UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Estadística I

Método de Máxima Verosimilitud

Uno de los mejores métodos para obtener para obtener un estimador puntual de un parámetro es el método de máxima verosimilitud. Este método consiste en obtener el valor de (entre todos los posibles) que haga más verosímil (más probable) un resultado observado.

Si la distribución de interés está completamente determinada por un número finito de parámetros, es posible estimarlos usando el **método de máxima verosimilitud o máxima Probabilidad.**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Método de Máxima Verosimilitud

Ilustración del método:

Suponga que en un año se presentaron dos grandes inundaciones en determinada región. Suponga que la v.a X cuenta el número de inundaciones al año. Así, $X \sim P(\lambda)$, con λ desconocido. La idea es encontrar el valor de $\hat{\lambda}$ teniendo en cuenta la información (datos), en este caso, tenemos la observación $X = 2$. Una forma es encontrar $\hat{\lambda}$ de tal forma que $P(X = 2)$ sea máxima.

Método de Máxima Verosimilitud

Ilustración del método:

$X \sim P(\lambda)$. $\hat{\lambda} = ?$ de tal forma que $P(X=2)$ sea máxima.

$$P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$$

$$\frac{dP(X=2)}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[-e^{-\lambda}\lambda^2 + 2\lambda e^{-\lambda}\right] = 0$$

$$\lambda e^{-\lambda}[-\lambda + 2] = 0$$

$$\lambda e^{-\lambda}(2-\lambda) = 0$$

$$\boxed{\lambda = 2} \vee \cancel{\lambda = 0}$$

$$\frac{d^2P(X=2)}{d\lambda^2} = \frac{1}{2}\left[2e^{-\lambda} - 2\lambda e^{-\lambda} - 2\lambda e^{-\lambda} + \lambda^2 e^{-\lambda}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left[2 - 4\lambda + \lambda^2\right]$$

reemplazando por $\lambda = 2$:

$$= \frac{1}{2}e^{-2}\left[2 - 4*2 + 2^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2}[2 - 8 + 4]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2}(-2) = -e^{-2} < 0$$

$\lambda = 2$ es un máx. para $P(X=2)$

Método de Máxima Verosimilitud

Ilustración del método:

Estimador de Máxima Verosimilitud

Definición:

sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una población con función de probabilidad $f(x;\theta)$ con θ (θ puede ser un vector) desconocido. La **función de verosimilitud de la muestra**, se define como:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

El **estimador de máxima verosimilitud** de θ, denotado ***EMV*** o ***MLE*** será aquel valor de $\hat{\theta}$ que maximiza a $L(\theta)$

Estimador de Máxima Verosimilitud

Procedimiento para hallar los EMV:

1. Hallar la función de verosimilitud de θ, $L(\theta)$.
2. Hallar la función de log-verosimilitud de θ, $l(\theta) = \ln\big(L(\theta)\big)$.
3. Aplicar el criterio de la primera derivada para encontrar los puntos críticos, es decir, encontrar los valores de θ tal que:

$$\left.\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

4. Verificar que estos puntos críticos son un máximo.

Estimador de Máxima Verosimilitud

Ejemplo:

sea $\underline{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ una muestra aleatoria de una distribución Poisson con parámetro λ desconocido. Halle el MLE para λ.

$P(x_i ; \lambda)$

Paso 1: Hallar $L(\lambda)$.

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \lambda)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_1}}{\underbrace{x_1!}} * \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_2}}{\underbrace{x_2!}} * \cdots * \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_n}}{\underbrace{x_n!}}$$

$$= \frac{[e^{-\lambda}]^n \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estimador de Máxima Verosimilitud

Paso 2: log. Verosimilitud

$$\ell(\lambda) = \ln[L(\lambda)]$$

$$= \ln\left[\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\right] = \ln\left[\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot e^{-n\lambda}\right] - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} x_i!\right]$$

$$= \ln\left[\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right] + \cancel{\ln}\left[\cancel{e}^{-n\lambda}\right] - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} x_i!\right]$$

$$= \overset{c}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \ln(\lambda) - n\lambda - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} x_i!\right]$$

Paso 3: Derivar:

$$\left.\frac{d\ell(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\hat{\lambda}} = 0$$

Estimador de Máxima Verosimilitud

$$\frac{d\,\ell(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\hat{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\lambda}} - n = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\lambda}} = n$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \hat{\lambda}} = \bar{X}$$

$$\boxed{\sigma^2}$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Paso 4: Segunda Derivada

Estimador de Máxima Verosimilitud

Ejemplo:

sea $X_1 = \boxed{0.5}$, $X_2 = 0.7$, $X_3 = 0.8$, $X_4 = 0.9$, $X_5 = 0.4$ una m.a de una población con función de densidad de probabilidad dada por:

$$\rightarrow f(x) = (k+1)x^k \quad ; \quad 0 < x < 1$$

Encuentre el EMV para $\theta = P\left(X < \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} (k+1)x^k \, dx = (k+1)\int_0^{1/4} x^k \, dx$

$$= \cancel{(k+1)} \cdot \left[\frac{x^{k+1}}{\cancel{k+1}}\right]\Big|_0^{1/4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$

$$\rightarrow \theta = P(X < 1/4) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estimador de Máxima Verosimilitud

Paso 1: Hallar $L(k)$: $\boxed{n=5}$

$$L(k)=\prod_{i=1}^{5} f(x_i;k) = \prod_{i=1}^{5}(k+1)x_i^k = \underbrace{(k+1)}\underbrace{x_1^k}\cdot\underbrace{(k+1)}\underbrace{x_2^k}\cdots\underbrace{(k+1)}\underbrace{x_5^k}$$

$$=(k+1)^5\prod_{i=1}^{5}x_i^k$$

Paso 2: Hallar $\ell(k)$

$$\ell(k)=\ln(L(k))$$

$$=\ln\left[(k+1)^5 * \prod_{i=1}^{5}x_i^k\right] = \ln\left[(k+1)^5\right] + \underbrace{\ln\left[\prod_{i=1}^{5}x_i^k\right]}$$

$$=5\ln(k+1)+\sum_{i=1}^{5}\ln(x_i^k) = \underbrace{5\ln(k+1)} + \underbrace{k\sum_{i=1}^{5}\ln(x_i)}_{c}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estimador de Máxima Verosimilitud

Paso 3: Derivar

$$\frac{d\ell(k)}{dk}\Big|_{\hat{k}} = 0$$

$$\boxed{\frac{5}{\hat{k}+1} + \sum_{i=1}^{5} \ln(x_i) = 0}$$

$$\frac{5}{\hat{k}+1} = -\sum_{i=1}^{5} \ln(x_i)$$

$$\hat{k}+1 = \frac{-5}{\sum_{i=1}^{5} \ln(x_i)}$$

$$\hat{k}+1 = -\frac{5}{\ln(0.5)+\ln(0.7)+\ln(0.8)+\ln(0.9)+\ln(0.4)}$$

$$= 2.179.$$

Así, el EMV para θ es:

$$\hat{\theta} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\hat{k}+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2.179} = 0.049$$

Estimador de Máxima Verosimilitud

Paso 4 : segunda derivada < 0.

Gracias

Clase preparada por: Verónica Guarín