Estadística I

Variables Aleatorias

En la mayoría de los problemas a los que comúnmente nos enfrentamos, la descripción del conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio puede ser complicada y por lo tanto el calculo de probabilidades también se dificulta.

Por ejemplo, si una persona es seleccionada de una población diversas características pueden ser de interés y cada una aporta a el entendimiento de un fenómeno en especial, como son: cuánto gana, cuánto gasta, cuántos hijos tiene, cuánto paga por servicios, etc.

Variables Aleatorias

Cada vez que seleccionemos una persona de esta población, las características antes mencionadas varían. Asociadas a estas características se puede establecer una regla que relacione un resultado con un número real. Por ejemplo: ingresos, gastos, el número de hijos, etc. Esta asociación o regla se conoce como **Variable Aleatoria**.

Variables Aleatorias

Una Variable Aleatoria es una función definida en un espacio Muestral S que asigna a cada resultado del experimento un valor real. Usualmente las denotamos con letras mayúsculas $(X\ ,\ Y,\ Z\ ,\ T,\ etc)$. Así:

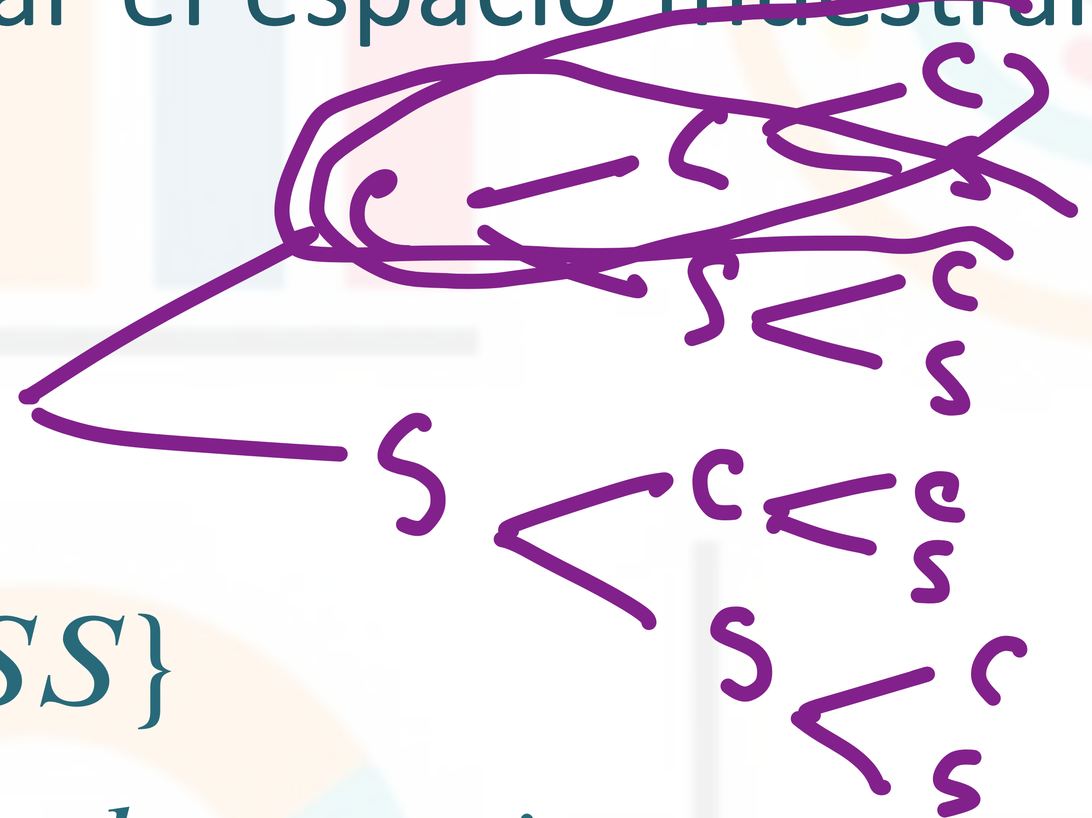
$$\begin{aligned} X:\ & S \rightarrow \mathbb{R} \\ & s \rightarrow X(s) = x\ , \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Al conjunto de todos los posibles resultados de una variable aleatoria se le llamara Rango de la variable y es usualmente denotado A_X

Variables Aleatorias

Ejemplo.

Tres monedas no cargadas son lanzadas al tiempo. Hallar el espacio muestral S y analice la variable aleatoria X: *el # de caras observadas* .



Solución.

Note que el espacio muestral esta dado por:

$$S = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$$

La variable aleatoria de interés es X: *# caras en cada lanzamiento*. En este caso los valores que se pueden observar en cuanto al número de caras son $\{0, 1, 2, 3\}$. Si se denota por A_X el conjunto de todos los posibles valores que toma la v.a X, se tiene que

$$\boxed{A_X = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}}.$$

Variables Aleatorias

$$X: \begin{array}{cccccccc} CCC & CCS & CSC & SCC & CSS & SCS & SSC & SSS \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Podemos escribir $X: \begin{array}{ccc} S & \to & \mathbb{R} \\ s & \to & X(s) \end{array}$

Donde

$X(CCC) = 3\,;\; X(SCC) = 2\,;\; X(SSS) = 0\,;\; X(SSC) = 1$, etc .

Variables Aleatorias

Ejemplo:
Se lanzan un par de dados no cargados. Hallar el espacio muestral y analizar las variables aleatorias X: suma de los 2 resultados y Y: diferencia entre los dos resultados.
Solución.
El espacio muestral para este experimento es:

$$S = \{(1\,,1),(1\,,\,2),\ldots,\,(5\,,\,6),(6\,,\,6)\}$$

Para la variable aleatoria X, que corresponde a la suma de los dos resultados, la asignación para los diferentes pares de resultados se muestra así

$$\begin{array}{llllllll}
(1,1) & \to & 2 & , & (3,2) & \to & 5 & , & (4,3) & \to & 7 \\
(1,2) & \to & 3 & , & (3,5) & \to & 8 & , & (6,2) & \to & 8 \\
(5,6) & \to & 11 & , & (6,6) & \to & 12 & , & (2,5) & \to & 7
\end{array}$$

Variables Aleatorias

En este caso X toma los valores de $\{2\,,\ 3\,, \ldots, 12\}$. De esta manera, el rango de la variable aleatoria X, esta dado por

$$A_X = \{2\,, 3, 4,5, 6,7, 8,910, 11, 12\}.$$

Para la variable aleatoria Y: Diferencia entre los dos resultados, se tiene que:

$$\begin{array}{llllllllllll} (1,1) & \to & 0 & , & (3,2) & \to & 1 & , & (4,3) & \to & 1 \\ (1,2) & \to & -1 & , & (3,5) & \to & -2 & , & (6,2) & \to & 4 \\ (5,6) & \to & -1 & , & (6,6) & \to & 0 & , & (2,5) & \to & -3 \end{array}$$

$P(y) = \underline{P(Y=y)}$

$(6,1)$

$\underline{\forall y \in A_Y}$

$(1,6)$

Así $A_Y = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Diferentes variables implican espacios de valores diferentes A_X

Variables Aleatorias

- Un grupo de n sujetos es sometido a cierto tratamiento y después de un tiempo se registra cuantos logran mejorar con dicho tratamiento. Sea X la variable aleatoria que cuenta cuantos sujetos mejoran con el tratamiento. Entonces el rango de X será $A_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

- De la producción diaria de jabones se escoge uno al azar y se mide su PH. Sea X: el PH del jabón. El rango de la variable aleatoria X es cualquier valor entre 0 y 14. Así $A_X = [0, 14]$.

Variables Aleatorias

Estos ejemplos representan variables las cuales son observadas en dos tipos de escalas las cuales implican Conteos o Mediciones. A las primeras se les conoce como **Variables Aleatorias Discretas**, a las segundas como **Variables Aleatorias Continuas**. La diferencia principal entre ellas, es que para las primeras, el rango es un conjunto contable (discreto o numerable); en las segundas, el rango es un intervalo o la unión de intervalos reales.

Variables Aleatorias Discretas

La **función de probabilidad** o **función de masa de probabilidad (p.m.f).** de una v.a discreta X definida en un espacio muestral S, es una función matemática que asigna una probabilidad a cada realización x de la variable.

aleatoria $X,$ se denotará $p(x)$ y se define como:

$$p(x) = P(X = x), \qquad \forall x \in A_X$$

Variables Aleatorias Discretas

$A = \{0,1,2\} \subseteq A_X$

Esta función debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} p(x)$$

1. $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in A_X$

$$P(X < 2) = P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^{1} p(x)$$

2. $\sum_{x} p(x) = 1$

3. Si $A \subseteq A_X$,entonces $P(X \in A) = \sum_{x \in A} p(x)$

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} p(x) = \sum_{x=0}^{2} p(x)$$

Variables Aleatorias Discretas

$S = \{CCC, CCS, \ldots SSS\}$ $\rightarrow$ $P(x) = \begin{cases} 1/8, & x=0 \\ 3/8, & x=1 \\ 3/8, & x=2 \\ 1/8, & x=3 \end{cases}$

Para el ejemplo 1, si X representa el número de caras, se tiene que:

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

Así, la f.m.p es

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$A_x = \{0, 1, 2, 3\}$ $\quad \sum_{x=0}^{3} p(x)$

Note que

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Variables Aleatorias Discretas

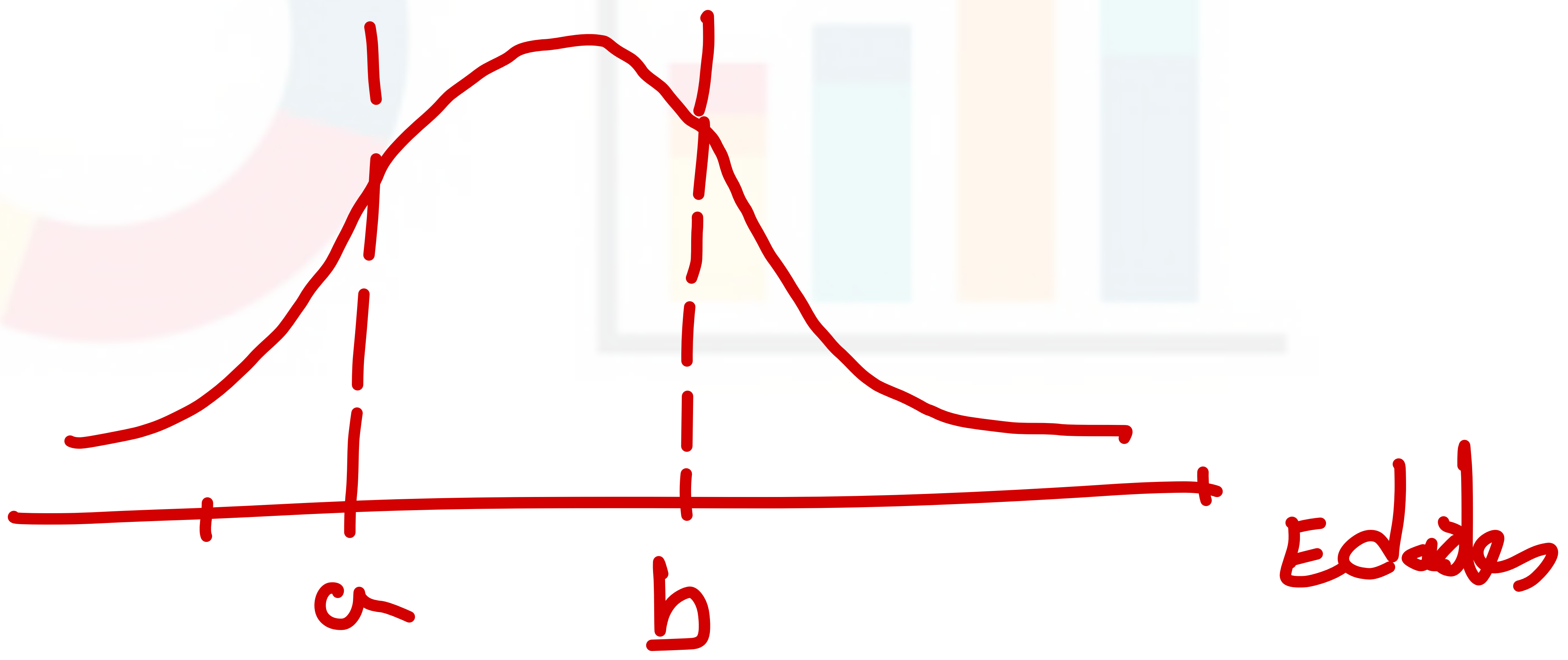
Ejemplo

Suponga que se lanza un dado corriente una vez y sea X la v.a. que indica el resultado obtenido. Halle la p.m.f.

Solución.

Los posibles valores de X son 1,2,3,4,5,6, cada uno de ellos tiene igual probabilidad de ocurrir (1/6). Luego

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & ; \quad x = 0,1,2,3,4,5,6 \\ 0; & \quad e.o.c \end{cases}$$



Variables Aleatorias Discretas

V.a

f.m.p

f.d.a

Definición:

Sea X una variable aleatoria discreta con f.m.p $p(x)$. La **distribución acumulada** de X, denotada por $F_X(x)$ se define como:

0 0

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{x' \le x} p(x') \quad \forall x \in R$$

0

$F_X(x)$ representa la suma de las probabilidades puntuales hasta el valor de x .

Variables Aleatorias Discretas

$A_x = \{0, 1, 2, 3\}$ $\sum_{x=0}^{0} p(x)$

Para el ejemplo de las monedas, se tiene que

$$F(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

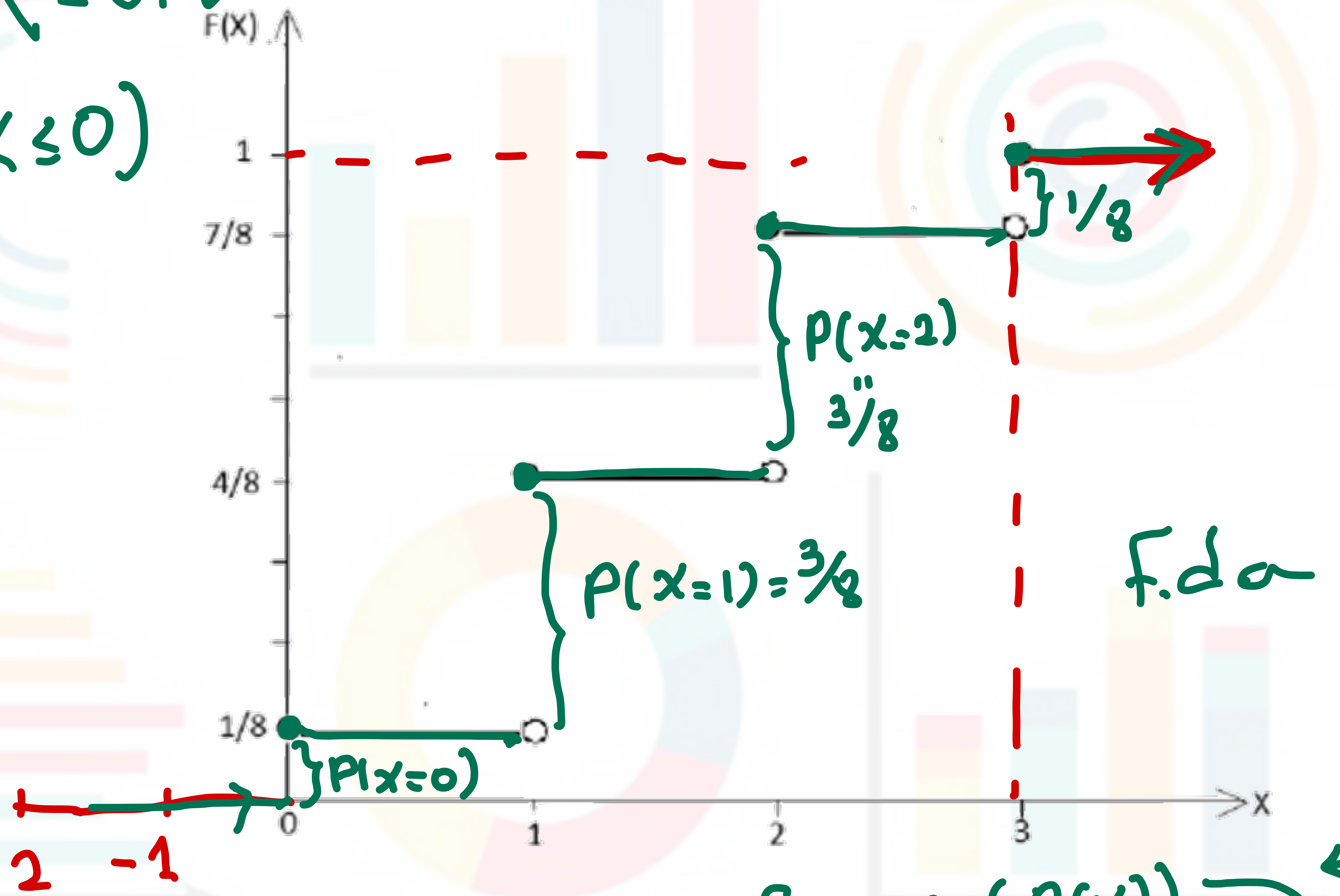
Variables Aleatorias Discretas

$F(0.5) = P(X \leq 0.5)$

$= P(X \leq 0)$

Por lo tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$



$P(X=2) = F(2) - F(1) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$

v.a.d
- f.m.p $(p(x))$
- f.d.a $(F(x))$

Variables Aleatorias Discretas

$$P(1 \leq X \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} p(x)$$

PROPIEDADES:

1

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ porque $F(x)$ es una probabilidad.
2. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
3. Si $X < Y \Longrightarrow F(x) < F(y)$
4. $\boxed{P(X = a) = F(a) - F(a-1)}$
5. $\boxed{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-1)}$
6. $P(a < X < b) = F(b-1) - F(a)$
7. $P(a \leq X < b) = F(b-1) - F(a-1)$
8. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Resumen

Variables Aleatorias Discretas

V.a < Discretas, Continuas.

A_x

V.a Discretas → f.m.p ($P(x)$), f.d.a ($F.d.a$)

Ejemplo:

Sea X una v.a. discreta, determinar el valor de k para que la función

$p(x) = \frac{k}{x}$; $x = 1,2,3,4$ sea la f.m.p de X. Halle $p(x)$, $F(x)$ y $\boxed{P(1 \leq X \leq 3)}$.

la f.mp

la f.d.a

$$\sum_{x=1}^{4} P(x) = 1.$$

$$\sum_{x=1}^{4} \frac{K}{x} = 1$$

$$K \sum_{x=1}^{4} \frac{1}{x} = 1$$

$$K\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] = 1$$

$$K\left[\frac{25}{12}\right] = 1$$

$$K = \frac{12}{25}$$

Luego, la f.m.p de X es:

$$p(x) = \frac{12}{25x}\ ; x = 1, 2, 3, 4.$$

x	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{12}{25}$	$6/25$	$4/25$	$3/25$

Solución

la f.d.a $F(x)$

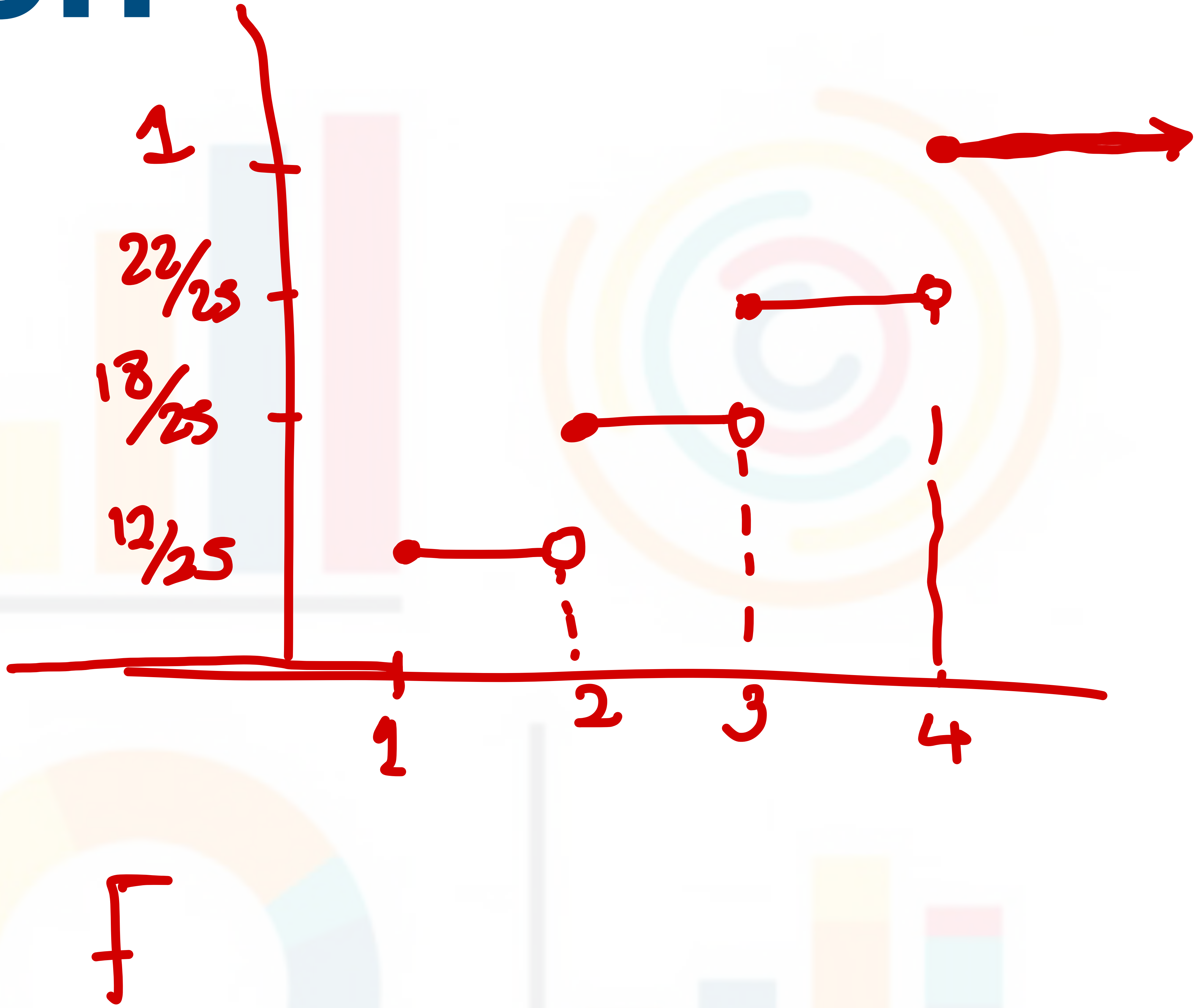
$F(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in A_X$

$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 1) = \frac{12}{25}$

$F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{x=1}^{2} P(x) = \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{18}{25}$

$F(3) = P(X \leq 3) = \frac{22}{25}$

$F(4) = 1$



Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo:

Sea X el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. La distribución de probabilidad de X es:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	0,02	0,08	0,10	0,15	0,20	0,25	0,10	0,06	0,04

- Si llegan al menos dos clientes, ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen más de cinco?
- Encuentre $F_X(x)$, la f.d.a.
- Calcule $P(2 < X < 5)$ y $P(2 \leq X < 5)$.

lleguen 5 o menos

$$1.\ P(X \le 5 \mid X \ge 2) = \frac{P(2 \le X \le 5)}{P(X \ge 2)} = \frac{\sum_{x=2}^{5} p(x)}{1 - P(X<2)} = \frac{\sum_{x=2}^{5} p(x)}{1 - P(X \le 1)} = \frac{\sum_{x=2}^{5} p(x)}{1 - \sum_{x=0}^{1} p(x)}$$

Solución

$$F(0) = P(X \le 0) = P(X=0) = 0.02$$

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{x=0}^{1} P(x) = 0.1$$

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} P(x) = 0.2$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} P(x) = 0.35$$

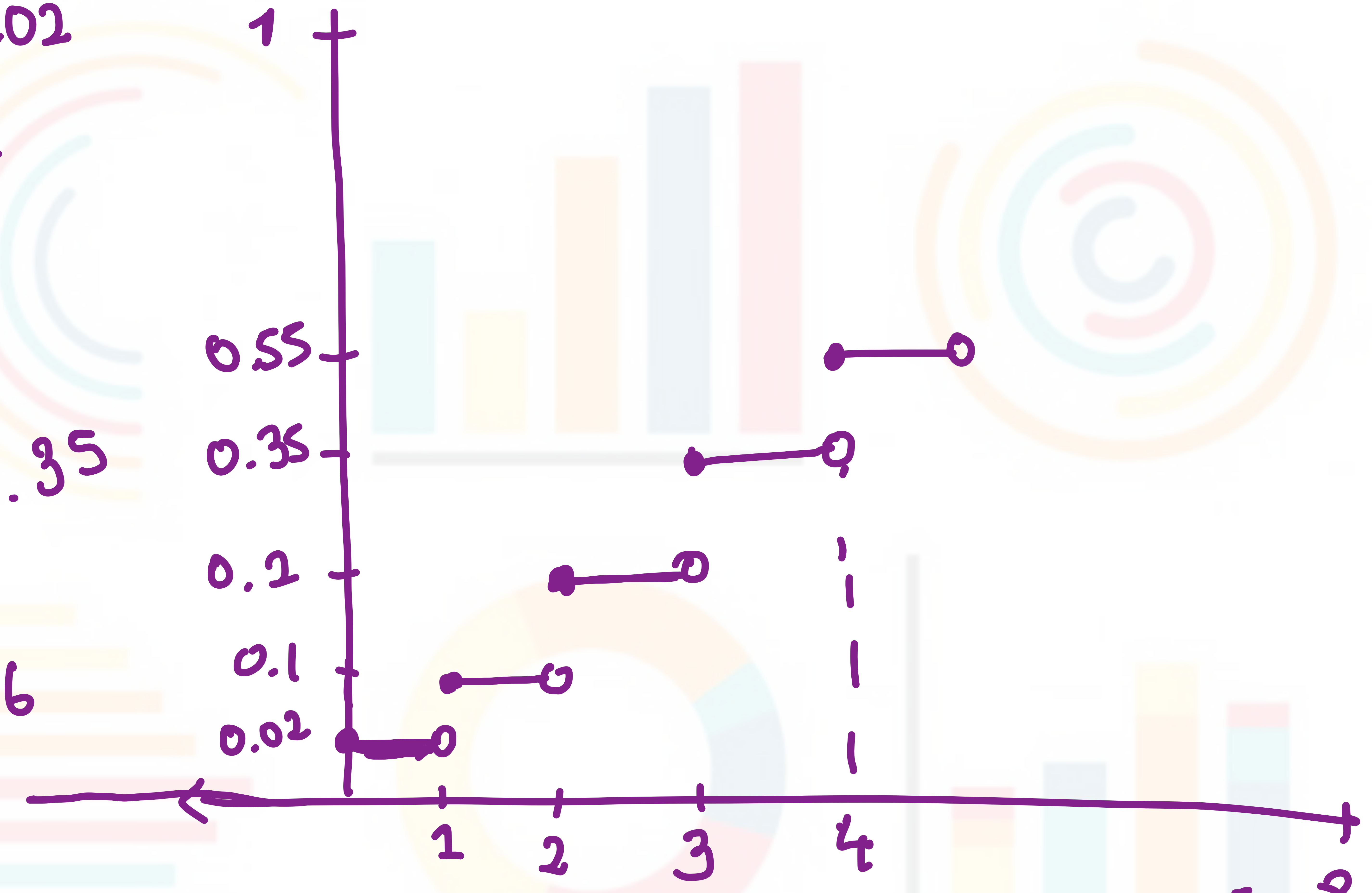
$$F(4) = 0.55$$

$$F(5) = 0.8$$

$$F(6) = 0.9$$

$$F(7) = 0.96$$

$$F(8) = 1$$



$\bullet\ P(2 < X < 5)$

$$= P(3 \leq X \leq 4) = \sum_{x=3}^{4} p(x) = 0.15 + 0.2 = \boxed{0.35}$$

Gracias

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.02, & 0 \leq x < 1 \\ 0.1, & 1 \leq x < 2 \\ 0.2, & 2 \leq x < 3 \\ 0.35, & 3 \leq x < 4 \\ 0.55, & 4 \leq x < 5 \\ \vdots & \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$$

Clase preparada por: Verónica Guarín

$\bullet\ P(2 < X < 5)$

$$= P(3 \leq X \leq 4) = F(4) - F(2) = 0.55 - 0.2$$

$$= 0.35$$