Estadística I

Probabilidad Condicional

Algunas veces la ocurrencia de un evento A puede afectar la ocurrencia posterior de otro evento B; por lo tanto, la probabilidad del evento B se verá afectada por el hecho de que ya ocurrió el evento A.

En muchos experimentos la ocurrencia de un evento particular está usualmente asociada a la ocurrencia de otros eventos, de manera que al calcular la probabilidad de dicho evento es necesario considerar aquellos que condicionan su ocurrencia.

Probabilidad Condicional

Sean A y B eventos de un espacio muestral S, la probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido, denotada por $P(A \mid B)$, está definida por:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ ; \quad P(B) > 0$$

Así mismo:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}\ ; \quad P(A) > 0$$

Probabilidad Condicional

Ejemplo

Suponga que de todos los individuos que compran cierta cámara digital, el 60% incluye una tarjeta de memoria opcional en su compra, el 40% incluye una batería extra y el 30% incluyen tanto una tarjeta como una batería.

Calcular la probabilidad de que un individuo adquiera una tarjeta de memoria dado que adquirió una batería.

Probabilidad Condicional

Ejemplo

Sean los eventos:

A: El individuo adquirió una tarjeta de memoria.

B: El individuo adquirió una batería. Entonces, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cap B) = 0.3$ Luego,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

Es decir, de todos los que adquieren una batería extra, el 75% adquieren una tarjeta de memoria opcional.

Probabilidad Condicional

Ejemplo

De una urna que contiene 4 fichas rojas y 5 fichas negras se extraen al azar y sin reemplazo dos fichas, una a una. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea roja?, ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea negra?. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea roja si la primera fue roja?. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea roja si la primera fue negra?

Solución: Sean los eventos:

R_i : la i-ésima ficha extraída es roja; i = 1,2

N_i : la i-ésima ficha extraída es negra; i = 1,2

$P(R_1) = \frac{4}{9}$ $\quad P(N_1) = \frac{5}{9}$

$P(R_2 | R_1) = \boxed{\frac{3}{8}}$ $\quad P(R_2 | N_1) = \frac{4}{8}$

Probabilidad Condicional

Sean los eventos:

F: la persona seleccionada fuma.

E: " " " tiene E.P.

H: la persona es hombre.

M: la persona es mujer.

Ejemplo

Se seleccionan al azar 100 personas de una gran comunidad y se someten a un estudio para evaluar la incidencia de fumar en el desarrollo de una enfermedad pulmonar. Los resultados se presentan a continuación:

		H Fuma			M Fuma		
		Si	No	Total	Si	No	Total
Enf Pulmonar	Si	40	3	43	20	2	22
	N0	5	12	17	10	8	18
	Total	45	15	60	30	10	40

$P(F \cap H) = \frac{45}{100}$

$P(F \cap M) = \frac{30}{100}$

$P(F) = \frac{75}{100}$

$P(E) = \frac{65}{100}$

$$P(E \mid \underbrace{M \cap F^c}_{*}) = \frac{P(E \cap M \cap F^c)}{P(M \cap F^c)} = \frac{2/100}{10/100} = \frac{2}{10}$$

Probabilidad Condicional

Ejemplo

Se seleccionan al azar 100 Se selecciona una persona al azar de estas 100. Calcule las siguientes probabilidades:

¿Cuál es la probabilidad de que sea fumador y hombre? ¿fumador y mujer?

¿Cuál es la probabilidad de que sea fumador? ¿Cuál es la probabilidad de que desarrolle enfermedad pulmonar?

Si es mujer y no fuma ¿Cuál es la probabilidad de que desarrolle enfermedad pulmonar?

¿Cuál es la probabilidad de que desarrolle enfermedad pulmonar, dado que no fuma o es mujer?

$$P(E \mid F^c \cup M) = \frac{P(E \cap (F^c \cup M))}{P(F^c \cup M)} = \frac{P((E \cap F^c) \cup (E \cap M))}{P(F^c \cup M)} = \frac{P(E \cap F^c) + P(E \cap M) - P(E \cap F^c \cap M)}{P(F^c) + P(M) - P(F^c \cap M)}$$

$$= \frac{5/100 + 22/100 - 2/100}{25/100 + 40/100 - 10/100}$$

Regla de Multiplicar

Se sabe que:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

Como. $P(A \cap B) = P(B \cap A) \rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A).$

Lo que se conoce como regla multiplicativa.

Regla de Multiplicar

Más generalmente:

Considere $A_1, \ A_2, \ A_3 \ldots \ A_n$ n eventos del espacio muestral S.

$$P\left(A_1 \cap \ A_2 \cap \ldots \cap \ A_n\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2 \middle| A_1\right) P\left(A_3 \middle| A_1 \cap A_2\right) \ldots \ P(A_n \mid A_1 \cap \ A_2 \cap \ldots \cap \ A_{n-1})$$

Regla de Multiplicar

Ejemplo

Una urna contiene 12 fichas de las cuales 4 son negras y 8 son blancas, se juega el siguiente juego: Se extrae una ficha al azar, se anota el color y se devuelve a la urna junto con dos fichas adicionales del mismo color. Calcular la probabilidad de que en las tres primeras repeticiones del juego sean extraídas fichas negras.

Solución: Sean los eventos

A_1: la primera ficha extraída es de color negro.

A_2: la segunda ficha extraída es de color negro.

A_3: la tercera ficha extraída es de color negro.

A_i: la i-ésima ficha es negra.
$i = 1, 2, 3.$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{4}{12} * \frac{6}{14} * \frac{8}{16} = \frac{1}{14}$$

Regla de Multiplicar

A: la batería está exp. altas temp. $P(A) = 0.05.$

B: " " experim. corriente > la normal. $P(B|A) = 0.7$

Ejemplo

La probabilidad de que la batería de un automóvil que está sujeta a altas temperaturas dentro del comportamiento del motor reciba una corriente de carga mayor que la normal, es 0.7. La probabilidad de que la batería quede expuesta a altas temperaturas es 0.05.

Calcule la probabilidad de que la batería experimente una corriente de carga mayor que la normal y esté expuesta a altas temperaturas.

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.05 * 0.7.$

Regla de Multiplicar

Ejemplo

Sean los eventos:

A: La batería experimente una corriente de carga mayor que la normal;

B: La batería está expuesta a altas temperaturas.

Entonces, $P(B) = 0.05$ y $P(A \mid B) = 0.7$

Luego,

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = (0.7) \times (0.05) = 0.035$$

Por tanto, la probabilidad de que la batería experimente una corriente de carga mayor que la normal y este expuesta a altas temperaturas es de 3.5%

Regla de Multiplicar

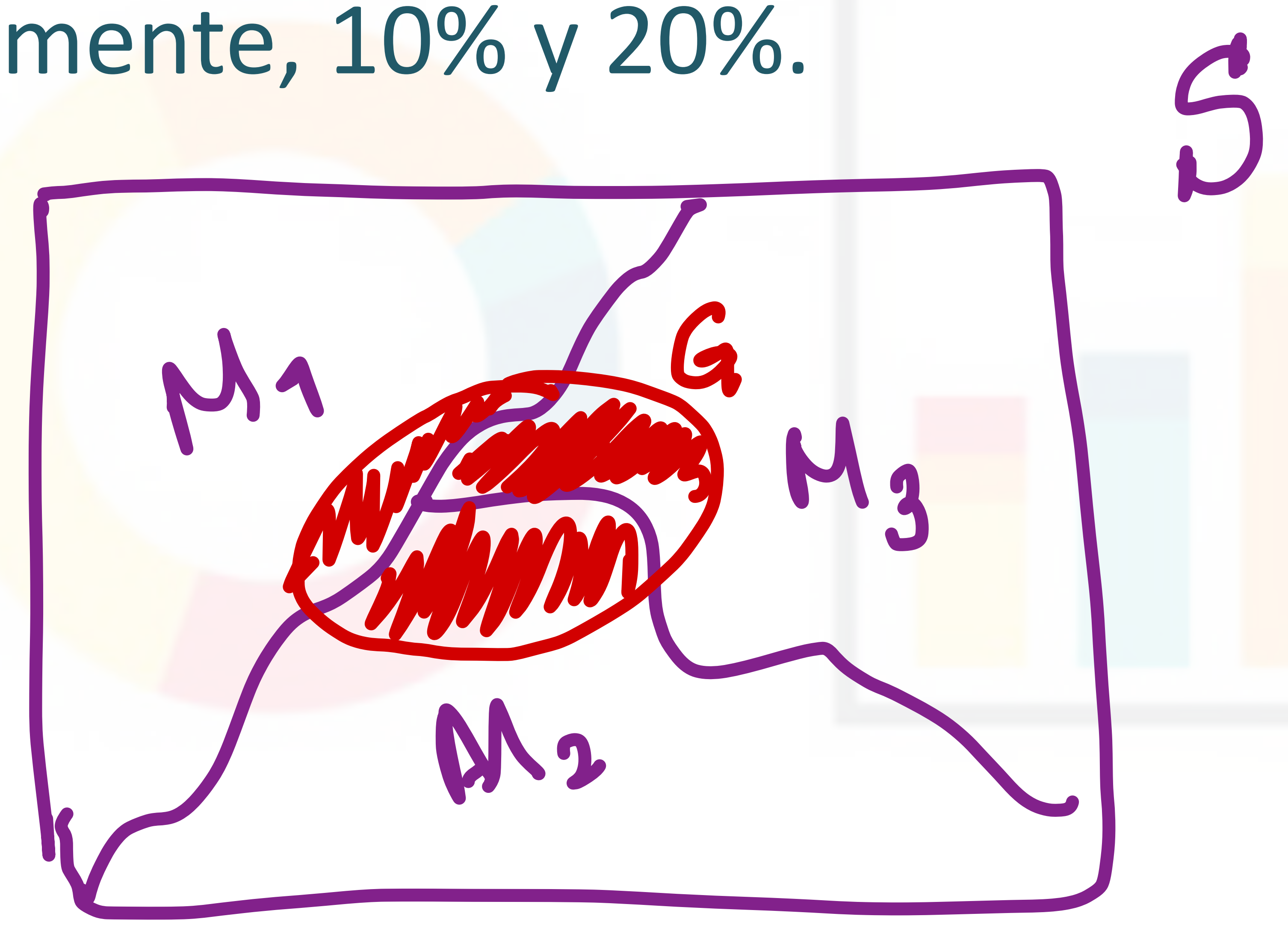
M_i: la videograbadora de la marca i, $i = 1, 2, 3$.

Ejemplo

G: " requiere garantía.

Una cadena de tiendas de video vende 3 marcas diferentes de video grabadoras, 50% de la marca 1, 30% de la marca 2, 20% de la marca 3. Cada fabricante ofrece un año de garantía en partes y mano de obra. 25% de las videograbadoras de la marca 1 requieren trabajo de reparación en tiempo de garantía, mientras que los porcentajes correspondientes a las marcas 2 y 3 son respectivamente, 10% y 20%.

$$\begin{cases} P(M_1) = 0.5 \\ P(M_2) = 0.3 \\ P(M_3) = 0.2 \end{cases} \qquad \begin{cases} P(G|M_1) = 0.25 \\ P(G|M_2) = 0.10 \\ P(G|M_3) = 0.2 \end{cases}$$



Regla de Multiplicar

Ejemplo

- ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador seleccionado al azar haya comprado una videograbadora de la marca 1 y que necesita reparación en tiempo de garantía?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador seleccionado al azar haya comprado una videograbadora que necesite reparación en tiempo de garantía?
- Si un cliente regresa a la tienda por garantía, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una videograbadora de la marca 1?

1. $P(M_1 \cap G) = P(M_1)\,P(G|M_1) = 0.5 * 0.25$ ✓

2. $P(G) = \sum_{i=1}^{3} P(M_i)\,P(G|M_i) = 0.5 * 0.25 + 0.3 * 0.1 + 0.2 * 0.2$ ✓

Regla de Multiplicar

regla de multiplicar

Ejemplo

$$P(M_1|G) = \frac{P(M_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(M_1)\,P(G|M_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_i)\,P(G|M_i)}$$

prob. Total.

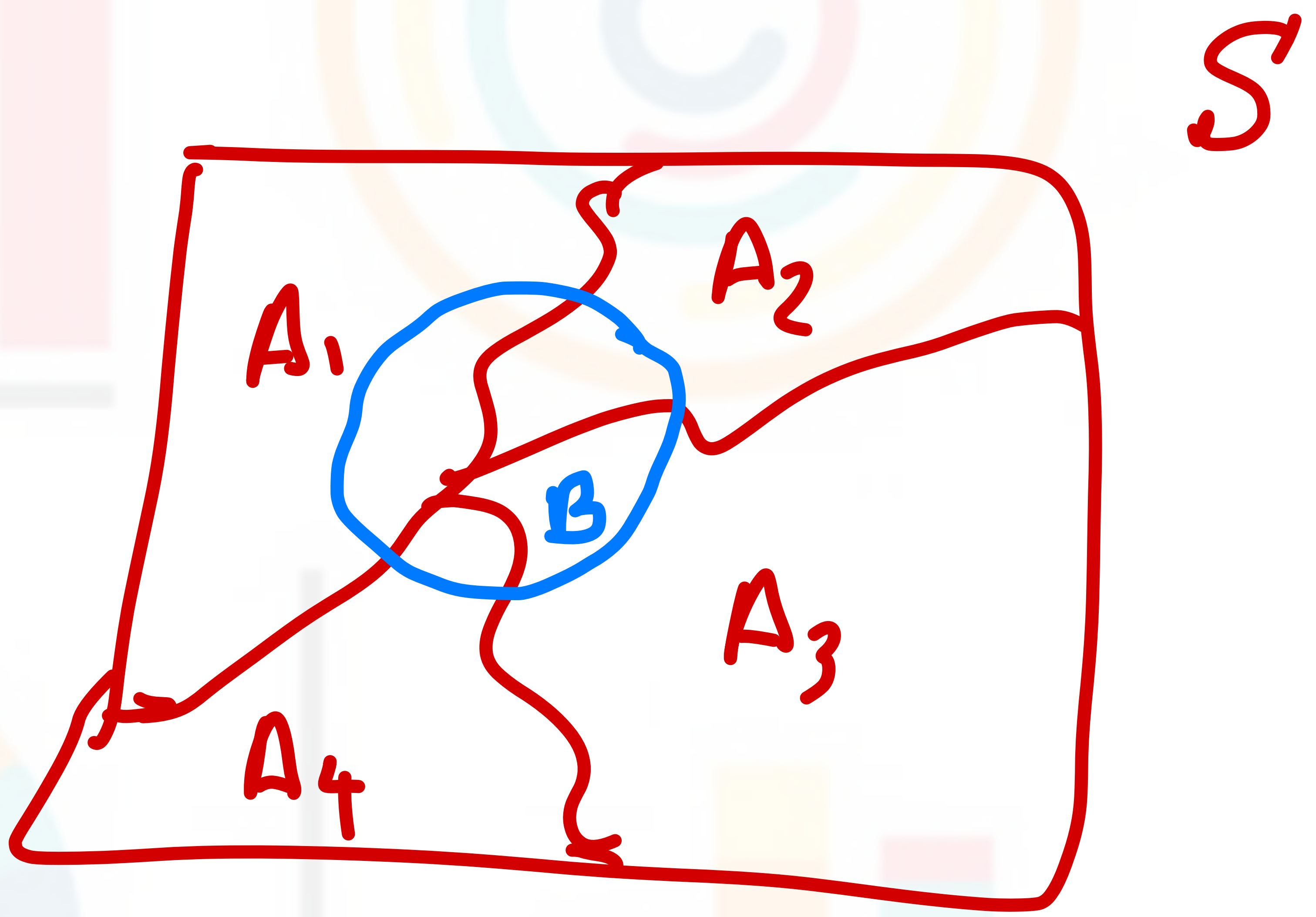
Teorema de Bayes.

Solución:

Sean los eventos:

A_i: *seleccionar un comprador que haya adquirido la videograbadora de la marca i,* $i = 1,2,3.$

B: *La videograbadora requiere reparación en tiempo de garantía*



$P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, $P(B|A_1) = 0.25$, $P(B|A_2) = 0.1$, $P(B|A_3) = 0.2$.

Regla de Multiplicar

Ejemplo

Solución:

- $P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B \mid A_1) = 0.5 * 0.25 = 0.125$

- $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3) = (0.5 * 0.25) + (0.3 * 0.1) + (0.2 * 0.2) = 0.195$

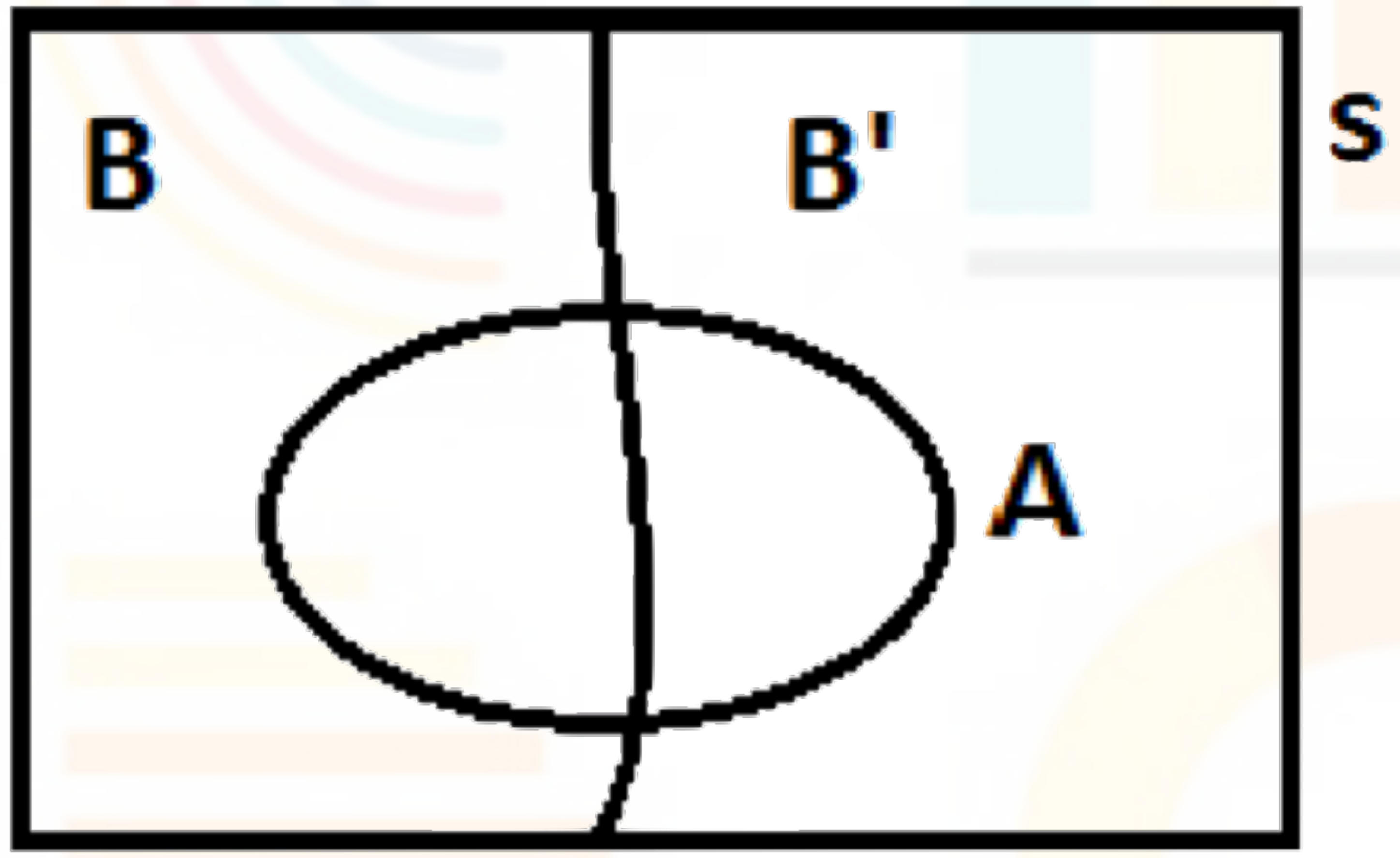
- $P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)} = \dfrac{0,5 * 0,25}{0,195} = 0.6$

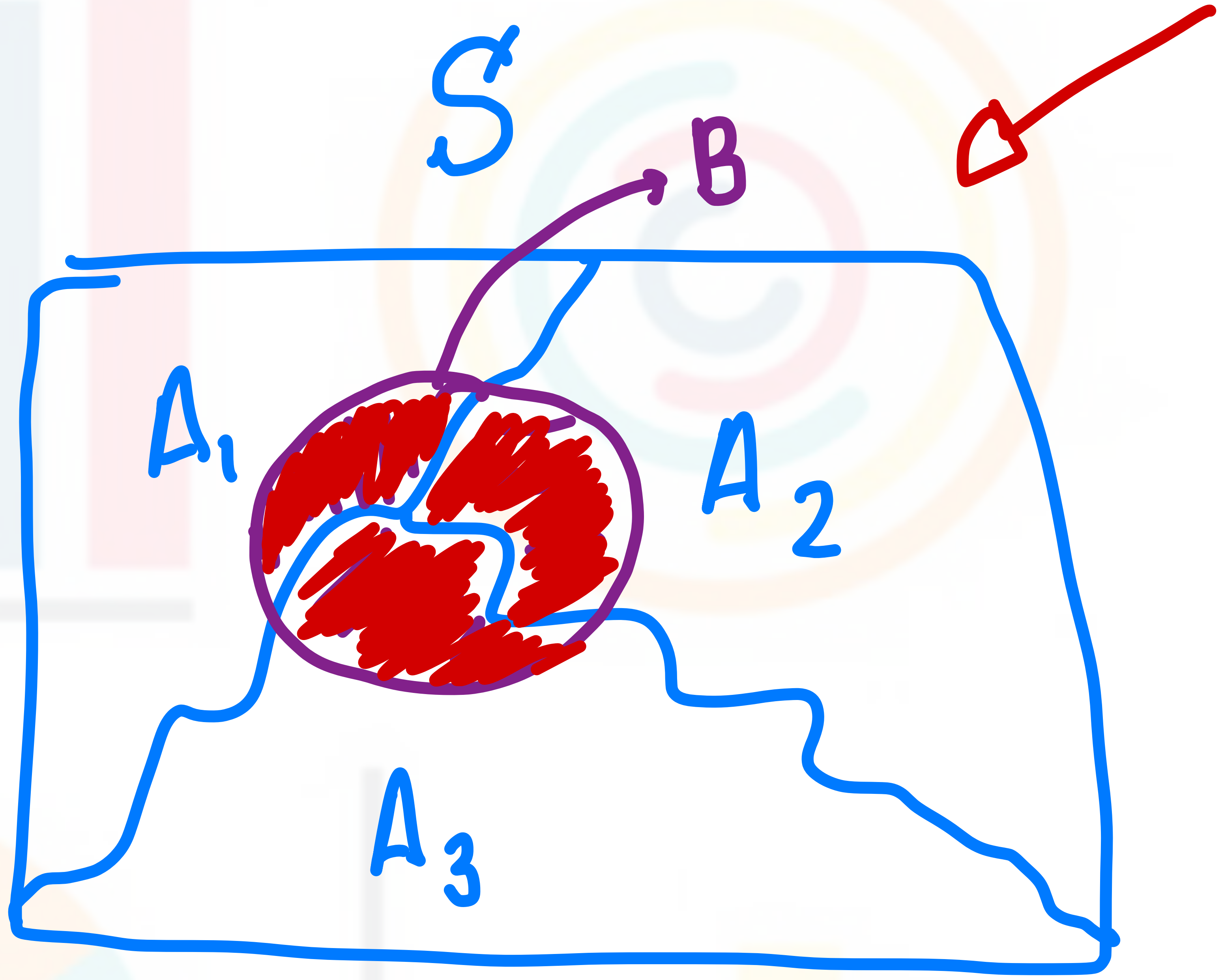
Regla de la Probabilidad Total

Ejemplo

$P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = 1.$

Considere los eventos A y B de un espacio muestral S:





Como $(A \cap B)$ y $(A \cap B^c)$ son mutuamente excluyentes,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

$$P(B) = \underline{P(B \cap A_1)} + \underline{P(B \cap A_2)} + P(B \cap A_3) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Regla de la Probabilidad Total

Ejemplo

Regla de la probabilidad total (para varios eventos):
Sean A_1, A_2, … A_k eventos mutuamente excluyentes. Entonces para cualquier otro evento B:

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_k)P(A_k) = \sum_{j=1}^{k} P\left(B \middle| A_j\right)P(A_j)$$

Resumen

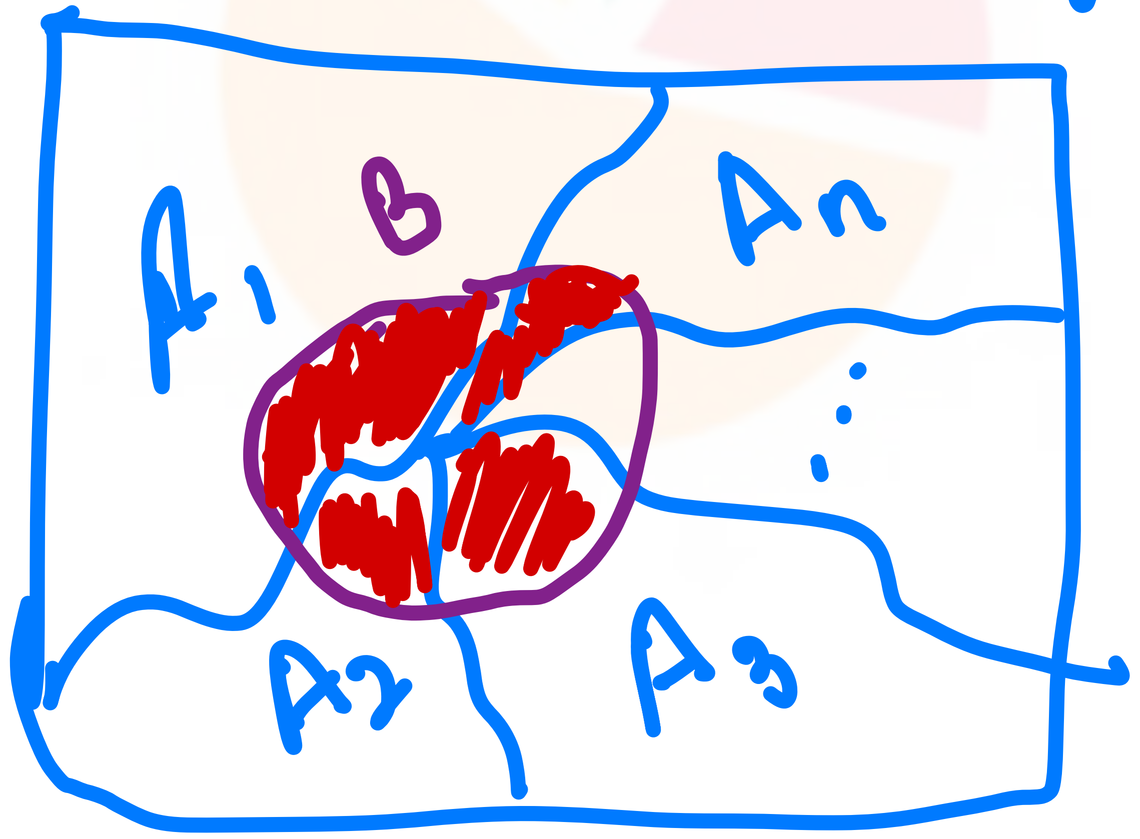
Prob. Condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Regla Multiplicativa:

$$P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$



S_n

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\emptyset\}$$

1. Prob. Total

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

2. Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

$P(A_i)$ son conocidos

Regla de la Probabilidad Total

Ejemplo

Suponga que durante el proceso de fabricación de semiconductores, la probabilidad de que un circuito integrado que está sujeto a grandes niveles de contaminación cause la falla en un producto, es 0.10. Por otra parte, la probabilidad de que un circuito que no está sujeto a altos niveles de contaminación durante el proceso de manufactura cause la falla es 0.005. En una corrida de producción particular, el 20% de los circuitos están sujetos a altos niveles de contaminación.

- Calcular la probabilidad de que un producto que utilice alguno de estos circuitos integrados falle.

Regla de la Probabilidad Total

Ejemplo

Solución:

Sean los eventos:

A = El circuito está sujeto a altos niveles de contaminación;

B= el circuito integrado falla.

Entonces, $P(A) = 0.20$, $P(A^c) = 0.80$, $P(B/A) = 0.10$ y $P(B \mid A^c) = 0.005$

Luego,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)$$
$$= (0.10)(0.20) + (0.005)(0.80) = 0.02 + 0.004 = 0.024$$

Por tanto, la probabilidad de que un producto que utilice alguno de estos circuitos integrados falle es de 2.4%

Regla de la Probabilidad Total

Ejemplo

La taza I contiene 3 fichas rojas y 7 fichas azules, la taza II contiene 6 fichas rojas y 4 azules. Una taza es seleccionada al azar y entonces una ficha es extraída de esta taza. ¿Cuál es la probabilidad de que ésta ficha sea roja?.

Note que no se sabe de dónde proviene la ficha, taza I o taza II, pues en ambas tazas hay fichas de color rojo.

Regla de la Probabilidad Total

Ejemplo

Solución:

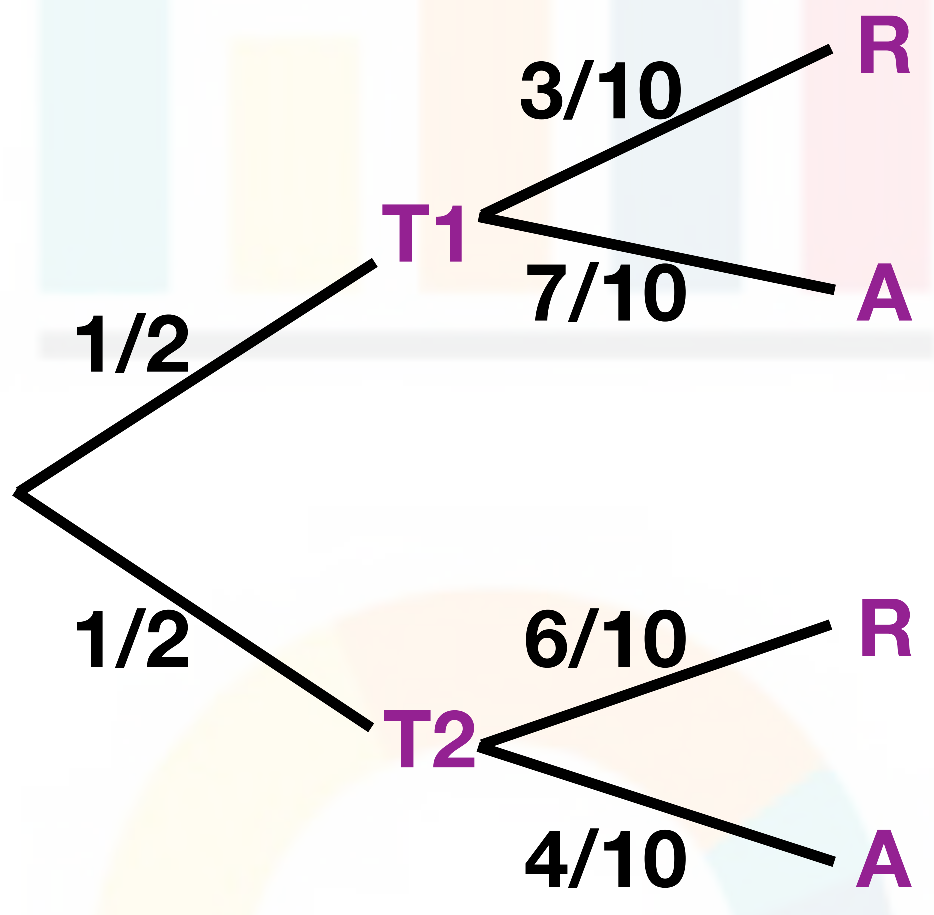
Sean los eventos:

R : la ficha es de color rojo

A : la ficha es de color azul

T_1 : taza I

T_2 : taza II



Asumamos que las tazas tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas,

de modo que $P(T_1) \; = \; P(T_2) \; = \dfrac{1}{2}$

Regla de la Probabilidad Total

Ejemplo

Solución:

$$P(R) = P\left(R \cap T_1\right) + P\left(R \cap T_2\right)$$

$$= P(T_1)P(R\,|\,T_1) + P(T_2)P(R\,|\,T_2)$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{3}{10} + \frac{1}{2} * \frac{6}{10} = \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = \frac{9}{20}$$

Teorema de Bayes

Sean $A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_k$ eventos no vacíos y mutuamente excluyentes, con probabilidades previas $P(A_i),\ i = 1,2,\ldots,k$. Entonces para cualquier otro evento B para el cual $P(B) > 0$, se cumple:

$$P\left(A_j \middle| B\right) = \frac{P\left(B \cap A_j\right)}{P(B)} = \frac{P\left(B \middle| A_j\right)P\left(A_j\right)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Teorema de Bayes

Ejemplo

Suponga que durante el proceso de fabricación de semiconductores, la probabilidad de que un circuito integrado que este sujeto a grandes niveles de contaminación sea causa de una falla en un producto, es 0.10. Por otra parte, la probabilidad de que un circuito que no está sujeto a altos niveles de contaminación durante el proceso de manufactura sea la causa de la falla es 0.005. En una corrida de producción particular, el 20% de los circuitos están sujetos a altos niveles de contaminación.

- Calcular la probabilidad de circuito este sujeto a altos niveles de contaminación dado que falla.

Teorema de Bayes

Ejemplo

Solución:

Sean los eventos:

A_1: El circuito está sujeto a altos niveles de contaminación. A_2: El circuito no está sujeto a altos niveles de contaminación;

B: el circuito integrado falla.

Entonces, $P(A_1) = 0.20$, $P(A_2) = 0.80$, $P(B \mid A_1) = 0.10$ y $P(B \mid A_2) = 0.005$, nos piden calcular $P(A_1 \mid B)$.

Teorema de Bayes

Ejemplo

Solución:

Luego,

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | A_1) P(A_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(B | A_i) P(A\_i)} = \frac{P(B | A_1) P(A_1)}{P(B | A_1) P(A_1) + P(B | A_2) P(A_2)} = \frac{(0.10)(0.20)}{(0.10)(0.20) + (0.005)(0.80)} = \frac{0.02}{0{,}024} = 0.8333$$

Por tanto, la probabilidad de que un producto que utilice un circuito que este sujeto a altos niveles de contaminación dado (sabiendo) que falla 83.33%

Teorema de Bayes

Ejemplo

Suponga que se distribuyen fichas de colores en 3 cajas idénticas.

	Caja 1	Caja 2	Caja 3	Total
Roja	2	6	3	11
Blanca	3	1	4	8
Azul	5	3	3	11
Total	10	10	10	30

Se selecciona aleatoriamente una caja, de ella se saca una ficha y se observa que es roja, ¿Cuál es la probabilidad de la ficha provenga de la caja 3?

Teorema de Bayes

Ejemplo

Solución:

Sean los eventos:

$C_i: Se\ selecciona\ la\ caja\ i,\quad i = 1,2,3$

$R:\ la\ \ ficha\ seleccionada\ es\ Roja;$

$A:\ la\ \ ficha\ seleccionada\ es\ azul;$

$B:\ la\ \ ficha\ seleccionada\ es\ blanca\,.$

Entonces, $P(C_i) = \dfrac{1}{3}$, $P(R \mid C_1) = \dfrac{2}{10}$, $P(R \mid C_2) = \dfrac{6}{10}$ y $P(R \mid C_3) = \dfrac{3}{10}$, nos piden calcular $P(C_3 \mid R)$

Teorema de Bayes

Ejemplo

Solución:

Luego,

$$P(C_3|R) = \frac{P(C_3 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|C_3)P(C_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(R|C_i)P(C\_i)} = \frac{P(R|C_3)P(C_3)}{P(R|C_1)P(C_1) + P(R|C_2)P(C_2) + P(R|C_3)P(C_3)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{10}\right)} = \frac{3}{2+6+3} = \frac{3}{11}$$

Independencia

A partir de la definición de probabilidad condicional se puede derivar un criterio para determinar cuando dos eventos A y B son independientes.

Intuitivamente la idea de independencia entre dos eventos se refiere a que la ocurrencia de un evento A no afecta la ocurrencia de otro evento B.

Independencia

Definición

Sean A y B eventos de un espacio Muestral. Se dice que A y B son Estadísticamente Independientes si y sólo si, cualquiera de las siguientes proposiciones se cumple:

- $P(A \mid B) = P(A)$ ✓
- $P(B \mid A) = P(B)$ ✓
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ✓

Independencia

Proposición

Sean A y B eventos independientes, entonces se cumple que:

- A^c y B^c también son independientes.
- A^c y B también son independientes.
- A y B^c también son independientes.

Independencia

Ejercicio

La siguiente tabla contiene la información obtenida al analizar 84 muestras de aire con finalidad de detectar dos moléculas raras.

		Molécula 1 presente		
		No	Si	Total
Molécula 2 presente	No	32	24	56
	Si	16	$\boxed{12}$	$\boxed{28}$
	Total	48	$\boxed{36}$	84

Sean los eventos A: el evento donde todas las muestras de aire contiene la molécula 1, y B: el evento donde todas las muestras contienen la molécula 2. ¿A y B son independientes?

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{12}{84} = \frac{36}{84} * \frac{28}{84} \checkmark$$

Independencia

$P(A^c) = 1 - P(A)$

Ejercicio

M_i : la muestra i tiene altos niv. cont. $i = 1, 2, 3.$

$\rightarrow P(M_i) = 0.1.$

La probabilidad de que una muestra de laboratorio contenga altos niveles de contaminación es de 0.1, se analizan 3 muestras, los resultados obtenidos del análisis de cada una de las muestras son independientes.

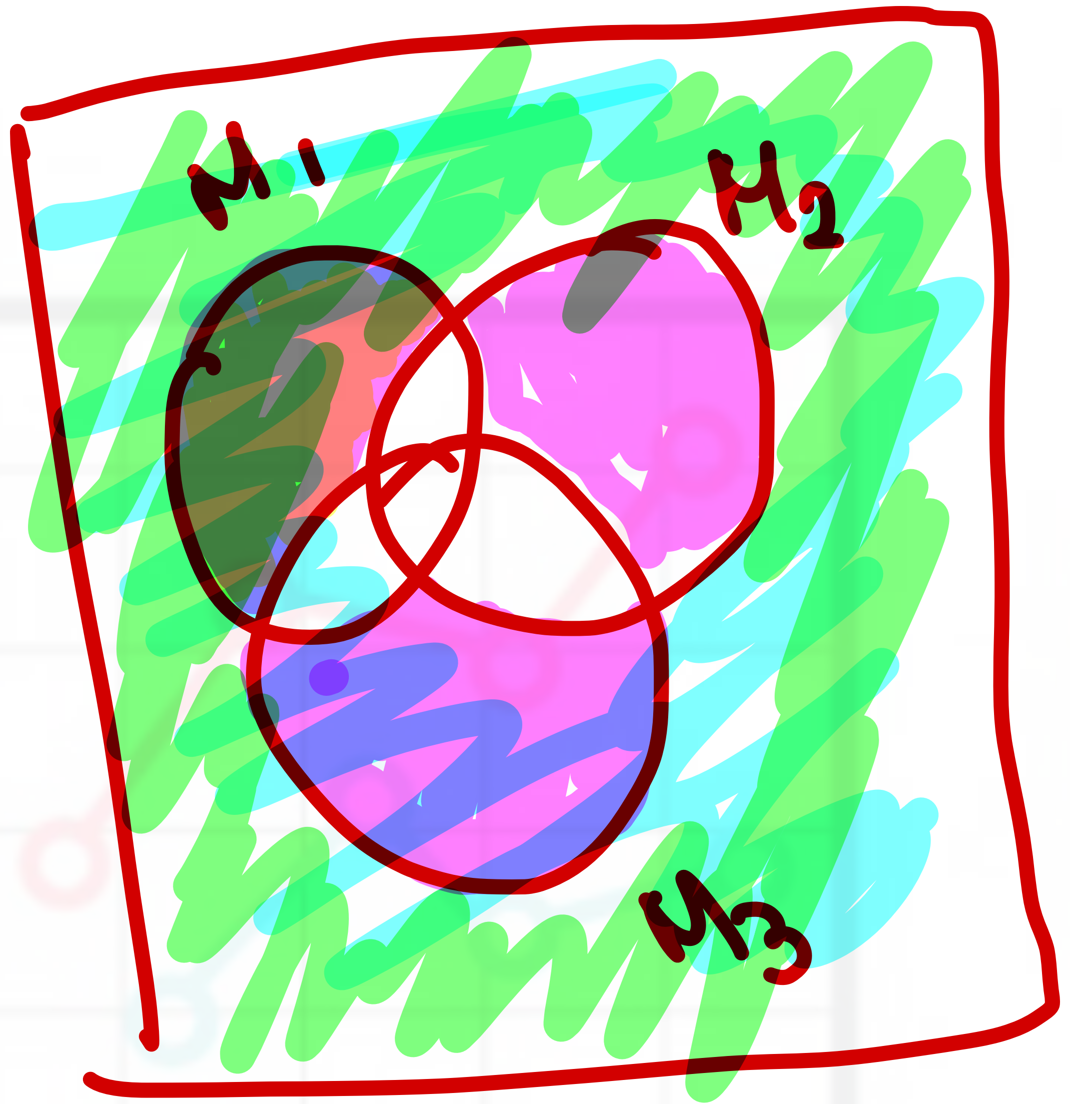
¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las muestras contenga altos niveles de contaminación?

¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una contenga altos niveles de contaminación?

¿Cuál es la probabilidad de que al menos una contenga altos niveles de contaminación?

$\rightarrow 1.\ P(M_1^c \cap M_2^c \cap M_3^c) = P(M_1^c)P(M_2^c)P(M_3^c) = \boxed{[0.9]^3}$

$\rightarrow 2.\ P[(M_1 \cap M_2^c \cap M_3^c) \cup (M_1^c \cap M_2 \cap M_3^c) \cup (M_1^c \cap M_2^c \cap M_3)]$



$= P(M_1 \cap M_2^c \cap M_3^c) + P(M_1^c \cap M_2 \cap M_3^c) + P(M_1^c \cap M_2^c \cap M_3)$

$= P(M_1)P(M_2^c)P(M_3^c) + \underbrace{\qquad}_{''} + \underbrace{\qquad}_{''}$

$= 3(0.1)(0.9)^2$

0 1 2 3

X: # muestras ANC.

Gracias

$\boxed{P(X \geq 1)}$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(A) = 1 - P(A^c)$

Clase preparada por: Verónica Guarín

$\underbrace{P(\text{Al menos 1 tenga ANC})}_{A} = 1 - P(\text{ninguna})$

$= 1 - [0.9]^3$