• Distribuciones Discretas
- Binomial
- hipergeometria
- T. aprox de hipera Bin
- Distn Poisson.

Estadística I

Distribución Poisson

Considere los siguientes experimentos o eventos:

1. El número de errores tipográficos por páginas.
2. El número de llamadas telefónicas que entran a una central telefónica. por minuto.
3. El número de huecos en una carretera por kilómetro.
4. El número de accidentes en un glorieta por hora.

Distribución Poisson

Algunos de estos experimentos tienen características similares:

a. El experimento consiste en contar el número de veces que ocurre un cierto evento por unidad de tiempo o espacio.
b. En cada unidad establecida, el número de eventos que ocurren es independiente de los que ocurren en otras unidades del mismo tipo.
c. Es posible asumir que la probabilidad de que un evento ocurra en una cierta unidad, es la misma para todas las unidades de su tipo.

Los experimentos que cumplen estas características, son llamados **Experimentos Poisson.**

Distribución Poisson

Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante λ sobre una unidad de tiempo o espacio. Se dice entonces que la variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson $(X \sim P(\lambda))$ con función de masa de probabilidad:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; \quad x = 0,1,2,\ldots; \, y \;\lambda > 0$$

El parámetro de la distribución Poisson es λ, corresponde al número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo (o espacio). Así

$E[X] = \lambda$ y $V[X] = \lambda$.

Distribución Poisson

Ejemplo:

Si la variable aleatoria $X \sim P(\lambda)$ y $P(X = 1) = P(X = 2)$. Encuentre $P(X = 4)$.?

como

$$P(X=1) = P(X=2)$$

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2!}$$

$$2e^{-\lambda}\lambda = e^{-\lambda}\lambda^{2}$$

$$2 = \frac{\cancel{e^{-\lambda}}\,\lambda^{\cancel{2}}}{\cancel{e^{-\lambda}}\,\cancel{\lambda}}$$

$\boxed{\lambda = 2}$, luego,

la f.m.p de X es: $p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2}\,2^{x}}{x!} & ; x = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$

$$P(X=4) = \frac{e^{-2}\,2^{4}}{4!}$$

$$= 0.0902$$

Distribución Poisson

Distribución Poisson

Ejemplo:

El número de componentes que fallan antes de 100 horas de operación, es una variable aleatoria Poisson. En promedio fallan 8 componentes antes de 100 horas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente antes de 25 horas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que falle al menos un componente antes de 125 horas?

$\rightarrow X$: # componentes que fallan en 100 horas de operación.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 8)$

X_1 : # componente que fallan en 25 horas.

$100\,h \rightarrow 8$

$25\,h \rightarrow \lambda_1 = ?$

$\lambda_1 = 2.$

Distribución Poisson

a) $P(X_1 = 1) = \dfrac{e^{-\lambda} 2^1}{1!} = 0.2706$

$P(x) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$; $x = 0, 1, 2, \dots$

b) X_2 : # componentes que fallan en 125 horas

100h $\rightarrow$ 8

125h $\rightarrow$ $\lambda_2 = ?$

$\lambda_2 = 10$

$P(x) = \dfrac{e^{-10} 10^x}{x!}$; $x = 0, 1, \dots$

$P(X_2 \geq 1) = 1 - P(X_2 < 1)$

$= 1 - P(X_2 = 0)$

$= 0.999$

Distribución Poisson

Ejemplo:

El número de llamadas que llega a una oficina, es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\lambda = 4 \times hora$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que en tres horas se reciban al menos dos llamadas.

b. Encuentre el intervalo de tiempo dado por L (en horas) para que la probabilidad de que se reciba al menos una llamada sea de 0.9.

→ X : # llamadas en 3 horas.

1 hora → 4

3 horas → λ = ?

$\lambda = 12$

Así, la f.m.p de X es:

$$p(x) = \frac{e^{-12}(12)^x}{x!} \; ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Distribución Poisson

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 0.999$$

Y: # llamadas en L horas.

1 hora $\longrightarrow$ 4

L horas $\longrightarrow \lambda_Y$

$\lambda_Y = \boxed{4L}$

Se pide encontrar L tq

$$P(Y \geq 1) = 0.9$$

$$\|$$

$$1 - P(Y<1) = 0.9$$

$$0.9 = 1 - P(Y<1)$$

$$0.9 = 1 - P(Y=0)$$

$$0.9 = 1 - \frac{e^{-4L}\,\cancel{(4L)^0}^{\,1}}{\cancel{0!}^{\,1}}$$

$$0.9 = 1 - e^{-4L}$$

$$0.1 = e^{-4L}$$

$$\ln(0.1) = -4L$$

$$\Rightarrow L = -\frac{\ln(0.1)}{4}$$

$$= 0.5756 \text{ horas}$$

Distribución Poisson

Ejemplo:

En un manuscrito legendario se descubrió que solo el $\boxed{13.5\%}$ de las páginas no contienen errores tipográficos. Si asumimos que el número de errores por página es una variable aleatoria que se distribuye poisson, calcule el porcentaje de páginas que tienen exactamente un error.

Si se examinan 10 páginas ¿Cuál es la probabilidad que se encuentre al menos 3 páginas con exactamente un error?

X: # errores tipográficos por página.

$P(X=0)=0.135 \leftarrow$

Distribución Poisson

$$P(X=0) = 0.135$$

$$\frac{e^{-\lambda}\,\cancel{\lambda^{0}}^{\,1}}{\cancel{0!}^{\,1}} = 0.135$$

$$e^{-\lambda} = 0.135$$

$$-\lambda = \ln(0.135)$$

$$\lambda = -\ln(0.135)$$

S

luego, la f.m.p de X es:

$$P(x) = \frac{e^{\ln(0.135)}\,[-\ln(0.135)]^{x}}{x!};\ x=0,1,$$

$$P(X=1) = \frac{e^{\ln(0.135)}\,[-\ln(0.135)]^{1}}{1!}$$

$$= 0.27033$$ ✓

Distribución Poisson

Segundo Teorema de Aproximación:

Si $X \sim Bin(n, p)$ y n es muy grande y p muy pequeño $(p \approx 0)$, entonces $X \sim P(\lambda)$ donde $\lambda = n * p$. En la práctica se necesita que $n \geq 100$ y $p < 0.01(np \leq 20)$.

Distribución Poisson

Ejemplo:

Una compañía compra lotes muy grandes de componentes electrónicos y la decisión de aceptar o rechazar dichos lotes se basa en la cantidad de componentes defectuosos que se encuentran en una muestra aleatoria de 100 unidades. Si la compañía rechaza el lote al encontrar 3 o más unidades defectuosas en la muestra ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un lote si éste contiene un 1% de unidades defectuosas?

Distribución Poisson

Distribución Uniforme

Definición

Se dice que una variable aleatoria X está distribuida uniformemente ($X \sim U_{[a,b]}$) sobre el intervalo $[a, b]$ si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x,a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b; \\ 0 & ; \text{e.o.c.} \end{cases}$$

La función de densidad de una uniforme es constante en el intervalo $[a, b]$.

Distribución Uniforme

Definición

- Si $x < a \Longrightarrow F_X(x) = 0$
- Si $a < X < b$, entonces

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}dy = \frac{1}{b-a}y\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

- Si $x > b \Longrightarrow F_X(x) = 1$

La f.d.a está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ;x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & ;a \leq x \leq b; \\ 1 & ;x > b \end{cases}$$

Distribución Uniforme

Propiedades de la Uniforme

Sea $X \sim U_{[a,b]}$

- $E[X] = \dfrac{a+b}{2}$

- $Var[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Distribución Uniforme

Ejemplo

El tiempo de viaje de cierto camión de entregas es una v.a uniforme en el intervalo $(20{,}50)$ min.

1. ¿Qué proporción de entregas se hacen en menos de media hora?
2. Si el conductor tardó por lo menos 25 min ¿Cuál es la probabilidad de que entregue en menos de 40 min?

Distribución Uniforme

Distribución Uniforme

Ejemplo

Se estima que, en los últimos 3 años, el valor de las tortas caseras vendidas en “Tortas doña Martha” está distribuido uniformemente, con una media de $20.000 cada torta. Dicho valor sufre variaciones según el precio de ingredientes y el pago a los empleados, siendo el valor máximo al que se han vendido las tortas de $25.500.

1. ¿Cuál es el valor mínimo al que se han vendido las tortas?
2. Determine la f.d.p y f.d.a de la variable.
3. Calcule la probabilidad de que el valor de cada torta sea mayor a $22.000
4. ¿Qué precio de las tortas está excedido por el 90% de los valores?
5. Determine la desviación estándar de la producción diaria

Distribución Uniforme

Distribución Uniforme

Distribución Uniforme

Gracias

Clase preparada por: Verónica Guarín