UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estadística I

Pruebas de Hipótesis

Introducción:

En muchos problemas prácticos se requiere que se tomen decisiones basados en datos o información. Estas decisiones se basan en una proposición sobre un parámetro desconocido de la población, dicha proposición se conoce como **Hipótesis Estadística** y el procedimiento de toma de decisión sobre la hipótesis se conoce como **prueba de hipótesis**.

En otras palabras, una prueba de hipótesis estadística es una afirmación que se hace respecto a una o algunas características desconocidas de una población de interés. La afirmación involucra puede ser a algún parámetro o alguna forma funcional no conocida de la distribución de interés, la cual es evaluada con base en la información obtenida en una muestra representativa de dicha población. Este es uno de los aspectos más útiles de la inferencia estadística.

Pruebas de Hipótesis

Introducción:

Como la afirmación hecha acerca de las características de la población puede ser o no cierta, se plantean dos hipótesis que deben ser simultáneamente excluyentes, una se denomina **hipótesis nula** (la cual denotaremos como H_0) y la otra se denomina **hipótesis alternativa o alterna** (denotada como H_a o H_1).

Suponga que se tiene interés en el tiempo promedio necesario para terminar una unidad en una linea de armado. Bajo condiciones de operación estándar, el objetivo es tener un tiempo promedio de armado por unidad de 10 minutos. El gerente de la planta decide continuar el proceso a menos que se encuentre evidencia sustancial de que el tiempo promedio no es de 10 minutos.

Hipótesis nula: El proceso continúa si el valor promedio objetivo es de 10 minutos, Así:

$$\mu = 10 \rightarrow H_0$$

Hipótesis alterna: refleja el valor posible o intervalo de valores posibles si la hipótesis nula es falsa (negación de H_0)

$$\mu \neq 10 \rightarrow H_1$$

Pruebas de Hipótesis

Introducción:

Hipótesis nula: El proceso continúa si el valor promedio objetivo es de 10 minutos, Así:

$$\mu = 10 \rightarrow H_0$$

Hipótesis alterna: refleja el valor posible o intervalo de valores posibles si la hipótesis nula es falsa (negación de H_0)

$$\mu \neq 10 \rightarrow H_1$$

Si se rechaza H_0, implica que hay suficiente evidencia muestra para garantizar que la hipótesis nula no es cierta. En caso de no rechazar H_0, diremos que no hay suficiente evidencia muestra para rechazarla. La explicación a esta interpretación se muestra a continuación.

Pruebas de Hipótesis

Introducción:

Considere un proceso judicial, en el que hay que decidir si el acusado es inocente o culpable. Digamos que H_0 indica que es inocente y H_1 indica que es culpable. Se sabe que el acusado es inocente hasta que no se demuestre lo contrario

H_0: inocente. Vs H_1: culpable

El rechazo de H_0 implicaría que el juicio ha sido capaz de proporcionar suficiente evidencia para garantizar un veredicto de culpable.

Si el juicio no presenta evidencia sustancial para condenar al acusado, el veredicto será inocente; lo que no implica que lo sea.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

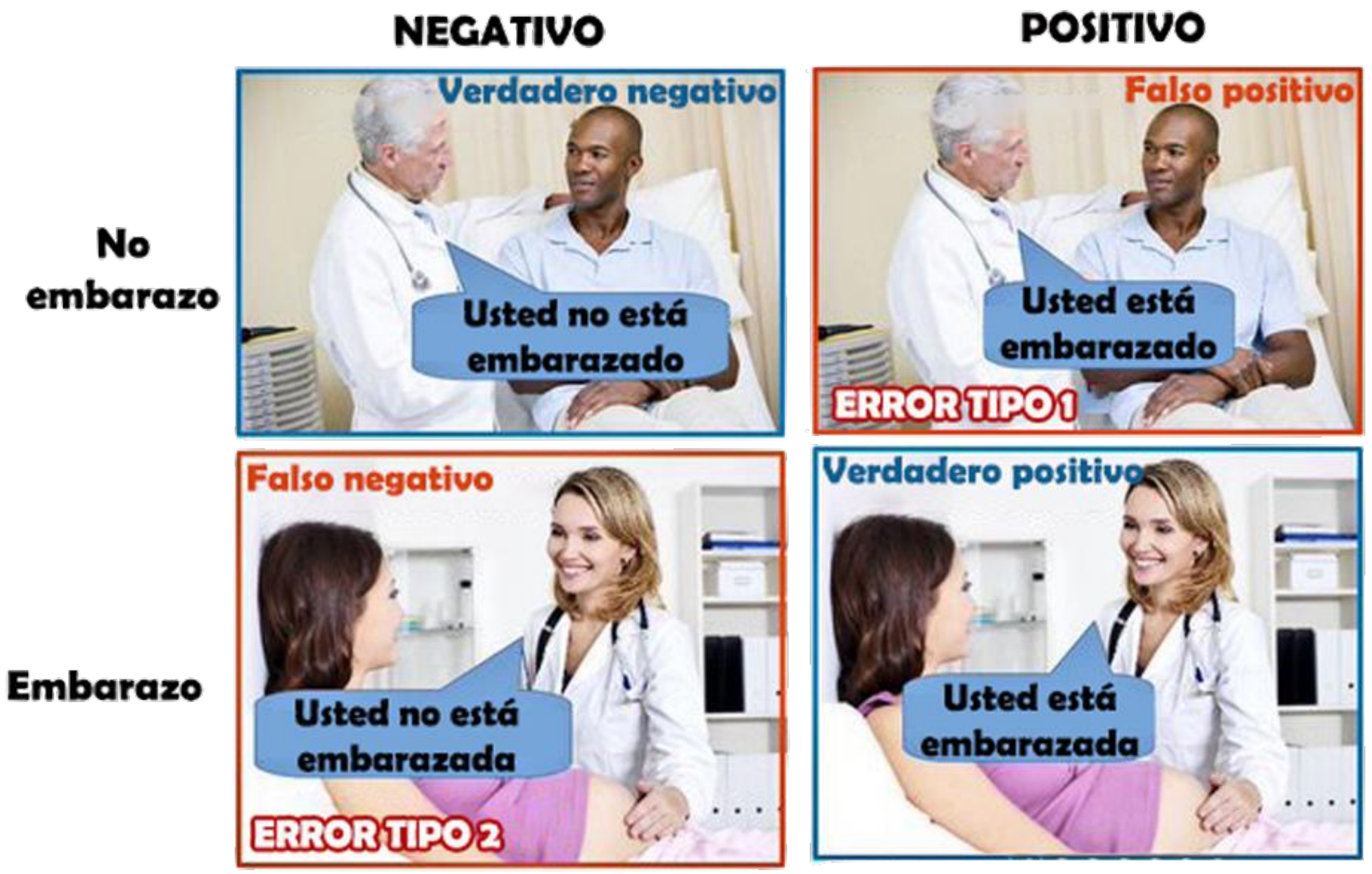
Pruebas de Hipótesis

Cuando se toma una decisión con respecto a una hipótesis nula, se pueden cometer dos tipos de errores: **Error tipo I** y **Error tipo II**

α

Rechazar H_0
- Cuando H_0 es cierta (error tipo I).
- Cuando H_0 es falsa.

No rechazar H_0
- Cuando H_0 es cierta.
- Cuando H_0 es falsa (error tipo II).



$1-\alpha =$

Tipos de errores

Error tipo I: Se define como el rechazo de la hipótesis nula H_0 cuando ésta es verdadera.

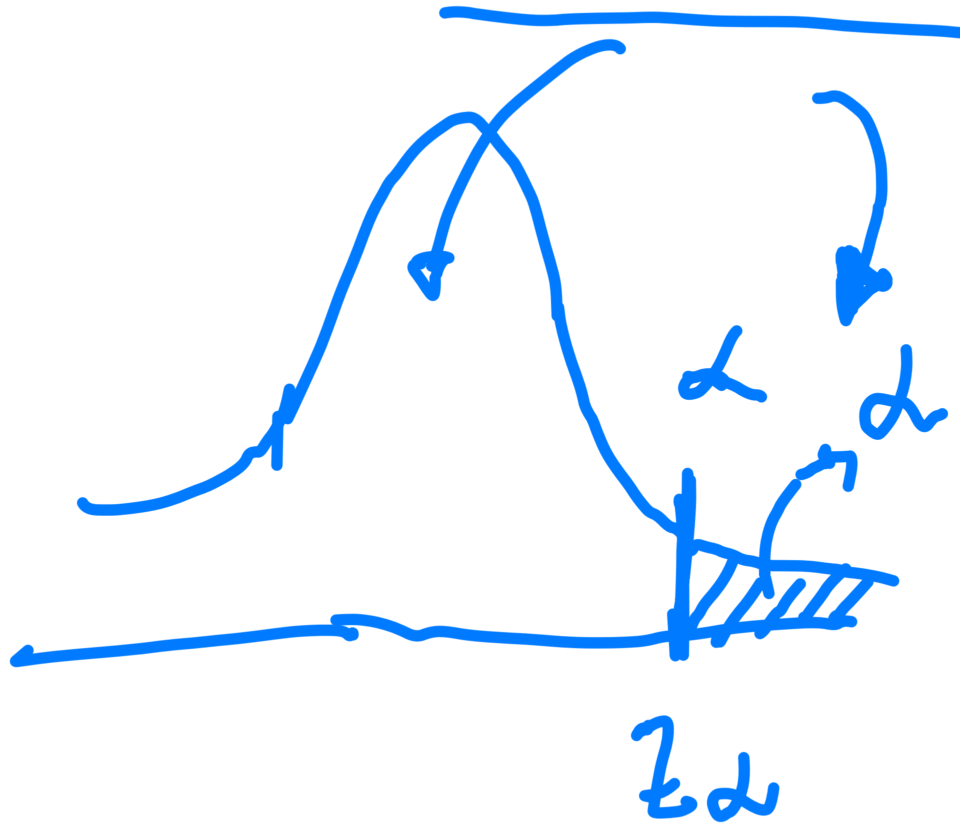
Error tipo II: Se define como el no rechazo de la hipótesis nula H_0 cuando ésta es falsa.

Definición: la probabilidad de rechazar H_0, dado que H_0 es cierta, se define como la probabilidad (o tamaño de la región crítica) del **error tipo I** y se denota por α $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Esto es:

$$P(\text{rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

α

α también se conoce como **el nivel de significancia estadística.**



Definición: la probabilidad de no rechazar H_0, dado que H_0 es falsa, se define como la probabilidad del **error tipo II** y se denota por β $(0 \leq \beta \leq 1)$. Esto es:

$$P(\text{no rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ falsa}) = \beta$$

$1 - \beta$ se conoce como la potencia de la prueba. Interesan pruebas con potencias altas.

Pruebas de hipótesis

Una prueba de hipótesis es una regla o procedimiento para decidir si se rechaza la hipótesis nula con base en una muestra aleatoria de la población. En otras palabras, es el proceso por medio del cual elegimos entre H_0 y H_1.

z_c

¿cómo decido si rechazo o no H_0?

1. Alguna estadística apropiada, llamada **estadística de prueba**. Para ciertos valores de la estadística de prueba, la decisión será rechazar o no una hipótesis con base en la información de una muestra aleatoria. Estos valores constituyen los que se conoce como la **región critica de la prueba**.

2. El **valor P** es el menor nivel de significancia, que corresponde a un valor observado de la estadística de prueba, en el cual la hipótesis nula podría haberse rechazado. En otras palabras, el valor P, es el mínimo nivel de significancia para el cual los datos indican que se debe rechazar H_0. **Se rechaza H_0 si Valor P <α**

Pruebas de hipótesis

Toda prueba de hipótesis debe tener:

1. Hipótesis nula: H_0.
2. Hipótesis alterna: H_1.
3. Estadístico de prueba.
4. Región crítica o región de rechazo.
5. Valor-P.

Pruebas de hipótesis

En general, sea θ un parámetro de interés desconocido y sea θ_0 un valor particular de θ, se pueden plantear las siguientes hipótesis:

1. $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$ → **Prueba de cola superior (o derecha)**

2. $H_0 : \theta \geq \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta < \theta_0$ → **Prueba de cola inferior (o izquierda)**

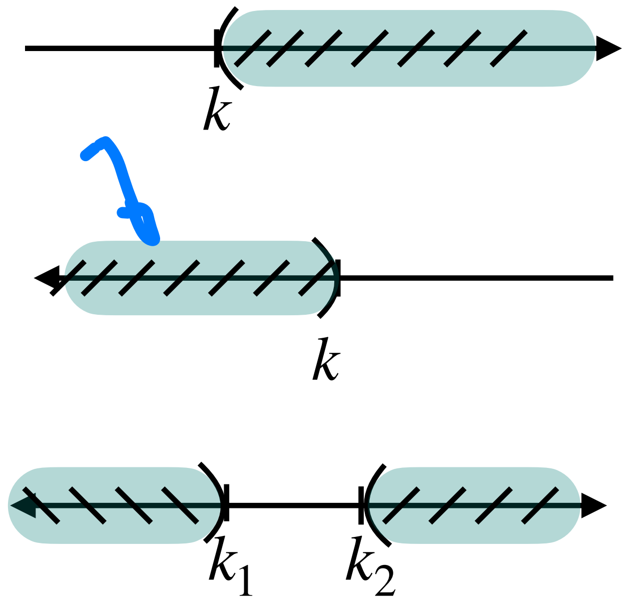
3. $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta \neq \theta_0$ → **Prueba de dos colas (o bilateral)**

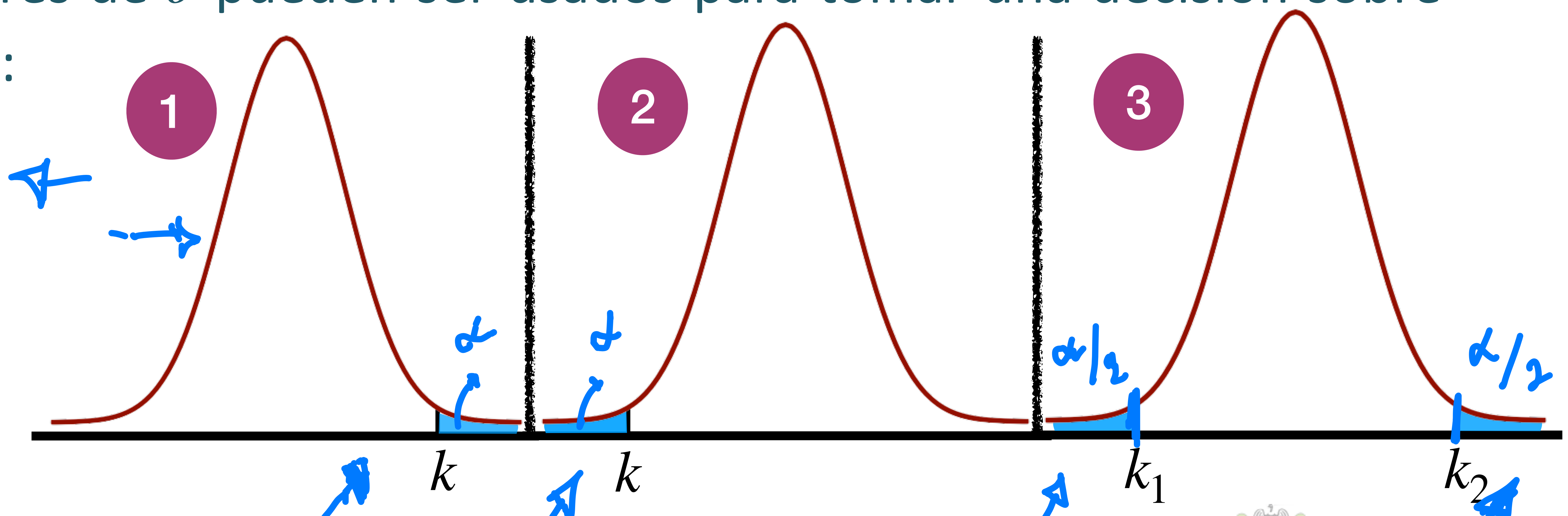
Si $\hat{\theta}$ es un estimador puntual de θ, los valores de $\hat{\theta}$ pueden ser usados para tomar una decisión sobre H_0. Las respectivas regiones de rechazo son:

1. $R_c : \{\hat{\theta} \,|\, \hat{\theta} > k\}$

2. $R_c : \{\hat{\theta} \,|\, \hat{\theta} < k\}$

3. $R_c : \{\hat{\theta} \,|\, \hat{\theta} < k_1 \vee \hat{\theta} > k_2\}$





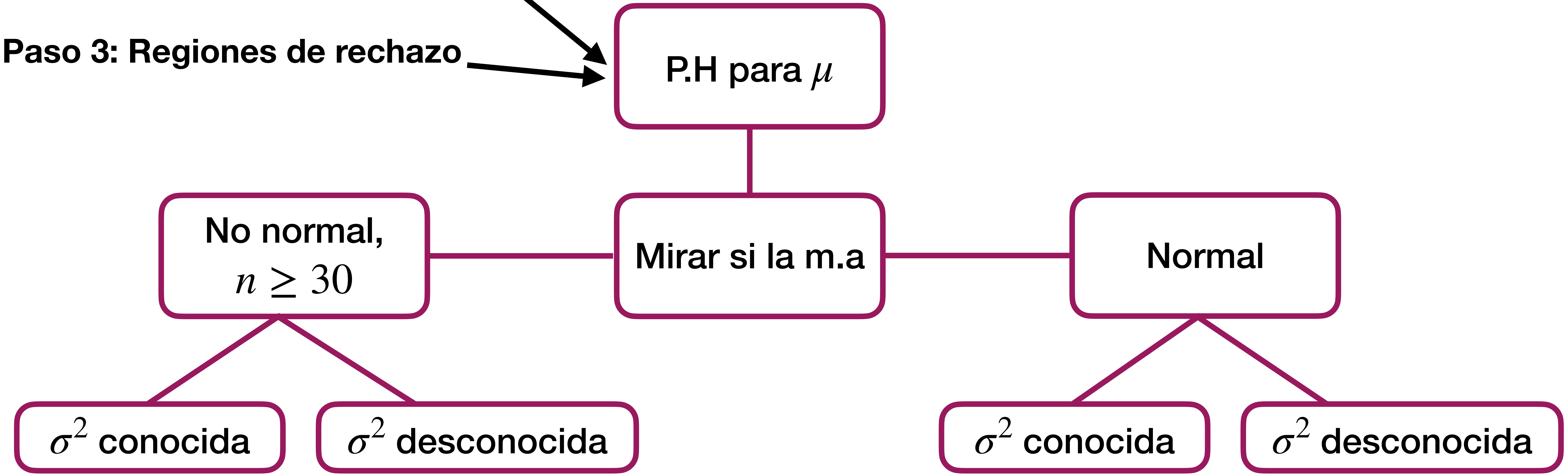
Pruebas de Hipótesis para μ

Paso 1: Hipótesis →

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu > \mu_0$
2. $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu < \mu_0$
3. $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Paso 2: Estadístico de prueba

Paso 3: Regiones de rechazo



Pruebas de Hipótesis para μ

Paso 2: Estadísticos de prueba.

Caso I: m.a de una población no normal con n grande ($n \geq 30$)

- Si σ^2 es conocida, el estadístico de prueba está dado por:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

- Si σ^2 es desconocida, el estadístico de prueba está dado por:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

Caso II: m.a de una población normal

- Si σ^2 es conocida, el estadístico de prueba está dado por:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

- Si σ^2 es desconocida, el estadístico de prueba está dado por:

$$T_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1} \text{ bajo } H_0$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Pruebas de Hipótesis para μ

Paso 1: Hipótesis

1. $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$
2. $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu < \mu_0$
3. $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$

Paso 2: Estadístico de prueba

P.H para μ

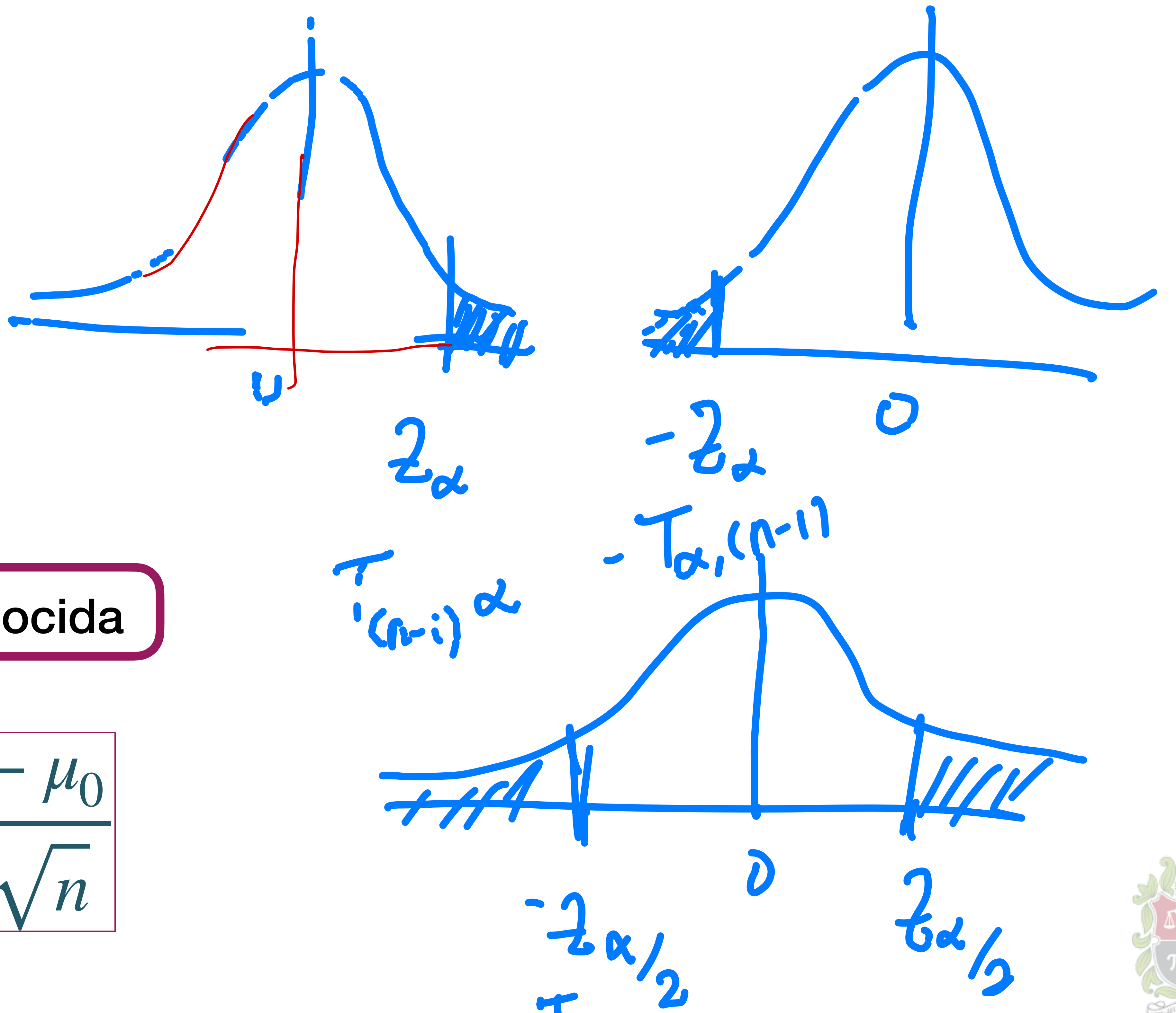
Mirar si la m.a

- No normal, $n \geq 30$
  - σ^2 conocida: $Z_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - σ^2 desconocida: $Z_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$
- Normal
  - σ^2 conocida: $Z_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - σ^2 desconocida: $T_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

Paso 3: Regiones de rechazo

1. $R_c: \{Z_c \mid Z_c > Z_\alpha\}$
2. $R_c: \{Z_c \mid Z_c < -Z_\alpha\}$
3. $R_c: \{Z_c \mid Z_c < -Z_{\alpha/2} \vee Z_c > Z_{\alpha/2}\}$

1. $R_c: \{T_c \mid T_c > t_{\alpha,n-1}\}$
2. $R_c: \{T_c \mid T_c < -t_{\alpha,n-1}\}$
3. $R_c: \{T_c \mid T_c < -t_{\alpha/2,n-1} \vee T_c > t_{\alpha/2,n-1}\}$



Pruebas de Hipótesis para μ

Valor -P

Es el mínimo nivel de significancia α, a partir del cual los datos observados indican que se debe rechazar H_0. También lo podemos definir como la probabilidad de equivocarse al rechazar H_0.

Valor-p
1. $VP = P(Z \geq Z_c)$
2. $VP = P(Z \leq Z_c)$
3. $VP = P(|Z| \geq |Z_c|)$

Valor-p
1. $VP = P(T_{n-1} \geq T_c)$
2. $VP = P(T_{n-1} \leq T_c)$
3. $VP = P(|T_{n-1}| \geq |T_c|)$

Pruebas de Hipótesis para μ

Rechazo H_0 si Z_c o $T_c \in R_c$

Paso 1: Hipótesis

1. $H_0: \mu = \mu_0$ **vs** $H_1: \mu > \mu_0$
2. $H_0: \mu = \mu_0$ **vs** $H_1: \mu < \mu_0$
3. $H_0: \mu = \mu_0$ **vs** $H_1: \mu \neq \mu_0$

Paso 2: Estadístico de prueba

I.C para μ

Mirar si la m.a

- No normal, $n \geq 30$
  - σ^2 conocida: $Z_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - σ^2 desconocida: $Z_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$
- Normal
  - σ^2 conocida: $Z_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - σ^2 desconocida: $T_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

Paso 3: Regiones de rechazo

1. $R_c: \{Z_c \mid Z_c > Z_\alpha\}$	**1.** $R_c: \{T_c \mid T_c > t_{\alpha,n-1}\}$
2. $R_c: \{Z_c \mid Z_c < -Z_\alpha\}$	**2.** $R_c: \{T_c \mid T_c < -t_{\alpha,n-1}\}$
3. $R_c: \{Z_c \mid Z_c < -Z_{\alpha/2} \vee Z_c > Z_{\alpha/2}\}$	**3.** $R_c: \{T_c \mid T_c < -t_{\alpha/2,n-1} \vee T_c > t_{\alpha/2,n-1}\}$

Paso 4: Valores p

1. $VP = P(Z \geq Z_c)$	**1.** $VP = P(T_{n-1} \geq T_c)$
2. $VP = P(Z \leq Z_c)$	**2.** $VP = P(T_{n-1} \leq T_c)$
3. $VP = P(\lvert Z \rvert \geq \lvert Z_c \rvert)$	**3.** $VP = P(\lvert T_{n-1} \rvert \geq \lvert T_c \rvert)$

Se rechaza H_0 si VP<α

Pruebas de Hipótesis

Ejemplo:

Se afirma que los ratones con una vida promedio de 32 meses pueden vivir incluso más de 40 meses cuando 40% de las calorías en su comida se reemplazan por vitaminas y proteínas, si 64 ratones que se sujetan a esta dieta tienen una vida promedio de 42 meses con una desviación estándar de 5.8 meses ¿Hay alguna razón para confirmar esta afirmación? Utilice un nivel de significancia del 0.025.

X: vida de los ratones (:) | μ: promedio de vida.

$n = 64$ (≥ 30), $\bar{X} = 42$, $S = 5.8$ $\quad \alpha = 0.025$

Paso 1: Hipótesis

$H_0: \mu \leq 40$ ($\mu = 40$) vs $H_1: \mu > 40$

μ_0

Pruebas de Hipótesis

Paso 2: Estadístico de prueba

$$Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{42-40}{5.8/\sqrt{64}} = 2.76$$

Paso 3: Región crítica o Región de rechazo

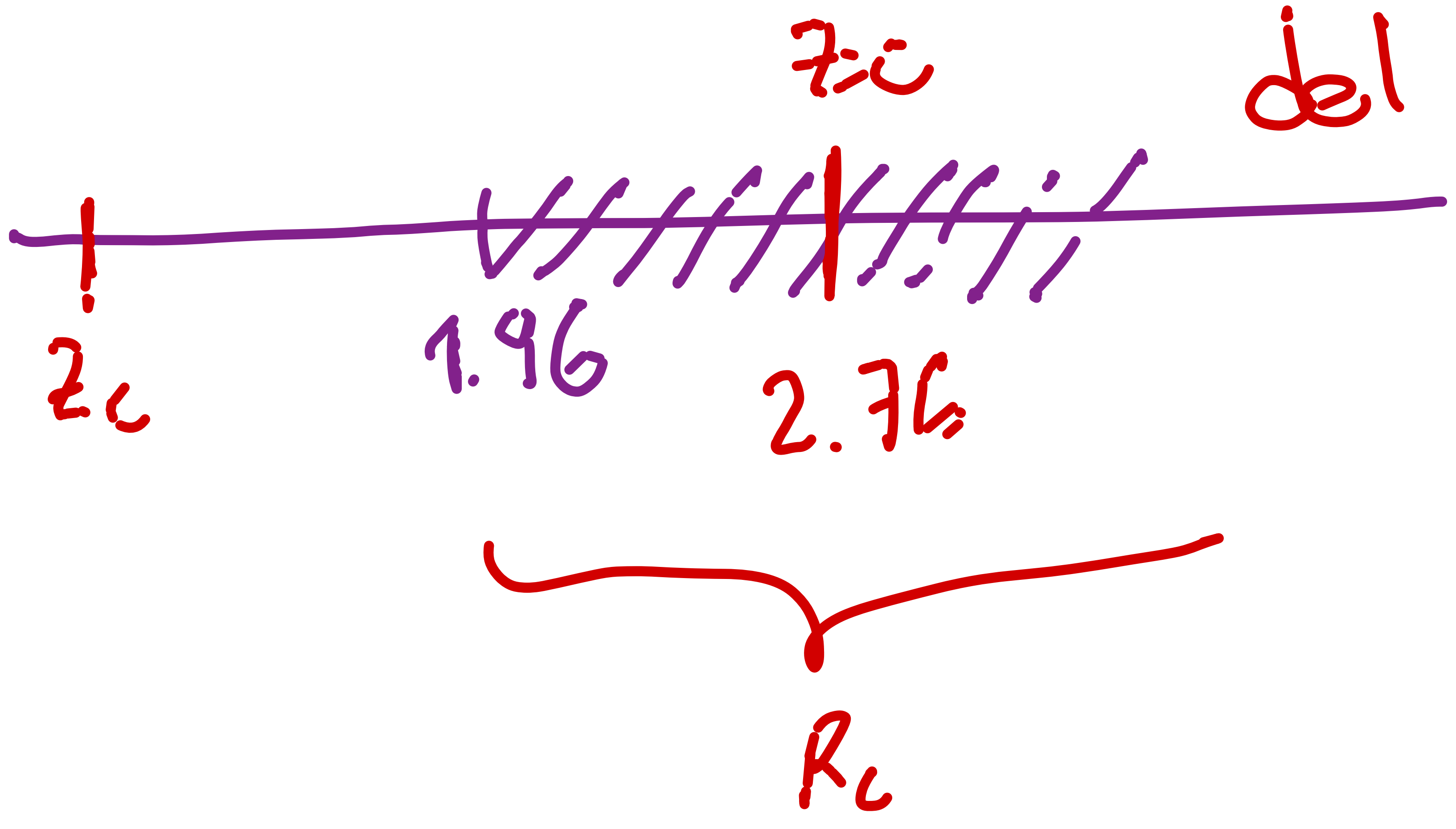
$$R_c = \{Z_c \mid Z_c > Z_\alpha\} = \{Z_c \mid Z_c > Z_{0.025}\} = \{Z_c \mid Z_c > 1.96\}$$

Paso 4: Valor P:

$$vp = P(Z > Z_c) = P(Z > 2.76)$$
$$= 1 - P(Z < 2.76)$$
$$= 0.00289 < \alpha = 0.025$$

Como $vp < \alpha$ rechazo Ho.

Con un nivel de significancia del 2.5% rechazamos Ho pues $Z_c \in R_c$



Pruebas de Hipótesis

Ejemplo:

El propietario de un automóvil sospecha que la distancia promedio por galón que ofrece su vehículo es inferior a la prometida por el concesionario, de 30 millas por galón. El propietario observa la distancia recorrida por galón en 9 ocasiones obtiene los siguientes datos: 28.3, 31.2, 29.4, 27.2, 30.8, 28.7, 29.2, 26.5, 28.1. Después de investigar concluye que la distancia por galón es una variable aleatoria normal con una desviación estándar conocida de 1.4 millas por galón.

(a) Con base en esta información ¿Se encuentra apoyada la sospecha del propietario con un $\alpha = 0.01$?

(b) Calcule el valor P de esta prueba.

(c) Repita los incisos (a) y (b) asumiendo varianza desconocida y compare los resultados.

X: Distancia recorrida por galón. $X \sim$ Normal.

$n = 9$ $\alpha = 0.01$ $\bar{x} = 28.82$

1) Hipótesis:

$H_0: \mu = 30$ vs $H_1: \mu < 30$

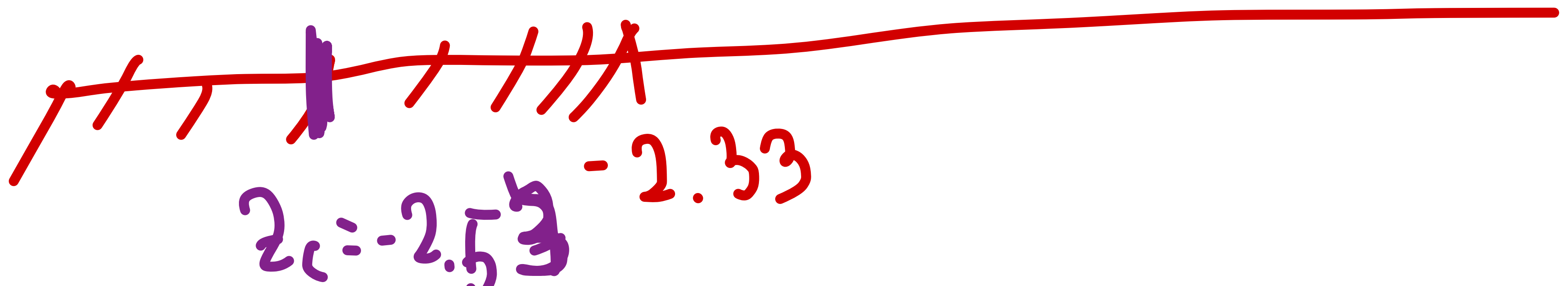
Pruebas de Hipótesis

- Paso 2: E.P

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{28.82 - 30}{1.4/\sqrt{9}} = -2.53$$

- Paso 3: R.R

$$R_c = \{Z_c \mid Z_c < -Z_\alpha\}$$
$$= \{Z_c \mid Z_c < -Z_{0.01}\}$$
$$= \{Z_c \mid Z_c < -2.33\}$$



Como $Z_c \in R_c$, se rechaza Ho usando $\alpha = 0.01$

Paso 4. VP:

$$VP = P(Z < Z_c) = P(Z < -2.53)$$
$$= 0.0057 \checkmark$$

Como $vp < 0.01$, se rechaza Ho.

Pruebas de Hipótesis

2) E.P:

Varianza Desconocida:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2} = 1.536$$

$$T_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{28.82-30}{1.536/\sqrt{9}} = -2.305.$$

3) R.R:

$$R_c : \{T_c \mid T_c < -t_{\alpha,(n-1)}\}$$

$$R_c = \{T_c \mid T_c < -t_{0.01,(8)}\}$$

$$= \{T_c \mid T_c < -2.896\}$$

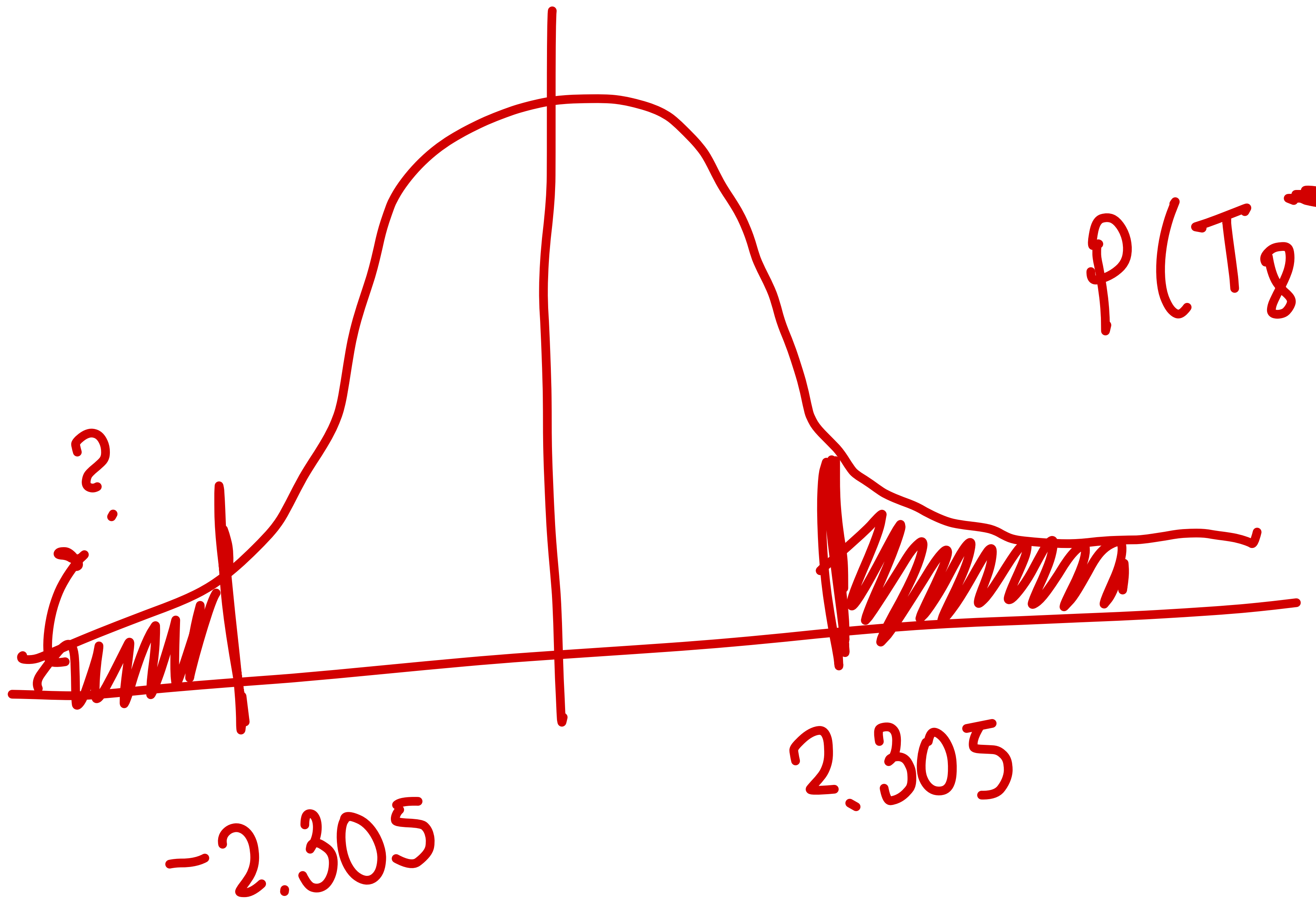
Como $T_c \notin R_c$, no se rechaza Ho usando $\alpha = 0.01$.

4) Valor-P:

$$VP = P(T_8 < -2.305) \approx 0.025 > 0.01$$

no rechazo Ho.

Pruebas de Hipótesis



$P(T_8 > 2.305) \approx 0.025$

Pruebas de Hipótesis

Ejemplo:

n

La calibración de una báscula tiene que ser verificada pesando 25 veces un espécimen de prueba de 10 kg. Suponga que los resultados de diferentes pesadas son independientes entre sí y que el peso de cada ensayo está normalmente distribuido con $\sigma = 0.2\ kg$. Sea μ la lectura del peso promedio verdadero en la báscula.

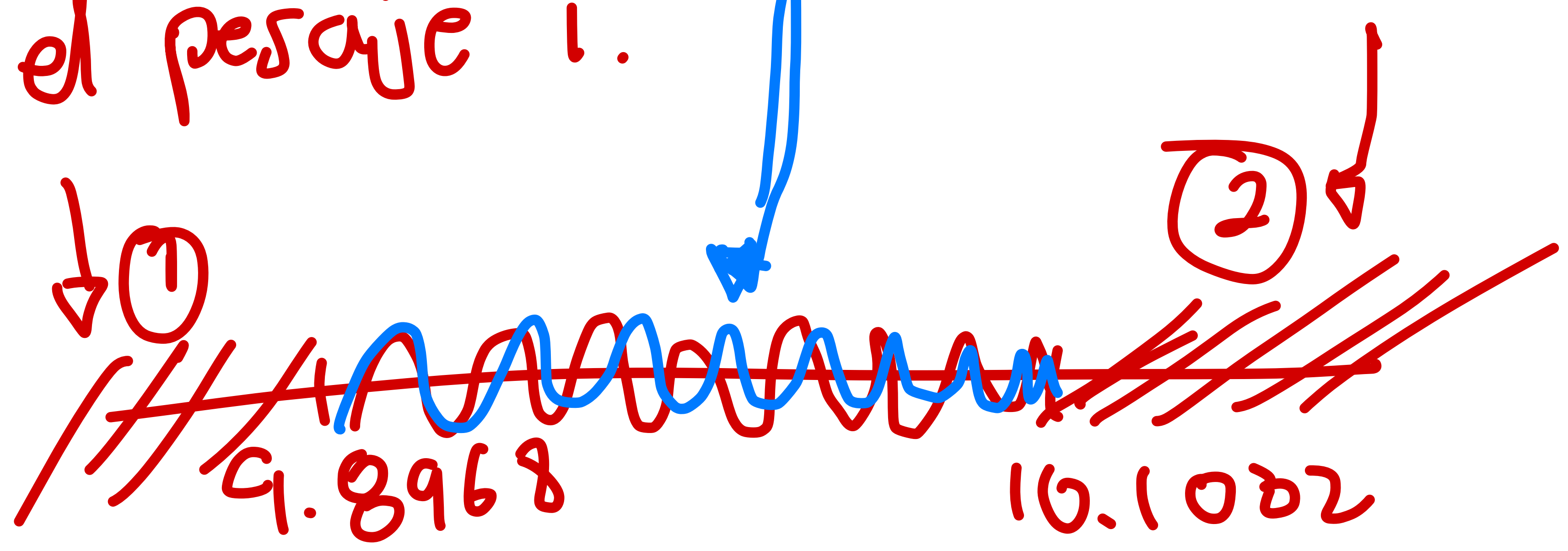
(a) ¿Qué hipótesis deberán ponerse a prueba? ✓

(b) Suponga que la báscula tendrá que ser recalibrada si $\bar{x} \geq 10.1032$ o $\bar{x} \leq 9.8968$. ¿Cuál es la probabilidad de que se realice la recalibración cuando en realidad no es necesaria?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la recalibración sea considerada innecesaria cuando en realidad μ=10.2?

X_i: peso obtenido en la báscula en el pesaje i.

$X_i \sim$ Normal



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Pruebas de Hipótesis

a) Hipótesis:

$H_0: \mu = 10$ vs $H_1: \mu \neq 10$

b) Si sugerimos esta región de rechazo:

$R_c = \{ \bar{x} \mid \bar{x} \geq 10.1032 \vee \bar{x} \leq 9.8968 \}$

$P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = P(\text{Error Tipo I})$

$= P(\bar{x} \leq 9.8968 \mid \mu = 10) + P(\bar{x} \geq 10.1032 \mid \mu = 10)$

$$= P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{9.8968 - 10}{0.2/\sqrt{25}} \right) + \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{10.1032 - 10}{0.2/\sqrt{25}} \right)$$

Pruebas de Hipótesis

$= P(Z \leq -2.58) + P(Z \geq 2.58)$

$= 0.00988$ ✓

c) P(No recalibrar siendo necesario)

$= P($Aceptar $H_0 \mid H_0$ falsa$) = P($Error tipo II$)$

$= P(9.8968 < \bar{X} < 10.1032 \mid \mu = 10.2)$

$$P\left(\frac{9.8968 - 10.2}{0.2/\sqrt{25}} < Z < \frac{10.1032 - 10.2}{0.2/\sqrt{25}}\right)$$

Pruebas de Hipótesis

$$= P(-7.58 < Z < -2.42) = 0.00776$$

Gracias

Clase preparada por: Verónica Guarín