen uno de los cuatro cuadrantes del plano w . Cualquier bloque de 2×2 rectángulos que tenga un cero de la función f en su centro tendrá como imagen todo el plano complejo w . Por ejemplo, la función sn de la figura 5.4 tiene un cero en el origen y los cuatro rectángulos que rodean el cero tendrán como imagen el plano w completo, como se muestra en la figura 5.5.

Las funciones trigonométricas circulares podrían especificarse con un periodo determinado como parámetro, pero es más simple, tanto para definir las como para tabularlas, fijar el periodo a 2π o π y dejar que el usuario ajuste el periodo con un factor de escala sobre la variable. De la misma forma, las funciones Jacobianas podrían ponerse en función de sus cuartos de periodo reales K e imaginarios jK' como parámetros independientes. Sin embargo, las propiedades esenciales de las funciones Jacobianas dependen únicamente de la forma del rectángulo fundamental y no de su tamaño absoluto. La práctica común consiste en tener un único parámetro que especifique esta forma del rectángulo fundamental dejando que el tamaño se ajuste automáticamente para satisfacer ciertas restricciones de normalización.

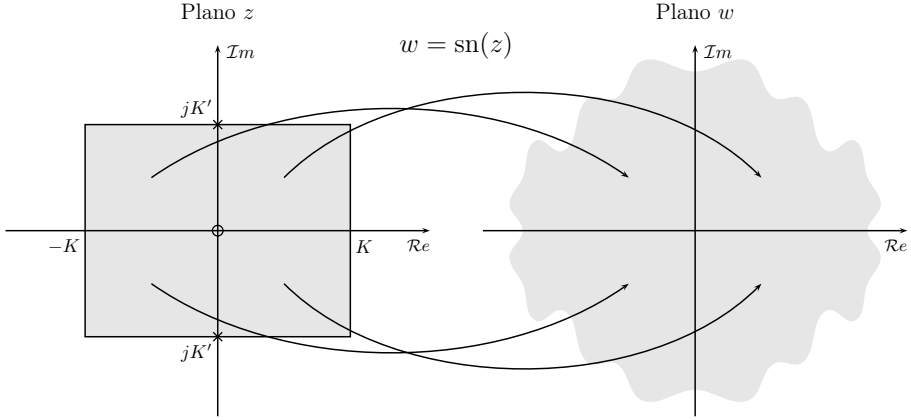


Figura 5.5: Para la función $w = \text{sn}(z)$, los cuatro rectángulos mostrados tienen como imagen el plano w entero. En la figura se muestra que cada rectángulo en el plano z tiene como imagen un cuadrante entero del plano w .

Las funciones elípticas se originaron de invertir una integral que se usaba para calcular la longitud de arco de una elipse (de ahí el nombre de elípticas). Por ejemplo, la función $w = \text{sn}(z)$ se define de forma completa por medio de la integral

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (5.36)$$

El parámetro k en esta integral se denomina *módulo* (no confundir con el módulo de un complejo) y, en el caso práctico que nos ocupa, es un número real que satisface $0 \leq k \leq 1$. Algunas veces se define en su lugar el *ángulo modular* θ como $k = \sin \theta$. Asociado con k hay un *módulo complementario* $k' = \cos \theta$. Normalmente, el módulo de las funciones que se están tratando es conocido y a veces no necesita ser especificado en todas las funciones y, por ello, normalmente se omite, pero si se necesita especificarlo, la notación habitual debe incluirlo, por ejemplo $\text{sn}(z, k)$.

Esta manera de definir las funciones Jacobianas provoca, no solo que la relación entre los cuartos de periodo K'/K esté fijado por un solo parámetro k , sino que además su valor real también lo esté. De esta forma, las 12 funciones elípticas quedan normalizadas de la misma manera simple. En particular, las seis funciones (sc, sd, sn, cs, ds, ns) que tienen un cero o un polo en el origen son funciones impares. Su derivada vale la unidad en el cero y su residuo vale uno si es el polo el que está en el origen. Las funciones restantes (cd, cn, dn, dc, nc, nd) son pares y valen uno en el origen.

Unas propiedades importantes derivadas de la normalización de las funciones Jacobianas son las siguientes:

- Sea $pq(z, k)$ cualquier función Jacobiana donde las letras p y q son cualquiera del conjunto $\{s, c, n, d\}$ entonces

$$pq(z, k) = \frac{1}{qp(z, k)} \quad (5.37)$$

- Sea $pq(z, k)$ cualquier función Jacobiana donde las letras p y q son cualquiera del conjunto $\{s, c, n, d\}$. Sea $r \in \{s, c, n, d\}$ donde $r \neq p, q$ entonces

$$pq(z, k) = \frac{pr(z, k)}{qr(z, k)} \quad (5.38)$$

- Sea $pq(z, k)$ cualquier función Jacobiana donde las letras p y q son cualquiera del conjunto $\{s, c, n, d\}$. Sea $r \in \{s, c, n, d\}$ donde $r \neq p, q$ entonces

$$pq(z, k) = \frac{rq(z, k)}{rp(z, k)} \quad (5.39)$$

Las funciones sn, cn, dn fueron las originales que Jacobi obtuvo en 1827 invirtiendo las integrales elípticas. Las otras nueve fueron introducidas por Glaisher como recíprocas o cocientes de las tres originales.

Si en (5.36) se fija $z = K$ y notamos que $sn K = 1$ (ver apéndice C) tenemos una expresión integral para el cuarto de periodo K

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (5.40)$$

y si se reemplaza k por k' obtenemos una expresión para K' . Algunos valores especiales se pueden deducir de forma inmediata:

- Si $k = 0$ la integral (5.36) se simplifica dando un arcoseno. Por ello, $w = sn(z, 0) = \sin z$. Como $\sin \pi/2 = 1$, vemos que (5.40) proporciona $K(0) = \pi/2$.
- Cuando $k = 1$ la integral (5.36) se simplifica a una arcotangente hiperbólica y se tiene que $w = sn(z, 1) = \tanh z$. En este caso, la integral en (5.36) diverge cuando $w \rightarrow 1$ y por eso de (5.40) se deduce que $K(1) = \infty$
- Reemplazando k por k' en (5.40) se deduce que $K'(1) = \pi/2$ si $k' = 0$ (es decir si $k = 1$) y que $K'(0) = \infty$ cuando $k' = 1$ (y $k = 0$).

Las funciones Jacobianas agrupadas por conjuntos que comparten polos (por ejemplo $\{sn, cn, dn\}$ sería un conjunto de tres funciones que comparten los polos en las

posiciones $2mK + j(2n+1)K'$ satisfacen las igualdades similares a las que satisfacen las funciones trigonométricas. Estas igualdades para el conjunto $\{\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}\}$ son

$$\text{sn}^2 z + \text{cn}^2 z = 1 \quad (5.41a)$$

$$k^2 \text{sn}^2 z + \text{dn}^2 z = 1 \quad (5.41b)$$

las otras igualdades para los conjuntos de tres funciones que comparten polos serían las mismas sustituyendo los nombres correspondientes.

Entre las muchas propiedades de las funciones elípticas se va a considerar ahora el efecto de cambiar el argumento z por jz que recibe el nombre de transformación imaginaria de Jacobi. Esta transformación produce una rotación alrededor del origen de 90° del plano z . Cuando se aplica a las funciones circulares o hiperbólicas, se rotan las bandas que forman los periodos convirtiendo los periodos de las circulares en los periodos de las hiperbólicas y viceversa¹¹.

Para el rectángulo fundamental esta rotación es equivalente a una rotación del plano alrededor de la línea que forma 45° y que pasa por el origen. Esto provoca que en el rectángulo fundamental K y K' cambien sus roles así como k y k' . Sin embargo, los cuartos de periodo no cambian de valor, solo intercambian su posición.

Esta rotación hace que los polos o ceros en las esquinas S y D no se vean alterados pero un polo o un cero en la esquina N cambiará su posición a la esquina C y viceversa. Por tanto, en los nombres de las funciones transformadas se cambiarán la n por la c y la c por la n y el módulo k por k' . Las tres funciones jacobianas fundamentales quedaran como

$$\text{sn}(jz, k) = j \text{sc}(z, k') \quad (5.42a)$$

$$\text{cn}(jz, k) = \text{nc}(z, k') \quad (5.42b)$$

$$\text{dn}(jz, k) = \text{dc}(z, k') \quad (5.42c)$$

Los resultados para las restantes nueve funciones se pueden obtener por cocientes y reciprocos de estas tres. Las seis funciones impares tendrán un coeficiente $\pm j$ como en la función sn. Las seis funciones pares, como cn y dn, no lo tendrán.

Las funciones que más interesan en el diseño de filtros son sn y cd con periodo real $4K$ y periodo imaginario $j2K'$.

Tradicionalmente el seno y coseno elípticos han sido definidos como función inversa de la integral elíptica incompleta derivada de (5.36) a través de un cambio de

¹¹Las identidades $\sin jz = j \sinh z$, $\sinh jz = j \sin z$ son un ejemplo del efecto de esta rotación.

variable

$$\begin{aligned} u(\phi, k) &\triangleq \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Las definiciones a partir de la función u fueron asignadas como sigue:

- **amplitud:** ϕ
- **seno elíptico:** $\text{sn}(u, k) = \sin \phi$
- **coseno elíptico:** $\text{cn}(u, k) = \cos \phi$
- **amplitud delta:** $\text{dn}(u, k) = \frac{d\phi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)}$

así las funciones elípticas eran vistas como funciones de dos variables (ϕ y k). Dibujando las gráficas de estas tres funciones básicas aclara un poco el porqué de los nombres dados a las funciones. En la figura 5.6 se observan tanto las tres funciones Jacobianas básicas como la función derivada $\text{cd}(u, k)$. En realidad, en diseño de filtros solamente se utilizan las funciones $\text{sn}(u, k)$ y $\text{cd}(u, k)$. En los casos límite $k = 0$ y $k = 1$ se obtienen las funciones trigonométricas e hiperbólicas respectivamente:

$$\begin{array}{ll} \text{sn}(u, 0) = \sin u & \text{sn}(u, 1) = \tanh u \\ \text{cn}(u, 0) = \cos u & \text{cn}(u, 1) = \text{sech } u \\ \text{dn}(u, 0) = 1 & \text{dn}(u, 1) = \text{sech } u \\ \text{cd}(u, 0) = \cos u & \text{cd}(u, 1) = 1 \end{array} \quad (5.44)$$

Para $k \leq 0.5$, $\text{sn}(u, k)$ y $\text{cd}(u, k)$ son casi idénticas a las funciones trigonométricas $\sin(u\pi/2)$ y $\cos(u\pi/2)$, esto es, al caso límite $k = 0$. Notamos que $\text{sn}(u, k)$ es una función impar en u y $\text{cd}(u, k)$ una función par. Además, por analogía con la propiedad de que un seno y un coseno, están desplazados un cuarto de periodo $\pi/2$, es decir, $\cos u = \sin(u + \pi/2) = \sin(\pi/2 - u)$, las funciones cd y sn están desplazadas un cuarto de periodo K , satisfaciendo la siguiente identidad válida para todos los valores complejos de u y que puede usarse como definición alternativa de la función cd :

$$\text{cd}(u, k) = \text{sn}(u + K, k) = \text{sn}(K - u, k) \quad (5.45)$$

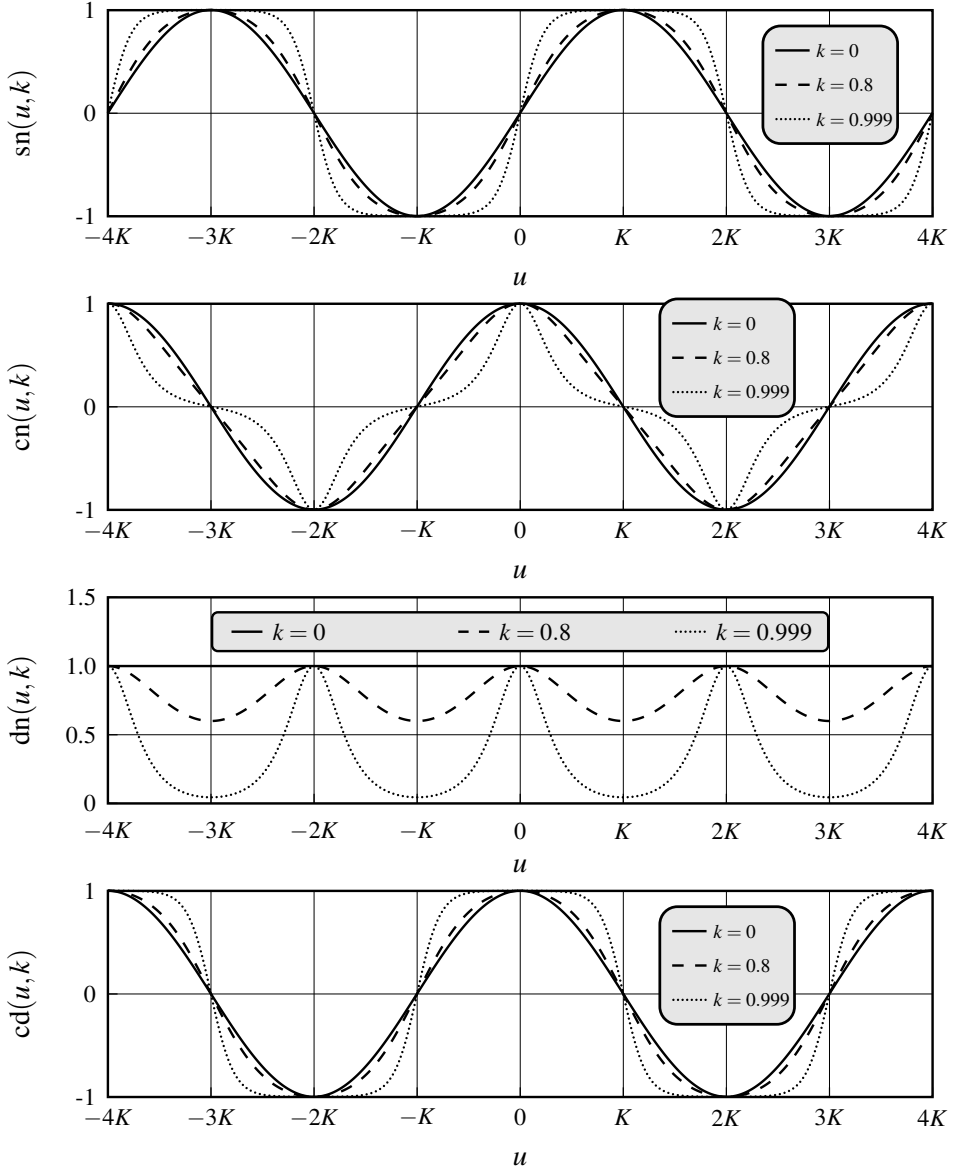


Figura 5.6: Principales funciones elípticas en la teoría de filtros. Las tres primeras (sn , cn , dn) son las funciones Jacobianas de las que se derivan el resto. La cuarta (cd) es la función derivada de las anteriores relacionada directamente con R_N . Se han representado en el rango real $[-4K, 4K]$ donde $K(k)$ es el cuarto de periodo dado por la integral elíptica completa para tres valores diferentes del parámetro k .

La Transformación de Landen

Vale la pena observar un par de propiedades respecto a los límites de las funciones Jacobianas que se pueden extraer fácilmente de (5.44)

- Caso extremo $k = 0$:

$$\begin{aligned} k &= 0 \\ k' &= 1 \\ K &= \frac{\pi}{2} \\ K' &= \infty \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{K'}{K} &= \infty \end{aligned}$$

En este caso, las funciones Jacobianas y sus rectángulos periódicos degenerarán en funciones circulares y sus periodos a bandas.

- Caso extremo $k = 1$

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ k' &= 0 \\ K &= \infty \\ K' &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{k \rightarrow 1} \frac{K'}{K} &= 0 \end{aligned}$$

En este caso, las funciones Jacobianas y sus periodos rectangulares degenerarán en funciones hiperbólicas y sus periodos a bandas.

Este comportamiento muestra que las funciones elípticas ocupan un camino continuo entre las funciones circulares en un extremo y las funciones hiperbólicas en el otro con k y k' actuando como medidas simétricas de posición a lo largo de ese camino. En el centro del camino, el rectángulo fundamental es un cuadrado $K = K' \approx 1.854$ donde $k = k' = 1/\sqrt{2}$. La transformación de Landen es un método de moverse en pasos discretos a lo largo de ese camino en cada dirección modificando k o k' para que en cada paso la relación K'/K se doble o se reduzca a la mitad. Los valores de la función en cada paso siguen una relación aritmética sencilla.

Generalmente, cuatro o cinco transformaciones son suficientes para moverse desde un valor de k que aparezca en un diseño de un filtro hasta un punto donde las funciones elípticas son indistinguibles de las funciones límite circulares o hiperbólicas. Estas últimas se evalúan y entonces calculando las funciones elípticas intermedias,

la una a partir de la otra con las relaciones algebraicas sencillas, se puede encontrar el valor de la función deseada. Generalmente se utilizan las relaciones descendentes debido a que se requieren generalmente menos operaciones para las funciones circulares.

Sean k_i y u_i el módulo y el argumento de la función elíptica en la iteración i -ésima. La transformación de Landen descendente para la función sn tiene las siguientes formas equivalentes (usando su recíproca):

$$\operatorname{sn}(z_n, k_n) = \frac{(1 + k_{n+1}) \operatorname{sn}(z_{n+1}, k_{n+1})}{1 + k_{n+1} \operatorname{sn}^2(z_{n+1}, k_{n+1})} \quad (5.46a)$$

$$\operatorname{ns}(z_n, k_n) = \frac{1}{1 + k_{n+1}} \left[\operatorname{ns}(z_{n+1}, k_{n+1}) + \frac{k_{n+1}}{\operatorname{ns}(z_{n+1}, k_{n+1})} \right] \quad (5.46b)$$

donde

$$k_{n+1} = \left[\frac{k_n}{1 + \sqrt{1 - k_n^2}} \right]^2 \quad (5.47a)$$

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{1 + k_{n+1}} \quad (5.47b)$$

Como se observa, la secuencia de módulos tiende rápidamente a cero cuando n se incrementa mientras que el argumento tiende a estabilizarse rápidamente. Cuando el módulo sea lo suficientemente pequeño se puede utilizar la aproximación

$$\operatorname{sn}(z, k) = \sin z - \frac{k^2}{4}(z - \sin z \cos z) \cos z + \mathcal{O}(k^4) \quad (5.48)$$

o simplemente sustituir el seno elíptico por el seno trigonométrico si k^2 es despreciable.

Si el argumento es una fracción del cuarto de periodo K (muy común en aplicaciones de filtrado) la recurrencia más usada es una variante de (5.46b)

$$\operatorname{ns}(aK_n, k_n) = \frac{1}{1 + k_{n+1}} \left[\operatorname{ns}(aK_{n+1}, k_{n+1}) + \frac{k_{n+1}}{\operatorname{ns}(aK_{n+1}, k_{n+1})} \right] \quad (5.49)$$

sin necesidad de calcular K_i en ninguna iteración y con $\operatorname{cosec}(a\pi/2)$ como límite de la secuencia. Una recurrencia idéntica se cumple para la función dc con límite circular $\sec(a\pi/2)$.

Hay más recurrencias, pero involucran más operaciones o funciones auxiliares. En teoría de filtros se utilizan casi exclusivamente las funciones sn y dc. Se insta al lector interesado en estas transformaciones a consultar (Olver, Lozier, Boisvert y Clark 2010) o el clásico (Abramowitz y Stegun 1965).

La transformación de Landen se suele emplear para el cómputo de las funciones elípticas. Otra opción es utilizar la media aritmético-geométrica que, aparte de

servir para el cómputo de la integral elíptica completa $K(k)$ (ver apéndice C), también puede usarse para calcular las funciones Jacobianas (Abramowitz y Stegun 1965).

5.3.4 Expresión analítica del filtro elíptico

Para razonar la expresión de un filtro elíptico se puede partir de la expresión de un filtro de Chebyshev y generalizarlo. Por ello, es mejor reescribir la expresión del filtro de Chebyshev en forma paramétrica en función del periodo de la función coseno que genera los polinomios de Chebyshev

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2(N \arccos \omega)} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2(N \frac{u\pi}{2})} \quad (5.50)$$

donde se ha utilizado la parametrización

$$\omega = \cos(u\pi/2) \quad (5.51)$$

Para pasar de un filtro de Chebyshev a un filtro elíptico tan solo es necesario cambiar la función coseno que aparece en (5.50) por su equivalente elíptico. Pero hay dos funciones elípticas (cn y cd) que tienen el coseno como límite¹² cuando $k \rightarrow 0$, y la elección correcta para nuestra aplicación se ve claramente considerando el camino en el plano $u = u_1 + ju_2$ que tiene como correspondencia el eje real positivo ω con la parametrización (5.51):

- El eje real $1 \geq u_1 \geq 0$ tiene como imagen la banda de paso $0 \leq \omega \leq 1$.
- El eje imaginario ju_2 tiene como imagen la banda atenuada $1 \leq \omega \leq \infty$.

El origen en el plano u es el punto que separa la banda de paso de rizado constante de la banda atenuada con atenuación monótona creciente. El filtro de Chebyshev no distingue la banda de transición de la banda atenuada ya que el filtro es monótono a partir del límite de la banda de paso¹³.

El filtro elíptico tiene, por otra parte, una banda de transición explícita entre la banda de paso de rizado constante y la banda atenuada de rizado constante (mínimos de atenuación al mismo nivel) y esto requiere que el camino en el plano u que tiene como imagen el eje real positivo ω tenga tres segmentos distintos correspondientes a la banda de paso, la banda de transición y la banda atenuada. Solo

¹² Consultar (Olver, Lozier, Boisvert y Clark 2010) sec. 22.5(ii) donde aparecen todas las funciones Jacobianas con sus límites.

¹³ Las especificaciones prácticas de un filtro suelen incluir un límite donde se requiere que la atenuación sea mayor que un valor prefijado pero esto no significa que haya matemáticamente una distinción entre banda de transición y banda atenuada.

la función cd puede hacer esto. El camino alrededor del rectángulo fundamental desde el cero en C hasta el polo en D que tiene como imagen el eje real positivo de la función cd recorre tres lados del rectángulo que pueden ser arreglados para corresponder a las tres bandas requeridas.

Primero se presentarán las ecuaciones que definen el filtro elíptico y posteriormente se explicarán cómo están relacionadas:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \text{cd}^2(NuG, g)} \quad (5.52a)$$

$$\omega = \text{cd}(uK, k) \quad (5.52b)$$

$$N \frac{K'}{K} = \frac{G'}{G} \quad (5.52c)$$

donde K y K' son los cuartos de periodo asociados con el módulo k mientras que G y G' son los cuartos de periodo asociados al módulo g . Como siempre, N es el orden del filtro y el rizado en la banda de paso viene dado por

$$A_{\max} = 10 \log_{10} (1 + \epsilon^2) \quad \text{dB} \quad (5.53)$$

como en un filtro de Chebyshev clásico. Esta ecuación es exactamente la conocida (5.19a) ya que el rizado (su amplitud) coincide con las pérdidas máximas admisibles en la banda de paso para un filtro sin pérdidas donde la respuesta del parámetro de transmisión oscila entre 0 dB (1 en unidades lineales) y A_{\max} .

La imagen del contorno del rectángulo fundamental en el plano u de $\text{cd}(uK, k)$ en el eje ω se muestra en la figura 5.7, la cual indica los valores de ω que corresponden a las esquinas y los tres lados pertenecientes a las bandas de paso, de transición y atenuada. La banda de paso normalizada $0 \leq \omega \leq 1$ tiene como imagen $1 \geq u_1 \geq 0$. El límite de la banda eliminada está en $\omega = 1/k$ y esto define el módulo k .

El módulo g se elige implícitamente para cumplir la condición (5.52c) llamada ecuación de orden. Esta condición provoca que el rectángulo fundamental de $\text{cd}(NuG, g)$ sea de tal tamaño y forma en la variable u que N de ellos quepan exactamente dentro de $\text{cd}(uK, k)$. La figura 5.8 muestra para el caso $N = 4$, como el patrón polo-cero y los valores de la función $\text{cd}(NuG, g)$ aparecen sobreimpuestos en el rectángulo fundamental $\text{cd}(uK, k)$.

Es el cumplimiento de (5.52c) con la elección de g y la relación simple entre los dos rectángulos fundamentales que hacen que $\text{cd}(NuG, g)$ sea una función racional de $\text{cd}(uK, k)$ tal como $\cos(Nu\pi/2)$ es un polinomio en $\cos u\pi/2$ en (5.50). Obsérvese que cuando $k \rightarrow 0$ entonces $g \rightarrow 0$ y por lo tanto (5.52a) y (5.52b) degeneran en (5.50) y (5.51) respectivamente. Esto provoca que la función del filtro elíptico se reduzca en el límite a la función del filtro de Chebyshev. De hecho, es la banda de transición del filtro elíptico, no su banda atenuada, la que se convierte en este caso límite en la banda atenuada del filtro de Chebyshev.

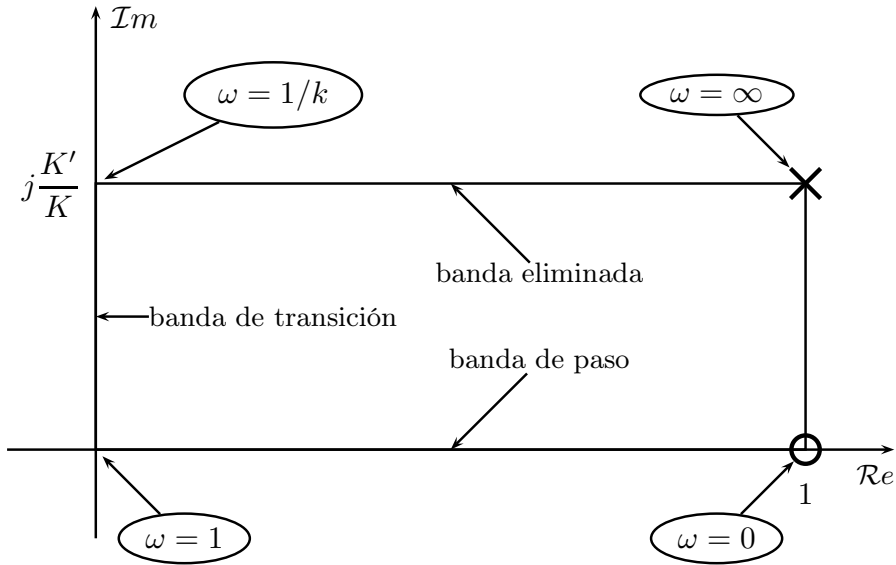


Figura 5.7: Imagen de $cd(uK, k)$ en el plano u .

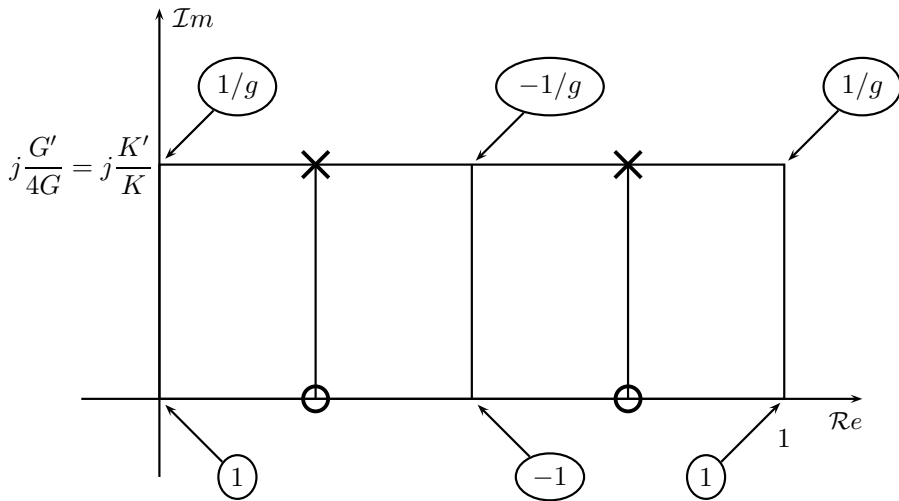


Figura 5.8: Imagen de $cd(NuG, g)$ en el plano u con $N = 4$.

Para encontrar los polos de filtro elíptico se fuerza el denominador de (5.52a) para que sea igual a cero

$$\text{cd}(NuG, g) = \pm \frac{j}{\epsilon} \quad (5.54)$$

Para que $\text{cd}(z, g)$ sea imaginario, z debe estar en las líneas del plano z que tengan como imagen el eje imaginario de la función cd . Estas son la líneas paralelas al eje imaginario en el plano z que pasan a través de los polos y ceros de cd y tienen valores reales $z = (2m - 1)G$ con m entero. Por tanto

$$NuG = (2m - 1)G \Leftrightarrow u_1 = \frac{2m - 1}{N} \quad (5.55)$$

que proporciona usando (5.42a)

$$\begin{aligned} \text{cd}(NuG, g) &= \text{cd}[(2m - 1)G + jNu_2G, g] \\ &= (-1)^m \text{sn}(jNu_2G, g') \\ &= j(-1)^m \text{sc}(Nu_2G, g') \end{aligned} \quad (5.56)$$

y por tanto los polos cumplen

$$\text{sc}(Nu_2G, g') = \frac{1}{\epsilon} \quad (5.57)$$

Volveremos a esta ecuación, pero para continuar debemos convertir (5.52) con todas sus funciones y parámetros a través de la transformación de Landen en el final trigonométrico de la cadena. Hay que crear la cadena de módulos k_n usando (5.47a) hasta que la función $\text{cd}(z, k)$ no se pueda distinguir de $\cos z$. Entonces se creará la secuencia de g_n correspondiente. Aquí existe el problema que no se nos da explícitamente el valor de g_0 con el que terminar la cadena, solamente la relación que proporciona la ecuación de orden (5.52c). En el final trigonométrico de la cadena, tanto K como G tienen como valor límite $\pi/2$ (cuartos de periodo) y, por tanto, la ecuación de orden queda reducida después de m transformaciones a

$$NK'_m = G'_m \quad (5.58)$$

Sabiendo que (J. M. Borwein y P. B. Borwein 1998)

$$K'(k) = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \mathcal{O}(k^2 |\ln k|) \quad k \rightarrow 0^+ \quad (5.59)$$

podemos aproximar para $k \rightarrow 0$ la ecuación de orden (5.58) como

$$N \ln\left(\frac{4}{k_m}\right) = \ln\left(\frac{4}{g_m}\right) \quad (5.60)$$

y por tanto

$$g_m = 4 \left(\frac{k_m}{4} \right)^N \quad (5.61)$$

Desde este valor de g_m se puede calcular, usando la recurrencia inversa a (5.47a), la secuencia hasta g_0

$$g_{n-1} = \frac{2\sqrt{g_n}}{1 + g_n} \quad (5.62)$$

Debido a que si el k_m del final de la cadena es muy pequeño y (5.61) hace que g_m sea menor que el menor número representable en la aritmética de coma flotante del ordenador, podemos despreciar g_n del denominador de (5.62) e introduciéndolo en (5.61) obtenemos

$$g_m = 0 \quad (5.63a)$$

$$g_{m-1} = 4 \left(\frac{k_m}{4} \right)^{N/2} \quad (5.63b)$$

$$g_{m-2} = 4 \left(\frac{k_m}{4} \right)^{N/4} \quad (5.63c)$$

Una vez tenemos g , podemos usar el hecho de que la magnitud de la función cd en (5.52a) es igual a $1/g$ en los mínimos de la banda atenuada para calcular las pérdidas en la banda atenuada como

$$A_{\min} = 10 \log_{10} \left(1 + \frac{\epsilon^2}{g^2} \right) \quad \text{dB} \quad (5.64)$$

que comparándola con (5.21) vemos de forma inmediata que $L = 1/g$.

Con las dos secuencias de módulos k_n y g_n calculadas, queda por resolver la tarea de encontrar los polos y ceros de $H(s)$. En el caso de los polos, son complejos en general y la transformación de Landen dada por (5.49) para la función dc sirve también para extraer valores complejos en general a partir del límite trigonométrico real. Ya que la recurrencia es válida para complejos, se puede extraer el valor elíptico de los polos a partir de los polos del filtro de Chebyshev. Como al final lo que se necesita es la función de filtrado cd, tan solo hay que invertir el resultado para encontrar cd a partir de dc.

En el proceso de pasar de un filtro de Chebyshev a uno elíptico o viceversa hay que tener en cuenta que el valor ϵ de un filtro y de otro no son exactamente iguales. Esto es debido a que de (5.57) se tiene que

$$\epsilon = \text{cs}(Nu_2G, g') \quad (5.65)$$

es decir, ϵ en sí mismo es una función elíptica que cambiará con la secuencia en el proceso de pasar al límite trigonométrico de la cadena. Por tanto, es necesario calcular cómo se modifica ϵ en ese proceso.

Para generar la secuencia de valores de ϵ empezamos por ϵ_0 escribiendo

$$\text{cs}(Nu_2G, g') = \epsilon_0 \quad (5.66)$$

Ahora hay que tener en cuenta que tras una secuencia de transformaciones de Landen las funciones elípticas se transforman en trigonométricas cuando $k = 0$ y en hiperbólicas cuando $k = 1$. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la situación se invierte cuando el módulo pasa de ser k a k' como sucede en la ecuación (5.66). Es decir, se producirán funciones hiperbólicas cuando $k = 0$ porque entonces $k' = 1$.

La transformación de Landen para cs, teniendo en cuenta que el valor límite es el hiperbólico, tiene la siguiente forma general

$$\text{cs}\left(\frac{aK_{n-1}}{2^{n-1}}, k_{n-1}\right) = \frac{1}{1+k'_n} \left[\text{cs}\left(\frac{aK_n}{2^n}, k_n\right) - \frac{k'_n}{\text{cs}\left(\frac{aK_n}{2^n}, k_n\right)} \right] \quad (5.67)$$

donde

$$k'_{n+1} = \left(\frac{k'_n}{1 + \sqrt{1 - k_n'^2}} \right)^2 \quad \forall n = 0, 1, \dots, m-1 \quad (5.68)$$

Su valor límite para el inicio de la recurrencia en el extremo hiperbólico ($k' \rightarrow 0$) es

$$\text{cs}\left(\frac{aK_m}{2^m}, k_m\right) \approx \text{cosech}\left(\frac{aK_m}{2^m}\right) \quad (5.69)$$

donde el cuarto de periodo en el límite se calcula con

$$K_m \approx \ln\left(\frac{4}{k'_m}\right) \quad (5.70)$$

Ahora, teniendo cuidado de que (5.66) tiene como módulo g' , se puede escribir una secuencia para ϵ_n cambiando cs por el correspondiente ϵ

$$\epsilon_{n-1} = \frac{1}{1+g_n} \left(\epsilon_n - \frac{g_n}{\epsilon_n} \right) \quad (5.71)$$

Como lo que se necesita es calcular la secuencia desde ϵ_0 hasta ϵ_m , hay que invertir (5.71) y así se obtiene

$$\epsilon_n = A + \sqrt{A^2 + g_n} \quad (5.72)$$

donde

$$A = \frac{(1 + g_n)\epsilon_{n-1}}{2}$$

El siguiente paso consiste en encontrar los polos del filtro de Chebyshev con el valor de ϵ_m dado por (5.72). Para ello se utiliza (4.37). Una vez conseguidos los polos del filtro de Chebyshev para ϵ_m , la recurrencia de la función dc, que es la misma que para ns descrita en (5.49), tiene la expresión

$$\text{dc}(aK_n, k_n) = \frac{1}{1 + k_{n+1}} \left[\text{dc}(aK_{n+1}, k_{n+1}) + \frac{k_{n+1}}{\text{dc}(aK_{n+1}, k_{n+1})} \right] \quad (5.73)$$

con el parámetro y valor límite dado por

$$k_{n+1} = \left[\frac{k_n}{1 + \sqrt{1 - k_n^2}} \right]^2 \quad (5.74a)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \text{dc}(aK, k) = \sec \frac{a\pi}{2} \quad (5.74b)$$

y, ya que (5.52b) relaciona a la función cd con la variable pulsación ω , se puede decir que

$$\frac{1}{\omega} = \text{dc}(uK, k) \Rightarrow \frac{1}{s} = -j \text{dc}(uK, k)$$

Llamando $t = 1/s$ tenemos que t_m corresponde al inverso del polo del filtro de Chebyshev, t_0 al correspondiente polo del filtro elíptico y la recurrencia que va de t_m al t_0 tiene el siguiente aspecto

$$t_{n-1} = \frac{1}{1 + k_n} \left(t_n - \frac{k_n}{t_n} \right) \quad (5.75)$$

Los ceros del filtro elíptico son más simples de calcular. Están en el eje imaginario y hacen infinita la expresión del denominador de (5.52a) y, por tanto, son los polos de $\text{cd}(NuG, g)$ tales que $\omega = \text{cd}(uK, k)$. Por ello, la expresión de los ceros de transmisión es¹⁴

$$s_{zi} = \frac{j}{k} \text{dc} \left(\frac{2i-1}{N} K, k \right) \quad i = 1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor \quad (5.76)$$

si N es impar además hay un cero de transmisión en $s = j\infty$. Los ceros de reflexión se pueden calcular a partir de los de transmisión como se explicará en la siguiente sección.

¹⁴La demostración es inmediata si se tiene en cuenta las propiedades de periodicidad de las funciones elípticas combinándolas con la ecuación de orden (5.52c). Se propone al lector demostrar la expresión de los ceros de transmisión en el problema 5.6.

5.3.5 Cálculo de los parámetros fundamentales

Una vez hallados los parámetros fundamentales ϵ , N , polos y ceros de transmisión, no queda más que hallar las constantes ε , ε_R y los polinomios $F(s)$, $P(s)$ y $E(s)$.

Los polinomios $E(s)$ y $P(s)$ se construyen de forma inmediata a partir de las expresiones de los polos y los ceros de transmisión como ya se ha hecho repetidas veces. Los ceros de reflexión son los ceros de R_N y recordemos que

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \operatorname{cd}^2 \left[\frac{NG}{K} \operatorname{cd}^{-1}(\omega, k), g \right]} \quad (5.77)$$

donde se cumple la ecuación de orden

$$N = \frac{G'K}{GK'} \quad (5.78)$$

y que de la misma forma

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_N^2(\omega, L)} \quad (5.79)$$

donde

$$|K(j\omega)| = \epsilon |R_N(\omega, L)| \quad (5.80)$$

Con notación polinomial tenemos que

$$|R_N(\omega, L)| = \frac{\epsilon \varepsilon}{\varepsilon_R} \left| \frac{F(j\omega)}{P(j\omega)} \right| \quad (5.81)$$

y el parámetro de reflexión tiene la forma

$$\begin{aligned} |S_{11}(j\omega)|^2 &= 1 - |S_{21}(j\omega)|^2 \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_N^2(\omega, L)} \\ &= \frac{\epsilon^2 R_N^2(\omega, L)}{1 + \epsilon^2 R_N^2(\omega, L)} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Conclusión: los ceros de R_N son los ceros de reflexión y, de momento, no han sido calculados. Por tanto, no es posible determinar $F(s)$ todavía. Existen dos opciones para solucionar esto. La primera es utilizar la propiedad de la función R_N (5.25) que permite calcular los ceros a partir de los polos. Ya que los polos de R_N son los ceros de transmisión, estos están dados por (5.76).

$$\omega_{zi} = \frac{\omega_s}{\omega_{pi}} = \frac{1/k}{\omega_{pi}} \quad (5.83)$$

donde se ha hecho uso de que el límite de la banda atenuada ω_s empieza en $1/k$ como se ha visto en la figura 5.7. La segunda opción es directamente buscar los valores ω_{zi} que anulan $R_N(\omega, L)$. Es decir, forzar que

$$\text{cd} \left[\frac{NG}{K} \text{cd}^{-1}(\omega, k), g \right] = 0 \quad (5.84)$$

Ambos métodos coinciden y la expresión de los ceros de reflexión es

$$s_{ri} = j \text{cd} \left(\frac{2i-1}{N} K, k \right) \quad i = 1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor \quad (5.85)$$

Si el orden es impar, el cero de transmisión en el infinito produce un cero de reflexión en el origen.

Obviamente, tanto los ceros de reflexión como los ceros de transmisión corresponden tanto a las frecuencias positivas como a las negativas. Por ejemplo, si un filtro es de orden $N = 3$ tiene dos ceros de transmisión a frecuencias finitas (en $\pm\omega_{t1}$) y un cero de transmisión en el infinito. Los ceros de reflexión serán $\pm\omega_{r1} = \pm 1/(k\omega_{t1})$ y un cero en $\omega = 0$. Los polos de la función de transferencia serán de parte real negativa (son Hurwitz) y habrá dos de ellos que serán complejos conjugados (la respuesta de un filtro elíptico es simétrica) y el otro estará sobre el eje real.

EJEMPLO 5.3 Diseñar un filtro elíptico de orden $N = 6$ con unas pérdidas de retorno de $RL = 20$ dB en la banda de paso y atenuación mínima en la banda atenuada de $A_{\min} = 60$ dB. Obtener los polinomios de S_{11} y S_{21} y dibujar la respuesta (reflexión y transmisión) en unidades logarítmicas.

Solución: El valor del rizado se obtiene directamente de las pérdidas de retorno RL . Cuando las pérdidas de retorno son mínimas el parámetro S_{21} tiene el valor mínimo (las pérdidas de inserción son máximas) y su diferencia con el valor máximo de $|S_{21}|$ (1 unidades lineales (o 0 dB) si es un filtro sin pérdidas) proporciona el rizado. Por tanto

$$r = A_{\max} = -10 \log_{10} (1 - 10^{-RL/10}) = 0.043648 \text{ dB}$$

y a partir de (5.53) se puede obtener ϵ .

$$\epsilon = \sqrt{10^{r/10} - 1} = 0.100503781525921$$

Si el valor de r es muy pequeño, se puede mejorar la precisión si obtenemos r en nepers y no en dB y así

$$\epsilon = \sqrt{e^{2r} - 1} = \sqrt{e^r (e^r - e^{-r})} = \sqrt{2e^r \sinh r} = 0.1005037815259213$$

donde aquí r se ha pasado a nepers $r(\text{NP}) = r(\text{dB}) \frac{\ln 10}{20}$. Este valor de ϵ es el valor inicial ϵ_0 de la recurrencia para llegar hasta el límite de Chebyshev. También es posible obtener g de (5.64) como

$$g = \frac{\epsilon}{\sqrt{10^{A_{\min}} - 1}} = 1.005038317778496 \times 10^{-4}$$

y, por tanto, el parámetro L vale

$$L = \frac{1}{g} = 9.949869396127773 \times 10^3$$

También g será nuestro g_0 para la recurrencia hacia el límite de Chebyshev. Con g_0 se puede generar la secuencia ascendente g_0, g_1, \dots, g_m con

$$g_{n+1} = \left(\frac{g_n}{1 + \sqrt{1 - g_n^2}} \right)^2$$

que es necesaria, junto con ϵ_0 , para empezar la recurrencia (5.72) y generar la secuencia $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$. La secuencia $\{g_n\}$ queda

$$\begin{aligned} g = g_0 &= 1.005038317778496 \times 10^{-4} \\ g_1 &= 2.525255063261401 \times 10^{-9} \\ g_2 &= 1.594228283631836 \times 10^{-18} \\ g_3 &= 6.353909550829271 \times 10^{-37} \\ g_4 &= 1.009304164502986 \times 10^{-73} \\ g_5 &= 2.546737241207674 \times 10^{-147} \end{aligned}$$

La secuencia $\{k_0, \dots, k_m\}$ se calcula desde k_m hasta k_0 . El valor k_m se obtiene a partir de g_m con (5.61). La recursión descendente es

$$k_n = \frac{2\sqrt{k_{n+1}}}{1 + k_{n+1}}$$

El único punto a tener en cuenta es asegurar que g_m sea lo suficientemente pequeño ($g_m \ll k_m$) para que k_m también lo sea. Típicamente hay que asegurar que k_m sea del orden del mínimo número representable como diferencia de dos números consecutivos en la máquina correspondiente. En este problema se ha utilizado el criterio de que $k_m < 10^{-14}$. De ahí que $\{g_n\}$ llegue hasta el término g_5 , de esa forma $k_5 < 10^{-14}$. La secuencia $\{k_n\}$ queda

$$\begin{aligned} k_5 &= 1.173223308691192 \times 10^{-24} \\ k_4 &= 2.166308665625646 \times 10^{-12} \\ k_3 &= 2.943677064907943 \times 10^{-6} \\ k_2 &= 3.431419376593389 \times 10^{-3} \\ k_1 &= 1.167559978363481 \times 10^{-1} \\ k = k_0 &= 6.119434659210722 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

La secuencia $\{\epsilon_n\}$ es ascendente y depende de la secuencia de g_n (5.72). La secuencia queda

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_0 &= 0.1005037815259213 \\ \epsilon_1 &= 0.1005038069056832 \\ \epsilon_2 &= 0.1005038069056832 \\ \epsilon_3 &= 0.1005038069056832 \\ \epsilon_4 &= 0.1005038069056832 \\ \epsilon_5 &= 0.1005038069056832\end{aligned}$$

donde ϵ_5 es el límite de Chebyshev y ϵ_0 es el límite elíptico. No hay mucha diferencia entre ambos rizados para este ejemplo. En la mayoría de los casos prácticos se toma el mismo.

Una vez conocido k , es posible determinar la frecuencia a la que la atenuación cumple la especificación en la banda atenuada. Es decir, el límite inferior de la banda atenuada es

$$\omega_s = \frac{1}{k} = 1.63413788313736 \text{ rad/s}$$

Por tanto, los límites de las banda están todos definidos:

- Banda de paso: Siempre de $\omega = 0 \text{ rad/s}$ hasta $\omega = 1 \text{ rad/s}$ como corresponde a un prototipo paso bajo.
- Banda de transición: de $\omega = 1 \text{ rad/s}$ hasta $\omega = \omega_s \approx 1.63 \text{ rad/s}$.
- Banda atenuada: desde $\omega_s \approx 1.63 \text{ rad/s}$ hasta $\omega = \infty$.

Por supuesto hay simetría total en frecuencias negativas.

Una vez calculadas las secuencias $\{g_n\}$, $\{k_n\}$ y $\{\epsilon_n\}$ es posible, a través de (5.75), generar los polos de un filtro elíptico a partir de los polos de un filtro de Chebyshev clásico. La recursión ha producido estos resultados donde se han retenido cuatro decimales significativos por cuestiones de espacio:

$$\begin{aligned}s_{pc1} &= -0.1345 + j1.0886 \Rightarrow s_{pe1} = -0.5614 + j0.3539 \\ s_{pc2} &= -0.1345 - j1.0886 \Rightarrow s_{pe2} = -0.5614 - j0.3539 \\ s_{pc3} &= -0.3676 + j0.7969 \Rightarrow s_{pe3} = -0.3308 + j0.8641 \\ s_{pc4} &= -0.3676 - j0.7969 \Rightarrow s_{pe4} = -0.3308 - j0.8641 \\ s_{pc5} &= -0.5021 + j0.2917 \Rightarrow s_{pe5} = -0.0991 + j1.0725 \\ s_{pc6} &= -0.5021 - j0.2917 \Rightarrow s_{pe6} = -0.0991 - j1.0725\end{aligned}$$

donde s_{pci} es el i -ésimo polo de Chebyshev y s_{pei} es el i -ésimo polo elíptico.

Los ceros de transmisión se han calculado usando (5.76) y la recursión correspondiente a la función de dada por (5.73) dando como resultado

$$\begin{aligned}
 s_{tz1} &= -j5.6800 \\
 s_{tz2} &= -j2.1869 \\
 s_{tz3} &= -j1.6796 \\
 s_{tz4} &= +j1.6796 \\
 s_{tz5} &= +j2.1869 \\
 s_{tz6} &= +j5.6800
 \end{aligned}$$

Los ceros de reflexión se pueden calcular a partir de los ceros de transmisión como se indica en (5.83) obteniendo

$$\begin{aligned}
 s_{rz1} &= -j0.9729 \\
 s_{rz2} &= -j0.7472 \\
 s_{rz3} &= -j0.2877 \\
 s_{rz4} &= +j0.2877 \\
 s_{rz5} &= +j0.7472 \\
 s_{rz6} &= +j0.9729
 \end{aligned}$$

Ya es posible construir los polinomios $E(s)$, $P(s)$ y $F(s)$ con las raíces de los mismos. Estos polinomios se pueden representar en forma tabulada.

Coeficientes de los polinomios			
s^n	$E(s)$	$P(s)$	$F(s)$
s^6	1	j	1
s^5	1.9827	0	0
s^4	3.5533	$j39.8663$	1.5877
s^3	3.7272	0	0
s^2	2.9915	$j258.8038$	0.65311
s^1	1.5281	0	0
s^0	0.4375	$j435.2861$	0.043748

Faltan por determinar las constantes ε y ε_R . Sabiendo que en el límite de la banda $s = j$ las pérdidas de retorno son exactamente RL , la condición es exactamente la misma que en un filtro de Chebyshev, con la salvedad de que ahora hay ceros de transmisión finitos. Utilizando la ecuación (2.37) se tiene que

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{1}{10^{RL/10} - 1} \left| \frac{P(s)}{F(s)} \right|_{s=j}^2} = 1000$$

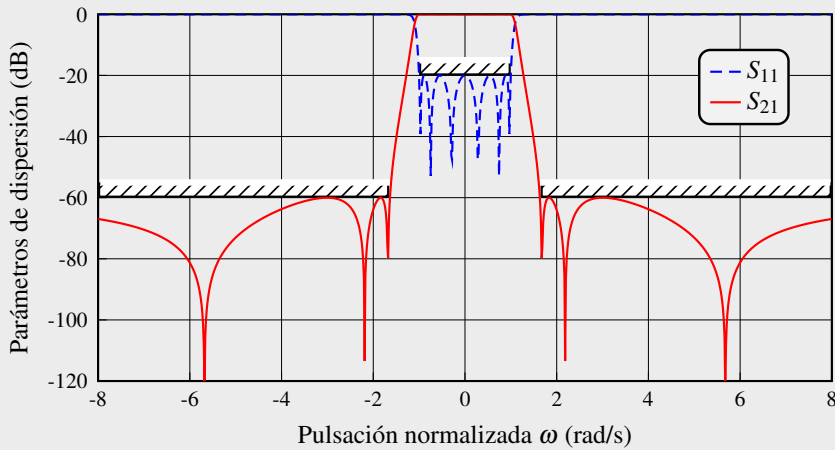
con lo que ε_R queda

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = 1.0000005$$

Tan solo queda representar gráficamente la respuesta en unidades logarítmicas sabiendo que

$$S_{11} = \frac{F(s)/\varepsilon_R}{E(s)} \quad S_{21} = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)}$$

La respuesta del filtro puede observarse en la siguiente gráfica.



La máscara dentro de banda para $RL = 20$ dB y en la banda atenuada $A_{\min} = 60$ dB se cumplen a la perfección. También se observan claramente los ceros de transmisión y la extrema selectividad del filtro.

5.4 Filtros de Chebyshev generalizados

Como se ha visto en la sección anterior, los filtros elípticos tienen la gran ventaja de tener un rizado constante predefinido tanto en la banda de paso como en la banda atenuada. Los filtros de Chebyshev clásicos (todo-polos) solo tienen rizado en la banda de paso, porque no tener ceros de transmisión significa que están todos en el infinito y, por ello, en la banda atenuada el filtro todo-polos tiene un comportamiento monótono (S_{21} monótonamente decreciente a partir de $\omega = 1$).

La única pega a los filtros elípticos es que para mantener el rizado en la banda atenuada, los ceros de transmisión están forzosamente dados por (5.76). Por ello, no hay libertad para elegir los ceros de transmisión. Si se pretende diseñar un filtro de rizado constante (en la banda de paso) con ceros de transmisión en frecuencias prefijadas (sin restricciones) se impone un nuevo tipo de filtro. Esto ya se hizo en la sección 5.1 con los filtros de Butterworth para conseguir los filtros de Butterworth

generalizados. Con la misma filosofía, en esta sección se obtendrán los filtros de Chebyshev generalizados.

Aunque (Rhodes y Alseyab 1980) es el artículo precursor de este tipo de filtros de Chebyshev generalizados, no se puede considerar a los filtros del citado artículo como “generalizados” ya que obligatoriamente un cero estaba en el infinito y el resto ($N - 1$ ceros) estaban simétricamente¹⁵ localizados en la frecuencia deseada ($\pm\omega_0$). Debido a esta simetría, el entero $N - 1$ debía de ser par.

Fue Cameron (Cameron 1982) el primero¹⁶ en generar filtros de rizado constante en la banda de paso asimétricos de orden N con hasta N ceros de transmisión localizados en frecuencias arbitrariamente definidas. El procedimiento refinado aparece en su forma actual en (Cameron, Kudsia y Mansour 2007) y es el que esencialmente se va a seguir aquí con cambios menores.

5.4.1 Función característica

Según la definición de función característica dada en la sección 2.8, tenemos que:

$$K(s) = \frac{\varepsilon F(s)}{\varepsilon_R P(s)} \quad (5.86)$$

Por tanto, se puede expresar la función de transferencia como

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} \quad (5.87)$$

Para un filtro de Chebyshev todo-polos teníamos que

$$|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 T_N^2(\omega) = \varepsilon^2 \cos^2 [N \arccos(\omega)] \quad (5.88)$$

Ahora, para el caso generalizado tendremos

$$|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 C_N^2(\omega) = \varepsilon^2 \cos^2 \left\{ \sum_{n=1}^N \arccos [x_n(\omega)] \right\} \quad (5.89)$$

Es decir, donde antes teníamos el polinomio de Chebyshev $T_N(\omega)$ ahora tenemos su versión generalizada $C_N(\omega)$ que generará un rizado constante en la banda de paso

¹⁵Los filtros asimétricos son un “invento” relativamente reciente. La simetría respecto al eje real es necesaria si el filtro se realiza con elementos reales R,L,C produciendo coeficientes reales en los polinomios de S_{11} y S_{21} .

¹⁶Hay que decir que, anteriormente al método propuesto por Cameron, para conseguir filtros asimétricos y con ceros de transmisión en posiciones arbitrarias se utilizaba el método de variable transformada ideado por Orchard y Temes (Orchard y Temes 1968) en los años 60. La complejidad del método de Orchard y Temes es ligeramente mayor, además de ser un método de precisión numérica menor por manejar polinomios de orden $2N$, siendo N el orden del filtro.

a partir de la posición de los N ceros de transmisión arbitrarios. Como estos ceros no tienen que ser iguales, en lugar del sumatorio $\sum_{n=1}^N \arccos \omega = N \arccos(\omega)$ se tendrá el sumatorio de N términos $\sum_{n=1}^N \arccos(x_n)$. Como se observa, ahora la función $x_n(\omega)$ hace las veces de ω . En la posición de los N ceros de transmisión en el infinito que tiene el filtro de Chebyshev todo-polos tenemos que $\omega = \pm\infty$. Los N ceros de transmisión finitos de un filtro de Chebyshev generalizado tienen que hacer que $x_n(\omega) = \pm\infty$ para cada uno de los ceros de transmisión ya sean finitos o infinitos. Resumiendo, las propiedades de $x_n(\omega)$ son:

- Sea ω_n la posición del cero de transmisión n -ésimo, entonces

$$x_n(\omega_n) = \pm\infty \quad (5.90)$$

Esta pulsación ω_n puede tener un valor complejo en general (ceros finitos) o valer $\pm\infty$ (ceros en el infinito). En definitiva: en el cero de transmisión la función x_n tiene un polo.

- En el límite de la banda

$$x_n(\omega = \pm 1) = \pm 1 \quad (5.91)$$

- Dentro de la banda, en el caso clásico $\omega \in [-1, +1]$. Por tanto, ahora dentro de la banda

$$x_n(\omega) \in [-1, +1] \quad \forall \omega \in [-1, +1] \quad (5.92)$$

Es decir, x_n es una función no lineal que transforma el intervalo $[-1, +1]$ en sí mismo. De forma similar, la función ω transforma el intervalo $[-1, +1]$ en sí mismo de forma lineal.

Estas condiciones se cumplen si x_n tiene la siguiente expresión

$$x_n(\omega) = \frac{1 - \omega_n \omega}{\omega - \omega_n} = \frac{\omega - \frac{1}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega}{\omega_n}} \quad (5.93)$$

Clarísimamente, si un cero de transmisión está en el infinito $x_n(\omega) = \omega$. Si todos los N ceros de transmisión están en el infinito el caso generalizado se reduce al caso clásico todo-polos. Es decir

$$\lim_{\substack{\omega_1 \rightarrow \infty \\ \omega_2 \rightarrow \infty \\ \dots \\ \omega_N \rightarrow \infty}} C_N(\omega) = T_N(\omega) \quad (5.94)$$

Las funciones C_0 y C_1 son fáciles de hallar:

$$C_0(\omega) = 1 \quad (5.95a)$$

$$C_1(\omega) = x_1(\omega) = \frac{1 - \omega_1 \omega}{\omega - \omega_1} \quad (5.95b)$$

Sin embargo, ya no es inmediato obtener C_2 :

$$\begin{aligned}
 C_2(\omega) &= \cos[\arccos x_1(\omega) + \arccos x_2(\omega)] \\
 &= x_1(\omega)x_2(\omega) - \sqrt{[1 - x_1^2(\omega)][1 - x_2^2(\omega)]} \\
 &= \frac{(1 - \omega_1\omega)(1 - \omega_2\omega) - (\omega^2 - 1)\sqrt{(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \quad (5.96)
 \end{aligned}$$

Debido a que la raíz cuadrada de la expresión anterior solo involucra constantes, podemos afirmar que $C_2(\omega)$ es un cociente de polinomios. Además, se observa que el denominador es un polinomio que contiene los ceros de transmisión y podemos identificarlo como $P(\omega)$. No obstante, el numerador normalizado es $F(\omega)$ (como se indica en (5.86)) y no se ve una expresión inmediata para obtener sus coeficientes.

En general, C_N tiene una expresión que puede darse de forma compacta como

$$C_N(\omega) = (1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \dots) \prod_{i=1}^N x_i(\omega) \quad (5.97)$$

donde Σ_r es la suma de los productos de $\tan[\arccos x_1(\omega)], \tan[\arccos x_2(\omega)], \dots$ tomados de r en r . Recuérdese que

$$\tan[\arccos(x)] = \frac{\sin[\arccos(x)]}{\cos[\arccos(x)]} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2[\arccos(x)]}}{x} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad (5.98)$$

Así, por ejemplo, la expresión de C_3 tendría el siguiente aspecto

$$C_3 = x_1 x_2 x_3 \left[1 - \frac{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}{x_1 x_2} - \frac{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_3^2)}}{x_1 x_3} - \frac{\sqrt{(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)}}{x_2 x_3} \right] \quad (5.99)$$

A partir de aquí se ha eliminado la dependencia con ω para evitar la notación demasiado farragosa. Es decir que $x_i(\omega)$ se denotará como simplemente x_i . Sabiendo que para cualquier cero de transmisión en ω_i los términos del tipo $\tan[\arccos(x_i)]$ tienen el aspecto siguiente

$$\frac{\sqrt{1 - x_i^2}}{x_i} = \frac{\sqrt{(\omega^2 - 1)(1 - \omega_i)}}{1 - \omega_i \omega} \quad (5.100)$$

podemos simplificar las parejas de términos del tipo

$$\frac{\sqrt{(1 - x_i^2)(1 - x_j^2)}}{x_i x_j} = (\omega^2 - 1) \frac{\sqrt{(1 - \omega_i)(1 - \omega_j)}}{(1 - \omega_i \omega)(1 - \omega_j \omega)} \quad (5.101)$$

donde se puede observar que los términos dentro de la raíz son constantes. Como las tangentes aparecen con agrupaciones pares siempre, como se ve en (5.97), de

aquí se deduce que C_N es siempre una función cociente de polinomios (no hay términos que dependan de ω bajo el signo de la raíz). Siguiendo con el ejemplo de la función C_3 , podemos finalmente escribir

$$C_3(\omega) = \frac{\prod_{i=1}^3 (1 - \omega_i \omega) - (\omega^2 - 1) \sum_{i=1}^3 \alpha_i (1 - \omega_i \omega)}{\prod_{i=1}^3 (\omega - \omega_i)} \quad (5.102)$$

donde

$$\alpha_i = \sqrt{(1 - \omega_p)(1 - \omega_q)} \quad p \neq q, p \neq i, q \neq i \quad (5.103)$$

Como puede evidenciarse de las expresiones de $C_2(\omega)$ y $C_3(\omega)$, hay que simplificar mucho las expresiones para poder identificar $F(\omega)$. Es por ello que se impone un método más potente para identificar este polinomio de manera más cómoda. Se parte de la expresión original de C_N

$$\begin{aligned} C_N(\omega) &= \cos \left\{ \sum_{i=1}^N \arccos [x_i(\omega)] \right\} \\ &= \cosh \left\{ \sum_{i=1}^N \operatorname{acosh} [x_i(\omega)] \right\} \\ &= \cosh \left[\sum_{i=1}^N \ln(a_i + b_i) \right] \end{aligned} \quad (5.104)$$

donde

$$a_i = x_i(\omega) \quad b_i = \sqrt{x_i^2(\omega) - 1} \quad (5.105)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} C_N(\omega) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_i \ln(a_i + b_i)}{e} + \frac{\sum_i \ln(a_i + b_i)}{e} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\prod_{i=1}^N (a_i + b_i)}{\prod_{i=1}^N (a_i + b_i)} + \frac{1}{\prod_{i=1}^N (a_i + b_i)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\prod_{i=1}^N (a_i + b_i) + \prod_{i=1}^N (a_i - b_i) \right] \end{aligned} \quad (5.106)$$

donde en el último paso se ha aprovechado el hecho de que

$$\prod_{i=1}^N (a_i + b_i) \prod_{i=1}^N (a_i - b_i) = \prod_{i=1}^N (a_i^2 - b_i^2) = 1 \quad (5.107)$$

porque por la definición (5.105) se obtiene que $a_i^2 - b_i^2 = 1$.

Sustituyendo en (5.107) la expresión (5.104) y las expresiones de a_i y b_i siguientes donde $\omega' = \sqrt{\omega^2 - 1}$ son

$$a_i = x_i(\omega) = \frac{\omega - \frac{1}{\omega_i}}{1 - \frac{\omega}{\omega_i}} \quad (5.108a)$$

$$b_i = \sqrt{x_i^2(\omega) - 1} = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\omega_i^2}}}{1 - \frac{\omega}{\omega_i}} \quad (5.108b)$$

obtenemos

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2 \prod_{i=1}^N 1 - \frac{\omega}{\omega_i}} \left[\prod_{i=1}^N (c_i + d_i) + \prod_{i=1}^N (c_i - d_i) \right] \quad (5.109)$$

donde

$$c_i = \omega - \frac{1}{\omega_i} \quad (5.110a)$$

$$d_i = \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_i^2}} \quad (5.110b)$$

En la ecuación (5.109) se puede ver que su denominador es un polinomio cuyas raíces son los ceros de transmisión ω_i y, por tanto, normalizando se puede identificar como el polinomio $P(\omega)$ como ya sabíamos. Solo queda por identificar el numerador que normalizado debe ser $F(\omega)$. Recordemos que se demostró que los términos con ω' aparecen por pares y por tanto el numerador es un polinomio en ω . Partimos de

$$\frac{1}{2} \left[\prod_{i=1}^N (c_i + d_i) + \prod_{i=1}^N (c_i - d_i) \right] = \frac{1}{2} [G_N(\omega) + G'_N(\omega)] \quad (5.111)$$

donde

$$G_N(\omega) = \prod_{i=1}^N (c_i + d_i) = \prod_{i=1}^N \left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_i} \right) + \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_i^2}} \right] \quad (5.112a)$$

$$G'_N(\omega) = \prod_{i=1}^N (c_i - d_i) = \prod_{i=1}^N \left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_i} \right) - \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_i^2}} \right] \quad (5.112b)$$

Descompongamos ahora G_N :

$$G_N(\omega) = U_N(\omega) + \omega' V_{N-1}(\omega) \quad (5.113)$$

donde U_N y V_{N-1} son polinomios en ω . El subíndice indica el orden y, como se observa, el polinomio V_{N-1} acompaña a ω' y es de un orden menor a U_N .

$$U_N(\omega) = u_0 + u_1\omega + u_2\omega^2 + \dots + u_N\omega^N \quad (5.114a)$$

$$V_{N-1}(\omega) = v_0 + v_1\omega + v_2\omega^2 + \dots + v_{N-1}\omega^{N-1} \quad (5.114b)$$

Empecemos construyendo los polinomios para obtener una forma simple e iterativa de construir los polinomios con el primer cero de transmisión ω_1

$$G_1(\omega) = c_1 + d_1 = \left(\omega - \frac{1}{\omega_1}\right) + \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_1^2}} = U_1(\omega) + \omega' V_0(\omega) \quad (5.115)$$

donde

$$U_1(\omega) = \omega - \frac{1}{\omega_1} \quad (5.116)$$

$$V_0(\omega) = \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_1^2}} \quad (5.117)$$

Con el segundo cero de transmisión ω_2 se procede de la misma forma

$$\begin{aligned} G_2(\omega) &= G_1(\omega) \cdot (c_2 + d_2) \\ &= [U_1(\omega) + \omega' V_0(\omega)] \cdot \left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_2}\right) + \omega' \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_2^2}} \right] \\ &= U_2(\omega) + \omega' V_1(\omega) \end{aligned} \quad (5.118)$$

donde

$$U_2(\omega) = U_1(\omega) \left(\omega - \frac{1}{\omega_2}\right) + (\omega^2 - 1) V_0(\omega) \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_2^2}} \quad (5.119a)$$

$$V_1(\omega) = V_0(\omega) \left(\omega - \frac{1}{\omega_2}\right) + U_1(\omega) \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_2^2}} \quad (5.119b)$$

y, de esa forma, se añaden los ceros de transmisión uno por uno (no importa que los ceros de transmisión estén en el infinito) hasta el último de ellos ω_N

$$G_N(\omega) = U_N(\omega) + \omega' V_{N-1}(\omega) \quad (5.120)$$

donde

$$U_N(\omega) = U_{N-1}(\omega) \left(\omega - \frac{1}{\omega_N}\right) + (\omega^2 - 1) V_{N-2}(\omega) \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_N^2}} \quad (5.121a)$$

$$V_{N-1}(\omega) = V_{N-2}(\omega) \left(\omega - \frac{1}{\omega_N}\right) + U_{N-1}(\omega) \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_N^2}} \quad (5.121b)$$

Exactamente de la misma forma se puede generar $G'_N(\omega)$ que proporciona la expresión siguiente en función de los mismos polinomios $U_N(\omega)$ y $V_{N-1}(\omega)$:

$$G'_N(\omega) = U_N(\omega) - \omega'V_{N-1}(\omega) \quad (5.122)$$

Se obtiene finalmente la expresión del numerador de $C_N(\omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [G_N(\omega) + G'_N(\omega)] &= \frac{1}{2} [U_N(\omega) + \omega'V_{N-1}(\omega) + U_N(\omega) - \omega'V_{N-1}(\omega)] \\ &= U_N(\omega) \end{aligned} \quad (5.123)$$

La ecuación (5.123) nos dice que el numerador de $C_N(\omega)$ que es el polinomio $F(\omega)$ (una vez normalizado) se obtiene directamente de $U_N(\omega)$ de forma iterativa. Con esto está totalmente definido el filtro de Chebyshev generalizado ya que se conoce $F(\omega)$, $P(\omega)$. Aplicando unitariedad se puede obtener $E(\omega)$. Incidentalmente, el polinomio V_{N-1} tiene una utilidad marginal: sus raíces son las posiciones de los máximos de reflexión dentro de la banda. La demostración de este fenómeno se deja como ejercicio al final del capítulo (ver problema 5.8).

5.4.2 Procedimiento de síntesis polinomial

Una vez completamente definidas las ecuaciones del filtro de Chebyshev generalizado es inmediato generar el algoritmo correspondiente para obtener las expresiones de los parámetros de dispersión:

Generar el polinomio $P(s)$: A partir de los ceros de transmisión finitos localizados en $\{\omega_i\}$ se genera el polinomio $P(\omega)$

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^{n_{tz}} (\omega - \omega_i) \quad (5.124)$$

Obviamente, este polinomio tiene orden n_{tz} (número de ceros de transmisión finitos). A partir de $P(\omega)$ se genera $P(s)$ sustituyendo $\omega = s/j$ y normalizando al coeficiente de mayor exponente. Si $(N - n_{tz})$ es un número par entonces se multiplican todos los coeficientes de $P(s)$ por j .

Generar el polinomio $F(s)$: Se genera $U_N(\omega)$ como se ha explicado en la sección anterior. Se obtienen las raíces si se necesitan. Estas raíces son las pulsaciones donde se anula la reflexión (ceros de reflexión). Se sustituye $\omega = s/j$ en U_N y se normaliza para obtener $F(s)$.

Generar las constantes ε y ε_R : A partir de las pérdidas de retorno RL requeridas dentro de la banda de paso y de los polinomios $P(s)$ y $F(s)$, se pueden obtener las constantes normalizadoras del filtro:

- Si $N = n_{tz}$ entonces se obtiene ε a partir de (2.37) y ε_R a partir de (2.36).
- Si $N < n_{tz}$ entonces $\varepsilon_R = 1$ y ε se obtiene a partir de (2.38).

Generar el polinomio $E(s)$: Utilizando unitariedad o, mejor todavía, la técnica de los polos alternados descrita en el apéndice B, se obtiene $E(s)$. Sus raíces son los polos del filtro.

EJEMPLO 5.4 Obtener los polinomios que forman los parámetros de dispersión $S_{11}(s)$ y $S_{21}(s)$ de un filtro de Chebyshev generalizado de orden $N = 4$ del cual se requiere que tenga los ceros de transmisión en las pulsaciones $\omega_{z1} = 1.5$ rad/s y $\omega_{z2} = 2.5$ rad/s y que sus pérdidas mínimas de retorno sean $RL = 20$ dB. Dibujar el diagrama de polos y ceros de los parámetros de dispersión y representar gráficamente los parámetros de dispersión en escala logarítmica.

Solución: El polinomio $P(s)$ es inmediato de obtener ya que

$$P(s) = j(s - j\omega_{z1})(s - j\omega_{z2}) = js^2 + 4s - 3.75j$$

Debido a que $N - n_{tz} = 2$ es par, los coeficientes de $P(s)$ han sido multiplicados por j .

Aplicando la técnica iterativa para obtener $F(\omega)$ se obtienen los polinomios auxiliares $U_i(\omega)$ y los $V_{i-1}(\omega)$ tras cada iteración. Para la primera iteración ($\omega_{z1} = 1.5$):

$$\begin{aligned} U_1(\omega) &= \omega - 0.6667 \\ V_0(\omega) &= 0.7454 \end{aligned}$$

Para la segunda iteración ($\omega_{z2} = 2.5$):

$$\begin{aligned} U_2(\omega) &= 1.6831\omega^2 - 1.0667\omega - 0.4165 \\ V_1(\omega) &= 1.6619\omega^2 - 0.9092 \end{aligned}$$

Para la tercera iteración ($\omega_{z3} = \infty$):

$$\begin{aligned} U_3(\omega) &= 3.3450\omega^3 - 1.9758\omega^2 - 2.0783\omega + 0.9092 \\ V_2(\omega) &= 3.3450\omega^2 - 1.9758\omega - 0.4165 \end{aligned}$$

Para la cuarta iteración ($\omega_{z4} = \infty$):

$$\begin{aligned} U_4(\omega) &= 6.6900\omega^4 - 3.9516\omega^3 - 5.8398\omega^2 + 2.8850\omega + 0.4165 \\ V_3(\omega) &= 6.6900\omega^3 - 3.9516\omega^2 - 2.4948\omega + 0.9092 \end{aligned}$$

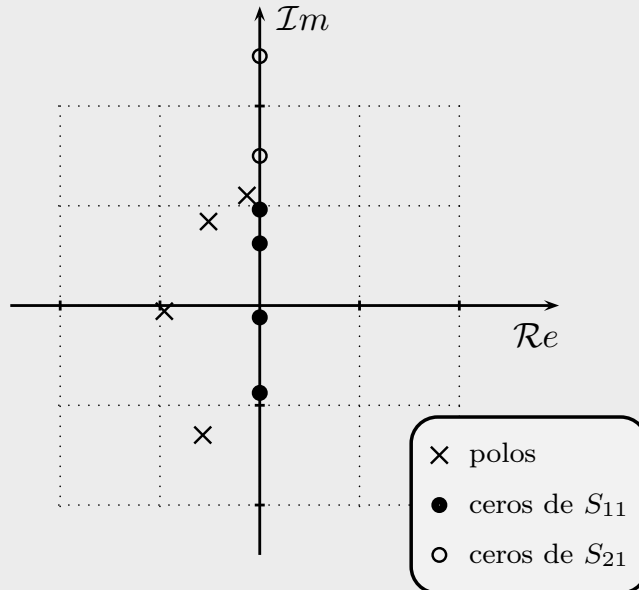
El polinomio $F(s)$ es el polinomio $U_4(s/j)$ normalizado. El siguiente paso consiste en obtener las constantes ε y ε_R . Como $N > n_{tz}$, directamente sabemos que $\varepsilon_R = 1$. De (2.38) podemos obtener

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \left| \frac{P(s)}{F(s)} \right|_{s=j} = 2.5214$$

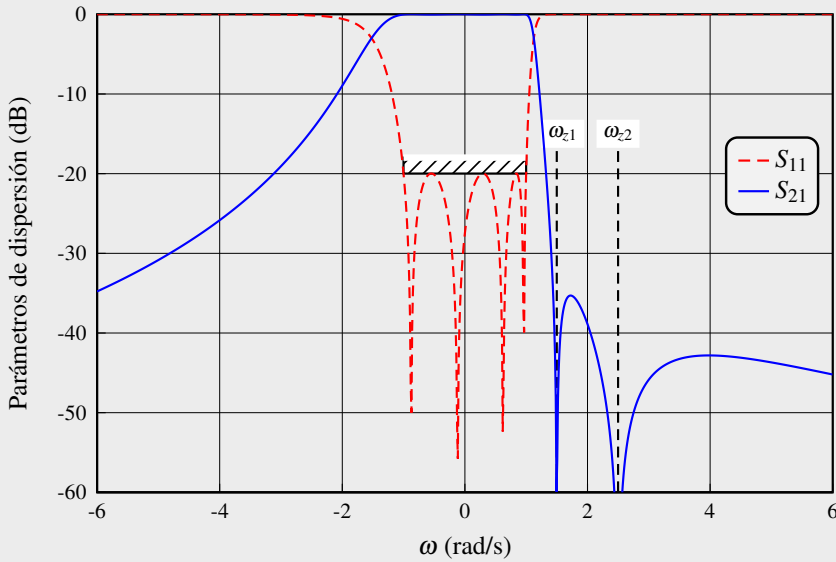
Finalmente, utilizando la técnica de polos alternados se obtiene $E(s)$. Los coeficientes de los polinomios obtenidos aparecen en la siguiente tabla

Coeficientes de los polinomios			
s^n	$E(s)$	$P(s)$	$F(s)$
s^4	1	—	1
s^3	$2.1690 - 0.5907j$	—	$-0.5907j$
s^2	$3.2253 - 1.5032j$	j	0.8729
s^1	$2.3767 - 2.3023j$	4	$-0.4312j$
s^0	$0.4512 - 1.4185j$	$-3.75j$	0.0623

En el diagrama de polos y ceros se observa que todos los ceros de reflexión se encuentran en el intervalo $[-j, +j]$ y que los ceros de transmisión se encuentran también en el eje imaginario fuera de ese intervalo.



Los parámetros de dispersión aparecen representados en la siguiente gráfica.



Las especificaciones para RL se cumplen de forma exacta en la banda de $\omega \in [-1, +1]$.

Resaltar que debido a la asimetría del filtro, se ha perdido la simetría del diagrama de polos y ceros respecto al eje real. Esto fuerza a que los coeficientes de los polinomios (en la variable s) sean complejos en general. Recuérdese que la deducción de los polinomios P y F generaba polinomios reales en la variable ω ya que las raíces de ambos estaban en el eje imaginario y por tanto en ω real. Sin embargo, al utilizar la variable s en los polinomios, los coeficientes pueden ser imaginarios puros o reales.

Por último, es preciso indicar que los ceros de transmisión no tienen porqué estar en el eje imaginario. Pueden estar en cualquier lugar del plano complejo siempre que se mantengan las condiciones para las expresiones de S_{11} y S_{21} de las que se hablaron en la sección 2.7. Los filtros con ecualización del retardo de grupo no suelen tener todos sus ceros de transmisión en el eje $j\omega$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 5.1** Demostrar que, a bajas frecuencias, el filtro de Chebyshev inverso se comporta como un filtro maximalmente plano de la forma

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_k)^{2N}}$$

y determinar el valor de ω_k .

- 5.2** Explicar el criterio a aplicar para determinar el orden de un filtro de Chebyshev inverso y obtener la fórmula para ese orden N .
- 5.3** Supongamos que deseamos diseñar un filtro elíptico de orden $N = 5$ con unas pérdidas de retorno de $RL = 20$ dB y una atenuación en la banda de paso mínima de $A_{\min} = 40$ dB. Determinar K_{\min} , ϵ , L , ϵ_L , ϵ_R y la constante C_5 que aparece en la expresión de $R_5(s, L)$ de la ecuación (5.23).
- 5.4** Aplicando las propiedades de reciprocidad y simetría de los ceros de reflexión y los ceros de transmisión de un filtro elíptico, se pide obtener una expresión para $R_N(\omega, L)$ en función de los ceros de transmisión similar a (5.24).
- 5.5** Determinar las constantes multiplicativas de las expresiones obtenidas en el problema anterior en función de los ceros de transmisión del filtro y de ω_s .
- 5.6** Demostrar a partir de (5.52) y de las propiedades de periodicidad de las funciones elípticas que los ceros de transmisión finitos de un filtro elíptico tienen la expresión

$$s_{zi} = \frac{j}{k} \operatorname{dc} \left(\frac{2i-1}{N} K, k \right) \quad i = 1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$$

- 5.7** Determinar las fórmulas analíticas de los coeficientes de $F(\omega)$ a partir de las funciones generalizadas de Chebyshev $C_2(\omega)$ y $C_3(\omega)$. Obviamente, estas fórmulas sólo deben depender de los ceros de transmisión ω_i .
- 5.8** Demostrar que los ceros del polinomio $V_{N-1}(\omega)$ descrito de forma iterativa por (5.121b) proporciona las posiciones de los $N - 1$ máximos de reflexión del filtro de Chebyshev generalizado de orden N .
- 5.9** Obtener una expresión o método que proporcione las posiciones de los mínimos de atenuación fuera de banda de un filtro de Chebyshev generalizado de orden N con n_{tz} ceros de transmisión. Demostrar que esas frecuencias no dependen de RL (sólo de los ceros de transmisión ω_i y del orden N).

5.10 Sea una función de transferencia del tipo

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_N)}$$

donde los $\{p_i\}$ son los polos (complejos en general), $\{z_i\}$ son los ceros (complejos en general) y k es una cierta constante real positiva. Se pide:

1. Hallar la expresión para el retardo de grupo de un término del tipo $(s - z_i)$. Se pide que la expresión no incluya funciones trigonométricas.
2. Repetir el apartado anterior para términos de la forma $\frac{1}{(s - p_i)}$.
3. Dar la expresión general para la función de transferencia del enunciado con M ceros y N polos.
4. Aplicando los conocimientos del apartado anterior, dibujar el retardo de grupo del parámetro S_{21} de un filtro paso bajo elíptico de orden $N = 4$ cuyas pérdidas de retorno dentro de la banda de paso sean de $RL = 20$ dB y la atenuación mínima en la banda atenuada sea de $A_{\min} = 50$ dB.

Capítulo 6

Transformaciones en frecuencia

Contempla de continuo que todo nace por transformación, y habitúate a pensar que nada ama tanto la naturaleza del Universo como cambiar las cosas existentes y crear nuevos seres semejantes.

—Meditaciones, Libro IV.

Marco Aurelio (121-180 d.c.)

En los capítulos precedentes se han mostrado los filtros más comunes, algunos de ellos muy clásicos y otros más avanzados. Sin embargo, todos ellos tienen como denominador común que la banda de paso es normalizada. Son prototipos paso-bajo normalizados cuya frecuencia central es nula y la banda se suele extender entre $\omega = -1$ y $\omega = 1$. Sin embargo, las especificaciones de atenuación, pérdidas de retorno, etc. de un filtro real se dan sobre un rango de frecuencias que dista mucho del rango de un prototipo paso-bajo.

El procedimiento general a seguir en el diseño de un filtro es a través de transformaciones en frecuencia. Las especificaciones se establecen en la banda ‘real’ del filtro, ya sea éste paso-bajo, paso-alto, banda eliminada o cualquier otro tipo. Esta banda se transforma en una banda del prototipo paso-bajo sobre la cual se trabaja para establecer los parámetros de diseño: atenuación, pérdidas de retorno, orden, etc.

El objetivo de este capítulo es estudiar las transformaciones que convierten cualquier filtro en paso-bajo y viceversa. En los siguientes capítulos ya nos ocuparemos de cómo obtener los circuitos equivalentes. En este capítulo estudiaremos las transformaciones para tener una vaga idea de cómo los componentes se transforman para acomodar un prototipo a una respuesta real y así ver de qué orden

de valores hablamos o qué configuración (por ejemplo circuitos resonantes serie, paralelo, etc) estamos tratando.

El procedimiento de diseño de un filtro empieza con los siguientes pasos:

1. Convertir todas las especificaciones de un filtro real en especificaciones sobre el prototipo paso-bajo.
2. En el dominio paso-bajo se obtiene la correspondiente función de transferencia y, generalmente, el prototipo circuital más simple. De forma habitual, se obtiene un prototipo paso-bajo con elementos concentrados como resistencias, bobinas y condensadores.
3. Posteriormente, aplicando la transformación inversa, se convertirá el circuito ideal paso-bajo a un circuito que cumpla las especificaciones en la banda real de interés.

Por tanto, el punto de partida es el prototipo paso-bajo. Esto es, una función de transferencia que puede ser realizada (si cumple con las condiciones necesarias) con elementos ideales clásicos con los que se puede utilizar todo el arsenal conocido de teoría de circuitos¹. Tras obtener un circuito equivalente en la banda real ya podremos ocuparnos de la realización física con la tecnología adecuada.

6.1 Escalado en impedancia y frecuencia

A lo largo de las siguientes secciones y capítulos se hará un uso extensivo de escalado tanto en magnitud como en frecuencia, así como el uso de valores normalizados para elementos y valores normalizados de frecuencia. Las razones suelen ser:

- Evita el tener que utilizar valores para los componentes muy grandes o muy pequeños (condensadores de pF o resistencias de M Ω por ejemplo).
- Nos permite diseñar filtros cuyas especificaciones generalmente se hacen alrededor de $\omega = 1$ (límite de la banda de paso para un filtro en frecuencia normalizada).
- Nos permite trabajar con especificaciones y componentes sin preocuparnos de las dimensiones.

¹Estos elementos son concentrados en el sentido clásico porque se supone que su acción tiene lugar en el punto del circuito donde están insertados. Supondremos por tanto que el circuito tiene una dimensión que no afecta a la frecuencia de trabajo. En contraposición, los elementos distribuidos sí que tienen una resistencia, inductancia o capacidad por unidad de longitud y, por ello, la dimensión del circuito es comparable a la longitud de onda de trabajo.

- La mayoría del trabajo de los diseñadores de filtros está basado en el manejo de tablas de diseño. En estas tablas, las funciones de transferencia llamadas ‘prototipo’ paso-bajo se asume que tienen una banda de paso $0 \leq \omega \leq \omega_p = 1$ y una banda atenuada $1 < \omega_s < \omega < \infty$. Además, estos prototipos se diseñan con elementos normalizados y adimensionales a partir de los cuales se obtienen los componentes reales por desnormalización.

Sean los elementos físicos reales R , L y C y sean R_n , L_n y C_n sus respectivos valores normalizados. Sea R_S una resistencia de escalado (en ohmios) y una pulsación de escalado ω_S (en rad/s). Las relación entre las variables reales y escaladas es la siguiente:

$$L = L_n \frac{R_S}{\omega_S} \quad C = \frac{C_n}{\omega_S R_S} \quad R = R_n R_S \quad (6.1)$$

Hay que decir que todos los componentes con unidades se escalan pero los que son adimensionales no, y por consiguiente quedan constantes bajo transformaciones en frecuencia.

EJEMPLO 6.1 Se diseña un prototipo paso-bajo y se requieren componentes normalizados de valores $R_n = 1$, $L_n = 1.41$ y $C_n = 0.7$. Con ello el circuito correspondiente tiene una ganancia de $G = 20$ dB. Determinar los valores reales de los componentes y la ganancia suponiendo que el valor de la impedancia de referencia para el circuito real es de 50Ω y la frecuencia de está normalizada a 1 GHz.

Solución: En este ejemplo $R_S = 50 \Omega$ y $\omega_S = 2\pi \times 10^9$ rad/s. Por tanto

$$\begin{aligned} R &= 1 \times R_S = 50 \Omega \\ L &= \frac{1.41 \times 50}{2\pi \times 10^9} = 11.22 \text{ nH} \\ C &= \frac{0.7}{50 \times 2\pi \times 10^9} = 2.23 \text{ pF} \\ K &= 20 \text{ dB} \end{aligned}$$

En general, las transformaciones en frecuencia consisten en cambiar convenientemente el eje de frecuencias. Para no confundir los diferentes ejes utilizaremos en este capítulo las variables mayúsculas para los prototipos paso-bajo normalizados. En general escribiremos

$$S = \Sigma + j\Omega \quad (\text{variables para prototipo paso-bajo}) \quad (6.2a)$$

$$s = \sigma + j\omega \quad (\text{variables para filtro objetivo}) \quad (6.2b)$$

Estas transformaciones implicarán cambio en el eje de frecuencias para la representación de las funciones de transferencia $H(j\Omega) \rightarrow H(j\omega)$ pero el eje vertical de representación permanecerá inalterado.

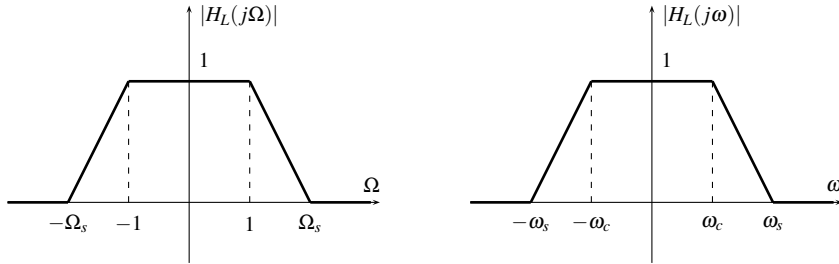


Figura 6.1: Representación esquemática simplificada de la transformación en frecuencia de un prototipo paso-bajo (izquierda) a un filtro paso-bajo (derecha). $\Omega = \pm 1$ se ha transformado en $\omega = \pm\omega_c$ y $\Omega = \pm\Omega_s$ se ha transformado en $\omega = \pm\omega_s = \pm\Omega_s\omega_c$.

6.2 Transformación paso-bajo a paso-bajo

Esta transformación es equivalente a un escalado en frecuencia o, lo que es lo mismo, una desnormalización del eje de frecuencias. Si se desea diseñar un filtro paso-bajo con una frecuencia límite ω_c para la banda de paso significa que la banda de paso pasa de estar en el rango $-1 < \Omega < 1$ a tener los límites $-\omega_c < \omega < \omega_c$ (ver figura 6.1). Esto se consigue con la transformación obvia

$$S = \frac{s}{\omega_c} \quad (6.3a)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (6.3b)$$

Esta transformación provoca que los valores de los componentes que forman el circuito cambien de la forma que sugería el escalado en frecuencia de la sección anterior

$$L = \frac{L_n}{\omega_c} \quad (6.4a)$$

$$C = \frac{C_n}{\omega_c} \quad (6.4b)$$

Es decir, tanto bobinas como condensadores del prototipo se dividen por la pulsación ω_c . Las resistencias no se ven alteradas ya que no hay escalado de impedancias en una transformación en frecuencia.

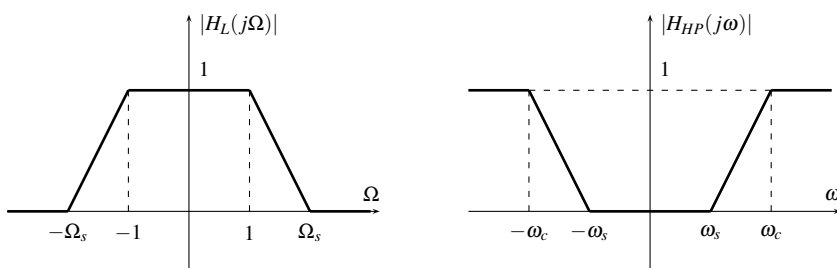


Figura 6.2: Representación esquemática simplificada de la transformación en frecuencia de un prototipo paso-bajo (izquierda) a un filtro paso-alto (derecha).

6.3 Transformación paso-bajo a paso-alto

Para convertir un prototipo paso-bajo en un filtro paso-alto es necesario que la banda del prototipo $-1 < \Omega < 1$ se convierta en $\omega_c < \omega < +\infty$ para frecuencias positivas y $-\infty < \omega < -\omega_c$ para frecuencias negativas (ver la figura 6.2). Así mismo, la banda atenuada del prototipo paso-bajo ($\Omega_s < \Omega < +\infty$ y $-\infty < \Omega < -\Omega_s$) se convierte en la banda atenuada del filtro paso-alto $-\omega_s < \omega < \omega_s$. La transformación necesaria es

$$S = \frac{\omega_c}{s} \quad (6.5a)$$

$$\Omega = -\frac{\omega_c}{\omega} \quad (6.5b)$$

donde se ha elegido el signo negativo en la transformación de pulsaciones para obtener el signo positivo en la transformación de la variable s .

La transformación de una bobina $j\Omega L_n$ y de un condensador $1/j\Omega C_n$ normalizados es ahora un cambio de componente. La bobina se convierte en condensador y viceversa

$$L = \frac{1}{\omega_c C_n} \quad (6.6a)$$

$$C = \frac{1}{\omega_c L_n} \quad (6.6b)$$

6.4 Transformación paso-bajo a paso-banda

La transformación paso-bajo a paso-banda es la más utilizada en el diseño de filtros. Consiste en transformar la pulsación $\Omega = 0$ en la pulsación central de la banda de paso del filtro paso banda a la que llamaremos ω_0 . Los límites de la banda de paso $\Omega = \pm 1$ serán ahora los límites deseados en la banda de paso a los

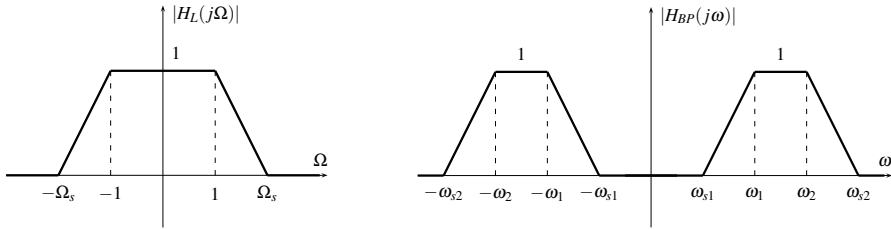


Figura 6.3: Representación esquemática simplificada de la transformación en frecuencia de un prototipo paso-bajo (izquierda) a un filtro paso-banda (derecha).

que llamaremos ω_1 y ω_2 . Obviamente esto también sucede a frecuencias negativas como se muestra en la figura 6.3. En realidad $\Omega = 1$ se transforma en $\omega = -\omega_1$ y $\omega = -\omega_2$.

La transformación paso-bajo paso-banda es

$$S = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) = \frac{1}{\Delta\omega} \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \quad (6.7a)$$

$$\Omega = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{1}{\Delta\omega} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \quad (6.7b)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (6.8a)$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (6.8b)$$

La transformación de las bobinas y los condensadores no es tan inmediata. Una bobina se transformará de la siguiente forma

$$\begin{aligned} j\Omega L_n &= jL_n \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ &= j\omega \frac{L_n}{\Delta\omega} + \frac{L_n \omega_0^2}{j\omega \Delta\omega} \\ &= j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \end{aligned}$$

es decir, la bobina se ha convertido en un circuito resonante serie donde

$$L = \frac{L_n}{\Delta\omega} \quad (6.9a)$$

$$C = \frac{\Delta\omega}{L_n \omega_0^2} \quad (6.9b)$$

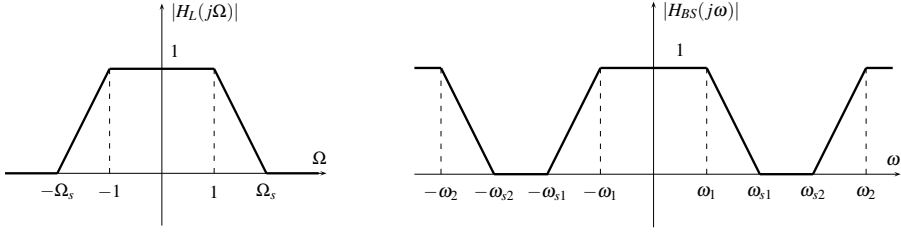


Figura 6.4: Representación esquemática simplificada de la transformación en frecuencia de un prototipo paso-bajo (izquierda) a un filtro de banda eliminada (derecha).

Un condensador C_n al transformarlo se convertirá en un resonador paralelo con los valores

$$L = \frac{\Delta\omega}{C_n\omega_0^2} \quad (6.10a)$$

$$C = \frac{C_n}{\Delta\omega} \quad (6.10b)$$

que es, obviamente, el circuito dual del anterior.

6.5 Transformación paso-bajo a banda eliminada

Esta transformación es la inversa de la transformación paso-bajo a paso-banda. Las expresiones son

$$S = \frac{1}{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)} = \Delta\omega \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (6.11a)$$

$$\Omega = \frac{-1}{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = -\Delta\omega \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (6.11b)$$

donde

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (6.12a)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} \quad (6.12b)$$

Esta vez, las pulsaciones ω_1 y ω_2 son los límites de las bandas de paso en el filtro de banda eliminada. Es decir, la pulsación $\Omega = 1$ en el prototipo paso-bajo se transforma en la pulsación $\omega = \omega_1$ y $\omega = -\omega_2$ del filtro de banda eliminada. Esto se muestra en la figura 6.4.

Siguiendo un razonamiento similar al mostrado en la sección anterior, se puede demostrar que:

- Una bobina L_n de un prototipo paso-bajo se transforma en un circuito resonante paralelo con los siguientes valores para sus componentes

$$L = \frac{\Delta\omega L_n}{\omega_0^2} \quad (6.13a)$$

$$C = \frac{1}{\Delta\omega L_n} \quad (6.13b)$$

- Un condensador C_n se transforma en un circuito resonante serie con valores

$$L = \frac{1}{\Delta\omega C_n} \quad (6.14a)$$

$$C = \frac{\Delta\omega C_n}{\omega_0^2} \quad (6.14b)$$

Un resumen de las transformaciones de componentes al aplicar las transformaciones en frecuencia aparece en la tabla 6.1.

6.6 Transformación paso-bajo a multiples bandas de paso

Hasta el momento se han tratado transformaciones simples que, en definitiva, son las más utilizadas. Imaginemos que extendemos el concepto de forma más general. El objetivo es hallar una función tal que $\Omega = X(\omega)$ que establezca una correspondencia entre el prototipo paso-bajo (que consta de una banda de paso entre $\Omega = -1$ y $\Omega = 1$ y una banda atenuada $|\Omega| > 1$) y un filtro con multiples bandas de paso y atenuadas alternadas entre si.

La idea es que $X(\omega)$ sea una función racional con polos y ceros como las transformaciones tratadas anteriormente. Las transformaciones a paso-banda y a banda eliminada nos dan una pista para ver el patrón.

El proceso sería el siguiente:

- Suponer una alternancia ‘banda de paso’— ‘banda eliminada’ con pulsaciones centrales denotadas por $\{\omega_{01}, \omega_{02}, \dots\}$. Las bandas de paso generarán ceros de la función de transformación ω_{0i} mientras que las bandas de atenuación generarán polos en la función de transformación ω_{0j} . Como vamos a asumir simetría en el eje de frecuencias, cada banda de paso con centro en ω_{0i} generará un término en el numerador del tipo $(\omega^2 - \omega_{0i}^2) = (\omega - \omega_{0i})(\omega + \omega_{0i})$. Así mismo, cada banda atenuada con centro en ω_{0j} generará un término $(\omega^2 - \omega_{0j}^2)$ en el denominador.
- Si en el dominio ω una banda de paso está centrada en $\omega = 0$ (una banda es paso-bajo), entonces el numerador será multiplicado por ω (esto sucedía en

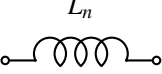
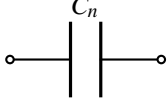
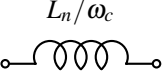
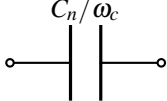
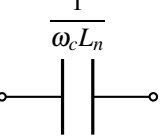
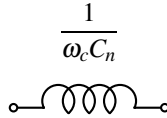
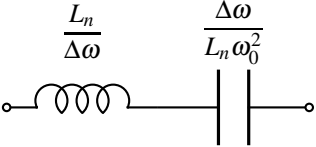
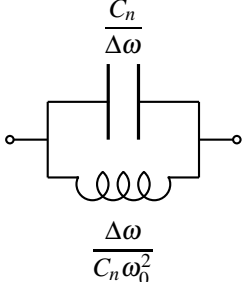
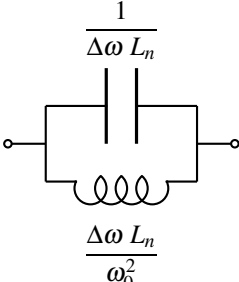
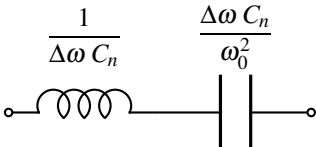
Prototipo		
Paso-bajo		
Paso-alto		
Paso-banda		
Banda eliminada		

Tabla 6.1: Resumen de la transformación de una bobina y un condensador normalizados al aplicar las transformaciones en frecuencia más comunes.

la transformación a banda eliminada). En caso de que $\omega = 0$ sea el centro de una banda atenuada, el término ω multiplicará al denominador (esto sucedía en la transformación a paso-banda). La razón es que una banda centrada en el origen no requiere de su réplica en frecuencias negativas ya que ella misma es su propia réplica.

- Se utiliza una constante multiplicativa B para ajustar las bandas. Es un grado de libertad necesario.
- Si el término ω está en el denominador se cambia de signo $X(\omega)$ para que al sustituir $\omega = s/j$ los coeficientes de s sean siempre positivos.

La función $X(\omega)$ final debe tener necesariamente uno de los dos siguientes aspectos:

$$\Omega = X(\omega) = \pm B^{\pm 1} \frac{\omega(\omega^2 - \omega_{02}^2)(\omega^2 - \omega_{04}^2) \cdots}{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{03}^2) \cdots} \quad (6.15a)$$

$$\Omega = X(\omega) = \pm B^{\pm 1} \frac{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{03}^2) \cdots}{\omega(\omega^2 - \omega_{02}^2)(\omega^2 - \omega_{04}^2) \cdots} \quad (6.15b)$$

donde B es una constante a ajustar y las constantes $0 < \omega_{01} < \omega_{02} < \dots$ son los centros de las bandas de paso y atenuadas que se han de calcular de forma adecuada. Como ejemplo podemos decir de (6.15a) que la primera banda de paso está centrada en $\omega = 0$ y por ello deja pasar las bajas frecuencias, la siguiente banda debe ser atenuada y centrada en ω_{01} , la siguiente banda debe ser de paso y centrada en ω_{02} , y así sucesivamente. La ecuación (6.15b) empieza con una banda atenuada en el origen de frecuencias y, por tanto, la siguiente debe ser de paso centrada en ω_{01} , la siguiente banda será atenuada y centrada en ω_{02} , y así sucesivamente.

Una vez obtenida la transformación correspondiente queda obtener la función en la variable s . Esto es inmediato ya que si tenemos $\Omega = X(\omega)$ obtendremos la función deseada como se ha hecho habitualmente con el cambio $S = j\Omega$ y $s = j\omega$. Habitualmente se denomina $S = Z(s)$ a la transformación porque transforma impedancias paso-bajo a paso-banda.

$$S = Z(s) = j\Omega = jX(\omega) = jX(s/j) \quad (6.16)$$

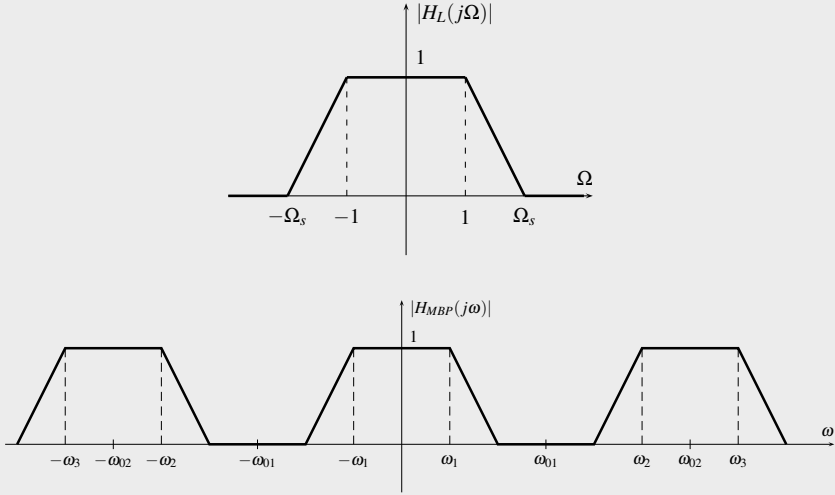
El ejemplo 6.2 es el más simple y ayudará a clarificar todo el proceso.

EJEMPLO 6.2 Obtener la transformación paso-bajo a multiple paso-banda de forma que en las bandas pasantes sean:

1. Banda 1: Margen de frecuencias desde continua hasta ω_1 . Esta es una banda paso-bajo.

2. Banda 2: Margen de frecuencias desde ω_2 hasta ω_3 . Se supone que $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < +\infty$

Solución: El primer paso consiste en dibujar el plan de frecuencias. Siempre las bandas van alternadas y entre las dos bandas de paso hay una banda atenuada y hay simetría respecto al origen de frecuencias. Los centros de las bandas serán 0 para la primera banda pasante (paso-bajo); ω_{01} para la primera banda atenuada y ω_{02} para la segunda banda pasante. En siguiente figura aparece el plan de frecuencias de forma esquemática.



El siguiente paso consiste en calcular ω_{01} y ω_{02} y la constante B de la función de transformación que quedaría

$$\Omega = X(\omega) = \frac{\omega(\omega^2 - \omega_{02}^2)}{B(\omega^2 - \omega_{01}^2)}$$

donde se ha escogido B en el denominador para que tenga dimensiones de pulsaciones y el signo positivo es simplemente para que la transformación en la variable s tenga todos los coeficientes positivos. Esto se consigue escogiendo una frecuencia conocida en el prototipo paso-bajo que se transformará en las frecuencias conocidas de las multiples bandas de paso. En este ejemplo $\Omega = 1$ se transformará en $\omega = \omega_1$, $\omega = -\omega_2$ y $\omega = \omega_3$. Por tanto, forzando $\Omega = 1$ en la transformación obtenemos el polinomio de tercer orden

$$\omega^3 - B\omega^2 - \omega_{02}^2\omega + B\omega_{01}^2 = 0$$

que tiene como 3 soluciones las mencionadas $\omega = \omega_1$, $\omega = -\omega_2$ y $\omega = \omega_3$. Pero el polinomio con esas mismas 3 soluciones se puede escribir como

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_1)(\omega + \omega_2)(\omega - \omega_3) &= 0 \\ \omega^3 - (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)\omega^2 - [\omega_1\omega_2 + \omega_3(\omega_2 - \omega_1)]\omega + \omega_1\omega_2\omega_3 &= 0 \end{aligned}$$

Identificando término a término los dos polinomios hallados, se obtienen las expresiones buscadas para B , ω_{01}^2 y ω_{02}^2

$$\begin{aligned} B &= \omega_3 - \omega_2 + \omega_1 \\ \omega_{01}^2 &= \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\omega_3 - \omega_2 + \omega_1} \\ \omega_{02}^2 &= \omega_1 \omega_2 + \omega_3(\omega_2 - \omega_1) \end{aligned}$$

Finalmente, la transformación en la variable s quedaría

$$\begin{aligned} S &= j\Omega = jX(\omega) = \frac{j\omega(\omega_{02}^2 - \omega^2)}{B(\omega_{01}^2 - \omega^2)} \\ &= Z(s) = jX(s/j) = \frac{s(s^2 + \omega_{02}^2)}{B(s^2 + \omega_{01}^2)} \end{aligned}$$

A la vista de este ejemplo simple, se pueden inferir ciertas propiedades de las transformaciones.

Las transformaciones son funciones racionales con ceros donde el filtro que se desea diseñar tiene bandas de paso y polos donde tiene bandas atenuadas.

Las principales características de $\Omega = X(\omega)$ son:

1. $\Omega = X(\omega)$ tiene ceros y polos simples que se alternan en el eje $j\omega$.
2. $\Omega = X(\omega)$ es una función impar, es decir, $X(\omega) = -X(-\omega)$. Por ello cumple que si tiene un cero o un polo en ω_{0i} entonces aparecerán términos en el numerador o denominador respectivamente del tipo $(\omega - \omega_{0i})(\omega + \omega_{0i}) = \omega^2 - \omega_{0i}^2$.
3. En el origen Ω tiene un polo o un cero simple porque hay una banda de paso o atenuada en el origen. Lo mismo sucede en $\omega = \infty$. Esto significa que la diferencia entre el orden del numerador y el denominador es exactamente 1.
4. La pendiente de Ω en función de ω es siempre positiva, por tanto $d\Omega/d\omega > 0$.

Sea la transformación $Z(s) = j\Omega = jX(\Omega) = K \frac{n(s)}{d(s)}$ siendo $n(s)$ y $d(s)$ polinomios en la variable s . Si $Z(s)$ es impar en s porque lo es en ω entonces

- Dos opciones: o $n(s)$ es impar y $d(s)$ es par o $n(s)$ es par y $d(s)$ es impar.
- $n(s)$ y $d(s)$ no pueden ser pares o impares simultáneamente.

- El polinomio que sea impar tendrá como factor s .
- La constante multiplicativa K es positiva.
- Los polinomios se descompondrán en términos del tipo $s^2 + \omega_{0i}^2$.

Las funciones de transformación $X(\omega)$ se las denomina *funciones de reactancia de Foster*². El nombre proviene del hecho de que una inductancia de valor $L = 1$ tiene una reactancia de $\Omega L = X(\omega)$. Su impedancia sería $SL = S = Z(s)$ una función físicamente realizable³ y su inversa $Y = 1/Z$ también lo sería, proporcionando un circuito dual. Las características de estas funciones reactancia que han sido enunciadas aquí y otras adicionales están recogidas de forma extensiva en (Van Valkenburg 1960). Un breve resumen de las propiedades de funciones impedancia/admitancia, de las cuales las funciones reactancia son un subconjunto, se puede encontrar en el apéndice E.

6.7 Transformaciones generales

Como se ha visto, las transformaciones más útiles son las que convierten las funciones reactancia en funciones reactancia. No se añaden pérdidas y las redes se pueden realizar sin problemas obteniendo la transformación de la bobina y el condensador en el dominio transformado.

Papoulis generalizó las transformaciones en frecuencia (Papoulis 1956). Suponiendo que estamos interesados en el módulo al cuadrado de una función de transferencia y asumiendo que $H(j\Omega)^* = H(-j\Omega)$ (respuesta al impulso real) entonces

$$A^2(\Omega) = |H(\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) \quad (6.17)$$

donde $A(\Omega) = |H(j\Omega)|$ es la amplitud de la función de transferencia. Extendiendo a la variable S

$$|H(S)|^2 = H(S)H(-S) = h(S^2) \quad (6.18)$$

donde h es la función amplitud que depende solo de S^2 como se demostró en 2.5. Por ello

$$|H(j\Omega)|^2 = A^2(\Omega) = h(-\Omega^2) \quad (6.19)$$

Por tanto, la transformación natural es de la forma

$$\Omega^2 = F(\omega^2) \quad (6.20)$$

²En reconocimiento al trabajo de Ronald M. Foster (Foster 1924).

³Esa es la razón de utilizar la notación $Z(s)$. Si $Z(s) = jX(\omega)$ es una transformación en frecuencia del tipo estudiado, siempre proporcionará una transformación del circuito paso-bajo a otro circuito (del tipo que sea) totalmente reactivo (sin pérdidas) y realizable.

donde $F(\omega^2)$ es una función racional de ω^2 con coeficientes reales y positivos para todo ω . Además se debe cumplir que

$$F(\omega^2) \geq 0 \quad (6.21)$$

En función de la variable s y S tenemos que la transformación es de la forma

$$-S^2 = F(-s^2) \quad (6.22)$$

Ahora se va a demostrar primero que la transformación establece una correspondencia entre el eje imaginario del plano S y una porción del eje imaginario en el plano s . Seguidamente se demostrará que la transformación dada por (6.22) transforma la función amplitud $h(S^2)$ es una amplitud de una función característica de una red.

Teorema 6.1 *La transformación $-S^2 = F(-s^2)$ transforma el eje $j\omega$ en una parte del eje $j\Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Para el eje imaginario se fuerza $s = j\omega$ y aplicando la condición (6.21) se obtiene

$$S^2 = -F(\omega^2) \leq 0 \quad (6.23)$$

Lo cual indica que S es imaginario puro $S = \pm j\Omega$ y por tanto $\Omega^2 = F(\omega^2)$. ■

Teorema 6.2 *La transformación (6.20) que satisface (6.21) transforma una amplitud de una función de característica $|H(S)|^2 = h(S^2)$ en una amplitud de otra función característica de una red de fase mínima.*

DEMOSTRACIÓN. Transformando $h(S^2)$ se obtiene una función de s^2 que llamaremos $r(s^2)$

$$h[-F(-s^2)] = r(s^2) \quad (6.24)$$

pasando a $j\omega$ obtenemos

$$h[-F(\omega^2)] = r(-\omega^2) \quad (6.25)$$

ya que $r(s^2)$ es una función racional de s^2 con coeficientes reales, sus raíces⁴ tienen simetría cuadrantal y son de la forma $\pm\alpha \pm j\beta$. Por consiguiente, la función puede ser factorizada como

$$r(s^2) = R(s)R(-s) \quad (6.26)$$

donde $R(s)$ tiene como raíces las raíces de $r(s^2)$ que están en el semiplano izquierdo. $R(s)$ es, por ello, racional con coeficientes reales y con todas las raíces en el semiplano izquierdo y, por definición, es una función de fase mínima. La amplitud de esta función característica la llamaremos B

$$B^2(\omega) = R(j\omega)R(-j\omega) = r(-\omega^2) = h[-F(\omega^2)] \quad (6.27)$$

Como conclusión, funciones de la forma (6.20) que satisfacen (6.21) pueden ser usadas para transformar la amplitud de una función característica en una amplitud de una función característica de fase mínima. ■

⁴Aquí “raíces” significan tanto las raíces del numerador como las del denominador.

De momento solo está claro como se relacionan $h(S^2)$ y $r(s^2)$ a través de (6.24). Sin embargo la relación de $H(S)$ y $R(s)$ no es tan inmediata.

Para determinar $R(s)$ es suficiente encontrar las raíces de $r(s^2)$. Supongamos que s_i es una de ellas. Ya que

$$r(s_i^2) = h[-F(-s_i^2)] \quad (6.28)$$

entonces $-F(-s_i^2)$ debe ser una raíz de $h(S^2)$ y por lo tanto s_i puede encontrarse resolviendo la ecuación

$$-F(-s^2) = S_i^2 \quad (6.29)$$

o de forma equivalente

$$F\left[\left(\frac{s}{j}\right)^2\right] = \left(\frac{S_i}{j}\right)^2 \quad (6.30)$$

EJEMPLO 6.3 Obtener la transformación que convierte una función de transferencia normalizada de un solo polo

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^2}$$

en un filtro de Butterworth de orden N .

Solución: Sabemos que

$$A^2(\Omega) = |H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \Omega^2} = \frac{1}{1 + j\Omega} \frac{1}{1 - j\Omega}$$

También sabemos que

$$|H(j\Omega)|^2 = h(-\Omega^2)$$

haciendo $\Omega = S/j$ obtenemos

$$h(S^2) = |H(S)|^2 = H(S)H(-S) = \frac{1}{1 - S^2} = \frac{1}{1 + S} \frac{1}{1 - S}$$

y que

$$H(S) = \frac{1}{1 + S}$$

De forma inmediata podemos suponer que la transformación necesaria es

$$\Omega^2 = F(\omega^2) = \omega^{2N}$$

Por tanto, la amplitud de la nueva función de transferencia es

$$B^2(\omega) = A^2(F(\Omega)) = \frac{1}{1 + \omega^{2N}}$$

Si se requiere la función $R(s)$ hay que encontrar las raíces de la función $h(S^2)$ que son en este caso ± 1 y aplicando (6.30) se obtiene

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2N} = \left(\frac{\pm 1}{j}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{s}{j}\right)^N = \pm j$$

De resolver la anterior ecuación se obtienen las raíces en el semiplano izquierdo y se asignan a $R(s)$. El resultado sería el de la función de transferencia del filtro de Butterworth.

PROBLEMAS PROPUESTOS

6.1 Generar una transformación paso-bajo a doble paso-banda. Se pretende que la banda de paso esté centrada en ω_{01} y ω_{03} y la banda eliminada entre las bandas de paso esté centrada en ω_{02} . Se pide:

1. Determinar el proceso para obtener ω_{01} , ω_{02} y ω_{03} y las constantes necesarias a partir de las frecuencias paso-banda necesarias.
2. Obtener la red en la que se transformaría una bobina L_n normalizada y un condensador C_n normalizado del prototipo paso-bajo.

6.2 Determinar de las funciones siguientes cuáles son válidas como transformaciones en frecuencia. Determinar el tipo de filtro objetivo que se obtendría si se aplicaran a un prototipo paso-bajo en caso de que sean transformaciones válidas.

$$\begin{array}{ll} a) \quad \Omega = K \frac{\omega(\omega^2 + 2)}{(\omega^2 + 4)} & b) \quad \Omega = K \frac{(\omega^2 + 2)}{\omega^2(\omega^2 + 4)} \\ c) \quad \Omega = K \frac{\omega(\omega^2 + 4)}{(\omega^2 + 2)} & d) \quad \Omega = K \frac{(\omega^2 + 4)}{\omega^2(\omega^2 + 2)} \end{array}$$

6.3 Siguiendo el ejemplo 6.3, demostrar que

$$r(s^2) = R(s)R(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^N s^{2N}}$$

Particularizar $r(s^2)$ para el caso $N = 3$. Hallar la correspondiente función $R(s)$ y comprobar que es de fase mínima.

6.4 Obtener la transformación que convierte una función de transferencia normalizada de un solo polo

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Omega^2}$$

en un filtro de Chebyshev de orden N . Se pide concretamente:

- Hallar la función de transformación $F(\omega^2)$.
- Obtener $h(S^2) = |H(S)|^2$.
- Determinar el proceso para obtener $R(s)$ y aplicarlo para orden $N = 3$.

6.5 Se pretende diseñar un filtro Chebyshev todo-polos paso-banda con las siguientes especificaciones:

- Frecuencia central: $f_0 = 11$ GHz.
- Ancho de banda: $BW = 300$ MHz.
- Pérdidas de retorno: $RL = 20$ dB.
- Atenuación fuera de banda:
 - $L > 40$ dB para $f > 11.3$ GHz.
 - $L > 50$ dB para $f < 10.5$ GHz.

Se pide:

1. Determinar las especificaciones sobre el modelo paso-bajo.
2. Determinar el orden necesario del filtro.
3. Para el prototipo paso-bajo, decidir si hay alguna especificación innecesaria/redundante.

6.6 Se pretende diseñar un filtro Chebyshev de banda eliminada con las siguientes especificaciones:

- Frecuencia central de la banda eliminada: $f_0 = 11$ GHz.
- Ancho de la banda eliminada: $BW = 300$ MHz.
- Atenuación mínima en la banda eliminada: $A = 40$ dB.
- Frecuencias límite para atenuación:
 - Transmisión para $f < 10$ GHz.
 - Transmisión para $f > 12$ GHz.

Se pide:

1. Determinar las especificaciones sobre el modelo paso-bajo.
2. Determinar el orden necesario del filtro.
3. Para el prototipo paso-bajo, decidir si hay alguna especificación innecesaria/redundante.

- 6.7** Determinar la expresión del retardo de grupo $\tau_{gBP}(\omega)$ de un filtro paso banda en función de la expresión del retardo de grupo de un filtro paso bajo $\tau_{gLP}(\Omega)$. Particularizar este resultado para el centro de la banda. Determinar la pendiente del retardo de grupo en el centro de la banda $\left. \frac{\tau_{gBP}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$ en función del retardo de grupo del prototipo paso bajo. ¿La pendiente es siempre positiva, siempre negativa o puede cambiar de signo según las características del filtro?
- 6.8** Sea la transformación

$$\Omega^2 = F(\omega^2) = a\omega^4 + b\omega^2 + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

aplicada a la función de transferencia de un solo polo $H(S) = 1/(1 + S)$. Se desea que mantenga la banda de paso normalizada intacta. Es decir, que $\Omega < 1 \Rightarrow \omega < 1$. Se desea, además, maximizar la pendiente en $\omega = 1$. Se pide:

- Demostrar que necesariamente se deben cumplir las condiciones siguientes

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 0 \leq c &\leq 1 \\ 1 > \frac{4ac - b^2}{4a} &> 0 \end{aligned}$$

- Al maximizar la pendiente demostrar que $a = 4, b = -4, c = 1$ y por tanto tenemos que $\Omega = 2\omega^2 - 1 = T_2(\omega)$ o lo que es lo mismo, el polinomio de Chebyshev de orden 2.

Capítulo 7

Métodos de síntesis de filtros con elementos concentrados

*Sólo da tu primer paso con fe. No es necesario que veas toda la escalera.
Sólo da tu primer paso.*

Martin Luther King (1929–1968)

En los anteriores capítulos se ha mostrado cómo generar funciones de transferencia (o parámetros S) que cumplan especificaciones de diseño requeridas. Una vez la función matemática que describe el prototipo paso-bajo está perfectamente definida, es tiempo de decidir un camino de los dos equivalentes que se presentan:

- Aplicar la transformación en frecuencia necesaria para obtener la función en la banda requerida (esto se explicó en el capítulo 6) y luego generar el circuito.
- Obtener el circuito que genere la respuesta en el dominio paso-bajo y luego transformar en frecuencia el circuito con las técnicas del capítulo 6.

Ambas opciones son perfectamente válidas, pero la práctica demuestra que la segunda opción conlleva un menor esfuerzo.

En este capítulo se van a mostrar técnicas para obtener un circuito que tenga una respuesta dada por la función de transferencia deseada. Al proceso de obtener la red a partir de la respuesta se le denomina *síntesis*.

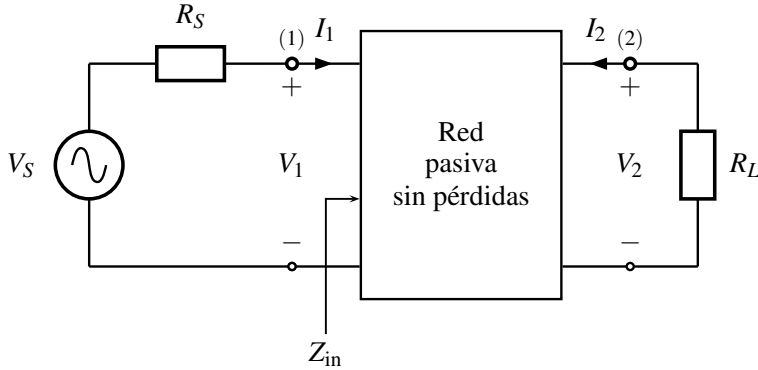


Figura 7.1: Red sin pérdidas conectada a un generador y una carga genéricos.

Las redes más conocidas son las redes en “escalera” que se obtienen a partir de extraer componentes en serie y paralelo de forma alternada proporcionando un diseño compacto y con poca sensibilidad. La forma de obtener la red en escalera aparece en la cita que encabeza este capítulo: paso a paso y peldaño a peldaño.

Existen muchos métodos de síntesis. Hay libros que cubren muchos de ellos empezando con los más simples: los métodos de síntesis de impedancias. Estos métodos sirven para obtener un circuito de un solo acceso que tenga la misma impedancia de entrada dada por una función matemática prefijada. Estos métodos son muy conocidos y pueden consultarse en referencias clásicas (Van Valkenburg 1960) o más modernas como (Wing 2008). Sin embargo, este capítulo se va a centrar en redes de dos accesos y sin pérdidas (ver figura 7.1) que definen una función de transferencia de un acceso de entrada a uno de salida. La función de transferencia, como ya se explicó en la sección 2.6, puede venir definida como un cociente de magnitudes de entrada-salida. En este capítulo se va a suponer que esa función de transferencia es el parámetro de transmisión $S_{21} = S_{12}$. En la sección 2.6 ya se dedujo la expresión del parámetro de reflexión si la función de transferencia era conocida. Recordemos que

$$\begin{aligned} |H(s)|^2 &= |S_{12}(s)|^2 \\ S_{11}(s) &= \pm \frac{Z_{\text{in}} - Z_0}{Z_{\text{in}} + Z_0} \end{aligned}$$

donde Z_0 es una impedancia de referencia que es la impedancia R_S interna del generador¹ y el signo \pm indica que hay dos soluciones (duales) que producen exactamente la misma respuesta $|S_{12}(s)|^2$.

¹La constante Z_0 puede interpretarse también como la impedancia característica de la línea de transmisión (supuestamente infinita) que en condiciones ideales conecta con el acceso de entrada del filtro.

La estrategia utilizada para atacar el problema de sintetizar el circuito a partir de una función de transferencia consistió en utilizar el camino más lógico: reutilizar lo conocido hasta el momento y obtener una función de impedancia de entrada a partir de la función de transferencia y sintetizar el circuito como si de una síntesis de impedancia normal se tratara. Obviamente hay diferencias pero, para las funciones típicas de los filtros más conocidos, nada fuera de lo explorado hasta el momento. Luego hubo que utilizar técnicas un poco más elaboradas cuando aparecían ceros de transmisión pero la estrategia pudo generalizarse de manera aceptable aunque no definitiva. Esas técnicas se verán de forma introductoria al final de este capítulo.

Empecemos por esos ejemplos de filtros todo-polos más utilizados y cuya solución fue el primer paso para atacar el problema con filtros más complejos con ceros de transmisión.

7.1 Síntesis de filtros todo-polos. Redes en escalera

Las redes en escalera doblemente terminadas serán el objetivo en este capítulo y vamos a asumir que la “escalera” que hay entre las dos resistencias es pasiva y sin pérdidas como muestra el ejemplo de la figura 7.2(a).

La razón de llamar a esta configuración en “escalera” es porque se intercalan componentes de forma alternada serie-paralelo. La configuración en escalera se ha usado tradicionalmente por su demostrada baja sensibilidad. Es decir, porque variaciones pequeñas del valor de los componentes produce pequeñas variaciones en la respuesta dentro de la banda del filtro².

La figura 7.2(b) muestra un ejemplo de orden 6 donde intuitivamente se observa que es un filtro paso-bajo por lo que sucede a altas y bajas frecuencias. A bajas frecuencias las bobinas son prácticamente cortocircuitos y los condensadores circuitos abiertos, y al contrario sucede a altas frecuencias. Los parámetros S se pueden calcular con respecto a impedancias de referencia diferentes en cada acceso (R_S para la impedancia de fuente y R_L para la impedancia de carga).

En la sección 2.6 ya se dedujo la expresión para la función de transferencia en caso de que se utilizaran diferentes definiciones para la misma (ganancia de tensión o parámetro de transmisión). En esa misma sección se definió un coeficiente de reflexión que tenía una expresión que se reproduce aquí por mayor claridad

$$\rho(s) = \pm \frac{R_S - Z_{in}(s)}{R_S + Z_{in}(s)} \quad (7.1)$$

²En (Schaumann y Van Valkenburg 2001) se hace referencia a este hecho con un poco más de extensión.

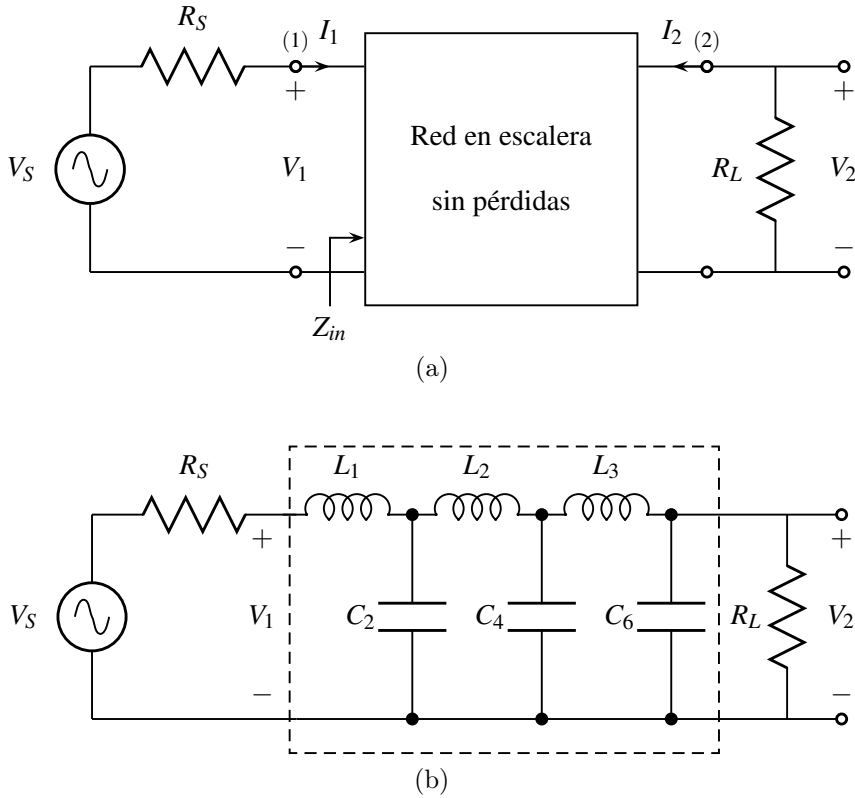


Figura 7.2: Circuitos representando un red en escalera doblemente terminada: (a) representación general; (b) red en escalera paso bajo de orden 6.

y despejando la impedancia de entrada, que obviamente depende de R_L , obtenemos dos soluciones recíprocas para Z_{in} en función de $\rho(s)$ y R_S .

$$Z_{in} = R_S \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} \quad (7.2)$$

$$Z_{in} = R_S \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} \quad (7.3)$$

Si vemos en perspectiva el objetivo primordial de la síntesis que consiste en hallar el circuito interno a la “caja” que aparece en la figura 7.2(a) se vislumbra un algoritmo que en parte es conocido: encontrar a partir de la función de transferencia la impedancia Z_{in} y con ella sintetizar la red correspondiente (cargada con R_L) con técnicas similares a las que se conocían y que aparecen de forma introductoria en el apéndice E. De hecho, fue en (Darlington 1939) donde Sydney Darlington demostró por primera vez que siempre es posible realizar una función positiva real

como una impedancia de entrada de un cuadripolo sin pérdidas terminado en una resistencia de 1Ω .

El algoritmo es simple en cuanto a los pasos a seguir:

1. Partir como dato de la función de transferencia deseada $|S_{21}|^2$. Se establecen las impedancias R_S y R_L y el objetivo es hallar la red sin pérdidas que aparece en la figura 7.2(a).
2. Obtener $|S_{11}|^2 = 1 - |S_{21}|^2$.
3. Obtener S_{11} a partir de $|S_{11}|^2$. La indeterminación del signo permite obtener dos soluciones para la síntesis llamadas *duales*.
4. Obtener Z_{in} a partir de las expresiones (7.2).
5. Sintetizar Z_{in} por uno de los múltiples métodos conocidos. Este paso depende de la pericia del diseñador y es el que acarrea la mayor parte del trabajo, pero para los filtros clásicos este paso es mecánico.

Para clarificar el algoritmo es preferible dar un ejemplo simple del método de Darlington.

EJEMPLO 7.1 Determinar la red que realiza la función de transferencia de Butterworth de orden $N = 3$ con las impedancias de fuente y carga $R_S = R_L = 1 \Omega$.

Solución: Del capítulo 4 se obtiene que para el filtro clásico de Butterworth $\varepsilon = 1$ y la función de transferencia es

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^6}$$

por tanto

$$|S_{11}(j\omega)|^2 = 1 - |S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{\omega^6}{1 + \omega^6}$$

Pasando de ω a s , obteniendo las raíces del denominador y eliminando las que no pertenezcan al semiplano izquierdo se obtiene una expresión para el coeficiente de reflexión

$$\begin{aligned} |\rho(s)\rho(-s)| &= \left| \frac{(s/j)^6}{1 + (s/j)^6} \right| \\ &= \left| \frac{s^6}{s^6 - 1} \right| \\ &= \left| \frac{(s^3)(-s^3)}{(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)(-s^3 + 2s^2 - 2s + 1)} \right| \end{aligned}$$

y por tanto

$$|\rho(s)| = \left| \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \right| \quad |\rho(-s)| = \left| \frac{s^3}{s^3 - 2s^2 + 2s - 1} \right|$$

con lo que

$$\rho(s) = \pm \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = S_{11}(s)$$

La impedancia de entrada del circuito es inmediata

$$Z_{in} = \frac{1 \pm \rho(s)}{1 \mp \rho(s)} = \left(\frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1} \right)^{\pm 1}$$

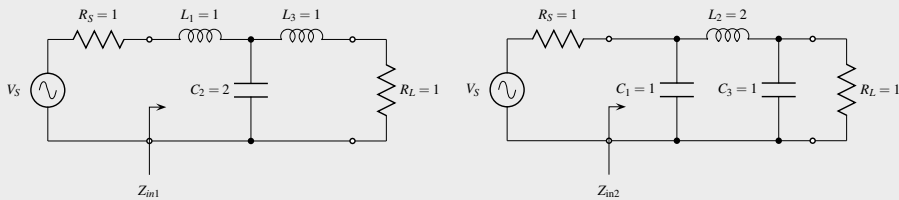
La primera solución en fracción continua proporciona la siguiente expresión:

$$Z_{in1} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1} = s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s+1}}$$

mientras que la segunda solución es la inversa de la anterior

$$Z_{in2} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s+1}}} \Rightarrow Y_{in2} = Z_{in1}$$

Los circuitos obtenidos de sintetizar las anteriores impedancias se muestran a continuación. Cabe destacar que los circuitos son duales y que la magnitud del parámetro de reflexión es la misma en ambos circuitos. Al cumplirse la unitariedad, la magnitud del parámetro de transmisión también es exactamente la misma como se pretendía.



Izquierda: realización para Z_{in1} . Derecha: realización para Z_{in2} .

7.2 Redes en escalera de los filtros más comunes

El ejemplo 7.1 extendido a varios órdenes permitió obtener tablas para los filtros de Butterworth necesarios en la práctica. Para los filtros de Chebyshev existía el problema de que para cada rizado en concreto se debería rellenar una tabla con los diferentes órdenes necesarios. Para los filtros maximalmente planos (filtros de Butterworth con $\varepsilon \neq 1$) existía el mismo problema de los dos grados de libertad: el orden y el parámetro que controla el RL en el límite de la banda. Aunque antes

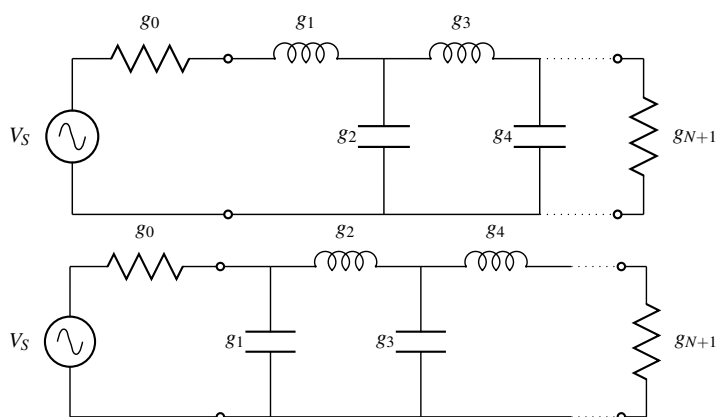


Figura 7.3: Red en escalera con elementos concentrados. Arriba: red en escalera que empieza con g_1 como bobina serie. Abajo: red dual de la anterior que empieza con g_1 como condensador en paralelo.

de los años 50 se tabularon este tipo de filtros para varios órdenes y con diferentes ε , era un engorro su diseño de manera automática.

Sin embargo, se hallaron fórmulas para los elementos de la red en escalera de ambos tipos de filtros. Hoy en día estas fórmulas todavía son muy utilizadas y vale la pena recordarlas en los siguientes apartados. La recopilación para los casos de redes simple y doblemente terminadas para filtros de Chebyshev y Butterworth aparece en (Orchard 1953).

La notación para los filtros en escalera es común. Sea un filtro en escalera de orden N con la notación mostrada en la figura 7.3 donde los valores de los elementos (R,L,C) se les denota por g_i siendo $g_0 = R_S$ y $g_{N+1} = R_L$.

Dependiendo del orden N tenemos que:

- g_0 siempre es una impedancia. En la mayoría de los casos, está normalizada y su valor es 1Ω .
- Los g_i en serie son bobinas. Los g_i en paralelo son condensadores.
- Si g_N es un condensador en paralelo entonces g_{N+1} es una resistencia en serie y por tanto el valor g_{N+1} se expresará en ohmios.
- Si g_N es una bobina serie entonces g_{N+1} es una conductancia en paralelo y por tanto en valor g_{N+1} se expresará en siemens.

- g_1 define la escalera. Puede ser una bobina en serie o un condensador en paralelo. Si g_1 es una bobina en serie, g_2 será un condensador en paralelo y así sucesivamente. Si, por el contrario, g_1 es un condensador en paralelo, se generará el circuito dual del anterior como aparece en la figura 7.3.

7.2.1 Filtro de Butterworth

La red en escalera del filtro de Butterworth se genera con las siguientes fórmulas aparecidas por primera vez en (Bosse 1951)

$$g_0 = 1 \quad (7.4a)$$

$$g_k = 2 \sin \frac{(2k-1)\pi}{2N} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7.4b)$$

$$g_{N+1} = 1 \quad (7.4c)$$

Como curiosidad, esta red en escalera siempre cumple que $g_0 = g_{N+1} = 1$. Aunque las fórmulas para los g_i solamente se aplican para el caso original de Butterworth ($\varepsilon = 1$) en el que la atenuación en $\omega = 1$ es de 3 dB, la extensión a otras atenuaciones es inmediata a través de una normalización en frecuencia. Tan sólo es necesario obtener ε de (4.18) si se tiene como dato las pérdidas de retorno RL . Escribimos

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2N}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)^{2N}} \quad (7.5)$$

donde $\omega_B = 1/\sqrt[N]{\varepsilon}$ y en este punto se aplica un escalado en frecuencia de los componentes como se explica en la sección 6.1. Llamando f_i a los valores finales escalados, éstos se obtienen como:

- Para los valores de las impedancias de fuente y de carga no hay ningún cambio por no ser dependientes de la frecuencia $f_0 = g_0 = f_{N+1} = g_{N+1} = 1$.
- Si g_i es un condensador o una bobina $f_i = g_i/\omega_B$.

7.2.2 Filtro de Chebyshev

Poco tiempo después de aparecer las fórmulas para el caso de Butterworth, las fórmulas para el filtro de Chebyshev fueron deducidas (Belevitch 1952). Éstas son sin duda las fórmulas más utilizadas en la historia de los filtros.

Los valores g_i se calculan de forma recursiva a partir de unos parámetros auxiliares que permiten una gran simplicidad y una precisión enorme.

Primero se definen los parámetros auxiliares a partir de los datos del orden requerido N y pérdidas de retorno mínimas en la banda de paso RL

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \quad (7.6a)$$

$$s = \sqrt{1 + \epsilon^2} \quad (7.6b)$$

$$\beta = \ln \frac{s + 1}{s - 1} \quad (7.6c)$$

$$\gamma = \sinh \frac{\beta}{2N} \quad (7.6d)$$

$$a_k = \sin \frac{(2k - 1)\pi}{2N} \quad k = 1, \dots, N \quad (7.6e)$$

$$b_k = \gamma^2 + \sin^2 \left(\frac{k\pi}{N} \right) \quad k = 1, \dots, N \quad (7.6f)$$

Una vez obtenidos los parámetros auxiliares, ya se puede proceder a calcular los elementos de la red en escalera g_i

$$g_0 = 1 \quad (7.7a)$$

$$g_1 = \frac{2a_1}{\gamma} \quad (7.7b)$$

$$g_k = \frac{4a_{k-1}a_k}{b_{k-1}g_{k-1}} \quad k = 2, \dots, N \quad (7.7c)$$

$$g_{N+1} = \begin{cases} 1, & N \text{ impar} \\ (\epsilon + s)^2, & N \text{ par} \end{cases} \quad (7.7d)$$

Cabe destacar que hay variaciones para las fórmulas anteriores. Por ejemplo

$$\begin{aligned} g_{N+1} &= (\epsilon + s)^2 = 2\epsilon^2 + 1 + 2\epsilon\sqrt{1 + \epsilon^2} \\ &= \frac{1}{(\epsilon - s)^2} = \frac{1}{2\epsilon^2 + 1 - 2\epsilon\sqrt{1 + \epsilon^2}} \\ &= \coth^2 \frac{\beta}{4} \quad N \text{ par} \end{aligned} \quad (7.8)$$

o también (Matthaei, Young y Jones 1980) para la definición de β

$$\beta = \ln \frac{10^{\frac{L_{Ar}}{20}} + 1}{10^{\frac{L_{Ar}}{20}} - 1} = \ln \left(\coth \frac{L_{Ar}}{40 \log e} \right) \approx \ln \left(\coth \frac{L_{Ar}}{17.37} \right) \quad (7.9)$$

donde L_{Ar} es la máxima atenuación (en dB) permitida en la banda de paso

$$L_{Ar} = 10 \log(1 + \epsilon^2) \quad (7.10)$$

donde el valor de ϵ se obtiene como indica (7.6a) si se especifica RL o se proporciona directamente como dato.

Finalmente, obsérvese que g_{N+1} para el caso par no es la unidad. Es decir, que la red en escalera no tiene una impedancia de carga igual a la de fuente.

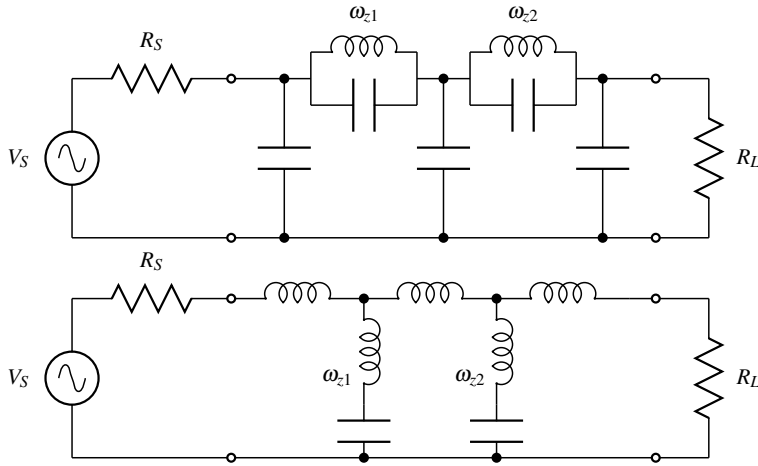


Figura 7.4: Redes en escalera que producen ceros de transmisión en ω_{z1} y ω_{z2} . Arriba: los ceros de transmisión se obtienen con circuitos resonantes paralelo en ramas serie produciendo impedancia infinita de esas ramas a las frecuencias de resonancia. Abajo: circuito dual del anterior donde los ceros de transmisión se obtienen con circuitos resonantes serie en ramas paralelo produciendo impedancias nulas de esas ramas a las frecuencias de resonancia.

7.3 Métodos generales para diseños en escalera

El método dado en la sección 7.1 adolece de una falta de generalidad muy significativa: la descomposición en fracciones continuas proporciona una extracción de elementos simples (bobina o condensador) en serie o en paralelo. Ninguno de estos elementos puede proporcionar un cero de transmisión. Es por ello que el proceso de la sección 7.1 solo sirve para filtros todo-polos. Pasar de una función de transferencia todo-polos $H(s) = k/E(s)$ a una función de transferencia del tipo $H(s) = P(s)/E(s)$ siendo k una constante y $P(s)$, $E(s)$ polinomios, hace que el proceso se complique de forma no trivial.

Primero se va a tratar la forma clásica de sintetizar redes en escalera de filtros con ceros de transmisión y respuesta simétrica y, posteriormente, se darán las directrices para extender el método a filtros de respuesta asimétrica.

Para conseguir de forma simple un cero de transmisión es necesario extraer un resonador paralelo de una rama serie o un resonador serie de una rama paralelo como se muestra en la figura 7.4 donde aparecen dos circuitos duales con los mismos ceros de transmisión (en las frecuencias ω_{z1} y ω_{z2}) que son precisamente las frecuencias de resonancia de esos resonadores serie o paralelo.

7.3.1 Parámetros de impedancia y admitancia

La síntesis en escalera de filtros de transmisión se realizará sintetizando simultáneamente los parámetros z o y que definen a una red de dos puertos.

Sea una red de dos puertos definida como muestra la figura 7.1 y con la misma convención de tensiones y corrientes (corrientes definidas siempre entrando a la red). Se define la matriz de impedancias \mathbf{Z} como la matriz de 2×2 que verifica

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (7.11)$$

donde en forma matricial se tiene que

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \quad (7.12)$$

Si a partir de cierto circuito se quiere obtener cualquier elemento de la matriz, hay que conseguir calcular la expresión

$$z_{ij} = \left. \frac{V_i}{I_j} \right|_{I_k=0} \quad \forall k \neq j \quad (7.13)$$

o lo que es lo mismo, anular las corrientes en todos los puertos menos en el j . De hecho, a estos parámetros de la matriz de impedancias se les llama parámetros de impedancia en circuito abierto ya que hay que dejar en circuito abierto todos los puertos menos uno. En este caso de dos puertos solo uno de ellos (el j) se deja en circuito abierto, pero en el caso de m puertos, este método es generalizable y hay que dejar en circuito abierto todos los puertos menos el j suponiendo que el puerto i tiene un generador ideal de tensión (sin la impedancia R_S) ya que se estudia solo la red sin pérdidas.

En el caso dual, la matriz de admitancia se define como

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \quad (7.14)$$

donde cada elemento de la matriz se calcula como

$$y_{ij} = \left. \frac{I_i}{V_j} \right|_{V_k=0} \quad \forall k \neq j \quad (7.15)$$

es decir, para cada elemento de la matriz y_{ij} hay que dejar en cortocircuito todos los accesos menos el j y calcular el cociente I_i/V_j , de ahí el nombre de parámetros de admitancia en cortocircuito.

Es inmediato obtener a partir del circuito de la figura 7.1 que

$$V_2 = -I_2 R_L \quad (7.16)$$

es una condición de carga de la red y se puede insertar directamente en la segunda ecuación de (7.11) obteniendo

$$V_2 = -I_2 R_L = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \quad \Rightarrow \quad z_{21} I_1 + (z_{22} + R_L) I_2 = 0 \quad (7.17)$$

y así poder despejar la intensidad en un acceso en función de la intensidad en el otro acceso. Por ejemplo, la impedancia de entrada del circuito cargado se podría calcular a partir de los elementos de la matriz de impedancias como

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11} I_1 + z_{12} I_2}{I_1} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} \quad (7.18)$$

y utilizando (7.17) se obtiene

$$Z_{\text{in}} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + R_L} = \frac{\Delta_z + z_{11} R_L}{z_{22} + R_L} \quad (7.19)$$

donde $\Delta_z = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}$ es el determinante de la matriz de impedancias.

Se puede obtener la relación V_2/V_S (véase problema 7.1) y con ella la función de transferencia (coeficiente de transmisión) para el diagrama de la figura 7.1

$$H(s) = S_{21}(s) = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}} \frac{V_2}{V_S} = \frac{2z_{21}\sqrt{R_S R_L}}{R_S R_L + z_{11} R_L + z_{22} R_S + \Delta_z} \quad (7.20)$$

7.3.2 Relaciones con el coeficiente de reflexión y transmisión

Sea $\rho(s)$ el coeficiente de reflexión y $H(s)$ el coeficiente de transmisión de una red. Si se cumple la condición de la inexistencia de pérdidas sabemos que

$$\begin{aligned} |\rho(j\omega)|^2 &= 1 - |H(j\omega)|^2 = 1 - \frac{|P(j\omega)|^2}{\varepsilon^2 |E(j\omega)|^2} = \frac{\varepsilon^2 |E(j\omega)|^2 - |P(j\omega)|^2}{\varepsilon^2 |E(j\omega)|^2} \\ &= \frac{|F(j\omega)|^2}{\varepsilon_R^2 |E(j\omega)|^2} \end{aligned} \quad (7.21)$$

donde, como siempre, P , F , E son polinomios mónicos y ε y ε_R son constantes reales y positivas. La expresión (7.21) demuestra que los coeficientes de reflexión y transmisión ρ y H comparten el mismo denominador. Extendiendo al plano complejo s la expresión (7.21)

$$|\rho(j\omega)|^2 \Big|_{j\omega=s} = \rho(s)\rho(-s) = \frac{F(s)F(-s)}{\varepsilon_R E(s)\varepsilon_R E(-s)} \quad (7.22)$$

y por ello el coeficiente de reflexión tiene la expresión

$$\rho(s) = \pm \frac{F(s)}{\varepsilon_R E(s)} \quad (7.23)$$

En la sección 2.6 ya se demostró que había dos expresiones para Z_{in} dependiendo del signo escogido para ρ proporcionando

$$Z_{\text{in}} = R_S \left[\frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} \right]^{\pm 1} \quad (7.24)$$

$$= R_S \frac{\varepsilon_R E(s) \pm F(s)}{\varepsilon_R E(s) \mp F(s)} \quad (7.25)$$

donde es necesario recordar que ε_R es siempre la unidad salvo en los casos de filtros completamente canónicos, los cuales son bastante raros en la práctica.

Aquí empieza propiamente el método debido a Darlington (Darlington 1939) cuyo fin era identificar el conjunto de parámetros z a partir de la función de transferencia (y de R_S y R_L). Hemos visto cómo se ha ido desarrollando el proceso:

1. Partir de la función de transferencia.
2. Obtener el coeficiente de reflexión.
3. Obtener la función de impedancia de entrada.

De esta forma se puede llevar el proceso a un campo conocido debido a todo el bagaje desarrollado en teoría de circuitos que se ha resumido en el apéndice E. Básicamente no hay nada diferente respecto al anterior método para filtros todo-polos. La diferencia radica ahora en el siguiente paso: identificar de la impedancia de entrada todos los elementos de la matriz de impedancia. Para ello se separa numerador y denominador en partes pares m_i e impares n_i . Es decir,

$$Z_{\text{in}} = R_S \frac{\varepsilon_R E(s) \pm F(s)}{\varepsilon_R E(s) \mp F(s)} = R_S \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)} \quad (7.26)$$

Manipulando la ecuación anterior junto con (7.19) se obtienen dos expresiones con las que podemos identificar los parámetros de impedancia

$$Z_{\text{in}} = R_S \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} = R_S \frac{m_1}{n_2} \frac{1 + n_1/m_1}{1 + m_2/n_2} \quad (7.27a)$$

$$Z_{\text{in}} = \frac{\Delta_z + z_{11} R_L}{z_{22} + R_L} = z_{11} \frac{1 + \frac{\Delta_z}{z_{11} R_L}}{1 + z_{22}/R_L} \quad (7.27b)$$

con lo que se obtiene tras la identificación

$$z_{11} = R_S \frac{m_1}{n_2}, \quad z_{22} = R_L \frac{m_2}{n_2}, \quad \frac{\Delta_z}{z_{11}} = R_L \frac{n_1}{m_1} \quad (7.28)$$

Ahora vamos a asumir que la red es recíproca y por tanto $z_{12} = z_{21}$. Con ello se obtiene que $\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} = z_{11}z_{22} - z_{12}^2$. Esto permite despejar z_{12}

$$z_{12}^2 = R_S R_L \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{n_2^2} \quad (7.29)$$

donde el polinomio $m_1 m_2 - n_1 n_2$ es el *ensignant* definido en el apéndice E que solo depende de potencias pares de s . Si llamamos $\mathcal{N} = \sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}$ tenemos que

$$z_{12} = \sqrt{R_S R_L} \frac{\mathcal{N}}{n_2} \quad (7.30)$$

y de (7.20) vemos que los ceros de z_{12} son los ceros de transmisión de la función de transferencia y en la notación de filtros

$$H(s) = S_{12}(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)} \quad (7.31)$$

podemos afirmar que $\mathcal{N} = \sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}$ es proporcional a $P(s)$ y por tanto sus raíces son las mismas y su orden es, obviamente, n_{tz} .

Es necesario hacer un alto en el camino y observar algunas características de los parámetros de impedancia:

- Los parámetros z comparten el mismo denominador.
- z_{11} y z_{22} son funciones racionales impares. De hecho son funciones reactancia conforme se han definido en el apéndice E.
- Para que (7.30) sea una función que forme un conjunto realizable de parámetros de impedancia, también debe ser impar como z_{11} y z_{22} y ello implica que $\mathcal{N}(s)$ debe ser un polinomio par.

Si en (7.27a) sacamos como factor común n_1/m_2 en lugar de m_1/n_2 se puede seguir el mismo razonamiento para conseguir expresiones alternativas en las que los parámetros de impedancia son impares pero $\mathcal{N}(s)$ debe ser impar en este caso³. Todas las expresiones se han resumido en la tabla 7.1 donde se han incluido las expresiones con parámetros de admitancia. En el problema 7.2 se propone verificar esta tabla como ejercicio.

³El *ensignant* se asume aquí que siempre viene definido como $\mathcal{N} = \sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}$. Pero en el caso impar sucede que la expresión de z_{12} que aparece al operar con (7.27a), sacando factor común n_1/m_2 en lugar de m_1/n_2 , es

$$z_{12} = \sqrt{R_S R_L} \frac{\sqrt{n_1 n_2 - m_1 m_2}}{m_2} = \sqrt{R_S R_L} \frac{j\mathcal{N}}{m_2}$$

Es por ello que, para no cambiar la definición de \mathcal{N} , hay que añadir una j en la tabla 7.1.

Tabla 7.1: Parámetros z e y de una red sin pérdidas con impedancia de entrada $Z_{in} = (m_1 + n_1)/(m_2 + n_2)$ con m_i par y n_i impar.

$N(s)$	z_{11}/R_S	z_{22}/R_L	$z_{12}/\sqrt{R_S R_L}$	$y_{11}R_S$	$y_{22}R_L$	$-y_{12}\sqrt{R_S R_L}$
Par	m_1/n_2	m_2/n_2	N/n_2	m_2/n_1	m_1/n_1	N/n_1
Impar	n_1/m_2	n_2/m_2	jN/m_2	n_2/m_1	n_1/m_1	jN/m_1

La tabla 7.1 no es válida siempre. Poco a poco en lo que queda de sección pondremos a prueba la consistencia del método y sus limitaciones antes de pasar a la síntesis y después a la generalización a filtros asimétricos. Lo que hemos hecho hasta el momento es seguir los pasos del método clásico. Esto es muy didáctico y nos ayuda a tener una visión completa de la situación sin la cual no veríamos la razón de ser ni la coherencia del método general.

Pongamos a prueba la consistencia del método. Se ha partido de la impedancia de entrada y con el coeficiente de reflexión $S_{11} = F(s)/(\varepsilon_R E(s))$ dentro de la expresión de la impedancia de entrada se han obtenido todas las expresiones. Veamos como relacionar el parámetro S_{21} con todo lo obtenido hasta el momento. Según sea $N(s)$ aparecen dos casos:

Caso $N(s)$ par: Partiendo de la expresión para el parámetro de transmisión (7.20) tenemos que tras insertar los elementos de la matriz de impedancia obtenidos, la expresión queda

$$\begin{aligned} S_{21}(s) &= \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)} = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}} \frac{V_2}{V_S} = \frac{2z_{21}\sqrt{R_S R_L}}{R_S R_L + z_{11}R_L + z_{22}R_S + \Delta_z} \\ &= \frac{2N}{m_1 + n_1 + m_2 + n_2} = \frac{N}{\varepsilon_R E} \end{aligned} \quad (7.32)$$

por tanto obtenemos

$$S_{21} = \frac{N}{\varepsilon_R E} = \frac{P}{\varepsilon E} \quad (7.33)$$

y finalmente la relación entre el polinomio $P(s)$ y el polinomio $N(s)$ tiene la expresión

$$P(s) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} N(s) \quad (7.34)$$

Caso $N(s)$ impar: Siguiendo los mismos pasos

$$\begin{aligned} S_{21}(s) &= \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)} = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}} \frac{V_2}{V_S} = \frac{2z_{21}\sqrt{R_S R_L}}{R_S R_L + z_{11}R_L + z_{22}R_S + \Delta_z} \\ &= \frac{2jN}{m_1 + n_1 + m_2 + n_2} = \frac{jN}{\varepsilon_R E} \end{aligned} \quad (7.35)$$

por tanto obtenemos

$$S_{21} = \frac{j\mathcal{N}}{\varepsilon_R E} = \frac{P}{\varepsilon E} \quad (7.36)$$

y finalmente la relación entre el polinomio $P(s)$ y el polinomio $\mathcal{N}(s)$ tiene la expresión

$$P(s) = j \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} \mathcal{N}(s) \quad (7.37)$$

Finalmente, es conveniente recordar que si $N - n_{tz}$ es un número par entonces el polinomio $P(s)$ no es mónico sino que tiene una j multiplicando a todos sus coeficientes. Además, un hecho al que no se le presta atención es la obtención de (7.30) en la que se hay dos soluciones ⁴

$$z_{12} = +\sqrt{R_S R_L} \frac{\mathcal{N}}{n_2} \quad (7.38a)$$

$$z_{12} = -\sqrt{R_S R_L} \frac{\mathcal{N}}{n_2} \quad (7.38b)$$

por tanto, se hace necesario comprobar la consistencia de todos los polinomios involucrados. La comprobación de consistencia debe seguir la siguiente pauta:

1. Obtener el orden del filtro N . Fácilmente se observa que

$$N = \mathcal{O}[E(s)] = \max \{ \mathcal{O}[m_1(s)], \mathcal{O}[n_1(s)], \mathcal{O}[m_2(s)], \mathcal{O}[n_2(s)] \} \quad (7.39)$$

2. Obtener el número de ceros de transmisión n_{tz}

$$n_{tz} = \mathcal{O}[P(s)] = \mathcal{O}[\mathcal{N}(s)] \quad (7.40)$$

3. Comprobar la relación entre $P(s)$ y $\mathcal{N}(s)$ con las ecuaciones (7.34) y (7.37) verificando el signo y si la j correspondiente aparece.

Por todas estas complicaciones es por lo que se generalizó el método para sistematizarlo e incluir los casos donde $N - n_{tz}$ es un número par y a su vez incluir los filtros asimétricos que involucraban polinomios con coeficientes complejos en general. En la sección 7.3.4 se tratarán este tipo de filtros y se establecerá el método general. De momento, recordar al lector que la tabla 7.1 solo sirve para casos de filtros simétricos y que además $N - n_{tz}$ sea impar. Los siguientes ejemplos cumplen esta condición para que el lector pueda seguirlos sin problemas y en la sección 7.3.4 se verá un ejemplo generalizado que no cumple las condiciones a aplicar en la tabla 7.1.

⁴La solución negativa apenas se utiliza porque $P(s)$ suele darse en forma estándar (como polinomio mónico o multiplicado por j).

EJEMPLO 7.2 Hallar la matriz de impedancias correspondiente al parámetro de transmisión del filtro con retardo de grupo maximalmente plano hallado en el ejemplo 4.4

$$S_{21}(s) = \frac{1}{\varepsilon E(s)} = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

donde $R_S = 1 \Omega$ y $R_L = 2 \Omega$. Verificar la consistencia de la matriz obtenida.

Solución: Una vez obtenido el coeficiente de transmisión, queda por obtener el coeficiente de reflexión. El denominador es el mismo y el numerador se puede obtener aplicando unitariedad.

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \Rightarrow F(s)F(-s) = E(s)E(-s) - \frac{1}{\varepsilon^2}$$

donde del enunciado se puede deducir que

$$E(s) = s^3 + 6s^2 + 15s + 15 \quad \varepsilon = 1/15$$

Por tanto

$$F(s)F(-s) = -s^6 + 6s^4 - 45s^2$$

cuyas raíces son $\{0, 0, \pm\sqrt{3+j6}, \pm\sqrt{3-j6}\}$. Esto permite descomponer $F(s)F(-s)$ como producto de dos polinomios de coeficientes reales

$$F(s)F(-s) = (s^3 + 4.4064s^2 + 6.7082s)(-s^3 + 4.4064s^2 - 6.7082s)$$

Escogiendo arbitrariamente $F(s) = s^3 + 4.4064s^2 + 6.7082s$ porque es mónico (la otra elección proporciona la solución dual) se obtiene el coeficiente de reflexión como

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{E(s)} = \frac{s^3 + 4.4064s^2 + 6.7082s}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

La impedancia de entrada se calcula como

$$Z_{in} = R_S \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} = R_S \frac{E + F}{E - F} = \frac{2s^3 + 10.4064s^2 + 21.7082s + 15}{1.5936s^2 + 8.2918s + 15} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$$

identificando los polinomios pares e impares se obtiene

$$\begin{aligned} m_1 &= 10.4064s^2 + 15 \\ n_1 &= 2s^3 + 21.7082s \\ m_2 &= 1.5936s^2 + 15 \\ n_2 &= 8.2918s \\ N &= \sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2} = 15 \end{aligned}$$

De la tabla 7.1 se obtiene finalmente

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} R_S \frac{m_1}{n_2} & \sqrt{R_S R_L} \frac{N}{n_2} \\ \sqrt{R_S R_L} \frac{N}{n_2} & R_L \frac{m_2}{n_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{8.2918s} \begin{pmatrix} 10.4064s^2 + 15 & 21.2132 \\ 21.2132 & 3.1872s^2 + 30 \end{pmatrix}$$

Como era de esperar, $N(s)$ es una constante porque sus raíces son los ceros de transmisión de la función de transferencia y en este caso el filtro es un todo-polos

($n_{tz} = 0$). El orden del filtro es $N = 3$ y $N - n_{tz} = 3$ entonces $P(s) = 1$. El orden de $N(s)$ es par y $\varepsilon = 1/15$ y $\varepsilon_R = 1$. Por tanto se cumple que

$$P(s) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} N(s) = \frac{1/15}{1} 15 = 1$$

como era de esperar y el signo de z_{12} es el correcto (positivo).

El ejemplo anterior puede resolverse como se explicó en la sección 7.1. La expansión en fracción continua es posible y este método no es necesario. Cuando aparecen ceros de transmisión, el método explicado en esta sección salva el obstáculo de la inexistencia de una fracción continua. Para realizar una síntesis completa, tomaremos para el siguiente ejemplo una función de transferencia con ceros de transmisión.

EJEMPLO 7.3 Determinar la matriz de impedancias y admitancias de un filtro de Butterworth generalizado de orden $N = 3$ con dos ceros de transmisión en ± 2 rad/s. El filtro con una $RL = 10$ dB tiene la expresión

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)} = \frac{s^2 + 4}{s^3 + 3s^2 + 4s + 4}$$

donde en este ejemplo vamos a suponer $R_S = R_L = 1 \Omega$. Comprobar la consistencia de las matrices obtenidas.

Solución: La expresión del parámetro de reflexión es inmediata

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{E(s)} = \frac{s^3}{s^3 + 3s^2 + 4s + 4}$$

La impedancia de entrada es

$$Z_{in} = \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} = \frac{E + F}{E - F} = \frac{2s^3 + 3s^2 + 4s + 4}{3s^2 + 4s + 4} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$$

Identificando se obtiene

$$\begin{aligned} m_1 &= 3s^2 + 4 \\ n_1 &= 2s^3 + 4s \\ m_2 &= 3s^2 + 4 \\ n_2 &= 4s \\ N &= s^2 + 4 \end{aligned}$$

Lo cual proporciona según la tabla 7.1

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 3s^2 + 4 & s^2 + 4 \\ s^2 + 4 & 3s^2 + 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{2s^3 + 4s} \begin{pmatrix} 3s^2 + 4 & -s^2 - 4 \\ -s^2 - 4 & 3s^2 + 4 \end{pmatrix}$$

Aquí se observa que:

- $z_{11} = z_{22}$ y que $y_{11} = y_{22}$ lo cual implica que la red es simétrica.
- Los ceros de transmisión están contenidos en el numerador de z_{12} y en el correspondiente numerador de y_{12} .
- Como era de esperar, se cumple que $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$.

Para comprobar la consistencia vemos que $N = 3$, $n_{tz} = 2$, $N - n_{tz} = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_R = 1$ y por tanto se cumple que

$$P(s) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} N(s) = \frac{1}{1} (s^2 + 4)$$

como era de esperar. El signo de z_{12} escogido ha sido el correcto (positivo). Si la matriz \mathbf{Z} es la correcta, la matriz \mathbf{Y} también lo es porque se cumple que $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$.

Como se puede observar de los dos ejemplos anteriores, la complejidad no ha aumentado a pesar de haber añadido ceros de transmisión al último problema.

7.3.3 Síntesis en escalera

Una vez obtenidos los parámetros de impedancia y admitancia, se pueden aplicar los métodos de síntesis de impedancias y admitancias que se exponen en el apéndice E. Sin embargo, antes de empezar a desarrollar un ejemplo hay que contestar algunas preguntas que aparecerán en el camino. Así mismo, habrá que tener en cuenta ciertas características:

1. ¿Qué parámetros se deben escoger para la síntesis, los z o los y ? La respuesta es la red que tenga mayor orden, es decir, la que tenga de común denominador de todos los parámetros el polinomio de mayor orden (Schaumann, Ghausi y Laker 1990).
2. Los elementos de la matriz impedancia z_{11} y z_{22} son asimismo funciones impedancia y por ello son funciones impares. Como además estamos considerando que no hay pérdidas, es inmediato inferir que son funciones reactancia. El apéndice E detalla sus propiedades.
3. El elemento z_{12} también es impar pero como según la tabla 7.1 el denominador es a veces par o a veces impar eso significa que el numerador (que contiene los ceros de transmisión del filtro) es a veces impar o par respectivamente. Si como punto de partida sabemos el número de ceros de transmisión, eso fijará la fila de la tabla 7.1 a elegir.

4. Si empezamos a desarrollar el proceso de síntesis, generalmente hay que escoger una función impedancia/admitancia pero esta vez tenemos 3 parámetros que debemos desarrollar simultáneamente. ¿Cómo lo hacemos? La respuesta es:
 - a) Escogemos para la síntesis el elemento que tenga mayor orden de z_{11} o z_{22} . Digamos como ejemplo que elegimos z_{11} .
 - b) Se presta atención al elemento z_{12} en el proceso de síntesis para ver que se obtienen los ceros de transmisión correctos. Esto se lleva a cabo con el método de extracción parcial de polo-desplazamiento de cero-extracción completa de polo. Este método se explicará a continuación.
 - c) Si el algoritmo se lleva a cabo correctamente, el tercer parámetro (z_{22} siguiendo con el ejemplo) se obtiene automáticamente si realizamos z_{11} y z_{12} .
5. Los ceros de transmisión ω_{zi} se obtienen con circuitos paralelo en una rama serie o como circuitos serie en una rama paralelo como ya se ha visto. Pero z_{11} y z_{22} no tienen la información de la localización de los ceros ω_{zi} . ¿Cómo se puede realizar z_{11} o z_{22} de manera que se obtengan esos ceros de transmisión? La respuesta es otra vez el método de extracción parcial de polo-desplazamiento de zero-extracción completa de polo.

Para explicar el proceso tomaremos como ejemplo una función admitancia de orden bajo

$$Y(s) = \frac{ks(s^2 + \beta^2)}{s^2 + \alpha^2} \quad (7.41)$$

$Y(s)$ es una admitancia de orden 3 donde $0 < \alpha < \beta$ ya que los polos y los ceros de una función inmitancia deben alternarse. Este ejemplo servirá para generalizar el método porque aumentar el orden no altera el proceso⁵. Ahora, se expande la función $Y(s)$ en fracciones simples de forma que se vean todos los polos de la función

$$Y(s) = \frac{ks(s^2 + \beta^2)}{s^2 + \alpha^2} = ks + \frac{2k_0s}{s^2 + \alpha^2} = ks + \frac{k_0}{s + j\alpha} + \frac{k_0}{s - j\alpha} \quad (7.42)$$

donde $2k_0 = k(\beta^2 - \alpha^2)$. Además sabemos que $k_0 > 0$ porque $\beta > \alpha$. En esta descomposición se ve claramente que los polos de la función son $\{j\alpha, -j\alpha, \infty\}$ y los correspondientes residuos son $\{k_0, k_0, k\}$ (para una revisión del proceso, véase el apéndice E).

⁵Aunque para órdenes elevados sea necesario usar ordenadores, el proceso no se ve alterado en cuanto a su estrategia como se verá más adelante.

Separando la admitancia en parte real e imaginaria y trabajando en $s = j\omega$ tenemos que $Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$. Si asumimos que no hay pérdidas la parte real es cero y la admitancia, como se dijo, es una función impar.

$$jB(\omega) = \frac{j\omega k (\beta^2 - \omega^2)}{\alpha^2 - \omega^2} = j \left(k\omega + \frac{2k_0\omega}{\alpha^2 - \omega^2} \right) = j \left(k\omega + \frac{k_0}{\omega + \alpha} + \frac{k_0}{\omega - \alpha} \right) \quad (7.43)$$

Los ceros están en 0 y $\pm\beta$ y los polos en $\pm\alpha$ y en ∞ . Si se sigue el proceso del apéndice E para eliminar completamente el polo en ∞ nos queda la función

$$B_1(\omega) = B(\omega) - k\omega = \frac{2k_0\omega}{\alpha^2 - \omega^2} \quad (7.44)$$

Ahora la función B_1 no tiene el polo en ∞ . En lugar de ello, B_1 tiene un cero en ∞ (ya sabíamos que en $\omega = \infty$ tenemos un polo o un cero). El polo en α no ha cambiado pero el cero en β también ha desaparecido.

En lugar de extraer el polo en el infinito totalmente, lo hacemos parcialmente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} B_2(\omega) &= B(\omega) - k'\omega = (k - k')\omega + \frac{2k_0\omega}{\alpha^2 - \omega^2} \\ &= \frac{\omega(k - k') \left(\alpha^2 + \frac{2k_0}{k - k'} - \omega^2 \right)}{\alpha^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (7.45)$$

donde $k > k'$. Comparando la expresión final de (7.45) con la primera de (7.45) vemos que ahora las características de B_2 son:

- La función B_2 todavía es de tercer orden.
- Los polos están en ∞ y α como antes.
- Los ceros están en el origen y otro cero que anteriormente estaba en β ahora está en ω_z

$$\omega_z = \sqrt{\alpha^2 + \frac{2k_0}{k - k'}} = \sqrt{\alpha^2 + k \frac{\beta^2 - \alpha^2}{k - k'}} = \sqrt{\beta^2 + \frac{k'}{k - k'} (\beta^2 - \alpha^2)} \quad (7.46)$$

como se observa en (7.46), $\omega_z > \beta$ si $k > k' > 0$. Si $k' \rightarrow k$ entonces $\omega_z \rightarrow \infty$ que es el caso de la extracción total del polo. Como el polo en α no se ha movido y el cero sí lo hace, tenemos que el límite de movimiento del cero es hasta el próximo polo ya que los polos y los ceros deben alternarse en funciones reactancia.

El comportamiento observado nos da el algoritmo que necesitábamos para generar ceros de transmisión. Si, digamos, z_{11} tiene un polo en $\omega = \infty$ lo extraemos sólo

parcialmente, $z_{11}(s) - k's$, y elegimos k' de forma que a la frecuencia ω_z la función $z_{11}(s) - k's$ se anule, es decir

$$z_{11}(s) - k's = 0 \Big|_{s^2 = -\omega_z^2} \Rightarrow k' = \frac{z_{11}(s)}{s} \Big|_{s^2 = -\omega_z^2} \quad (7.47)$$

Por tanto la función que queda $z_1 = z_{11} - k's$ tendrá ceros en $s = \pm j\omega_z$ y luego invirtiendo z_1 obtenemos polos en $s = \pm j\omega_z$ que al sintetizarlos se generará un circuito cuya frecuencia de resonancia producirá el cero de transmisión.

Vamos a seguir este proceso paso por paso para sintetizar el circuito del filtro del ejemplo 7.3.

EJEMPLO 7.4 Hallar el circuito correspondiente al filtro del ejemplo 7.3.

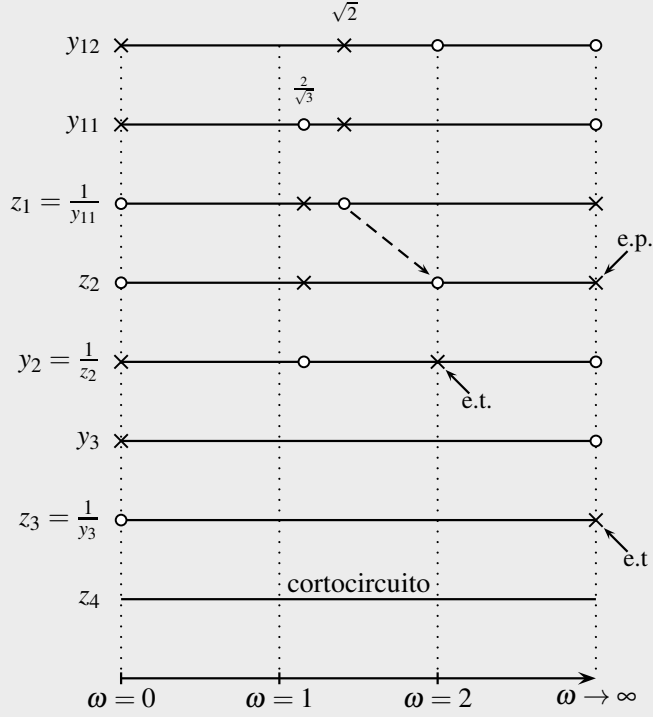
Solución: Escogemos la matriz cuyo denominador común de sus elementos sea el de mayor orden que en este caso es la de admitancia

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2s^3 + 4s} \begin{pmatrix} 3s^2 + 4 & -s^2 - 4 \\ -s^2 - 4 & 3s^2 + 4 \end{pmatrix}$$

En este caso $y_{11} = y_{22}$ y por tanto no hay que escoger cual de los dos sintetizar. El caso de y_{21} muestra que tiene un cero de transmisión en $\omega_z = \pm 2$. Como primer paso conviene dibujar el diagrama de polos y ceros sobre la recta ω tanto de y_{21} como de y_{11} . En concreto

$$\begin{aligned} s_p &= \{0, j\sqrt{2}, -j\sqrt{2}\} && \text{polos de } y_{11} \text{ y de } y_{12} \\ s_{c11} &= \left\{0, j\frac{2}{\sqrt{3}}, -j\frac{2}{\sqrt{3}}\right\} && \text{ceros de } y_{11} \\ s_{c12} &= \{2j, -2j, \infty\} && \text{ceros de } y_{12} \end{aligned}$$

La representación gráfica en la recta ω de los polos y ceros de $y_{21}(\omega)$ y de $y_{11}(\omega)$ son las dos primeras líneas de la figura siguiente que es un diagrama de polos y ceros para los parámetros de impedancia. También se han representado los diagramas de las admitancias e impedancias que aparecen en el proceso de extracción. Las extracciones de los polos han sido señaladas. La extracción parcial (e.p) y la extracción total (e.t.) generan los circuitos correspondientes en el proceso de síntesis.



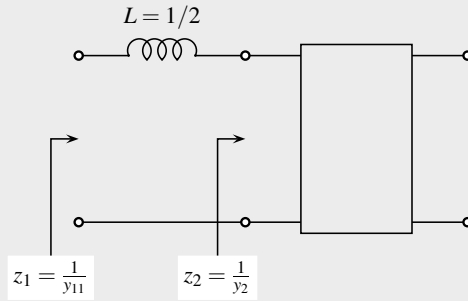
En la segunda línea de la figura anterior se muestra y_{11} cumpliendo la alternancia de polos y ceros. Ya que el cero de y_{11} no puede desplazarse desde $2/\sqrt{3}$ hasta 2 porque lo impide el polo en $\sqrt{2}$, parece que no podemos aplicar la extracción parcial de polos con desplazamiento. La solución es sintetizar el inverso de y_{11} al que llamaremos z_1 y que se observa en la tercera línea de la figura anterior. Su diagrama es simple porque es el mismo que el de la línea anterior pero cambiando polos por ceros. Ahora simplemente se desplaza el cero que hay en $\sqrt{2}$ hasta 2 y extraer parcialmente el polo en ∞ . Para ello, usando (7.47) tenemos que

$$k' = \left. \frac{z_1(s)}{s} \right|_{s^2=-4} = \left. \frac{2s^2+4}{3s^2+4} \right|_{s^2=4} = \frac{1}{2}$$

Sustrayendo $s/2$ de z_1 obtenemos

$$z_2 = z_1 - \frac{1}{2}s = \frac{s^3/2 + 2s}{3s^2 + 4}$$

cuyo cero está exactamente en $\pm 2j$ y cuyo polo no se ha movido. En estos momentos el proceso de extracción desde el punto de vista circuital tiene el aspecto que aparece en el siguiente esquemático.



El siguiente paso es invertir z_2 para crear el polo donde aparece el cero de transmisión y extraer un resonador (ver línea 5 del diagrama de polos-ceros). Separando en fracciones simples la expresión de y_2

$$y_2 = \frac{3s^2 + 4}{s^3/2 + 2s} = \frac{2}{s} + \frac{4s}{s^2 + 4}$$

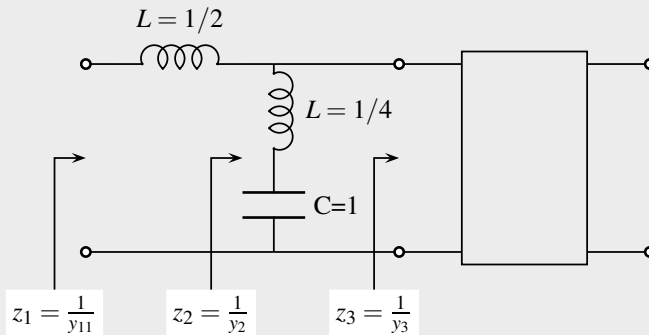
podemos identificar el término de orden 2 como un resonador con admitancia y_r (véase teorema E.19 del apéndice E)

$$y_r = \frac{4s}{s^2 + 4} = \frac{1}{\frac{s}{4} + \frac{1}{s}} \Rightarrow z_r = \frac{1}{4}s + \frac{1}{s}$$

Por tanto, tras la extracción queda

$$y_3 = y_2 - y_r = \frac{2}{s}$$

y el proceso desde el punto de vista circuital ha sido extraer una admitancia compuesta por un resonador serie como indica la figura siguiente.



Finalmente, la expresión de y_3 cuyo diagrama aparece en la sexta línea tiene un polo en el origen y un cero en el infinito. Ya que tenemos que extraer el cero de transmisión en $\omega = \infty$ y que necesitamos un polo de una inmitancia a esa frecuencia

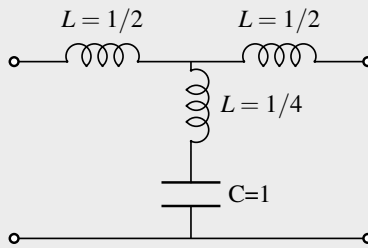
necesitamos invertir y_3 para conseguir el diagrama que tenemos en la séptima línea. Por tanto

$$z_3 = \frac{s}{2}$$

y ya podemos eliminar el polo en el infinito extrayendo el último elemento

$$z_4 = z_3 - \frac{s}{2} = 0$$

que corresponde con un cortocircuito. Aquí no ha hecho falta ningún desplazamiento porque el polo de z_3 está en el mismo lugar que el cero de transmisión de y_{12} que deseamos extraer. El circuito final aparece en la siguiente figura.



Como se observa, el circuito es simétrico como se podía esperar de la matriz de admitancia al tener $y_{11} = y_{22}$.

Finalmente, hay que tener en cuenta que:

- Al haber sintetizado y_{11} o z_{11} el circuito obtenido es correcto y tiene la correspondiente expresión para ese parámetro pero y_{12} o z_{12} se ha obtenido con sus polos (que son los mismos) y los ceros de transmisión pero hemos obviado las constantes multiplicativas que puedan haber. Por tanto, el siguiente paso es comprobar que y_{12} o z_{12} son las necesarias. Un buen método es observar lo que sucede cuando la frecuencia es muy alta o cercana a cero. En este caso es más conveniente calcular lo que sucede a frecuencias altas.

- Por una parte, la matriz de admitancias a frecuencias altas tiende a

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{Y} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s^3 + 4s} \begin{pmatrix} 3s^2 + 4 & -s^2 - 4 \\ -s^2 - 4 & 3s^2 + 4 \end{pmatrix} = \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{3}{2s} & \frac{-1}{2s} \\ \frac{-1}{2s} & \frac{3}{2s} \end{pmatrix}$$

- Por otra parte, el circuito a altas frecuencias puede considerarse que el condensador no existe y es, por tanto, una unión T de bobinas cuya matriz \mathbf{Y} es de sobra conocida

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3} \begin{pmatrix} z_2 + z_3 & -z_3 \\ -z_3 & z_1 + z_3 \end{pmatrix}$$

donde las impedancias z_1 es la del brazo de la T del acceso 1, la impedancia z_2 es la impedancia del brazo de la T del acceso 2 y la z_3 es la impedancia de la rama común. Para el caso de 3 bobinas con los valores de $z_1 = z_2 = 1/2$ y $z_3 = 1/4$ se obtiene

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2s} & \frac{-1}{2s} \\ \frac{-1}{2s} & \frac{3}{2s} \end{pmatrix}$$

y por tanto vemos que no es necesario ajustar la ganancia de y_{12} .

- En este caso vemos que la realización no es canónica porque el orden es 3 y hay 4 componentes. La extracción parcial de un polo nos ha costado un elemento, y luego, la extracción total otro.

El proceso de síntesis se puede resumir de forma general en unos pasos bien definidos:

1. Obtener la función de transferencia $H(s)$ o el correspondiente parámetro $S_{21}(s)$.
2. Obtener el parámetro de reflexión $\rho(s)$.
3. Obtener la impedancia de entrada $Z_{in}(s)$ con las resistencias de carga y fuente correspondientes. Separar el numerador y denominador en sus partes pares e impares como en (7.26).
4. Usar la tabla 7.1 para obtener los parámetros Z o Y . Seleccionar el conjunto con mayor grado y, dentro de ese conjunto, usar la función inmitancia de mayor orden.
5. Dibujar un diagrama de polos y ceros de los parámetros elegidos. Realizar la función de mayor orden (z_{11} o z_{22} en caso de impedancias o y_{11} o y_{22} en caso de admitancias) tales que los ceros de transmisión se realicen como extracción parcial de polos—desplazamientos de ceros—extracción completa. Completar la síntesis cero a cero. Asegurarse de que cada extracción parcial debe seguirse de una extracción completa.
6. Comprobar si la síntesis requiere una ganancia constante comprobando el circuito final en frecuencias como $\omega = 0$ o $\omega = \infty$. Esto suele ser necesario cuando se parte de una matriz de inmitancias que involucra cierta ganancia.

7.3.4 Extensión a filtros asimétricos

Llegó el momento de generalizar todo el proceso de la sección anterior. La simetría del filtro no se va a poder asumir y por ello el prototipo paso-bajo tendrá la parte de frecuencias positivas diferente a la de frecuencias negativas. La selectividad dependerá de si estamos tratando la banda superior o la inferior y, en definitiva, la distribución de los ceros de transmisión, si los hubiere, no sería tampoco simétrica.

Un resumen de las características relevantes de los filtros asimétricos se lista a continuación:

- Seguiremos asumiendo que el filtro es pasivo y sin pérdidas cumpliendo la condición de unitariedad.
- También asumiremos que las impedancias de fuente R_S y de carga R_L son reales. Son raros los casos prácticos en los que se necesitan unas impedancias de terminación complejas.
- El polinomio denominador de los parámetros S , llamado $E(s)$, sigue siendo Hurwitz pero no tiene coeficientes reales. Este tipo de polinomios se tratan en el apéndice A.
- Los demás polinomios, $F(s)$ y $P(s)$, tampoco son reales y siguen las directrices explicadas en el capítulo 5.
- La matriz de impedancias y admitancias tampoco está formada por polinomios de coeficientes reales en general. Las funciones impedancia no son positivas reales, solo positivas. Es decir, a diferencia de lo explicado en el apéndice E, ahora la definición de función positiva será

Definición 7.1 Sea una función $f(s)$ racional compleja⁶ en la variable compleja s . $f(s)$ será una función positiva si $\Re\{f(s)\} \geq 0$ cuando $\Re\{s\} \geq 0$.

Lo cual quiere decir que se ha eliminado la restricción de que $f(s) \in \mathbb{R}$ si $s \in \mathbb{R}$.

- Si el filtro es pasivo entonces los elementos de la matriz de impedancias y de admitancias son matrices reactancia. Es decir, todos los elementos son imaginarios puros.

No hay razón para no seguir los primeros pasos del algoritmo general que parte de la función de transferencia dada por el parámetro S_{21} o su cuadrado y obtener el parámetro S_{11} . Tras esto es igualmente válido obtener la impedancia de entrada a partir del coeficiente de reflexión. Una vez se conoce la impedancia de entrada

⁶Entiéndase como función racional compleja a la función que es cociente de dos polinomios de coeficientes complejos en general.

empieza la diferencia: no se puede descomponer el numerador y denominador de dicha impedancia en parte par $m(s)$ e impar $n(s)$ como en el caso real. La solución alternativa pasa por redefinir $m(s)$ y $n(s)$.

Definición 7.2 Sea $P(s)$ un polinomio de orden N con coeficientes complejos

$$P(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots + p_N s^N$$

El polinomio $P(s)$ puede descomponerse en dos polinomios con las definiciones siguientes

$$m(s) \triangleq \begin{cases} \Re(p_0) + j\Im(p_1)s + \Re(p_2)s^2 + \cdots + \Re(p_N)s^N, & \forall N \text{ par}; \\ \Re(p_0) + j\Im(p_1)s + \Re(p_2)s^2 + \cdots + j\Im(p_N)s^N, & \forall N \text{ impar}. \end{cases} \quad (7.48)$$

$$n(s) \triangleq \begin{cases} j\Im(p_0) + \Re(p_1)s + j\Im(p_2)s^2 + \cdots + j\Im(p_N)s^N, & \forall N \text{ par}; \\ j\Im(p_0) + \Re(p_1)s + j\Im(p_2)s^2 + \cdots + \Re(p_N)s^N, & \forall N \text{ impar}. \end{cases} \quad (7.49)$$

Como se observa, siempre se cumple que

- $P(s) = m(s) + n(s)$
- $m(j\omega)$ es un polinomio en ω que tiene coeficientes reales. Por tanto, $m(j\omega) \in \mathbb{R} \forall \omega \in \mathbb{R}$.
- $n(j\omega)$ es un polinomio en ω que tiene coeficientes imaginarios puros. Por tanto $n(j\omega)$ es un número imaginario puro $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

Con las anteriores definiciones es inmediato ver que una función racional del tipo $r(s) = m(s)/n(s)$ o $r(s) = n(s)/m(s)$ será imaginaria pura cuando $s = j\omega$, como lo debe ser una función reactancia.

Para cumplir las condiciones mencionadas, los elementos de la matriz de impedancias deben tener la forma dada en la tabla 7.2.

La versión de la tabla 7.2 para admitancias se muestra es la tabla 7.3.

Veamos las consecuencias sobre las matrices de impedancia y admitancia con un ejemplo.

EJEMPLO 7.5 Para el filtro del ejemplo 5.4 se pide obtener las matrices de admitancia e impedancia para $R_S = R_L = 1 \Omega$.

Tabla 7.2: Parámetros z de una red sin pérdidas con impedancia de entrada $Z_{in} = (m_1 + n_1)/(m_2 + n_2)$. N es el orden del filtro y n_{tz} el número de ceros de transmisión.

N	n_{tz}	z_{11}/R_S	z_{22}/R_L	$z_{12}/\sqrt{R_S R_L}$
Par	Par	n_1/m_2	n_2/m_2	jN/m_2
Par	Impar	n_1/m_2	n_2/m_2	$-jN/m_2$
Impar	Par	m_1/n_2	m_2/n_2	N/n_2
Impar	Impar	m_1/n_2	m_2/n_2	N/n_2

Tabla 7.3: Parámetros y de una red sin pérdidas con impedancia de entrada $Z_{in} = (m_1 + n_1)/(m_2 + n_2)$. N es el orden del filtro y n_{tz} el número de ceros de transmisión.

N	n_{tz}	$y_{11}R_S$	$y_{22}R_L$	$-y_{12}\sqrt{R_S R_L}$
Par	Par	n_2/m_1	n_1/m_1	jN/m_1
Par	Impar	n_2/m_1	n_1/m_1	$-jN/m_1$
Impar	Par	m_2/n_1	m_1/n_1	N/n_1
Impar	Impar	m_2/n_1	m_1/n_1	N/n_1

Solución: Del ejemplo 5.4 se sabe que

$$S_{12}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)} \quad S_{11}(s) = \frac{F(s)}{E(s)}$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2.5214 \\ P(s) &= js^2 + 4s - 3.75j \\ F(s) &= s^4 - 0.5907js^3 + 0.8729s^2 - 0.4312js + 0.0623 \\ E(s) &= s^4 + (2.169 - 0.591j)s^3 + (3.225 - 1.503j)s^2 + (2.377 - 2.302j)s + 0.451 - 1.419j \end{aligned}$$

La impedancia de entrada es

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} = \frac{E + F}{E - F} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \\ &= \frac{2s^4 + (2.169 - 1.181j)s^3 + (4.098 - 1.503j)s^2 + (2.377 - 2.733j)s + 0.513 - 1.419j}{2.169s^3 + (2.352 - 1.503j)s^2 + (2.377 - 1.871j)s + (0.389 - 1.419j)} \end{aligned}$$

Aquí ya vemos que la impedancia de entrada no tiene las características de una función p.r. como se expone en el apéndice E. Sin embargo, todavía hay características que se conservan, como que tanto el numerador como el denominador de Z_{in} no tienen sus raíces en el semiplano derecho.

Ahora, identificando se obtiene

$$\begin{aligned} m_1 &= 2s^4 - 1.1814js^3 + 4.0982s^2 - 2.7335js + 0.5135 \\ n_1 &= 2.169s^3 - 1.5032js^2 + 2.3767s - 1.4185j \\ m_2 &= 2.3524s^2 - 1.8710js + 0.3890 \\ n_2 &= 2.1690s^3 - 1.5032js^2 + 2.3767s - 1.4185j \\ N &= 0.3966(s^2 - 4js - 3.75) = 0.3966(s - 2.5j)(s - 1.5j) \end{aligned}$$

y como era de esperar las raíces de N son los ceros de transmisión del filtro. En este momento vemos que $N = 4$, $n_{tz} = 2$, $N - n_{tz}$ es par y por tanto $P(s)$ no es mónico sino que tiene sus coeficientes multiplicados por j . Sin embargo $N(s)$ no los tiene y se verifica que

$$P(s) = j \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} N(s) = j \frac{2.5214}{1} 0.3966(s^2 - 4js - 3.75) = js^2 + 4s - 3.75j$$

De acuerdo con la Tabla 7.2 podemos escribir

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_S \frac{n_1}{m_2} & j\sqrt{R_S R_L} \frac{N}{m_2} \\ j\sqrt{R_S R_L} \frac{N}{m_2} & R_L \frac{n_2}{m_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{m_2} \begin{pmatrix} n_1 & jN \\ jN & n_2 \end{pmatrix}$$

La matriz de admitancias se puede obtener de forma análoga con la Tabla 7.3 o por inversión de \mathbf{Z} obteniéndose

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1} \begin{pmatrix} n_2 & -jN \\ -jN & n_1 \end{pmatrix}$$

Síntesis con FIRs

Hemos visto que la pérdida de simetría en la respuesta eléctrica de un filtro provoca que aparezcan coeficientes complejos en las expresiones de los parámetros S y los parámetros Z e Y . Todo ello conduce a que la implementación física no se pueda realizar con sólo bobinas y condensadores (para una red sin pérdidas). Hay que añadir elementos que produzcan los coeficientes complejos y para ello se utilizan reactancias o susceptancias independientes con la frecuencia que en la literatura aparecen nombrados como FIRs (Frequency Independent Reactances).

En la figura 7.5 pueden verse los distintos circuitos elementales formados por condensadores o bobinas con FIRs. La columna ‘tipo’ da la forma de la expresión que debe tener la admitancia o impedancia para extraer el par de elementos correspondientes. Si no aparece la unidad imaginaria significa que el FIR no es necesario.

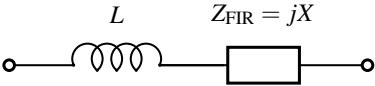
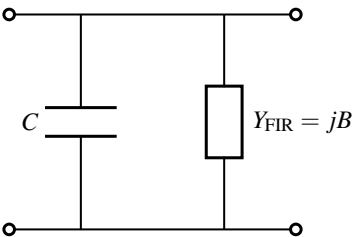
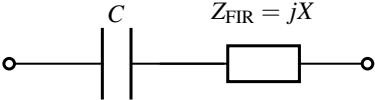
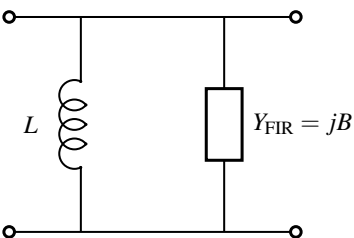
Circuito	Inmitancias	Tipo
	$Z_{\text{tot}} = Ls + jX$ $Y_{\text{tot}} = \frac{1}{Ls + jX}$	$Z = k(s \pm j\alpha)$ $Y = \frac{k}{s \pm j\alpha}$
	$Y_{\text{tot}} = Cs + jB$ $Z_{\text{tot}} = \frac{1}{Cs + jB}$	$Y = k(s \pm j\alpha)$ $Z = \frac{k}{s \pm j\alpha}$
	$Z_{\text{tot}} = \frac{1}{Cs} + jX$ $Y_{\text{tot}} = \frac{Cs}{1 + jXC s}$	$Z = \frac{k}{s} \pm j\alpha$ $Y = \frac{k}{s \pm j\alpha} \pm j\frac{k}{\alpha}$
	$Y_{\text{tot}} = \frac{1}{Ls} + jB$ $Z_{\text{tot}} = \frac{Ls}{1 + jBLs}$	$Y = \frac{k}{s} \pm j\alpha$ $Z = \frac{k}{s \pm j\alpha} \pm j\frac{k}{\alpha}$

Figura 7.5: Combinaciones serie y paralelo con FIRs. La extracción de elementos en escalera se puede llevar a cabo si la expresión es del tipo expresado en la última columna.

EJEMPLO 7.6 Sea la impedancia de entrada de una red sin pérdidas de un solo acceso

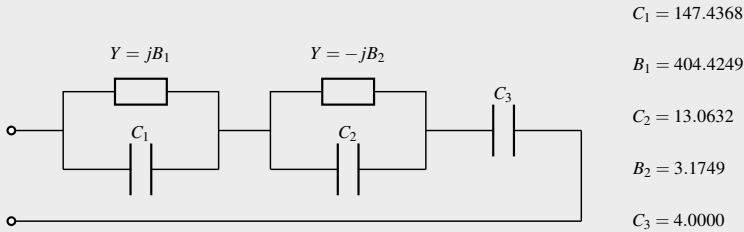
$$Z_{in} = \frac{2s^2 + 5js + 1}{6s^3 + 15js^2 + 4s}$$

Se pide determinar cuatro circuitos que producen esa impedancia, dos si la expresión se desarrolla en fracciones simples (para la impedancia y para la admitancia) y dos si la expresión se desarrolla en fracciones continuas (extrayendo polos en el infinito y en el cero).

Solución: Según aparece descrito en detalle para el caso de coeficientes reales en el apéndice E, la extensión al caso de coeficientes complejos es inmediata. Expandiendo la impedancia de entrada en fracciones simples se obtiene la forma de Foster I.

$$Z_{in} = \frac{0.0067}{s + j2.7430} + \frac{0.0766}{s - j0.2430} + \frac{0.25}{s}$$

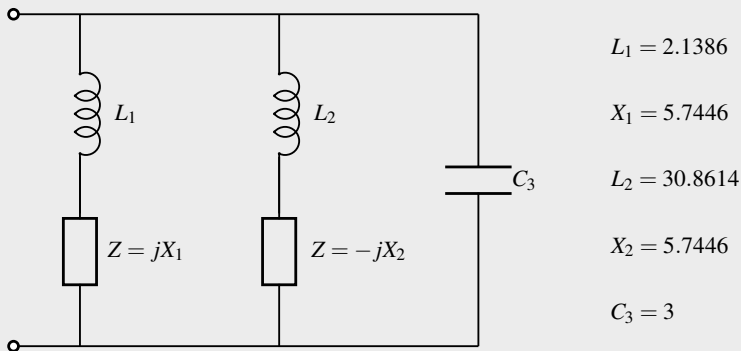
que con ayuda de la figura 7.5 vemos que genera el circuito siguiente.



Expandiendo la admitancia de entrada en fracciones simples se obtiene la forma de Foster II.

$$Y_{in} = \frac{0.4676}{s + j2.6861} + \frac{0.0324}{s - j0.1861} + 3s$$

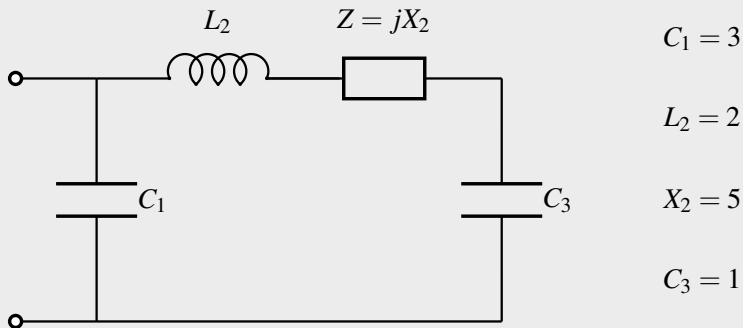
que con ayuda de la figura 7.5 vemos que se obtiene el circuito siguiente.



La expresión en fracción continua (extrayendo polos en el infinito) de la impedancia es la siguiente:

$$Z_{in} = \frac{1}{3s + \frac{1}{2s + 5j + \frac{1}{s}}}$$

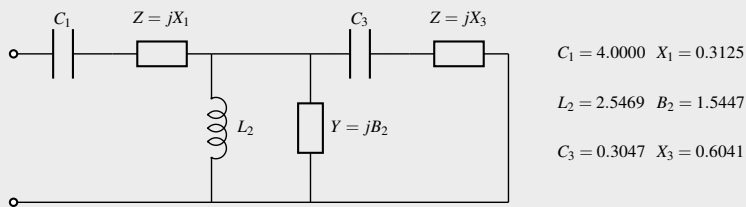
la cual proporciona el circuito siguiente (forma de Cauer I).



La expresión en fracción continua (extrayendo polos en el origen) de la impedancia es la siguiente:

$$Z_{in} = \frac{0.25}{s} + j0.3125 + \frac{1}{\frac{0.3926}{s} + j1.5447 + \frac{1}{\frac{3.2823}{s} - j0.6041}}$$

la cual proporciona el circuito que es la forma de Cauer II



Todos los circuitos obtenidos presentan la misma impedancia de entrada. Los cuatro tienen el mismo número de elementos clásicos (L s o C s) almacenadores de energía. Tres en cada caso. Sin embargo, el número de FIRs puede variar de una realización a otra. El número de FIRs no altera el orden de la red.

Las características de la función impedancia quedan todavía patentes en este ejemplo: los ceros y polos de la función impedancia/admitancia están entrelazados y siguen estando en el eje imaginario del plano complejo.

Queda pendiente de generalizar el caso de una red de dos accesos, como pueda ser un filtro, de la cual se sabe la matriz de parámetros S . De ella se obtiene Z o Y , y a partir de las matrices de inmitancia se sintetiza el circuito con un método más general que el descrito en la sección 7.3.3.

El método es perfectamente generalizable al caso complejo pero tiene un inconveniente: sintetizar la red en escalera es más complicado cuando se pierde la simetría.

Veamos un primer ejemplo simple de un filtro con un cero de transmisión donde se observa este procedimiento y sus complicaciones.

EJEMPLO 7.7 Sea el filtro de Chebyshev generalizado de orden $N = 2$ con $RL = 10$ dB y un cero de transmisión en $s = 2j$. Suponemos que $Z_S = Z_L = 1$. Determinar su red en escalera.

Solución: La matriz de admitancias tiene la expresión

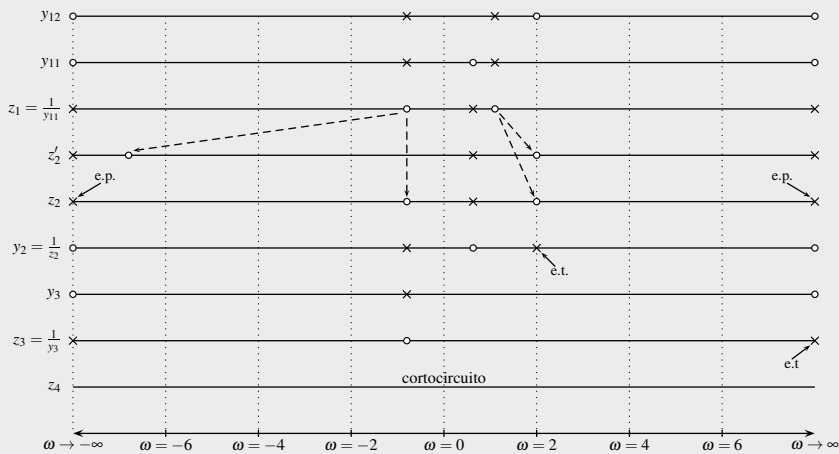
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{y_d(s)} \begin{pmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{21n}(s) & y_{11n}(s) \end{pmatrix} =$$

donde

$$\begin{aligned} y_{11n}(s) &= y_{22n}(s) = 1.5578s - 0.9827j \\ y_{12n}(s) &= y_{21n}(s) = -0.8038s + 1.6077j \\ y_d(s) &= 2s^2 - 0.5359js + 1.8185 \end{aligned}$$

Se observa que los polos y los ceros son los siguientes

$$\begin{aligned} s_p &= \{-j0.8289, j1.0969\} && (\text{polos de } y_{11} \text{ y de } y_{12}) \\ s_{c11} &= \{j0.6309\} && (\text{ceros de } y_{11}) \\ s_{c12} &= \{j2\} && (\text{ceros de } y_{12}) \end{aligned}$$



El diagrama de polos y ceros de y_{12} es la primera línea de la figura anterior donde se muestran los ceros en $\pm\infty$. Es necesario hacer notar que hay que interpretar los ceros en $\pm\infty$ como un único cero. Es decir, la línea que representa el eje imaginario de frecuencias se cierra sobre sí misma en el infinito. De esta forma podemos decir que el número de ceros y de polos es el mismo si se cuentan los que hay en el infinito. En la segunda línea se muestra el diagrama de y_{11} que tiene los mismos polos que y_{12} y el cero en $\omega = 0.63$. Este cero no se puede desplazar a $\omega = 2$ porque cruzaría por encima de un polo y por tanto se escoge sintetizar $z_1 = 1/y_{11}$ que se muestra en la tercera línea del diagrama. Ahora ya se puede desplazar el cero hasta el lugar deseado (desde 0.63 a 2) pero si hacemos

$$k' = \left. \frac{z_1(s)}{s} \right|_{s=2j} = 1.1979$$

obtendríamos una nueva impedancia a la que llamaremos z'_2 (la impedancia z'_2 no es la correcta y por ello a la impedancia correcta la llamaremos z_2).

$$z'_2 = z_1 - k's = \frac{0.1340s^2 + j0.6413s + 1.8185}{1.5578s - 0.9827j}$$

En este caso se ha extraído una bobina (serie) de valor $L_1 = 1.1979$ H. El diagrama de polos y ceros aparece en la línea 4. He aquí la primera diferencia con el caso real: se ha movido el cero a la posición deseada pero el otro cero también se ha movido. En el caso real todo lo que sucedía a frecuencias positivas, sucedía a frecuencias negativas. En este caso la asimetría es evidente y puede suceder que, al moverse el cero, cruce por encima de un polo y la alternancia polo-cero se rompa. Esto no debería suceder ya que sólo debemos desplazar un cero.

Este proceso nos indica que no se puede extraer de esa forma un elemento para crear el cero deseado. De hecho si expresamos z_1 en fracciones simples observamos

$$z_1 = \frac{0.8734}{s - j0.6309} + 1.2839s + j0.4659$$

lo cual indica que en realidad se puede extraer una bobina y un FIR. Como necesitamos realizar un proceso de extracción parcial para obtener el cero en $\omega = 2$, no es evidente qué bobina y qué FIR extraer ya que tenemos que la nueva impedancia $z_2(s) = z_1(s) - L_1s - jX_1$ debe ser cero en $s = 2j$ y las incógnitas son dos (L_1 y X_1). En el caso simétrico esto no sucede ya que la condición es única y la incógnita también. La segunda condición que debemos imponer nos permite paliar el defecto arriba mencionado: forzar que los demás ceros no se muevan (recuérdese que los polos tampoco se mueven). En este caso tendremos

$$z_1(s) = 1.2839 \frac{(s + j0.8289)(s - j1.0969)}{(s - j0.6309)}$$

y que deseamos llegar a

$$z_2(s) = A \frac{(s + j0.8289)(s - j2)}{(s - j0.6309)}$$

cuyo diagrama de polos y ceros se refleja en la línea 5 a falta de conocer la constante A . Pero sabemos que

$$z_1(s) - z_2(s) = \frac{(s + j0.8289)}{(s - j0.6309)} [1.2839(s - j1.0969) - A(s - j2)] = L_1 s + jX_1$$

ello implica que el corchete es un múltiplo del denominador o de otra forma $z_1(s) - z_2(s)$ sería un cociente en lugar de un polinomio de orden 1 en s . Por tanto

$$1.2839(s - j1.0969) - A(s - j2) = \alpha(s - j0.6309)$$

para cierta α desconocida. Si llamamos

$$\begin{aligned} a &= 1.2839 \rightarrow \text{constante multiplicativa} \\ z_1 &= j1.0969 \rightarrow \text{posición inicial del cero} \\ z_2 &= j2 \rightarrow \text{posición final del cero} \\ p &= j0.6309 \rightarrow \text{posición del polo que se cancelará} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$a(s - z_1) - A(s - z_2) = \alpha(s - p_1) \Rightarrow (a - A) \left(s - \frac{Az_2 - az_1}{A - a} \right) = \alpha(s - p_1)$$

y ahora identificando el término independiente obtenemos que

$$\frac{Az_2 - az_1}{A - a} = p_1 \Rightarrow A = a \frac{z_1 - p_1}{z_2 - p_1} = 0.4370 \Rightarrow \alpha = a - A = 0.8469$$

y por tanto

$$z_1(s) - z_2(s) = 0.8469s + j0.7020$$

es decir, hemos extraído una bobina de $L_1 = 0.8469$ H y un FIR de valor $X_1 = 0.7020$.

Ahora invertimos z_2 para obtener el polo en $\omega = 2$ y extraerlo.

$$y_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{s - j0.6309}{0.4370s^2 - j0.5118s + 0.7245} = \frac{1.1808}{s + 0.8289j} + \frac{1.1075}{s - 2j} = y_3 + \frac{1.1075}{s - 2j}$$

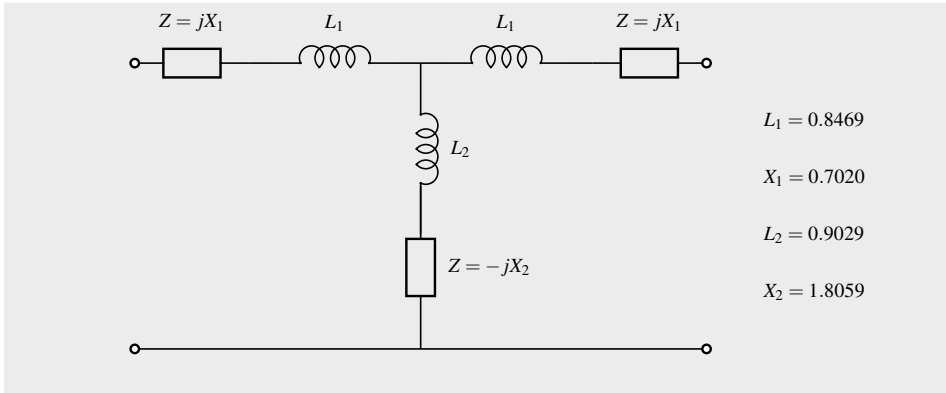
cuyo diagrama de polos y ceros aparece en la línea 6. Viendo la figura 7.5, la fracción simple asociada al polo en $s = 2j$ genera una bobina de valor $L_2 = 1/1.1075 = 0.9029$ H en serie con un FIR de valor $X_2 = -2/1.1075 = -1.8059$. Todavía queda

$$y_3 = \frac{1.1808}{s + 0.8289j}$$

cuyo diagrama de polos y ceros aparece en la línea 7. Invirtiendo y_3 nos proporciona z_3 (diagrama de polos y ceros en la línea 8)

$$z_3 = \frac{s + 0.8289j}{1.1808} = 0.8469s + 0.7020j$$

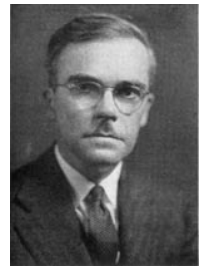
o lo que es lo mismo, una bobina $L_3 = 0.1019$ H con un FIR de valor $X_3 = 0.6914$. Esto era de esperar ya que la red es simétrica porque originalmente $y_{11} = y_{22}$. El circuito final de la red en escalera se muestra a continuación.



El ejemplo anterior ha sido muy directo y esclarecedor. Podría hacernos caer en la falsa opinión de que siempre es posible extraer el circuito de la función inmi-tancia dada. Esto no es así y el lector puede encontrar ejemplos fácilmente (véase problema 7.7). Como se verá, es posible sintetizar una red que genere la respuesta del filtro, sin embargo, esta red no es necesariamente en escalera. Posiblemente sea necesario incluir otros elementos (inversores o bobinas acopladas). Es necesario, por tanto, que aumentemos el bagaje de técnicas de síntesis con algunos elementos que se muestran en capítulos posteriores.

7.4 Nota histórica: Norton

Edward Lawry Norton nació el 28 de julio de 1898 en Rockland (Maine, USA) y falleció el 28 de enero de 1983 en Chatham (New Jersey, USA) fue un ingeniero de mucho talento en los laboratorios Bell. Es famoso por desarrollar el concepto de equivalente circuital de Norton aunque su principal ocupación era el diseño de filtros.



Sirvió como radio operador en la US Navy entre 1917 y 1919. Asistió durante dos años a la universidad de Maine (un año antes y un año después de su servicio en tiempo de guerra) antes de ser transferido al MIT en 1920. Recibió su licenciatura (B.S. degree = Scientiae Baccalaureus) en ingeniería eléctrica en 1922. En 1922 empezó a trabajar en la Western Electric Corporation en Nueva York, la cual se convirtió en los laboratorios Bell en 1925. Mientras trabajaba para la Western Electric, obtuvo el grado de master (M.A. degree = Artium Magister) en ingeniería

eléctrica por la universidad de Columbia en 1925. Se retiró en 1961 y murió el 28 de enero de 1983 en Chatham, New Jersey.

Aunque sus principales intereses eran la teoría de circuitos de comunicaciones, sistemas acústicos y la transmisión de datos a alta velocidad por líneas de teléfono, Norton fue mundialmente conocido por el descubrimiento del equivalente circuital dual del famoso equivalente de Thevenin. El 11 de noviembre de 1926 propuso su equivalente para el diseño de instrumentación de grabación que era principalmente alimentada por corriente. Lo hizo en la nota técnica “Design of Finite Networks for Uniform Frequency Characteristic” perteneciente a los archivos de la AT & T que contiene la descripción del equivalente que lleva su nombre. Norton nunca publicó este resultado ni lo mencionó en sus 18 patentes encontradas (en un curriculum suyo decía que tenía 19) y 3 publicaciones. En Europa es conocido como el equivalente de Mayer-Norton. El ingeniero de telecomunicaciones alemán Hans Ferdinand Mayer publicó el mismo resultado en el mismo mes que Norton publicó su nota técnica.

Norton escribió 92 notas técnicas. Parece que Norton prefería permanecer tras la sombra debido a su falta de publicaciones. Esta reticencia sin embargo no podía ocultar sus capacidades como se trasluce en esta anécdota tomada de la historia de los laboratorios Bell (Fagen, Joel, O’Neil y Schindler 1975):

Norton era algo así como una figura legendaria en la teoría de circuitos que producía un número prodigioso de diseños armado solamente con una regla de cálculo y su intuición. En una ocasión T.C. Fry llamó a su grupo de teoría de redes, el cual incluía por aquel entonces a Bode, Darlington y R.L. Dietzold entre otros y les dijo “Muchachos, mejor no os apuntéis a ningún curso para graduados u otro trabajo externo para este próximo año porque vais a haceros cargo del diseño que Ed Norton ha estado haciendo con una sola mano”.

Norton aplicó sus conocimientos del análisis de circuitos a muchos campos y después de la Segunda Guerra Mundial trabajó en sistemas de guiado de misiles.

Norton fue el precursor del método que Darlington desarrolló para el diseño de filtros (Norton 1937). En este mismo artículo Norton obtuvo las fórmulas para los valores del circuito en escalera de filtros simplemente terminados de Butterworth.



Figura 7.6: Edward Norton fotografiado en los laboratorios Bell el 13 de Octubre de 1925. Fuente: Archivos de la AT & T.

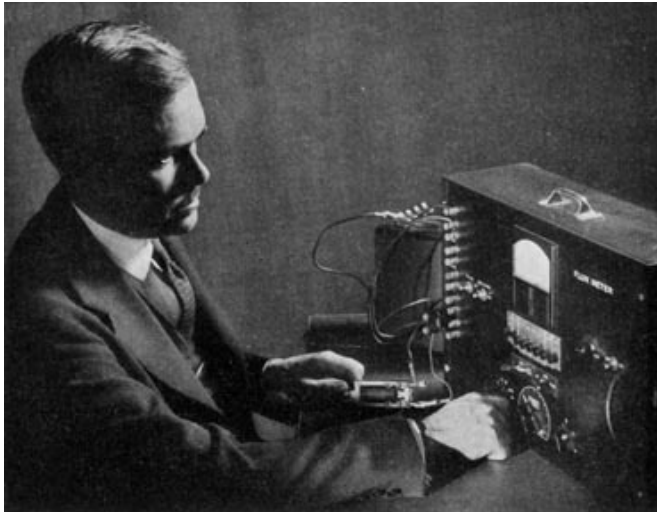


Figura 7.7: Fotografía de Edward Norton de un artículo suyo de Junio de 1942 “Magnetic fluxmeter”. Archivos de los laboratorios Bell, volumen 20.

7.5 Nota histórica: Belevitch

Vitold Belevitch (2 de Marzo de 1921-26 de Noviembre de 1999) fue un matemático e ingeniero Belga de origen ruso. Realizó importantes aportaciones en la teoría de redes eléctricas.

Nacido de padre ruso y madre de ascendencia polaca, su nacimiento se vio envuelto en la revolución Bolchevique. Sus padres intentaron escapar de su hogar en la actual San Petersburgo. Cruzando la frontera con Finlandia, la madre de Belevitch (en avanzado estado de gestación) pudo escapar pero el padre fue arrestado y deportado a Siberia. Pronto la madre de Belevitch dio a luz a su hijo en la población de Terijoki en territorio Finlandés (hoy territorio ruso). Con su hijo, la madre de Belevitch continuó su viaje hasta Helsinki donde registró su nacimiento.

Cuando Vitold tenía unos 4 años se marcharon a Bélgica donde creció y se educó. De 1937 a 1942 Vitold Belevitch estudió ingeniería eléctrica y mecánica en la Université Catholique de Louvain donde se graduó.

En Amberes, Bélgica, trabajó para la Bell Telephone Manufacturing Company (BTMC que era filial de la estadounidense ITT) que al principio de la segunda guerra mundial (cuando EEUU no estaba involucrado en la guerra) pasó a depender de la filial de la ITT de Berlin para la que Cauer estaba trabajando en aquel entonces. Así es como Cauer en una visita contactó con Belevitch y le introdujo en la teoría de circuitos y el diseño de filtros. Bajo la dirección de Charles Manneback, y supervisión de Cauer como segundo director de tesis, Belevitch se doctoró en 1945. Esta tesis estaba basada en el trabajo de Cauer pero introducía un concepto revolucionario: la matriz de repartición. Realizó este trabajo cuando los contactos con EEUU estaban interrumpidos por la guerra. Este concepto era equivalente a la matriz de dispersión (scattering matrix) utilizada con éxito por los científicos que desarrollaron la tecnología del radar⁷.

Desde 1951 Belevitch estuvo involucrado dentro de la BTMC en el desarrollo de computadores electrónicos para el gobierno belga. En 1955 fue nombrado director del centro de computación belga llamado Comité d'Étude et d'Exploitation des Calculateurs Électroniques en Bruselas.

En 1963 fue nombrado jefe del nuevo Laboratoire de Recherche MBLE (más tarde llamado Philips Research Laboratories Belgium) en Eindhoven. Estas instalaciones se especializaron en matemática aplicada para Philips y estaban involucradas

⁷La matriz de dispersión era conocida antes en física para describir la dispersión de partículas aunque el concepto es diferente. El término scattering matrix fue usado por el físico e ingeniero Robert Henry Dicke en 1947 quien desarrolló la idea independientemente a lo largo de su trabajo en radar durante la segunda guerra mundial. La técnica y uso de la matriz de dispersión fue popularizada en los años 60 por Kaneyuka Kurokawa.

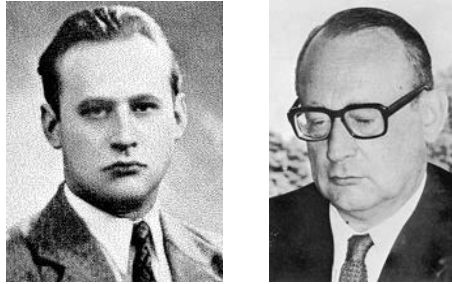


Figura 7.8: Fotografías de Vitold Belevitch. Izquierda: el joven Vitold Belevitch en el año 1947 a la edad de 26 años. Derecha: Belevitch en edad adulta. Fuente: Revista Electrical Communication. Archivo Digital del Foro Histórico de las Telecomunicaciones.

en investigación en computación. Belevitch permaneció en este puesto hasta su jubilación en 1984.

Desde 1953 a 1985 Belevitch dio clases en la universidad sobre teoría de circuitos y otros temas matemáticos relacionados con la ingeniería eléctrica.

Sus mayores contribuciones fueron en la teoría de circuitos, principalmente en la base matemática de filtros⁸, moduladores, líneas acopladas y circuitos no lineales. También hizo contribuciones en teoría de la información, ordenadores, matemáticas y lingüística.

De interés en el diseño de filtros es el llamado teorema de Belevitch (Belevitch 1968) que determina si una matriz de dispersión \mathbf{S} puede representar a un circuito de dos puertos sin pérdidas.

Teorema 7.1 (Belevitch) *Sea una matriz de dispersión \mathbf{S}*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces \mathbf{S} representa una red sin pérdidas si y solo si

$$\mathbf{S} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} h & f \\ f^* & -h^* \end{pmatrix}$$

donde g , h y f son polinomios que cumplen las siguientes propiedades:

- *g es un polinomio mónico y Hurwitz.*
- *El orden de la red es $\mathcal{O}(g)$.*

⁸Belevitch fue el que obtuvo las fórmulas analíticas para los elementos de la red en escalera del filtro de Chebyshev.

- $\mathcal{O}(g) \geq \mathcal{O}(f)$ y $\mathcal{O}(g) \geq \mathcal{O}(h)$.
- $hh^* + ff^* = gg^*$

Obviamente si añadimos más propiedades como reciprocidad, simetría, coeficientes polinomiales reales, etc se pueden añadir/simplificar condiciones en el teorema anterior (Belevitch [1968](#)). Por ejemplo, asumir coeficientes reales en los polinomios implica que la respuesta en frecuencia tiene módulo par y fase impar o que la respuesta al impulso es real. Esto es frecuente en la teoría clásica de circuitos porque implica que el circuito correspondiente se puede sintetizar con bobinas y condensadores que obviamente tienen sus autoinducciones y capacidades reales.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 7.1** Sea una red como la que aparece en la figura 7.1 definida por sus parámetros de impedancia. Hallar la expresión de la función de transferencia $H(s) = V_2/V_S$ y de $H(s) = S_{12}$ según aparece definida en la sección 2.6. Escribir la expresión en función de los elementos de la matriz de impedancias, R_S y R_L para obtener (7.20).
- 7.2** Verificar las últimas tres columnas de la tabla 7.1 (uso de parámetros de admitancia) de forma similar a como se ha hecho en el texto con parámetros de impedancia. Justificar adecuadamente el signo de la última columna.
- 7.3** Obtener la matriz \mathbf{Z} para un prototipo paso-bajo de un filtro de Butterworth de orden $N = 3$.
- 7.4** Obtener la matriz \mathbf{Y} para el prototipo paso-bajo del filtro de Butterworth de orden $N = 3$ del problema 7.3 y verificar que la solución cumple $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$.
- 7.5** Obtener la síntesis del circuito de un prototipo paso-bajo del filtro de Butterworth de orden $N = 4$ pero con resistencias de fuente y de carga que cumplan $R_S = 2R_L$. El circuito, obviamente, tendrá sus componentes escalados por R_S . (Sugerencia: hágase $R_S = 1$ y al terminar de sintetizar el circuito escálelo por R_S)
- 7.6** Demostrar si el determinante de la matriz \mathbf{Z} de un filtro asimétrico de orden N con n_{tz} ceros de transmisión es una función reactancia o no lo es.
- 7.7** Verificar si es posible sintetizar la red en escalera que se obtendría de las matrices obtenidas del ejemplo 7.5.
- 7.8** Se pretende terminar de diseñar el filtro Chebyshev todo-polos paso-banda del problema 6.5 que tenía las siguientes especificaciones:
- Frecuencia central: $f_0 = 11$ GHz.
 - Ancho de banda: $BW = 300$ MHz.
 - Pérdidas de retorno: $RL = 20$ dB.
 - Atenuación fuera de banda:
 - $L > 40$ dB para $f > 11.3$ GHz.
 - $L > 50$ dB para $f < 10.5$ GHz.

Se pide:

1. Dibujar el circuito en escalera paso-bajo normalizado indicando el valor de todos sus componentes.
2. Dibujar el circuito final paso-banda desnormalizado a una impedancia de referencia de $50\ \Omega$.

7.9 Se pretende diseñar el filtro Chebyshev de banda eliminada del problema 6.6 que tenía las siguientes especificaciones:

- Frecuencia central de la banda eliminada: $f_0 = 11\ \text{GHz}$.
- Ancho de la banda eliminada: $BW = 300\ \text{MHz}$.
- Atenuación mínima en la banda eliminada: $A = 40\ \text{dB}$.
- Frecuencias límite para atenuación:
 - Transmisión para $f < 10\ \text{GHz}$.
 - Transmisión para $f > 12\ \text{GHz}$.

Se pide:

1. Dibujar el circuito en escalera paso-bajo normalizado indicando el valor de todos sus componentes.
2. Dibujar el circuito final en banda eliminada desnormalizado a una impedancia de referencia de $50\ \Omega$.

Capítulo 8

Inversores de Inmitancias

Cuando la única herramienta que se posee es un martillo, cada problema empieza a parecerse a un clavo.

Abraham Maslow (1908–1970)

No puede resolverse un problema pensando de la misma forma que cuando fue creado.

Albert Einstein (1879–1955)

Los elementos que usamos para diseñar un filtro empiezan a ser insuficientes para nuestros propósitos. Las bobinas y condensadores en diferentes configuraciones vistas en el capítulo 7 no permiten una flexibilidad suficiente para diseñar filtros en tecnologías diferentes usadas para radiofrecuencia o microondas. Sólo permiten diseñar filtros en baja frecuencia con elementos concentrados y encima conectados secuencialmente (serie, paralelo o escalera). Para más zozobra, la síntesis en escalera no es capaz de sintetizar cualquier respuesta. A veces es posible y a veces no.

Como rezan las citas al principio de este capítulo, se necesita una herramienta nueva y una forma nueva para atacar el problema de la síntesis de forma más general. Esta herramienta debe permitir conexiones entre elementos de forma general y además que pueda ser usada en nuevos métodos de agrupación de elementos (por ejemplo conectar elementos de forma no secuencial).

El elemento que nos permitirá toda esta flexibilidad en el diseño es el inversor de impedancias o admitancias (dependiendo de su uso) al que, en general, se denomina

inversor de inmitancias o simplemente inversor. Aunque su uso originario es debido a que una línea de transmisión de un cuarto de longitud de onda actúa como un inversor de impedancias¹, se puede definir un inversor de inmitancias al margen de una línea de transmisión ya que una línea de transmisión tiene propiedades dependientes de la frecuencia.

En (Cohn 1957) se popularizó su uso para el diseño de filtros y posteriormente en (Levy 1973) se formuló su uso general para diferentes diseños ya que, en un margen de frecuencias, muchos circuitos y estructuras pueden usarse como inversores, como se verá más adelante en este capítulo.

Definición 8.1 *Un inversor de impedancia² de constante de inversión K es una red de dos accesos recíproca, sin pérdidas y simétrica la cual tiene una impedancia de entrada Z_{in} de valor*

$$Z_{in} = \frac{K^2}{Z_L} \quad (8.1)$$

cuando se le conecta a su salida una impedancia de carga Z_L . Las dimensiones de K son Ohmios (Ω) para mantener la consistencia de la ecuación y además K debe ser real.

Sustituyendo las impedancias por admitancias obtenemos la definición del inversor de admitancias con constante de inversión J .

Definición 8.2 *Un inversor de admitancia de constante de inversión J es una red de dos accesos recíproca, simétrica y sin pérdidas la cual tiene una admitancia de entrada Y_{in} de valor*

$$Y_{in} = \frac{J^2}{Y_L} \quad (8.2)$$

cuando se le conecta a su salida una admitancia de carga Y_L . Las dimensiones de J son Siemens (S) para mantener la consistencia de la ecuación y además J debe ser real.

Un inversor se simboliza como aparece en la figura 8.1 donde aparece el inversor de impedancias y el de admitancias. Es necesario recalcar que físicamente no hay

¹Una línea de transmisión de longitud $\lambda/4$ y de impedancia característica Z_0 cargada con una impedancia Z_L tiene una impedancia de entrada de valor $Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$. Es decir, la impedancia ha sido invertida y multiplicada por una constante.

²El standard del Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos IEEE Std 1549-2011 para definiciones de filtros de microondas dice que un inversor de impedancia es un circuito que tiene una impedancia característica, normalmente simbolizada por K , y un desfase de $\pm 90^\circ$. Mientras que un inversor- K (que es lo mismo) lo define como una representación en impedancias idealizada de una red de dos puertos que opera como una línea de transmisión de $\lambda/4$ y con impedancia característica K . Aquí la palabra clave ‘idealizada’ se refiere a que tal cosa no existe en la realidad (operar como una línea de $\lambda/4$ en un gran margen de frecuencias no es posible).

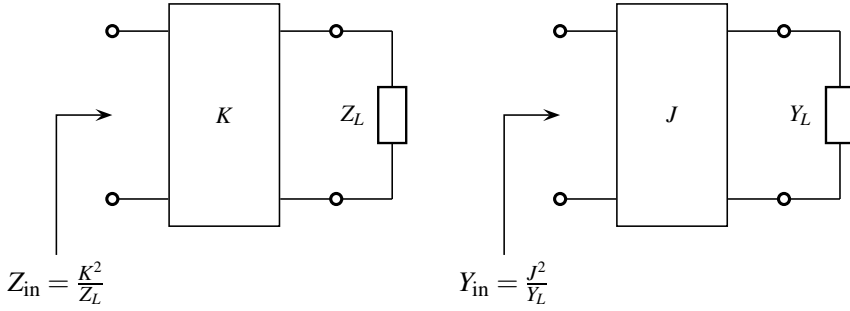


Figura 8.1: Inversor de impedancia (izquierda) e inversor de admitancia (derecha).

diferencia entre un inversor de impedancias y un inversor de admitancias. Son exactamente la misma red. Si igualamos $Z_L = 1/Y_L$ obtenemos que para que un inversor de impedancias y uno de admitancias sean exactamente iguales se debe de cumplir que $K^2 = 1/J^2$.

8.1 Propiedades

Calcular el parámetro de reflexión de un inversor respecto a una impedancia de referencia de la fuente Z_S y con una impedancia de carga Z_L es inmediato ya que

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_S}{Z_{in} + Z_S} = \frac{\frac{K^2}{Z_L} - Z_S}{\frac{K^2}{Z_L} + Z_S} = \frac{K^2 - Z_S Z_L}{K^2 + Z_S Z_L} \quad (8.3)$$

Si ambas son iguales $Z_S = Z_L = Z_0$ tenemos que

$$S_{11} = \frac{K^2 - Z_0^2}{K^2 + Z_0^2} \quad (8.4)$$

y para el caso del inversor de admitancias se obtiene que

$$S_{11} = \frac{Y_0^2 - J^2}{Y_0^2 + J^2} \quad (8.5)$$

Como se observa, la constante de inversión permite alterar de forma controlada el coeficiente de reflexión. La matriz de parámetros S se obtiene aplicando la simetría y la unitariedad

$$\mathbf{S} = \frac{1}{K^2 + Z_0^2} \begin{pmatrix} K^2 - Z_0^2 & \pm j2KZ_0 \\ \pm j2KZ_0 & K^2 - Z_0^2 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

En resumen, podemos establecer la primera propiedad:

Propiedad 1: Un inversor es un 2-accesos recíproco, simétrico, sin pérdidas y con $S_{11} = S_{22} \in \mathbb{R}$. Su matriz de dispersión tiene la forma (8.6).

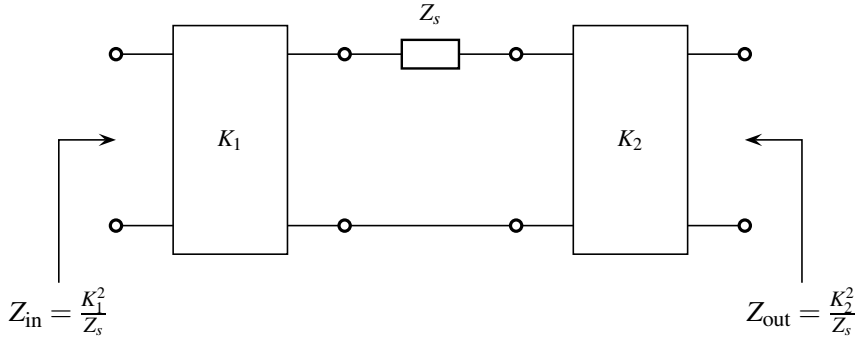


Figura 8.2: Inversión de una impedancia vista como un 2-accesos.

8.1.1 Conversión de impedancias en admitancias

Un primer uso de los inversores es convertir impedancias en admitancias y viceversa. El concepto de inversor proviene de la línea de transmisión en $\lambda/4$ (longitud eléctrica $\phi = \pi/2$) de impedancia Z_0 . Esta línea convierte las impedancias de carga Z_L en una impedancia vista desde su entrada Z_{in} igual a

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos \phi + j Z_0 \sin \phi}{Z_0 \cos \phi + j Z_L \sin \phi} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (8.7)$$

o lo que es lo mismo, un inversor de constante $K = Z_0^2$ pero que funciona de esta manera solo a una frecuencia. Esta frecuencia es aquella a la que $\phi = \pi/2$, o lo que es lo mismo, la frecuencia a la que la longitud es $\lambda/4$.

Un inversor ideal independiente de la frecuencia puede invertir una impedancia, pero si consideramos la impedancia desde un punto de vista de dos accesos, necesitamos dos inversores para una equivalencia absoluta.

Supongamos una impedancia serie de valor Z_s . Para invertirla desde sus dos accesos se necesita una configuración como se muestra en la figura 8.2.

Esta configuración permite cambiar los niveles de impedancia entrada-salida si fuera necesario. Si lo que deseamos es una impedancia de valor igual al inverso de Z_s tan solo tenemos que hacer $K_1 = K_2 = 1$. Con ello tenemos varias consecuencias:

- Si la impedancia es de Z_s ohmios, veremos en ambos accesos $1/Z_s$ Ohmios (o Z_s Siemens).
- Si Z_s es una bobina de valor L Henrios lo que se verá en los dos accesos será una impedancia $1/Ls$. Lo cual corresponde a un condensador de L Faradios.
- Si Z_s es un condensador de valor C Faradios lo que se verá en los dos accesos será una impedancia Cs . Lo cual corresponde a una bobina de C Henrios.

Con ello podemos establecer otra propiedad de los inversores:

Propiedad 2: El circuito de la figura 8.2 equivale (con $K_1 = K_2 = 1$) a una admitancia en paralelo de valor $Y_p = Z_s$.

El circuito dual con inversores de admitancia y una admitancia en paralelo realiza exactamente la misma función: convertir una admitancia paralelo a una impedancia serie. Como se verá, esta configuración es ideal para convertir elementos de una red en escalera de forma individual.

8.1.2 Escalado de impedancias

Continuando con la configuración de la figura 8.2, escalar una impedancia es tremendamente fácil. Sea α una constante real. Imaginemos que deseamos ver exactamente las mismas impedancias desde los terminales pero deseamos utilizar en lugar de Z_s una impedancia αZ_s con $\alpha \in \mathbb{R}$. Es decir, queremos hacer que los circuitos de la figura 8.3 tengan las mismas impedancias de entrada/salida.

$$Z_{\text{in}} = \frac{K_1^2}{Z_s} = \frac{K_1'^2}{\alpha Z_s} \Rightarrow K_1' = K_1 \sqrt{\alpha} \quad (8.8)$$

$$Z_{\text{out}} = \frac{K_2^2}{Z_s} = \frac{K_2'^2}{\alpha Z_s} \Rightarrow K_2' = K_2 \sqrt{\alpha} \quad (8.9)$$

En consecuencia podemos establecer otra propiedad:

Propiedad 3: Para escalar una impedancia entre dos inversores hay que multiplicar la constante de inversión por la raíz de la constante de escalado.

El siguiente ejemplo es una aplicación de las propiedades vistas hasta el momento.

EJEMPLO 8.1 Supongamos que deseamos convertir un resonador serie con una bobina L y un condensador C en un resonador paralelo con una bobina L' pero con la misma frecuencia de resonancia. Determinar el valor de las constantes de inversión de los inversores necesarios y del condensador C' del circuito paralelo.

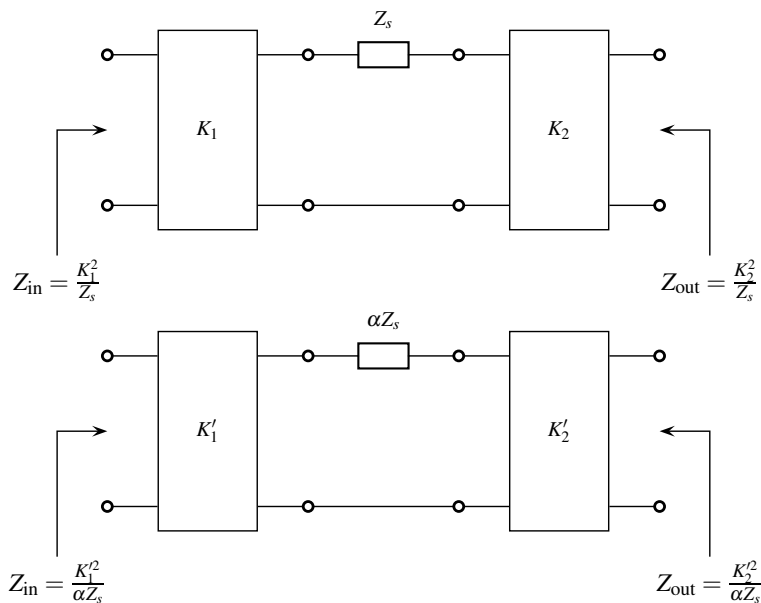
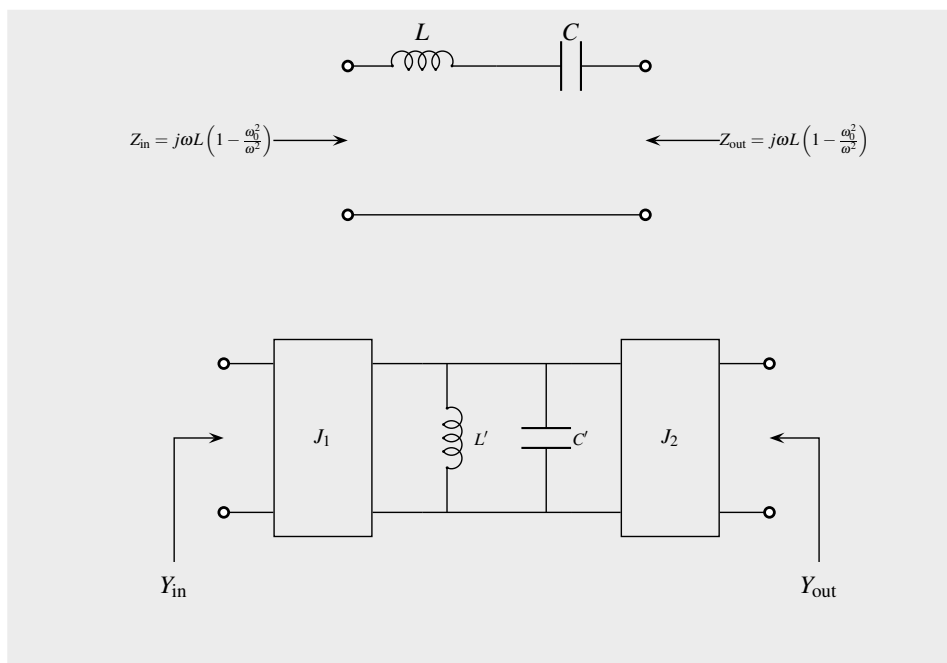


Figura 8.3: Escalado de una impedancia. Para mantener la equivalencia de los circuitos se tiene que cumplir que $K'_1 = K_1\sqrt{\alpha}$ y que $K'_2 = K_2\sqrt{\alpha}$.



Solucion: La impedancia de entrada/salida de un resonador serie (ver circuito superior de la figura anterior) se puede expresar como

$$Z = Z_{\text{in}} = Z_{\text{out}} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

donde $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Si vamos a utilizar un resonador paralelo es más cómodo trabajar con inversores de admitancia para obtener la configuración inferior de la figura anterior. Además, como la impedancia de entrada y de salida son iguales, tenemos que $Y_{\text{in}} = Y_{\text{out}}$ y los inversores también son iguales $J_1 = J_2 = J$. La admitancia del circuito paralelo entre los inversores Y_p es

$$Y_p = j\omega C' \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)$$

donde $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ que debe ser la misma que la del circuito serie y por tanto podemos obtener el valor del condensador desconocido C'

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{L'C'} \Rightarrow C' = \frac{LC}{L'}$$

La admitancia vista desde la entrada/salida del circuito es

$$Y = Y_{\text{in}} = Y_{\text{out}} = \frac{J^2}{Y_p} = \frac{J^2}{j\omega C' \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)}$$

Igualando las expresiones de las admitancias de los dos circuitos obtenemos

$$Y = \frac{J^2}{j\omega C' \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)} = \frac{1}{j\omega L \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)} \Rightarrow J = \sqrt{\frac{C'}{L}} = \sqrt{\frac{C}{L'}}$$

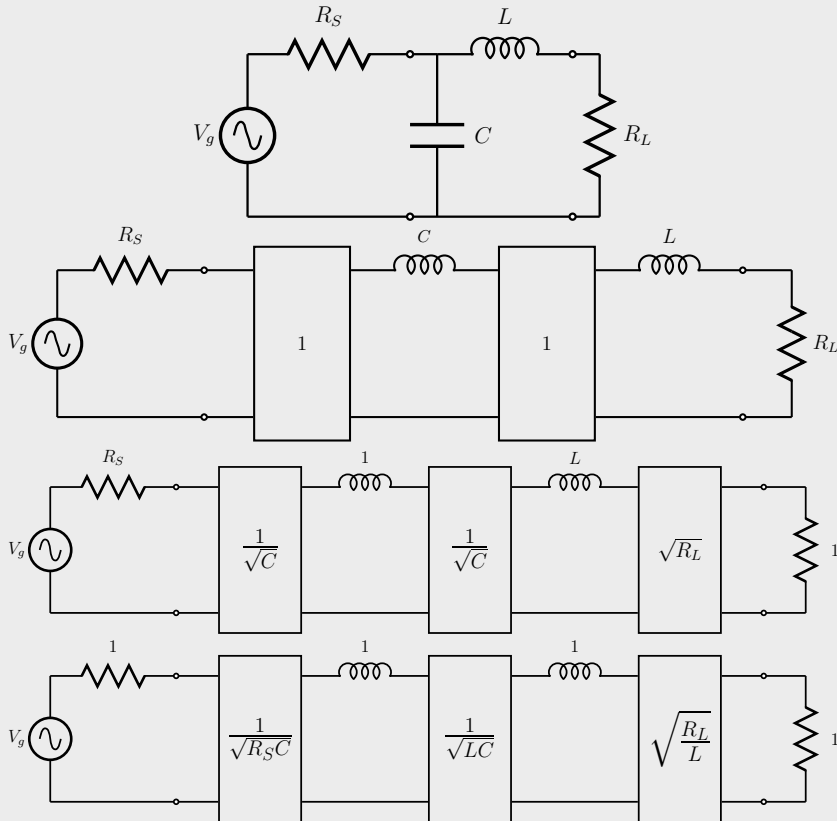
8.1.3 Homogeneización de redes

Una gran utilidad del inversor es poder convertir un filtro típico en escalera con condensadores y bobinas en un filtro solo con inversores y condensadores o con inversores y bobinas. Además, se puede conseguir que todas las bobinas sean iguales, o que todos los condensadores sean iguales, o que todos los inversores sean iguales. De esta forma se consigue, por ejemplo, que un filtro paso-banda tenga todos los resonadores iguales con diferentes inversores o que todos los inversores sean iguales y todos los resonadores diferentes.

EJEMPLO 8.2 Convertir, mediante inversores, un filtro paso-bajo en escalera de orden $N = 2$ en un filtro equivalente con sólo bobinas en serie de valor 1 H y con

impedancias de fuente y de carga normalizadas a 1Ω . Determinar la expresión para las constantes de inversión asumiendo que los inversores sean de impedancia.

Solución: Supongamos, para mostrar como homogeneizar un filtro, que un prototipo en escalera de un filtro paso bajo de orden $N = 2$ tiene un circuito como se muestra en el circuito superior de la siguiente figura con un condensador paralelo C y una bobina serie L y con diferentes impedancias de fuente Z_S y de carga Z_L .



Pasos para homogeneizar un filtro de orden $N = 2$. Prototipo original (circuito superior). Convirtiendo condensador paralelo a bobina serie (segundo circuito). Normalizando la impedancia de carga y la bobina de valor C (tercer circuito). Normalizando la impedancia de fuente y la bobina de valor L (circuito inferior).

Si deseamos convertir el filtro en un circuito con solo bobinas serie de valor unidad e impedancias asimismo unitarias podemos aplicar las anteriores propiedades por pasos. Ya que queremos que solo haya bobinas serie, podemos cambiar el condensador paralelo por una bobina serie de valor C con dos inversores de valor unidad (ver propiedad 2). El circuito resultante se muestra en la figura (segundo circuito).

El siguiente paso consiste en añadir un inversor a la salida para poder normalizar la impedancia de salida (y posteriormente poder normalizar la última bobina que necesita inversores en ambos accesos) y, en la otra parte del circuito, se normaliza la bobina de valor C (tercer circuito) aplicando la propiedad 3.

Finalmente, se normaliza la impedancia de fuente y la bobina (ver cuarto circuito) obteniendo el filtro final totalmente normalizado. El proceso se ha realizado paso a paso, sin alterar elementos adyacentes en el mismo paso. Si se altera un elemento, se alteran los inversores adyacentes para mantener la equivalencia.

Hay que destacar que si un filtro en escalera paso-bajo genérico como el que se muestra en el ejemplo 8.2 se convierte a paso-banda después de ser homogeneizado, se observa que todos los resonadores serían iguales (ya que se parte de bobinas normalizadas) y los inversores no cambiarían ya que al ser constantes con la frecuencia no les afecta la transformación paso-bajo a paso-banda.

8.2 Matrices de inmitancia y ABCD

La matriz de impedancias de un inversor es bastante simple ya que, al dejar en circuito abierto un terminal del inversor, el otro terminal es un cortocircuito. Es decir

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = 0 \quad (8.10a)$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = 0 \quad (8.10b)$$

Además por simetría tenemos que $z_{12} = z_{21}$. Por tanto las ecuaciones matriciales que quedan son:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = z_{12}I_2 \\ V_2 = z_{12}I_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{12}^2}{V_2/I_2} \quad (8.11)$$

Pero sabemos que de la figura 8.1

$$\frac{V_1}{I_1} = Z_{in} = \frac{K^2}{Z_L} \quad (8.12a)$$

$$\frac{V_2}{I_2} = -Z_L \quad (8.12b)$$

y, por ello, (8.11) queda

$$\frac{K^2}{Z_L} = \frac{z_{12}^2}{-Z_L} \Rightarrow z_{12} = \pm jK \quad (8.13)$$

quedando la matriz de impedancias como

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & \pm jK \\ \pm jK & 0 \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

y la matriz de admitancias

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & \pm jJ \\ \pm jJ & 0 \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Tanto la matriz de impedancias como la de admitancias son imaginarias puras como corresponde a un elemento sin pérdidas.

La matriz ABCD de un inversor se puede obtener por conversión de la matriz de impedancias o por razonamiento directo sobre las ecuaciones que definen la matriz ABCD.

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2) \quad (8.16a)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2) \quad (8.16b)$$

- Si la tensión en el acceso 2 es nula significa que el inversor tiene un cortocircuito a la salida. A la entrada se verá un circuito abierto, es decir, una corriente nula.

$$V_2 = 0 \Rightarrow I_1 = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (8.17)$$

- Por simetría, si la tensión en el acceso 1 es nula significa que el inversor tiene un cortocircuito a la entrada. A la salida se verá un circuito abierto, es decir, una corriente nula.

$$V_1 = 0 \Rightarrow I_2 = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (8.18)$$

Con las premisas anteriores la matriz ABCD tiene ceros en su diagonal y por tanto las ecuaciones quedan:

$$\left. \begin{matrix} V_1 = B(-I_2) \\ I_1 = CV_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{I_1} = Z_{\text{in}} = \frac{B}{C} \left(-\frac{I_2}{V_2} \right) = \frac{B}{CZ_L} \quad (8.19)$$

con lo cual

$$Z_{\text{in}} = \frac{K^2}{Z_L} = \frac{B}{CZ_L} \Rightarrow K^2 = \frac{B}{C} \quad (8.20)$$

Finalmente, si aplicamos reciprocidad, tenemos que

$$\frac{V_1}{I_2} = -B = \frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{C} \quad (8.21)$$

Combinando (8.20) con (8.21) obtenemos

$$\frac{B}{C} = -B^2 = K^2 \Rightarrow B = \pm jK \Rightarrow C = \pm j/K \quad (8.22)$$

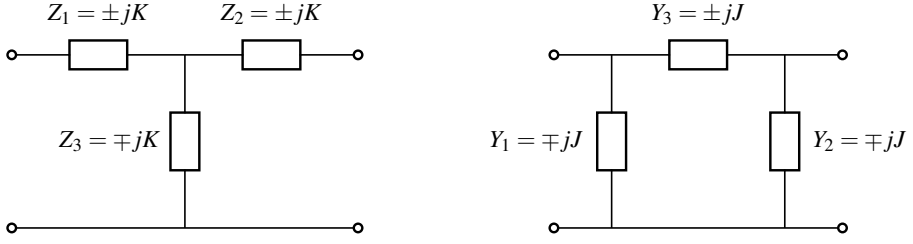


Figura 8.4: Circuitos con células en T (izquierda) y en Π (derecha) que se comportan como inversores independientes de la frecuencia. Cada uno desfasa $\pm 90^\circ$.

Con lo cual

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} 0 & \pm jK \\ \pm j/K & 0 \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

Hay que tener en cuenta que el desfase entre la entrada y la salida es de $\pm 90^\circ$, dependiendo del signo escogido. Por ello, la elección de un signo u otro depende del desfase deseado. Para un resumen de las matrices, y las elecciones según el signo, puede consultarse el apéndice F en la sección relativa al inversor.

8.3 Circuitos equivalentes

Hay diversos circuitos que pueden comportarse como inversores, y que muchas veces son usados en simuladores para obtener la respuesta deseada del inversor, sin necesidad de crear un nuevo componente específico. También es útil tener circuitos equivalentes para poder simplificar un circuito con inversores de forma teórica y, finalmente, poder realizarlo físicamente de una forma alternativa. En las siguientes subsecciones se verán diferentes configuraciones, cada una de ellas para fines diferentes.

8.3.1 Inversores con FIRs

Los circuitos ideales que se comportan como inversores son células en Π o en T , como era de esperar, por las propiedades que se enuncian en el apéndice F. La figura 8.4 muestra estos equivalentes que son obviamente inversores independientes de la frecuencia, dado que todos sus elementos lo son. Es irrelevante utilizar un equivalente en Π o en T salvo por la comodidad del usuario. Es obvio que el inversor de impedancias y el de admitancias sigue siendo el mismo si hacemos que $K = 1/J$.

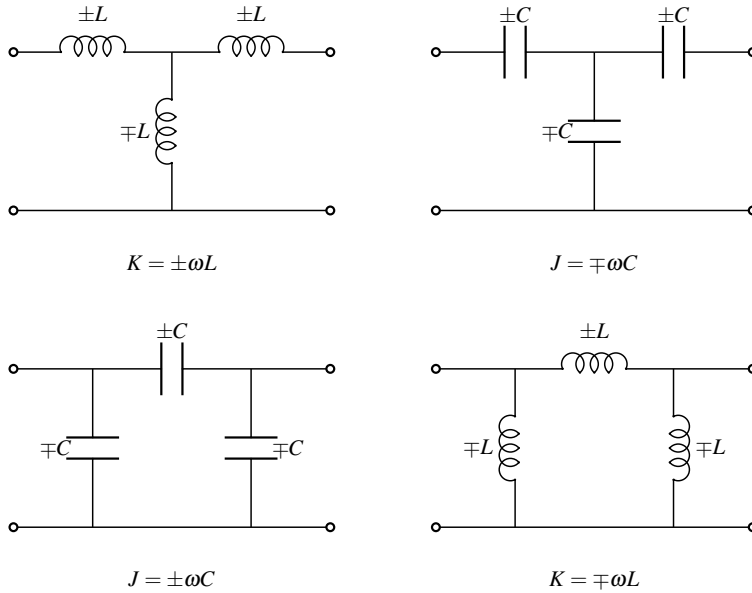


Figura 8.5: Inversores con bobinas y condensadores. Se asume que el desfase asociado es de $+90^\circ$ (línea de $\lambda/4$).

8.3.2 Inversores con bobinas y condensadores

Un FIR es un componente muy ideal en el sentido de que mantiene su reactancia/susceptancia constante con la frecuencia. Pero un componente básico como una bobina o un condensador no cumple esta característica. Por ello, si construimos las células en T o en Π con bobinas y condensadores, obtenemos constantes de inversión variables con la frecuencia.

Las configuraciones posibles aparecen en la figura 8.5. Las constantes de inversión pueden ser positivas o negativas. Sin embargo, a la vista de las matrices que representan un inversor (ver apéndice F), un inversor de constante de inversión positiva K y desfase positivo $+90^\circ$ es equivalente a un inversor de constante $-K$ y desfase -90° . Es decir, cambiar el signo de la constante cambia el signo del desfase.

8.3.3 Inversores con circuitos generales

Se va a estudiar un hecho poco conocido, aunque muy relevante en la teoría de filtros. Puede enunciarse como un teorema del que, posteriormente, haremos uso como una potente herramienta de diseño.

Teorema 8.1 *Cualquier circuito/dispositivo de dos accesos, pasivo, recíproco y sin pérdidas puede actuar como un inversor a una determinada frecuencia f_0 con sólo añadir unos tramos de línea a cada acceso $i = 1, 2$ de longitud eléctrica ϕ_i e impedancia característica Z_i a f_0 que cumplan*

$$\tan 2\phi_1 = \frac{2(bd - ac)}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2} \quad (8.24a)$$

$$\tan 2\phi_2 = \frac{2(ab - cd)}{-a^2 + b^2 - c^2 + d^2} \quad (8.24b)$$

donde a, b, c, d son los elementos de la matriz **ABCD** normalizados del circuito dos accesos, pasivo, recíproco y sin pérdidas con las impedancias Z_1 y Z_2 :

$$\begin{aligned} a &= A\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & b &= \frac{B}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \\ c &= C\sqrt{Z_1 Z_2} & d &= D\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \end{aligned} \quad (8.25)$$

DEMOSTRACIÓN. Cualquier 2-accesos, pasivo, recíproco y sin pérdidas tiene una matriz **ABCD** de la forma (Matthaei, Young y Jones 1980)

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} A & jB \\ jC & D \end{pmatrix} \quad A, B, C, D \in \mathbb{R} \quad (8.26)$$

Conectemos una línea de transmisión a cada acceso con impedancias Z_1 y Z_2 como se muestra en la figura 8.6. Podemos decir que, en ciertos planos P_1 y P_2 en cada acceso, se cumplirá que el dispositivo se comporta como un inversor si se cumple que la matriz **ABCD** del inversor es igual a la conexión en cascada de las matrices **ABCD** de los tres elementos: de la línea Z_1 , del circuito/dispositivo de 2 accesos y de la línea Z_2 . De tal manera, se cumple

$$\begin{pmatrix} 0 & jK \\ j/K & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & jZ_1 \sin \phi_1 \\ jY_1 \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & jB \\ jC & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & jZ_2 \sin \phi_2 \\ jY_2 \sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

De las cuatro ecuaciones obtenidas, escogemos las que están igualadas a cero a la izquierda de (8.27). Operando y usando (8.25) se obtienen las expresiones (8.24).■

Con este teorema se han hallado los tramos de línea que hay que añadir a un circuito pasivo, recíproco y sin pérdidas para que se comporte como un inversor. La

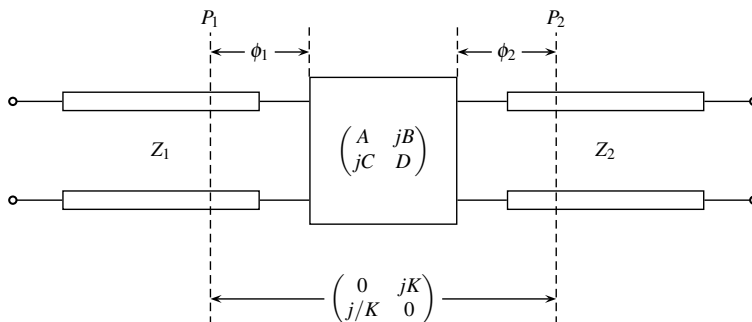


Figura 8.6: Localización de los planos de referencia P_1 y P_2 para conseguir que un 2-accesos pasivo, recíproco y sin pérdidas se comporte como un inversor.

pregunta lógica es: ¿Cuál es la constante de inversión de ese inversor? La respuesta corta es: hay que despejar K de las otras dos ecuaciones no utilizadas de (8.27). Desgraciadamente, esto ni es tan sencillo ni las expresiones obtenidas demasiado compactas a menos que el circuito sea muy simple. Es por ello que se suele utilizar, en general, un método más astuto que genere ecuaciones más simples. Empecemos con otro teorema que puede demostrar el lector de forma muy inmediata³.

Teorema 8.2 *Sea un inversor de constante K conectado en cada acceso a líneas de impedancia característica Z_1 y Z_2 . Las pérdidas de inserción L del inversor (en unidades lineales) se pueden calcular como*

$$L = \frac{1}{4} \left(\frac{K}{\sqrt{Z_1 Z_2}} + \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{K} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{K}{\sqrt{Z_1 Z_2}} - \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{K} \right)^2 \quad (8.28)$$

De este teorema se puede extraer el valor de la constante K del inversor.

Corolario 8.1 *El valor de la constante de inversión K de un inversor con pérdidas de inserción L es*

$$\frac{K}{\sqrt{Z_1 Z_2}} = \pm \sqrt{L} \pm \sqrt{L - 1} \quad (8.29)$$

Lo que demuestra que $\pm K$ y $\pm 1/K = \pm J$ tienen las mismas pérdidas de inserción. Finalmente queda por establecer el paso final. Si partimos de un 2-accesos pasivo, recíproco y sin pérdidas y queremos que actúe como inversor, sabemos los tramos de línea a añadir pero, ¿cuál es la constante de inversión que le corresponde? La respuesta la obtenemos hallando las pérdidas de inserción que le corresponden (según el teorema 8.2) y de ahí obtener la constante de inversión K que nos proporciona (según el corolario 8.1).

³Véase el apéndice F donde aparece la matriz \mathbf{S} de un inversor. La definición de pérdidas de inserción es $L = \frac{1}{|S_{12}|^2}$ en unidades lineales.

Teorema 8.3 Sea un 2-accesos pasivo, recíproco y sin pérdidas de matriz **ABCD**

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} A & jB \\ jC & D \end{pmatrix} \quad A, B, C, D \in \mathbb{R} \quad (8.30)$$

Llamamos a los elementos normalizados

$$\begin{aligned} a &= A\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & b &= \frac{B}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \\ c &= C\sqrt{Z_1 Z_2} & d &= D\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \end{aligned} \quad (8.31)$$

Entonces, las pérdidas de inserción L tienen la expresión:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4} [(a+d)^2 + (b+c)^2] \\ &= 1 + \frac{1}{4} [(a-d)^2 + (b-c)^2] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \end{aligned} \quad (8.32)$$

La gran simplificación de estos teoremas accesorios es que L no depende de los tramos de línea ϕ_1 y ϕ_2 que hay que añadir al 2-accesos. Por tanto, K tampoco depende de ϕ_1 y ϕ_2 , como era de esperar, ya que esas longitudes eléctricas, en realidad, se calculan a partir de la matriz $ABCD$ del 2-accesos.

Finalmente, el algoritmo para obtener un inversor de cualquier 2-accesos con las condiciones habituales de pasividad, reciprocidad y pérdidas nulas es:

1. Calcular los tramos de línea necesarios a partir de (8.24).
2. Calcular las pérdidas de inserción usando (8.32).
3. Calcular la constante de inversión usando (8.29).

8.3.4 Circuitos habituales usados como inversores

En el diseño de filtros o en el análisis de ciertas estructuras en diferentes tecnologías se usan modelos de inversores simples. Por ejemplo, una ventana (de longitud despreciable) en una guía de ondas es un iris inductivo porque su circuito equivalente es una bobina paralelo. Esa bobina puede actuar como inversor si se le añaden tramos de línea de cierta longitud. Por ello, es útil tener presente los inversores que se pueden formar con los modelos más simples. El ejemplo 8.4 que aparece al final del capítulo muestra lo dicho aplicado precisamente a un iris inductivo.

Aplicando el procedimiento anterior a ciertos modelos “simples” es inmediato deducir la constante de inversión y el desfase necesario para que ese circuito se comporte como un inversor. Los circuitos típicos son:

- Reactancia positiva en paralelo (inductiva). El circuito y sus ecuaciones de diseño aparecen en la figura 8.7. Se suele usar cuando aparece en un circuito un obstáculo de carácter inductivo (en paralelo) que se pretende que actúe como inversor. Los tramos de línea negativos al unirse con las líneas adyacentes “acortan” las mismas. Estas líneas adyacentes pueden ser resonadores en múltiplos de $\lambda/2$ que quedarían físicamente acortados debido al inversor.
- Reactancia negativa en paralelo (capacitiva). El circuito y sus ecuaciones de diseño aparecen en la figura 8.8. Se suele usar cuando aparece en un circuito un obstáculo de carácter capacitivo (en paralelo) que se pretende que actúe como inversor. Los tramos de línea positivos al unirse con las líneas adyacentes “alargan” las mismas.
- Susceptancia negativa en serie (inductiva). El circuito y sus ecuaciones de diseño aparecen en la figura 8.9. Se suele usar cuando aparece en un circuito un obstáculo de carácter inductivo (en serie) que se pretende que actúe como inversor. Los tramos de línea positivos al unirse con las líneas adyacentes “alargan” las mismas.
- Susceptancia positiva en serie (capacitiva). El circuito y sus ecuaciones de diseño aparecen en la figura 8.10. Se suele usar cuando aparece en un circuito un obstáculo de carácter capacitivo (en serie) que se pretende que actúe como inversor. Los tramos de línea negativos al unirse con las líneas adyacentes “acortan” las mismas.
- Célula en T simétrica. Es más general que la reactancia positiva en paralelo (aquí los valores pueden ser positivos o negativos). La red aparece con sus ecuaciones de diseño en la figura 8.11.
- Célula en Π simétrica. Es más general que la susceptancia positiva en serie (aquí los valores pueden ser positivos o negativos). La red aparece con sus ecuaciones de diseño en la figura 8.12.

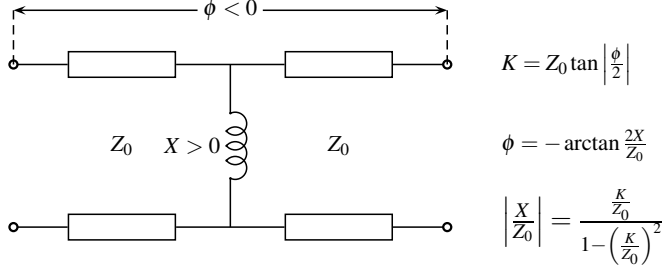


Figura 8.7: Circuito equivalente para un inversor de impedancias. La bobina representa una reactancia en paralelo positiva. La longitud eléctrica de la línea ϕ es negativa.

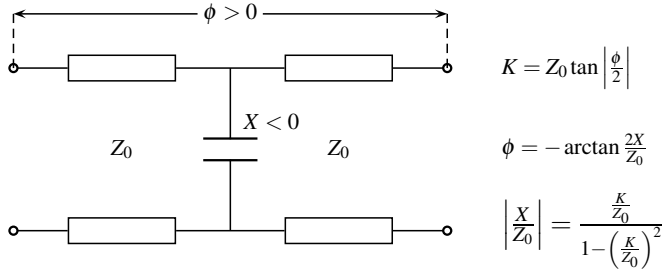


Figura 8.8: Circuito equivalente para un inversor de impedancias. El condensador representa una reactancia en paralelo negativa. La longitud eléctrica de la línea ϕ es positiva.

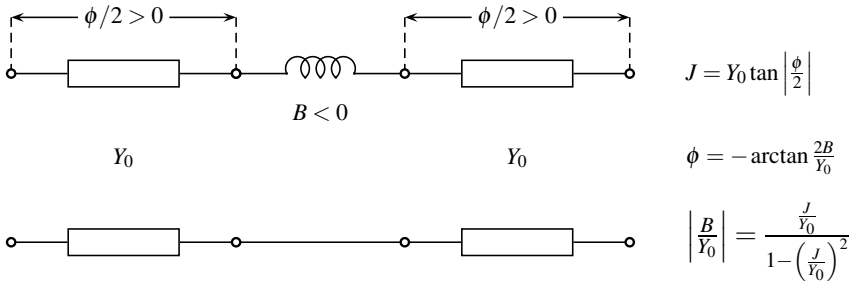


Figura 8.9: Circuito equivalente para un inversor de admitancias. La bobina representa una susceptancia en serie negativa. La longitud eléctrica de las líneas $\phi/2$ es positiva.

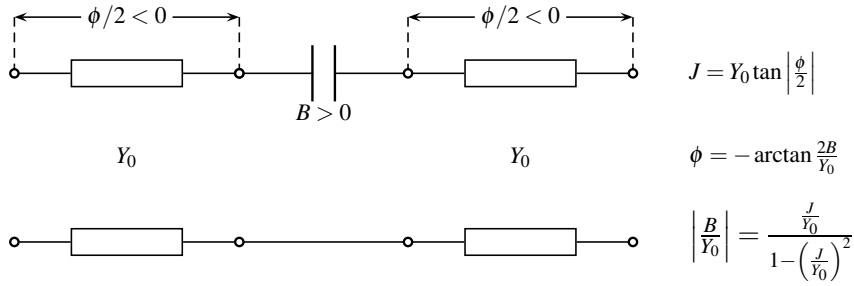


Figura 8.10: Circuito equivalente para un inversor de admitancias. El condensador representa una susceptancia en serie positiva. La longitud eléctrica de las líneas $\phi/2$ es negativa.

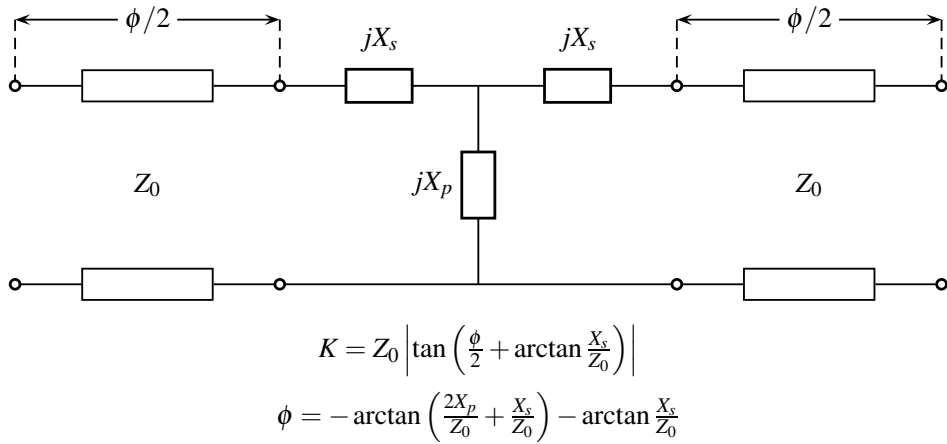


Figura 8.11: Circuito equivalente para un inversor de impedancias con una célula en T simétrica y líneas de transmisión.

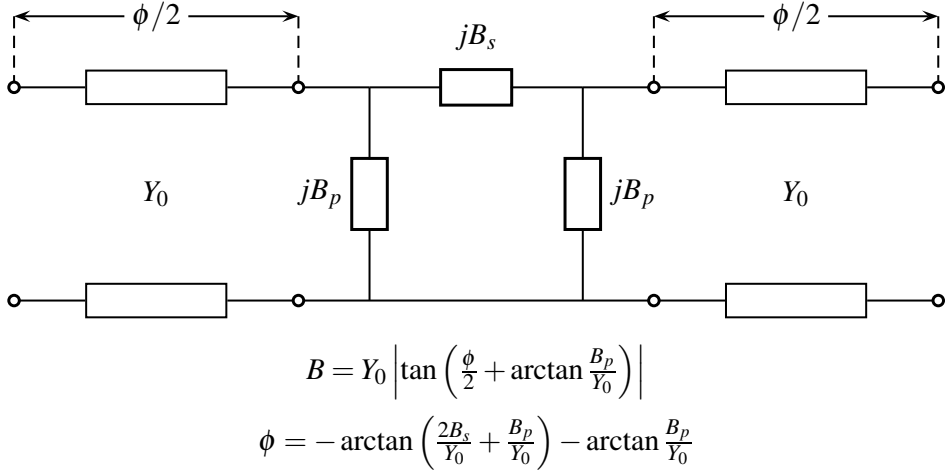


Figura 8.12: Circuito equivalente para un inversor de admitancias con una célula en Π simétrica y líneas de transmisión.

8.4 Usos prácticos de inversores

En esta sección se van a ver ejemplos de diseño con inversores y su utilidad. Un primer ejemplo hará hincapié en los inversores con elementos concentrados. Posteriormente, un segundo ejemplo usará inversores más usuales en circuitos de microondas.

Incluso los inversores de elementos negativos pueden ser usados, siempre que esos elementos sean compensados al unirse con otros elementos del circuito, y se produzca un diseño real viable (Collin 1992). El siguiente ejemplo es una prueba de ello.

EJEMPLO 8.3 Diseñar un filtro de Chebyshev (todo-polos) de orden $N = 2$ con un rizado en la banda de paso de 1 dB. El filtro debe tener los dos resonadores iguales y en paralelo. El filtro se usará en un amplificador de frecuencia intermedia con frecuencia central $f_0 = 10$ MHz, un ancho de banda $BW = 0.5$ MHz y unas impedancias de fuente y carga de $R_S = R_L = 1$ k Ω .

Solucion: El diseño del modelo con elementos concentrados es sistemático. En un primer proceso se diseña el circuito en el rango de frecuencias paso-bajo:

1. Determinar el prototipo paso-bajo en escalera. Los datos de rizado de 1 dB y orden $N = 2$ son los únicos necesarios. El rizado máximo de $R_p = 1$ dB en las pérdidas de inserción se puede convertir a pérdidas de retorno mínimas

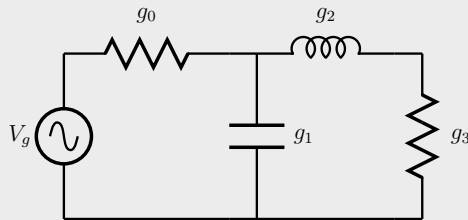
usando unitariedad como se dedujo en (5.16). Por ello

$$RL = -10 \log_{10} \left(1 - 10^{-Rp/10} \right) = 6.87 \text{ dB}$$

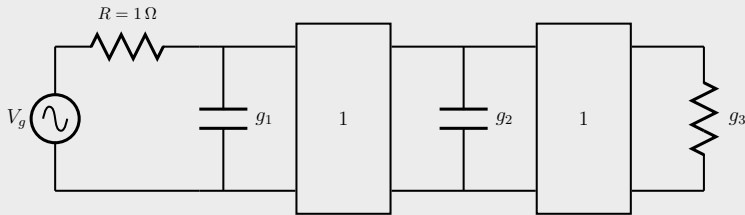
Insertando los datos RL y N en las fórmulas (7.6) se obtiene la recursión auxiliar necesaria para obtener los elementos g_i a partir de (7.7).

$$\begin{aligned} g_0 &= 1 \Omega \\ g_1 &= 1.82193 \text{ F} \\ g_2 &= 0.68501 \text{ H} \\ g_3 &= 2.65972 \text{ S} \end{aligned}$$

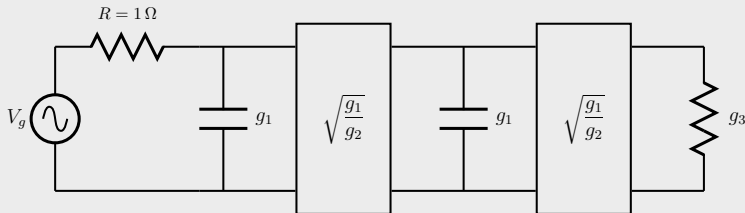
El circuito resultante es



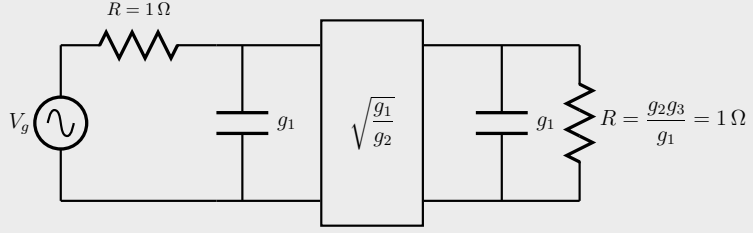
- Convertir todos los elementos del modelo en escalera en elementos en paralelo con inversores ideales. En este caso solamente es necesario convertir la bobina.



- Escalar un condensador para que todos sean iguales.



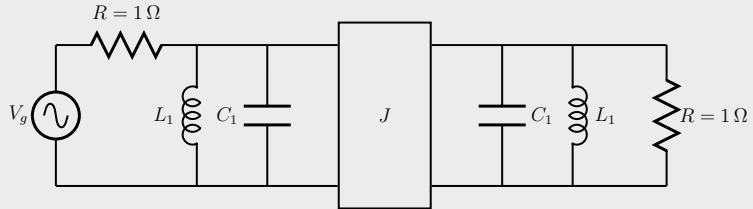
- Eliminar el inversor cercano a la carga sustituyéndolo por una carga equivalente que (no casualmente) es igual que a la resistencia de fuente.



En un segundo proceso se trabaja con el rango de frecuencias paso-banda:

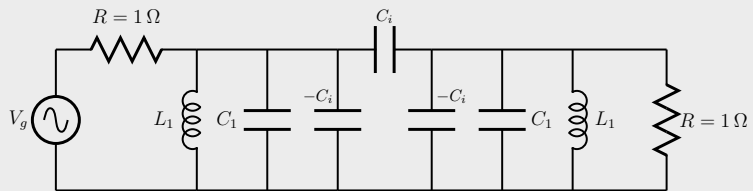
1. Transformar en frecuencia el circuito. En este caso se aplica la conversión paso-bajo a paso-banda. Aquí solo es necesario transformar los dos condensadores (iguales) por su equivalente paso-banda que es un circuito resonante paralelo como se refleja en la tabla 6.1.

$$g_1 \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{g_1}{2\pi BW} = 0.5799 \mu\text{F} \\ L_1 = \frac{2\pi BW}{g_1 \omega_0^2} = 0.4368 \text{ nF} \end{cases}$$



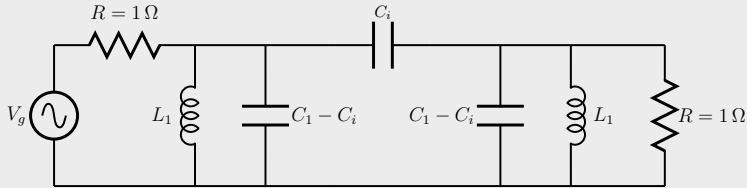
2. Sustituir el inversor de admitancias por su circuito equivalente. En este caso se escoge un circuito en Π para poder agrupar los elementos en paralelo (el circuito de condensadores de la figura 8.5). La constante de inversión es conocida y no ha sido alterada por la transformación en frecuencia. Como deseamos que, al menos, la constante del inversor real coincida con la del ideal a la frecuencia central, tenemos que

$$J = \omega_0 C_i \Rightarrow C_i = \frac{J}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = 25.956 \text{ pF}$$



3. Agrupar los condensadores para eliminar los condensadores de valor negativo.

$$C_1 - C_i = 0.55398 \mu\text{F}$$

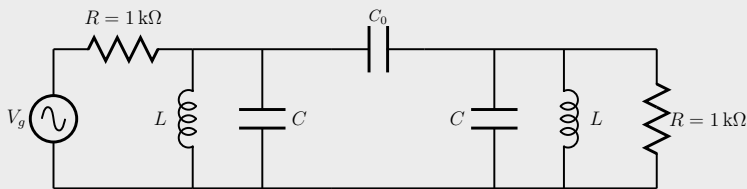


4. Escalar el circuito. Las resistencias de fuente y de carga son de $R_S = R_L = 1 \text{ k}\Omega$. Las bobinas y condensadores quedan

$$L = 1000L_1 = 0.4368 \mu\text{H}$$

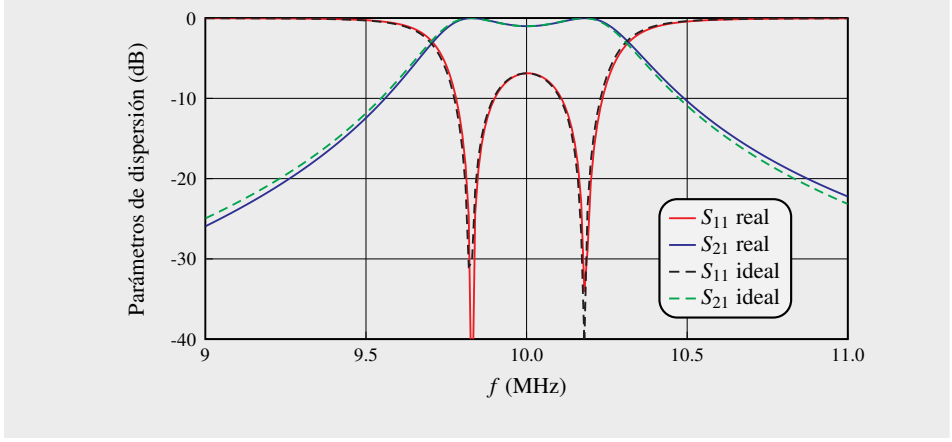
$$C = \frac{C_1 - C_i}{1000} = 0.554 \text{ nF}$$

$$C_0 = \frac{C_i}{1000} = 25.956 \text{ pF}$$



que es el circuito final buscado.

La gráfica de respuestas muestra la comparación entre el circuito final (real) y el circuito ideal. La pequeña diferencia es debida a que el inversor ha sido construido con una célula en Π cuya constante de inversión era variable con la frecuencia. Este error es pequeño debido a que el ancho de banda del filtro es pequeño (5 %).



Históricamente, los primeros filtros que se construyeron en la banda de microondas se componían de resonadores en guía de onda. Los resonadores se formaban a partir de guías de longitud $\lambda_g/2$. Hoy en día sigue siendo de la misma forma. Sin embargo, los primeros inversores en microondas eran tramos de línea de $\lambda_g/4$. Eso significaba que los filtros todo-polos de orden N se componían de N resonadores y de $N + 1$ inversores. La longitud total del filtro era aproximadamente

$$L = N \frac{\lambda_g}{2} + (N + 1) \frac{\lambda_g}{4} = (3N + 1) \frac{\lambda_g}{4} \quad (8.33)$$

Este hecho hacía que los filtros fueran demasiado largos para aplicaciones con restricciones en tamaño. Sin embargo, en los años 50 apareció publicado el artículo que cambiaría la forma de construir filtros en guía. En (Cohn 1957) se usó el concepto de inversor como auxiliar en el diseño de filtros. Ya se ha visto, gracias al teorema 8.1, que hay libertad para escoger lo que deseamos que actúe como inversor.

El siguiente ejemplo muestra el inversor más usado en filtros en guía de onda: un iris. El iris es un obstáculo metálico en la guía que tiene una abertura menor que la sección de la guía. En la figura 8.13 se muestra un iris simétrico (vista frontal y superior) con sus principales parámetros geométricos: anchura del iris w y grosor del iris t dentro de una guía de onda de dimensiones $a \times b$.

EJEMPLO 8.4 Se pretende estudiar un iris simétrico en una guía WR-75 ($a = 19.05$ mm, $b = 9.525$ mm) cuya apertura es $w = a/4$. El grosor del iris se supone despreciable $t \approx 0$. Se sabe que tras un análisis electromagnético (en realidad, para la simulación electromagnética se ha usado un iris de $t = 1 \mu\text{m}$.) los parámetros de dispersión a $f_0 = 11$ GHz son:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -0.96935 + j0.17241 & 0.030651 + j0.17233 \\ 0.030651 + j0.17233 & -0.96935 + j0.17241 \end{pmatrix}$$

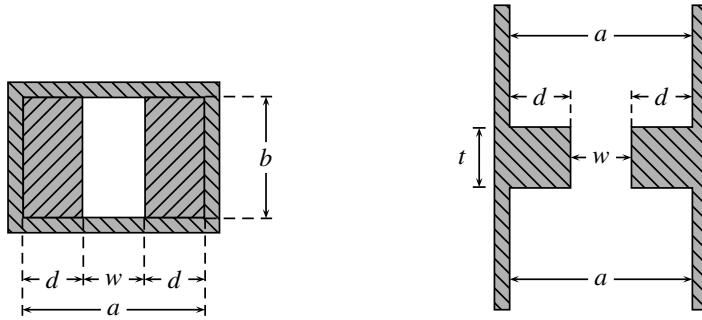


Figura 8.13: Iris simétrico en una guía de onda rectangular. **Izquierda:** sección transversal (plano xy). **Derecha:** sección longitudinal (plano xz).

Determinar las longitudes que habrá que añadir para que el iris se comporte como un inversor y determinar la constante de inversión a f_0 .

Solución: Pasando los parámetros de dispersión a parámetros $ABCD$ se obtiene

$$ABCD = \begin{pmatrix} 1.0004 & j7.5969 \times 10^{-5} \\ -j11.25 & 1.0004 \end{pmatrix}$$

que cumple que es de la forma prescrita como premisa del teorema 8.1.

Aplicando las ecuaciones (8.24) podemos obtener los tramos de línea que hacen que el iris se comporte como un inversor:

$$\phi_1 = \phi_2 = -0.08801 \text{ rad} = -5.04^\circ$$

En una guía $WR-75$ esa fase equivale a una longitud negativa de 0.55 mm. Es decir, si el iris está conectado a una guía, éste disminuirá su longitud efectiva en 0.55 mm.

Determinar la constante de inversión supone determinar las pérdidas de inserción aplicando (8.32) obteniendo

$$L = 27.26255 = 14.36 \text{ dB}$$

y de la ecuación (8.29) obtenemos la constante de inversión (asumimos valores normalizados para las impedancias de referencia de los accesos del inversor) con 2 valores posibles (uno y su inverso) si escogemos las soluciones positivas:

$$K_1 = 11.33794 \Omega \quad \text{y} \quad K_2 = 0.0882 \Omega$$

Ambas soluciones son recíprocas. Se escoge el valor que es menor que la unidad porque suele suceder que son los valores de la constante de inversión que aparecen

al desnormalizar la constante de inversión de un filtro paso-banda de banda estrecha, aunque el valor mayor sería adecuado si lo que queremos es un inversor de admitancia con constante J .

Otro sistema para conseguir la constante de inversión es identificar un circuito equivalente y obtener la constante y las fases de las fórmulas correspondientes dadas en la sección anterior. Los casos posibles de circuitos simples son células en Π o en T . Escogemos la célula en T porque esperamos obtener un inversor de impedancias del tipo que aparece en la figura 8.11. Los valores de los componentes son inmediatos si obtenemos la matriz \mathbf{Z} correspondiente a la matriz \mathbf{S}

$$\mathbf{Z} = j \begin{pmatrix} 0.08893 & 0.08889 \\ 0.08889 & 0.08893 \end{pmatrix}$$

De la cual, siguiendo el apéndice F, se obtiene la célula en T con dos impedancias serie jX_s iguales si la red es simétrica (como es nuestro caso) y una paralelo jX_p :

$$\begin{aligned} jX_s &= Z_{11} - Z_{12} = j3.79764 \times 10^{-5} \\ jX_p &= Z_{12} = j0.08889 \end{aligned}$$

Con esos valores se aplican las ecuaciones de la figura 8.11 obteniendo

$$\phi/2 = -0.08801 \text{ rad} = -5.04^\circ \quad K = 0.0882 \Omega$$

donde $\phi/2$ es el valor de la longitud eléctrica de las líneas en la figura 8.11 obtenido anteriormente. La constante de inversión también es la misma como cabía esperar. Vemos que el valor de X_s es despreciable y por tanto el circuito equivalente del iris es, en realidad, una reactancia en paralelo. Es decir, el iris equivale a una bobina. De ahí el calificativo de obstáculo inductivo usado para esta estructura.

Una vez conocida la metodología para convertir inversores teóricos en realizaciones prácticas, realizar un filtro con elementos distribuidos es bastante inmediato. Por ejemplo, si partimos de un prototipo en escalera y queremos diseñar un filtro paso-banda, los pasos serían los siguientes:

1. Convertir todos los elementos a serie o a paralelo con inversores.
2. Desnormalizar en frecuencia. Los elementos se convertirían en resonadores serie o paralelo, según hayamos elegido bobinas serie o condensadores en paralelo respectivamente.
3. Los resonadores se pueden realizar con líneas de transmisión resonantes y los inversores como obstáculos, como se ha visto en el ejemplo 8.4.



Figura 8.14: Nathan Marcuvitz. Fuente: Wikipedia.

Es importante hacer notar que los irises no son los únicos obstáculos que se pueden utilizar. Para una lista más exhaustiva de obstáculos en guías de onda con fórmulas aproximadas se puede consultar (Marcuvitz 1986). Para filtros en general, con obstáculos en tecnología impresa incluidos, puede consultarse (Matthaei, Young y Jones 1980).

Queda por tocar el tema de cómo insertar un resonador real en lugar de un resonador ideal y como modificar adecuadamente el inversor. No es una relación inmediata, pero sí lógica, una vez se aplican los principios vistos en este capítulo. Este será un tema para el capítulo 10 de filtros de cavidades acopladas.

8.5 Nota histórica: Marcuvitz

Nathan Marcuvitz (nacido el 29 de diciembre de 1913 in Brooklyn, New York y fallecido el 14 de Febrero de 2010 in Naples, Florida), fue ingeniero americano, físico y educador que trabajó en el campo de las microondas y en la teoría electromagnética.

El periodo más emblemático en el desarrollo de las microondas ocurrió durante la segunda guerra mundial, cuando se desarrollaron las primeras fuentes de señales de microondas (magnetron) e hizo el radar posible. Sin embargo, el desarrollo de sistemas era muy lento debido a que los diseños eran poco más que un proceso de prueba y error.

Se necesitaban métodos cuantitativos para caracterizar las estructuras geométricas involucradas y pasarlas a términos circuitales. Marcuvitz encabezó un grupo expe-

rimental en el Laboratorio de Radiación del M.I.T., responsable del desarrollo de métodos de medida para determinar con gran precisión los parámetros circuitales de discontinuidades como las que se han visto en la figura 8.13.

También trabajó con físicos y matemáticos responsables de la parte teórica de este programa sistemático y mostró cómo formular las soluciones en términos de ingeniería. Ya que Marcuvitz jugó un papel clave en la coordinación de las fases teóricas y experimentales, se le solicitó ser el autor del *Waveguide Handbook* (1951), que se convirtió en el volumen 10 de la serie del laboratorio de radiación del M.I.T.⁴

Uno de sus colaboradores fue Julian Seymour Schwinger⁵ (1918-1994) que se unió al Laboratorio de Radiación del M.I.T. en 1943 a sus 25 años. Junto con Marcuvitz desarrolló la teoría de ondas guiadas hasta un nuevo nivel de perfección, pero además encontró una forma de expresar los resultados de forma que los ingenieros que construían los dispositivos lo pudieran comprender, en términos de conceptos circuitales (impedancias y admitancias). Esto se escribió de forma impecable en los tres primeros capítulos del *Waveguide Handbook* que, antes de mostrar la inigualable colección de fórmulas para caracterizar las distintas discontinuidades, resume cómo estas discontinuidades se pueden representar de forma rigurosa en términos de parámetros circuitales⁶.

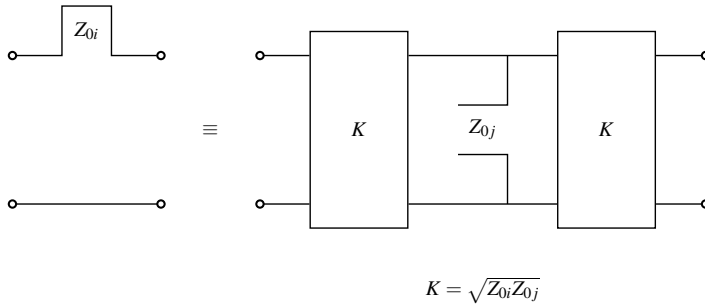
⁴Hoy en día el libro se sigue publicando (Marcuvitz 1986).

⁵Ganador del Nobel de Física en 1965 por su trabajo en electrodinámica cuántica junto con Richard Feynman y Shinichiro Tomonaga.

⁶Para una mejor contextualización del trabajo llevado a cabo por Schwinger puede consultarse (Milton y Schwinger 2006).

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 8.1** Demostrar la equivalencia entre un stub (impedancia característica Z_{0i}) terminado en cortocircuito conectado en serie y un stub (impedancia característica Z_{0j}) terminado en circuito abierto conectado en paralelo entre dos inversores de impedancias.



- 8.2** Sea un prototipo de un filtro paso-bajo todo-polos en escalera de orden N del que conocemos sus elementos g_i . Determinar el valor de los inversores si el filtro se homogeiniza para que todos los elementos sean bobinas serie de valor 1 H. Determinar el tipo de inversor más conveniente (admitancia o impedancia). Demostrar que son necesarios $N + 1$ inversores (usualmente la notación para la constante de inversión son dos subíndices correspondientes a los elementos g_i entre los que se encuentra) y que las constantes de inversión tienen un valor de $K_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$ con $i = 0, 1, \dots, N$.
- 8.3** Sea un prototipo de un filtro paso-bajo todo-polos en escalera de orden N del que conocemos sus elementos g_i . Determinar el valor de los inversores si el filtro se homogeiniza para que todos los elementos sean condensadores paralelo de valor 1 F. Determinar el tipo de inversor más conveniente (admitancia o impedancia). Demostrar que son necesarios $N + 1$ inversores (usualmente la notación para la constante de inversión son dos subíndices correspondientes a los elementos g_i entre los que se encuentra) y que las constantes de inversión tienen un valor de $J_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$ con $i = 0, 1, \dots, N$.
- 8.4** Sea un prototipo de un filtro paso-bajo todo-polos en escalera de orden N del que conocemos sus elementos g_i . Determinar el valor de elementos si el filtro se homogeiniza para que todos los elementos sean bobinas serie y todos los inversores tengan de constante de inversión la unidad. Determinar el tipo de inversor más conveniente (admitancia o impedancia).

8.5 Sea un prototipo de un filtro paso-bajo todo-polos en escalera de orden N del que conocemos sus elementos g_i . Determinar el valor de elementos si el filtro se homogeneiza para que todos los elementos sean condensadores paralelo y todos los inversores tengan de constante de inversión la unidad. Determinar el tipo de inversor más conveniente (admitancia o impedancia).

8.6 Demostrar que el proceso de obtención de la constante de inversión a partir de las pérdidas de inserción que aparece en la sección 8.3.3 es igualmente válido si se utiliza la relación de onda estacionaria (*ROE*) definida de forma habitual como

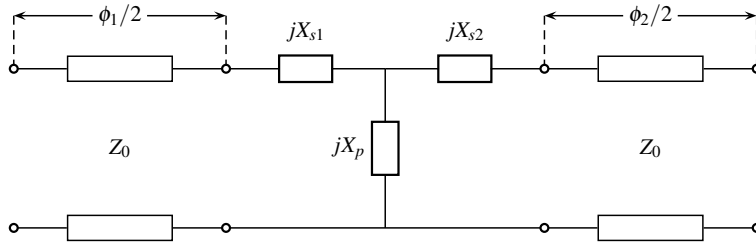
$$ROE = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

donde ρ es el coeficiente de reflexión visto desde un puerto cuando el otro puerto está adaptado.

8.7 Se pretende estudiar un obstáculo general y queremos utilizarlo como inversor. Asumimos que el obstáculo es simétrico respecto a sus 2 accesos y queremos utilizar la célula en T de la figura 8.11. Se ha obtenido su matriz \mathbf{S} mediante simulación electromagnética del obstáculo (o mediante medición directa) y se pide obtener el circuito equivalente hallando K , ϕ , X_s y X_p en función de los elementos de \mathbf{S} . Demostrar que

$$\begin{aligned} j\frac{X_s}{Z_0} &= \frac{1 - S_{12} + S_{11}}{1 - S_{11} + S_{12}} \\ j\frac{X_p}{Z_0} &= \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})^2 - S_{12}^2} \end{aligned}$$

8.8 Repetir el anterior problema pero sin suponer simetría. Es decir, hallar K , ϕ_1 , ϕ_2 , X_{s1} , X_{s2} y X_p en función de los elementos de \mathbf{S} . El circuito asimétrico es



Demostrar que

$$\begin{aligned}
 jX_{s1} &= \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{21}^2 - 2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{21}^2} \\
 jX_{s2} &= \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{21}^2 - 2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{21}^2} \\
 jX_p &= \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{21}^2} \\
 \phi_1 &= -\arctan\left(\frac{\Sigma}{\Pi_-}\right) - \arctan\left(\frac{\Delta}{\Pi_+}\right) \\
 \phi_2 &= -\arctan\left(\frac{\Sigma}{\Pi_-}\right) + \arctan\left(\frac{\Delta}{\Pi_+}\right)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= X_{s1} + X_{s2} + 2X_p \\
 \Delta &= X_{s1} - X_{s2} \\
 \Pi_+ &= 1 + X_{s1}X_{s2} + X_p(X_{s1} + X_{s2}) \\
 \Pi_- &= 1 - X_{s1}X_{s2} - X_p(X_{s1} + X_{s2})
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 K &= \sqrt{\left| \frac{1 + \Gamma e^{-j\phi_1}}{1 - \Gamma e^{-j\phi_1}} \right|} \\
 \Gamma &= \frac{j\Delta - \Pi_+}{j\Sigma + \Pi_-}
 \end{aligned}$$

Capítulo 9

Filtros distribuidos

Encomiéndate a Dios de todo corazón, que muchas veces suele llover sus misericordias en el tiempo que están más secas las esperanzas.

Don Quijote de la Mancha. Miguel de Cervantes (1547–1616)

Lo que fue, eso será. Lo que ya se hizo, eso es lo que se hará; no se hace nada nuevo bajo el sol.

Eclesiastés 1:9

Hasta el momento, la teoría de filtros ha sido desarrollada en este libro sin tener en cuenta que a frecuencias altas (típicamente mayores de 1 GHz) las bobinas son prácticamente imposibles de conseguir y los condensadores tampoco son fáciles de hallar. Aparece, pues, la pregunta delante del abismo: ¿todo lo desarrollado hasta el momento no sirve para nada? Funciones de transferencia con fórmulas cerradas se han convertido, en capítulos anteriores, en circuitos con elementos de los que no podemos disponer. Para electrónica de baja frecuencia es suficiente pero, ¿hay ahora que empezar de nuevo? Las citas del capítulo van a ser proféticas: ni hay que desesperar, ni hay nada totalmente nuevo en todo esto.

Se denomina comúnmente *filtro distribuido* a todo filtro construido con elementos distribuidos. Los elementos distribuidos son aquellos que tienen sus características eléctricas no concentradas en un punto concreto, sino distribuidas a lo largo de una longitud física no despreciable frente a la longitud de onda. En general, en RF y microondas se denomina filtros distribuidos a aquéllos compuestos por tramos de líneas de transmisión.

Se supone al lector familiarizado con el concepto de línea de transmisión. En el apéndice F sección F.7 aparecen las matrices más comunes que caracterizan a una línea de transmisión sin pérdidas, que es la que vamos a usar.

9.1 Aproximación de líneas cortas: Filtros de salto de impedancia

Una técnica bastante popular para diseñar filtros paso-bajo es la aproximación de líneas cortas. Esta técnica aprovecha el filtro paso-bajo (obviamente desnormalizado en frecuencia y en impedancia) en su configuración en escalera. Se sustituye cada bobina serie y cada condensador en paralelo por una línea que tenga un comportamiento similar cerca de la frecuencia de corte del filtro.

La forma más sencilla de razonar las fórmulas de diseño es suponer la matriz $ABCD$ de una línea de transmisión y aproximarla para longitudes eléctricas ϕ pequeñas.

$$\mathbf{ABCD} = \cos \phi \begin{pmatrix} 1 & jZ_0 \tan \phi \\ jY_0 \tan \phi & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & jZ_0 \phi \\ jY_0 \phi & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Ahora se pretende que la matriz aproximada anterior se parezca a:

- Una bobina serie. Siguiendo el apéndice F sabemos que la matriz que deseamos es de la forma

$$\mathbf{ABCD}_L = \begin{pmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

y para ello hay que hacer que $jY_0\phi$ sea despreciable. De momento ϕ es pequeño, pero Y_0 no tiene porqué serlo. Es por ello que se debe imponer la condición de que la línea sea de una impedancia característica Z_0 grande. Por tanto, líneas cortas de alta impedancia se comportan como bobinas serie y podemos aproximar los elementos B de las matrices $ABCD$

$$j\omega L = jZ_0\phi \Rightarrow \phi = \frac{\omega L}{Z_0} \quad (9.3)$$

- Un condensador paralelo. Siguiendo el apéndice F sabemos que la matriz que deseamos es de la forma

$$\mathbf{ABCD}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

y para ello hay que hacer que $jZ_0\phi$ sea despreciable. De momento ϕ es pequeño, pero Z_0 no tiene porqué serlo. Es por ello que se debe imponer la condición de que la línea sea de una impedancia característica Z_0 pequeña.

Por tanto, líneas cortas de baja impedancia se comportan como condensadores paralelo y podemos aproximar los elementos C de las matrices $ABCD$

$$j\omega C = jY_0\phi \Rightarrow \phi = Z_0\omega C \quad (9.5)$$

Ahora queda aplicar la desnormalización en frecuencia e impedancia particularizada a la frecuencia de corte del filtro ω_c . Para un g_i que sea una bobina tenemos que recordar de (6.1) que, si la impedancia del sistema es R_0 y la pulsación de corte es ω_c , entonces

$$L = g_i \frac{R_0}{\omega_c} \Rightarrow \phi_i = \frac{\omega_c L}{Z_0} = g_i \frac{R_0}{Z_0} \quad (9.6)$$

Para el caso de que el g_i sea un condensador tenemos

$$C = \frac{g_i}{\omega_c R_0} \Rightarrow \phi_i = Z_0 \omega_c C = g_i \frac{Z_0}{R_0} \quad (9.7)$$

De forma habitual, lo que se hace es calcular las máximas y mínimas impedancias posibles que se pueden conseguir con cierta estructura y obtener las longitudes ϕ para cada línea. Después se verifica que la aproximación es adecuada. Como regla general, las longitudes eléctricas deberían verificar $\phi < \pi/8$. Además, cuanto más extremas sean las diferencias entre impedancias altas y bajas, mejor aproximación se obtendrá.

Como el filtro paso bajo con elementos concentrados alterna bobinas serie y condensadores en paralelo, la conexión de las líneas es en cascada y se alternarán líneas de alta y baja impedancia como aparece en la figura 9.1.

EJEMPLO 9.1 Diseñar un filtro de Chebyshev de líneas cortas de orden $N = 5$ y de máximas pérdidas de retorno $RL = 10$ dB. La frecuencia de corte debe ser de $f_c = 1$ GHz. Se sabe que disponemos de cierto sustrato de material dieléctrico para circuito impreso con el cual las impedancias máximas y mínimas que son posibles obtener son

- Impedancia máxima $Z_h = 125 \Omega$. Este límite lo marca la mínima anchura de pista que se puede fabricar en el sustrato correspondiente. Un número aceptablemente pequeño serían aproximadamente 0.2 mm de ancho de pista según la tecnología actual.
- Impedancia mínima $Z_l = 25 \Omega$. Generalmente, este número lo marca el máximo ancho que se puede obtener, que suele ser aquel que no permita una resonancia transversal en una línea de transmisión. Por ello, el límite se suele marcar en un ancho de pista $w < \lambda/4$.

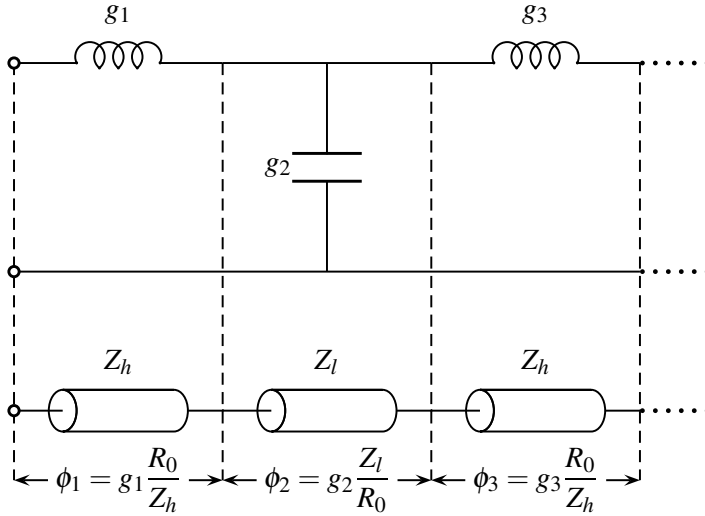


Figura 9.1: Equivalencia entre un filtro en escalera y un filtro de saltos de impedancia de líneas cortas.

Diseñar el circuito dando la longitud de cada una de las líneas necesarias si la impedancia de referencia del sistema es $R_0 = 50 \Omega$.

Solución: Vamos a asumir que la transmisión es TEM, lo cual es una buena aproximación para un circuito microstrip. Los valores de los elementos g_i del prototipo paso bajo ($\omega_c = 1$ rad/s) se obtienen utilizando (7.7)

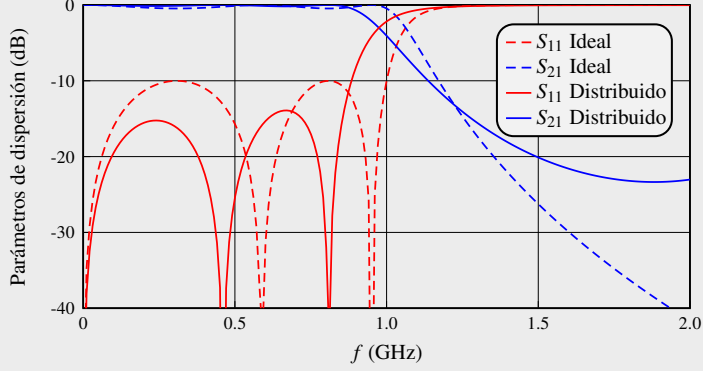
$$\begin{aligned} g_0 &= g_6 = 1 \\ g_1 &= g_5 = 1.6625 \\ g_2 &= g_4 = 1.2436 \\ g_3 &= 2.4956 \end{aligned}$$

Con estos datos ya se puede diseñar el filtro. Queda por decidir si queremos asumir que el filtro empieza por alta o baja impedancia. O lo que es lo mismo, si g_1 es bobina o condensador. Aquí es relevante porque hay dos diseños posibles: 5 líneas en cascada siendo 3 de alta y 2 de baja impedancia o 3 de baja y 2 de alta impedancia. Lo habitual es hacer que el diseño tenga el máximo número de líneas de baja impedancia que son más sencillas de fabricar, y es la opción que elegimos.

Los tramos de línea tienen una longitud eléctrica de:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_5 = g_1 \frac{Z_l}{R_0} = 0.8312 \text{ rad} = 47.63^\circ \\ \phi_2 &= \phi_4 = g_2 \frac{R_0}{Z_h} = 0.4974 \text{ rad} = 28.50^\circ \\ \phi_3 &= g_3 \frac{Z_l}{R_0} = 1.2478 \text{ rad} = 71.49^\circ \end{aligned}$$

Lo cual indica que la aproximación no va a ser muy buena porque los longitudes exceden $\pi/8$. Aun así, puede ser que el diseño sea viable. Simulando la respuesta de 5 líneas TEM en cascada se obtiene la respuesta de la figura siguiente donde se ha comparado la respuesta con la obtenida con el filtro ideal con elementos concentrados.

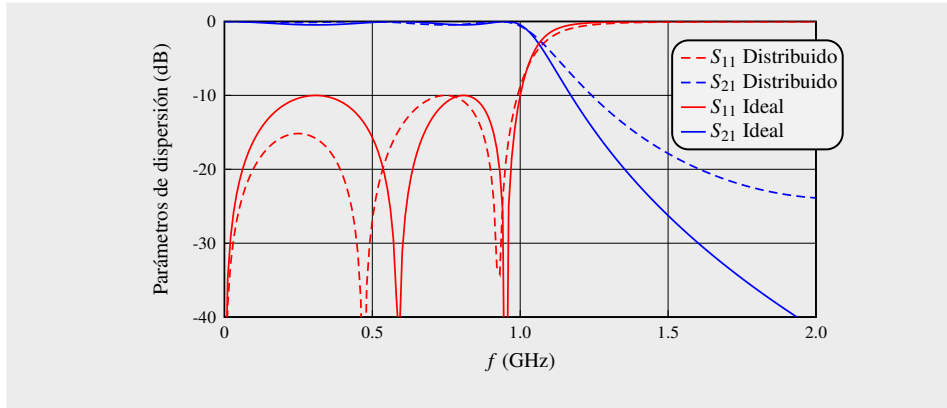


Como se ve, la frecuencia de corte ha bajado y el filtro distribuido no tiene una selectividad tan alta como la del filtro ideal. El problema con las líneas de transmisión es que producen una respuesta periódica. Si todas las líneas fueran iguales, el filtro tendría una réplica a la frecuencia a la que las líneas fueran de longitud eléctrica de 180° .

Si se permite cierta optimización, se puede llegar a una respuesta que podría ser aceptable si las especificaciones sobre la banda atenuada no fueran muy estrictas. En la siguiente figura aparece una solución posible donde los valores finales para las longitudes eléctricas son:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_5 = 47.73^\circ \\ \phi_2 &= \phi_4 = 25.93^\circ \\ \phi_3 &= 61.20^\circ\end{aligned}$$

Se observa en la figura siguiente que la especificación de máximas pérdidas de retorno en la banda de paso se mantiene e incluso son mejores a bajas frecuencias. Sin embargo, la selectividad del filtro deja mucho que desear.



9.2 La transformación de Richards

En general, no hay una teoría unificada para circuitos con elementos distribuidos. El análisis de circuitos reales se puede realizar con simuladores electromagnéticos, pero eso no es una teoría para diseñarlos.

Si cada línea tiene una longitud diferente, el análisis requeriría diferentes variables complejas. La única solución “simple” es forzar a que todas las líneas sean de la misma longitud. En síntesis de filtros distribuidos esto recibe el nombre de “commensurate” que no tiene traducción en castellano aceptada para este contexto¹.

En este contexto es donde la transformación de Richards (Richards 1948) proporciona la herramienta para poder reutilizar toda la teoría desarrollada para filtros con elementos concentrados.

9.2.1 Transformación de la variable compleja s

Definición 9.1 Se denomina elemento unitario (en lo sucesivo UE por las siglas de unit element) al elemento básico constituido por una línea de transmisión TEM caracterizado por una longitud l y una impedancia característica Z_0 prefijadas.

Generalmente, un circuito distribuido “commensurate” implica que todas las líneas de transmisión que lo constituyen son de la misma longitud pero pueden ser de diferente impedancia característica.

¹ *Commensurate* se puede traducir como acorde o proporcionado. Filtros distribuidos “proporcionados” podría ser la aproximación a una traducción directa pero el autor nunca ha oído tal expresión.

El UE es recíproco y su fase es $j\beta l = j(\omega/c)l = s\tau$. Utilizando la variable s podemos utilizar todo el plano complejo por prolongación analítica y se usa la longitud de retardo definida como $\tau = l/c$.

La matriz de dispersión de un UE normalizada a su impedancia característica es:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-s\tau} \\ e^{-s\tau} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\omega\tau} \\ e^{-j\omega\tau} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica

$$e^{-2j\theta} = \frac{1 - j \tan \theta}{1 + j \tan \theta} \quad (9.9)$$

se puede inferir una simple transformación que ha supuesto una revolución en el tratamiento de circuitos distribuidos. Se transforma la variable ω en la nueva variable Ω

$$j\Omega = j \tan \frac{\omega\tau}{2} = \tanh \frac{j\omega\tau}{2} \quad (9.10)$$

o en la variable compleja s

$$t = \tanh \frac{s\tau}{2} \quad (9.11)$$

Esta transformación convierte el plano complejo s en el plano complejo t . Ahora cualquier exponencial se convierte en

$$e^{-s\tau} = \frac{1-t}{1+t} \quad (9.12)$$

y la matriz de dispersión (9.8) queda

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-t}{1+t} \\ \frac{1-t}{1+t} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

la cual conlleva la principal ventaja de esta transformación: la matriz solo involucra funciones racionales de t en lugar de exponenciales en s . De forma más general, si una línea TEM tiene una longitud de retardo $m\tau$ acorde con la del UE, es decir, múltiplo de τ tenemos que

$$e^{-sm\tau} = \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^m \quad (9.14)$$

donde m es un entero. Esto indica que las matrices de dispersión o de inmitancia de una red de N puertos formada por una interconexión de resistencias y de UEs es racional² en t .

²Algunos de los elementos pueden ser stubs, es decir, UEs terminados en circuito abierto o en cortocircuito.

Pasando al plano complejo, asumimos $s = \sigma + j\omega$ y $t = \Sigma + j\Omega$ entonces la transformación de Richards se convierte en:

$$t = \Sigma + j\Omega = \tanh \frac{s\tau}{2} = \frac{1 - e^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{1 + e^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}} \quad (9.15)$$

Un examen de (9.15) muestra que si $\sigma > 0$ entonces $\Sigma > 0$, y cuando s es imaginario puro, t también lo es.

Lema 9.1 *La transformación $t = \tanh \frac{s\tau}{2}$ convierte el semiplano derecho de s en el semiplano derecho de t .*

Finalmente, decir que las características deseables de las matrices acotadas y reales para \mathbf{S} y positivas y reales para \mathbf{Z} se mantienen. Para una definición precisa de estos términos véase (Carlin y Civalleri 1998). Recordar aquí el concepto más importante: Todas las impedancias o admitancias de entrada de redes RLC son funciones positivas reales.

En general, la matriz de impedancia de un circuito tiene que ser una función racional y positiva real³ y la transformación de Richards mantiene esta característica.

Teorema 9.1 *Sea \mathcal{R} una red de n puertos que consiste en la interconexión de UEs y resistores cuya matriz de dispersión es real y acotada $\mathbf{S}_1(s)$. Entonces, bajo la transformación de Richards, \mathcal{R} tiene una matriz de dispersión $\mathbf{S}_2(t)$ que es acotada, real y racional. Para la matriz de inmitancia de \mathcal{R} se puede decir lo mismo si es positiva y real.*

El uso del ángulo mitad $s\tau/2$ se requiere para que tanto los coeficientes de reflexión como los de transmisión sean racionales pero, en la mayoría de los casos, si se hace énfasis en el parámetro de reflexión, se consigue que éste sea una función racional con la transformación de Richards modificada⁴:

$$t = \tanh s\tau \quad (9.16)$$

que produce expresiones más simples a costa de la pérdida de racionalidad en el coeficiente de transmisión como se verá más adelante.

La impedancia de entrada de stubs en circuito abierto o en cortocircuito quedan transformadas como:

$$Z_{cc} = Z_0 t, \quad Z_{ca} = \frac{Z_0}{t} \quad (9.17)$$

Por tanto, los stubs corresponden a inductancias y capacitancias en el dominio transformado. Nótese que no hay ningún equivalente en elementos concentrados de un UE.

³Esto significa que las expresiones de los elementos de las matrices de impedancias/admitancias son cocientes de polinomios de coeficientes reales y positivos.

⁴El uso se distingue por el contexto.

Como consecuencia directa de este hecho y del teorema 9.1, la transformación de Richards permite usar toda la teoría de elementos concentrados para tratar ciertas clases de circuitos distribuidos.

9.2.2 Variaciones de la transformación

Algunas versiones alternativas de la transformación de Richards son:

$$t = \tanh s \quad (9.18a)$$

$$t = \tanh \frac{s}{4f_0} \quad (9.18b)$$

$$t = \alpha \tanh s \quad (9.18c)$$

$$t = \alpha \tanh s\tau \quad (9.18d)$$

$$\Omega = \tan \theta = \tan \beta l \quad (9.18e)$$

$$\Omega = \alpha \tan \frac{\pi\omega}{2\omega_0} \quad (9.18f)$$

cuya diferencia son sólo las constantes o que la transformación es en s o en ω .

Para diseñar un filtro distribuido a partir de uno concentrado se pueden seguir dos procedimientos:

- Partir de la función matemática que describe la función de transferencia deseada y sustituir s por t . Para ver la alteración de la respuesta, t se evaluará en el eje imaginario haciendo $t = \alpha \tan \omega\tau_0$ donde $\tau_0 = l/c$.
- Partir del circuito y sustituir bobinas y condensadores por stubs en circuito abierto o cortocircuito según corresponda. La alteración de la respuesta respecto a la original se obtiene simulando el circuito directamente.

Es obvio que, al formar el circuito con líneas de transmisión, la respuesta se convierte en periódica. Supongamos que un filtro es todo-polos de orden N . Esto supone que el filtro tendrá N ceros de transmisión en $\Omega \rightarrow \infty$.

$$|S_{12}(j\Omega)| = \frac{|P(j\Omega)|}{|\varepsilon E(j\Omega)|} = \frac{1}{\varepsilon |E(j\Omega)|} \quad (9.19)$$

Si aplicamos la transformación $t = \alpha \tanh s\tau_0$, tenemos que sustituir Ω por la nueva variable $\alpha \tan \omega\tau_0$ y tenemos que

$$|S_{12}(j\omega)| = \frac{1}{\varepsilon |E(j\omega)|} = \frac{1}{\varepsilon |E(\alpha \tan \omega\tau_0)|} \quad (9.20)$$

y donde antes $\Omega \rightarrow \infty$ ahora $\omega\tau_0 = \beta l \rightarrow m\pi/2$ con m impar. Por tanto, a múltiplos de $\theta = \pi$ tenemos la frecuencia central del filtro en Ω cuya respuesta de la réplica n está comprimida entre $n\pi - \pi/2$ y $n\pi + \pi/2$.

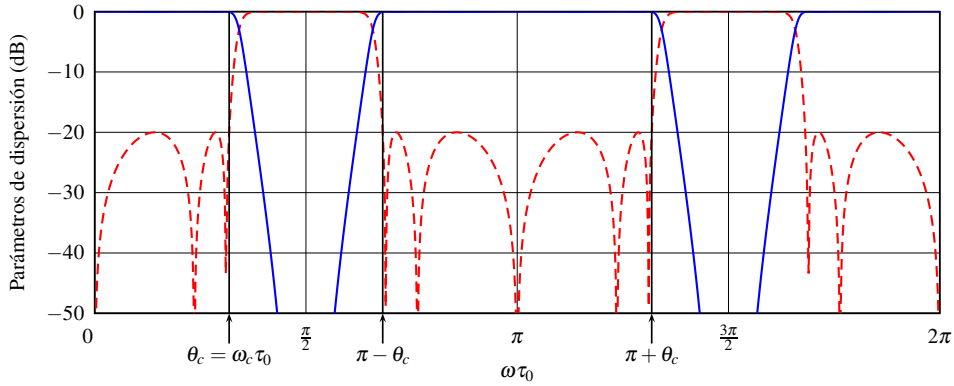


Figura 9.2: Filtro de Chebyshev de orden 5 sometido a la transformación de Richards. En línea continua se muestra el parámetro de transmisión y en línea discontinua el parámetro de reflexión.

La figura 9.2 muestra el filtro de Chebyshev de orden 5 del ejemplo 4.3 sometido a la transformación de Richards. El límite de la banda en la variable paso-bajo Ω es $\Omega = 1$, por tanto, en la nueva variable tenemos que a cierta pulsación ω_1

$$1 = \alpha \tan(\omega_1 \tau_0) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\tan(\omega_1 \tau_0)} \quad (9.21)$$

quedando definidas todas las constantes involucradas en la transformación. Es interesante remarcar que también existe la transformación de Richards paso-bajo a paso-alto:

$$S \rightarrow \frac{1}{\alpha \tanh(s\tau_0)} \quad (9.22)$$

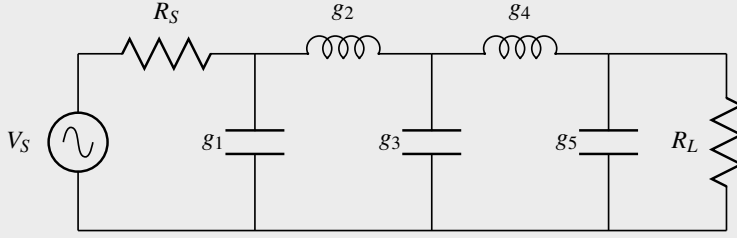
la cual produce réplicas (del filtro paso-bajo) centradas a múltiplos impares de $\pi/2$.

EJEMPLO 9.2 Diseñar un filtro Chebyshev “commensurate” paso-banda de orden $N = 5$ con mínimas pérdidas de retorno $RL = 20$ dB. La frecuencia central debe ser $f_0 = 4$ GHz, el ancho de banda $BW = 2$ GHz y la impedancia de referencia del sistema debe ser $R_0 = 50 \Omega$.

Solución: Los valores de los elementos g_i del prototipo paso-bajo ($\omega_c = 1$ rad/s) se obtienen utilizando (7.7)

$$\begin{aligned} g_0 &= g_6 = 1 \\ g_1 &= g_5 = 0.97321 \\ g_2 &= g_4 = 1.37228 \\ g_3 &= 1.80317 \end{aligned}$$

Con estos datos ya se puede diseñar el filtro. Queda por decidir si queremos asumir que el filtro empieza por alta o baja impedancia. O lo que es lo mismo, si g_1 es bobina o condensador. Las bobinas equivaldrán a stubs serie en cortocircuito y los condensadores a stubs paralelo en circuito abierto. Ya que en circuitos impresos es preferible tener líneas en paralelo, se va a escoger el circuito que tenga 3 condensadores y dos bobinas.



El siguiente paso es desnormalizar el circuito en escalera:

$$\begin{aligned} R_S &= R_L = 50 \Omega \\ C_1 &= C_5 = 0.01946 \text{ F} \\ L_2 &= L_4 = 68.61380 \text{ H} \\ C_3 &= 0.03606 \text{ F} \end{aligned}$$

Queda por asignar los parámetros de la transformación $t = \alpha \tanh(s\tau_0)$ que en frecuencia será $\Omega = \tan(\omega\tau_0)$ donde Ω es la pulsación en el dominio paso-bajo y ω es la pulsación en el dominio final. Los parámetros a fijar de la transformación son:

- La longitud de las líneas “commensurate”. Esto proporciona la frecuencia central (fijando el parámetro τ_0).

$$\omega_0 \tau_0 = \pi \Rightarrow \tau_0 = \frac{\pi}{\omega_0} = 0.125 \times 10^{-9} = 125 \text{ ps}$$

Las líneas de transmisión son de una longitud eléctrica (a la frecuencia central) de π radianes porque usamos la primera réplica del filtro (ver figura 9.2).

- La constante multiplicativa α . Esta constante maneja el ancho de banda o la desnormalización en frecuencia. De la figura 9.2 vemos que, a la frecuencia de corte del prototipo paso-bajo $\Omega = 1$, la transformación tiene que proporcionar el límite de la banda desde 0. Por ello, en la copia paso-bajo de la respuesta tenemos que

$$1 = \alpha \tan(\omega_c \tau_0) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\tan \omega_c \tau_0} = 1$$

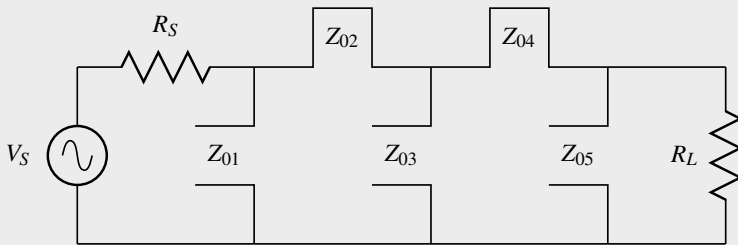
donde $\omega_c = 2\pi$ Grad/s ya que el ancho de banda de la primera réplica paso-banda es en la variable angular igual a $2\theta_c$.

Una vez determinados α y τ_0 , quedan por establecer las impedancias características de los stubs que sustituyen a las bobinas y condensadores. En el caso de un condensador C_i y una bobina L_i tenemos que

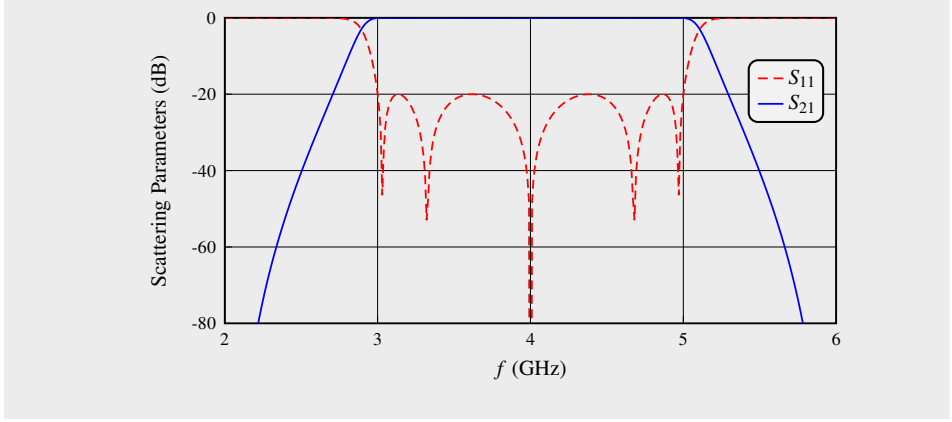
$$\begin{aligned} Z_C &= \frac{1}{C_i s} \rightarrow \frac{1}{C_i t} = \frac{1}{C_i \alpha \tan(\omega \tau_0)} = \frac{Z_0}{\tan(\omega \tau_0)} \Rightarrow Z_0 = \frac{1}{C_i \alpha} \\ Z_L &= L_i s \rightarrow L_i t = L_i \alpha \tan(\omega \tau_0) = Z_0 \tan(\omega \tau_0) \Rightarrow Z_0 = L_i \alpha \end{aligned}$$

El circuito queda como sigue:

1. Impedancia de la fuente: $R_S = 50 \Omega$
2. Stub en paralelo terminado en circuito abierto con impedancia característica $Z_{01} = 50.38 \Omega$.
3. Stub en serie terminado en cortocircuito con impedancia característica $Z_{02} = 68.61 \Omega$.
4. Stub en paralelo terminado en circuito abierto con impedancia característica $Z_{03} = 27.73 \Omega$.
5. Stub en serie terminado en cortocircuito con impedancia característica $Z_{04} = 68.61 \Omega$.
6. Stub en paralelo terminado en circuito abierto con impedancia característica $Z_{05} = 50.38 \Omega$.
7. Impedancia de carga: $R_L = 50 \Omega$



Si el ancho de banda del filtro se hace más estrecho, α aumenta y las impedancias se vuelven más extremas (las de los stubs en circuito abierto muy pequeñas y las de los stubs en cortocircuito muy grandes). La respuesta del filtro se muestra en la figura siguiente donde, como era de esperar, se ven los ceros de transmisión en 2 y 6 GHz que corresponden a $\omega \tau_0 = \pi/2$ y $\omega \tau_0 = 3\pi/2$ de la figura 9.2.



9.2.3 Identidades de Kuroda

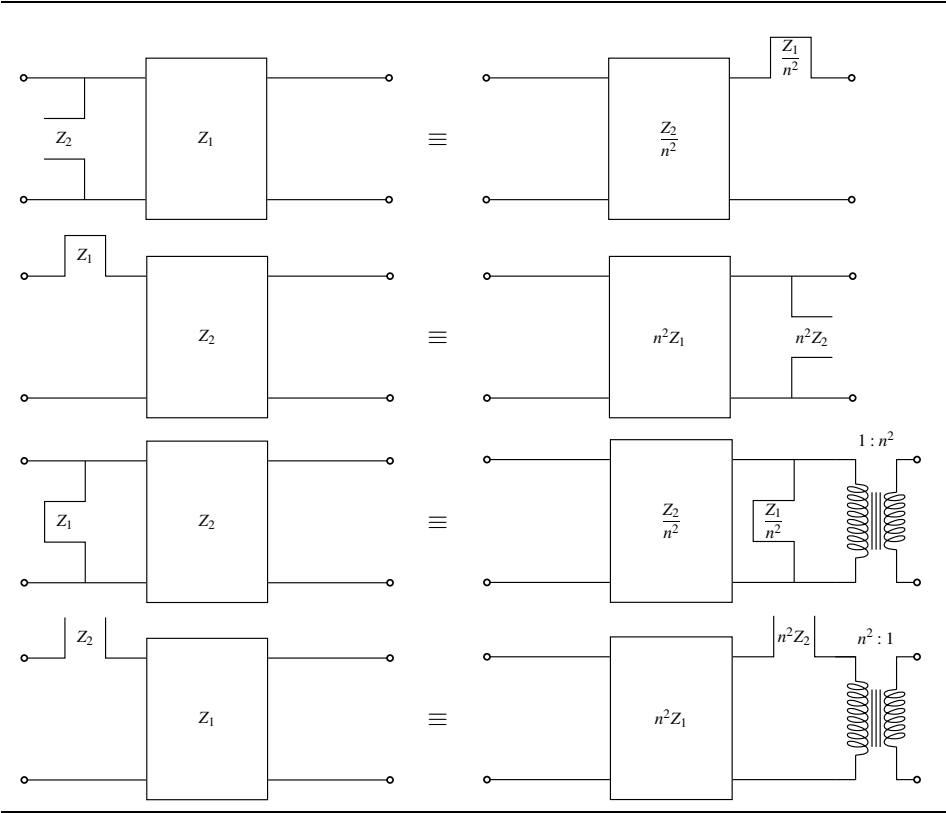
Para simplificar un diseño, normalmente, es conveniente poner un prototipo en escalera como un circuito con todos los elementos en serie o todos en paralelo. Usando los conocimientos del capítulo anterior y por medio de inversores, se puede conseguir tal diseño. El problema es que si los inversores se realizan como líneas de $\lambda/4$, el filtro deja de ser commensurate, aunque perfectamente realizable. Sin embargo, también puede resultar útil separar stubs adyacentes o simplemente sintetizar impedancias difíciles de obtener. Por ejemplo, si el diseño final de un filtro es un circuito impreso, entonces los stubs en paralelo son muy sencillos de implementar y, por ello, todos los stubs serie se deben pasar a paralelo.

Las identidades de Kuroda fueron ideadas para estos fines. Usando UEs podemos encontrar equivalencias de las cuatro posibilidades de stubs a la izquierda de un UE (stub en corto en serie y en paralelo y stub en abierto en serie y en paralelo) a sus equivalentes a la derecha del UE, el cual habrá cambiado su impedancia característica. En la tabla 9.1 aparecen las cuatro identidades de Kuroda.

La demostración de las identidades de Kuroda se realiza agrupando las matrices ABCD de los dos elementos involucrados en la parte izquierda de la tabla e igualar la matriz resultante a la que se obtendría agrupando las matrices ABCD de la derecha.

Si se parte de un circuito en escalera, para aplicar las identidades de Kuroda tenemos que añadir UEs redundantes. Al principio y al final del circuito eso siempre se puede hacer añadiendo tramos de líneas adaptadas. Sin embargo, si el filtro es de orden mayor que $N = 3$, la solución pasa por seguir desplazando los UEs y seguir añadiendo UEs redundantes al principio/final del filtro. El proceso puede ser engorroso, pero veremos que el teorema de Richards simplificará esto.

Tabla 9.1: Las cuatro identidades de Kuroda. En todas ellas se cumple que $n^2 = 1 + Z_2/Z_1$



EJEMPLO 9.3 Reutilizando el circuito con stubs del ejemplo 9.2, realizar el circuito sólo con stubs en paralelo.

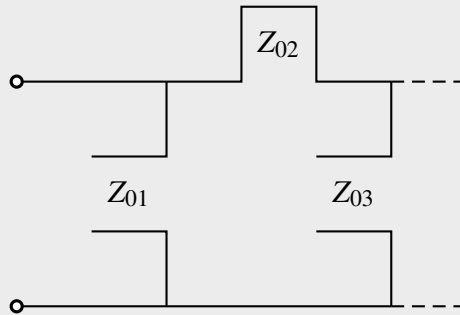
Solución: Partiremos del mismo circuito en elementos concentrados pero esta vez desnormalizaremos en impedancia al final para manejar números menos extremos.

El siguiente paso es obtener las impedancias características de los stubs

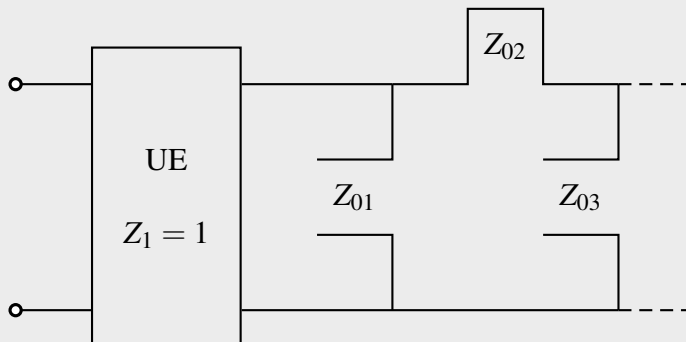
$$Z_{01} = Z_{05} = 1.0275 \Omega$$

$$Z_{02} = Z_{04} = 1.3723 \Omega$$

$$Z_{03} = 0.5546 \Omega$$



Una vez obtenido el circuito con stubs, añadimos al principio y al final del circuito un UE redundante (en este caso, como la impedancia está normalizada, el UE será de 1Ω). Ya que el circuito es simétrico, veremos el proceso solo en la parte izquierda hasta el eje de simetría.



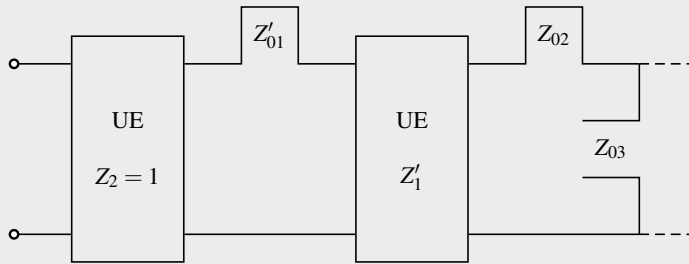
En la figura se ve que al añadir un UE redundante, se puede desplazar hasta poner el stub Z_{02} en paralelo. Eso significa que las identidades de Kuroda se han aplicado dos veces con ese UE.

La primera aplicación hace que

$$Z'_1 = \frac{Z_{01}}{n^2} = \frac{Z_{01}}{1 + Z_{01}} = 0.5067 \Omega$$

$$Z'_{01} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1 + Z_{01}} = 0.4932 \Omega$$

donde $n^2 = 1 + Z_{01}$. En este paso también se añade un segundo UE redundante al principio del circuito (el cual posteriormente se va a desplazar).



La segunda aplicación de la identidad de Kuroda al primer UE transforma nuevamente el UE y el siguiente stub Z_{02} :

$$Z''_1 = n^2 Z_{02} = Z_{02} + \frac{Z_{01}}{1 + Z_{01}} = 1.8791 \Omega$$

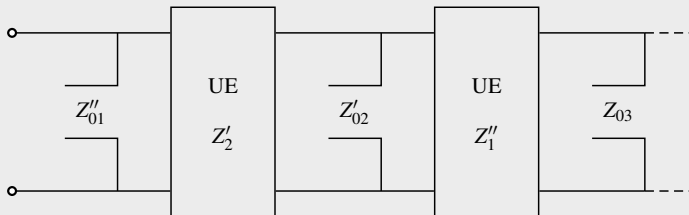
$$Z'_{02} = n^2 Z'_1 = \left[1 + \frac{Z_{01}}{Z_{02}(1 + Z_{01})} \right] \frac{Z_{01}}{1 + Z_{01}} = 0.6939 \Omega$$

donde $n^2 = 1 + Z_{01}/[Z_{02}(1 + Z_{01})]$.

Finalmente, el segundo UE añadido se ha desplazado para generar

$$Z'_2 = n^2 Z'_{01} = \frac{2 + Z_{01}}{1 + Z_{01}} = 1.4932 \Omega$$

$$Z''_{01} = n^2 = 2 + Z_{01} = 3.0275 \Omega$$



El circuito ya está terminado a falta de desnormalizar los valores de las impedancias multiplicándolas por $Z_0 = 50 \Omega$. Los stubs (hasta el eje de simetría) quedan con los

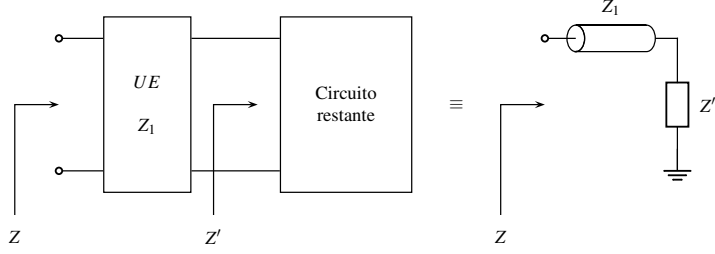


Figura 9.3: Red con impedancia de entrada Z que al extraer un UE de impedancia característica Z_1 deja una red residual con impedancia de entrada Z' .

siguientes valores:

$$\begin{aligned} Z''_{01} &= 151.38 \, \Omega \\ Z'_{02} &= 34.70 \, \Omega \\ Z_{03} &= 27.73 \, \Omega \end{aligned}$$

Los dos UEs (hasta el eje de simetría) quedan con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} Z'_2 &= 74.66 \, \Omega \\ Z''_1 &= 93.95 \, \Omega \end{aligned}$$

La respuesta del filtro diseñado es exactamente la misma del problema 9.2.

9.3 El teorema de Richards

Originalmente, el teorema de Richards fue propuesto para obtener la impedancia de una red una vez se ha extraído un UE (Richards 1948).

El circuito tiene la forma mostrada en la figura 9.3. De teoría de líneas es fácil de deducir que:

$$Z(S) = Z_1 \frac{Z'(S) + jZ_1 \tan \theta}{Z_1 + jZ'(S) \tan \theta} \quad (9.23)$$

Usando la transformación de Richards en su forma $t = j \tan \theta$ tenemos que:

$$Z(t) = Z_1 \frac{Z'(t) + Z_1 t}{Z_1 + tZ'(t)} \quad (9.24)$$

Despejando $Z'(t)$ se obtiene:

$$Z'(t) = \frac{Z(t) - Z_1 t}{1 - t \frac{Z(t)}{Z_1}} \quad (9.25)$$

Teniendo la función $Z(t)$ en forma polinomial es fácil extraer Z_1 , ya que en la expresión (9.24) se observa que $Z(1) = Z_1$. Esto genera un proceso para extraer secuencialmente UEs de una expresión conocida para $Z(t)$ y obteniendo una red con una expresión para $Z'(t)$ sobre la que se puede repetir el proceso de extracción. Sólo queda por demostrar una cosa fundamental: Una vez extraído el UE Z_1 , ¿la impedancia restante $Z'(t)$ es una función impedancia? Si es así, podremos aplicar el método otra vez. Si no es así, el circuito restante no se puede sintetizar y este método es inútil.

El teorema de Richards, en su forma general, tiene el siguiente enunciado:

Teorema 9.2 (Teorema de Richards) *Si $Z(t)$ es una función positiva real, entonces $Z'(t)$ definida por*

$$Z'(t) = \frac{kZ(t) - tZ(k)}{kZ(k) - tZ(t)} \quad (9.26)$$

es también positiva real para cualquier constante k real y positiva. Además, el grado de $Z'(t)$ no es mayor que el grado de $Z(t)$.

El teorema en la forma en que Richards lo demostró (Richards 1947) era una particularización para $k = 1$.

Antes de pasar a la demostración del teorema de Richards, es necesario obtener un par de resultados intermedios que serán útiles en la demostración.

Lema 9.2 *Sea $Z(t)$ una función positiva real y k una constante real y positiva. Entonces*

$$W(t) = \frac{1 - \frac{Z(t)}{Z(k)}}{1 + \frac{Z(t)}{Z(k)}} \times \frac{k+t}{k-t} \quad (9.27)$$

es analítica en el semiplano derecho t y $|W(j\Omega)| \leq 1 \quad \forall \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Los polos de $W(t)$ son los ceros de $1 + Z(t)/Z(k)$, la cual es una función positiva real (véase apéndice E) y no tiene ceros en el semiplano derecho t . Por lo tanto, $W(t)$ es analítica en el semiplano derecho t . La segunda parte del lema se demuestra haciendo $Z(j\Omega) = r(\Omega) + jx(\Omega)$. Consideremos

$$|W(j\Omega)| = \sqrt{\frac{[Z(k) - r(\Omega)]^2 + x^2(\Omega)}{[Z(k) + r(\Omega)]^2 + x^2(\Omega)}} \quad (9.28)$$

Ya que $Z(t)$ es una función positiva real, $r(\Omega) \geq 0 \quad \forall \Omega$ y $Z(k) \geq 0$. Por lo tanto

$$|W(j\Omega)| \leq 1 \quad \forall \Omega \quad \blacksquare \quad (9.29)$$

Lema 9.3 Sea $W(t)$ analítica en el semiplano derecho t y $|W(j\Omega)| \leq 1$. Entonces

$$Z'(t) = \frac{1 - W(t)}{1 + W(t)} \quad (9.30)$$

es una función positiva real.

DEMOSTRACIÓN. Ya que $W(t)$ es analítica en el semiplano derecho t , su máximo módulo ocurre en el eje $j\Omega$. Por hipótesis, $|W(j\Omega)| \leq 1$. Por lo tanto $|W(t)| \leq 1$ para $\Re(t) \geq 0$. Sea $W(t) = u(\Sigma, \Omega) + jv(\Sigma, \Omega)$. Consideremos la parte real de $Z'(t)$:

$$\Re\{Z'(t)\} = \Re\left[\frac{1 - u - jv}{1 + u + jv}\right] = \frac{1 - |W(t)|^2}{(1 + u)^2 + v^2} \quad (9.31)$$

Ya que $|W(t)| \leq 1$ para $\Re(t) \geq 0$, $\Re\{Z'(t)\} \geq 0$ para $\Re(t) \geq 0$, y por tanto $Z'(t)$ es una función positiva real. ■

Por fin tenemos todas las herramientas para demostrar el teorema de Richards

DEMOSTRACIÓN (TEOREMA DE RICHARDS). Si reescribimos (9.27) nos damos cuenta de que

$$Z'(t) = \frac{1 - W(t)}{1 + W(t)} = \frac{kZ(t) - tZ(k)}{kZ(k) - tZ(t)} \quad (9.32)$$

que es precisamente (9.26). También se puede comprobar fácilmente que tanto el numerador como el denominador de (9.26) se anulan cuando $s = k$. De esto se deduce que $s - k$ es un factor común tanto del numerador como del denominador y por tanto el grado de Z' es menor o igual que el de Z . ■

El formalismo de las demostraciones quizá no nos permita ver su utilidad en la síntesis de filtros. Es por ello que van a tratar aspectos prácticos del teorema de Richards.

La síntesis práctica ha sido tratada desde poco tiempo después de que se desarrollara el teorema de Richards (Grayzel 1958), donde se muestra que la síntesis de redes con elementos distribuidos puede llevarse a cabo con la transformación de Richards al campo de los filtros con elementos concentrados.

9.3.1 Síntesis con UEs en cascada

Empecemos con un teorema que nos dice a qué nos enfrentamos y qué podemos hacer para sintetizar un filtro con UEs en cascada.

Teorema 9.3 Sea $S_{21}(t)$, $t = \tanh s\tau = \Sigma + j\Omega$, el parámetro de transmisión de una red de 2 puertos doblemente terminada. Las condiciones necesarias y suficientes para que S_{21} sea realizable como n UEs en cascada es que:

$$1. |S_{21}|^2 = \frac{(1-t^2)^n}{P_n(-t^2)}$$

$$2. 0 \leq |S_{21}(j\Omega)|^2 \leq 1$$

donde $P_n(\Omega^2)$ es un polinomio par de grado $2n$ con coeficientes reales.

Este último teorema puede encontrarse en (Carlin y Civalleri 1998) aunque es consecuencia directa de la forma en cascada de UEs. Aquí se demostrará en una notación consistente con la de este capítulo.

La matriz **ABCD** de una línea de transmisión es:

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} \cos \theta & jZ_0 \sin \theta \\ jY_0 \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

donde

$$\theta = \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{\omega l}{c} = \omega \tau \quad (9.34)$$

Usando la transformación de Richards modificada $t = \tanh s\tau$ se obtiene:

$$\mathbf{ABCD} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & Z_0 t \\ Y_0 t & 1 \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

que es la usada más comúnmente a pesar de la raíz que multiplica a toda la matriz.

Usando la transformación original $t = \tanh s\tau/2$ se obtendría:

$$\mathbf{ABCD} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2Z_0 t \\ 2Y_0 t & 1-t^2 \end{pmatrix} \quad (9.36)$$

lo cual produce polinomios en t de mayor grado que la transformación modificada y, en consecuencia, no se suele utilizar.

Dos UEs en cascada de impedancias características Z_1 y Z_2 tienen una matriz **ABCD**

$$\mathbf{ABCD} = \frac{1}{1-t^2} \begin{pmatrix} 1+t^2 Z_1 Y_2 & t(Z_1 + Z_2) \\ t(Y_1 + Y_2) & 1+t^2 Y_1 Z_2 \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

En general, para N UEs en cascada (Cameron, Kudsia y Mansour 2007) tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{ABCD} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right)^N \begin{bmatrix} A_N(t) & B_{N-1}(t) \\ C_{N-1}(t) & D_N(t) \end{bmatrix} & (N \text{ par}) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right)^N \begin{bmatrix} A_{N-1}(t) & B_N(t) \\ C_N(t) & D_{N-1}(t) \end{bmatrix} & (N \text{ impar}) \end{aligned} \quad (9.38)$$

donde los subíndices indican el orden del polinomio en t . Esto muestra que los polinomios A y D son siempre de orden par y los polinomios C y B son siempre de orden impar.

Tomando como ejemplo la expresión de la matriz de parámetros $ABCD$ para 2 UEs en cascada tenemos que el coeficiente de transmisión es (Hunter 2001):

$$S_{12}(t) = \frac{2}{A + B + C + D} = \frac{1 - t^2}{1 + at + bt^2} \quad (9.39)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{Z_1 + Z_2 + Y_1 + Y_2}{2} \\ b &= \frac{Z_1 Y_2 + Y_1 Z_2}{2} \end{aligned}$$

Si deseamos obtener $|S_{12}|^2$ en función de la variable $\theta = \omega\tau$ tenemos:

$$\begin{aligned} |S_{12}(j \tan \theta)|^2 &= \frac{(1 + \tan^2 \theta)^2}{1 + (a^2 - 2b) \tan^2 \theta + b^2 \tan^4 \theta} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha \sin^2 \theta + \beta \sin^4 \theta} \end{aligned} \quad (9.40)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= a^2 - 2b - 2 \\ \beta &= b^2 - a^2 + 2b + 1 \end{aligned}$$

y por tanto, $|S_{12}|^2$ tiene un denominador que es un polinomio en $\sin^2 \theta$. En general, para N UEs las conclusiones que podemos extraer son:

- S_{12} tiene la forma $S_{12}(t) = \frac{(1-t^2)^{N/2}}{D_N(t)}$ donde $D_N(t)$ es un polinomio Hurwitz en t .
- $|S_{12}(j \tan \theta)|^2 \leq 1$.
- La forma de $|S_{12}(j \tan \theta)|^2$ es:

$$|S_{12}(j \tan \theta)|^2 = \frac{1}{1 + F_N(\sin^2 \theta)} \quad (9.41)$$

donde F_N es un polinomio de orden N y su argumento es $\sin^2 \theta$. Como conclusión importante decir que N UEs en cascada pueden generar un filtro todo-polos de orden N en la variable de Richards.

Para el diseño de filtros en cascada tenemos que partir de que se pueden sintetizar funciones de transferencia de la forma explicada que dependen de $\sin \theta$. Es por ello que para tener en cuenta la dependencia senoidal se ha creado el mapeo (o transformación) siguiente para la variable paso-bajo ω :

$$\omega = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} = a \sin \theta \quad (9.42)$$

donde $a = 1/\sin \theta_0$.

Esta aplicación convierte la respuesta de un prototipo paso-bajo con $\omega_c = 1$ a un prototipo paso-bajo cuyas características representadas con la variable θ son (véase figura 9.4 donde se ha utilizado un filtro con rizado constante en una franja de la banda de paso (Zolotarev) para que se aprecie mejor el efecto de la transformación y su simetría):

- La constante θ_c indica que cuando la longitud eléctrica de los UEs sea $\theta = \theta_c$ la respuesta será la misma que para el prototipo paso-bajo cuando $\omega = 1$. Por ejemplo, si deseamos diseñar un filtro paso-bajo, al fijar $\theta_c = 20^\circ$ indicamos que a la frecuencia de corte del filtro (sea la que sea) los UEs deben tener una longitud eléctrica de $\theta = \beta l = 20^\circ$.
- Cuando $\theta = \pi/2$ tenemos un mínimo de la función de transferencia para filtros todo-polos. No es un cero de transmisión. En ese punto el filtro vuelve a dibujarse “hacia atrás” ya que el mapeo es periódico. Es decir:
 - La banda de paso $\omega \in [0, 1]$ corresponde con $\theta \in [0, \theta_c]$.
 - La banda de transición y atenuada $\omega \in [1, a]$ se convierte en $\theta \in [\theta_c, \pi/2]$.
 - A partir de $\omega > a$ la respuesta del prototipo paso-bajo deja de convertirse en la variable θ , ya que la transformación a partir de a repite la respuesta del filtro hasta llegar a $\theta = \pi$ donde la respuesta es la misma que a $\omega = 0$.
- Como el mapeo es periódico, el filtro tiene infinitas réplicas. El filtro no decae monótonamente como un prototipo paso-bajo de elementos concentrados. La máxima atenuación se conseguirá para $\omega = a$ ya que a partir de ese punto el mapeo se repite. Esto nos permite fijar en el diseño la máxima atenuación que podemos esperar en un filtro con UEs.
- La aparición de réplicas también es predicha por el mapeo y el filtro con UEs generará infinitas réplicas iguales en ancho de banda medido en θ . Si la relación $\theta - \omega$ no es lineal (por ejemplo en filtros con guías de onda) el ancho de banda en frecuencia no se conservará.

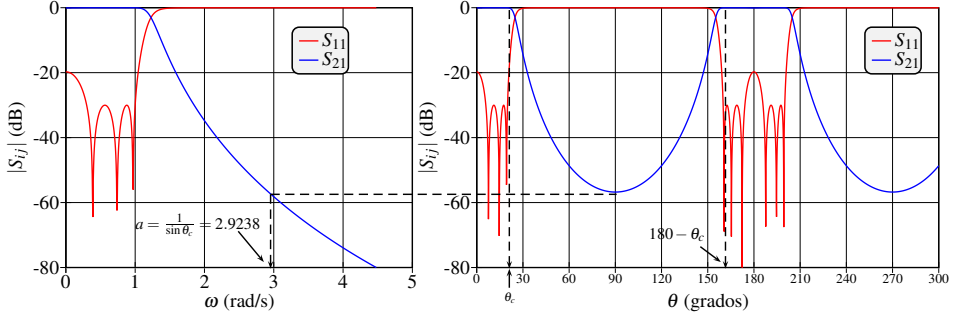


Figura 9.4: Mapeo de un filtro de Zolotarev de orden $N = 6$ y $RL = 30$ dB en el que $\theta_c = 20^\circ$. El rizado deja de ser uniforme para $\omega < 0.3$ (parámetro del filtro de Zolotarev) para que se aprecie mejor el efecto del mapeo.

- La respuesta en módulo se mantiene. El mapeo no altera ni las pérdidas de inserción ni las pérdidas de retorno.

Veamos la aplicación a los dos filtros todo-polos más comunes.

9.3.2 El filtro de Butterworth

En la variable ω el filtro de Butterworth de orden N tiene la forma:

$$|S_{12}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}} \quad (9.43)$$

donde ω_0 es la frecuencia a la que S_{12} cae 3 dB.

Ahora con la variable de Richards podemos escribir:

$$|S_{12}(j \tan \theta)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}\right)^{2N}} \quad (9.44)$$

donde la constante $\sin \theta_0$ hace el papel de ω_0 . Es decir, ahora θ_0 es la constante que hace que cuando $\theta = \theta_0$ la respuesta caiga 3 dB.

Para un filtro de Butterworth la máxima atenuación en la banda eliminada será:

$$L_{\max}|_{\text{dB}} = 10 \log \left[1 + \left(\frac{1}{\sin \theta_0} \right)^2 \right] \quad (9.45)$$

que es la atenuación máxima que sucederá en el valle entre las réplicas del filtro.

9.3.3 El filtro de Chebyshev

Siguiendo el anterior razonamiento, para filtros de Chebyshev podemos escribir:

$$|S_{12}(j \tan \theta)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)} \quad (9.46)$$

La máxima atenuación del filtro en la banda eliminada tendrá la expresión:

$$\begin{aligned} L_{\max}|_{\text{dB}} &= 10 \log \left[1 + \varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{1}{\sin \theta_0} \right) \right] \\ &= 10 \log \left[1 + \varepsilon^2 \cosh^2 \left(N \operatorname{acosh} \frac{1}{\sin \theta_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.47)$$

9.3.4 Procedimiento de diseño

Se van a mostrar dos procedimientos para obtener el mismo filtro. El primero, ideado por Richards, pone de relieve la potencia de todos los teoremas vistos hasta el momento. La función impedancia se reduce progresivamente hasta alcanzar un valor constante. El segundo método es más fácilmente programable y se puede llegar a diseñar filtros de órdenes muy altos sin apenas esfuerzo computacional.

Método de Richards

Este método es análogo al método de Darlington. Se parte de la función de impedancia del filtro y a partir de ahí se construye, con la transformación de Richards, el filtro por reducción de la función impedancia.

EJEMPLO 9.4 Diseñar un filtro paso-bajo de Butterworth de orden $N = 2$ con líneas de longitud eléctrica $\theta_0 = \pi/8$ a la frecuencia de corte de 1 GHz. La impedancia del sistema se asumirá igual a $Z_0 = 1 \Omega$.

Solución: La expresión para el parámetro de transmisión es:

$$|S_{21}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^4}$$

que es la función que tendremos que transformar con la variable de Richards.

Si elegimos $\theta_0 = \pi/8$ la longitud eléctrica del filtro a la frecuencia de corte tenemos que la máxima atenuación será (9.45):

$$L_{\max}|_{\text{dB}} = 10 \log \left[1 + \left(\frac{1}{\sin \theta_0} \right)^4 \right] \approx 16.78 \text{ dB}$$

El mapeo de la frecuencia normalizada es $\omega = a \sin \theta$ donde $a = 1/\sin(\pi/8)$. Ya que $\sin \theta = \tan \theta / \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$ se obtiene que

$$\omega = \frac{a \tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

La transformación de Richards $t = \tan \theta$ genera el mapeo $s - t$:

$$s = j\omega = \frac{at}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Con ello podemos expresar la función de transferencia (parámetro de transmisión) como:

$$|S_{12}(t)|^2 = \frac{(1 - t^2)^2}{t^4(a^4 + 1) - 2t^2 + 1} = \frac{(1 - t^2)^2}{\varepsilon^2 |E(t)|^2}$$

donde, siguiendo la nomenclatura de (Cameron, Kudsia y Mansour 2007), tenemos que $S_{21} = P(t)/(\varepsilon E(t))$, donde ε es una constante positiva y $E(t)$ es un polinomio Hurwitz normalizado en la variable t . Hay que remarcar que las constantes ε y ε_R en el dominio s y en el dominio t no son las mismas. Para obtener $S_{21}(t)$ factorizamos el denominador y escogemos las raíces en el semiplano izquierdo.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{a^4 + 1} = 6.9013 \\ P(t) &= j(1 - t^2) \\ E(t) &= t^2 + 0.5760t + 0.1449 \end{aligned}$$

donde se ha añadido la j para que se cumpla la unitariedad en t porque $N - n_{tz}$ es par. Esto no tiene ninguna relevancia en este ejemplo.

El coeficiente de reflexión es:

$$|S_{11}(t)|^2 = 1 - |S_{21}(t)|^2 = \frac{a^4 t^4}{t^4(a^4 + 1) - 2t^2 + 1}$$

Siguiendo la misma nomenclatura $S_{11} = F(t)/(\varepsilon_R E(t))$ donde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \sqrt{\frac{a^4 + 1}{a^4}} = 1.0107 \\ F(t) &= t^2 \\ E(t) &= t^2 + 0.5760t + 0.1449 \end{aligned}$$

La impedancia de entrada normalizada queda expresada como:

$$Z_{in} = \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} = \frac{E(t) + F(t)/\varepsilon_R}{E(t) - F(t)/\varepsilon_R} = \frac{1.9894t^2 + 0.5760t + 0.1449}{0.0106t^2 + 0.5760t + 0.1449}$$

Una vez obtenida la expresión de la impedancia de entrada se procede con la extracción del primer UE:

$$Z_1 = Z_{in}(1) = 3.7054 \Omega$$

La red restante tiene la expresión:

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{Z(t) - Z_1 t}{1 - t \frac{Z(t)}{Z_1}} = \frac{-0.0391t^3 - 0.1449t^2 + 0.0391t + 0.1449}{-0.5369t^3 - 0.1449t^2 + 0.5369t + 0.1449} \\ &= \frac{(0.0391t + 0.1449)(1 - t^2)}{(0.5369t + 0.1449)(1 - t^2)} \end{aligned}$$

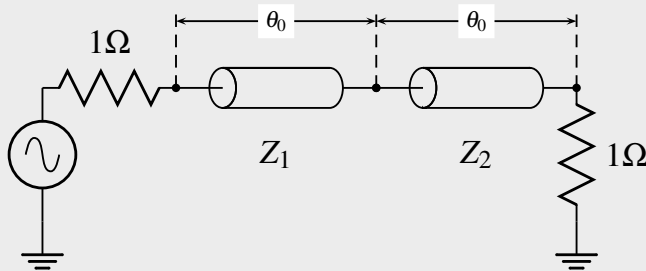
Ahora ya se puede extraer el siguiente UE:

$$Z_2 = Z'(1) = 0.2699 \Omega$$

y la red restante queda

$$\begin{aligned} Z'' &= \frac{Z(t) - Z_1 t}{1 - t \frac{Z(t)}{Z_1}} = \frac{-0.1449t^2 + 0.1449}{-0.1449t^2 + 0.1449} \\ &= \frac{-0.1449(1 - t^2)}{-0.1449(1 - t^2)} = 1 \end{aligned}$$

Con lo cual termina el proceso. El filtro final consiste en 2 líneas de transmisión en cascada de longitud eléctrica $\theta_0 = \pi/8$ a la frecuencia de corte del filtro y de impedancias normalizadas $Z_1 = 3.7054 \Omega$ y $Z_2 = 0.2699 \Omega$ como se observa en la figura siguiente.



A la frecuencia de corte f_0 tenemos que:

$$\theta_0 = \beta_0 l_0 \Rightarrow l_0 = \frac{\theta_0}{\beta_0}$$

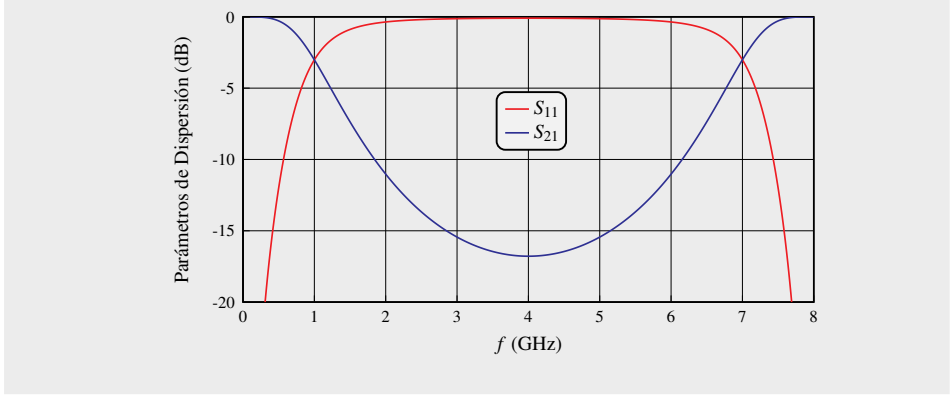
Por tanto, a cualquier frecuencia tenemos que:

$$\theta = \beta l_0 = \frac{\beta}{\beta_0} \theta_0 = \frac{f}{f_0} \theta_0$$

En el punto de máxima atenuación $\theta_s = \pi/2$ y por tanto

$$\theta_s = \frac{f_s}{f_0} \theta_0 \Rightarrow f_s = \frac{f_0 \theta_s}{\theta_0} = 4 \text{ GHz}$$

Es decir, a 4 GHz el filtro alcanza su máxima atenuación (16.78 dB) y, a partir de ese punto, la respuesta volverá a repetirse y a 8 GHz la respuesta será la misma que a 0 Hz. Este comportamiento puede verse en la figura siguiente.



Método de matrices $ABCD$

Este procedimiento es debido a Ralph Levy (Levy 1965) aunque aparece adaptado a la notación moderna y uso práctico en (Cameron, Kudsia y Mansour 2007).

Este método consiste en obtener la matriz $ABCD$ del filtro deseado e ir extrayendo los UEs uno por uno por simple multiplicación de la inversa de un UE por la $ABCD$ de la red restante.

EJEMPLO 9.5 Diseñar el filtro del ejemplo 9.4 haciendo uso de las propiedades de las matrices $ABCD$.

Solución: Partiendo de los parámetros S del filtro sabemos que el parámetro de transmisión es de la forma:

$$S_{21}(t) = \frac{(1 - t^2)^{N/2}}{\varepsilon E(t)}$$

y que la función de transferencia en la variable t es completamente canónica. Lo cual significa que el orden de $P(t)$ es el mismo que el de $E(t)$. Esto significa que para órdenes impares no podemos usar $P(t)$ por culpa de la raíz cuadrada que afecta al polinomio. Esto no pasaría si utilizáramos la transformación de Richards en su versión original con el argumento mitad, como ya se ha explicado. Sin embargo, no es necesario usar $P(t)$ en el proceso de síntesis.

Sabemos que la matriz $ABCD$ de la red tiene la forma dada por (9.38). Así que podemos escribir para $N = 2$

$$\mathbf{ABCD} = \frac{1}{1 - t^2} \begin{pmatrix} A_2(t) & B_1(t) \\ C_1(t) & D_2(t) \end{pmatrix}$$

donde $A_2(t)$ y $D_2(t)$ son polinomios de orden 2 mientras que $B_1(t)$ y $C_1(t)$ son polinomios de orden 1. La cuestión es obtener fácilmente estos polinomios. Para un

orden bajo se podría utilizar la conversión de matrices S a matrices $ABCD$ pero para órdenes moderados esto es un engorro. Por ello, sabiendo que el parámetro $S_{11}(t)$ es de la forma

$$S_{11}(t) = \frac{F(t)/\varepsilon_R}{E(t)}$$

y que la impedancia de entrada de una red cargada con $Z_L = 1 \Omega$ dada por sus parámetros $ABCD$ es

$$Z_{in} = \frac{A(t) + B(t)}{C(t) + D(t)} = \frac{1 + S_{11}(t)}{1 - S_{11}(t)} = \frac{E(t) + F(t)/\varepsilon_R}{E(t) - F(t)/\varepsilon_R}$$

Con estos datos, podemos asignar hábilmente las polinomios de la matriz $ABCD$:

$$\begin{aligned} A_2(t) &= e_0 + f_0 + (e_2 + f_2)t^2 = 1.9894t^2 + 0.1449 \\ B_1(t) &= (e_1 + f_1)t = 0.5760t \\ C_1(t) &= (e_1 - f_1)t = 0.5760t \\ D_2(t) &= (e_0 - f_0) + (e_2 - f_2)t = 0.0106t^2 + 0.1449 \end{aligned}$$

donde los coeficientes e_i con $i = 0, 1, \dots, N$ son los coeficientes del polinomio $E(t)$ y los coeficientes f_i con $i = 0, 1, \dots, N$ son los coeficientes del polinomio $F(t)/\varepsilon_R$. La forma de los coeficientes de transmisión y reflexión en función de los parámetros $ABCD$ queda

$$\begin{aligned} S_{21}(t) &= S_{12}(t) = \frac{2(1 - t^2)^{N/2}/\varepsilon}{A(t) + B(t) + C(t) + D(t)} \\ S_{11}(t) &= S_{22}(t) = \frac{A(t) + B(t) - C(t) - D(t)}{A(t) + B(t) + C(t) + D(t)} \end{aligned}$$

Con estas asignaciones para los polinomios, la matriz global $ABCD$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{ABCD}_{\text{global}} &= \frac{\varepsilon}{(1 - t^2)^{N/2}} \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{6.9013}{1 - t^2} \begin{pmatrix} 1.9894t^2 + 0.1449 & 0.5760t \\ 0.5760t & 0.1449t^2 + 0.0106 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El punto importante ahora es decidir una forma simple para extraer la impedancia característica del primer UE. Richards obtuvo la condición de evaluar la impedancia de entrada en $t = 1$. Ahora tenemos una matriz $ABCD$ que podemos cargar con cualquier cosa. Lo más sencillo es cargar con un corto, un abierto o una carga unitaria. Con ello se obtienen 3 ecuaciones de las cuales una es suficiente. Se suelen usar las 2 primeras (para verificar si hay errores numéricos):

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{A}{C} \leftarrow \text{red cargada con un abierto} \\ Z_1 &= \frac{B}{D} \leftarrow \text{red cargada con un corto} \\ Z_1 &= \frac{A + B}{C + D} \leftarrow \text{red cargada con } Z_L = 1 \Omega \end{aligned}$$

El primer paso de la extracción consiste en hallar Z_1 para extraer el UE de la red total:

$$Z_1 = \frac{A(1)}{C(1)} = 3.7054 \Omega$$

que es el mismo valor obtenido en el ejemplo anterior. Ahora, con este valor, se obtiene la matriz $ABCD$ inversa de un UE con esa impedancia característica para premultiplicarla por la matriz total y hallar la matriz de la red restante. Es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{ABCD}_{\text{resto}} &= \frac{\varepsilon}{(1-t^2)^{(N-1)/2}} \begin{pmatrix} A_{\text{resto}}(t) & B_{\text{resto}}(t) \\ C_{\text{resto}}(t) & D_{\text{resto}}(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & -Z_1 t \\ -t/Z_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\varepsilon}{(1-t^2)^{N/2}} \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\varepsilon}{(1-t^2)^{(N+1)/2}} \begin{pmatrix} A(t) - tZ_1 C(t) & B(t) - tZ_1 D(t) \\ C(t) - \frac{t}{Z_1} A(t) & D(t) - \frac{t}{Z_1} B(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lo cual significa, comparando la primera y la última línea, que al llevar a cabo la multiplicación matricial los polinomios dentro de las matrices de la derecha de la igualdad se deben poder simplificar por $(1-t^2)$. En este ejemplo, por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} A_{\text{resto}}(t) &= \frac{1}{1-t^2} [A(t) - tZ_1 C(t)] = \frac{-0.1449t^2 + 0.1449}{1-t^2} = 0.1449 \\ B_{\text{resto}}(t) &= \frac{1}{1-t^2} [B(t) - tZ_1 D(t)] = \frac{-0.0391t^3 + 0.0391t}{1-t^2} = 0.0391t \\ C_{\text{resto}}(t) &= \frac{1}{1-t^2} \left[C(t) - \frac{t}{Z_1} A(t) \right] = \frac{-0.5369t^3 + 0.5369t}{1-t^2} = 0.5369t \\ D_{\text{resto}}(t) &= \frac{1}{1-t^2} \left[D(t) - \frac{t}{Z_1} B(t) \right] = \frac{-0.1449t^2 + 0.1449}{1-t^2} = 0.1449 \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbf{ABCD}_{\text{resto}} = \frac{6.9013}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 0.1449 & 0.0391t \\ 0.5369t & 0.0106 \end{pmatrix}$$

a la que podemos aplicar nuevamente el algoritmo. Obtenemos Z_2 como

$$Z_2 = \frac{A_{\text{resto}}(1)}{C_{\text{resto}}(1)} = 0.2699 \Omega$$

que es el mismo valor obtenido en el ejemplo anterior. También podríamos darnos cuenta de que

$$\mathbf{ABCD}_{\text{resto}} = \frac{6.9013}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 0.1449 & 0.0391t \\ 0.5369t & 0.0106 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0.2699t \\ t/0.2699 & 1 \end{pmatrix}$$

que es la matriz $ABCD$ de un UE de impedancia $Z_2 = 0.2699 \Omega$. Es importante recalcar que la carga en este caso es $Z_L = 1$. En el caso de un filtro de Chebyshev esto sólo sucede para órdenes impares. Los órdenes pares tienen una impedancia de carga que se puede extraer de la impedancia de entrada de la red a frecuencia nula

ya que en continua la impedancia de entrada de una cascada de UEs es Z_L . Por tanto

$$Z_L = Z_{\text{in}}(0) = \frac{E(0) + F(0)/\varepsilon_R}{E(0) - F(0)/\varepsilon_R} = \frac{e_0 + f_0}{e_0 - f_0}$$

Finalmente, queda por decir que para órdenes impares las redes son simétricas y el primer UE es igual al último, el segundo igual al penúltimo y en general $Z_k = Z_{N-k+1}$ para N impar. Para N par (el caso de este ejemplo) la red es siempre antimétrica que significa que el producto de la primera impedancia y la última es igual que el producto de la segunda y la penúltima y en general este producto es $Z_k Z_{N-k+1} = Z_L$. En este ejemplo se puede comprobar que $Z_1 Z_2 = 1$ y por tanto no era necesario obtener la segunda impedancia ya que era la inversa de la primera.

9.4 Transformaciones generalizadas

La transformación de Richards es un caso general de transformaciones del tipo (Seshu y Balabanian 1957):

$$G(s) = \frac{1 - \phi\left(\frac{W}{p}\right)}{1 + \phi\left(\frac{W}{p}\right)} \quad (9.48)$$

donde

$$p = \frac{s - k}{s + k} \quad (9.49)$$

$$W(p) = \frac{Z(s) - Z(k)}{Z(s) + Z(k)} \quad (9.50)$$

con $Z(s)$ una función positiva real y k un número real y positivo. De (9.49) se despeja s y se inserta en (9.50) haciendo que W sea función de p . La función generadora ϕ debe ser regular y unimodular en el círculo unidad y real en el eje real. Entonces $\phi(W/p)$ es real y unimodular en el círculo unidad y $G(s)$ es una función positiva real. La transformación de Richards es un caso particular donde $\phi(p) = p$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 9.1** Demostrar la primera identidad de Kuroda de la tabla 9.1.
- 9.2** Diseñar un filtro de Chebyshev paso-bajo con líneas commensurate de longitud $\theta = \pi/4$ de orden $N = 3$ y máximas pérdidas de retorno $RL = 20$ dB. La frecuencia de corte debe ser de $f_c = 2$ GHz. Las líneas deben ser stubs en circuito abierto conectadas en paralelo. La impedancia del sistema es de $Z_0 = 50 \Omega$.
- 9.3** Determinar los cambios a realizar si en lugar de diseñar un filtro paso-bajo como el del problema 9.2, nos piden diseñar un paso-banda a $f_0 = 2$ GHz. ¿Haría falta algún dato adicional?
- 9.4** Realizar el mismo diseño del problema 9.2 pero con UEs en cascada.
- 9.5** Realizar el diseño del ejemplo 9.4 pero con orden $N = 3$. Indique el valor máximo de la atenuación.
- 9.6** Realizar el diseño del ejemplo 9.4 pero para el caso de un filtro de Chebyshev. Indique el valor máximo de la atenuación.
- 9.7** Obtener una expresión para el orden de un filtro de Butterworth con UEs en cascada si se dan como datos la frecuencia de corte y la máxima atenuación en la banda atenuada. Aplicar la fórmula para obtener el orden necesario de un filtro paso-bajo con frecuencia de corte $f_0 = 1$ GHz y pérdidas máximas en la banda atenuada de 40 dB.
- 9.8** Obtener una expresión para el orden de un filtro de Chebyshev con UEs en cascada si se dan como datos la frecuencia de corte y la máxima atenuación en la banda atenuada. Aplicar la fórmula para obtener el orden necesario de un filtro paso-bajo con frecuencia de corte $f_0 = 1$ GHz y pérdidas máximas en la banda atenuada de 40 dB.

Capítulo 10

Filtros de resonadores acoplados

En el último capítulo las cosas siempre ocurren con violencia. Acaso toda la vida era como aquella: tedio, y al final una ráfaga heroica.

El Poder y la Gloria. Graham Greene (1904–1991)

Llegado al último capítulo cabe preguntarse si con los conocimientos adquiridos es posible diseñar los filtros más comunes en la práctica. La respuesta es que todavía queda un poco para desvelar las recetas mas conocidas. Estas recetas se aplican muchas veces sin saber el origen de las fórmulas que, a veces, los ingenieros aplican ciegamente. Espero que hasta ahora el lector no haya sentido tedio por la exposición de conceptos alejados de las soluciones tecnológicas actuales pero en este capítulo se cubrirá una pequeña introducción a la teoría moderna¹ de filtros.

Los filtros paso-banda de banda estrecha son los más utilizados en ingeniería de comunicaciones. Las fórmulas dadas en libros clásicos sin apenas demostración (Matthaei, Young y Jones 1980) como meras recetas de cocina satisfacen sólo a técnicos centrados en fines más alejados de la mera comprensión de una formulación. Esta formulación, hoy en día, podría considerarse como poco menos que una obra de arte. Tuvo su raíz en un artículo que es, indudablemente, el más citado en la teoría de filtros (Cohn 1957) sobre filtros con cavidades directamente acopladas. Aunque algunos de sus puntos no se exponen con la adecuada didáctica, el poder de las ecuaciones de diseño ha sido innegable. Hubo un antes y un después de este artículo y el autor piensa que dar una exposición razonada de algunos conceptos importantes es una tarea que merece la pena.

¹ *Moderna* no es un buen adjetivo porque la teoría expuesta en (Van Valkenburg 1960) ya se califica de moderna en su título y, para los cánones de hoy en día, las respuestas de filtros expuestas allí son muy primitivas.

El concepto de filtros de cavidades directamente acopladas, como aparecen en (Cohn 1957) para filtros en línea, extendido a filtros más generales (con acoplos cruzados) no fue inmediato, pero sí que fue un paso lógico. Este flujo de razonamiento es el que se seguirá en este último capítulo donde se verán una serie de avances bastante radicales en esta teoría (Atia, Williams y Newcomb 1974).

Aunque la comunidad científica tardó en asumir las ideas, el nuevo enfoque de diseño de filtros a través de matrices de acoplo ha supuesto un gran avance conceptual. Ello ha permitido ir más allá de lo que jamás se hubo soñado en los tiempos de Cauer cuando la síntesis de filtros con respuestas complejas (con ceros de transmisión aunque solo fuera con bobinas y condensadores) suponía un trabajo de artesanía al alcance de muy pocos. Actualmente, un ordenador con los adecuados algoritmos puede diseñar la topología de un filtro complejo en cuestión de fracciones de segundo incluyendo su respuesta ideal con resonadores de elementos concentrados. Todavía la simulación electromagnética del filtro real requiere su tiempo, pero avances en este sentido son muchos y prometedores.

10.1 Filtros en línea (todo-polos)

Ya que la teoría se desarrolló primero para filtros sin ceros de transmisión, veamos cómo podemos obtener un filtro todo-polos sin necesidad de recurrir a formulismos farragosos. La teoría aquí expuesta es muy conocida y se han establecido sus bases en el capítulo 8 sobre inversores. Sin embargo, esta teoría se extenderá al caso de que los filtros tengan respuestas complejas y justificará las fórmulas más conocidas de diseño práctico de filtros. El tratamiento es para filtros paso-banda, que son los más conocidos, a partir del prototipo paso-bajo. La extensión a los demás tipos es inmediata si hablamos de modelos con elementos concentrados².

10.1.1 Prototipo paso-bajo

Empecemos por recordar que el hecho de que un filtro paso-banda se construye con resonadores (N resonadores para filtros de orden N). Sin embargo, como se explicó en el capítulo 6 sobre transformaciones, un condensador en el prototipo paso-bajo se convierte en un resonador paralelo en un prototipo paso-banda y una bobina se convierte en un resonador serie. Por ello, el prototipo paso-bajo de partida es más simple y se suele operar con ese prototipo mientras sea viable.

El prototipo paso-bajo de un filtro todo-polos es una red en escalera como ya se ha visto en el capítulo 7. Con inversores podemos convertir todos los elementos

²Si hablamos de realizaciones reales de filtros de RF o microondas, no es inmediato, por ejemplo, ver cuál es la forma de realizar un filtro paso-alto a partir de su modelo en elementos concentrados. La estructura física real (sea cual sea) debe comportarse de forma similar al modelo para poder usar el modelo como punto de partida.

a serie o a paralelo como ya se vio en el capítulo 8. Las configuraciones típicas preferidas por los diseñadores son:

1. Filtro de orden N normalizado con N bobinas serie de valor $L = 1 \text{ H}$ y con su resistencia de generador y de carga $R_S = R_L = 1 \Omega$ y $N + 1$ inversores de impedancia separando los elementos (ver figura 10.1 arriba). Cada inversor tiene un valor dado por el escalado de los elementos en escalera g_i . Estos valores son los que se pidió que fueran demostrados como ejercicios en la sección de problemas del capítulo 8 y que son

$$K_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad \forall i = 0, 1, \dots, N \quad (10.1)$$

2. Filtro de orden N normalizado con N condensadores paralelo de valor $C = 1 \text{ F}$ y con su resistencia de generador y de carga $R_S = R_L = 1 \Omega$ y $N + 1$ inversores de admitancia separando los elementos (ver figura 10.1 abajo). Cada inversor tiene un valor dado por el escalado de los elementos en escalera g_i . Estos valores son los que se pidió que fueran demostrados como ejercicios en la sección de problemas del capítulo 8 y que son

$$J_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad \forall i = 0, 1, \dots, N \quad (10.2)$$

Obviamente, en la figura 10.1 (arriba) los inversores primero y último tienen un nombre más acorde con su posición en el filtro. K_{S1} es el inversor K_{01} pero el nombre indica que es el inversor está situado entre la fuente (source) y la primera bobina (que en el prototipo transformado será el primer resonador). Lo mismo para el inversor K_{NL} que es el inversor $K_{N,N+1}$ entre el elemento N y la carga (load). Esto se hace para que no haya confusión en el orden del filtro que sigue siendo N . Todo lo dicho para el circuito superior de la figura 10.1 aplica al circuito inferior de la figura 10.1.

La gran ventaja de esta normalización es que, al desnormalizar el filtro y pasarlo a paso-banda con la transformación adecuada, todos los elementos (bobinas o condensadores) son iguales y, por ello, todos los resonadores obtenidos serán iguales. Como todos los resonadores resuenan a la misma frecuencia, a este tipo de filtros se les denomina sincرونamente sintonizados. De hecho, esto siempre sucede si la respuesta del filtro es simétrica. Una asimetría en la respuesta implica que es necesario algún FIR que cambie la frecuencia de resonancia de alguno de los resonadores. Sobre este tema se incidirá más tarde en este capítulo.

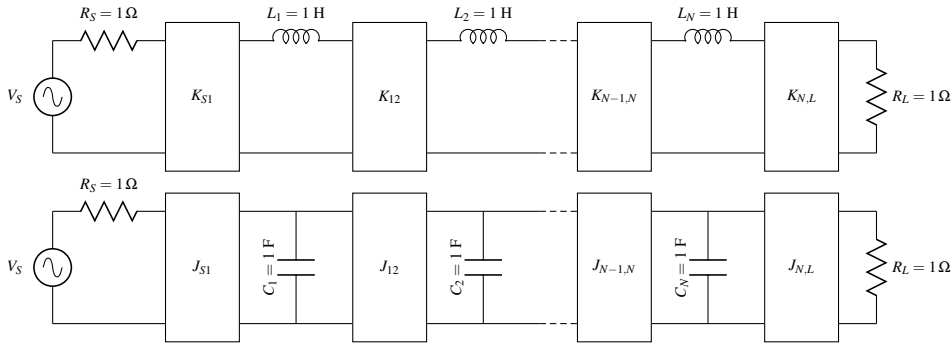


Figura 10.1: Filtros en línea normalizados. Arriba: filtro con inversores de impedancia y bobinas serie. Abajo: filtro con inversores de admitancia y condensadores paralelo. Uno es el dual del otro y las expresiones de los inversores son las mismas.

10.1.2 Equivalencia de bobinas acopladas e inversores

Antes de realizar la transformación paso-bajo a paso-banda hay que tener en cuenta que un inversor está de alguna forma ‘conectando’ dos elementos adyacentes que, a la postre, serán resonadores. Si los resonadores son bobinas y condensadores, lo lógico que se pensó en los primeros días de la teoría de filtros acoplados es que la conexión entre resonadores se podría llevar a cabo por medio de bobinas acopladas magnéticamente (ya que los condensadores no se acoplaban). En aquellos tiempos no se había extendido el uso de inversores y la forma de acoplar conocida en la teoría de circuitos era mediante las bobinas que, por pares, tenían una inducción mutua³ M .

En esta sección tan solo quiere demostrarse que, en realidad, unas bobinas acopladas se pueden sustituir por inversores.

En la figura 10.2 aparecen dos bobinas L_1 y L_2 acopladas magnéticamente con una inducción mutua de valor M . Si se obtiene la matriz \mathbf{Z} a partir de las ecuaciones de definición de las bobinas acopladas tenemos que

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= j\omega L_1 i_1 + j\omega M i_2 \\ v_2 &= j\omega L_2 i_2 + j\omega M i_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{Z} = j\omega \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

Se puede comprobar que el segundo circuito de la figura 10.2 tiene la misma matriz de impedancias. Finalmente, sabemos del capítulo 8 que una célula en T de bobinas de autoinducción M y con los signos correspondientes a la figura, equivalen a un inversor de constante $K = \omega M$ con un desfase de -90° .

³Se define el coeficiente de acoplamiento magnético K entre dos bobinas de autoinducciones L_1 y L_2 a $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ donde M es la inducción mutua entre las dos bobinas.

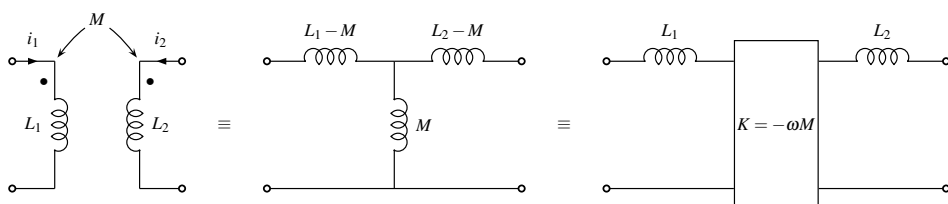


Figura 10.2: Bobinas acopladas y sus circuitos equivalentes con bobinas desacopladas. Recuérdese del capítulo 8 que el inversor equivalente tiene un desfase de $+90^\circ$ (línea de $\lambda/4$). Si se asume que la constante de inversión es positiva entonces el desfase es negativo.

Si un resonador está acoplado a otro a través de una bobina acoplada es como si, entre un resonador y otro, hubiera una inversor con una constante de inversión relacionada con la inducción mutua.

Hay que decir que desde el punto de vista teórico, podría definirse un acoplamiento de tipo eléctrico (entre condensadores). Aunque, en la realidad, esto no es común entre condensadores reales, si que es posible que exista acoplamiento eléctrico entre resonadores reales (con elementos distribuidos). Recordemos que un resonador de elementos concentrados es, en realidad, un modelo aproximado si estamos tratando de diseñar un filtro de RF o microondas, donde el resonador es una cavidad o, en general, una línea de transmisión de longitud adecuada para conseguir una condición de resonancia.

10.1.3 Prototipo paso-banda

Partiendo de los prototipos paso-bajo que aparecen en la figura 10.1, los prototipos correspondientes paso-banda son inmediatos. Se aplica la transformación paso-bajo a paso-banda, que se describe en el capítulo 6, a los elementos reactivos. Los inversores, al ser independientes de la frecuencia, quedan inalterados por la transformación.

Los resonadores son todos iguales porque el prototipo paso-bajo tiene todos los elementos reactivos iguales. Si nos centramos en el circuito superior de la figura 10.1 con inversores de impedancia y bobinas serie tenemos que todas las bobinas se transforman en resonadores serie con elementos de valor

$$L = 1 \text{ H} \Rightarrow \begin{cases} L_0 = \frac{1}{\Delta\omega} \\ C_0 = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} \end{cases} \quad (10.4)$$

quedando el circuito superior de la figura 10.3. Para el caso del circuito inferior de la figura 10.1 con inversores de admitancia y condensadores paralelo tenemos que todas los condensadores se transforman en resonadores paralelo con elementos de

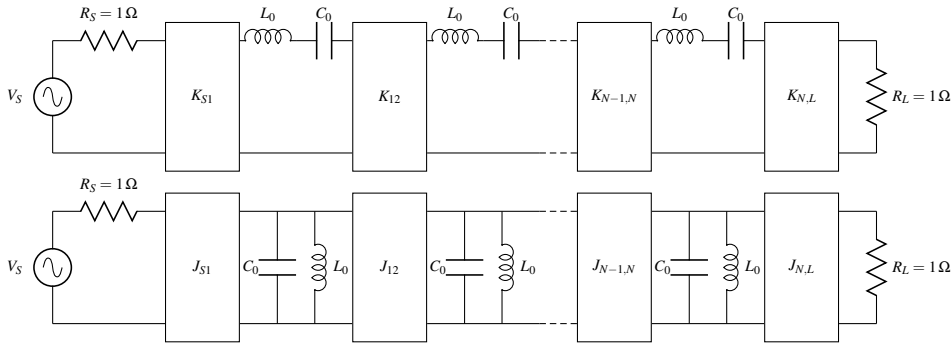


Figura 10.3: Filtros en línea desnormalizados en frecuencia. Arriba: filtro con inversores de impedancia y resonadores serie. Abajo: filtro con inversores de admitancia y resonadores paralelo. Uno es el dual del otro y las expresiones de los inversores son las mismas.

valor

$$C = 1 \text{ F} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = \frac{1}{\Delta\omega} \\ L_0 = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} \end{cases} \quad (10.5)$$

quedando el circuito inferior de la figura 10.3.

10.1.4 Prototipo distribuido

Llegó el momento más crítico del razonamiento de las fórmulas de diseño. Tenemos un modelo de elementos concentrados paso-banda y queremos sustituir los elementos concentrados por líneas de transmisión. Pero un resonador tiene dos elementos y una línea es un elemento que se caracteriza por dos parámetros: su impedancia característica Z_0 y su longitud l . Hay, por tanto, que aproximar ambos comportamientos desde el punto de vista de la impedancia (ya que el resonador está conectado en serie) como se observa en la figura 10.4.

La primera condición a exigir es que ambos (resonador y línea) resuenen a la misma frecuencia, como es lógico. Por tanto:

- El resonador de elementos concentrados tiene una impedancia imaginaria pura $Z = jX$ y la pulsación de resonancia se obtiene forzando que $X = 0$ obteniendo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

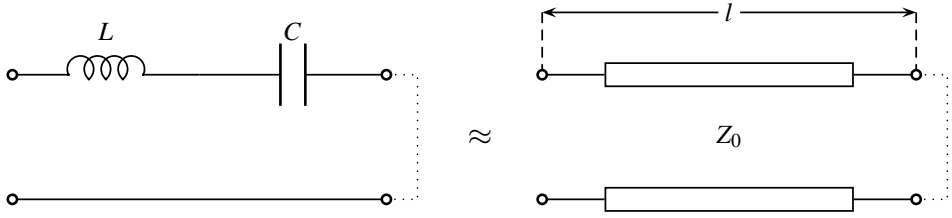


Figura 10.4: En el modelo distribuido de un filtro con resonadores serie los resonadores son sustituidos por líneas de transmisión. Las impedancias de entrada (suponiendo un cortocircuito a la salida) deben ser similares.

- La línea de transmisión cargada con un cortocircuito tiene una impedancia $Z = jZ_0 \tan \phi$ donde $\phi = \beta l$. Por ello

$$X = Z_0 \tan \phi = Z_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} l = 0 \Rightarrow l = m \frac{\lambda}{2} \quad m = 1, 2, \dots \quad (10.6)$$

Es decir, la línea debe ser de longitud múltiplo de $\lambda/2$.

La segunda condición es una aproximación de segundo orden al estilo de un desarrollo en serie de Taylor. En este tipo de desarrollo interesa que la función que se intenta aproximar y la aproximación coinciden en el punto de interés ($X = 0$) y eso está conseguido forzando la misma frecuencia de resonancia (en ω_0). Mejorar la aproximación de Taylor es forzar que las sucesivas derivadas coincidan. Por tanto, la primera derivada debería ser la misma en el punto de interés. Es decir, la pendiente de X en la frecuencia de resonancia debería de ser la misma.

Tradicionalmente, no se ha usado la pendiente, sino un parámetro proporcional a ella llamado en los textos clásicos (Matthaei, Young y Jones 1980) *slope parameter* o parámetro de pendiente o de inclinación. Esta definición es útil por dos razones, porque sus unidades son de impedancia/admitancia y porque el factor de calidad es proporcional a éste parámetro.

Definición 10.1 Sea ω_0 la pulsación de resonancia y sea la reactancia X la parte imaginaria de cierta impedancia de entrada de un resonador y la susceptancia B la parte imaginaria de su admitancia. Se define el parámetro de inclinación de la reactancia como

$$\mathcal{X} \triangleq \frac{\omega_0}{2} \frac{dX}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (10.7)$$

cuyas unidades son ohmios (Ω) y el parámetro de inclinación de la susceptancia como

$$\mathcal{B} \triangleq \frac{\omega_0}{2} \frac{dB}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (10.8)$$

cuyas unidades son siemens (S).

El parámetro de inclinación para ambos resonadores se calcula aplicando la definición:

- El resonador LC tiene un parámetro de inclinación

$$\mathcal{X} = \frac{\omega_0}{2} \left(L + \frac{1}{C\omega_0^2} \right) = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10.9)$$

- La línea de transmisión tiene un parámetro de inclinación (asumimos $l = \lambda/2$)

$$\mathcal{X} = \frac{\omega_0}{2} \left(Z_0 \frac{l}{c} \right) = Z_0 \frac{\pi}{2} \quad (10.10)$$

Observación: se ha asumido que la línea es TEM y por tanto $\lambda = c/f$. Si la línea tuviera una longitud de onda guiada λ_g entonces el parámetro de inclinación de la reactancia tiene la expresión

$$\mathcal{X} \approx \frac{\pi Z_0}{2} \left(\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \right)^2 \quad (10.11)$$

Finalmente, si igualamos ambas expresiones obtenemos la impedancia Z_0 en función del resonador LC

$$Z_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10.12)$$

que para el caso de que L y C se hayan desnormalizado paso-banda se obtiene

$$Z_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\frac{1}{\Delta\omega}}{\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}}} = \frac{2}{\pi W} \quad (10.13)$$

donde W es el ancho de banda fraccional como fue definido en el capítulo 1. Veamos la bondad de la aproximación con un ejemplo de un resonador aislado.

EJEMPLO 10.1 Sea un resonador a 1 GHz que proviene de la desnormalización de una bobina de 1 H para un filtro de ancho de banda de 100 MHz. Calcular el parámetro de inclinación de la reactancia y compara las respuestas del resonador LC con una línea TEM de una impedancia característica Z_0 adecuada.

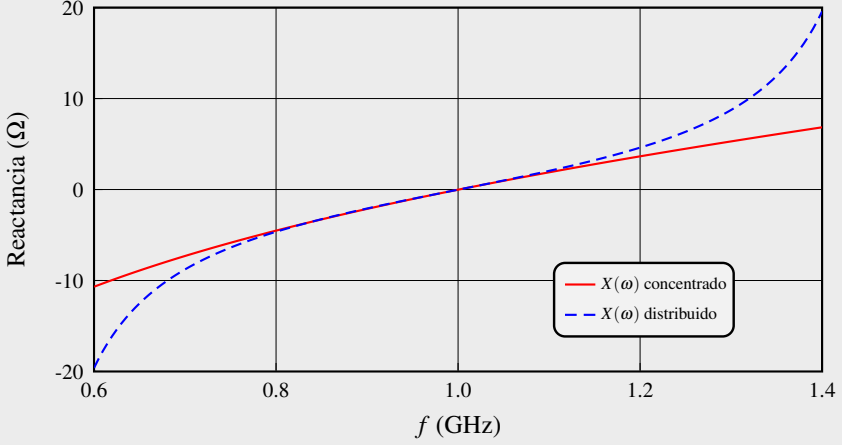
Solución: El resonador LC tiene una bobina $L = 1/\Delta\omega = 1.5915 \mu\text{H}$ y un condensador $C = 1/(L\omega_0) = 15.915 \text{ pF}$. El parámetro de inclinación de la reactancia vale:

$$\mathcal{X} = \omega_0 L = \frac{2\pi f_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{W} = 10 \Omega$$

por tanto, la impedancia característica del resonador TEM vale

$$Z_0 = \frac{2}{\pi W} = 6.3662 \Omega$$

La comparación de ambas reactancias se puede ver en la figura siguiente.



Si ahora normalizamos todas las líneas de transmisión ($Z_0 = 1 \Omega$) aprovechando la propiedad de escalado de los inversores expuesta en el capítulo 8, nos queda que, para todos los inversores (menos para el primero y el último), donde hay una línea a cada lado del inversor

$$\bar{K}_{i,i+1} = \frac{K_{i,i+1}}{Z_0} = \frac{\pi \mathcal{W}}{2\sqrt{g_i g_{i+1}}} = M_{i,i+1} \frac{\pi}{2} \mathcal{W} \quad (10.14)$$

donde se ha denotado $M_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$. Sin embargo, el primer y último inversor no tienen líneas a ambos lados y por tanto el escalado produce los valores

$$\bar{K}_{S1} = \frac{K_{S1}}{\sqrt{Z_0 R_S}} = M_{S1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{W} \quad (10.15a)$$

$$\bar{K}_{NL} = \frac{K_{NL}}{\sqrt{Z_0 R_L}} = M_{NL} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{W} \quad (10.15b)$$

Estas expresiones son aplicables a líneas TEM, TE o TM sin más que utilizar una adecuada definición para \mathcal{W} . De hecho, esta definición es única si nos damos cuenta de que $\phi = \beta l$ y la simple variación de ese ϕ respecto a su valor central es lo que dicta la forma de \mathcal{W} . Si definimos los límites de la banda por las frecuencias f_1 y f_2 y la frecuencia central de forma usual por $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \approx (f_1 + f_2)/2$ y además llamamos ϕ_i a la fase a la frecuencia f_i entonces

$$\mathcal{W} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_0} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_0} = \begin{cases} \frac{f_2 - f_1}{f_0}, & \text{para modos TEM;} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_0}, & \text{para modos TE o TM.} \end{cases} \quad (10.16)$$

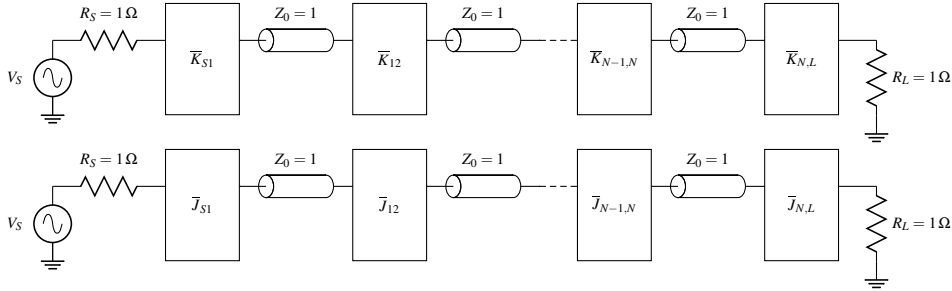


Figura 10.5: Filtros en línea distribuidos normalizados en impedancia. Arriba: filtro con inversores de impedancia. Abajo: filtro con inversores de admitancia. Uno es el dual del otro y las expresiones de los inversores son las mismas.

En (Matthaei, Young y Jones 1980) se define como \mathcal{W}_λ a la expresión de \mathcal{W} para longitudes de onda y \mathcal{W} para frecuencias. Existe una aproximación cuya deducción se pide como ejercicio al final del capítulo y es

$$\mathcal{W}_\lambda \approx \mathcal{W} \left(\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \right)^2 \quad (10.17)$$

El filtro dual con inversores de admitancias y resonadores en paralelo tiene exactamente las mismas fórmulas para los inversores $J_{i,i+1}$, J_{S1} y J_{NL} ya que es el modelo dual.

$$\bar{J}_{S1} = \frac{J_{S1}}{\sqrt{Y_0 Y_S}} = \frac{1}{\sqrt{g_0 g_1}} \sqrt{\frac{\pi}{2} \mathcal{W}} = M_{S1} \sqrt{\frac{\pi}{2} \mathcal{W}} \quad (10.18a)$$

$$\bar{J}_{i,i+1} = \frac{J_{i,i+1}}{Y_0} = \frac{\pi \mathcal{W}}{2 \sqrt{g_i g_{i+1}}} = M_{i,i+1} \frac{\pi}{2} \mathcal{W} \quad (10.18b)$$

$$\bar{J}_{NL} = \frac{J_{NL}}{\sqrt{Y_0 Y_L}} = \frac{1}{\sqrt{g_N g_{N+1}}} \sqrt{\frac{\pi}{2} \mathcal{W}} = M_{NL} \sqrt{\frac{\pi}{2} \mathcal{W}} \quad (10.18c)$$

Los circuitos finales con elementos distribuidos aparecen en la figura 10.5. Como curiosidad la línea de transmisión es dual de sí misma como lo es una resistencia de valor 1Ω .

Una observación importante: la aproximación es mejor si los resonadores se pueden considerar cerrados por un cortocircuito si usamos inversores de impedancia y por un circuito abierto si usamos inversores de admitancia. Esto es, la aproximación es mejor si los \bar{K} son muy pequeños o si los \bar{J} son muy pequeños, es decir, los resonadores están poco acoplados (casi aislados) como puede deducirse visualmente de la figura 10.2 donde aparece el modelo de las bobinas acopladas.

EJEMPLO 10.2 Obtener los modelos de elementos concentrados y distribuidos de un filtro de Chebyshev todo-polos con las siguientes características:

- Orden del filtro $N = 8$.
- Pérdidas de retorno mínimas $RL = 25$ dB.
- Frecuencia central $f_0 = 14.17$ GHz.
- Ancho de banda $BW = 800$ MHz.
- Tecnología guiada en guía estándar WR-75 ($a = 19.05$ mm, $b = 9.525$ mm).

Solución: Los valores de los elementos del prototipo en escalera paso-bajo normalizado de un filtro Chebyshev de 8 polos son:

$$\begin{array}{lll} g_0 = 1.00000 & g_1 = 0.84585 & g_2 = 1.42680 \\ g_3 = 1.81686 & g_4 = 1.68370 & g_5 = 1.88434 \\ g_6 = 1.62340 & g_7 = 1.59684 & g_8 = 0.75578 \\ g_9 = 1.11917 & & \end{array}$$

El prototipo con inversores y bobinas serie normalizadas tiene unos inversores con los valores calculados con (10.1):

$$\begin{array}{lll} K_{S1} = 1.0873 & K_{12} = 0.9103 & K_{23} = 0.6211 \\ K_{34} = 0.5718 & K_{45} = 0.5614 & K_{56} = 0.5718 \\ K_{67} = 0.6211 & K_{78} = 0.9103 & K_{8L} = 1.0873 \end{array}$$

Como se observa, la normalización ha producido una simetría del filtro que no tiene el modelo con elementos concentrados en escalera. El uso de inversores de impedancia se justifica porque la realización final del filtro será un filtro en guía con frises inductivos. Estos frises se modelan como una célula en T con bobinas, como se indica en (Marcuvitz 1986). Ese tipo de frises generan una constante de inversión baja si son de impedancias.

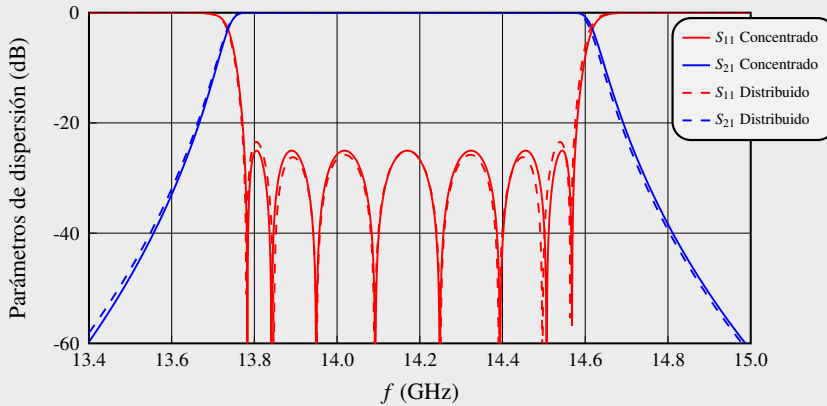
El filtro tiene un ancho de banda fraccional en frecuencia y en longitud de onda bastante diferente:

$$\begin{array}{ll} W &= 0.0565 = 5.65 \% \\ W_\lambda &= 0.0817 = 8.17 \% \end{array}$$

Los valores de los inversores para el modelo distribuido normalizado se calculan con (10.14) y (10.15):

$$\begin{array}{lll} K_{S1} = 0.3893 & K_{12} = 0.1167 & K_{23} = 0.0796 \\ K_{34} = 0.0733 & K_{45} = 0.0720 & K_{56} = 0.0733 \\ K_{67} = 0.0796 & K_{78} = 0.1167 & K_{8L} = 0.3893 \end{array}$$

La comparación entre las respuestas de los modelos con elementos concentrados y distribuidos se muestra en la figura siguiente. Se observan pequeñas diferencias respecto al modelo con elementos concentrados que proporciona la respuesta ideal, pero el resultado es muy aceptable. Las diferencias aumentan con el orden y con el ancho de banda.



Hay que destacar que otra razón por la cual un filtro de banda estrecha, es decir de W pequeño, es modelado adecuadamente por este tipo de aproximación es el hecho de que los inversores se consideran constantes con la frecuencia. Sin embargo, cuando hemos visto que una bobina acoplada y un inversor son equivalentes, la constante de inversión era lineal con la frecuencia ($K = \omega M$). Si el filtro es de banda estrecha entonces $K = \omega M \approx \omega_0 M$. Es decir, dentro del ancho de banda del filtro se comete poco error si sustituimos la frecuencia por una constante igual a la frecuencia central.

10.2 Filtros con cavidades múltiplemente acopladas

Los filtros en línea tienen la ventaja de la simplicidad. Sólo existen acoplos entre resonadores físicamente contiguos y por ello solo existen inversores del tipo $K_{i,i+1}$ modelizando esos acoplos. Para representar los acoplos entre resonadores, usualmente se usa un diagrama con puntos numerados que indican los resonadores y líneas que los conectan, que representan los acoplos. Este tipo de diagramas se les denomina *diagramas de enrutado*. De ahí el nombre de filtros en línea: un filtro en línea de orden N tiene un diagrama de enrutado lineal como el que aparece en la figura 10.6 sin lazos ni ramas⁴. Se observa que cada resonador está acoplado con

⁴Aquí lazo significa un camino cerrado dentro del diagrama. Rama significa un camino que termina en un resonador aislado.

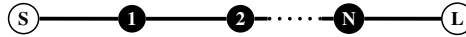


Figura 10.6: Diagrama de enrutado de un filtro en línea. Los resonadores se denotan por círculos numerados. La fuente y la carga se denotan por las letras S y L respectivamente. Los acoplos se denotan por líneas que conectan los resonadores.

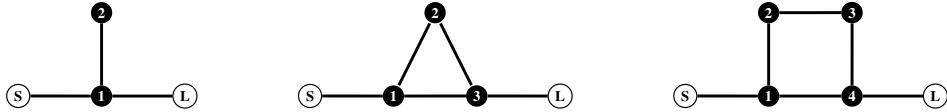


Figura 10.7: Izquierda: diagrama de enrutado de un filtro de orden 2 formando una rama. Centro: diagrama de enrutado de un filtro de tres resonadores todos ellos conectados entre sí formando un camino cerrado (trisección). Derecha: diagrama de enrutado de un filtro de orden $N = 4$ donde el resonador 1 y el 4 están conectados entre si formando un camino cerrado (cuarteto).

dos resonadores adyacentes y el diagrama de enrutado, por tanto, puede ponerse en forma lineal.

Si un filtro tiene un resonador acoplado entre más de dos resonadores, el esquema deja de ser lineal y su diagrama de enrutado empieza a tener formas poligonales. Se dice que el filtro tiene acoplos cruzados y, en general, el filtro es clasificado como múltiplemente acoplado. En la figura 10.7 se muestran tres diagramas que representan a filtros de orden 2, 3 y 4 “no lineales”. El filtro de dos resonadores (orden 2) forma una rama y por ello no es en línea. El filtro de tres resonadores (orden 3) tiene todas las conexiones posibles entre resonadores. Forma una malla y por tanto no es en línea. El filtro de orden 4 no tiene todas las conexiones posibles, pero forma un camino cerrado y por tanto tampoco es un filtro en línea.

Bien, la generalización de filtros desde su configuración en línea a configuración “no lineal” es elegante desde el punto de vista de los diagramas de enrutado. Sin embargo, ¿para qué sirve el producir este tipo de filtros con resonadores con acoplos múltiples? La respuesta viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 10.1 (Regla del camino mínimo) *Sea un filtro múltiplemente acoplado con N resonadores. El máximo número de ceros de transmisión n_{tz} que puede producir un filtro con un determinado diagrama de enrutado viene dado por $n_{tz} = N - l$. Donde l es el número de resonadores involucrados en el camino más corto que es posible dibujar entre la fuente y la carga en el diagrama de enrutado.*

Con este teorema podemos ver directamente que los ceros de transmisión que pueden llegar a producir los diagramas de enrutado que aparecen en la figura 10.7 son $n_{tz} = 1$ para el filtro de orden $N = 2$; $n_{tz} = 1$ para el filtro de orden $N = 3$ y $n_{tz} = 2$ para el filtro de orden $N = 4$.

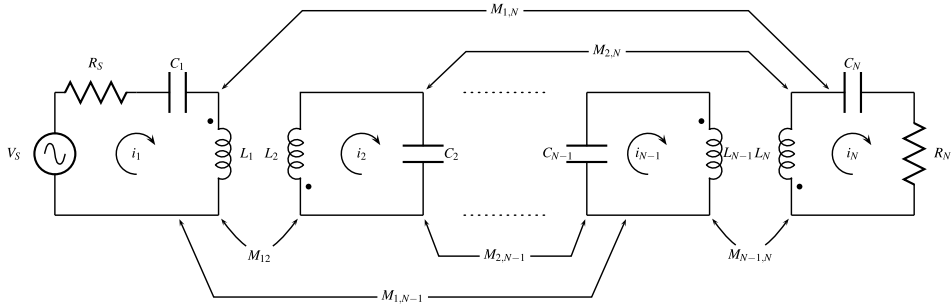


Figura 10.8: Modelo con elementos concentrados de un filtro paso-banda múltiplemente acoplado. El acoplo entre el resonador i y el j se denota a través de M_{ij} .

10.2.1 Formulación de matrices de acoplo

En la sección anterior se ha mostrado cómo representar gráficamente un circuito múltiplemente acoplado. Sin embargo, es necesario algo más que un dibujo para conseguir una representación de un filtro con una respuesta general. En esta sección se van a obtener las ecuaciones que generan la respuesta del filtro y cómo representar esta respuesta de forma compacta y unívoca.

Para empezar de forma didáctica, hay que decir que las formulaciones de la teoría de filtros múltiplemente acoplados ha sufrido variaciones, mejoras y generalizaciones desde su primer enunciado en (Atia, Williams y Newcomb 1974). El origen de esta formulación fue básicamente el circuito paso-banda que aparece en la figura 10.8.

Sea un circuito con N resonadores todos acoplados, en general, con todos los demás. Sea $M_{ij} = \omega m_{ij} \approx \omega_0 m_{ij}$ donde m_{ij} es la inducción mutua entre los resonadores i y j y asumimos que $M_{ij} = M_{ji}$, como es habitual en bobinas acopladas. Sea ω_{0i} la pulsación de resonancia del resonador i calculada como $\omega_{0i} = 1/\sqrt{L_i C_i}$. Sean las resistencias de fuente y de carga R_S y R_L respectivamente.

Las ecuaciones de malla son:

$$\begin{aligned}
 V_S &= \left(R_S + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) i_1 + j\omega M_{12} i_2 + \dots + j\omega M_{1N} i_N \\
 0 &= j\omega M_{12} i_1 + \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) i_2 + \dots + j\omega M_{2N} i_N \\
 &\dots \\
 0 &= j\omega M_{1N} i_1 + \dots + \left(R_L + j\omega L_N + \frac{1}{j\omega C_N} \right) i_N
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

Ahora vamos a suponer que el modelo circuital paso-banda proviene de un prototipo paso-bajo normalizado. Si esto es así, el resonador es serie y proviene de una bobina normalizada. Además, si el filtro es síncrono todos los resonadores son iguales (posteriormente veremos qué sucede si el filtro no es síncrono) de ahí que se pueda escribir:

$$j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i} = j\omega \frac{1}{\Delta\omega} + \frac{\omega_0^2}{j\omega\Delta\omega} = j \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = j\Omega = S \quad (10.20)$$

que es la transformación paso-bajo a paso-banda. El sistema de ecuaciones (10.19) puede escribirse en forma matricial

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \quad (10.21)$$

donde

$$\mathbf{V} = [V_S \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (10.22a)$$

$$\mathbf{I} = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_N]^T \quad (10.22b)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + S\mathbf{U} + j\mathbf{M} \quad (10.22c)$$

siendo \mathbf{U} la matriz identidad de tamaño $N \times N$ y las matrices \mathbf{R} y \mathbf{M} tienen la forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_S & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_L \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1N} & M_{2N} & \dots & M_{NN} \end{pmatrix} \quad (10.23)$$

A la matriz \mathbf{M} se la denomina matriz de acoplamiento. Esta representación todavía no admite un diagrama de enrutado como los que se han definido porque el primer y último resonador todavía contienen la fuente y la carga respectivamente. Una manera de independizar, desde el punto de vista topológico, la fuente y la carga de los resonadores primero y último es añadir inversores en la entrada y la salida como se muestra en la figura 10.9. Esto genera una matriz de impedancias de tamaño $(N+2) \times (N+2)$ debido a que la matriz de acoplamiento \mathbf{M} tiene ahora dos filas y columnas adicionales correspondientes a la fuente y a la carga.

En teoría, nada impide que la fuente y la carga estén acoplados no solo a los resonadores adyacentes, sino a todos los demás. Esto tiene consecuencias de índole práctica ya que un prototipo con una matriz de acoplamiento \mathbf{M} de tamaño $N \times N$ puede generar a lo sumo $N-2$ ceros de transmisión como se puede ver rápidamente aplicando la regla del camino mínimo⁵. Sin embargo, si la matriz de acoplamiento

⁵Si un diagrama de enrutado tiene N resonadores y conectamos el primero y el último directamente podremos obtener que la regla del camino mínimo (teorema 10.1) nos proporciona $n_{tz} = N - 2$.

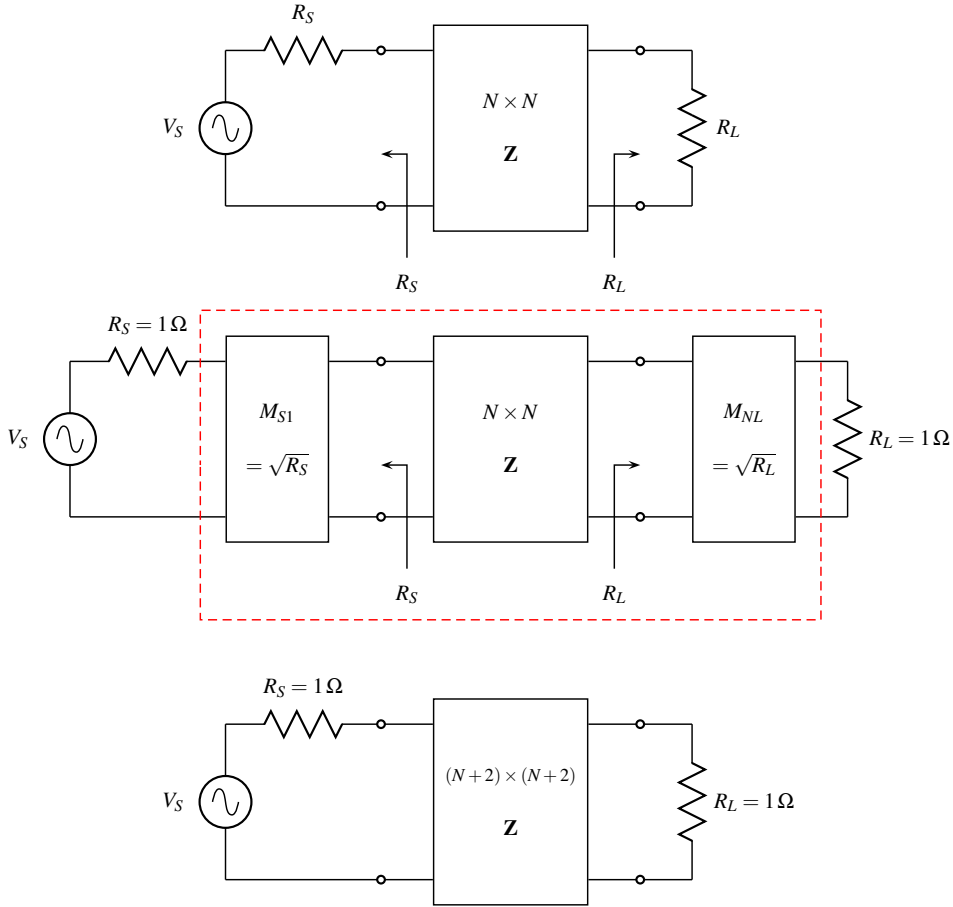


Figura 10.9: Circuito equivalente al prototipo múltiplemente acoplado con una matriz de impedancias de tamaño $N \times N$ (arriba). Normalización de impedancias de fuente y carga (centro). Circuito equivalente normalizado que tiene una matriz de impedancias de tamaño $(N+2) \times (N+2)$.

es de tamaño $(N+2) \times (N+2)$ entonces el máximo número de ceros de transmisión posible es de $n_{tz} = N$, o lo que es lo mismo, la red puede generar una respuesta completamente canónica. Esto puede ser bueno en ciertos aspectos pero, desde el punto de vista de la fabricación tecnológica, siempre ha sido un problema porque es necesario conectar la fuente con la carga de alguna forma para conseguir una respuesta completamente canónica con N ceros de transmisión. Generalmente, es una buena práctica el poder aislar la fuente de la carga lo máximo posible para evitar derivas de señal indeseadas.

El prototipo paso-bajo de una red múltiplemente acoplada de tamaño $N+2$ y, en general, asincrónamente sintonizado puede verse dibujado en la figura 10.10 en la versión paralelo donde todos los inversores son de admitancia. Si el prototipo paso-bajo está normalizado, todos los condensadores valen $C_i = 1$ F. Los FIRs tienen en cuenta que, cuando los condensadores paralelo se transformen en resonadores paralelo al aplicar la transformación paso-bajo a paso-banda, entonces cada resonador podrá resonar a una frecuencia distinta y por tanto el filtro podrá tener una respuesta asimétrica.

El sistema de ecuaciones que rige el prototipo paso-bajo⁶ en la variable Ω sería:

$$\begin{aligned} I_S &= G_S v_S + jM_{S1}v_1 + jM_{S2}v_2 + \dots + jM_{SL}v_L \\ 0 &= jM_{S1}v_S + (j\Omega C_1 + jB_1)v_1 + jM_{12}v_2 + \dots + jM_{1L}v_L \\ &\dots \\ 0 &= jM_{SL}v_S + jM_{S1}v_1 + jM_{S2}v_2 + \dots + G_L v_L \end{aligned} \quad (10.24)$$

que en forma matricial tendría la forma

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \quad (10.25)$$

donde

$$\mathbf{I} = [I_S \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (10.26a)$$

$$\mathbf{V} = [v_S \quad v_1 \quad \dots \quad v_N \quad v_L]^T \quad (10.26b)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} + S\mathbf{U} + j\mathbf{M} \quad (10.26c)$$

⁶Si el prototipo es paso-bajo normalizado todos los condensadores deberían de valer la unidad y $G_S = G_L = 1$ S. Si el prototipo no está normalizado, se puede escalar su matriz de inmitancias por filas y columnas.

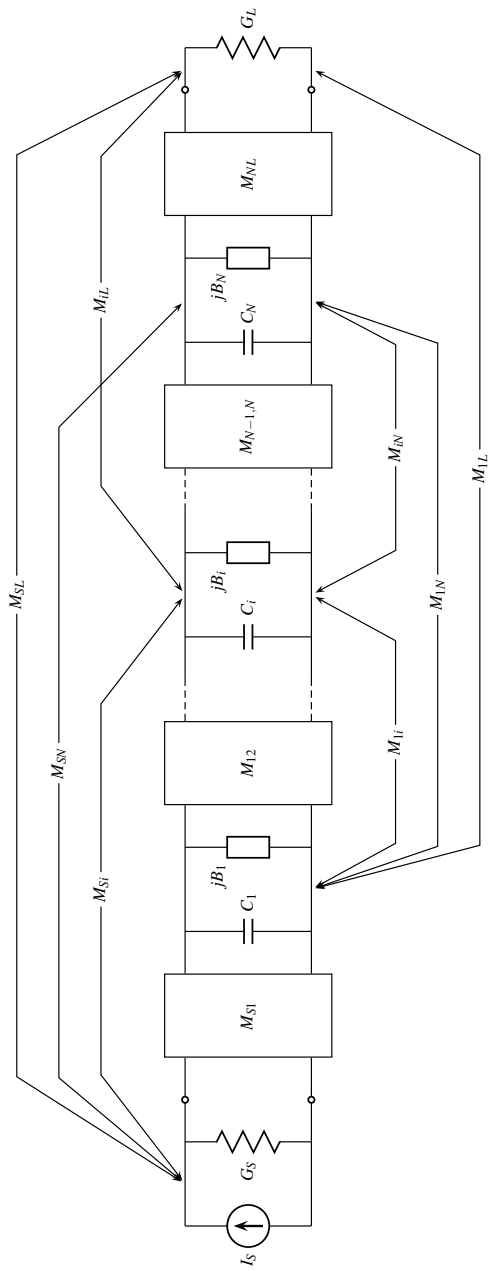


Figura 10.10: Red paso-bajo $N + 2$ múltiplemente acoplada con FIRs y condensadores paralelo.

siendo \mathbf{U} la matrix identidad de tamaño $N+2$ pero con su primer y último elemento de la diagonal puestos a cero. Las matrices \mathbf{R} y \mathbf{M} tienen la forma

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_L \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} B_S & M_{S1} & M_{S2} & \cdots & M_{SN} & M_{SL} \\ M_{S1} & B_1 & M_{12} & \cdots & M_{1N} & M_{2L} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{SN} & M_{1N} & M_{2N} & \cdots & B_N & M_{NL} \\ M_{SL} & M_{1L} & M_{2L} & \cdots & M_{NL} & B_L \end{pmatrix} \quad (10.27)$$

donde generalmente B_S y B_L suelen ser cero pero en ciertas aplicaciones pueden incluirse valores no nulos (Cameron, Kudsia y Mansour 2007).

10.2.2 Características de las matrices

En esta sección se van a dar unas características de la matriz de acoplamientos \mathbf{M} para que el lector pueda recordar, a efectos prácticos, la forma de la misma o sus características esenciales dependiendo del filtro diseñado. Si no se especifica lo contrario, las siguientes características se refieren tanto a la matriz de acoplo de tamaño N como a la de tamaño $N+2$.

1. La matriz de acoplamientos es siempre real⁷ y simétrica con todos sus autovalores reales. Que la matriz sea simétrica no significa que la respuesta sea simétrica en frecuencia.
2. Si un filtro tiene una respuesta simétrica entonces su matriz de acoplamiento la diagonal principal idénticamente nula.
3. Si un acoplamiento M_{ij} es nulo significa que el resonador i y el j no tienen conexión directa alguna.
4. La matriz de tamaño N junto con R_S y R_L caracteriza un filtro con $N-2$ ceros de transmisión como máximo, entonces la matriz $N+2$ puede construirse con solo hacer que sus correspondientes acoplos de entrada salida sean la raíz de las resistencias de fuente y carga respectivamente. Para un

⁷Matrices de acoplo complejas modelan filtros con pérdidas. Aquí siempre asumimos que no existen pérdidas.

ejemplo con $N = 3$ tenemos que

$$\mathbf{M}_{N \times N} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} \quad (10.28a)$$

$$\mathbf{M}_{(N+2) \times (N+2)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{R_S} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{R_S} & M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 \\ 0 & M_{12} & M_{22} & M_{23} & 0 \\ 0 & M_{13} & M_{23} & M_{33} & \sqrt{R_L} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{R_L} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.28b)$$

5. Si un filtro es en línea entonces su matriz de acoplo es tridiagonal y, si además es simétrico, su diagonal principal es nula. Además, sus acoplos son conocidos si se conocen sus elementos del prototipo en escalera g_i . Para un ejemplo con $N = 3$ tenemos que

$$\mathbf{M}_{(N+2) \times (N+2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{g_0 g_1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{g_0 g_1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_2 g_3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_2 g_3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_3 g_4}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_3 g_4}} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.29)$$

6. Podemos hacer que una matriz de acoplo \mathbf{M} sea equivalente a otra \mathbf{M}' si realizamos la operación

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}^T \quad (10.30)$$

donde \mathbf{R} es una matriz de ‘rotación’ que tiene como característica que es unitaria. Sus filas/columnas son ortogonales y por tanto los autovalores de \mathbf{M} y \mathbf{M}' son los mismos. Con la \mathbf{R} adecuada podemos conseguir que algunos elementos se anulen y el filtro final sea más sencillo. De esa forma no estamos obligados a que la matriz de acoplo esté muy llena y fuerce a que el diseñador tenga que construir un filtro con muchos acoplamientos físicos.

10.2.3 Proceso de análisis

Las dos formas principales de analizar la respuesta que proporciona una matriz de acoplo es mediante simulación de un circuito en un programa que permita el análisis de los parámetros circuitales o mediante la evaluación directa de la matriz de inmitancia en un rango de frecuencias para obtener los parámetros S .

En el caso de que dispongamos de un simulador circuital, el circuito más simple a construir es un conjunto de N resonadores en paralelo adecuadamente interconectados. Cada resonador debe tener 3 elementos:

- Un condensador (que proviene del condensador normalizado en paso-bajo) cuyo valor, tras aplicar la transformación paso-bajo a paso-banda, es $C = 1/\Delta\omega$ donde $\Delta\omega = 2\pi BW$ y siendo BW el ancho de banda del filtro (véase tabla 6.1).
- Una bobina (que también proviene del condensador normalizado en paso-bajo) cuyo valor, tras aplicar la transformación paso-bajo a paso-banda al condensador, es $L = \Delta\omega/\omega_0^2$ donde $\omega_0 = 2\pi f_0$, siendo f_0 la frecuencia central del filtro (véase tabla 6.1).
- Un FIR cuyo valor para el resonador i es $jB_i = jM_{ii}$, es decir, el elemento i -ésimo de la diagonal de la matriz de acoplo.

Seguidamente hay que conectar los N resonadores con inversores de admitancia de valores dados por la matriz de acoplo. En particular, entre el resonador i y el j se debe conectar un inversor de admitancia de valor M_{ij} .

Finalmente, hay que alimentar el circuito con un generador de impedancia interna de valor $R_S = 1\ \Omega$ y cargarlo con una impedancia de valor $R_L = 1\ \Omega$.

Hay que decir que el prototipo paso-bajo del filtro es exactamente igual pero en lugar de bobinas y condensadores de valores indicados solo habría que conectar condensadores normalizados $C = 1\text{ F}$ y los FIR correspondientes en paralelo (a los FIR no les afecta la transformación en frecuencia ni a los inversores tampoco).

El circuito dual es posible pero no inmediato ya que hay que conectar los inversores en serie y eso obliga a tener masas flotantes en los inversores. La versión en paralelo puede hacerse con masa común.

Si no se dispone de un simulador circuital, la alternativa es llevar a cabo los cálculos con un programa que evalúe los parámetros S a partir de la matriz de acoplamiento. Supongamos que disponemos de \mathbf{M} en su versión N o $N + 2$ (la única diferencia circuital es la normalización de las impedancias de fuente y de carga) y queremos evaluar el parámetro S_{11} y S_{21} en función de la frecuencia. Supongamos que tenemos que obtener los parámetros S de la figura 10.11.

Ya sabemos que la matriz \mathbf{Z} o la matriz $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ se pueden obtener mediante (10.22c) o (10.26c) respectivamente siguiendo la convención establecida en la figura 10.8 para las corrientes. Se ve fácilmente que se pueden relacionar las corrientes de las dos figuras

$$i_1 = I_1 = y_{11}V_s \quad (10.31a)$$

$$i_N = -I_2 = y_{N1}V_s = \frac{v_N}{R_L} \Rightarrow \frac{v_N}{V_S} = R_L y_{N1} \quad (10.31b)$$

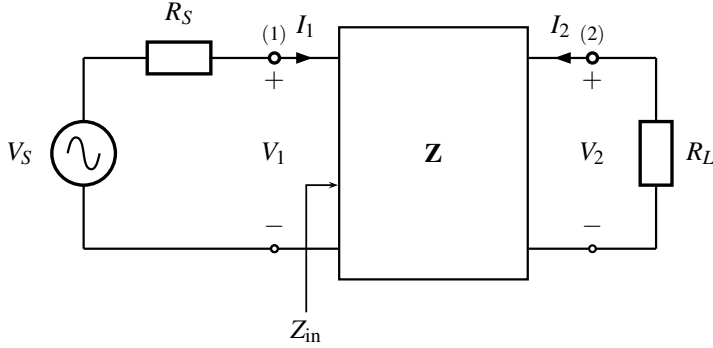


Figura 10.11: Red de dos puertos con una fuente V_S de impedancia R_S y una carga R_L . \mathbf{Z} es la matriz $N \times N$.

Escogiendo (2.14) como punto de partida para el parámetro S_{21} tenemos que

$$\begin{aligned} S_{21} &= 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}} \frac{V_2}{V_S} = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}} \frac{v_N}{V_S} \\ &= 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}} R_L y_{N1} = 2\sqrt{R_S R_L} y_{N1} \end{aligned} \quad (10.32)$$

Ahora, para calcular el coeficiente de reflexión, es necesario obtener la impedancia de entrada. La tensión v_1 la obtenemos por el divisor de tensión a la entrada y la corriente a la entrada la sustituimos de (10.31a)

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{V_S Z_{in}}{(R_S + Z_{in}) y_{11} V_S} \Rightarrow Z_{in} = \frac{1}{y_{11}} - R_S \quad (10.33)$$

Aplicando la definición de S_{11} dada en (1.6) tenemos que

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - R_S}{Z_{in} + R_S} = 1 - \frac{2R_S}{Z_{in} + R_S} = 1 - 2R_S y_{11} \quad (10.34)$$

Finalmente, para el puerto de salida podemos obtener

$$S_{22} = 1 - 2R_L y_{NN} \quad (10.35)$$

Si la matriz de admitancias es de un circuito con $R_S = R_L = 1 \Omega$ (la matriz de tamaño $N + 2$) entonces

$$S_{11} = 1 - 2y_{11} \quad (10.36a)$$

$$S_{21} = S_{12} = 2y_{N1} \quad (10.36b)$$

$$S_{22} = 1 - 2y_{NN} \quad (10.36c)$$

Obviamente hay que hacer esto para cada punto en frecuencia que se desea obtener, ya que la matriz de admitancias depende de la frecuencia y los parámetros S también.

10.2.4 Proceso de síntesis

Hoy en día hay varios métodos para sintetizar la matriz de acoplo dependiendo de la topología asociada. Aquí el término topología se refiere a la forma del diagrama de enrutado. Se puede obtener una matriz de acoplo totalmente llena pero no resulta nada práctico por el número de acoplos a realizar en el circuito real. Tampoco demasiado vacía es práctico porque es necesario un número mínimo de acoplos dado un orden N y un determinado número de ceros de transmisión n_{tz} . También, si el número de acoplos es pequeño, una pequeña variación en los mismos produce una variación alta en la respuesta (sensibilidad).

Hay varias topologías canónicas conocidas: folded, arrow/wheel y transversal. Estas son las que permiten un máximo número de n_{tz} para un orden dado N con un mínimo de acoplos no nulos. A partir de ellas y mediante rotaciones se podrán conseguir otras topologías más adecuadas a cada diseño en particular. El lector interesado deberá consultar (Cameron, Kudsia y Mansour 2007) donde se trata este tema con la extensión merecida. Sin embargo, este tema pretende ser introductorio y tan solo veremos cómo obtener la topología transversal con su matriz $N + 2$.

Veremos en esta sección cómo obtener la matriz de acoplo de un filtro a partir de las expresiones de los parámetros S . El algoritmo es el siguiente:

1. Obtener los parámetros S a partir de las especificaciones. Esto proporciona

$$S_{11} = \frac{F(s)}{\varepsilon_R E(s)} \quad S_{21} = \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)} \quad (10.37)$$

2. Obtener la matriz de admitancia

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{y_d(s)} \begin{bmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{21n}(s) & y_{22n}(s) \end{bmatrix} \quad (10.38)$$

donde, como siempre, el subíndice d se refiere al denominador y el n al numerador.

3. Descomponer la matriz de admitancias como

$$\mathbf{Y} = j \begin{pmatrix} 0 & K_\infty \\ K_\infty & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{s - j\lambda_k} \begin{bmatrix} r_{11k} & r_{12k} \\ r_{21k} & r_{22k} \end{bmatrix} \quad (10.39)$$

donde

$$jK_\infty = \lim_{s \rightarrow j\infty} \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} \Rightarrow K_\infty = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} (\varepsilon_R - 1) \quad (10.40)$$

y los elementos λ_k junto con r_{ijk} son los polos y los residuos k -ésimos de los elementos ij de la matriz de admitancias.

4. Se identifica la anterior matriz de admitancia con la de una red transversal (ver figura 10.12)

$$\mathbf{Y} = j \begin{pmatrix} 0 & M_{SL} \\ M_{SL} & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{sC_k + jB_k} \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk}M_{Lk} \\ M_{Sk}M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix} \quad (10.41)$$

lo cual proporciona

$$C_k = 1, \quad B_k = M_{kk} = -\lambda_k \quad (10.42a)$$

$$M_{Lk} = \sqrt{r_{22k}} \quad (10.42b)$$

$$M_{Sk} = \frac{r_{21k}}{\sqrt{r_{22k}}}, \quad k = 1, \dots, N \quad (10.42c)$$

$$M_{SL} = K_\infty \quad (10.42d)$$

La forma de la matriz $N + 2$ obtenida típica de una red transversal aparece en la figura 10.13.

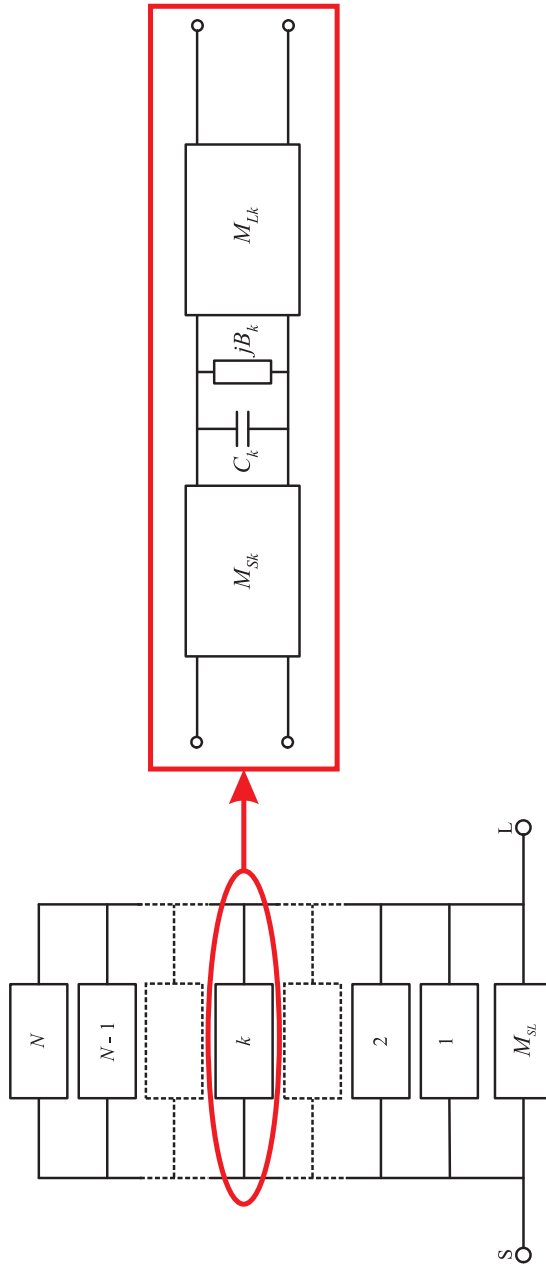


Figura 10.12: Red transversal canónica paso-bajo de orden N . Obsérvese que hay N condensadores con sus FIRs (que en paso-banda serán resonadores) y además un acoplo directo entre la entrada y la salida M_{SL} .

	S	1	2	\dots	k	\dots	N	L
S		M_{S1}	M_{S2}	\dots	M_{Sk}	\dots	M_{SN}	M_{SL}
1	M_{1S}	M_{11}						M_{1L}
2	M_{2S}		M_{22}					M_{2L}
\vdots	\vdots			\ddots				\vdots
k	M_{kS}				M_{kk}			M_{kL}
\vdots	\vdots					\ddots		\vdots
N	M_{NS}						M_{NN}	M_{NL}
L	M_{LS}	M_{L1}	M_{L2}	\dots	M_{Lk}	\dots	M_{LN}	

Figura 10.13: Matriz de acoplo $N + 2$ correspondiente a la topología transversal. La matriz es simétrica. Los elementos en blanco significa que son nulos. La matriz interna $N \times N$ aparece enmarcada.

EJEMPLO 10.3 Obtener la matriz de acoplamiento transversal para un filtro de Chebyshev generalizado de orden $N = 3$ y $RL = 20$ dB con ceros de transmisión en el dominio paso-bajo en las posiciones $\omega_{tz} = \{-2, 2, 3.3\}$ produciendo una respuesta asimétrica que verifica $S_{21} < -30$ dB por debajo de $\omega = 4$ rad/s y $S_{21} < -10$ dB en la banda inferior.

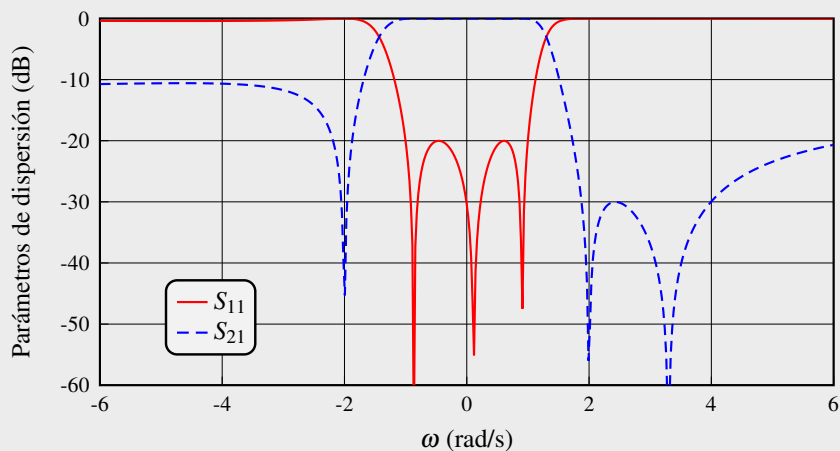
Solución: El filtro es completamente canónico porque $N = n_{tz}$. Los parámetros S son

$$S_{11} = \frac{F(s)}{\varepsilon_R E(s)} \quad S_{21} = \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)}$$

donde los coeficientes aparecen en la tabla siguiente y las constantes valen $\varepsilon = 4.6209$ y $\varepsilon_R = 1.0243$.

Coeficientes de los polinomios			
s^n	$E(s)$	$P(s)$	$F(s)$
s^3	1	j	1
s^2	$2.1632 - j0.3032$	3.300	$-j0.1559$
s^1	$3.0493 - j0.2478$	$j4.000$	0.7795
s^0	$2.6585 - j1.0487$	13.2000	$-j0.0891$

La respuesta del filtro aparece reflejada en la siguiente gráfica.



La matriz de admitancias es

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{y_d(s)} \begin{bmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{12n}(s) & y_{22n}(s) \end{bmatrix}$$

donde cada uno de los polinomios tiene la expresión

$$\begin{aligned}y_{11n}(s) &= 0.8904s^2 - 0.0121js + 2.5785 \\y_{12n}(s) &= -0.2164js^3 - 0.7141s^2 - 0.8656js - 2.8566 \\y_{22n}(s) &= 2.1632s^2 - 0.2478js + 2.6585 \\y_d(s) &= s^3 - 0.3032js^2 + 3.0493s - 1.0487j\end{aligned}$$

Descomponiendo la matriz de admitancias en fracciones simples usando polos y residuos tenemos que

$$\begin{aligned}p_1 &= -j1.7633 & r_{211} &= 0.1328 & r_{221} &= 0.6130 \\p_2 &= j1.7210 & r_{212} &= 0.0740 & r_{222} &= 0.6931 \\p_3 &= j0.3456 & r_{213} &= -0.8554 & r_{223} &= 0.8570\end{aligned}$$

y además $K_\infty = -0.2164$. De los polos p_i obtenemos los elementos de la diagonal ya que como se dijo en (10.41) y (10.42) sabemos que $jB_i = -p_i$ y $M_{ii} = B_i$. De los residuos y de K_∞ se obtienen las filas y columnas que rodean a la diagonal principal. Podemos, finalmente, escribir la matriz de acoplamiento con los datos obtenidos

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0.1696 & 0.0889 & -0.9240 & -0.2164 \\ 0.1696 & 1.7633 & 0 & 0 & 0.7830 \\ 0.0889 & 0 & -1.7210 & 0 & 0.8325 \\ -0.9240 & 0 & 0 & -0.3456 & 0.9258 \\ -0.2164 & 0.7830 & 0.8325 & 0.9258 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual tiene la estructura mostrada en la figura 10.13.

10.3 Nota histórica: Cohn

No sería justo terminar este libro sin rendir homenaje a Seymour Bernard Cohn nacido en Stamford Connecticut el 21 de Octubre de 1920 y fallecido el 9 de Septiembre de 2015.

Después de obtener el grado B. Eng.⁸ en ingeniería eléctrica de la universidad de Yale, New Haven, Conn., en 1942, trabajó para el Radio Research Laboratory de la Universidad de Harvard, especializándose en receptores de UHF y microondas, circuitos y filtros.

En 1944 representó al Radio Research Laboratory como observador técnico con las fuerzas aéreas estadounidenses en el frente del mediterráneo. Después de la disolución del Radio Research Laboratory al final de 1945, se matriculó como estudiante graduado en la universidad de Harvard donde consiguió el grado de

⁸Bachelor of Engineering son de 3 a 5 años de ingeniería en una universidad.



Figura 10.14: Seymour B. Cohn (1920-2015). Fuente: archivos del IEEE (izquierda) y National Academy of Sciences (derecha).

máster en ciencias (M.S.) en ingeniería de comunicaciones en 1946, y el doctorado en ingeniería y física aplicada en 1948⁹.

A lo largo de su carrera trabajó en diferentes compañías (Sperry Gyroscope co. hasta 1953, Stanford Research Institute hasta 1960 y más tarde Rantec hasta 1967) después de su retirada de Rantec Corp. (donde fue Vicepresidente y director tecnológico) se dedicó a la consultoría industrial.

Cohn tiene más de 40 patentes y publicó más de 50 artículos, docenas de ellos en el IEEE (antiguo IRE), en un gran conjunto de temas incluyendo stripline, aisladores, transiciones guía-coaxial, divisores de potencia, guías reentrantes (ridged), teoría de filtros, y muchos más. Sus artículos son profundos, fáciles de comprender, y sobre todo todavía relevantes hoy en día. Algunas de las mejores referencias en ingeniería de microondas fueron creadas en la década de 1950 cuando fue publicado el artículo más relevante de la teoría de filtros (Cohn 1957). Cohn fue el mayor colaborador en el libro (Matthaei, Young y Jones 1980). En 1964 ganó el Microwave Prize de la IEEE Microwave Theory and Techniques Society y en 1979 recibió el IEEE Microwave Career Award. En 1974 ganó la IEEE Lamme Medal 1974 y el Centennial Award in 1984. En 1991 fue elegido miembro honorario de la National Academy of Engineering.

⁹Curiosamente el título de su tesis es fácilmente localizable: A Theoretical and Experimental Study of a Wave-Guide Filter Structure.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 10.1** Demostrar que el parámetro de inclinación de la reactancia para una línea TE y TM tiene la expresión (10.11). Pista: Z_0 no es independiente de la frecuencia, de hecho $Z_0(\omega) = \eta\lambda_g/\lambda$.
- 10.2** Demostrar que los anchos de banda fraccionales en longitud de onda y en frecuencia están relacionados a través de (10.17).
- 10.3** Comparar la respuesta de la impedancia de entrada de los resonadores de los modelos con elementos concentrados y distribuidos del ejemplo 10.2. Calcular el parámetro de inclinación de la reactancia.
- 10.4** Sea un filtro con $f_0 = 1$ GHz y ancho de banda $BW = 40$ MHz. Su respuesta viene dada por su matriz de acoplo cuyo elemento $M_{33} = 0.02$. Determinar la frecuencia de resonancia del resonador 3.
- 10.5** Sea un filtro con $f_0 = 11$ GHz y ancho de banda $BW = 40$ MHz. Su matriz de acoplo $N + 2$ es la del ejemplo 10.3. Determinar la frecuencia de resonancia de todos los resonadores.
- 10.6** Dibujar el circuito del filtro del ejemplo 10.3.

Apéndice A

El criterio de Hurwitz

Un polinomio $p(s)$ es estable si la parte real de todas sus raíces es negativa. El problema de obtener las raíces de un polinomio es trivial para los ordenadores de hoy en día si el polinomio es de orden bajo.

Obtener todas las raíces de un polinomio sólo para comprobar que las partes reales de esas raíces son negativas es un método poco sutil y, para ordenes altos, posiblemente impracticable.

El criterio de Hurwitz es un método para identificar polinomios estables sin necesidad de obtener sus raíces. Sea el polinomio

$$p(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n = a_0 + a_1 s + \cdots + a_N s^N \quad \{a_i\} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

Se define la parte par e impar de $p(s)$ como:

$$\text{Ev}[p(s)] = \frac{p(s) + p(-s)}{2} = m(s) = a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + \cdots \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Od}[p(s)] = \frac{p(s) - p(-s)}{2} = n(s) = a_1 s + a_3 s^3 + a_5 s^5 + \cdots \quad (\text{A.3})$$

donde tradicionalmente se elige $m(s)$ para denotar el polinomio par, ya que la letra M es par respecto a su punto medio, y $n(s)$ porque N es impar respecto a su punto medio.

Algunas características que podemos asumir como punto de partida para $p(s)$:

- $a_i > 0$, $\forall i = 0, \dots, N$. La única excepción es que todos los a_i sean negativos y así la posición de las raíces no cambia respecto a que todos los a_i sean

positivos. Esto es debido a que los factores de $p(s)$ solo pueden ser de dos formas:

- $(s + a)$ donde $a > 0$. Una raíz en $s = -a$.
 - $(s^2 + 2as + a^2 + b^2)$ donde $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$. Dos raíces complejas conjugadas en $s = -a \pm jb$.
- No pueden haber términos ausentes entre $a_N s^N$ y a_0 . Esto es debido a que si multiplicamos términos como los mencionados, nunca se cancela ninguna potencia porque no hay ningún signo negativo.

A.1 Algoritmo para coeficientes reales

El primer paso consiste en formar la función $\psi(s)$ de la siguiente forma:

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{m(s)}{n(s)}, & \text{si } \mathcal{O}(m) > \mathcal{O}(n); \\ \frac{n(s)}{m(s)}, & \text{si } \mathcal{O}(m) < \mathcal{O}(n). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathcal{O}(q)$ es el orden del polinomio $q(s)$. En (Van Valkenburg 1960) se demuestra que $\psi(s)$ es una función positiva real¹ y que por tanto $\Re\{\psi(s)\} \geq 0$ si $\Re\{s\} > 0$. Además, la función $\psi(s)$ por construcción tiene un polo en el infinito y puede expresarse como

$$\psi(s) = \alpha_1 s + \frac{1}{\psi_1(s)} \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\alpha_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\psi(s)}{s} \quad (\text{A.6})$$

Obviamente α_1 es positivo (cociente de dos coeficientes positivos) y las propiedades de $\psi_1(s)$ son:

1. Como $p(s)$ es de orden N , $\psi(s)$ es el cociente de un polinomio de orden N y un polinomio de orden $N - 1$. Por tanto $\psi_1(s)$ es el cociente entre un polinomio de grado $N - 1$ y uno de grado $N - 2$.
2. $\psi_1(s)$ tiene una forma más simple que $\psi(s)$.
3. $\psi_1(s)$ tiene un polo en el infinito.

¹Como consecuencia, la función $1/\psi(s)$ también es positiva real. Para ver las funciones positivas reales con más detalle se puede consultar el apéndice E.

4. $\psi_1(s)$ es positiva real porque:

- a) $\psi_1(s)$ es real cuando s es real ya que esta propiedad aplica a $\psi(s)$ y a $\alpha_1 s$.
- b) $1/\psi_1(s)$ tiene los mismos polos que $\psi(s)$ excepto por el polo en el infinito que ha sido extraído. Por ello, ninguno está en el semiplano derecho del plano complejo.
- c) Ya que $\Re\{\alpha_1 j\omega\} = 0$, se deduce que

$$\Re\{\psi(j\omega)\} = \Re\left\{\frac{1}{\psi_1(j\omega)}\right\} \geq 0 \quad \forall \omega$$

- d) Finalmente, ya que $1/\psi_1(s)$ es positiva real, también lo es $\psi_1(s)$.

La expansión de la ecuación (A.5) puede repetirse sobre $\psi_1(s)$ para obtener una $\psi_2(s)$ reduciendo el grado del numerador y denominador en 1 cada vez, y así sucesivamente, obteniendo una fracción continua de la siguiente forma:

$$\psi(s) = \alpha_1(s) + \frac{1}{\alpha_2 s + \frac{1}{\alpha_3 s + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_N s}}}} \quad (\text{A.7})$$

El criterio de Hurwitz establece que una condición suficiente y necesaria para que $p(s)$ sea un polinomio de Hurwitz es que todos los α_i sean reales positivos y que la fracción continua no termine prematuramente.

EJEMPLO A.1 Determinar si el polinomio

$$p(s) = s^6 + 9s^5 + 37s^4 + 93s^3 + 146s^2 + 134s + 60$$

en un polinomio de Hurwitz.

Solución: Descomponiendo $p(s)$ es su parte par e impar se obtiene

$$\begin{aligned} m(s) &= s^6 + 37s^4 + 146s^2 + 60 \\ n(s) &= 9s^5 + 93s^3 + 134s \end{aligned}$$

Por tanto $\psi(s)$ se puede construir como:

$$\begin{aligned}
 \psi(s) &= \frac{m(s)}{n(s)} = \frac{s^6 + 37s^4 + 146s^2 + 60}{9s^5 + 93s^3 + 134s} \\
 &= \frac{1}{9}s + \frac{1}{\frac{27}{80}s + \frac{1}{\frac{64}{117}s + \frac{1}{\frac{351}{496}s + \frac{1}{\frac{1922}{1989}s + \frac{1}{\frac{221}{186}s}}}}}
 \end{aligned}$$

Como todos los $\alpha_i, i = 1, \dots, 6$ son reales y positivos (y además la fracción continua no ha terminado prematuramente), el polinomio $p(s)$ es de Hurwitz. De hecho la factorización de $p(s)$ en función de sus raíces es:

$$\begin{aligned}
 p(s) &= (s+2)(s+3)(s+1-j)(s+1+j)(s+1-2j)(s+1+2j) \\
 &= (s+2)(s+3)(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)
 \end{aligned}$$

A.2 Versión matricial

El criterio de Hurwitz, o también llamado criterio de Routh-Hurwitz, es muy usado en teoría de control de sistemas y generalmente se emplea para saber cuántas raíces están en un semiplano o en el otro y cuantas hay en el eje imaginario (Nise 2010). Un algoritmo alternativo al descrito en la sección anterior, que no requiere mas que simples manipulaciones algebraicas, se enuncia a continuación:

Teorema A.1 *Sea el polinomio $p(s)$ definido en (A.1). Sean los determinantes construidos de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}
 D_1 &= a_1 \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

y en general

$$D_k = \det \left[h_k^{(1)}, h_k^{(3)}, \dots, h_k^{(2k-1)} \right] \quad (\text{A.8})$$

donde el vector columna $h_k^{(m)}$ consiste en los primeros k términos de la secuencia a_m, a_{m-1}, \dots con $a_j = 0$ si $j < 0$ o $j > N$.

Entonces $p(s)$ con $a_N \neq 0$, es estable si y solo si se cumplen todas las siguientes condiciones:

1. $a_0 \neq 0$;
2. $D_{2k} > 0$, $k = 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$;
3. $\text{sgn } D_{2k+1} = \text{sgn } a_0$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$

EJEMPLO A.2 Comprobar si $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 8s + 11$ es un polinomio de Hurwitz.

Solución: Se calculan los determinantes

$$D_1 = 8 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = 7, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 11 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -19$$

Como D_3 ha violado la tercera condición del teorema A.1 el polinomio no puede ser Hurwitz.

A.3 Extensión a coeficientes complejos

En la literatura clásica sobre teoría de filtros el algoritmo descrito en la sección anterior era más que suficiente para averiguar si un polinomio podría ser denominador de $H(s)$. Hoy en día los filtros con respuestas asimétricas respecto a la frecuencia central están muy en boga. Este tipo de filtros no pueden mantener la simetría de polos respecto al eje real y, por ello, el denominador de $H(s)$ no puede tener los coeficientes reales. Sin embargo, la condición de que los polos de $H(s)$ se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo no puede ser violada o la función $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ no estará acotada y el sistema será considerado como inestable. Es necesario, por tanto, obtener un algoritmo con el mismo objetivo que el de la sección anterior pero sin la restricción de que los coeficientes del polinomio $p(s)$ sean números reales. Es decir,

$$p(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n = a_0 + a_1 s + \dots + a_N s^N \quad \{a_i\} \in \mathbb{C} \quad (\text{A.9})$$

Asumimos que $p(s)$ no tiene ceros en el eje imaginario y definimos:

- Sea p el número de raíces del polinomio $p(s)$ con parte real negativa.

- Sea q el número de raíces del polinomio $p(s)$ con parte real positiva.
- $w(x)$ es el número de variaciones de signo de la cadena generalizada de Sturm² obtenida a partir de $P_0(\omega)$ y $P_1(\omega)$. Esta cadena (P_0, P_1, \dots, P_r) se obtiene de la siguiente forma:
 - Se obtiene $P_0(\omega)$ y $P_1(\omega)$ (polinomios de coeficientes reales) separando en partes real e imaginaria el polinomio $p(j\omega)$:

$$p(j\omega) = P_0(\omega) + jP_1(\omega)$$

- El resto de polinomios de la cadena se obtiene por divisiones sucesivas:

$$P_i = -\text{rem}(P_{i-2}, P_{i-1}) \quad 2 \leq i \leq r$$

donde $\text{rem}(P, Q)$ es el resto de la división P/Q .

Por el teorema fundamental del algebra, todo polinomio de orden N de coeficientes complejos tiene $p + q = N$ raíces. Si el polinomio es de Hurwitz $p - q = N$. El teorema de Routh-Hurwitz establece que

$$p - q = w(+\infty) - w(-\infty) \quad (\text{A.10})$$

lo cual nos dice que para que el polinomio sea estable es necesario que

$$w(+\infty) - w(-\infty) = N \quad (\text{A.11})$$

EJEMPLO A.3 Determinar la estabilidad del polinomio

$$p(s) = s^3 + (4 - 2j)s^2 + (6 - 7j)s + 1 - 7j$$

Solución: Se generan los polinomios $P_0(\omega)$ y $P_1(\omega)$ como

$$\begin{aligned} p(j\omega) &= -j\omega^3 + -(4 - 2j)\omega^2 + j(6 - 7j)\omega + 1 - 7j \\ &= -4\omega^2 + 7\omega + 1 + j(-\omega^3 + 2\omega^2 + 6\omega - 7) \end{aligned}$$

Debido a que se toma como P_0 a la parte real y ésta tiene un orden menor que la parte imaginaria, no es adecuada la asociación $P_0(\omega) = \Re\{p(j\omega)\}$, $P_1(\omega) =$

²Una cadena generalizada de Sturm en un intervalo $[a, b]$ es una secuencia finita de polinomios reales (X_0, X_1, \dots, X_r) que cumple:

1. $X(a)X(b) \neq 0$
2. $\text{sgn}(X_r)$ es constante en $[a, b]$
3. Si $X_i(\xi) = 0$ ($\xi \in [a, b]$) para $1 \leq i \leq r - 1$, entonces $X_{i-1}(\xi)X_{i+1}(\xi) < 0$

$\Im\{p(j\omega)\}$ ya que la cadena de Sturm debe ser decreciente en orden y por ello en general $\mathcal{O}(P_0) > \mathcal{O}(P_1) > \dots > \mathcal{O}(P_r)$.

En este punto se puede aplicar un sencillo razonamiento: un polinomio se puede descomponer en producto de términos de tipo $(s - a)$ donde a es una raíz. Si multiplicamos todo el polinomio por cualquier constante, las raíces se mantienen. Por ello, podemos multiplicar $p(s)$ por j y obtener

$$\begin{aligned} jp(j\omega) &= (\omega^3 - 2\omega^2 - 6\omega + 7) + j(-4\omega^2 + 7\omega + 1) \\ &= P_0(\omega) + jP_1(\omega) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} P_0(\omega) &= \omega^3 - 2\omega^2 - 6\omega + 7 \\ P_1(\omega) &= -4\omega^2 + 7\omega + 1 \end{aligned}$$

Por divisiones sucesivas se obtiene

$$\begin{aligned} P_2(\omega) &= -\text{rem}(P_0, P_1) = \frac{99}{16}\omega - \frac{111}{16} \\ P_3(\omega) &= -\text{rem}(P_1, P_2) = -\frac{4160}{1089} \end{aligned}$$

La cadena termina en P_3 dado que $P_4 = -\text{rem}(P_2, P_3) = 0$. Por lo tanto, la cadena generalizada de Sturm para el polinomio $p(s)$ de orden 3 tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} S_3 &= (P_0, P_1, P_2, P_3) \\ &= \left(\omega^3 - 2\omega^2 - 6\omega + 7, -4\omega^2 + 7\omega + 1, \frac{99}{16}\omega - \frac{111}{16}, -\frac{4160}{1089} \right) \end{aligned}$$

y obteniendo los límites de la cadena para $\omega \rightarrow +\infty$ y para $\omega \rightarrow -\infty$ se obtienen los valores de $w(+\infty)$ y $w(-\infty)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} S_3 &= \left(+\infty, -\infty, +\infty, -\frac{4160}{1089} \right) \Rightarrow w(+\infty) = 3 \quad \text{cambios de signo} \\ \lim_{\omega \rightarrow -\infty} S_3 &= \left(-\infty, -\infty, -\infty, -\frac{4160}{1089} \right) \Rightarrow w(-\infty) = 0 \quad \text{cambios de signo} \end{aligned}$$

Finalmente se observa que se cumple que

$$w(+\infty) - w(-\infty) = 3 - 0 = 3 = N$$

y por lo tanto el polinomio es Hurwitz.

De hecho, la factorización de $p(s)$ en función de sus raíces es:

$$p(s) = (s + 1 - j)(s + 2 + j)(s + 1 - 2j)$$

estando todas ellas en el semiplano izquierdo.

En las premisas del algoritmo de Routh-Hurwitz se establece que el polinomio a tratar no tenga raíces en el eje imaginario. Veamos un ejemplo de lo que sucedería en el caso de que se incumpliera esta condición.

EJEMPLO A.4 Determinar si el polinomio

$$p(s) = s^2 + (1 + 3j)s - 2 + 2j$$

es un polinomio de Hurwitz.

Solución: Se obtienen P_0 y P_1 para iniciar la cadena de Sturm:

$$\begin{aligned} p(j\omega) &= -\omega^2 + j(1 + 3j)\omega - 2 + 2j \\ &= -\omega^2 - 3\omega - 2 + j(\omega + 2) \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} P_0(\omega) &= -\omega^2 - 3\omega - 2 \\ P_1(\omega) &= \omega + 2 \end{aligned}$$

La cadena de Sturm se completaría con $P_2 = -\text{rem}(P_0, P_1)$ pero

$$\frac{P_0(\omega)}{P_1(\omega)} = -\omega - 1$$

y la división es exacta y no existe el resto. De hecho, P_0 y P_1 comparten una raíz ($\omega = -2$) que es precisamente la que provoca que no haya resto. Por tanto, el proceso ha terminado antes de completar la cadena y el polinomio no puede ser de Hurwitz.

De hecho, la factorización de $p(s)$ en función de sus raíces es:

$$p(s) = (s + 1 + j)(s + 2j)$$

donde aparece la raíz $s = -2j$ que viola la condición de estabilidad.

Apéndice B

La técnica de polos alternados

Una forma usual para obtener el polinomio $E(s)$ denominador de $S_{11}(s)$ y $S_{21}(s)$ consiste en aplicar unitariedad directamente

$$|S_{11}(s)|^2 + |S_{21}(s)|^2 = 1 \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{|F(s)|^2}{\varepsilon_R^2 |E(s)|^2} + \frac{|P(s)|^2}{\varepsilon^2 |E(s)|^2} = 1 \quad (\text{B.1b})$$

lo que proporciona la ecuación

$$\varepsilon^2 |F(s)|^2 + \varepsilon_R^2 |P(s)|^2 = \varepsilon^2 \varepsilon_R^2 |E(s)|^2 \quad (\text{B.2})$$

Esta ecuación permite, una vez conocidas las constantes ε y ε_R , obtener $|E(s)|^2$ a partir de $|P(s)|^2$ y $|F(s)|^2$. Tan solo es necesario obtener las raíces del polinomio resultante de la izquierda de la igualdad (B.2) y separar las del semiplano izquierdo de las del derecho y asignar las del semiplano izquierdo a $E(s)$ y las del derecho a $E(s)^*$. Esto no es un problema para polinomios de orden bajo, pero el mecanismo involucra obtener las raíces de un polinomio de orden $2N$ para al final agrupar N raíces del semiplano izquierdo en un polinomio de orden N . Además, las raíces de $E(s)$ y de $E(s)^*$ son simétricas respecto al eje imaginario. Es decir, hay información redundante en el proceso que se puede aprovechar para mejorar la precisión del algoritmo de búsqueda de raíces.

La búsqueda de raíces en un polinomio se complica con el orden N y si estas raíces están próximas. Para filtros de orden alto las raíces se tienden a agrupar cerca de $s = \pm j$ y ello provoca ciertas imprecisiones en el momento de aplicar algoritmos clásicos para la búsqueda de raíces. Es por ello que, si las raíces están más separadas, es de esperar que estos algoritmos funcionen mejor.

Para reducir el orden del problema se invocarán ciertas condiciones obtenidas de la condición de unitariedad, pero teniendo en cuenta toda la matriz de parámetros S como se verá a continuación.

B.1 Condición de unitariedad

Las condiciones de unitariedad sobre una red de dos accesos se obtienen de la expresión matricial

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^+ = \mathbf{I} \quad (\text{B.3})$$

donde \mathbf{S}^+ es la matriz de parámetros S (tamaño 2×2) traspuesta y conjugada y la matriz \mathbf{I} es la matriz identidad. La ecuación (B.3) produce 4 ecuaciones de las cuales sólo son útiles 3, ya que en una red recíproca $S_{21} = S_{12}$

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (\text{B.4a})$$

$$|S_{22}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (\text{B.4b})$$

$$S_{11}S_{21}^* + S_{21}S_{22}^* = 0 \quad (\text{B.4c})$$

De las dos primeras ecuaciones de (B.4a) se deduce que $|S_{11}| = |S_{22}|$ y la ecuación final nos proporciona la información adicional necesaria para reducir los grados de libertad de un filtro. De hecho, la matriz de dispersión de un filtro tiene la siguiente expresión (Cameron, Kudsia y Mansour 2007)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{E(s)} \begin{pmatrix} \frac{F(s)}{\varepsilon_R} & \frac{P(s)}{\varepsilon} \\ \frac{P(s)}{\varepsilon} & (-1)^{n_{tz}+1} \frac{F(s)^*}{\varepsilon_R} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Es decir, 4 parámetros S pero sólo tres polinomios diferentes. Con la relación de unitariedad se puede conseguir uno a partir de los otros dos.

Reescribiendo la condición de ortogonalidad (B.4c) se obtiene que

$$F(s)P(s)^* + (-1)^{n_{tz}+1}P(s)F(s) = 0$$

la cual nos proporciona una relación para $P(s)$

$$P(s)^* = (-1)^{n_{tz}}P(s) \quad (\text{B.6})$$

que nos dice que el polinomio $P(s)$ solo puede tener raíces en el eje imaginario o situadas simétricamente a ambos lados del eje imaginario.

La ecuación (B.2) se puede reescribir como (se va a eliminar de la notación la dependencia con s para mejorar la claridad de la exposición):

$$\varepsilon^2 \varepsilon_R^2 |E|^2 = (\varepsilon_R P + \varepsilon F)(\varepsilon_R P^* + \varepsilon F^*) - \varepsilon \varepsilon_R (P^* F + P F^*) \quad (\text{B.7})$$

donde el superíndice $*$ indica la conjugación de todo el polinomio (no sólo de los coeficientes). El último término de (B.7) se puede eliminar si

$$P^*F + PF^* = 0 \quad (\text{B.8})$$

Insertando (B.6) en la anterior ecuación nos proporciona

$$F = (-1)^{n_{tz}+1} F^* \quad (\text{B.9})$$

y por tanto $S_{11}(s) = S_{22}(s)$. Esto sólo puede suceder si todos los ceros de $F(s)$ están en el eje imaginario. Ésta es la única restricción a esta técnica que hay que considerar para poder aplicarla¹.

B.2 Obtención de $E(s)$ a partir de $F(s)$ y $P(s)$

Una vez obtenida la condición de que todos los ceros de reflexión están en el eje imaginario para aplicar la técnica de polos alternados hay que utilizar la expresión (B.7) reducida

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \varepsilon_R^2 |E|^2 &= (\varepsilon_R P + \varepsilon F)(\varepsilon_R P^* + \varepsilon F^*) \\ &= (\varepsilon_R P + \varepsilon F)(\varepsilon_R P + \varepsilon F)^* \\ &= QQ^* \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde $Q = \varepsilon_R P + \varepsilon F$. Obviamente no podemos asignar alegremente $\varepsilon \varepsilon_R E = Q$, ya que $E(s)$ es Hurwitz y $Q(s)$ no lo es. Pero se puede afirmar que $Q(s)$ tiene un patrón de raíces simétrico a $Q(s)^*$ respecto al eje imaginario. Por ello, el procedimiento de polos alternados consiste en:

1. Formar el polinomio $Q(s)$ a partir de $F(s)$ y $P(s)$. Este polinomio es de orden N .
2. Obtener las raíces de $Q(s)$. Esto supone obtener solamente N raíces. Las raíces están distribuidas de forma alternada a los lados del eje imaginario si se ordenan por ω creciente o decreciente. De ahí el nombre de la técnica “polos alternados”.
3. Reflejar las raíces respecto al eje imaginario obteniendo $2N$ raíces.
4. Escoger las N raíces del semiplano izquierdo y asignarlas a $E(s)$.

¹ Esto no es una tragedia ya que todos los filtros clásicos (Chebyshev, Butterworth, Elípticos, Butterworth generalizado, Chebyshev generalizado, etc.) tienen los ceros de reflexión en el eje imaginario para poder conseguir una mínima reflexión (a frecuencias reales) en la banda de paso.

EJEMPLO B.1 Determinar las expresiones de $S_{11}(s)$ y de $S_{21}(s)$ de un prototipo paso-bajo de un filtro de Butterworth generalizado de orden $N = 6$ con dos ceros de transmisión $\omega_{tz1} = 2$ rad/s y $\omega_{tz2} = 4$ rad/s. Se requiere que las pérdidas de retorno sean de $RL = 20$ dB a la pulsación $\omega = 1$ rad/s (límite superior de la banda). Representar gráficamente los parámetros de dispersión en unidades logarítmicas.

Solución: Un filtro maximalmente plano tiene N ceros en el origen y por tanto

$$F(s) = s^6$$

El filtro es asimétrico ya que no hay ceros de transmisión en frecuencias negativas. En este caso la simetría cuadrantal no existe y el polinomio $E(s)$ tendrá coeficientes complejos en general. En este caso $N - n_{tz} = 6 - 2 = 4$ es una cantidad par y el polinomio $P(s)$ formado por los ceros de transmisión estará multiplicado por j

$$P(s) = j(s - 2j)(s - 4j) = js^2 + 6s - 8j$$

Como $N > n_{tz}$ sabemos que $\varepsilon_R = 1$ (no es un filtro completamente canónico) y, por tanto, según (2.38)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \left| \frac{P(s)}{F(s)} \right|_{s=j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10^{20/10} - 1}} \left| \frac{-3j}{-1} \right| \\ &= \frac{3}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \approx 0.3015 \end{aligned}$$

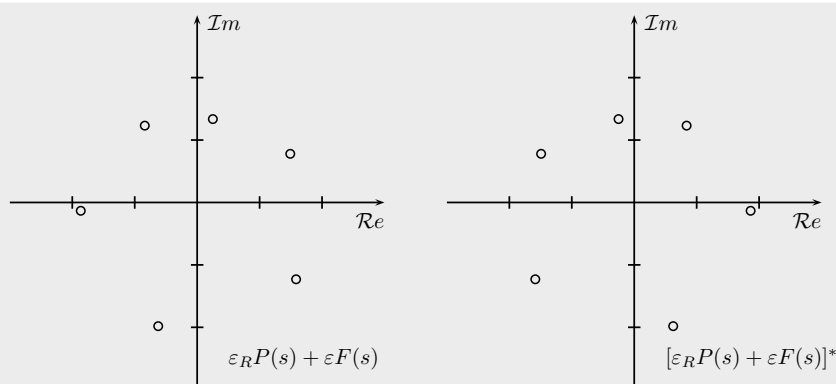
En este caso el polinomio $Q(s)$ queda

$$\begin{aligned} Q(s) &= \varepsilon_R P(s) + \varepsilon F(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{11}} s^6 + js^2 + 6s - 8j \end{aligned}$$

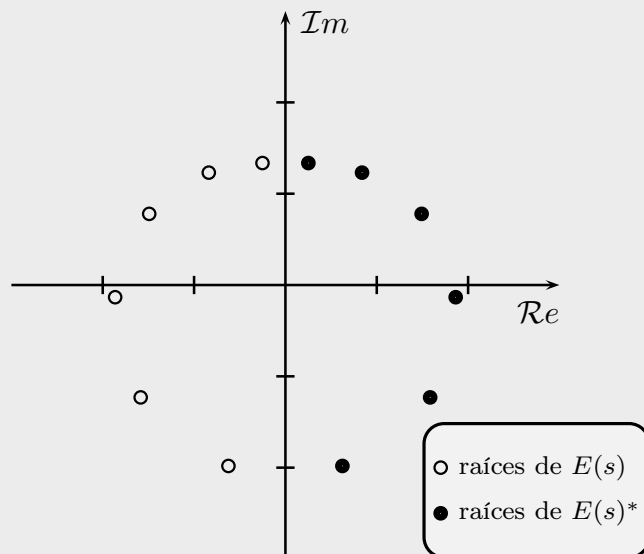
cuyas raíces, ordenadas por partes imaginarias crecientes, son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.6239 - 1.9815j \\ s_2 &= 1.5845 - 1.2307j \\ s_3 &= -1.8641 - 0.1335j \\ s_4 &= 1.4912 + 0.7792j \\ s_5 &= -0.8389 + 1.2308j \\ s_6 &= 0.2512 + 1.3357j \end{aligned}$$

Se puede observar que las partes reales tienen el signo alternado. Las raíces de $Q(s)$ y de $Q(s)^*$ se pueden observar en el plano complejo como sigue:



El polinomio $E(s)$ se forma a partir de las raíces obtenidas forzando el signo negativo de todas las partes reales. Las raíces del polinomio $|E(s)|^2$ y la asignación de las raíces situadas en el semiplano izquierdo al polinomio $E(s)$ se muestran a continuación



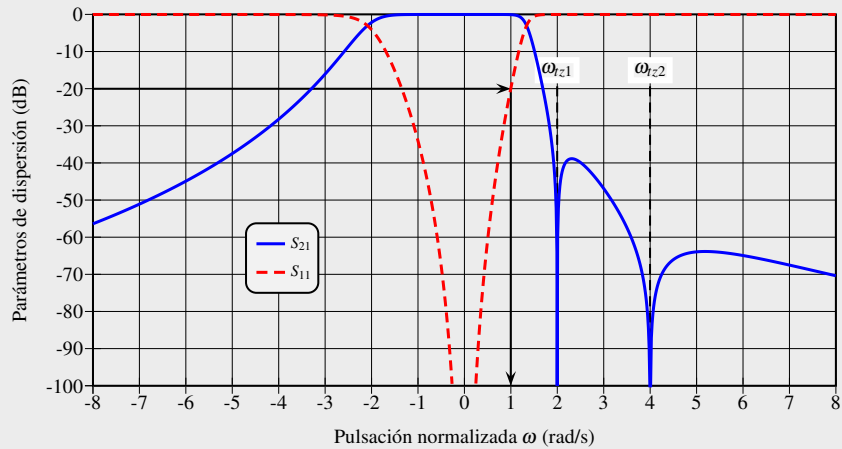
Los coeficientes finales de todos los polinomios se pueden representar en forma tabulada como

Coeficientes de los polinomios			
s^n	$E(s)$	$P(s)$	$F(s)$
s^6	1	—	1
s^5	6.6538	—	—
s^4	$22.1365 - 0.9052j$	—	—
s^3	$46.4634 - 6.0233j$	—	—
s^2	$63.7357 - 18.0055j$	j	—
s^1	$52.1964 - 28.5306j$	6	—
s^0	$17.6833 - 19.7814j$	$-8j$	—

La expresión final de los parámetros S_{11} y S_{21} sería como siempre

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{\varepsilon_R E(s)} \quad S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)}$$

cuya representación gráfica se muestra a continuación.



Apéndice C

La media aritmético-geométrica y las integrales elípticas

C.1 La integral elíptica

En este apéndice se ha seguido la notación más extendida universalmente para las integrales elípticas. En (Olver, Lozier, Boisvert y Clark 2010) se detalla la notación de varios autores así como la seguida aquí.

La integral elíptica de primera clase se define como

$$\begin{aligned} F(\phi, k) &\triangleq \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

donde ϕ es la amplitud y k es el módulo (no confundir con el módulo de un complejo). Se define el módulo complementario k' por

$$k' \triangleq \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{C.2})$$

En general se supone que k^2 es real y que $0 \leq k^2 \leq 1$.

Si la integral es completa significa que la amplitud es $\pi/2$ y la integral elíptica completa de primera clase se define como

$$\begin{aligned} K(k) &\triangleq F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Se define

$$K'(k) \triangleq \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{C.4})$$

con la propiedad

$$K(k') = K'(k) \quad (\text{C.5})$$

Algunos valores importantes para la integral elíptica completa de primera clase son:

$$K(0) = K'(1) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.6a})$$

$$K(1) = K'(0) = \infty \quad (\text{C.6b})$$

Valores importantes para $F(\phi, k)$ son

$$F(0, k) = 0 \quad (\text{C.7a})$$

$$F(\phi, 0) = \phi \quad (\text{C.7b})$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \infty \quad (\text{C.7c})$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k) \quad (\text{C.7d})$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{F(\phi, k)}{\phi} = 1 \quad (\text{C.7e})$$

Finalmente, algunas propiedades destacables de $F(\phi, k)$ son

1. $F(\phi, k) = -F(-\phi, k)$
2. $F(\phi + \pi, k) = 2K + F(\phi, k)$
3. $\frac{dF}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$

C.2 La media aritmético-geométrica

Sean a_0 y g_0 números positivos, se definen las secuencias

$$a_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2}, \quad g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.8})$$

Asumiendo que $a_0 > g_0$ (por simetría), cuando $n \rightarrow \infty$, se cumple que $g_i \leq a_i \forall i$ y a_n y g_n convergen a un límite común $M(a_0, g_0)$ llamado la AGM¹ (*Arithmetic-Geometric Mean*=*Media Aritmético-Geométrica*) de a_0 y g_0 . Si se define

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - g_n^2} \quad (\text{C.9})$$

entonces

$$c_{n+1} = \frac{a_n - g_n}{2} = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}} \quad (\text{C.10})$$

lo cual demuestra que la convergencia de c_n a 0 es cuadrática y la convergencia de a_n y g_n a $M(a_0, g_0)$ es también cuadrática. De hecho, se puede demostrar que

$$\max(|a_n - M|, |g_n - M|, |c_n|) \leq k \times 2^{-2^n} \quad (\text{C.11})$$

donde $M = M(a_0, b_0)$ y k es una constante.

Aparte de la convergencia cuadrática, las propiedades más importantes a destacar de la AGM son

- La media aritmética de dos números positivos a_0, g_0 es siempre mayor que su media geométrica. Como consecuencia a_n es decreciente y g_n es creciente y $g_n \leq M(a_0, g_0) \leq a_n$. La desigualdad es estricta si $a_0 \neq g_0$.
- $M(a_0, g_0)$ es un número entre la media aritmética y geométrica de a_0 y g_0 . Además está entre a_0 y g_0 .
- Si $r \geq 0$ entonces $M(ra_0, rg_0) = rM(a_0, g_0)$.
- Es evidente que $M(a_0, g_0) = M(a_1, g_1) = \dots$
- Iterando AGM en sentido contrario (hacia a_{-1} y g_{-1}) se puede demostrar que $M(a, b) = M\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}, a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$

¹Legendre fue el primero en utilizar las secuencias aunque fue Gauss el que estudió sus propiedades.

C.3 Cálculo de integrales elípticas con la AGM

Para el cálculo de integrales elípticas, la AGM es una herramienta muy potente debido a que Landen² y otros como Gauss³ descubrieron unas relaciones fundamentales que hoy se conocen como representaciones integrales de la AGM

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(x, y)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+x^2)(t+y^2)}}\end{aligned}\quad (\text{C.12})$$

De las identidades anteriores y de las propiedades anteriormente citadas se pueden extraer las siguientes igualdades

$$K(k) = \frac{\pi}{2M(1, k')}, \quad -\infty < k^2 < 1 \quad (\text{C.13})$$

$$K(k) = \frac{\pi a}{2M(a, ak')} \quad (\text{C.14})$$

$$K(k) = \frac{\pi a}{2M(a(1+k), a(1-k))} \quad (\text{C.15})$$

$$M(x, y) = \frac{\pi(x+y)}{4K\left(\frac{x-y}{x+y}\right)} \quad (\text{C.16})$$

Las anteriores expresiones permiten el cálculo de las integrales elípticas de primera clase completas con la simple iteración dada por la AGM.

C.4 Cálculo de las funciones elípticas Jacobianas con la AGM

En el capítulo 5 se introducen las funciones elípticas y sus propiedades. De las doce funciones elípticas que existen, las fundamentales fueron introducidas por Jacobi. Éstas fueron el seno elíptico, el coseno elíptico y la amplitud delta definidos de

²John Landen (23 de Enero de 1719 — 15 de Enero de 1790) fue un matemático inglés. De vida muy retirada fue miembro de la Royal Society en 1766. Sus principales descubrimientos fueron las transformaciones de Landen para la expresión del arco de una hipérbola en términos de dos arcos elípticos. Sus investigaciones en funciones elípticas son de gran elegancia.

³El recíproco de $M(1, \sqrt{2})$ es la llamada constante de Gauss. Gauss, habiendo calculado su valor con once cifras decimales, escribió en su diario el 30 de Mayo de 1799 que el descubrimiento “abre un campo completamente nuevo del análisis”. Con ello nació el campo de las funciones elípticas entrelazando análisis, álgebra y geometría.

manera implícita con las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} u(\phi, k) &\triangleq \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Las definiciones a partir de la función u fueron asignadas como sigue:

- **amplitud:** ϕ
- **seno elíptico:** $\text{sn}(u, k) = \sin \phi$
- **coseno elíptico:** $\text{cn}(u, k) = \cos \phi$
- **amplitud delta:** $\text{dn}(u, k) = \frac{d\phi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$

De estas funciones se pueden deducir las restantes como se explica en el capítulo 5. Aunque la definición pueda parecer muy compleja desde el punto de vista del cálculo numérico, hay dos formas bastante elegantes de calcular las funciones sn , cn y dn con pocas operaciones. Una forma ya se vio en el capítulo 5 (la transformación de Landen) y el otro modo de calcular las funciones Jacobianas es mediante la AGM con el algoritmo siguiente:

Para calcular $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$ y $\text{dn}(u, k)$

1. Calcular la AGM empezando con los valores iniciales

$$a_0 = 1, \quad g_0 = k', \quad c_0 = k \quad (\text{C.18})$$

es decir, calcular $M(1, k')$ terminando en el paso N cuando c_N sea despreciable.

2. Calcular

$$\varphi_N = 2^N a_N u \quad (\text{C.19})$$

3. Calcular los sucesivos $\varphi_{N-1}, \varphi_{N-2}, \dots, \varphi_1, \varphi_0$ con la siguiente recurrencia

$$\sin(2\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \frac{c_n}{a_n} \sin \varphi_n \quad (\text{C.20})$$

es decir

$$\varphi_{n-1} = \frac{1}{2} \left[\varphi_n + \arcsin \left(\frac{c_n}{a_n} \sin \varphi_n \right) \right] \quad (\text{C.21})$$

4. Obtener las funciones Jacobianas como

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi_0 \quad (\text{C.22a})$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \varphi_0 \quad (\text{C.22b})$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \frac{\cos \varphi_0}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)} \quad (\text{C.22c})$$

El cálculo de $\operatorname{dn}(u, k)$ se puede hacer de forma alternativa con las propiedades de dn ya que

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0} \quad (\text{C.23})$$

Apéndice D

La solución de Cauer para la ecuación diferencial de R_N

Aunque en el capítulo 5 se ha usado una metodología didáctica y comprensiva para llegar a una expresión para el filtro elíptico, éste no fue el camino seguido por primera vez por Cauer en la obtención de la expresión para $R_N(\omega, L)$. Ello es debido a que el razonamiento seguido en el capítulo 5 implica conocer de antemano la solución o, al menos, el proceso a seguir, ya que la expresión de partida en el razonamiento es la solución del problema, que se intenta justificar, junto a las propiedades de las funciones elípticas.

Como tributo a Cauer (ver figura D.1) y con ánimo de que el lector aprecie el proceso deductivo seguido por él para la consecución de una expresión del filtro elíptico, en este apéndice se va a seguir el proceso para obtener la expresión del filtro elíptico a partir de la ecuación diferencial (5.33) obtenida en la sección 5.3.3. Esta ecuación será el punto de partida de este apéndice y su resolución ha sido uno de los logros más importantes en la teoría de filtros. Aunque se ha adaptado la notación, el desarrollo ha seguido en lo posible los pasos de Cauer.

D.1 La ecuación diferencial de partida

Partimos de que $R_N(\omega, L)$ cumple la ecuación diferencial (5.33)

$$\frac{\pm C dR_N}{\sqrt{(1 - R_N^2)(L^2 - R_N^2)}} = \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2)(\omega_s^2 - \omega^2)}} \quad (\text{D.1})$$

donde ω_s es la pulsación donde empieza la banda atenuada, C es una constante a determinar, L es el parámetro de R_N descrito en la sección 5.3.2 que indica el

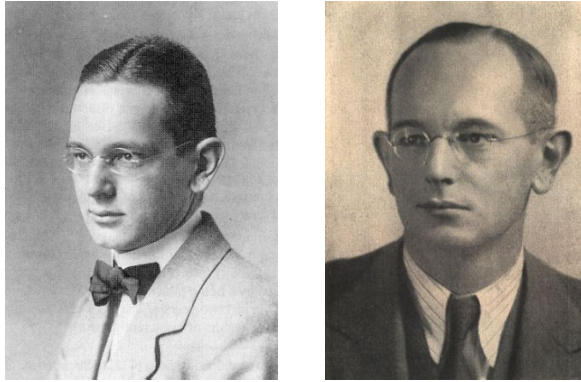


Figura D.1: Wilhelm Adolf Eduard Cauer (1900-1945). A la izquierda fotografía de 1921, a la derecha fotografía de 1944. Desgraciadamente, Cauer no pudo tener un adecuado reconocimiento en vida. Su trágica muerte (22 de Abril de 1945) en la toma de Berlín al final de la segunda guerra mundial truncó una carrera que hasta el momento apenas tuvo reconocimiento de la comunidad de ingenieros de la época. Educado como físico, habilitado como matemático y trabajando en ingeniería, los matemáticos opinaban que era demasiado aplicado para su ámbito y los ingenieros opinaban que sus métodos eran demasiado complejos matemáticamente para la mayoría de los profesionales. Fuente: *Wilhelm Cauer: His Life and the Reception of his Work*. Mathis, W. and Cauer, E., Universidad de Hannover, 2002.

valor mínimo de $|R_N|$ en la banda atenuada $\omega > \omega_s$ (ver figura 5.2). La solución de esta ecuación involucra integrales elípticas y en el capítulo 5 se hace una recapitulación de las funciones elípticas, sus propiedades y su relación con los filtros elípticos. Desafortunadamente, aunque didáctico, el tratamiento del capítulo 5 no da una deducción de cómo obtener la solución dada en (5.52), sino que simplemente justifica que (5.52) es la solución correcta. Las siguientes secciones mostrarán un camino hacia la expresión dada por Cauer.

D.2 Una forma alternativa para la integral elíptica

La integral elíptica de primera clase ha sido definida en el apéndice C como

$$u(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (\text{D.2})$$

aunque aquí se ha utilizado la letra u para designarla en lugar de F porque la función será utilizada como variable.

Para encontrar una forma alternativa de u , se define el parámetro z como el seno elíptico (ver apéndice C)

$$z = \text{sn}(u, k) = \sin \phi \quad (\text{D.3})$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{dz}{du} &= \cos \phi \frac{d\phi}{du} = \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \\ &= \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k)} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)} \\ &= \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}\end{aligned}\tag{D.4}$$

De esta ecuación se deduce que

$$du = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\tag{D.5}$$

Suponemos que integramos esta ecuación desde z_1 a z_2 . Según (D.3), esto es equivalente a integrar desde $\operatorname{sen} \phi_1$ hasta $\operatorname{sen} \phi_2$. La integral quedaría

$$u(\phi_2, k) - u(\phi_1, k) = \int_{\operatorname{sen} \phi_1}^{\operatorname{sen} \phi_2} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\tag{D.6}$$

Como un ejemplo de aplicación de esta fórmula, elegimos $\phi_2 = \phi$ y $\phi_1 = 0$. Esta ecuación se convierte en la segunda igualdad de (C.17)

$$u(\phi, k) = \int_0^{\operatorname{sen} \phi} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\tag{D.7}$$

que es una forma alternativa de definir la integral elíptica de primera clase.

Esto puede aplicarse para encontrar una función z solución de (D.5). Ya que $u(\phi, k)$, que cumple (D.5), tiene la forma (D.7), solamente hay que despejar z en función de u . Como u depende de la amplitud ϕ y, de hecho, de su seno ($\operatorname{sen} \phi$ es el límite superior del integrando), podemos decir que (D.3) $z = \operatorname{sn}(u, k)$ es solución de la ecuación diferencial (D.5). El siguiente teorema es una generalización de este resultado.

Teorema D.1 *La función*

$$z = \operatorname{sn}(au + b, k)\tag{D.8}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$a du = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\tag{D.9}$$

Esta ecuación diferencial es muy similar a (D.5). La variable u ha sido escalada por el parámetro a . La constante b se determina por las condiciones de contorno. Por ejemplo, si deseamos que $z = 0$ cuando $u = 0$, entonces $b = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{du} &= \frac{d}{du} \operatorname{sn}(au + b, k) = a \operatorname{cn}(au + b, k) \operatorname{dn}(au + b, k) \\ &= a \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(au + b, k)} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(au + b, k)} \\ &= a \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}\end{aligned}$$

de lo cual se deduce (D.9). ■

La forma alternativa para la integral elíptica de primera clase dada por (D.7) puede aplicarse para encontrar la forma alternativa de la integral elíptica completa simplemente haciendo $\phi = \pi/2$:

$$K(k) = u\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad (\text{D.10})$$

Existe una forma alternativa para la integral completa complementaria K' . Partiendo de (D.6) hacemos $\phi_2 = \arcsen 1/k$ y $\phi_1 = \pi/2$ y obtenemos

$$u(\arcsen 1/k, k) - u(\pi/2, k) = \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad (\text{D.11})$$

Simplificamos el primer término aplicando (D.3). Es decir

$$z = \operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen}(\arcsin 1/k) = 1/k \quad (\text{D.12})$$

pero si $\operatorname{sn}(u, k) = 1/k$ significa que $u = K(k) + jK'(k)$ (véase (Olver, Lozier, Boisvert y Clark 2010)) ya que es un caso especial del argumento sobradamente conocido. También sabemos de (D.10) que $u(\pi/2, k) = K(k)$. Por tanto (D.11) queda

$$K(k) + jK'(k) - K(k) = jK' = \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad (\text{D.13})$$

y finalmente

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(1 - k^2 z^2)}} \quad (\text{D.14})$$

D.3 Funciones elípticas y R_N

La sección anterior ya proporciona la herramienta necesaria para relacionar la función racional R_N con las funciones elípticas. Partimos de la ecuación diferencial

$$du = \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(\omega_s^2-\omega^2)}} \quad (\text{D.15a})$$

$$= \frac{\pm C dR_N}{\sqrt{(1-R_N^2)(L^2-R_N^2)}} \quad (\text{D.15b})$$

Ambas ecuaciones son de la forma

$$du = \frac{dz}{a\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (\text{D.16})$$

Aplicando el teorema D.1 sabemos que la solución de la ecuación anterior es

$$z = \text{sn}(au + b, k) \quad (\text{D.17})$$

y por tanto la solución a las ecuaciones (D.15) es

$$\omega = \text{sn}\left(\omega_s u + b_1, \frac{1}{\omega_s}\right) \quad (\text{D.18a})$$

$$R_N = \text{sn}\left(\frac{L}{C}u + b_2, \frac{1}{L}\right) \quad (\text{D.18b})$$

Si arbitrariamente forzamos $b_1 = 0$ esto implica que $\omega = 0$ cuando $u = 0$. También sabemos que

$$R_N(\omega = 0, L) = \text{sn}\left(b_2, \frac{1}{L}\right) = \begin{cases} 0 & N \text{ impar} \\ (-1)^{N/2} & N \text{ par} \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

lo cual implica que

$$b_2 = \begin{cases} 0 & N \text{ impar} \\ (-1)^{N/2} K\left(\frac{1}{L}\right) & N \text{ par} \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

Una vez determinadas las constantes b_1 y b_2 podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema D.2 *La función racional de Chebyshev R_N puede expresarse como*

$$R_N(\omega, L) = \begin{cases} \text{sn}\left(\frac{L}{C}u, \frac{1}{L}\right) & N \text{ impar} \\ \text{sn}\left(\frac{L}{C}u + (-1)^{N/2} K\left(\frac{1}{L}\right), \frac{1}{L}\right), & N \text{ par} \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

donde u es la solución de

$$\omega = \text{sn}\left(\omega u_s, \frac{1}{\omega_s}\right) \quad (\text{D.22})$$

donde C es una constante a determinar.

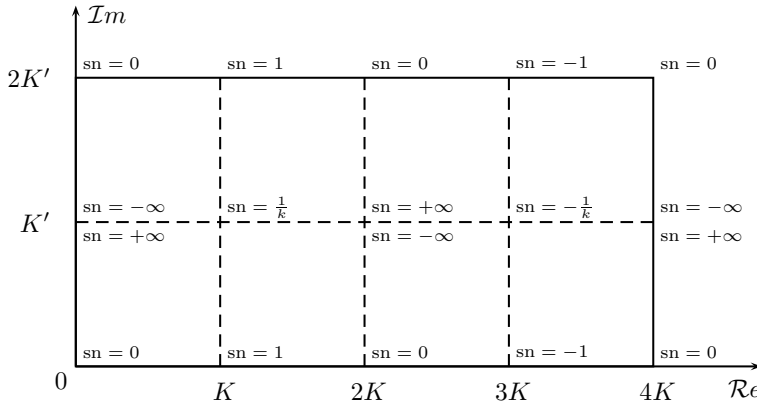


Figura D.2: Periodo rectangular para la función elíptica sn con los valores especiales correspondientes a las esquinas del rectángulo fundamental.

Este teorema da la solución de la ecuación diferencial en términos de la función elíptica sn . Sin embargo, la forma dada no es muy conveniente porque no ofrece una solución de R_N en función de ω en forma explícita. Las siguientes secciones nos ayudarán a obtener una expresión más adecuada a nuestros fines.

D.4 El periodo de $|R_N|$

La función $\text{sn}(u, k)$ es una función doblemente periódica. Tiene un periodo real $4K$ y un periodo imaginario $2K'$. En la figura D.2 se muestran los valores especiales de la función en los primeros puntos $mK + jnK'$.

Ya que R_N es una función elíptica, tiene un doble periodo rectangular similar. Esta sección revelará algunas conclusiones que se pueden extraer del periodo rectangular de R_N .

Tomando el caso N impar tenemos que

$$R_N(\omega, L) = \text{sn}\left(\frac{L}{C}u, \frac{1}{L}\right) \quad (\text{D.23a})$$

$$\omega = \text{sn}\left(\omega_s u, \frac{1}{L}\right) \quad (\text{D.23b})$$

Ya que sn es periódico, R_N también lo es. Si R_N fuera dibujado en función de Lu/C , entonces su periodo real sería $4K(1/L)$ donde $K(1/L)$ es la integral elíptica completa evaluada para $k = 1/L$. Si consideramos R_N en función de u , su periodo real con respecto a esa variable es $4\frac{C}{L}K(\frac{1}{L})$. De la misma forma, el perio-

do imaginario es $2\frac{C}{L}K(\frac{1}{L})$. El rectángulo periódico de la figura D.3 es para R_N en función de u . Para relacionar esto con la variable ω , necesitamos un rectángulo periódico para ω . Claramente de (D.23b) se deduce que el periodo real es $\frac{4}{\omega_s}K(1/L)$ y el periodo imaginario es $\frac{2}{\omega_s}K'(1/L)$. El rectángulo periódico para ω aparece en la figura D.4.

Los rectángulos periódicos de las figuras D.3 y D.4 no son independientes uno de otro. Esto se puede demostrar integrando (D.15a) entre 0 y 1

$$\begin{aligned} u(\omega = 1) &= \frac{1}{\omega_s} \int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right)}} \\ &= \frac{K(1/\omega_s)}{\omega_s} \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Como sabemos, cuando ω varía entre 0 y 1, R_N varía entre 0 y 1 y entre 0 y -1 exactamente N veces (véase por ejemplo la figura 5.2). Por tanto, integrando (D.15b) entre 0 y 1 obtenemos

$$\begin{aligned} u(\omega = 1) &= \frac{NC}{L} \int_0^1 \frac{dR_N}{\sqrt{(1 - R_N^2) \left(1 - \frac{R_N^2}{L^2}\right)}} \\ &= \frac{NCK(1/L)}{L} \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

igualando (D.24) y (D.25) se obtiene

$$\frac{K(1/\omega_s)}{\omega_s} = \frac{NCK(1/L)}{L} \quad (\text{D.26})$$

La ecuación (D.26) implica que, si se dibujan los rectángulos periódicos de las figuras D.3 y D.4 a la misma escala, el rectángulo periódico para ω sería N veces más ancho que el rectángulo para R_N .

Las alturas de los rectángulos están también relacionadas. La relación es fácil de encontrar variando ω desde 1 hasta ω_s . En este caso R_N varía monótonamente de 1 hasta L y por tanto de (D.14) y siguiendo pasos análogos se obtiene

$$\frac{K'(1/\omega_s)}{\omega_s} = \frac{CK'(1/L)}{L} \quad (\text{D.27})$$

Esta relación se puede obtener directamente observando los rectángulos periódicos si sabemos de antemano el rango de variación de ω y R_N en la banda de transición. Recorriendo la altura del rectángulo de la figura D.4 desde $\omega = 1$ hasta $\omega = \omega_s$ se ha recorrido exactamente $K'(1/\omega_s)/\omega_s$ en el eje de ordenadas, y ese recorrido traducido a R_N supone de pasar de 1 a L y en cualquiera de los rectángulos de la figura D.3 supone un cambio en ordenadas de $CK'(1/L)/L$.

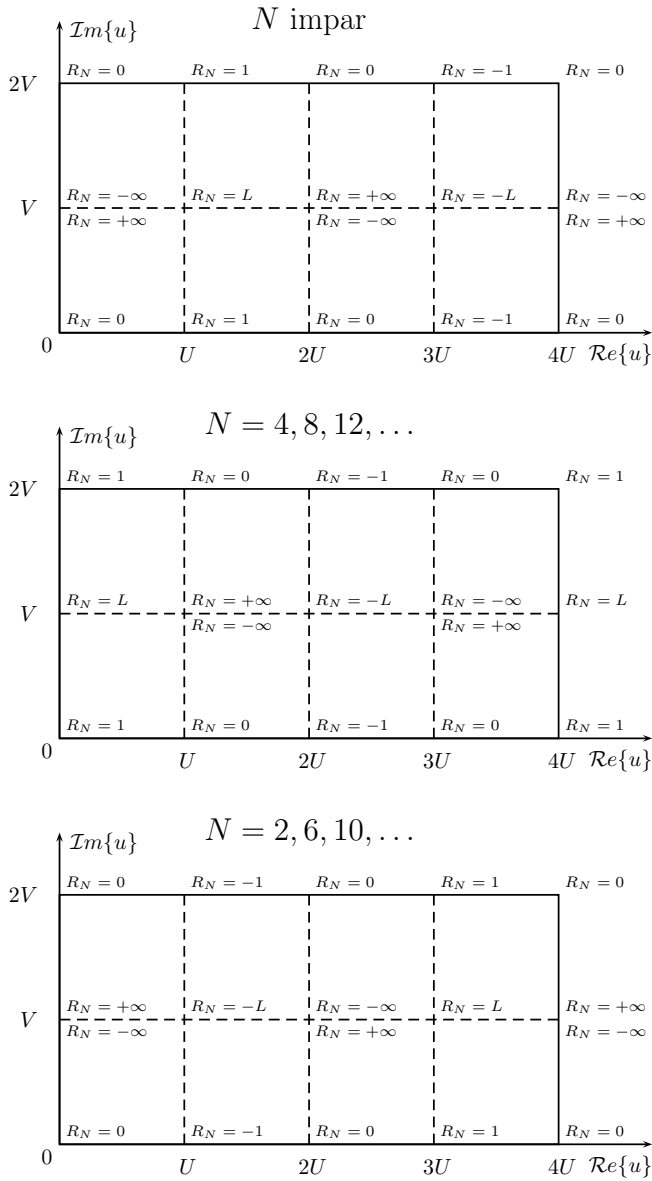


Figura D.3: Rectángulo periódico para R_N en función de la variable u para el caso N impar (arriba), caso $N = 4, 8, 12, \dots$ (centro) y caso $N = 2, 6, 10, \dots$ (abajo). Se ha etiquetado el eje de abscisas en múltiplos de $U = \frac{C}{L}K(1/L)$ y el eje de ordenadas en múltiplos de $V = \frac{C}{L}K'(1/L)$.

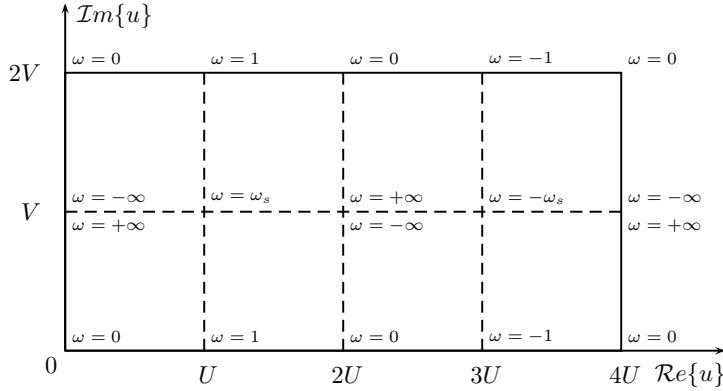


Figura D.4: Rectángulo periódico para ω en función de la variable u . Se ha etiquetado el eje de abscisas en múltiplos de $U = \frac{1}{\omega_s}K(1/\omega_s)$ y el eje de ordenadas en múltiplos de $V = \frac{1}{\omega_s}K'(1/\omega_s)$.

D.5 Determinación del grado de los filtros elípticos

Ya que tenemos las relaciones

$$\frac{K(1/\omega_s)}{\omega_s} = \frac{NCK(1/L)}{L} \quad (\text{D.28a})$$

$$\frac{K'(1/\omega_s)}{\omega_s} = \frac{CK'(1/L)}{L} \quad (\text{D.28b})$$

podemos despejar la constante C de ambas e igualar para obtener la ecuación¹

$$N = \frac{K(1/\omega_s)K'(1/L)}{K'(1/\omega_s)K(1/L)} \quad (\text{D.29})$$

que se denomina ecuación de grado. Esta ecuación proporciona el orden necesario del filtro elíptico en función de ω_s (pulsación del límite inferior de la banda de paso) y L que es el valor mínimo de $|R_N|$ en la banda atenuada coincidiendo además que $|R_N(\omega_s, L)| = L$. Recordemos de (5.22) que, sabiendo la atenuación mínima en la banda atenuada (A_{\min}) y la atenuación máxima en la banda de paso (A_{\max}), el parámetro L está determinado:

$$L^2 = \frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1} \quad (\text{D.30})$$

¹Obsérvese que esta ecuación es exactamente la misma que (5.52c). Recordemos que $k = 1/\omega_s$ y que $K(k)$ y $K'(k)$ se abreviaban simplemente como K y K' respectivamente. Análogamente $g = 1/L$ y $K(g)$ y $K'(g)$ se abreviaban como G y G' respectivamente.

EJEMPLO D.1 Determinar el menor grado de un filtro elíptico que cumple las siguientes especificaciones:

$$RL = 20 \text{ dB} \quad A_{\min} = 40 \text{ dB} \quad \omega_s = 1.3 \text{ rad/s}$$

Determinar el orden mínimo de un filtro de Chebyshev clásico que cumpla las mismas especificaciones.

Solución: El primer paso consiste en hallar la atenuación máxima permitida en la banda de paso A_{\max} a partir de RL . Aplicando (5.53) y sabiendo que la atenuación máxima en la banda de paso en un filtro sin pérdidas es equivalente al rizado, obtenemos

$$A_{\max} = -10 \log_{10} (1 - 10^{-RL/10}) = 0.0436 \text{ dB}$$

El parámetro L ya se puede calcular

$$L^2 = \frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1} = 9.89901 \times 10^5 \Rightarrow L = 9.949376864909649 \times 10^2$$

Con estos datos ya se pueden calcular las integrales elípticas correspondientes:

$$\begin{aligned} K(1/\omega_s) &= 1.940716710940837 \\ K'(1/\omega_s) &= 1.783308472770183 \\ K(1/L) &= 1.570796723500532 \\ K'(1/L) &= 8.288976310537382 \end{aligned}$$

El orden del filtro elíptico correspondiente debe ser el entero que se aproxime por exceso a (D.29)

$$N = \left\lceil \frac{K(1/\omega_s)K'(1/L)}{K'(1/\omega_s)K(1/L)} \right\rceil = 6$$

Para mantener las mismas especificaciones con un filtro de Chebyshev clásico (todo-polos) se debería de diseñar con un orden dado por (4.44)

$$N = \left\lceil \frac{\text{acosh} \left(\frac{\sqrt{10^{A_{\min}/10} - 1}}{\epsilon} \right)}{\text{acosh} \omega_s} \right\rceil = 11$$

donde ϵ está dado por (4.42)

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} = 0.1005 \quad (\text{D.31})$$

Hay que recordar que aunque el filtro de Chebyshev sea el filtro de mayor incremento de atenuación con la frecuencia entre los filtros todo-polos, el filtro elíptico necesita tan solo un orden 6 para conseguir alcanzar la misma especificación que el filtro de Chebyshev de orden 11. Sin embargo, el roll-off a altas frecuencias del filtro de Chebyshev es de $20N = 220 \text{ dB/década}$ mientras que un filtro elíptico de orden par se estabiliza en $S_{21} = -A_{\min} = -60 \text{ dB}$ porque el número de polos y ceros de transmisión coinciden y por tanto su roll-off es nulo.

D.6 Determinación de L

El parámetro L ha sido definido como el mínimo valor de $|R_N|$ en la banda atenuada. Este valor ocurre por primera vez en $\omega = \omega_s$. En esta sección se pretende deducir una expresión para L en función de N y ω_s . En el proceso se obtendrá una expresión para R_N que será útil en la próxima sección.

Teorema D.3 Si $\omega = \text{sn}\left(u\omega_s, \frac{1}{\omega_s}\right)$ entonces $R_N(\omega, L)$ puede expresarse como

$$R_N(\omega, L) = \begin{cases} m \prod_{r=0}^{N-1} \text{sn}\left[\omega_s u + \frac{2r}{N} K\left(\frac{1}{\omega_s}\right), \frac{1}{\omega_s}\right], & N \text{ impar} \\ m \prod_{r=0}^{N-1} \text{sn}\left[\omega_s u + \frac{1+2r}{N} K\left(\frac{1}{\omega_s}\right), \frac{1}{\omega_s}\right], & N \text{ par} \end{cases} \quad (\text{D.32})$$

donde

$$\frac{1}{m} = \begin{cases} \frac{C\omega_s}{L} \prod_{r=1}^{N-1} \text{sn}\left[\frac{2r}{N} K\left(\frac{1}{\omega_s}\right), \frac{1}{\omega_s}\right], & N \text{ impar} \\ (-1)^{N/2} \prod_{r=1}^{N-1} \text{sn}\left[\frac{1+2r}{N} K\left(\frac{1}{\omega_s}\right), \frac{1}{\omega_s}\right], & N \text{ par} \end{cases} \quad (\text{D.33})$$

La demostración para N impar (el otro caso es similar) parte de que por el teorema D.2

$$R_N(\omega, L) = \text{sn}\left(\frac{L}{C}u, \frac{1}{L}\right) \quad (\text{D.34})$$

donde u es la solución a

$$\omega = \text{sn}\left(\omega_s u, \frac{1}{\omega_s}\right) \quad (\text{D.35})$$

Como R_N es un seno elíptico y teniendo en cuenta la figura D.3 podemos ver que los ceros de R_N aparecen en

$$u_r = \pm \frac{2CK(1/L)}{L} r \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D.36})$$

Aplicando la condición (D.26) se obtiene la expresión de los ceros de R_N

$$u_r = \pm \frac{2r}{N\omega_s} K(1/\omega_s) \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D.37})$$

Escogiendo la solución negativa (R_N es impar para N impar y por tanto los ceros aparecen con los dos signos) y los primeros N ceros, se obtiene

$$u_r = -\frac{2r}{N\omega_s} K(1/\omega_s) \quad r = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{D.38})$$

Respecto a los polos, están en la vertical de los ceros a una distancia $CK'(1/L)/L$ según la figura D.3. Cada función sn tiene un cero y un polo en el rectángulo fundamental. El producto de N funciones sn equivaldrá a una función racional con N polos y N ceros². Cada término del productorio es del tipo

$$\text{sn} \left[\omega_s u + \frac{2r}{N} K \left(\frac{1}{\omega_s} \right), \frac{1}{\omega_s} \right] \quad (\text{D.39})$$

Tiene un cero en

$$u_{zr} = -\frac{2r}{N\omega_s} K(1/\omega_s) \quad (\text{D.40})$$

y un polo en

$$u_{pr} = u_{zr} + j \frac{CK'(1/L)}{L} = -\frac{2r}{N\omega_s} K(1/\omega_s) + j \frac{1}{\omega_s} K'(1/\omega_s) \quad (\text{D.41})$$

Tan solo queda ajustar la constante multiplicativa m . Esto es inmediato si se tiene en cuenta que las dos expresiones de R_N (la (D.34) y la (D.32)) son equivalentes y por tanto tienen la misma derivada³ en cero (el punto más conveniente para hacer la evaluación). Para el caso impar tenemos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dR_N}{du} \right|_{u=0} &= \frac{L}{C} \\ &= m\omega_s \prod_{r=1}^{N-1} \text{sn} \left[\frac{2r}{N} K \left(\frac{1}{\omega_s} \right), \frac{1}{\omega_s} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

Despejando m se obtiene la expresión (D.33). El teorema D.3 puede usarse para encontrar una expresión para L . Para ello, hay que considerar el rectángulo periódico de R_N (N impar) y observar

$$1 = R_N(\omega, L)|_{u=CK(1/L)/L} \quad (\text{D.43a})$$

$$L = R_N(\omega, L)|_{u=CK(1/L)/L + jCK'(1/L)/L} \quad (\text{D.43b})$$

Teniendo en cuenta (D.28) obtenemos

$$1 = R_N(\omega, L)|_{u=\frac{K(1/\omega_s)}{N\omega_s}} \quad (\text{D.44a})$$

$$L = R_N(\omega, L)|_{u=\frac{K(1/\omega_s)}{N\omega_s} + j\frac{K'(1/\omega_s)}{\omega_s}} \quad (\text{D.44b})$$

²Para que R_N sea racional debe de cumplirse una relación exacta entre los rectángulos periódicos de R_N y ω como se ha explicado anteriormente. Esta relación se plasma en la ecuación de grado (D.29).

³La derivada de $\text{sn } u$ es similar a la derivada del seno. $\frac{d}{du}(\text{sn } u) = \text{cn } u$.

y utilizando el resultado del teorema D.3 podemos escribir

$$\frac{1}{L} = \frac{\prod_{r=0}^{N-1} \operatorname{sn} \left[\frac{1+2r}{N} K(1/\omega_s), \frac{1}{\omega_s} \right]}{\prod_{r=0}^{N-1} \operatorname{sn} \left[\frac{1+2r}{N} K(1/\omega_s) + jK'(1/\omega_s), \frac{1}{\omega_s} \right]} \quad (\text{D.45})$$

Esta ecuación deducida para N impar también es válida para N par. Además se puede simplificar haciendo uso de la propiedad⁴

$$\operatorname{sn}(u + jK', k) = \frac{1}{k \operatorname{sn}(u, k)} \quad (\text{D.46})$$

Dando una expresión más simple para $1/L$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\omega_s^N} \prod_{r=0}^{N-1} \operatorname{sn}^2 \left[\frac{1+2r}{N} K(1/\omega_s), \frac{1}{\omega_s} \right] \quad (\text{D.47})$$

Haciendo uso de la propiedad $\operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn} u$ se puede dar una expresión final muy compacta para $1/L$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\omega_s^N} \prod_{r=0}^{\lfloor N/2 \rfloor - 1} \operatorname{sn}^4 \left[\frac{1+2r}{N} K(1/\omega_s), \frac{1}{\omega_s} \right] \quad (\text{D.48})$$

EJEMPLO D.2 Si el orden de un filtro elíptico es $N = 5$ y sus pérdidas de retorno son $RL = 20$ dB, determinar la atenuación mínima de la banda atenuada que empieza en $\omega_s = 1.3$ (rad/s).

Solución: Primero se calcula la atenuación máxima en la banda de paso A_{\max} de forma usual

$$A_{\max} = -10 \log_{10} \left(1 - 10^{-RL/10} \right) = 0.0436 \text{ dB}$$

y ϵ con (5.19a)

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} = \sqrt{10^{A_{\max}/10} - 1} = 0.10050378152592$$

Seguidamente con (D.48) tenemos que $L = 340.5855388325988$. Usando (5.21) se obtiene que

$$A_{\min} = 10 \log_{10} (1 + \epsilon^2 L^2) = 30.69 \text{ dB}$$

⁴Esta propiedad se puede deducir fácilmente de la fórmula de adición para $\operatorname{sn}(u + v)$ (Olver, Lozier, Boisvert y Clark 2010) y la transformación imaginaria de Jacobi (5.42).

D.7 La expresión racional para R_N

En esta sección vamos a obtener, finalmente, la expresión racional para $R_N(\omega, L)$. La función racional de Chebyshev se expresará en términos de sus polos y de sus ceros. Es decir, tendrá la siguiente forma

$$R_N(\omega, L) = C \frac{\prod_{i=1}^{nz} (\omega - z_i)}{\prod_{i=1}^{np} (\omega - p_i)} \quad (D.49)$$

donde nz y np son el número de ceros y el número de polos respectivamente.

Si partimos de las expresiones del teorema D.3 y agrupando los términos del productorio en parejas, aplicamos la igualdad $\text{sn}(2K - u) = \text{sn} u$ y obtenemos

$$R_N(\omega, L) = \begin{cases} m \text{sn}(\omega_s u) \prod_{r=1}^{\frac{N-1}{2}} \text{sn} \left(\frac{2r}{N} K + \omega_s u \right) \text{sn} \left(\frac{2r}{N} K - \omega_s u \right), & N \text{ impar} \\ m \prod_{r=0}^{\frac{N-1}{2}} \text{sn} \left(\frac{2r+1}{N} K + \omega_s u \right) \text{sn} \left(\frac{2r+1}{N} K - \omega_s u \right), & N \text{ par} \end{cases} \quad (D.50)$$

donde, para evitar la notación excesivamente farragosa, se ha abreviado $K(1/\omega_s) = K$ y $\text{sn}(\omega, 1/\omega_s) = \text{sn}(\omega)$ desde aquí hasta el final de la sección.

Haciendo uso de la fórmula siguiente (Olver, Lozier, Boisvert y Clark 2010)

$$\text{sn}(u+v) \text{sn}(u-v) = \frac{\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v} \quad (D.51)$$

y de que según (D.22) $\omega = \text{sn}(\omega_s u)$, conseguimos la expresión de R_N que deseábamos y que queda reflejada en el siguiente teorema:

Teorema D.4 *La función racional de Chebyshev puede expresarse como*

$$R_N(\omega, L) = \begin{cases} C_1 \omega \prod_{r=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\omega^2 - \omega_{zo}^2}{\omega^2 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_{zo}} \right)^2}, & N \text{ impar} \\ C_2 \prod_{r=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\omega^2 - \omega_{ze}^2}{\omega^2 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_{ze}} \right)^2}, & N \text{ par} \end{cases} \quad (D.52)$$

donde

$$\omega_{zo} = \operatorname{sn}\left(\frac{2r}{N}K\right) \quad r = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (\text{D.53a})$$

$$\omega_{ze} = \operatorname{sn}\left(\frac{2r-1}{N}K\right) \quad r = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{D.53b})$$

son los ceros de R_N . Las constantes C_1 y C_2 se pueden obtener de manera directa sabiendo que $R_N(1, L) = 1$. Su expresión es

$$C_1 = \prod_{r=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_{zo}}\right)^2}{1 - \omega_{zo}^2} \quad C_2 = \prod_{r=1}^{\frac{N}{2}} \frac{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_{ze}}\right)^2}{1 - \omega_{ze}^2} \quad (\text{D.54})$$

Este teorema demuestra además que los polos y los ceros de R_N están relacionados. Sea ω_z un cero de R_N , el polo correspondiente es $\omega_p = \omega_s/\omega_z$. Si el orden N es impar, hay un cero R_N en el origen, por tanto el polo correspondiente no existe (está en el infinito) y de ahí la ω que multiplica a la expresión racional en el caso impar. Traduciendo a ceros de reflexión y ceros de transmisión de los parámetros de dispersión podemos decir que:

- Los ceros de R_N (multiplicados por j) son ceros de reflexión y por tanto son las raíces de $F(s)$.
- Los polos de R_N (multiplicados por j) son los ceros de transmisión y por tanto son las raíces de $P(s)$.
- Si el orden N es impar, hay un cero de reflexión en el origen y un cero de transmisión en el infinito. Por tanto $P(s)$ es de orden $N - 1$.
- Si el orden N es par, el número de ceros de reflexión es el mismo que el de ceros de transmisión y el filtro es completamente canónico. Por tanto, los parámetros de dispersión tienden ambos a un valor finito cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Además de los polos y los ceros de R_N también puede interesar saber la posición de los máximos de RL dentro de la banda (puntos donde $R_N = \pm 1$) y los mínimos de atenuación fuera de la banda donde el parámetro de transmisión alcanza su valor máximo ($R_N = \pm L$).

Para N impar en la figura D.3 vemos que $R_N = \pm 1$ cuando $u = (1+2r)CK(1/L)/L$. Aplicando (D.26) equivale a decir que $R_N = \pm 1$ cuando $u = (1+2r)K(1/\omega_s)/(N\omega_s)$. Pero además $\omega = \operatorname{sn}(\omega_s u)$ y, por tanto, tenemos que:

- Para N impar

$$R_N(\omega, L) = \pm 1 \quad \text{cuando} \quad \omega = \text{sn} \left[\frac{1+2r}{N} K \left(\frac{1}{\omega_s} \right) \right] \quad (\text{D.55})$$

- Para N par

$$R_N(\omega, L) = \pm 1 \quad \text{cuando} \quad \omega = \text{sn} \left[\frac{2r}{N} K \left(\frac{1}{\omega_s} \right) \right] \quad (\text{D.56})$$

Para encontrar los valores donde $R_N(\omega, L) = \pm L$ solo hay que recordar que

$$R_N(\omega, L) = \frac{L}{R_N(\omega_s/\omega, L)} \quad (\text{D.57})$$

Si llamamos ω_m a los valores en los cuales RL alcanza el máximo en la banda de paso dados por (D.55) y (D.56), tenemos que:

$$R_N(\omega, L) = \pm L \quad \text{cuando} \quad \omega = \frac{\omega_s}{\omega_m} \quad (\text{D.58})$$

D.8 Sobre el procedimiento de diseño

En el capítulo 5 se ha visto el procedimiento de diseño estándar y aquí se ha visto el procedimiento como fue concebido originalmente. Ambos difieren en una característica fundamental: el procedimiento explicado en el capítulo 5 los polos se calculan como evolución de los de Chebyshev mientras que aquí se hallan los ceros de transmisión y de reflexión pero los polos hay que hallarlos aplicando unitariedad o la técnica de polos alternados que ha sido explicada en el apéndice B. Hay otras diferencias dependiendo de las especificaciones de partida y en esta sección se va a resumir el procedimiento a seguir en cada caso.

D.8.1 Datos: N , RL , A_{\min}

Si los datos de partida son el orden N , las pérdidas de retorno RL y la atenuación mínima de la banda de paso A_{\min} , el procedimiento a seguir es el que se muestra en el ejemplo 5.3 del capítulo 5:

1. Obtener el rizado $r = A_{\max}$ a partir de RL .
2. Obtener ϵ a partir de r .
3. Obtener $g = 1/L$ a partir de ϵ y A_{\min} .

4. Obtener la secuencia de g_n hasta el filtro de Chebyshev.
5. Obtener la secuencia de k_n desde el limite de Chebyshev hasta el limite elíptico.
6. Con k ya se conoce la pulsación limite de la banda atenuada $\omega_s = 1/k$.
7. Calcular los polos del filtro de Chebyshev y aplicar la transformación correspondiente para convertirlos en polos del filtro elíptico.
8. Calcular los ceros de transmisión y, a partir de ellos, los de reflexión.
9. Calcular ε y ε_R

D.8.2 Datos: RL , A_{\min} , ω_s

Si los datos de partida son las pérdidas de retorno RL , la atenuación mínima de la banda de paso A_{\min} y la pulsación donde empieza la banda atenuada ω_s se puede seguir, para empezar, el ejemplo D.1 y luego proceder como se cuenta en este apéndice:

1. Calcular el rizado $r = A_{\max}$ en la banda de paso a partir de RL .
2. Calcular L con A_{\max} y A_{\min} .
3. Calcular ϵ .
4. Calcular el orden N a partir de ω_s y L .
5. Con el orden N y ω_s ya se pueden calcular los ceros de reflexión y transmisión y la constante C para determinar por completo R_N .
6. Hallar ε y ε_R .
7. Obtener los polos aplicando unitariedad o la técnica de polos alternados.

Con este procedimiento no se garantiza que A_{\min} sea exactamente la que se ha pedido. Debido a que el orden N es un entero que hay que determinar, puede suceder que la atenuación final sea mayor de la especificada. Por tanto, después de obtener N tras el redondeo correspondiente, se puede obtener nuevamente L a partir de N y ω_s y con ello la nueva A_{\min} .

D.8.3 Datos: RL , N , ω_s

Si los datos de partida son las pérdidas de retorno RL , el orden N y la pulsación donde empieza la banda atenuada ω_s se puede seguir, para empezar, el ejemplo [D.2](#) y luego proceder como se cuenta en este apéndice:

1. Determinar A_{\max} a partir de RL .
2. Determinar ϵ a partir de A_{\max} .
3. Con N y ω_s se halla L .
4. Con L y ϵ se puede calcular A_{\min} .
5. Se calculan ceros de reflexión, transmisión y la constante C que determinan completamente R_N .
6. Hallar los polos aplicando unitariedad o la técnica de polos alternados.

Aquí hay que puntualizar que, a partir del paso 4 con la obtención de A_{\min} , ya se puede proceder como en el procedimiento de la sección [D.8.1](#), ya que se saben los parámetros necesarios N , RL y A_{\min} .

Apéndice E

La función impedancia

El propósito de este apéndice es reunir una serie de características, teoremas y condiciones que deben cumplirse en una función para que ésta sea una función de impedancia o admitancia. Históricamente, estas propiedades ayudaron a elaborar métodos para sintetizar redes que tuvieran como impedancia de entrada funciones definidas de antemano.

La recopilación de propiedades de este apéndice sirve como referencia para completar el capítulo 7 donde se tratan los métodos de síntesis de filtros.

E.1 Funciones positivas reales

Es bastante simple de demostrar, usando el teorema de Tellegen¹, que en un circuito formado en general por resistencias, bobinas y condensadores, la función impedancia $Z(s)$ en cualquier parte del circuito para la variable compleja $s = \sigma + j\omega$ cumple que $\Re\{Z(s)\} \geq 0$ cuando $\sigma \geq 0$. Los detalles de la demostración de este resultado pueden consultarse en (Wing 2008). Sin embargo, Cauer demostró este resultado de forma intuitiva (mucho antes de que se demostrara el teorema de Tellegen) como sigue. Sea una red N compuesta únicamente por resistencias, bobinas y condensadores. Sea $Z(s)$ la impedancia de entrada a esa red. La potencia

¹ Aquí simple significa “sencillo si uno se da cuenta”. La demostración es una aplicación directa del teorema de Tellegen. Bernard D.H. Tellegen (Winschoten, 24 de junio de 1900 - Eindhoven, 30 de agosto de 1990) fue un ingeniero eléctrico holandés. Entre sus mayores contribuciones figuran la invención en 1926 del pentodo (una válvula de vacío de cinco electrodos activos) y en 1948 el girador (permite simular un inductor sin usar bobinas). También es conocido por el teorema de teoría de circuitos publicado en 1952 que lleva su nombre. Se formó en la Universidad de Delft y trabajó para el laboratorio de física de Phillips antes de dedicarse a la docencia en la Universidad de Delft.

absorbida por la red \mathcal{N} se puede calcular como

$$P = \frac{|I|^2}{2} \Re\{Z(j\omega)\} \geq 0$$

ya que es una red pasiva. Por tanto, necesariamente $\Re\{Z(j\omega)\} \geq 0$. Ahora, sea una red \mathcal{N}' que puede crearse a partir de \mathcal{N} simplemente añadiendo resistencias R_i en serie con las bobinas L_i y conductancias G_i en paralelo a condensadores C_i . El valor de estas resistencias y conductancias se elige de forma que se fuerce lo siguiente

$$\alpha = \frac{R_i}{L_i} = \frac{G_i}{C_i}$$

La idea es añadir pérdidas a la red ($\alpha \geq 0$) de forma balanceada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_i s &\Rightarrow L_i s + R_i = L_i \left(s + \frac{R_i}{L_i} \right) = L_i (s + \alpha) \\ C_i s &\Rightarrow C_i s + G_i = C_i \left(s + \frac{G_i}{C_i} \right) = C_i (s + \alpha) \end{aligned}$$

De esta forma se ha conseguido que la variable s se sustituya por $s + \alpha$ para conseguir pasar de la red \mathcal{N} a \mathcal{N}' . Por ello, la potencia absorbida por la red \mathcal{N}' puede escribirse como

$$\begin{aligned} P' &= \frac{|I'|^2}{2} \Re\{Z'(j\omega)\} \geq 0 \\ &= \frac{|I'|^2}{2} \Re\{Z(j\omega + \alpha)\} \geq 0 \end{aligned}$$

Es decir, necesariamente $\Re\{Z(j\omega + \alpha)\} \geq 0$ cuando $\alpha \geq 0$. Si reescribimos $s = \alpha + j\omega$ tenemos que es necesario en una red pasiva que la función impedancia cumpla que $\Re\{Z(s)\} \geq 0$ cuando $\Re\{s\} \geq 0$. Esa es precisamente la definición de función positiva real como se establecerá más adelante. Además, el mismo razonamiento puede aplicarse a admitancias y concluir que una admitancia de entrada debe ser una función positiva real.

Recordemos que una red de elementos concentrados, lineal, finita, pasiva y recíproca tiene una impedancia o admitancia de entrada que puede escribirse como cociente de polinomios en la variable s . La pregunta ahora es: ¿Todos los cocientes de polinomios representan una función impedancia o admitancia? La respuesta es un rotundo no. Esto no fue trivial de demostrar en su momento ya que el teorema de Tellegen fue publicado más de 20 años después de que se dieran las condiciones de suficiencia y necesidad.

La primera vez que las condiciones para una función impedancia fueron dadas en forma completa fue en la tesis doctoral de Otto Brune² en 1931 culminando los trabajos pioneros de Cauer³, Foster, Fry y otros y marcando el verdadero inicio de la síntesis de redes.

La definición de función positiva real se establece de la siguiente forma:

Definición E.1 Una función racional $Z(s)$ se dice que es positiva real (p.r.) si y solo si

1. $Z(s) \in \mathbb{R}$ si $s \in \mathbb{R}$. Es decir, $\Im\{Z(s)\} = 0$ si $\Im\{s\} = 0$.
2. $\Re\{Z(s)\} \geq 0$ cuando $\Re\{s\} \geq 0$

La condición para que la red sea finita es que la función sea un cociente de polinomios pero la definición de función p.r. puede extenderse para eliminar este hecho por cuestiones puramente teóricas si es necesario.

Establecemos uno de los teoremas más importantes en teoría de circuitos.

Teorema E.1 La impedancia (admitancia) de un circuito RLC es una función positiva real.

La historia nos cuenta cómo el artículo de 1931 que Brune publicó (Brune 1931) tras su tesis con los resultados de la misma tiene 45 páginas y da un método para sintetizar el circuito a partir de la función impedancia. Sin embargo, en ciertos casos no se puede evitar usar transformadores. En 1949 Bott y Duffin demostraron que se puede sintetizar cualquier red RLC sin transformadores en un artículo de tan solo media página (Bott y Duffin 1949).

E.2 Propiedades

En esta sección se van a enunciar las propiedades más importantes de una función p.r. Algunas de ellas son triviales y otras requieren una explicación. Todas estas propiedades son de importancia capital y por ello cada una es enunciada como un teorema.

²Otto Walter Heinrich Oscar Brune (10 de enero de 1901 – 1982) Nacido en Bloemfontein (Sudáfrica) tuvo hasta su primera formación universitaria en sudáfrica. Posteriormente se graduó en el MIT en 1929 (S.B. y S.M.). El tema de su tesis doctoral (1931) fue sugerido por Cauer como reza la sección de agradecimientos de la tesis doctoral. En 1935 volvió a sudáfrica donde fue investigador del laboratorio nacional de física en Pretoria.

³En realidad en 1926 Cauer determinó que una condición necesaria para la realizabilidad del circuito era que la función fuera positiva real. Brune demostró que la condición era suficiente y necesaria.

La primera propiedad interesante (a partir de la definición de una función p.r.) es que, tomando el semiplano derecho del plano s , es decir, $\Re\{s\} \geq 0$, la función $Z(s)$ lo convierte en el semiplano derecho del plano $Z(s)$, es decir, $\Re\{Z(s)\} \geq 0$. Como consecuencia tenemos el siguiente teorema:

Teorema E.2 Sea $Z(s) = |Z(s)|e^{j\theta}$ una función impedancia donde $s = |s|e^{j\phi}$. Entonces las fases cumplen

$$|\theta| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{cuando} \quad |\phi| \leq \frac{\pi}{2}$$

De hecho, Brune demostró que las dos condiciones siguientes son exactamente equivalentes:

$$\begin{aligned} \Re\{Z(s)\} &\geq 0 \quad \forall \Re\{s\} \geq 0 \\ \theta &\leq \phi \quad \forall \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la fase de una función impedancia no puede ser mayor que $\pi/2$. Es inmediato demostrar con esta propiedad que:

- $Z(s) = s$ es p.r.
- $Z(s) = s^2$ no es p.r. por el criterio de la fase.
- $Z(s) = \sqrt{s}$ no es p.r. porque aunque se cumple que $\Re\{Z(s)\} \geq 0$ cuando $\Re\{s\} \geq 0$ (mapeado correcto) no cumple que $Z(s) \in \mathbb{R}$ si $s \in \mathbb{R}$ ya que si $s = -1$ (real) entonces $Z(s)$ no lo es.

Teorema E.3 La suma de dos funciones p.r. es otra función p.r.

$$\text{Si } Z_1(s), Z_2(s) \text{ son p.r.} \Rightarrow Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s) \text{ es p.r.}$$

Teorema E.4 El recíproco de una función p.r. también es p.r.

$$Z(s) \text{ es p.r.} \Rightarrow \frac{1}{Z(s)} \text{ es p.r.}$$

Teorema E.5 La composición de dos funciones p.r. también es p.r.

$$\text{Si } Z_1(s), Z_2(s) \text{ son p.r.} \Rightarrow Z(s) = (Z_1 \circ Z_2)(s) = Z_1(Z_2(s)) \text{ es p.r.}$$

Teorema E.6 Una función p.r. no puede tener polos en el semiplano derecho del plano complejo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $Z(s)$ una función p.r. Sea $p = \alpha + j\beta$ un polo de $Z(s)$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$. En el entorno de p , $Z(s)$ puede aproximarse por

$$Z(s) \approx \frac{r}{s - p}$$

donde $r = a + jb$ es el residuo de $Z(s)$ en el polo p . Obteniendo la parte real

$$\Re\{Z(s)\} \approx \Re\left\{\frac{r}{s-p}\right\} = \frac{a(\sigma-\alpha) + b(\omega-\beta)}{|s-p|^2}$$

Si $\Re\{s\} \geq 0$ significa que $\sigma \geq 0$ y una combinación adecuada de σ y ω podrían hacer que $\Re\{Z(s)\} < 0$ y, por tanto, se contradice que $Z(s)$ sea p.r. como se había supuesto⁴. ■

Teorema E.7 *Una función p.r. no puede tener ceros en el semiplano derecho del plano complejo.*

Teorema E.8 *Una función p.r. puede tener polos en el eje $j\omega$, pero cada uno de ellos será simple y su residuo será positivo y real.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Z(s)$ una función p.r. con un polo de orden n en $s = j\omega_0$. En el entorno del polo podemos aproximar $Z(s)$ como

$$Z(s) \approx \frac{r}{(s - j\omega_0)^n}$$

donde r es el residuo de $Z(s)$ en $s = j\omega_0$. Rodeando el polo con una semicircunferencia en el semiplano derecho esa semicircunferencia tendrá de ecuación

$$s = j\omega_0 + \rho e^{j\phi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ \rho \approx 0, \rho > 0 \end{cases}$$

Por tanto, cerca del polo

$$Z(s) \approx \frac{r}{\rho^n e^{jn\phi}}$$

Ya que $Z(s)$ es p.r. por hipótesis, cuando ϕ varía entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ entonces $\Re\{Z(s)\}$ no debe ser negativa. Expresando el residuo en módulo y fase $r = |r|e^{j\beta}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \Re\{Z(s)\} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \Re\left\{\frac{r}{\rho^n e^{jn\phi}}\right\} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|r|}{\rho^n} \Re\{e^{j\beta-jn\phi}\} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|r|}{\rho^n} \cos(\beta - n\phi) \geq 0 \end{aligned}$$

La única forma de conseguir esto para cualquier $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ es que $\beta = 0$ (r sea positivo y real) y que además $n = 1$ (polo simple). ■

⁴De hecho, tanto si el polo está en un semiplano como en el otro, siempre hay una circunferencia (de radio tan pequeño como queramos) alrededor del polo donde la función puede tener parte real positiva y negativa. Para el semiplano izquierdo una función p.r. no tiene restricciones pero para el semiplano derecho la función p.r. tiene que ser siempre de parte real positiva y la única forma es que no haya polos en el semiplano derecho.

Teorema E.9 Sea $Z(s) = p(s)/q(s)$ una función racional p.r. Entonces el grado de $p(s)$ no puede diferir del grado de $q(s)$ en más de uno. Es decir,

$$|\mathcal{O}(p) - \mathcal{O}(q)| \leq 1$$

Teorema E.10 Sea $Z(s)$ una función p.r. Sea $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Entonces

$$R(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$$

Es decir, la parte real de una función impedancia a lo largo del eje $j\omega$ no puede ser negativa.

E.3 Condiciones

Por lo visto en los anteriores teoremas, la forma de verificar que una función es p.r. es comprobar que su parte real es positiva para todos los valores de s en el semiplano derecho del plano complejo. Esto no es demasiado práctico en muchos casos. Afortunadamente, aplicando algunas propiedades de funciones analíticas en el plano complejo podemos reducir este esfuerzo a comprobar la parte real a lo largo del eje $j\omega$. En esta sección veremos los fundamentos de esta afirmación.

Teorema E.11 ⁵ Sea $Z(s)$ holomorfa en una región R del plano s . Sea su contorno C . Entonces

$$\min_s [\Re\{Z(s)\}] \in C$$

Si en el anterior teorema hacemos que la región R sea el semiplano derecho y el contorno C sea el eje $j\omega$, podemos comprobar si $R(\omega) \geq 0$ para cualquier ω y si cumple, sabemos que lo hará para cualquier s .

El siguiente teorema proporciona las condiciones suficientes y necesarias para que $Z(s)$ sea p.r.

Teorema E.12 La condiciones suficientes y necesarias para que una función $Z(s)$ sea p.r. son

1. $Z(s) \in \mathbb{R}$ cuando $s \in \mathbb{R}$.
2. $Z(s)$ es holomorfa en el semiplano derecho del plano complejo.
3. Sea $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Entonces se cumple que $R(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$.

⁵En este teorema puede intercambiarse mínimo con máximo. No debe confundirse este teorema con el principio del módulo máximo o mínimo. Para una aclaración en profundidad de este hecho puede consultarse (Guillemin 1949) pág. 334.

4. Polos de $Z(s)$ en el eje $j\omega$ son simples con residuos reales y positivos.

DEMOSTRACIÓN. La necesidad se ha establecido con los teoremas E.6, E.8 y E.10. Para demostrar la suficiencia asumimos que $Z(s)$ cumple las cuatro condiciones. Entonces:

- La condición 1 es parte de la definición.
- La condición 2 permite que se pueda aplicar el teorema E.11 y prueba que $\min \Re \{Z(s)\}$ está en el eje $j\omega$ que es el contorno del semiplano derecho del plano s .
- La condición 3 implica que $\Re \{Z(s)\} \geq 0$ en el semiplano derecho.
- Si $Z(s)$ tiene un polo en el eje $j\omega$, la condición 4 asegura que $\Re \{Z(s)\} \geq 0$ en su entorno del semiplano derecho.

En resumen, tenemos que $Z(s) \in \mathbb{R}$ cuando $s \in \mathbb{R}$ y que $\Re \{Z(s)\} \geq 0$ en cualquier punto del semiplano derecho incluyendo el contorno. Por definición, $Z(s)$ es una función p.r. ■

E.4 Teoremas útiles

Una vez conocidas las condiciones para que una función sea p.r., es conveniente conocer ciertas características que pueden ayudar a identificar o construir funciones p.r.

Los siguientes teoremas suelen ser los más útiles:

Teorema E.13 *Sea $Z(s)$ una función racional que se puede escribir como cociente irreducible de polinomios*

$$Z(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Entonces $Z(s)$ es p.r. si cumple

1. $Z(s) \in \mathbb{R}$ cuando $s \in \mathbb{R}$.
2. $p(s) + q(s)$ es Hurwitz.
3. $\Re \{Z(j\omega)\} \geq 0 \quad \forall \omega$.

La prueba se puede encontrar en (Van Valkenburg 1960) pp. 104-105. Este teorema da una mayor facilidad para comprobar que una función es p.r.

Teorema E.14 Sea $Z(s)$ una función p.r. que es expresable mediante cociente de polinomios

$$Z(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$$

donde los polinomios m_i son polinomios de la parte par y los n_i de la parte impar, como ya se vio en el apéndice A. Entonces

$$Z_1(s) = \frac{m_1 + n_2}{m_2 + n_1}$$

también es una función p.r.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata si se usa el teorema E.13 ya que se cumplen todas las condiciones para $Z_1(s)$ si se cumplen para $Z(s)$. Las dos primeras condiciones son inmediatas. Para obtener la tercera se observa que

$$\operatorname{Ev} Z(s)|_{s=j\omega} = \Re\{Z(j\omega)\} = \Re\{Z_1(j\omega)\} = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \Big|_{s=j\omega}$$

Se ve claramente que el denominador evaluado en $s = j\omega$ es siempre positivo y que el numerador es una función par (solo tiene términos en ω^2), y nunca es negativo si una función es p.r. Como por hipótesis $Z(s)$ es p.r., su numerador $E(s) = m_1 m_2 - n_1 n_2$ (llamado *ensignant*) sólo depende de potencias pares en s y cumple $E(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$, entonces para $Z_1(s)$ también se cumple y por tanto $Z_1(s)$ es p.r. ■

Como consecuencia de este teorema se obtiene un importante corolario:

Corolario E.1 Sea $Z(s) = p(s)/q(s)$ una función p.r. entonces los polinomios

$$\begin{aligned} p(s) &= m_1 + n_1 \\ q(s) &= m_2 + n_2 \\ p(s) + q(s) &= m_1 + n_1 + m_2 + n_2 \\ \operatorname{Ev}[p(s)] + \operatorname{Od}[q(s)] &= m_1 + n_2 \\ \operatorname{Ev}[q(s)] + \operatorname{Od}[p(s)] &= m_2 + n_1 \end{aligned}$$

son todos Hurwitz modificados (raíces en el semiplano izquierdo incluyendo en el eje imaginario) menos $p(s) + q(s)$ que es Hurwitz estricto (raíces en el semiplano izquierdo únicamente).

Es fácil de demostrar a partir de la definición de *ensignant* las propiedades dadas por el siguiente teorema.

Teorema E.15 Si $E(s)$ es el *ensignant* de una función p.r., entonces su ceros cumplen las siguientes propiedades:

1. Los ceros reales aparecen en pares simétricos respecto al eje $j\omega$.
2. Los ceros complejos aparecen con simetría cuadrantal.
3. Los ceros en el eje $j\omega$ aparecen con orden par.

Finalmente, relacionando el coeficiente de reflexión con la impedancia de entrada se puede deducir el siguiente teorema de forma inmediata (Wing 2008).

Teorema E.16 *Sea*

$$\rho(s) = \frac{Z(s) - 1}{Z(s) + 1}$$

Entonces las condiciones suficientes y necesarias para que $Z(s)$ sea p.r. son:

1. $\rho(s) \in \mathbb{R}$ cuando $s \in \mathbb{R}$
2. $\rho(s)$ es holomorfa en el semiplano derecho del plano complejo.
3. $|\rho(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$

E.5 Extracción de impedancias

Si una función $Z(s)$ es p.r. significa que podría ser la impedancia de entrada de cierto circuito. Sin embargo, en ninguno de los teoremas o de las características dadas por el momento se dice cómo obtener ese circuito. La forma más intuitiva es hacerlo por pasos. Poco a poco se puede reducir el orden de la función extrayendo el circuito parcialmente y repitiendo el proceso con la función restante hasta que la función quede reducida al límite de un solo elemento.

Los siguientes teoremas permiten reducir el orden de una función p.r. $Z(s)$ y obtener una función $Z'(s)$ más simple. Esta reducción de orden consiste en sustraer de la función original $Z(s)$ una función p.r. correspondiente a un circuito conocido. La función que queda $Z'(s)$ es también p.r. y por ello se puede intentar aplicar otra reducción. La demostración de que $Z'(s)$ es p.r. no es inmediata y se puede encontrar en (Van Valkenburg 1960) porque una resta de funciones p.r. no tiene por qué ser p.r. (aunque la suma sí que lo es según el teorema E.3).

Teorema E.17 *Sea $F(s)$ una función p.r. con un polo en $s = \infty$ con residuo k_∞ . Entonces*

$$F'(s) = F(s) - k_\infty s$$

es una función p.r. sin polo en $s = \infty$.

Con el teorema E.17 tenemos que si la función $F(s)$ es una impedancia, se puede extraer una bobina serie de valor k_∞ . En caso de que $F(s)$ sea una admitancia, se

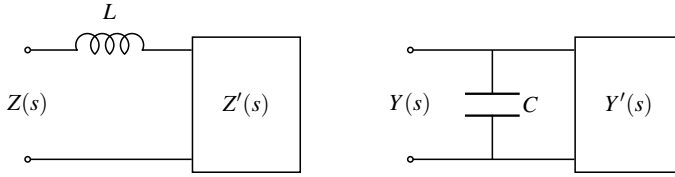


Figura E.1: Interpretación circuital de la eliminación de un polo en el infinito ($s = \infty$). A la izquierda la función p.r. es una impedancia $Z(s)$ de la que se ha extraído una bobina de valor $L = k_\infty$. A la derecha está el caso dual donde la función es una admitancia $Y(s)$ de la que el mismo proceso extrae un condensador $C = k_\infty$.

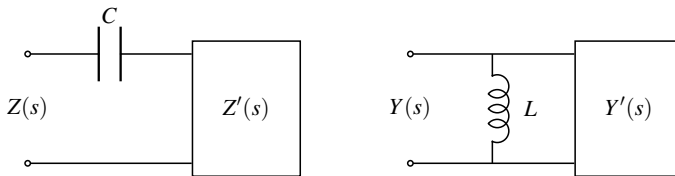


Figura E.2: Interpretación circuital de la eliminación de un polo en el origen ($s = 0$). A la izquierda la función p.r. es una impedancia $Z(s)$ de la que se ha extraído un condensador de valor $C = k_0$. A la derecha está el caso dual donde la función es una admitancia $Y(s)$ de la que el mismo proceso extrae una bobina $L = k_0$.

puede extraer un condensador paralelo del mismo valor. En la figura E.1 se observa la interpretación circuital de lo que se llama extracción de un polo en $s = \infty$.

Teorema E.18 Sea $F(s)$ una función p.r. con un polo en $s = 0$ con residuo k_0 . Entonces

$$F'(s) = F(s) - \frac{k_0}{s}$$

es una función p.r. sin polo en $s = 0$.

Con el teorema E.18 tenemos que si la función $F(s)$ es una impedancia, se puede extraer un condensador serie de valor k_0 . En caso de que $F(s)$ sea una admitancia, se puede extraer una bobina paralelo del mismo valor. En la figura E.2 se observa la interpretación circuital de lo que se llama extracción de un polo en $s = 0$.

Teorema E.19 Sea $F(s)$ una función p.r. con un par de polos en el eje imaginario $s = \pm j\omega_0$ con residuo k (positivo y real). Entonces

$$F'(s) = F(s) - \frac{2ks}{s^2 + \omega_0^2}$$

es una función p.r.

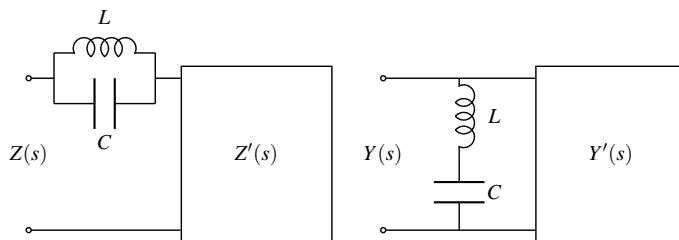


Figura E.3: Interpretación circuital de la eliminación de un par de polos en el eje imaginario ($s = \pm j\omega_0$). A la izquierda la función p.r. es una impedancia $Z(s)$ de la que se ha extraído un resonador paralelo ($L = 2k/\omega_0^2$ y $C = 1/(2k)$) en serie con el resto de la red $Z'(s)$. A la derecha está el caso dual donde la función es una admitancia $Y(s)$ de la que el mismo proceso extrae un resonador serie ($L = 1/(2k)$ y $C = 2k/\omega_0^2$) en paralelo al resto de la red $Y'(s)$.

En este caso, el segundo término se puede expresar de forma más identificable circuitalmente

$$F_1(s) = \frac{2ks}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s}{2k} + \frac{\omega_0^2}{2ks}} = \frac{1}{F_a + F_b}$$

Si $F(s)$ es una impedancia, F_1 también lo es y F_a y F_b son admitancias que al sumarse significa que están en paralelo. F_a es un condensador de capacidad $C = 1/(2k)$ y F_b es una bobina de valor $2k/\omega_0^2$. Si $F(s)$ es una admitancia se obtiene el caso dual. Ambos pueden verse en la figura E.3.

Teorema E.20 Sea $F(s)$ una función p.r. Sea R_{min} el mínimo de su parte real sobre el eje imaginario. Es decir

$$R_{min} \triangleq \min_{\omega} [\Re\{F(j\omega)\}]$$

Entonces se cumple que

$$F'(s) = F(s) - R$$

es una función p.r. si $R \leq R_{min}$. Si además ω_0 es el punto del eje imaginario donde se alcanza el mínimo R_{min} y se elige ese valor para extraer de $F(s)$, es decir,

$$R = R_{min} = \Re\{F(j\omega_0)\}$$

entonces obviamente se cumple que

$$\Re\{F'(j\omega_0)\} = \Re\{F(j\omega_0) - R_{min}\} = 0$$

y por tanto $F'(j\omega_0) = jX(\omega_0)$.

Si $F(s)$ es una función impedancia, entonces R es una resistencia que se extrae en serie. Si $F(s)$ es una función admitancia entonces R es una conductancia que

se extrae en paralelo. El teorema E.20 indica cómo extraer una constante de la función $F(s)$.

E.6 Funciones reactancia

Definición E.2 Se denomina función impedancia o admitancia LC o función reactancia/susceptancia a una función $F(s)$ que cumpla las siguientes condiciones:

1. $F(s)$ es una función p.r.
2. $\Re\{F(j\omega)\} = 0 \quad \forall \omega$.

En este apéndice se ha visto que una función p.r. se puede sintetizar con un circuito RLC (compuesto de resistencias bobinas y condensadores). Ahora se añade la condición de eliminar las pérdidas y, por tanto, una función de este tipo se puede sintetizar con un circuito con bobinas y condensadores solamente.

Al añadir una condición extra a una función p.r. se pueden deducir varias propiedades adicionales de gran utilidad. Supongamos que $Z(s)$ es una función p.r. Separando los polinomios que la componen en pares e impares tenemos que

$$Z(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$$

como ya se vio en el teorema E.14 la parte real está relacionada con la parte par de la función de la siguiente forma:

$$\Re\{Z(j\omega)\} = \text{Ev}[Z(s)]|_{s=j\omega} = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \Big|_{s=j\omega}$$

Hay tres formas de conseguir que la parte real sea nula:

1. Forzar $m_1 = 0$ y $n_2 = 0$. Entonces $Z(s) = n_1/m_2$.
2. Forzar $m_2 = 0$ y $n_1 = 0$. Entonces $Z(s) = m_1/n_2$.
3. Forzar $E(s) = m_1 m_2 - n_1 n_2 = 0$. Entonces $Z(s) = n_1/m_2$.

En conclusión $Z(s)$ solo puede tener dos formas:

$$Z(s) = \frac{m_1}{n_2} \quad Z(s) = \frac{n_1}{m_2}$$

en cualquier caso $Z(s)$ es un cociente entre un polinomio par y uno impar o a la inversa. Si un polinomio es impar, se puede expresar como el producto de s por

un polinomio par. Por ello, un polinomio impar tiene una raíz en el origen. Como consecuencia si $Z(s) = n_1/m_2$ entonces tiene un cero en el origen y si es de la forma $Z(s) = m_1/n_2$ tendrá un polo en el origen. En el infinito $Z(s)$ puede tener un polo o un cero dependiendo del orden de cada uno de los polinomios pares o impares.

Un polinomio en el denominador de $Z(s)$ debe ser Hurwitz modificado. Si es par además no puede tener raíces en el semiplano izquierdo ni estar repetidas. La única posibilidad es que todas las raíces estén en el eje imaginario y sean simples para que se cumpla que $Z(s)$ sea p.r. Si el polinomio denominador es impar sucede que además hay una raíz en el origen. Por tanto, podemos escribir $Z(s)$ como

$$Z(s) = k \frac{(s^2 + \omega_{z1}^2)(s^2 + \omega_{z2}^2) \cdots}{s(s^2 + \omega_{p1}^2)(s^2 + \omega_{p2}^2) \cdots}$$

donde k es una constante y ω_{z1} puede ser cero o no dependiendo si $Z(s)$ tiene un cero o un polo en el origen.

Con todos estos datos, la función $Z(s)$ puede expandirse de la siguiente forma:

$$Z(s) = r_\infty s + \frac{r_0}{s} + \sum_{k=1}^n \frac{2r_k s}{s^2 + \omega_k^2} \quad (\text{E.1})$$

La cual tiene un polo en el origen (si no lo tiene entonces basta que $r_0 = 0$); tiene un polo en el infinito (si no lo tiene entonces basta que $r_\infty = 0$) y tiene n polos en $s_k = j\omega_k$ y sus correspondientes residuos en r_k (sin olvidarnos de sus simétricos en el eje imaginario negativo ya que los coeficientes son siempre reales). Esta función $Z(s)$ es reconocible como una conexión en serie de bobina, condensador y resonadores paralelo. Si la $Z(s)$ fuera una admitancia entonces el circuito sería el dual. Por tanto, se ha demostrado el siguiente teorema:

Teorema E.21 *Las condiciones suficientes y necesarias para que una función $F(s)$ sea una función LC son:*

1. $F(s)$ es una función p.r.
2. $F(s)$ tiene todos sus polos en el eje imaginario.
3. $F(s)$ tiene un polo o un cero en $s = 0$.
4. $F(s)$ tiene un polo o un cero en $s = \infty$.

La expansión de $F(s)$ en la forma E.1 (expansión en fracciones simples) proporciona una forma de obtener el circuito que genere $F(s)$ como conexión serie de elementos se la denomina forma de Foster I. Si la conexión es en paralelo la denominación es forma de Foster II.

Definición E.3 Sea $Z(s)$ una función impedancia LC. Entonces se puede escribir

$$Z(j\omega) = j\Im\{Z(j\omega)\} = jX(\omega)$$

ya que $\Re\{Z(j\omega)\} = 0$. La función $X(\omega)$ es impar y se denomina función reactancia. De forma dual

$$Y(j\omega) = j\Im\{Y(j\omega)\} = jB(\omega)$$

La función $B(\omega)$ es impar y se denomina función susceptancia.

EJEMPLO E.1 Sea

$$F(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s}$$

Determinar las formas de Foster I y II de la función $F(s)$ tras demostrar que es una función impedancia/admitancia LC.

Solución: Observando la forma de $F(s)$ vemos que es el cociente de un polinomio par y uno impar. Es decir, $F(s) = m_1/n_2$. Esto nos dice de entrada que $F(s)$ tiene un polo en el origen y que, por los órdenes del numerador y el denominador, en el infinito hay un polo. De momento parece que $F(s)$ tiene la forma de una función impedancia o admitancia LC. Para verificarlo se aplicará el teorema E.21.

El primer paso siguiendo el teorema E.21 consiste en demostrar que $F(s)$ es una función p.r. Factorizando numerador y denominador tenemos

$$F(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)}$$

A la vista de esta expresión parece que el camino más simple para demostrar que $F(s)$ es p.r. es seguir los pasos del teorema E.12:

1. Evidentemente $F(s) \in \mathbb{R}$ cuando $s \in \mathbb{R}$.
2. Los polos de $F(s)$ se encuentran en $s = 0$, $s = \pm 2j$. No hay singularidades en el semiplano derecho del plano complejo y por tanto cualquier función racional con estas características es holomorfa en este semiplano.
3. Debería suceder que $\Re\{F(j\omega)\} \geq 0 \quad \forall \omega$ y, de hecho, sucede que $\Re\{F(j\omega)\} = 0 \quad \forall \omega$.
4. Tan solo falta obtener los polos de $F(s)$, ver que son simples y comprobar que los residuos sean reales y positivos. Los polos son obviamente simples y los residuos son:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \Rightarrow r_0 = \frac{9}{4} \\ p_1 &= 2j \Rightarrow r_1 = \frac{15}{8} \\ p_2 &= -2j \Rightarrow r_2 = \frac{15}{8} \\ p_3 &= \infty \Rightarrow r_\infty = 1 \end{aligned}$$

Todos los residuos son positivos.

Como las cuatro condiciones se cumplen, $F(s)$ es una función p.r. Siguiendo con el teorema E.21 la primera condición se ha cumplido. La segunda condición exige que todos los polos estén en el eje imaginario, como así sucede. La tercera condición también se cumple porque $F(s)$ tiene un polo en el origen y la cuarta también porque $F(s)$ tiene un polo en el infinito. Con todo esto se puede asegurar que $F(s)$ es una función impedancia/admitancia LC.

La expresión en fracciones simples de $F(s)$ es inmediata sabiendo los polos y residuos de la misma

$$F(s) = r_{\infty}s + \frac{r_0}{s} + \frac{2r_1s}{s^2 + 4} = s + \frac{9/4}{s} + \frac{15/4s}{s^2 + 4}$$

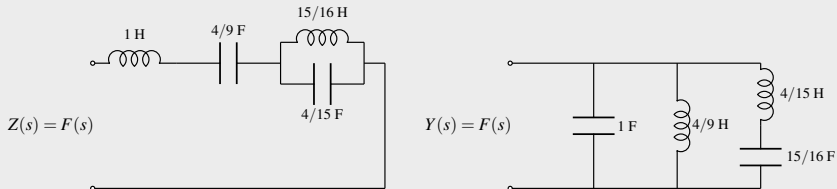
La forma Foster I del circuito es una impedancia $Z(s) = F(s)$ que consta de una conexión en serie de:

- Una bobina de $L = 1$ H (polo en el infinito).
- Un condensador de valor $C = 4/9$ F (polo en el origen).
- Un resonador paralelo. Siguiendo el teorema E.19 se obtiene $L = 15/16$ H y $C = 4/15$ F (polo en $\pm 2j$).

La forma Foster II del circuito es una admitancia $Y(s) = F(s)$ que consta de una conexión en paralelo de:

- Un condensador de $C = 1$ H (polo en el infinito).
- Una bobina de valor $C = 4/9$ F (polo en el origen).
- Un resonador serie. Siguiendo el teorema E.19 se obtiene $C = 15/16$ F y $L = 4/15$ H (polo en $\pm 2j$).

Los circuitos resultantes se muestran a continuación. A la izquierda se muestra la forma de Foster I y a la derecha la forma de Foster II.



Las funciones impedancia LC son importantes por ser el caso RLC sin pérdidas. También existen las funciones impedancia RC y RL, las cuales no vamos a tratar aquí, pero se pueden consultar sus características de forma resumida en (Wing 2008). Las características de las funciones reactancia son interesantes porque se aplican a las transformaciones en frecuencia de filtros ideales. Es por ello que se describirán a continuación.

E.6.1 Propiedades de las funciones reactancia

Como ya se ha dicho, una función reactancia/susceptancia es la parte imaginaria de una función impedancia LC ($Z(\omega) = jX(\Omega)$). Por ello es de la forma $X(\omega)$ y cumple las siguientes propiedades

1. La función reactancia/susceptancia es racional e impar de la forma

$$X(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{\omega p(\omega^2)}{q(\omega^2)} \quad \text{o} \quad X(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{p(\omega^2)}{\omega q(\omega^2)}$$

donde p y q son polinomios de coeficientes reales que dependen de ω^2 (exponentes pares de ω). Obviamente se cumple $X(\omega) = -X(-\omega)$.

2. La diferencia de órdenes entre numerador y denominador es igual a la unidad

$$|\mathcal{O}(P) - \mathcal{O}(Q)| = 1$$

Lo cual equivale a decir que en el infinito hay un polo o un cero.

3. Todos los polos y ceros son reales y simples en la variable ω . Por ello la función reactancia puede expresarse en forma factorizada como

$$X(\omega) = k \frac{(\omega^2 - \omega_{z1}^2)(\omega^2 - \omega_{z2}^2) \cdots}{\omega (\omega^2 - \omega_{p1}^2)(\omega^2 - \omega_{p2}^2) \cdots}$$

donde los ceros son $\{\pm\omega_{z1}, \pm\omega_{z2}, \dots\}$ y los polos son $\{0, \pm\omega_{p1}, \pm\omega_{p2}, \dots\}$. El punto $\omega = 0$ puede ser un polo si todos los $|\omega_{zi}| > 0$ o un cero si existe un par $\pm\omega_{zi} = 0$ que cancele el polo $\omega = 0$ y deje un cero en el origen.

4. La pendiente de $X(\omega)$ siempre es positiva. Partiendo de la expresión en fracciones simples de la impedancia LC dada por E.1, y haciendo el cambio $s = j\omega$ para obtener la reactancia, podemos escribir

$$X(\omega) = r_\infty \omega - \frac{r_0}{\omega} + \sum_{k=1}^n \frac{2r_k \omega}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

Su derivada nos proporciona la pendiente para cualquier ω

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = r_\infty + \frac{r_0}{\omega^2} + \sum_{k=1}^n \frac{2r_k(\omega_k^2 + \omega^2)}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2}$$

Ya que los residuos son reales y positivos, la pendiente también lo es.

5. Los polos y los ceros se alternan en el eje ω . Esto es consecuencia de la propiedad anterior. Dos polos o dos ceros no pueden ser adyacentes ya que la curva no cambia de pendiente. Por tanto, la función reactancia puede escribirse de la siguiente forma:

$$X(\omega) = k \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{2n+1}^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{2n}^2)}$$

donde

$$0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{2n} < \omega_{2n+1}$$

Esta propiedad es conocida como propiedad de separación para funciones reactancia y es debida a Zobel y a Foster⁶.

EJEMPLO E.2 Representar gráficamente la función reactancia correspondiente a la función impedancia LC del ejemplo E.1 en función de ω señalando los polos y los ceros

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)}$$

Solución: Sustituyendo $s = j\omega$ se obtiene directamente

$$Z(j\omega) = j \frac{(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 9)}{\omega(\omega^2 - 4)}$$

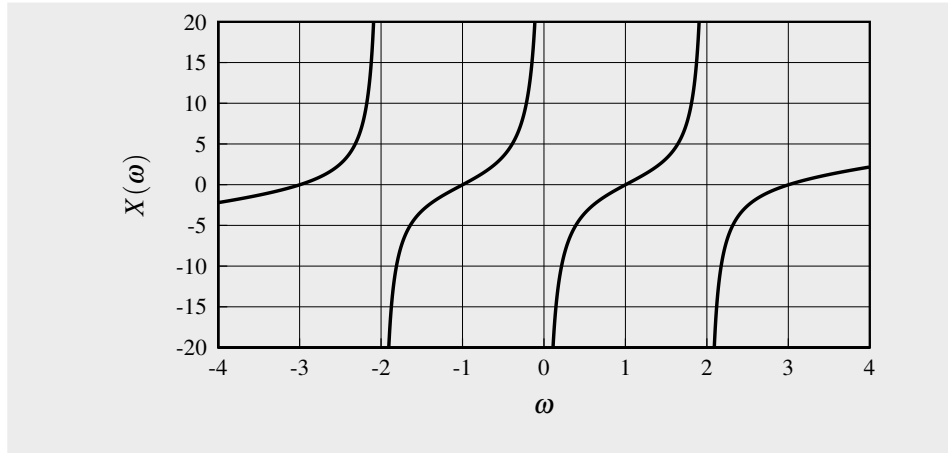
de forma que, como era de suponer, $Z(j\omega) = jX(\omega)$ donde la función reactancia $X(\omega)$ es impar y tiene la expresión

$$X(\omega) = \frac{(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 9)}{\omega(\omega^2 - 4)}$$

con polos en los puntos $\omega = \infty, -2, 0, +2, \infty$ ceros en $\omega = -3, -1, 1, +3$. Se observa que el entrelazado es correcto ya que entre dos polos siempre hay un cero. También se observa que el orden del numerador es una unidad mayor que el orden del denominador forzando polos en $\omega = \pm\infty$. El origen en este caso tiene un polo cumpliendo la característica de que el origen es siempre un polo o un cero y que el infinito es siempre un polo o un cero.

La característica de la pendiente positiva se puede observar directamente de la gráfica siguiente, donde claramente se distinguen los polos y los ceros.

⁶Ronald Martin Foster (1896-1998) fue el primero al que se describe como dedicado a la síntesis de redes en forma moderna. Muchas de las deducciones de Foster fueron introducidas en un artículo anterior de Zobel, pero Foster fue el primero en recoger las ideas en forma de un teorema de reactancia (Foster 1924). Foster trabajó para la Bell System desde 1917 hasta 1943 y desde 1943 hasta 1963 fue profesor y jefe del departamento de matemáticas en el Instituto Politécnico de Brooklyn. Otto Julius Zobel (1887-1970) fue miembro de la plantilla de Bell System desde 1916 hasta 1952. Inventó los filtros tipo-m y el filtro de resistencia constante. Junto con J.R. Carson ayudó a establecer la naturaleza del ruido en los circuitos eléctricos.



E.6.2 Realizaciones canónicas

Se han nombrado las formas de Foster I y II como realizaciones de funciones impedancia LC gracias a su expansión en forma de fracciones simples. Hay otras formas de conseguir un circuito a partir de la función impedancia LC y vamos a ver las más interesantes.

Definición E.4 Se define como realización canónica a aquella en la que el número de elementos del circuito (parámetros circuitales) es exactamente el mismo que el número de coeficientes de la función impedancia. Dicha realización canónica requiere el mínimo número de elementos.

Es fácil de probar que las formas de Foster I y II son ambas realizaciones canónicas. Para ello, escogemos una función impedancia LC en su forma típica:

$$Z(s) = k \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \cdots (s^2 + \omega_{2n+1}^2)}{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \cdots (s^2 + \omega_{2n}^2)}$$

La cual tiene $2n + 2$ parámetros (k y las $2n+1$ ω_i). Su forma de Foster es

$$Z(s) = r_\infty s + \frac{r_0}{s} + \sum_{k=1}^n \frac{2r_k s}{s^2 + \omega_k^2}$$

con n polos, n residuos y los residuos r_∞ y r_0 . En total hay $2n + 2$ parámetros. El circuito correspondiente tiene 2 elementos por polo/residuo (los resonadores) y un elemento por el polo en el origen y otro por el polo en el infinito. Total $2n + 2$ elementos en el circuito.

Las otras realizaciones interesantes son las que se obtienen por la expansión en fracciones continuas (en lugar de fracciones simples como en el caso de las formas de Foster). El proceso de extracción de polos en el infinito proporciona la forma de Cauer I y la extracción de polos en el origen proporciona la forma de Cauer II.

El proceso para la obtención de la forma de Cauer I es el siguiente:

1. Partamos de una expresión de $Z(s)$ como cociente de polinomios donde vamos a asumir que el denominador tiene un orden mayor que el numerador. Caso de no ser así, el proceso se realizaría con $Y(s)$ que sí que cumpliría la condición.

$$Z(s) = \frac{b_n s^{2n} + b_{n-1} s^{2n-2} + \dots + b_1 s^2 + b_0}{a_{n-1} s^{2n-1} + a_{n-2} s^{2n-3} + \dots + a_1 s^3 + a_0 s}$$

2. Extraer el polo de $s = \infty$ cuyo residuo es b_n/a_{n-1} según el proceso descrito en el teorema E.17 obteniendo

$$Z'(s) = Z(s) - \frac{b_n}{a_{n-1}} s$$

donde $Z'(s)$ es una función racional con un orden en el numerador de $2n - 2$ y denominador $2n - 1$.

3. Obtener $1/Z'(s)$ y repetir el proceso ya que $1/Z'(s)$ vuelve a tener un polo en $s = \infty$.
4. La expresión final de $Z(s)$ es una fracción continua cuyos coeficientes son los valores de los elementos de la forma siguiente

$$Z(s) = L_1 s + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{L_2 s + \frac{1}{C_2 s + \dots}}}$$

donde las bobinas L_i y los condensadores C_i se alternan. El circuito final tiene la forma de un circuito en escalera como se observa en la figura E.4.

El proceso para la obtención de la forma de Cauer II es el siguiente:

1. Partamos de una expresión de $Z(s)$ como cociente de polinomios donde vamos a asumir que el denominador tiene un orden mayor que el numerador. Caso de no ser así, el proceso se realizaría con $Y(s)$ que sí que cumpliría la condición.

$$Z(s) = \frac{b_n s^{2n} + b_{n-1} s^{2n-2} + \dots + b_1 s^2 + b_0}{a_{n-1} s^{2n-1} + a_{n-2} s^{2n-3} + \dots + a_1 s^3 + a_0 s}$$

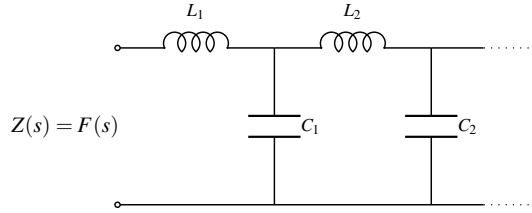


Figura E.4: Realización de la forma Cauer I. El circuito en escalera tiene tantos elementos como coeficientes en la expansión de $Z(s)$ en forma de fracción continua.

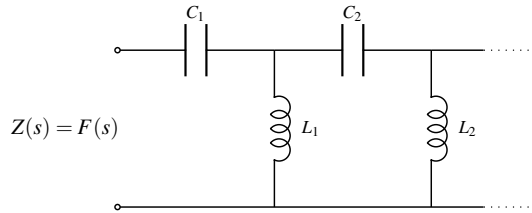


Figura E.5: Realización de la forma Cauer II. El circuito en escalera tiene tantos elementos como coeficientes en la expansión de $Z(s)$ en forma de fracción continua.

2. Extraer el polo de $s = 0$ cuyo residuo es b_0/a_0 según el proceso descrito en el teorema E.18 obteniendo

$$Z'(s) = Z(s) - \frac{b_0}{a_0 s}$$

donde $Z'(s)$ es una función racional con el mismo orden en numerador y denominador pero a la que se ha eliminado el término de menor orden b_0 .

3. Obtener $1/Z'(s)$ y repetir el proceso ya que $1/Z'(s)$ vuelve a tener un polo en $s = 0$ tras simplificar numerador y denominador.
4. La expresión final de $Z(s)$ es una fracción continua cuyos coeficientes son los valores de los elementos de la forma siguiente

$$Z(s) = \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{\frac{1}{L_2 s} + \dots}}}$$

donde los condensadores C_i y las bobinas L_i se alternan. El circuito final tiene la forma de un circuito en escalera como se observa en la figura E.5.

EJEMPLO E.3 Sea

$$F(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s}$$

la función impedancia LC del ejemplo E.1. Determinar las formas de Cauer I y II de la función $F(s)$.

Solución: Como el numerador tiene un orden mayor que el denominador, vamos a asumir que la función $F(s)$ es una impedancia. La forma de Cauer I empieza por eliminar el polo en $s = \infty$.

$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s} = s + \frac{8s^2 + 9}{s^3 + 2s}$$

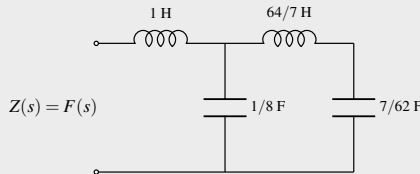
La fracción de la derecha se puede invertir, asumir que es una admitancia y seguir el proceso

$$Z(s) = s + \frac{8s^2 + 9}{s^3 + 2s} = s + \frac{1}{\frac{s^3 + 2s}{8s^2 + 9}} = s + \frac{1}{\frac{1}{8}s + \frac{\frac{7}{8}s}{8s^2 + 9}}$$

y otra vez más

$$Z(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{8}s + \frac{\frac{7}{8}s}{8s^2 + 9}} = s + \frac{1}{\frac{1}{8}s + \frac{1}{\frac{8s^2 + 9}{\frac{7}{8}s}}} = s + \frac{1}{\frac{1}{8}s + \frac{1}{\frac{64}{7}s + \frac{1}{\frac{7}{72}s}}}$$

Por tanto, la forma de Cauer I es una impedancia que forma una red en escalera cuyo circuito se puede observar en la figura siguiente.



El proceso para obtener la forma de Cauer II es similar pero eliminando siempre los términos de menor orden de la expresión racional. Volviendo a asumir que $F(s)$ es una impedancia se extrae el primer polo en $s = 0$

$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s} = \frac{9}{2s} + \frac{\frac{11}{2}s^2 + s^4}{2s + s^3} = \frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{2 + s^2}{\frac{11}{2}s + s^3}}$$

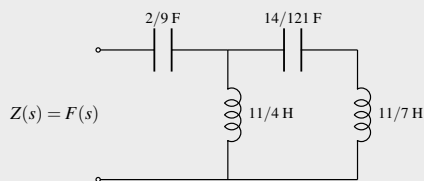
Volviendo a repetir el ciclo se obtiene

$$Z(s) = \frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{2 + s^2}{\frac{11}{2}s + s^3}} = \frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{4}{11s} + \frac{\frac{7}{11}s^2}{\frac{11}{2}s + s^3}} = \frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{4}{11s} + \frac{1}{\frac{11}{2} + s^2}} = \frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{4}{11s} + \frac{1}{\frac{7}{11}s}}$$

La siguiente repetición del proceso ya nos proporciona la expresión final

$$Z(s) = \frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{4}{11s} + \frac{\frac{11}{2} + s^2}{\frac{7}{11}s}} = \frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{4}{11s} + \frac{\frac{121}{14s} + \frac{1}{7}}{\frac{7}{11}s}}$$

cuyo circuito es una red en escalera como se muestra a continuación.



Como se puede ver, ambas formas producen un circuito con el mínimo número de elementos (4 en total). Eso indica que el número de parámetros para expresar $F(s)$ es de 4 como mínimo, como se demostró al factorizar $F(s)$ en el ejemplo [E.1](#).

Apéndice F

Matrices Z , Y , $ABCD$, S de elementos básicos

En este apéndice se resumen las matrices \mathbf{Z} , \mathbf{Y} , \mathbf{ABCD} y \mathbf{S} de los circuitos más útiles de dos accesos.

F.1 La impedancia serie

Sea una impedancia Z considerada como un 2-accesos como aparece en la figura F.1. La matriz de impedancias no existe. La matriz de admitancias es

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ -\frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.1})$$

que, como era de esperar, es singular y no invertible. La matriz de parámetros $ABCD$ es

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.2})$$

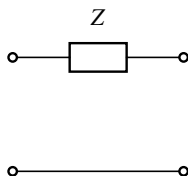


Figura F.1: Impedancia serie como un 2-accesos.

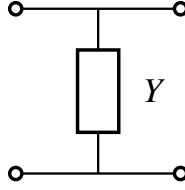


Figura F.2: Admitancia paralelo como un 2-accesos.

La matriz de parámetros S , para una impedancia de referencia Z_0 igual para los dos accesos, es:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{Z + 2Z_0} \begin{pmatrix} Z & 2Z_0 \\ 2Z_0 & Z \end{pmatrix} \quad (\text{F.3})$$

F.2 La admitancia paralelo

Sea una admitancia Y considerada como un 2-accesos como aparece en la figura F.2. La matriz de admitancias no existe. La matriz de impedancias es

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Y} & \frac{1}{Y} \\ \frac{1}{Y} & \frac{1}{Y} \end{pmatrix} = \frac{1}{Y} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.4})$$

que, como era de esperar, es singular y no invertible. La matriz de parámetros $ABCD$ es

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.5})$$

La matriz de parámetros S , para una impedancia de referencia $Z_0 = 1/Y_0$ igual para los dos accesos, es:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{Y + 2Y_0} \begin{pmatrix} -Y & 2Y_0 \\ 2Y_0 & -Y \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

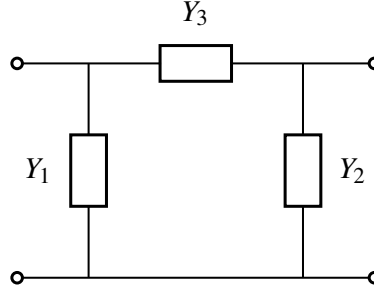
F.3 La sección en Π

Sea una sección en Π como la mostrada en la figura F.3. Si definimos

$$|\mathbf{Y}| \triangleq Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 \quad (\text{F.7})$$

que, como se verá, es el determinante de la matriz de admitancias entonces la matriz de impedancias queda:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \begin{pmatrix} Y_2 + Y_3 & Y_3 \\ Y_3 & Y_1 + Y_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.8})$$

**Figura F.3:** Sección en Π como un 2-accesos.

La matriz de admitancias es:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.9})$$

La matriz de admitancias hace esta sección muy interesante porque de una matriz de admitancias cualquiera de una red recíproca se puede obtener directamente la sección en Π haciendo:

$$Y_1 = y_{11} + y_{12} \quad (\text{F.10a})$$

$$Y_2 = y_{22} + y_{12} \quad (\text{F.10b})$$

$$Y_3 = -y_{12} \quad (\text{F.10c})$$

La matrix de parámetros $ABCD$ es:

$$\mathbf{ABCD} = \frac{1}{Y_3} \begin{pmatrix} Y_2 + Y_3 & 1 \\ |\mathbf{Y}| & Y_1 + Y_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.11})$$

La matriz de parámetros S es:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + 2Y_3 + Y_0 + \frac{|\mathbf{Y}|}{Y_0}} \begin{pmatrix} Y_2 - Y_1 + Y_0 - \frac{|\mathbf{Y}|}{Y_0} & 2Y_3 \\ 2Y_3 & Y_1 - Y_2 + Y_0 - \frac{|\mathbf{Y}|}{Y_0} \end{pmatrix} \quad (\text{F.12})$$

F.4 La sección en T

La sección en T es la dual de la sección en Π (ver figura F.4). La matriz de impedancias es:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.13})$$

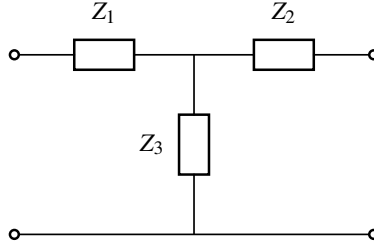


Figura F.4: Sección en T como un 2-accesos.

la cual resulta útil para modelizar cualquier elemento recíproco, partiendo de su matriz de impedancias, sin más que asignar:

$$Z_1 = z_{11} - z_{12} \quad (\text{F.14a})$$

$$Z_2 = z_{22} - z_{12} \quad (\text{F.14b})$$

$$Z_3 = z_{12} \quad (\text{F.14c})$$

El determinante de la matriz de impedancias es:

$$|\mathbf{Z}| = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 \quad (\text{F.15})$$

La matriz de admitancias es:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{|\mathbf{Z}|} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_1 + Z_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.16})$$

La matriz de parámetros $ABCD$ es:

$$\mathbf{ABCD} = \frac{1}{Z_3} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & |\mathbf{Z}| \\ 1 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.17})$$

La matriz \mathbf{S} , referida a una impedancia Z_0 , es:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{Z_1 + Z_2 + 2Z_3 + Z_0 + \frac{|\mathbf{Z}|}{Z_0}} \begin{pmatrix} Z_1 - Z_2 - Z_0 + \frac{|\mathbf{Z}|}{Z_0} & 2Z_3 \\ 2Z_3 & Z_2 - Z_1 - Z_0 + \frac{|\mathbf{Z}|}{Z_0} \end{pmatrix} \quad (\text{F.18})$$

F.5 El transformador

El transformador con relación de transformación $N : 1$ cumple

$$\frac{V_1}{V_2} = N = \frac{-I_2}{I_1} \quad (\text{F.19})$$

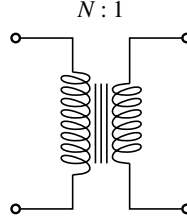


Figura F.5: Transformador como un 2-accesos.

El transformador aparece representado en la figura F.5. Su matriz de impedancias no existe y la de admitancias tampoco. La matriz de parámetros $ABCD$ es:

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \quad (\text{F.20})$$

La matriz de parámetros de dispersión, referida a una impedancia de referencia Z_0 , es:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N^2 + 1} \begin{pmatrix} N^2 - 1 & 2N \\ 2N & 1 - N^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.21})$$

La cual es independiente de Z_0 .

F.6 El inversor

El inversor de impedancias/admitancias aparece en la figura F.6. Un inversor de impedancias es igual a un inversor de admitancias si se cumple que $K = 1/J$. Su matriz de impedancias es (desfase¹ de $\pm 90^\circ$)

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & \mp jK \\ \mp jK & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.22a})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mp j/J \\ \mp j/J & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.22b})$$

Su matriz de admitancias es (desfase de $\pm 90^\circ$)

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & \mp jJ \\ \mp jJ & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.23a})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mp j/K \\ \mp j/K & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.23b})$$

¹Asumimos que el desfase de una línea de transmisión de $\lambda/4$ es de $+90^\circ$. O lo que es lo mismo, que la fase de S_{21} es -90° .

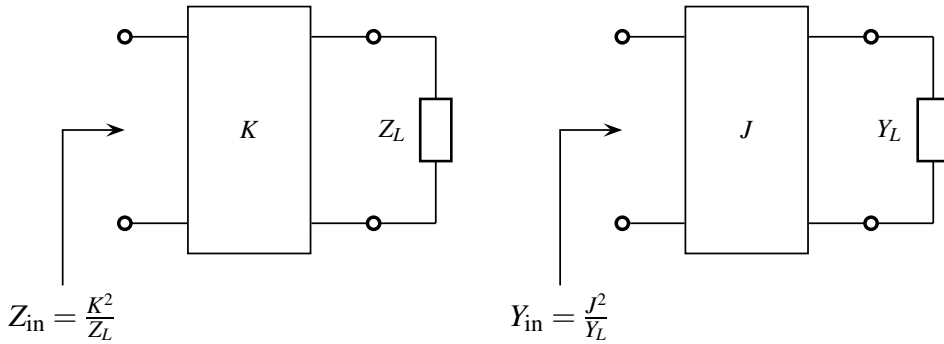


Figura F.6: Inversor de impedancia (izquierda) e inversor de admitancia (derecha).

Su matriz $ABCD$ es (desfase de $\pm 90^\circ$)

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} 0 & \pm jK \\ \pm j/K & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.24a})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \pm j/J \\ \pm jJ & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.24b})$$

y su matriz de parámetros de dispersión es (desfase de $\pm 90^\circ$)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{K^2 + Z_0^2} \begin{pmatrix} K^2 - Z_0^2 & \mp j2KZ_0 \\ \mp j2KZ_0 & K^2 - Z_0^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.25a})$$

$$= \frac{1}{J^2 + Y_0^2} \begin{pmatrix} Y_0^2 - J^2 & \mp j2JY_0 \\ \mp j2JY_0 & Y_0^2 - J^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.25b})$$

F.7 La línea de transmisión

Sea una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica Z_0 y de longitud eléctrica $\phi = \beta l$. La línea se simboliza de varias formas: como una línea bifilar o como un coaxial (ver figura F.7).

La matriz de impedancias es:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{jY_0 \sin \phi} \begin{pmatrix} \cos \phi & 1 \\ 1 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{F.26})$$

y la de admitancias es

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{jZ_0 \sin \phi} \begin{pmatrix} \cos \phi & -1 \\ -1 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{F.27})$$

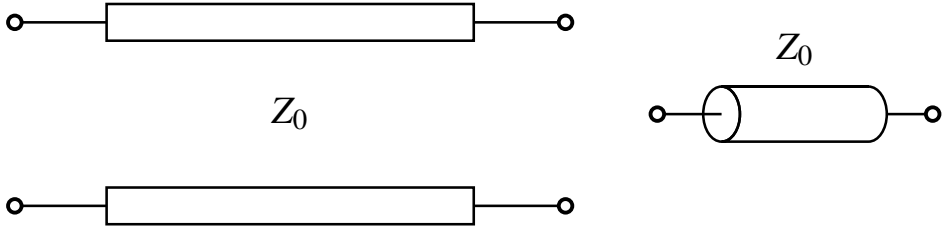


Figura F.7: Línea de transmisión como un 2-accesos. Izquierda: representación como línea bifilar. Derecha: representación como línea coaxial.

La matriz de parámetros $ABCD$ es:

$$\mathbf{ABCD} = \begin{pmatrix} \cos \phi & jZ_0 \sin \phi \\ jY_0 \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \cos \phi \begin{pmatrix} 1 & jZ_0 \tan \phi \\ jY_0 \tan \phi & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.28})$$

La matriz \mathbf{S} , referida a una impedancia Z_0 igual a la impedancia característica de la línea, es:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\phi} \\ e^{-j\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.29})$$

Bibliografía

- M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, 1965 (vid. págs. [119](#), [120](#)).
- M. Aigner y G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 4.^a ed. Berlin: Springer Verlag, 2009 (vid. [pág. 69](#)).
- T. M. Apostol, *CALCULUS, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, 2.^a ed. Barcelona: Reverté, s.a., 1989, vol. 1 (vid. [pág. 3](#)).
- , *Análisis Matemático*, 2.^a ed. Barcelona: Reverté, s.a., 2001 (vid. [pág. 3](#)).
- J. V. Armitage y W. F. Eberlein, *Elliptic Functions*, ép. London Mathematical Society Student Texts 67. Cambridge: Cambridge University Press, 2006 (vid. [pág. 109](#)).
- A. Atia, A. Williams y R. Newcomb, «Narrow-band multiple-coupled cavity synthesis», *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 21, n.º 5, págs. 649-655, sep. de 1974 (vid. págs. [270](#), [282](#)).
- J. Bará, *Circuitos de microondas con líneas de transmisión*, ép. Politext. Universitat Politecnica de Catalunya, 1996 (vid. [pág. 2](#)).
- V. Belevitch, «Chebyshev filters and amplifier networks», *Wireless Engineer*, vol. 29, págs. 106-110, abr. de 1952 (vid. [pág. 170](#)).
- , «Summary of the history of circuit theory», *Proceedings of the IRE*, vol. 50, n.º 5, págs. 848-855, mayo de 1962 (vid. [pág. 13](#)).
- V. Belevitch, *Classical network theory*, ép. Series in Information Systems. San Francisco: Holden-Day, 1968 (vid. págs. [203](#), [204](#)).
- G. Bianchi y R. Sorrentino, *Electronic Filter Simulation and Design*. McGraw-Hill Professional, 2007 (vid. págs. [84](#), [85](#)).
- H. J. Blinchikoff y A. I. Zverev, *Filtering in the Time and Frequency Domains*, ép. Classic Series. Raleigh, NC: Scitech Publishing, 2006 (vid. págs. [46](#), [85](#)).

- J. M. Borwein y P. B. Borwein, *Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, ép. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. Wiley-Interscience, 1998, vol. 4 (vid. pág. 123).
- G. Bosse, «Siebketten ohne dämpfungsschwankungen im durchlassbereich (potenzketten)», *Frequenz*, vol. 5, págs. 279-284, oct. de 1951 (vid. pág. 170).
- R. Bott y R. J. Duffin, «Impedance synthesis without the use of transformers», *Journal of Applied Physics*, vol. 20, pág. 816, 1949 (vid. pág. 339).
- O. Brune, «Synthesis of a finite two terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency», *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 10, págs. 191-236, 1931 (vid. pág. 339).
- S. Butterworth, «On the theory of filter amplifiers», *Wireless Engineer*, vol. 7, págs. 536-541, oct. de 1930 (vid. pág. 61).
- R. J. Cameron, «Fast generation of chebyshev filter prototypes with asymmetrically-prescribed transmission zeros», *European Space Agency Journal*, vol. 6, págs. 83-95, 1982 (vid. pág. 133).
- R. J. Cameron, C. M. Kudsia y R. R. Mansour, *Microwave Filters for Communication Systems: Fundamentals, Design and Applications*. New Jersey: Wiley-Interscience, 2007 (vid. págs. 28, 33-35, 133, 256, 261, 263, 287, 291, 308).
- H. J. Carlin y P. P. Civalieri, *Wideband Circuit Design*, ép. Electronic Engineering Systems Series. CRC Press, 1998 (vid. págs. 41, 244, 256).
- A. B. Carlson y P. B. Crilly, *Communication Systems. An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*, 5.^a ed. New York: McGraw-Hill, 2010 (vid. págs. 43, 44).
- S. B. Cohn, «Direct-coupled-resonator filters», *Proceedings of the IRE*, vol. 45, n.º 2, págs. 187-196, feb. de 1957 (vid. págs. 208, 229, 269, 270, 297).
- R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2.^a ed., ép. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. New York: John Wiley & Sons, 1992 (vid. pág. 225).
- R. W. Daniels, *Approximation Methods for Electronic Filter Design. With Applications to Passive, Active, and Digital Networks*. McGraw-Hill, 1974 (vid. pág. 107).
- S. Darlington, «Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics», *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 18, n.º 4, págs. 257-353, 1939 (vid. págs. 32, 166, 175).
- , «A history of network synthesis and filter theory for circuits composed of resistors, inductors, and capacitors», *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 46, n.º 1, págs. 4-13, ene. de 1999 (vid. págs. 11, 13, 101).

- M. D. Fagen, A. E. Joel, E. F. O'Neil y G. E. Schindler, *A History of Engineering and Science in the Bell System: Transmission Technology (1925-1975)*. AT & T Bell Laboratories, 1975, vol. 7 (vid. pág. 200).
- R. M. Foster, «A reactance theorem», *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 3, págs. 259-267, 1924 (vid. págs. 157, 353).
- A. I. Grayzel, «A synthesis procedure for transmission line networks», *IRE transactions on circuit theory*, vol. 5, n.º 3, págs. 172-181, sep. de 1958 (vid. pág. 255).
- E. A. Guillemin, *The Mathematics of Circuit Analysis*, ép. Principles of Electrical Engineering Series. New York: John Wiley & Sons, 1949 (vid. pág. 342).
- I. Hunter, *Theory and Design of Microwave Filters*, ép. IEE Electromagnetic Waves Series. Stevenage, UK: The Institution of Electrical Engineers, 2001, vol. 48 (vid. pág. 257).
- F. F. Kuo, *Network Analysis and Synthesis*, 2.ª ed. Wiley, 1966 (vid. pág. 87).
- R. Levy, «Tables of element values for the distributed low-pass prototype filter», *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 13, n.º 5, págs. 514-536, sep. de 1965 (vid. pág. 263).
- , «A generalized design technique for practical distributed reciprocal ladder networks», *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 21, n.º 8, págs. 519-526, ago. de 1973 (vid. pág. 208).
- N. Marcuvitz, *Waveguide handbook*, ép. IEE Electromagnetic Waves series. Stevenage, UK: Peter Peregrinus Ltd., 1986, vol. 21 (vid. págs. 232, 233, 279).
- G. L. Matthaei, L. Young y E. M. T. Jones, *Microwave filters, impedance matching networks, and coupling structures*. New Jersey: Artech House, 1980 (vid. págs. 171, 219, 232, 269, 275, 278, 297).
- K. A. Milton y J. S. Schwinger, *Electromagnetic Radiation: Variational Methods, Waveguides and Accelerators*, ép. Particle Acceleration and Detection series. Springer, 2006 (vid. pág. 233).
- N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 6.ª ed. Wiley, 2010 (vid. pág. 302).
- E. L. Norton, «Constant resistance networks with applications to filter groups», *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 16, págs. 178-193, abr. de 1937 (vid. pág. 200).
- F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert y C. W. Clark, eds., *NIST Handbook of Mathematical Functions*. New York: Cambridge University Press, 2010 (vid. págs. 119, 120, 313, 322, 331, 332).
- A. Oppenheim, A. S. Willsky y S. Hamid, *Signals and Systems*, 2.ª ed. Prentice Hall, 1996 (vid. pág. 1).
- H. J. Orchard, «Formulae for ladder filters», *Wireless Engineer*, vol. 30, págs. 3-5, ene. de 1953 (vid. pág. 169).
- H. J. Orchard y G. C. Temes, «Filter design using transformed variables», *Circuit Theory, IEEE Transactions on*, vol. 15, n.º 4, págs. 385-408, 1968 (vid. pág. 133).

- H. J. Orchard y J. Willson A. N., «Elliptic functions for filter design», *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, *IEEE Transactions on*, vol. 44, n.º 4, págs. 273-287, abr. de 1997 (vid. pág. 108).
- L. D. Paarmann, *Design and Analysis of Analog Filters. A Signal Processing Perspective*. Kluwer Academic Publishers, 2001 (vid. págs. 12, 25, 28, 84, 85, 89).
- R. E. A. C. Paley y N. Wiener, «Notes on the theory and application of fourier transforms. I-II», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 35, págs. 348-355, 1933 (vid. pág. 51).
- , *Fourier Transforms in the Complex Domain*. American Mathematical Society Colloquium Publication, 1934, vol. 19 (vid. pág. 51).
- A. Papoulis, «Frequency transformations in filter design», *Circuit Theory, IRE Transactions on*, vol. 3, n.º 2, págs. 140-144, 1956 (vid. pág. 157).
- , «Optimum filters with monotonic response», *Proceedings of the IRE*, vol. 46, n.º 3, págs. 606-609, mar. de 1958 (vid. pág. 87).
- , *The Fourier Integral and Its Applications*, ép. Electronic Sciences Series. McGraw-Hill, 1962 (vid. págs. 41, 45, 46, 51).
- V. Parra, *Teoría de Circuitos*. UNED, 1991, vol. 1 (vid. pág. 1).
- , *Teoría de Circuitos*. UNED, 1991, vol. 2 (vid. pág. 1).
- D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4.^a ed. John Wiley & Sons, 2011 (vid. pág. 56).
- L. R. Rabiner y B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1975 (vid. pág. 81).
- J. D. Rhodes, *Theory of Electrical Filters*. John Wiley & Sons, 1976 (vid. págs. 48, 89).
- J. D. Rhodes y S. A. Alseyab, «The generalized chebyshev low-pass prototype filter», *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 8, n.º 2, págs. 113-125, 1980 (vid. pág. 133).
- P. I. Richards, «A special class of functions with positive real part in a half plane», *Duke Mathematical Journal*, vol. 14, págs. 777-786, 1947 (vid. pág. 254).
- , «Resistor-transmission-line circuits», *Proceedings of the IRE*, vol. 36, n.º 2, págs. 217-220, feb. de 1948 (vid. págs. 242, 253).
- R. Schaumann, M. S. Ghausi y K. R. Laker, *Design of Analog Filters: Passive, Active RC and Switched Capacitors*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1990 (vid. pág. 181).
- R. Schaumann y M. E. Van Valkenburg, *Design of Analog Filters*. New York: Oxford University Press, 2001 (vid. págs. 36, 165).
- S. Seshu y N. Balabanian, «Transformations of positive real functions», *IRE transactions on circuit theory*, vol. 4, n.º 4, págs. 306-312, dic. de 1957 (vid. pág. 266).

- L. Storch, «Synthesis of constant-time-delay ladder networks using Bessel polynomials», *Proceedings of the IRE*, vol. 42, n.º 11, págs. 1666-1675, nov. de 1954 (vid. [pág. 79](#)).
- W. E. Thomson, «Delay networks having maximally flat frequency characteristics», *Proceedings of the IEE - Part III: Radio and Communication Engineering*, vol. 96, n.º 44, págs. 487-490, nov. de 1949 (vid. [pág. 77](#)).
- M. E. Van Valkenburg, *Introduction to Modern Network Synthesis*. John Wiley & Sons, 1960 (vid. págs. [23](#), [157](#), [164](#), [269](#), [300](#), [343](#), [345](#)).
- O. Wing, *Classical Circuit Theory*. New York: Springer, 2008 (vid. págs. [31](#), [164](#), [337](#), [345](#), [352](#)).
- A. I. Zverev, *Handbook of Filter Synthesis*. New Jersey: Wiley-Interscience, 2005 (vid. págs. [36](#), [37](#)).

Índice Alfabético

ángulo modular, 113

AGM, 315

amplitud delta, 316

amplitud elíptica, 116, 313

banda

 ancho de, 4

 ancho de (fraccional), 4

 atenuada, 4

 de paso, 3

 de transición, 4

Belevitch, Vitold, 202

Bessel-Thompson (filtro), 76

Brune, Otto, 339

Butterworth (filtro), 61

Butterworth generalizado (filtro), 94

Butterworth, Stephen, 61

Cauer (filtro), 101

Cauer, Wilhelm, 101, 320

Chebyshev (filtro), 67

Chebyshev generalizado (filtro), 132

Chebyshev inverso (filtro), 94

Chebyshev, Pafnuty Lvovich, 68

Cohn, Seymour, 296

coseno elíptico, 116, 316

Darlington, Sidney, 11

discriminación, 36

elemento unitario (UE), 242

enrutado (diagrama), 280

ensignant, 176

escalado, 146

fase, 16

filtro

 asíncronamente sintonizado,
 285

 banda-eliminada, 5

 Bessel-Thompson, 76

 Butterworth, 61

 Butterworth generalizado, 94

 canónico, 34

 características, 3

 Chebyshev, 67

 Chebyshev generalizado, 132

 Chebyshev inverso, 94

 distribuido, 237

 elíptico, 101

 gausiano, 85

 ideal, 16

 Legendre, 86

 múltiplemente acoplado, 281

 Papoulis, 87

 paso-alto, 4

 paso-bajo, 4

 paso-banda, 5

 paso-todo, 5, 53

 síncronamente sintonizado, 271

 todo-polos, 34, 60

forma

 factor de, 24

Foster, Ronald, 353

- frecuencia
 - central, 4
 - de corte, 4
- función
 - característica, 36
 - elíptica, 107
 - Jacobiana, 110
 - positiva, 189
 - positiva real, 339
 - reactancia, 348
- Hurwitz
 - criterio de, 299
 - polinomios de, 22
- Hurwitz, Adolf, 22
- inducción mutua, 272
- integral elíptica
 - completa, 314
 - incompleta, 313
- inversor, 208
- Kuroda (identidades), 249
- Landen (transformación), 118
- Landen, John, 316
- módulo, 16
 - elíptico, 113, 313
 - elíptico complementario, 113, 313
- Marcuvitz, Nathan, 232
- matriz
 - ABCD, 216
 - de acoplamiento, 283
 - de admitancias, 173
 - de impedancias, 173
- media aritmético-geométrica, 315
- Norton, Edward, 199
- overshoot, 26
- pérdidas
 - de inserción, 11, 102
 - de retorno, 11, 33, 102
- Papoulis, Athanasios, 87
- parámetro de inclinación
 - de la reactancia, 275
 - de la susceptancia, 275
- paraconjugación, 28
- polinomio
 - de Chebyshev, 68
 - de Lommel, 79
 - inverso de Bessel, 80
 - mónico, 33
- red en escalera, 164
- retardo de fase, 16
- retardo de grupo, 16
- Richards
 - teorema, 254
 - transformación, 243
- roll-off, 67, 76
- síntesis, 163
- sección
 - en Π , 360
 - en T , 361
- selectividad, 24
- seno elíptico, 116, 316
- sensibilidad, 165
- Tellegen, Bernard, 337
- tiempo
 - de establecimiento, 26
 - de subida, 25
- topologías, 291
- Zobel, Otto, 353