$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & E[X] \\ & \text{f.dp (fmp)} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\ X \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & V[X] \\ & \text{f.d.a } (F(x)) & \end{tikzcd}$$

Estadística I

Distribuciones de Probabilidad

Algunos experimentos a pesar de ser realizados con objetos o unidades totalmente diferentes, tienen en esencia las mismas características; por ejemplo, de la misma forma que un ingeniero de producción está interesado en el número de defectuosos de una línea de producción, un médico está interesado en el número de personas que reaccionan favorablemente con un cierto tratamiento.

Los tiempos de espera en una ventanilla de un hospital se pueden representar con un modelo que también se puede usar para estudiar los tiempos de duración de por ejemplo unos componentes eléctricos.

X

fn densidad o masa

fn distn Acumulada.

$F(x) = P[X \le x]$

$E[X]$

$V[X]$

Distribución Binomial

Algunas de las distribuciones de probabilidad discretas más usadas, se basan en un tipo especial de experimento aleatorio, donde el resultado es la ocurrencia o no ocurrencia de un evento de interés; por ejemplo, el resultado de un tratamiento aplicado a un paciente puede ser favorable o no.

Distribución Binomial

Las distribuciones binomiales son las más útiles dentro de las distribuciones de probabilidad discretas. Sus áreas de aplicación incluyen inspección de calidad, ventas, mercadotecnia, medicina, investigación de opiniones, entre otras. Estas distribuciones permiten enfrentar circunstancias en las que los resultados pertenecen a dos categorías relevantes: que ocurra un evento determinado o que no lo haga. Este tipo de experimento aleatorio particular es denominado ***ensayo Bernoulli***. Sus dos resultados posibles son denotados por "éxito" y "fracaso", se denota por p la probabilidad de un éxito y $1 - p$ la probabilidad de un fracaso.

Distribución Binomial

En general, un experimento aleatorio que consiste de n ensayos repetidos tales que:

✓ Los ensayos son independientes

✓Cada ensayo es de tipo Bernoulli. Esto es, tiene sólo dos resultados posibles: *"éxito"* o *"fracaso"*.

✓La probabilidad de éxito de cada ensayo, denotada por p, permanece constante.

recibe el nombre de **experimento binomial**.

E_1 E_2 $\overset{S}{\uparrow}$

$P(\text{"e"}) = \frac{1}{2}$ | $P(C_2 | C_1) = \frac{1}{2}$ | $P(C_3 | \sim) = \frac{1}{2}$.

Distribución Binomial

La variable aleatoria X, de un experimento binomial, corresponde al número de éxitos en los n ensayos Bernoulli. Decimos que X tiene una **distribución binomial** con parámetros p y n y su función de probabilidad es:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,2,\ldots n$$

Se denotará $X\sim Bin(n,p)$. Su media y varianza están dadas por:

$\boxed{E[X]=n*p}$; $\boxed{Var[X]=n*p*(1-p)}$

Distribución Binomial

Ejemplo:

Un examen de opción múltiple contiene 10 preguntas. Cada pregunta tiene cuatro opciones de las cuales solo una es la correcta. El examen se aprueba si se responden correctamente al menos seis preguntas. Si el estudiante responde al azar las preguntas:

1.¿ Cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

2. Si el estudiante adivina al menos tres de las preguntas, ¿ Cuál es la probabilidad de reprobar el examen?

3.Halle $E[X]$ y $Var[X]$.

X: # preguntas que se responden correctamente.

$n = 10 \quad p = \frac{1}{4}$

la f.mp está dada por: $P(x) = \binom{10}{x} (1/4)^{x} (3/4)^{10-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 10$

Distribución Binomial

Solución.

Sea X : número de preguntas que se responden de forma correcta. Los posibles valores que toma X son: $\{0,1,2,\ldots,10\}$, *éxito* :cuando se responde la pregunta de forma correcta. $P(\acute{e}xito) = \dfrac{1}{4}$.

$X \sim bin\,(n=10,\ p=1/4)$

Podemos asumir que $X \sim b\left(n = 10, p = \dfrac{1}{4}\right)$. Luego su f.m.p es:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{10}{x}(1/4)^x(3/4)^{10-x} & ;x = 0, 1, \ldots, 10 \\ 0 & ;\text{e.o.c.} \end{cases}$$

Distribución Binomial

> dbinom $(\overset{6}{x}, \overset{10}{n}, \overset{1/4}{p})$

> sum(dl

Solución.

1.¿ Cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

Sabemos que el examen se aprueban si se responde correctamente al menos 6 preguntas.

$\rightarrow \binom{10}{6}(1/4)^6(3/4)^4$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 6) &= P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10) \\
&= \boxed{0{,}0162}+0{,}0031+0{,}0004+0{,}00002861+0{,}00000095 \\
&= 0{,}01973
\end{aligned}
$$

Distribución Binomial

Solución.

2. Si el estudiante adivina al menos tres de las preguntas, ¿ Cuál es la probabilidad de reprobar el examen?

$$P(X<6|X\geq 3)=\frac{P(3\leq X<6)}{P(X\geq 3)}$$

$$=\frac{P(3\leq X\leq 5)}{1-P(X\leq 2)} = \frac{\sum_{x=3}^{5} P(x)}{1-\sum_{x=0}^{2} P(x)}$$

$$=0,9585$$

Distribución Binomial

Solución.

3. $E[X]$ y $V[X]$

$$E[X] = np = 10\left(\frac{1}{4}\right) = 2{,}5$$

$$Var[X] = np(1-p) = 10\left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) = 1{,}875$$

Distribución Binomial

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \text{falla} & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Ejercicio.

La probabilidad de que un futbolista profesional haga gol de tiro libre es del 70%. En un entrenamiento, este futbolista hace 14 tiros libres.

- Calcule la probabilidad de que éste haga por lo menos 7 goles.
- Calcule la probabilidad de que falle entre 3 y 6 tiros inclusive.
- Calcule la probabilidad de que no haga ningún gol.
- Calcule la probabilidad de que en todos sus tiros él acierte.
- Calcule el promedio de goles esperados.

$P(3 \leq \text{falle} \leq 6)$

$= P(8 \leq X \leq 11)$

1. X : # goles en los 14 tiros.

$n = 14$, $P = 0.7$

luego la f.m.p: $P(x) = \begin{cases} \binom{14}{x}(0.7)^{x}(0.3)^{14-x}, & x = 0, \dots, 14 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$

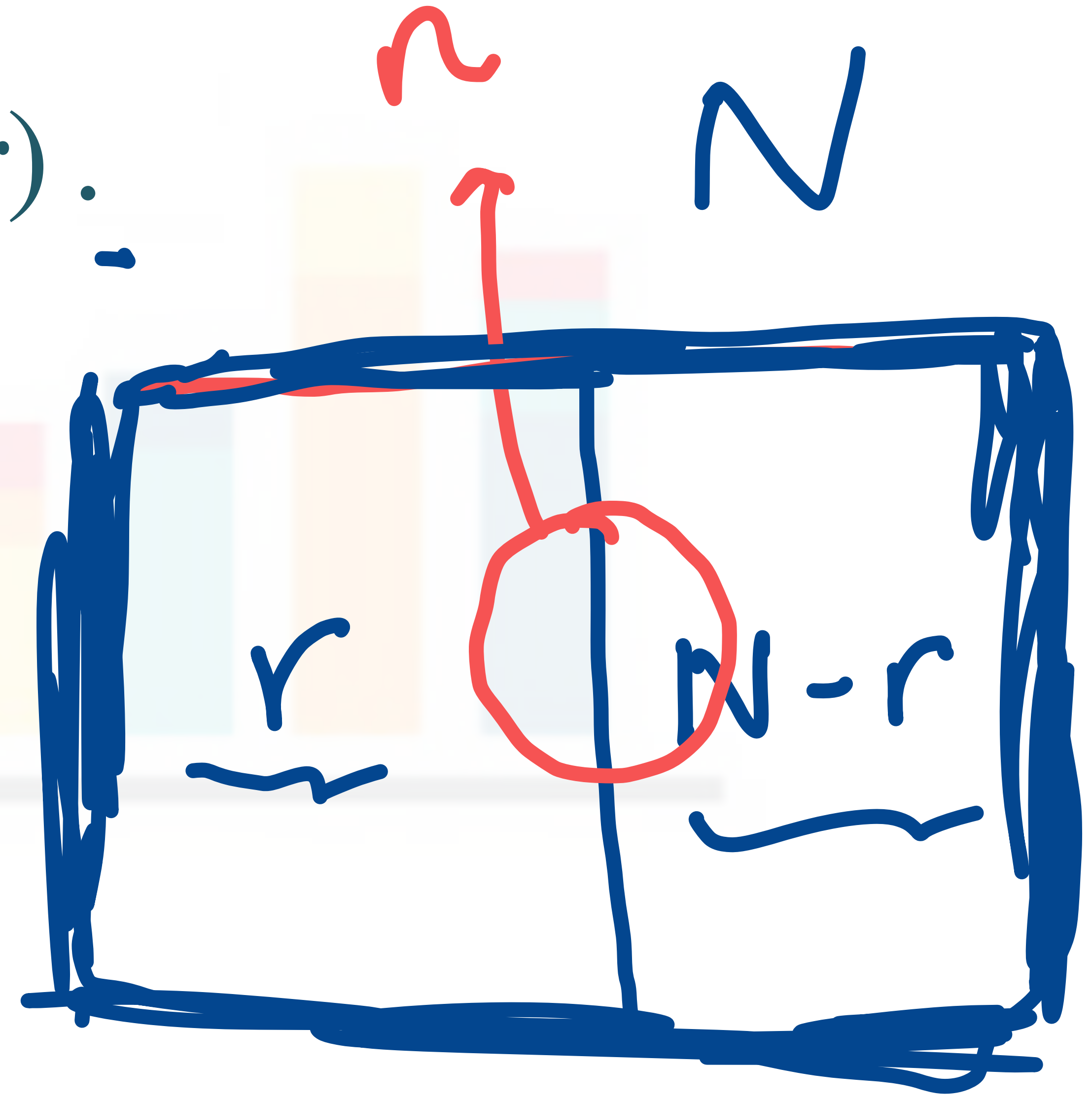
Distribución Binomial

Distribución Binomial

Distribución Hipergeométrica

Suponga que una población finita tiene N elementos, cada uno de los cuales posee una de dos características, éxito o fracaso. Suponga que r de ellos se consideran éxitos y $N-r$ fracasos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño n **sin reemplazo** de estos elementos. Considere la variable aleatoria X : *número de éxitos en la muestra de tamaño n*, entonces la función de masa de probabilidad de la v.a X está dada por:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}; \quad x = 0,1,2,\ldots,\min(n,r).$$



Se denotará $X \sim hiper(N, r, n)$.

$$E[X] = n\overset{p}{\frac{r}{N}} \;;\; Var[X] = n\overset{p}{\frac{r}{N}} * \overbrace{\left(1-\frac{r}{N}\right)}^{1-p} * \boxed{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

Distribución Hipergeométrica

Primer Teorema de Aproximación:

Sea $X \sim hiper(N, r, n)$, si $n << N$ (esto es $n/N < 0.1$), entonces $X \sim_{aprox} Bin(n, p)$

donde $p = \dfrac{r}{N}$.

Distribución Hipergeométrica

$N = 800, \quad r = 8, \quad n = 20$

Ejemplo:

Un gran distribuidor tiene 800 equipos de cómputo, se sabe que 8 de ellos son defectuosos. Una compañía compra 20 de estos equipos y le son despachados al azar ¿cuál es la probabilidad de que en la muestra, se observen dos o más defectuosos?

X : # de defectuosos en la muestra de 20.

luego, la f.m.p de X es :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{8}{x}\binom{800-8}{20-x}}{\binom{800}{20}} & ; \ x = 0, 1, \dots, 8 \\ 0 & ; \ e.o.c \end{cases}$$

Distribución Hipergeométrica

dhyper(x, n, N, r)

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{8} p(x)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 0.014502$$

Como $\frac{n}{N} = 0.025 < 0.1$,

$$X \overset{aprox}{\sim} B\left(n = 20, p = \frac{8}{800} = 0.01\right)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 0.01685$$

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; x = 0, \ldots, n \\ 0 & ; \text{e.o.c} \end{cases}$$

$n \to 20$, $p \to 0.01$, $n \to 20$

Distribución Hipergeométrica

Ejemplo:

Una compañía recibe un lote de 1000 unidades y decide inspeccionar aleatoriamente 10 unidades para decidir si acepta o no dicho lote. Si la compañía no encuentra ninguna unidad defectuosa entre las inspeccionadas, aceptan el lote, de otro modo rechazan el lote para que sea revisado en su totalidad por los productores. Si se sabe que el lote contiene un 5% de unidades defectuosas:

- Determine la probabilidad de aceptar el lote, usando la distribución hipergeométrica.
- Aproximar la respuesta usando la distribución binomial.

$N = 1000$

$n = 10$

$r = 1000 * 5\% = 50$

X : # unidades en la muestra

Distribución Hipergeométrica

$X \sim hiper(N=1000, n=10, r=50)$, luego la f.m.p de X

$$p(x) = \frac{\binom{50}{x}\binom{950}{10-x}}{\binom{1000}{10}} \; ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots 10$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{50}{0}\binom{950}{10}}{\binom{1000}{10}} = 0.6$$

como $\frac{n}{N} = \frac{10}{1000} = 0.01 < 0.1$

$X \overset{aprox}{\sim} B\left(n=10, p=\frac{50}{1000}=0.05\right)$

$$P(X=0) = \binom{10}{0}(0.05)^{0}(0.95)^{10}$$

$= 0.5987$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} \; ; \quad x = 0, \ldots, n$$

Gracias

Clase preparada por: Verónica Guarín