Estadística I

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice continua si el rango de dicha variable es un intervalo o es la unión de varios intervalos reales. Por ejemplo, medición de la corriente de un alambre, longitud de partes desgastados en una pieza, tiempo de duración de una bombilla, tiempos de espera, estatura, masa.

Variables Aleatorias Continuas

V.a.C $\begin{cases} \text{f.d.p } (f(x)) \\ \text{f.d.a } (F(x)) \end{cases}$

Definición:

Sea X una variable aleatoria continua. La función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de X, denotada $f_X(x)$, es tal que:

1. $f_X(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$\rightarrow P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b}$

$\neq$

$\rightarrow P(a \leq X < b) = \sum_{x=a}^{b-1}$

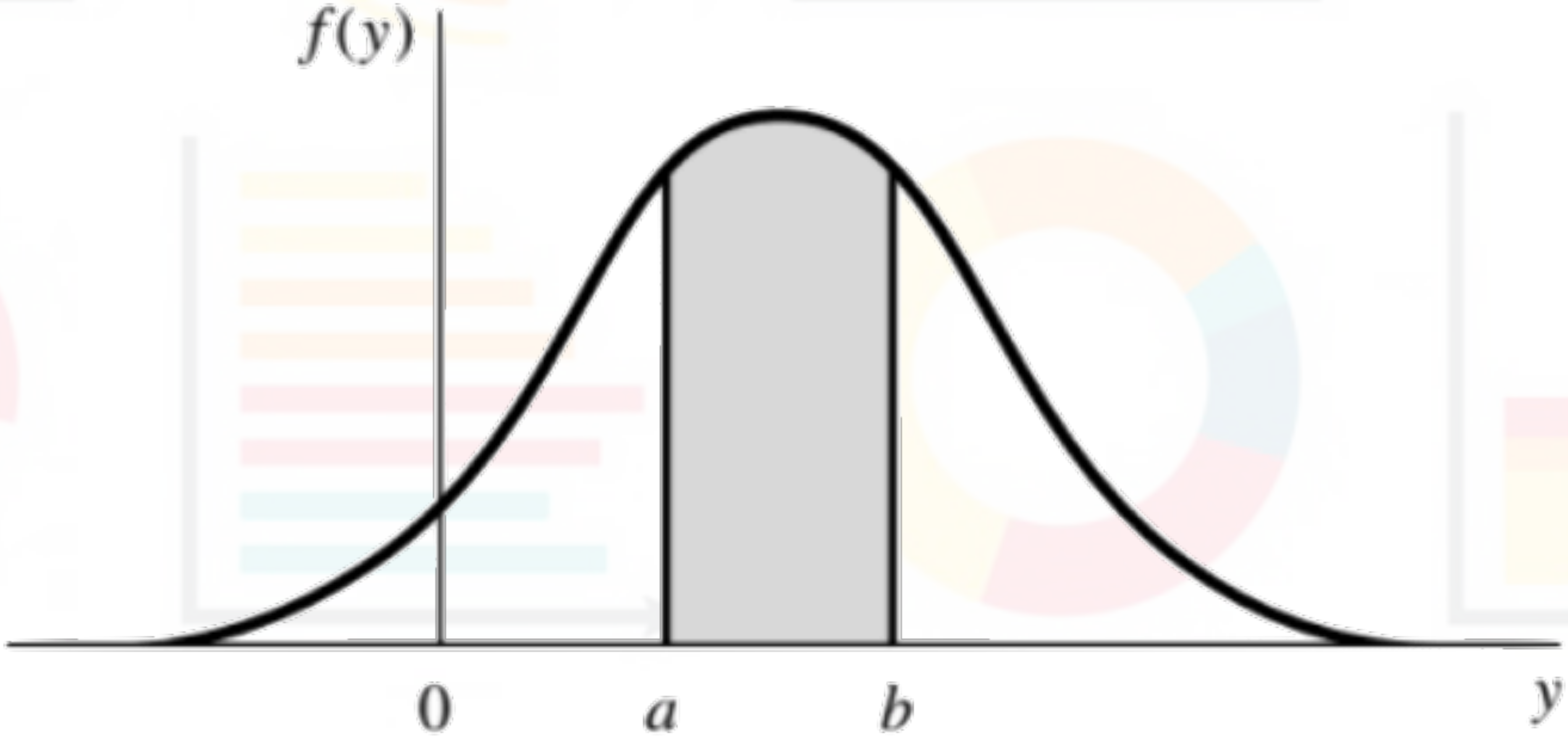
3.

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

$$= \underline{P(a < X < b)} = \int_a^b f_X(x)dx$$

Variables Aleatorias Continuas

Note en 2 que el área total bajo $f\,(x)$ es uno. La probabilidad del intervalo $a \leq X \leq b$ es el área acotada por la función de densidad y las rectas $X = a,\ X = b$



Variables Aleatorias Continuas

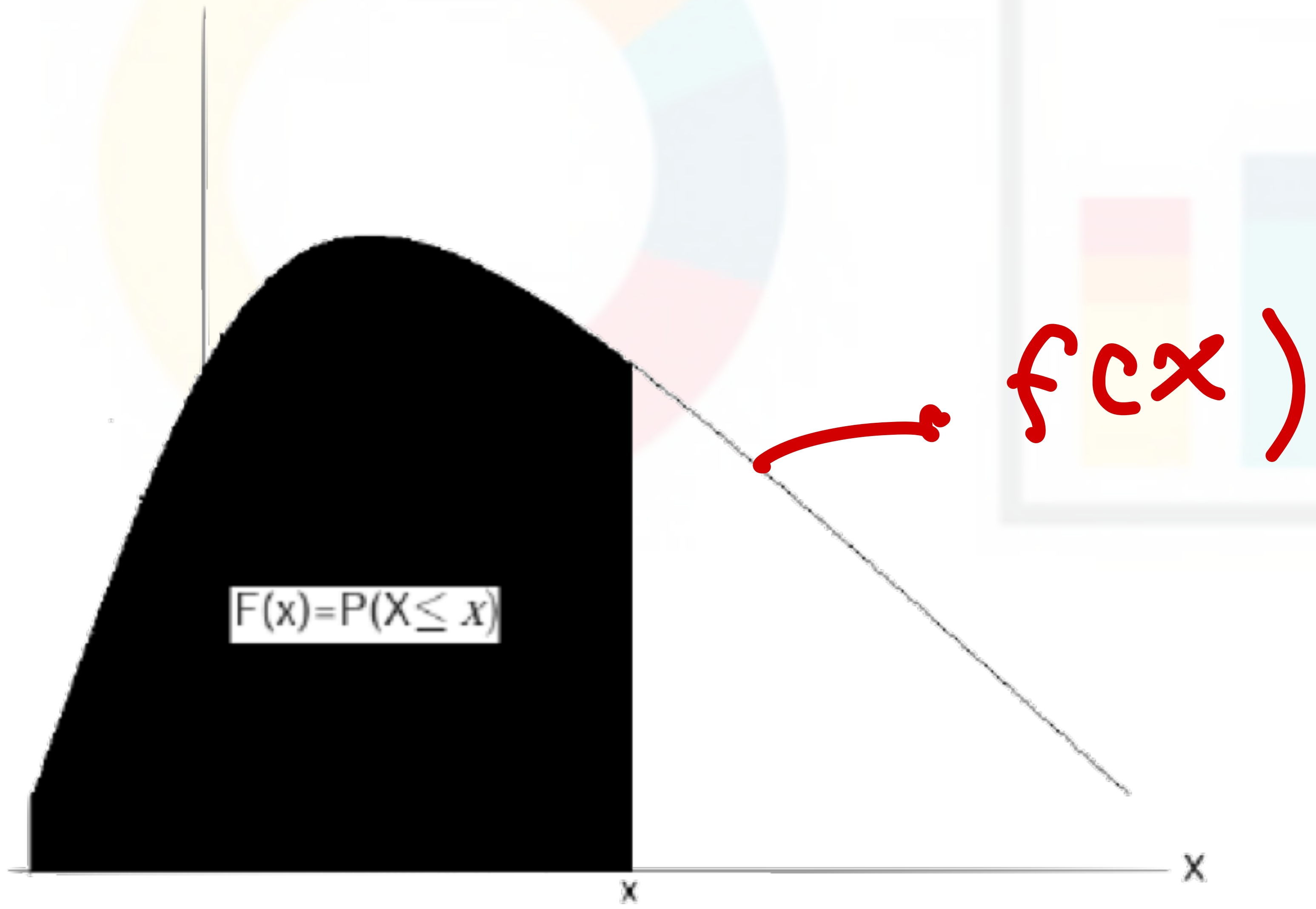
Definición:

La función de distribución acumulada $F_X(x)$ de una variable aleatoria continua X es la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a algún x. Esto es,

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x)} = \int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy^{*}$$

$F_X(x)$ es el área acotada por la función de densidad que se encuentra a la izquierda de la recta $X = x$.

Gráficamente esto es



*Y es una variable artificial de integración

Variables Aleatorias Continuas

Propiedades de $F_X(x)$

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad ; \forall x \in R$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
3. $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$
   $= P(a \leq X \leq b) = \boxed{F_X(b) - F_X(a)}$
4. $\boxed{\dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x} = f_X(x)}$
5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$

f.d.p

v.a

f.d.a

Variables Aleatorias Continuas

$f(x) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

Sea X una variable aleatoria continua.

1.Determine el valor de k de tal manera que la función.

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X.

2.Determine la función de distribución acumulativa de X.

3.Calcular $P\left(X \geq \frac{1}{2}\right)$ y $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$

Variables Aleatorias Continuas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Solución.

1.

$$1 = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f_X(x)dx}^{\,0} + \int_{-1}^{1} f_X(x)dx + \cancel{\int_{1}^{+\infty} f_X(x)dx}^{\,0}$$

$$1 = \int_{-1}^{1} (kx^2)dx = k\int_{-1}^{1} x^2 dx$$

$$1 = \frac{k}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{k}{3}[1^3 - (-1)^3] = \frac{2}{3}k$$

Por tanto $k = \dfrac{3}{2}$ y así: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & , -1 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{en otro caso.} \end{cases}$

Variables Aleatorias Continuas

Solución.

2. f.d.a:

$$F_X(x) = \underline{\int_{-1}^{x}\left(\frac{3}{2}y^2\right)dy} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{x} y^2 dy$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{2}[\underline{x^3 - (-1)^3}]$$

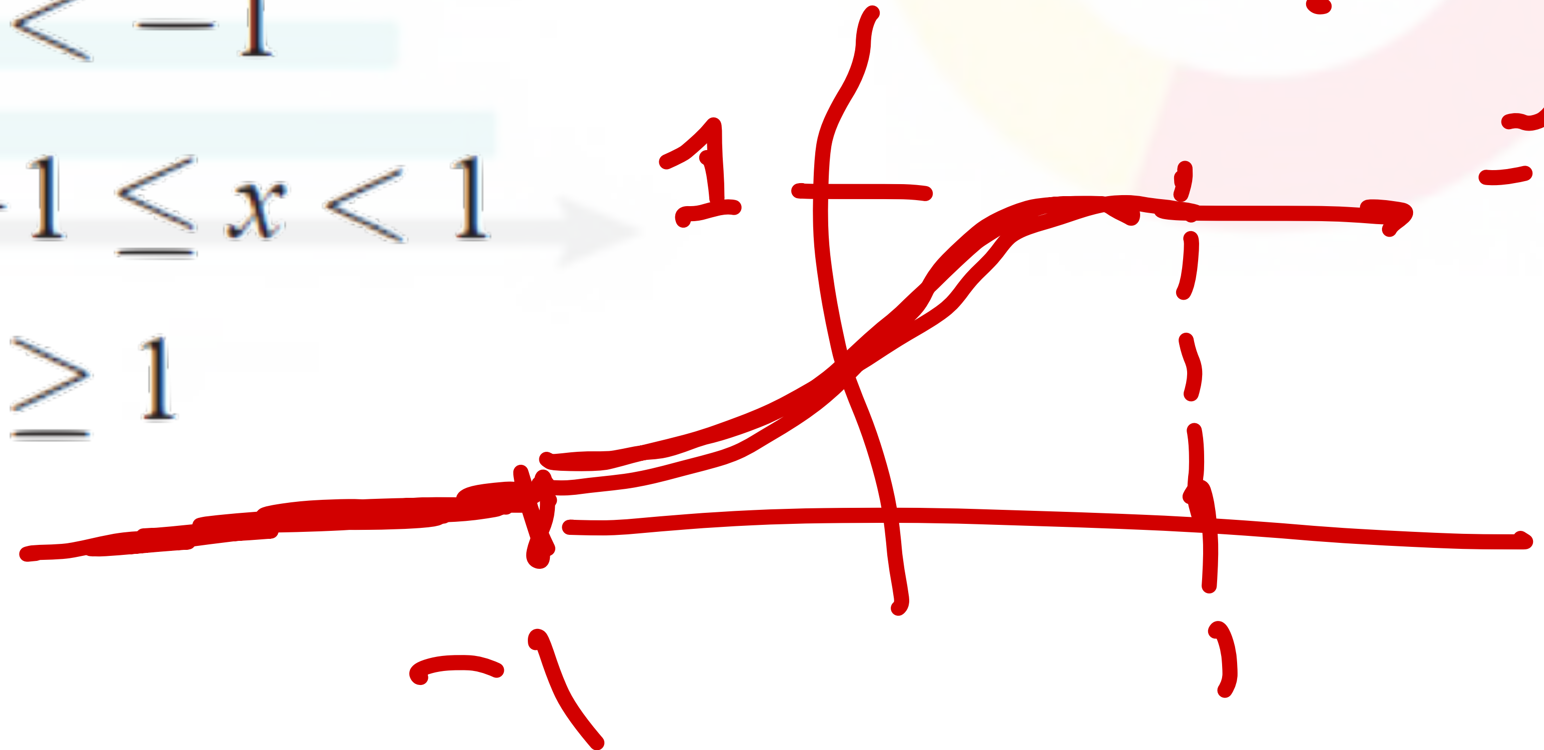
$$= \frac{1}{2}(x^3+1)$$

Así $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,x < -1 \\ \boxed{\frac{1}{2}(x^3+1)} & ,-1 \le x < 1 \\ 1 & ,x \ge 1 \end{cases}$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

$$= \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx} + \int_{-1}^{x} f(y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{x} f(y)\,dy$$



Variables Aleatorias Continuas

$F(x) = P(X \leq x)$

½ < ½

Solución.

$$3.P\left(X \geq \frac{1}{2}\right)$$

Forma 1 (utilizando $F_X(x)$)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1/2) &= 1 - P(X < 1/2) \\ &= 1 - F_X(1/2) \\ &= 1 - \frac{(1/2)^3 + 1}{2} \\ &= 1 - \frac{9}{16} \\ &= \boxed{\frac{7}{16}} \end{aligned}$$

Forma 2 (utilizando $f_X(x)$)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1/2) &= \int_{1/2}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2\right) dx = \frac{3}{2}\int_{1/2}^{1} x^2 dx \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}[1^3 - (1/2)^3] \\ &= \frac{1}{2}(1 - 1/8) = \frac{1}{2}(7/8) \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

Variables Aleatorias Continuas

Solución.

$$3.P\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right)$$

Forma 1 (utilizando $F_X(x)$)

$$P(-1/2 \le X \le 1/2) = F_X(1/2) - F_X(-1/2)$$
$$= \frac{(1/2)^3+1}{2} - \frac{(-1/2)^3+1}{2}$$
$$= \frac{1/8+1+1/8-1}{2}$$
$$= \frac{2/8}{2}$$
$$\boxed{= \frac{1}{8}}$$

Forma 2 (utilizando $f_X(x)$)

$$P(-1/2 \le X \le 1/2) = \int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{3}{2}x^2\right)dx = \frac{3}{2}\int_{-1/2}^{1/2} x^2 dx$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2}[(1/2)^3 - (-1/2)^3]$$
$$= \frac{1}{2}(1/8+1/8) = \frac{1}{2}(2/8)$$
$$\boxed{= \frac{1}{8}}$$

Variables Aleatorias Continuas

Ejemplo

El tiempo necesario para que estudiantes completen un examen de una hora es una variable aleatoria con una función de densidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} cy^2 + y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

a. Encuentre c.
b. Encuentre $F(y)$.
c. Encuentre la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar termine en menos de media hora.
d. Dado que una estudiante particular necesita al menos 15 minutos para completar el examen, encuentre la probabilidad de que requiera al menos 30 minutos para terminar.

Variables Aleatorias Continuas

Ejercicio:

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria continua con f.d.p dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

- Halle $F_X(x)$.
- Calcule $P(X < 1)$.
- Halle el valor de k tal que $P(X < k) = 0{,}95$.

Variables Aleatorias Continuas

Valor Esperado

Sea X una variable aleatoria (discreta o continua) con f.d.p $f_X(x)$ (o $p(x)$). La **esperanza de** X o **valor esperado* de** X, denotado como $E[X]$ se define como:

$$\mu = \mu_X = \boxed{E[X]} = \begin{cases} \sum_{x \in A_x} x p(x) & \text{, si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx & \text{, si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

$E[aX^2]$

Este valor esperado es usualmente denotado μ_X o μ.

*Valor promedio de una v.a. después de un número grande de experimentos

Valor Esperado

Propiedades del Valor Esperado:

Sean $a, \; b$ números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

1. $E[a] = a$

2. $E[aX + b] = E[aX] + E[b] = aE[X] + b$

3. Si $g(X)$ es una función de X, entonces

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(X)p(x) & \text{, si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(X) f_X(x)dx & \text{, si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

$$E[aX] = \sum_{x \in A_x} a\, x\, p(x)$$

$$= a \sum_{x \in A_x} x\, p(x)$$

$$= a\, E[X]$$

Valor Esperado

Definición: Varianza de una Variable Aleatoria.

Sea $g(X) = \boxed{(X - \mu_X)^2}$. La varianza de X, la cuál se denotará $Var[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como

$$Var[X] = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

σ_X^2

o

σ^2

Valor Esperado

Propiedades de la varianza:

Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (discreta o continua).

1. $\boxed{Var[X] = E[(X-\mu_X)^2] = \boxed{E[X^2] - (E[X])^2}}$

2. $\boxed{Var[a] = 0}$

$Var[a] = E[(a-a)^2] = 0$

3. $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

$Var[aX]$

$Var[aX] = E[(aX - E[aX])^2]$

$= E[(aX - aE(X))^2] = E[a^2(X-E(X))^2]$

$= a^2 E[(X-E(X))^2]$

$= a^2 Var(X)$

A la raíz cuadrada de $Var[X]$ se le llamará **Desviación estándar** de X y se denotará σ o σ_X.

Valor Esperado

Ejemplo:

Se tienen 3 cajas idénticas, cada una con una fruta dentro, una manzana, una pera, un banano. Usted trata de acertar qué fruta hay en cada caja. Encuentre el número promedio de aciertos.

X: # Aciertos.

$A_x = \{0, 1, 3\}$

La f.m.p

x	0	1	3
$P(x)$	$2/6$	$3/6$	$1/6$

-300 -900 300

$\boxed{M}$	$\boxed{P}$	$\boxed{B}$	
M	P	B	$x = 3$
P	M	B	$x = 1$
M	B	P	
B	P	M	
P	B	M	$x = 0$
B	M	P	

Valor Esperado

$$E[X] = \sum_{x \in A_x} x\,p(x) = \sum_{x=0}^{3} x\,p(x)$$

$$= \cancelto{0}{0 * P(0)} + 1 * P(1) + 3 * P(3)$$

$$= 1 * 3/6 + 3 * 1/6$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1.$$

Ganancia

Acierto 100

Desacierto -100

Valor Esperado

Ejemplo:

El gerente de una planta industrial está planeando comprar una nueva máquina ya sea del tipo A o del B. Si t denota el número de horas de operación diaria y el número Y_1 de reparaciones diarias requeridas para mantener una máquina de tipo A es una variable aleatoria con media y varianza iguales a $0.10t$. El número Y_2 de reparaciones diarias para una máquina de tipo B es una variable aleatoria con media y varianza iguales a $0.12t$. El costo diario de operación A es $C_A(t) = 10t + 30Y_1^2$; para B es $C_B(t) = 8t + 30Y_2^2$

¿Cuál máquina minimiza el costo diario esperado si un día de trabajo consta de (a) 10 horas y (b) 20 horas?

$E[Y_1] = 0.10t$ ✓

$Var[Y_1] = 0.10t$

$Var[Y] = E[Y^2] - (E(Y))^2$

$Var[Y] + (E(Y))^2 = E(Y^2)$

Valor Esperado

Costo promedio de A

$$E[C_A(t)] = E[10t + 30Y_1^2] = E[10t] + E[30Y_1^2]$$

$$= 10t + 30\,E[Y_1^2]$$

$$= 10t + 30\left[Var[Y_1] + (E(Y_1))^2\right]$$

$$= 10t + 30\left[0.10t + (0.10t)^2\right]$$

$$= 10t + 3t + 0.3t^2$$

$$= 13t + 0.3t^2 \checkmark$$

Gracias

Clase preparada por: Verónica Guarín