Estadística I

Introducción

¿Qué es Estadística?

¿Qué es Probabilidad?

Definiciones Básicas

Experimento Aleatorio

- ✓Un experimento aleatorio es cualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre. Se conocen los posibles resultados pero no se sabe de ante mano cuál va a ocurrir.
- ✓Un experimento aleatorio es aquel que proporciona diferentes resultados aún cuando se repite bajo las mismas condiciones experimentales.

Definiciones Básicas

Experimento Aleatorio - Ejemplos

- ✓Lanzar una moneda.
- ✓Lanzar un dado.
- ✓Apostar al resultado final de un partido.
- ✓Seleccionar un estudiante de ingeniería del curso de probabilidad.
- ✓Jugar la lotería.

Definiciones Básicas

Espacio Muestral S

El espacio muestral denotado por S, es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplo:

✓ Sea el experimento aleatorio lanzar una moneda.

Denotaremos con c si el resultado es cara y s en caso de ser sello.

$S = \{c, s\}$

✓ Sea el experimento aleatorio lanzar dos monedas.

$S = \{cc, cs, sc, ss\}$

Definiciones Básicas

Espacio Muestral S

✓ Entre las cinco personas que se destacaron en la carrera de ingeniería X por tener un promedio sobre 4.5 se va a escoger una pareja para trabajar en una empresa.

Los candidatos son: Luisa, Jorge, Matilde, Carlos y Eleonora.

$$S = \{LJ, LM, LC, LE, JM, JE, JC, MC, ME, CE\}$$

Definiciones Básicas

Espacio Muestral S

Considere un experimento en el que, cada 10 minutos, se verifica el volumen de llenado de las latas de refresco de una máquina llenadora automática, con la finalidad de determinar si las latas cumplen con las especificaciones de volumen que deben contener. La evaluación continúa hasta encontrar una lata que no cumpla con las especificaciones.

Si notamos con s el hecho de que la lata cumple con las especificaciones y n de que no cumple con ellas.

$$S = \{n,\ sn,\ ssn,\ sssn,\ ssssn,\ \ldots y\ asi\ sucesivamente\}$$

Definiciones Básicas

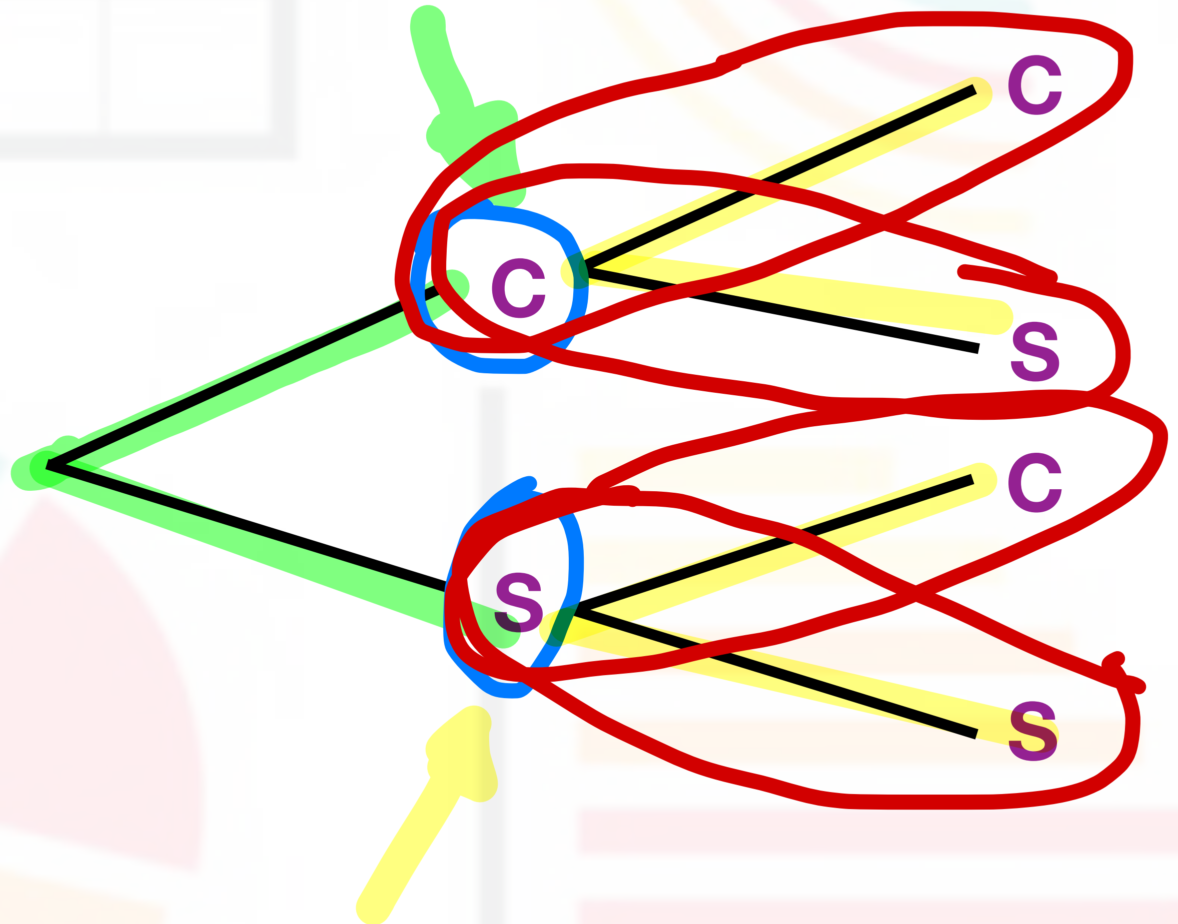
Diagrama de Árbol

El diagrama de árbol es una estrategia que se utiliza para hallar espacios muestrales. Este se construye teniendo en cuenta que cada ramificación equivale a una repetición en la muestra. Además, cada rama del árbol corresponde a una posibilidad de ocurrencia del evento. Así que el número de ramas concuerda con el número de elementos del espacio muestral.

Definiciones Básicas

Diagrama de Árbol

Sea el experimento aleatorio lanzar dos monedas.

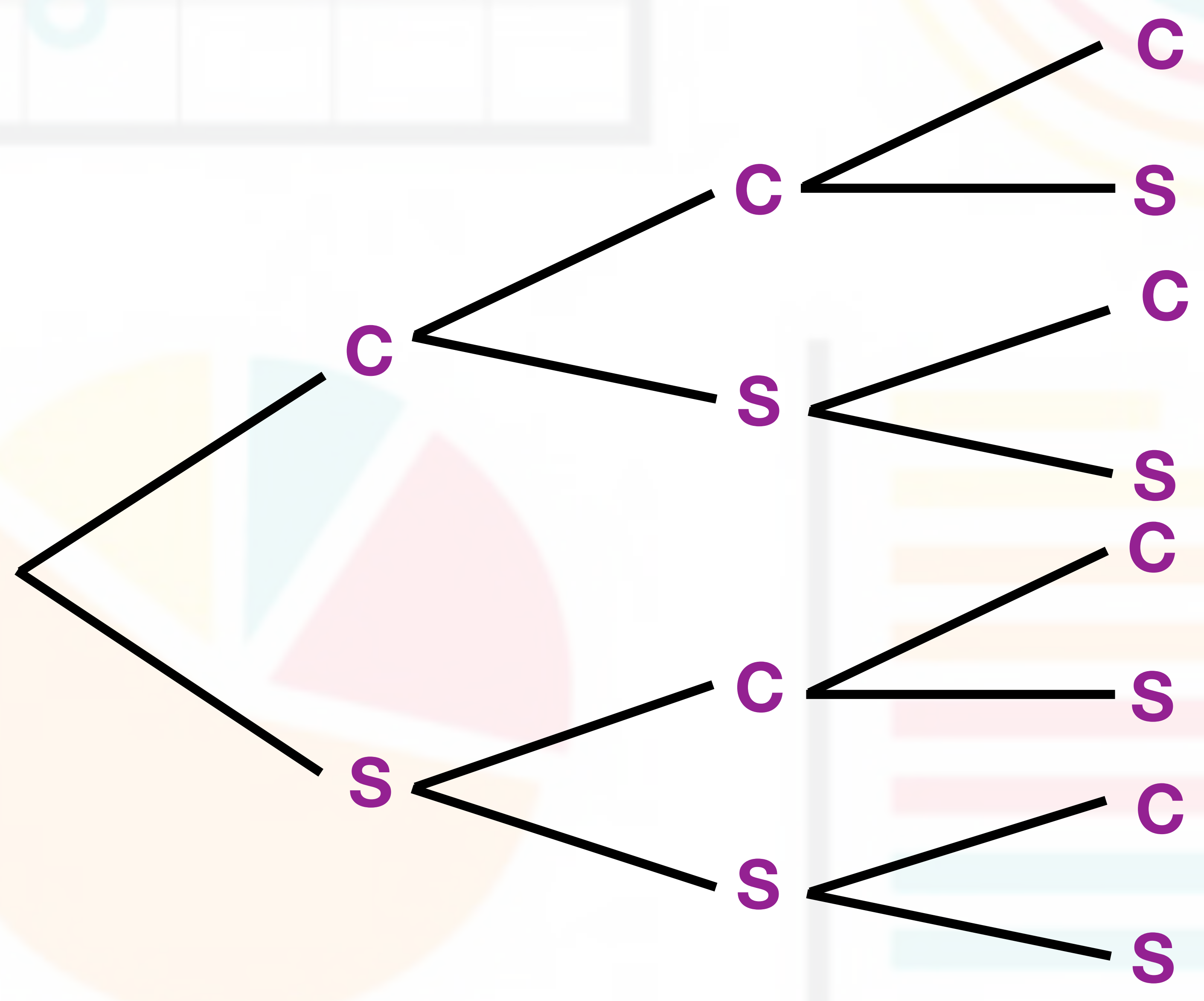


$$S = \{CC, CS, SC, SS\}$$

Definiciones Básicas

Diagrama de Árbol

Sea el experimento aleatorio lanzar tres monedas.



$$S = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$$

Definiciones Básicas

Evento

Un evento del espacio muestral es un grupo de resultados (subconjunto) contenidos en éste cuyos miembros tienen una característica en común. Usualmente se denotan con letras mayúsculas.

Evento Nulo o Vacío

Es el evento que no tiene resultado en el espacio muestran, denotado por $\{\varnothing.\}$

Definiciones Básicas

Evento - Ejemplo

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior de los estudiantes destacados en ingeniería.

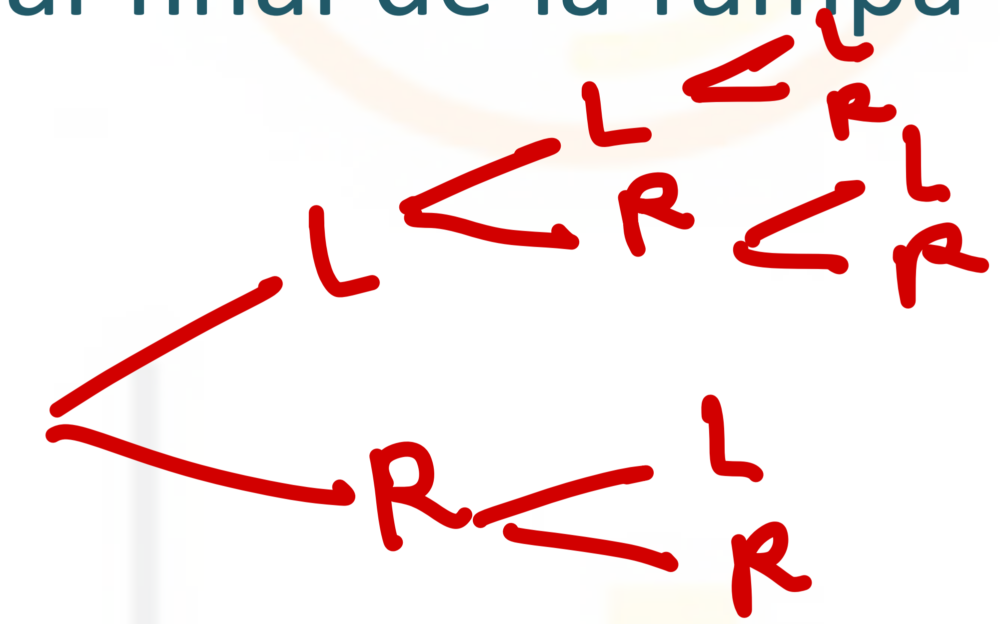
✓Defina los elementos del evento los dos estudiantes seleccionados son hombres. $E_1 = \{JC\}$.

✓Defina los elementos del evento E_2: Luisa es una de las estudiantes seleccionadas. Note que en este caso el evento está dado por: $E_2 = \{LJ, LM, LC, LE\}$

Definiciones Básicas

Evento - Ejemplo

Considere un experimento en el cual cada uno de los **tres** vehículos que toman una salida de una autopista particular giran a la izquierda (L) o la derecha (R) al final de la rampa de salida. El espacio muestral esta dado por:



$$S = \{LLL,\ RLL,\ LRL,\ LLR, LRR, RLR,\ RRL, RRR\}$$

✓Los elementos del evento E_1: a lo más uno de los tres vehículos gira a la derecha es:

$$E_1 = \{LLL,\ RLL,\ LRL,\ LLR\}$$

✓Los elementos del evento E_2: mínimo uno de los tres vehículos gira a la derecha es: $E_2 = \{RLL, LRL, LLR, LRR, RLR, RRL, RRR\}$

Definiciones Básicas

Evento - Ejemplo

Se lanza un dado corriente dos veces consecutivas, sean los eventos

$A:$ La suma de los resultados obtenidos es menor que 7

$B:$ El segundo resultado es un número primo

$C:$ El producto de los resultados obtenidos es 7.

(primero se debe definir el espacio muestral):

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & \dots & (1,6) \\ (2,1), & (2,2) & \dots & & \\ \vdots & & & & \\ (6,1), & (6,2) & \dots & & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

Definiciones Básicas

Evento - Ejemplo

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3),$
$(2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$

$B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,3), (2,5),$
$(3,2), (3,3), (3,5), (4,2), (4,3), (4,5), (5,2),$
$(5,3), (6,1), (6,2), (6,3), (6,5)\}$

$C = \{\varnothing\}$

Definiciones Básicas

Al definir el espacio muestral como un conjunto, todas las operaciones básicas de la teoría de conjuntos es aplicable a los eventos. Así podemos hablar de unión, intersección, complemento y contenencia.

Definiciones Básicas

Sean A y B dos eventos del espacio muestral S.

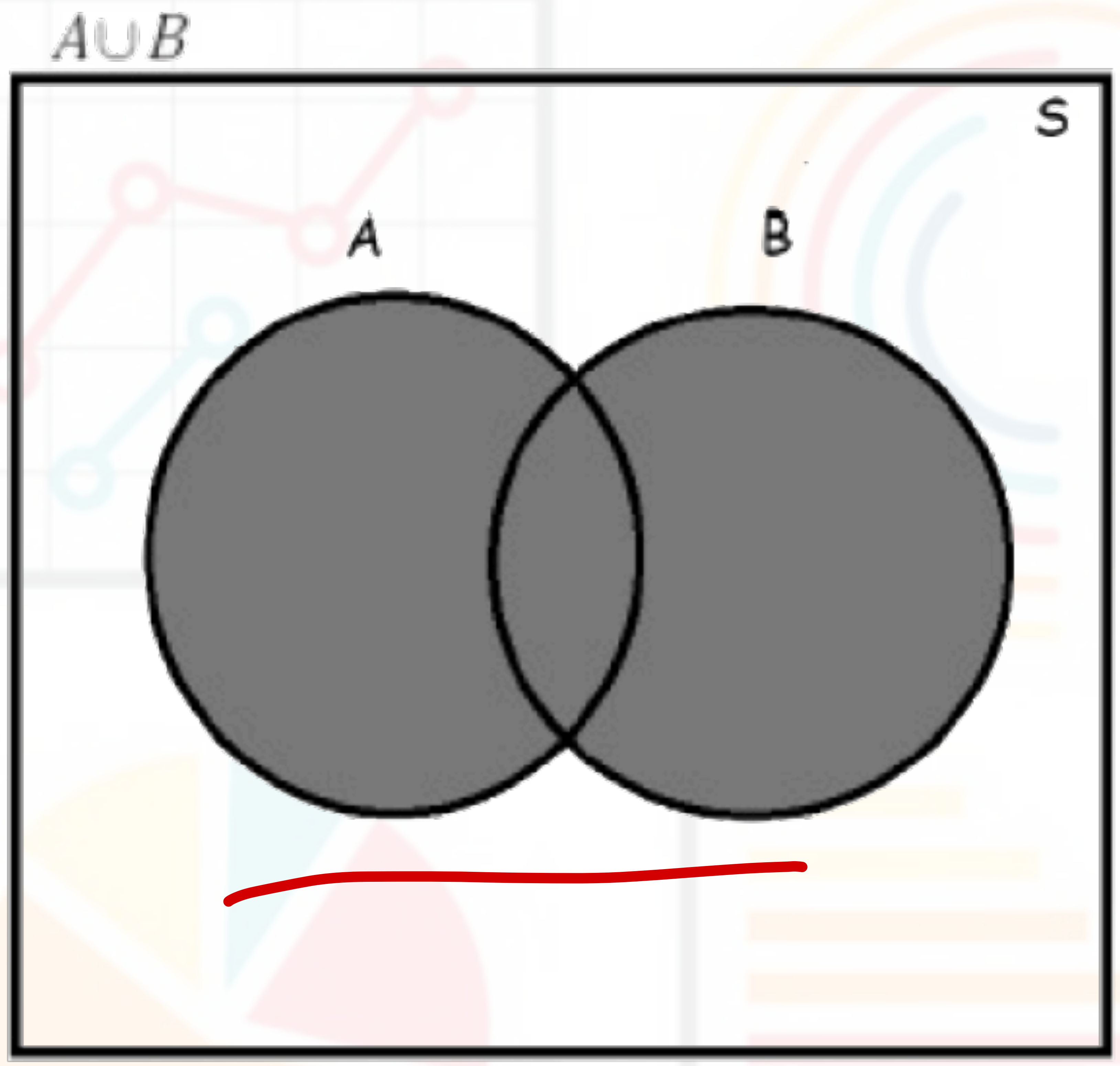
Unión: Es el evento formado por todos los posibles resultados en A o B o en ambos. Se denota por $A \cup B$.

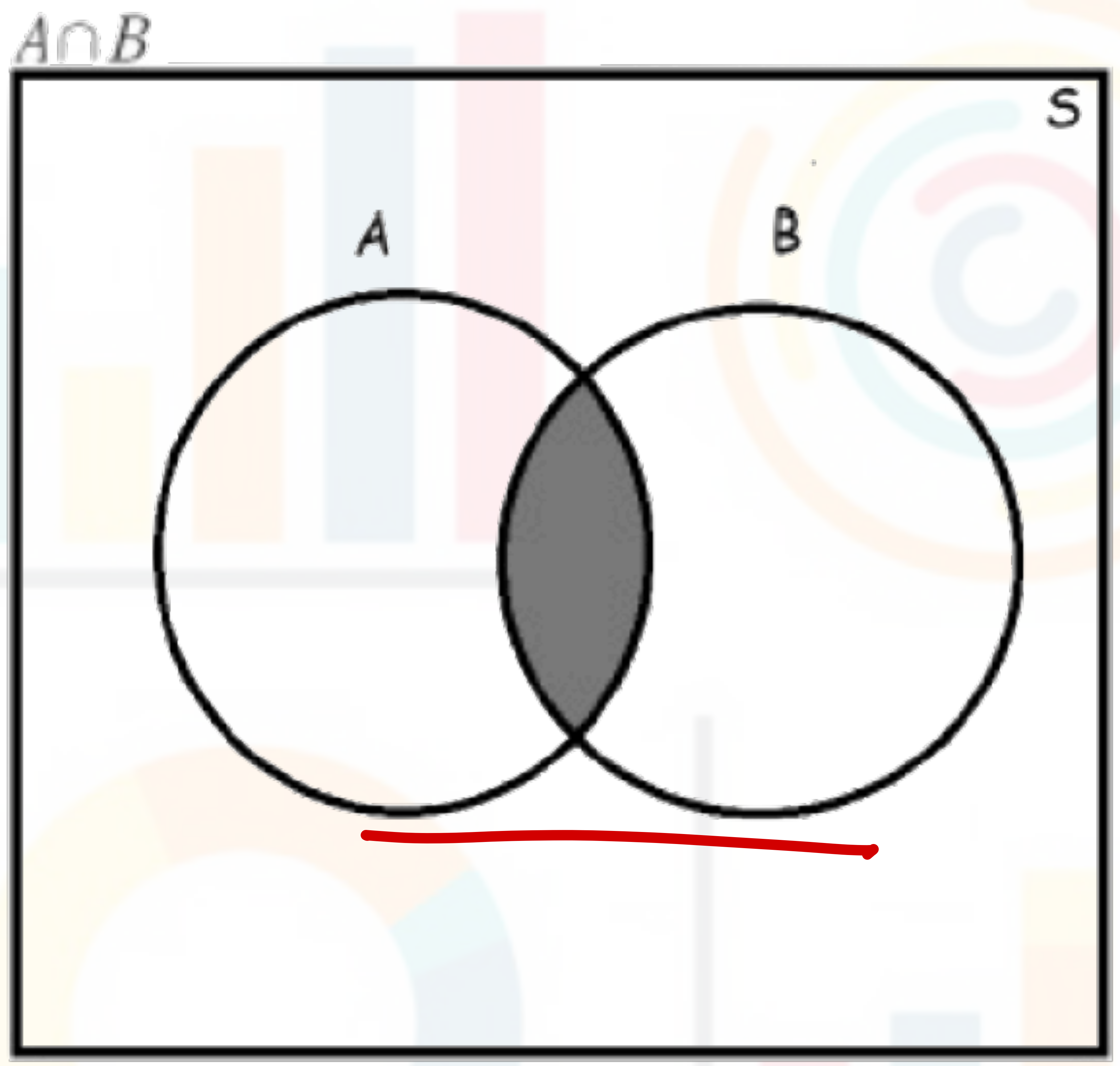
$$\underline{A \cup B} : \{x \in S \,|\, \underline{x \in A} \; \underline{\vee} \; \underline{x \in B}\}$$

Intersección: Es el evento formado por todos los resultados comunes tanto en A como en B. Se denota por $A \cap B$.

$$\underline{A \cap B} : \{\, x \in S : \underbrace{x \in A} \wedge \underbrace{x \in B}\}$$

Definiciones Básicas





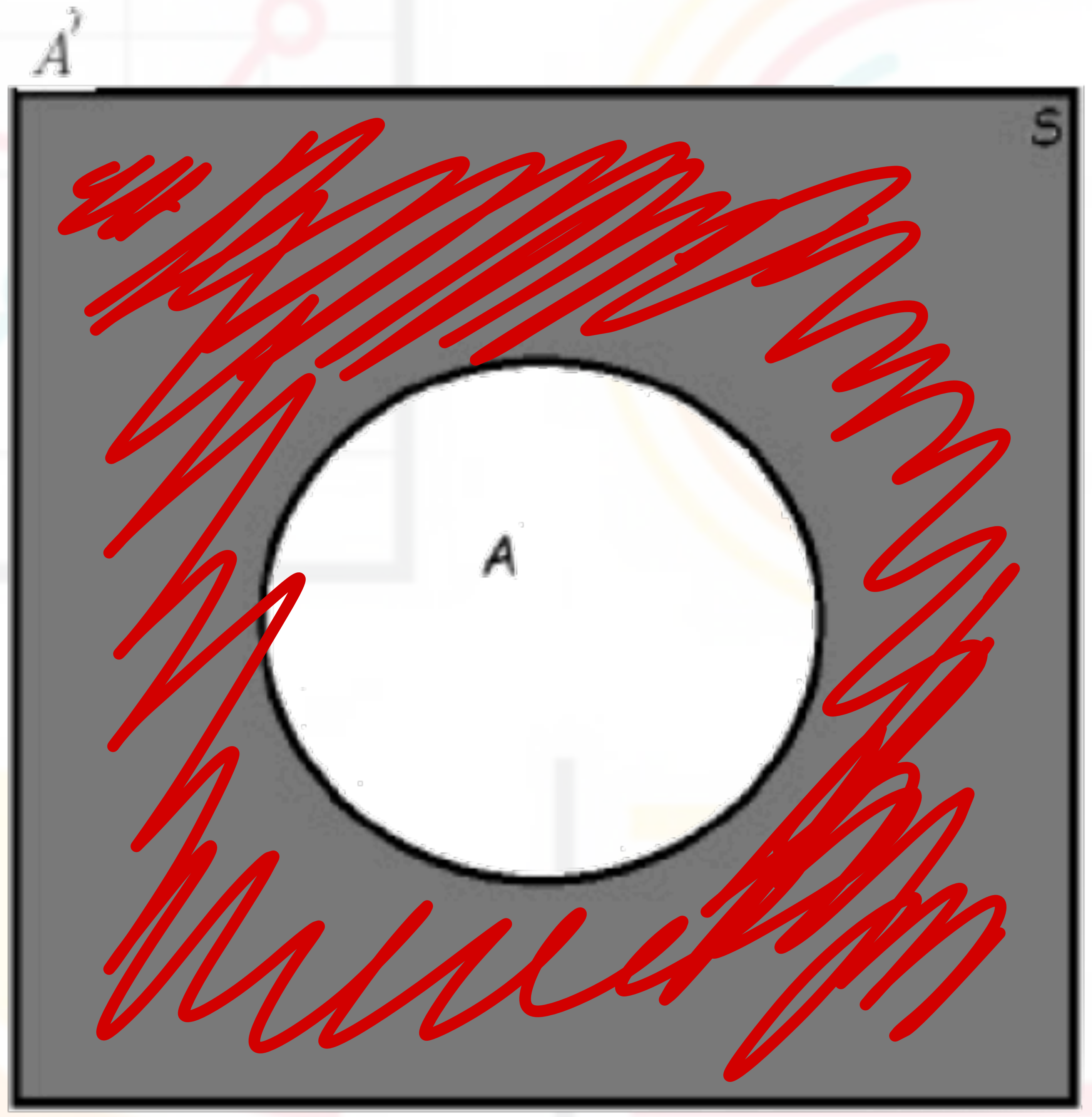
Definiciones Básicas

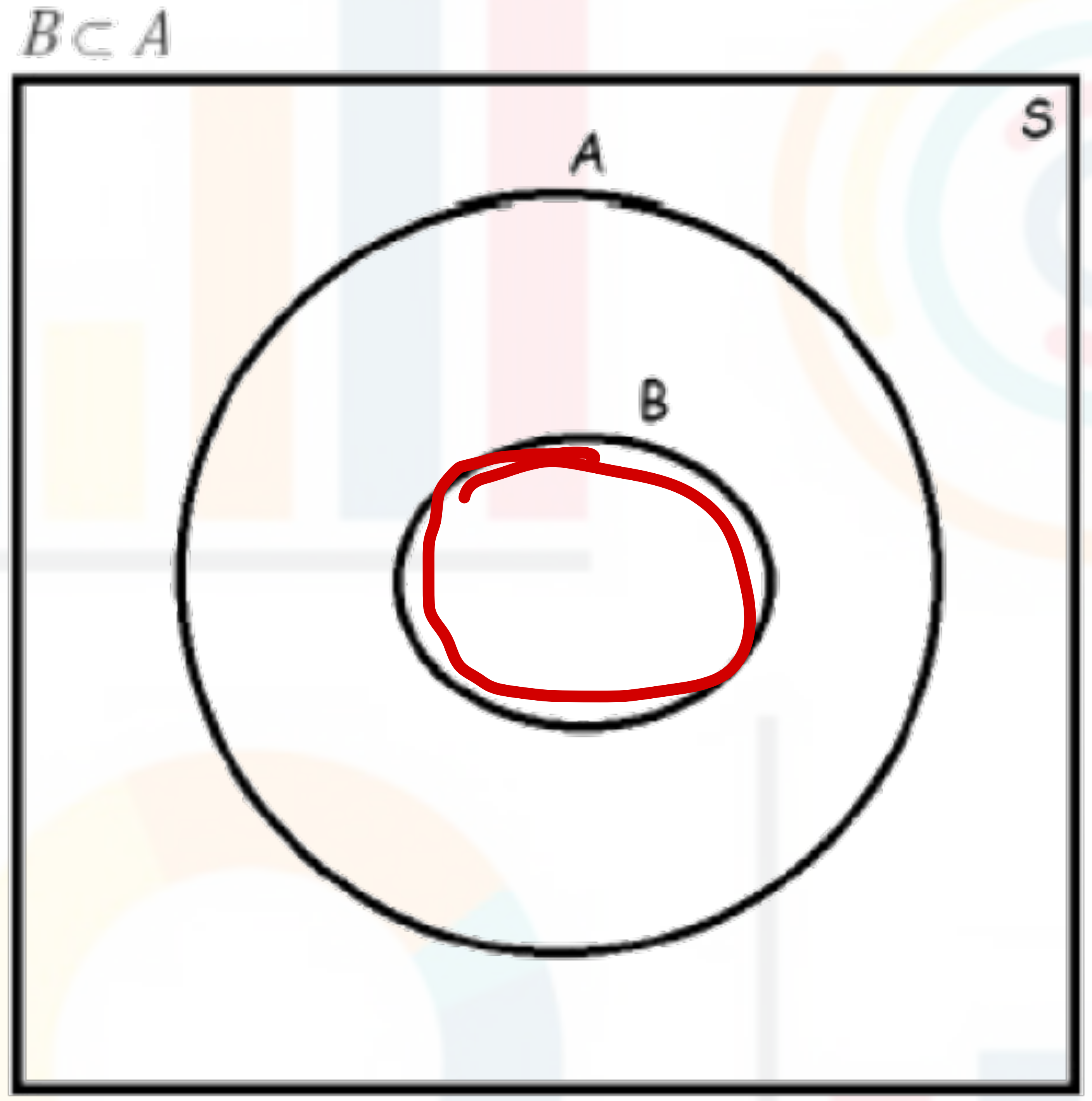
Sean A y B dos eventos del espacio muestral S.

Complemento: El complemento de un evento A con respecto a el espacio muestral S, es aquel que contiene a todos los resultados de S que no se encuentran en A. Se denota por A' (también se puede denotar como: A^C, $\bar{A}$).

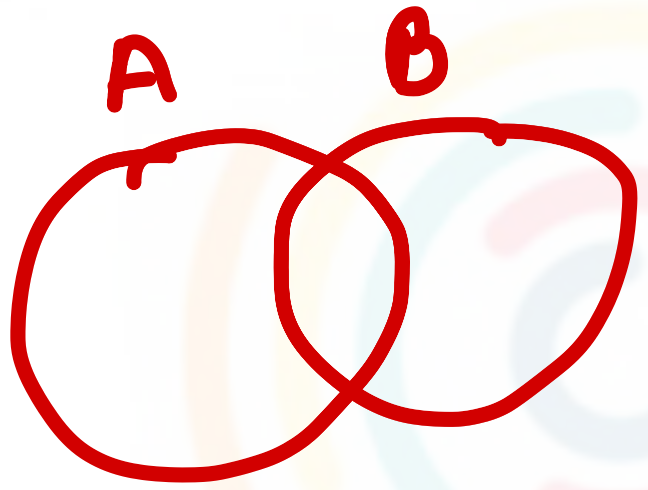
Contenencia: Si cualquier resultado de B también es un resultado de A, se dice que el evento B está contenido en A. Se denota por $B \subset A$.

Definiciones Básicas





Definiciones Básicas

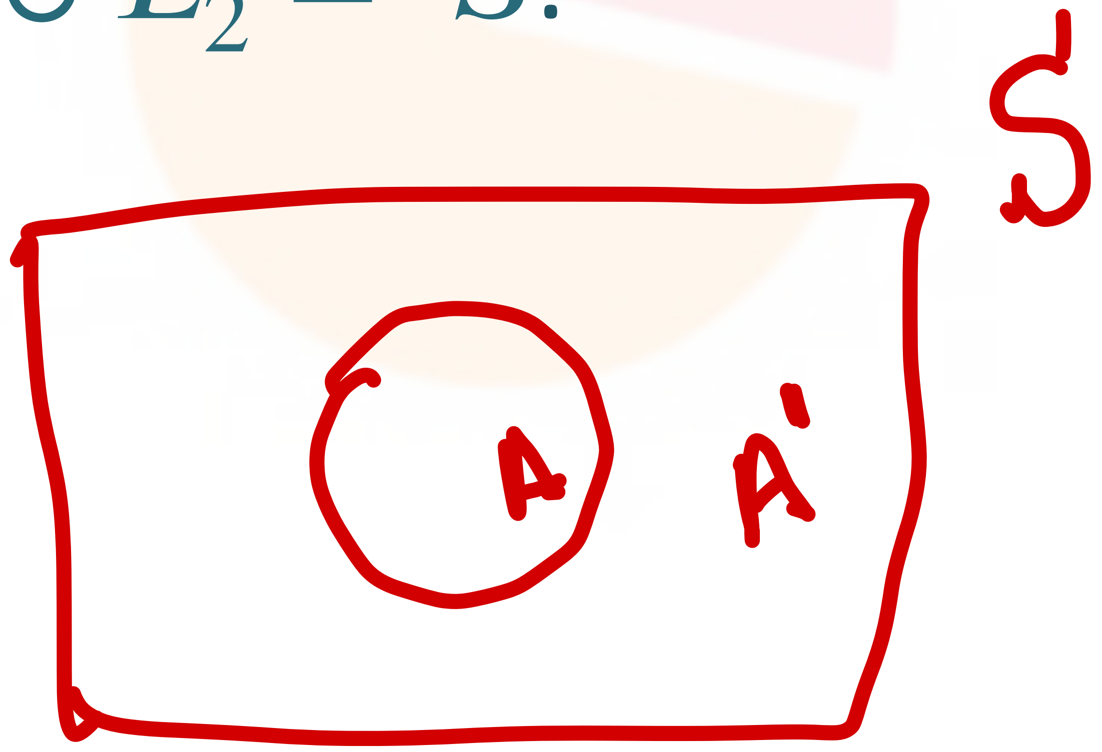


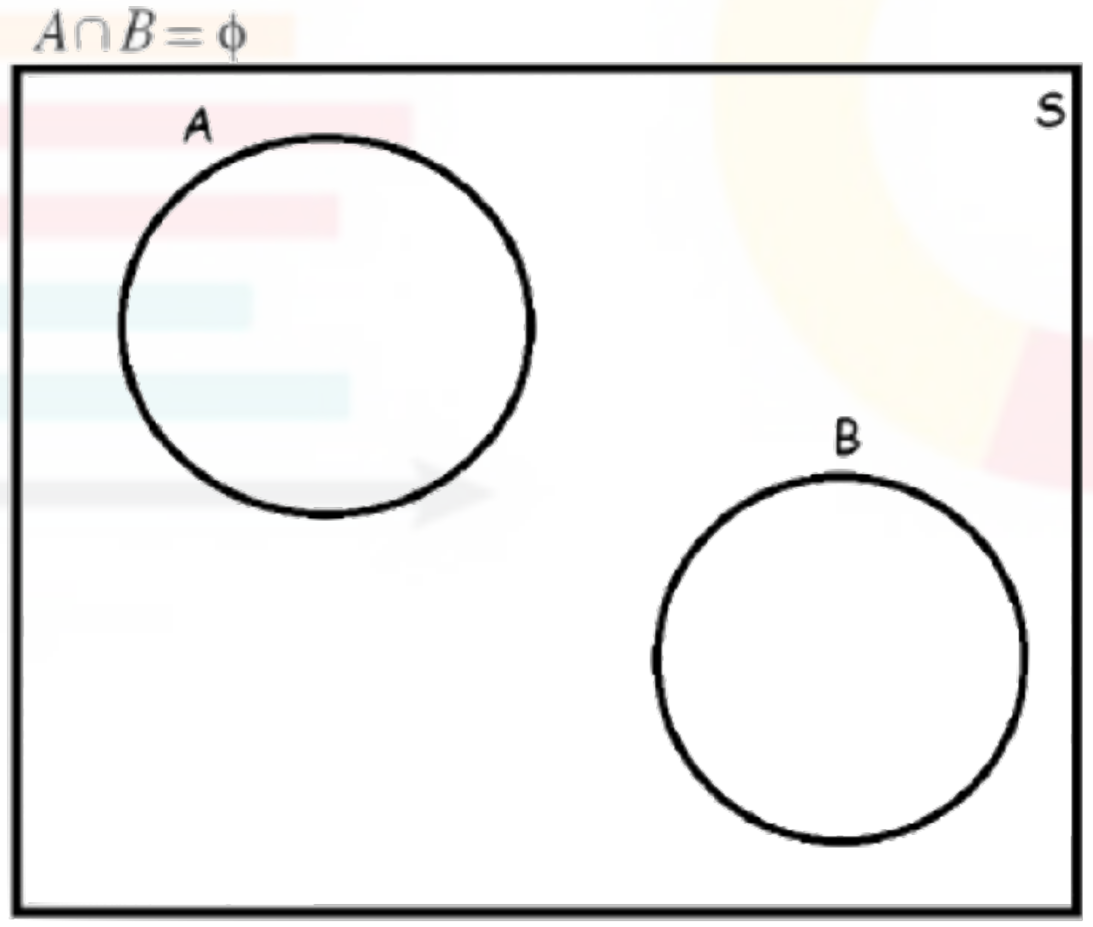
Sean A y B dos eventos del espacio muestral S.

$S = A \cup B$

Eventos excluyentes (disjuntos): Dos eventos E_1 y E_2 se dicen mutuamente excluyentes o disyuntos si $E_1 \cap E_2 \ = \ \{\varnothing\}$.

Eventos Exhaustivos: Dos eventos E_1 y E_2, se dice que son exhaustivos si se cumple que $\mathrm{E}_1 \cup E_2 = \ S$.





Definiciones Básicas

Propiedades de los Eventos

Propiedades de los Eventos:

- ✓ $A \cup \varnothing = A$
- ✓ $A \cap \varnothing = \varnothing$
- ✓ $A \cup A^C = S$
- ✓ $A \cap A^C = \varnothing$
- ✓ $S^C = \varnothing$
- ✓ $\varnothing^C = S$
- ✓ $\left(A^C\right)^C = A$
- ✓ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- ✓ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Probabilidad

Probabilidad Clásica

El término de probabilidad se refiere al estudio del azar y la incertidumbre de cualquier situación en la cual varios posibles sucesos pueden ocurrir; la disciplina de la probabilidad proporciona métodos para cuantificar las oportunidades y probabilidades asociadas con varios sucesos.

$$P(E) = \frac{\#\{E\}}{\#\{S\}} = \frac{Casos\ Favorables}{Casos\ posibles}$$

Probabilidad

Probabilidad Clásica - Ejemplo

✓Sea el experimento aleatorio lanzar un dado al aire, el espacio muestral de este experimento está dado por:

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Calculemos la probabilidad del evento A: que salga un número par en la cara superior del dado, esto es:

$A = \{2,4,6\}$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#S} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Probabilidad

Axiomas de Probabilidad

La probabilidad es un número que se asigna a cada miembro de una colección de eventos de un experimento aleatorio y que satisface las siguientes propiedades.

Si S es el espacio muestral y E es cualquier evento del experimento aleatorio:

- ✓ $P(S) = 1$. La suma de todas las probabilidades de eventos simples en el espacio muestral S tiene que ser igual a 1.
- ✓ $0 \leq P(E) \leq 1$. para todo evento E. Una probabilidad es un número entre 0 y 1 inclusive. $P(E) = 0$ representa el evento imposible mientras que $P(E) = 1$ representa el evento seguro.
- ✓ Para dos eventos E_1 y E_2 con $E_1 \cap E_2 = \{\varnothing\}$ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ $\quad E_i \cap E_j = \{\varnothing\} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)}$

Probabilidad

Axiomas de Probabilidad

Los axiomas anteriores implican los siguientes resultados:

✓ $P(\varnothing) = 0$

✓Si $S = E \cup E^c$, entonces $\boxed{P(E^c) = 1 - P(E)}$

✓Si A y B son dos eventos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

✓Si A y B son dos eventos, entonces

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

✓Si A y B son dos eventos, entonces

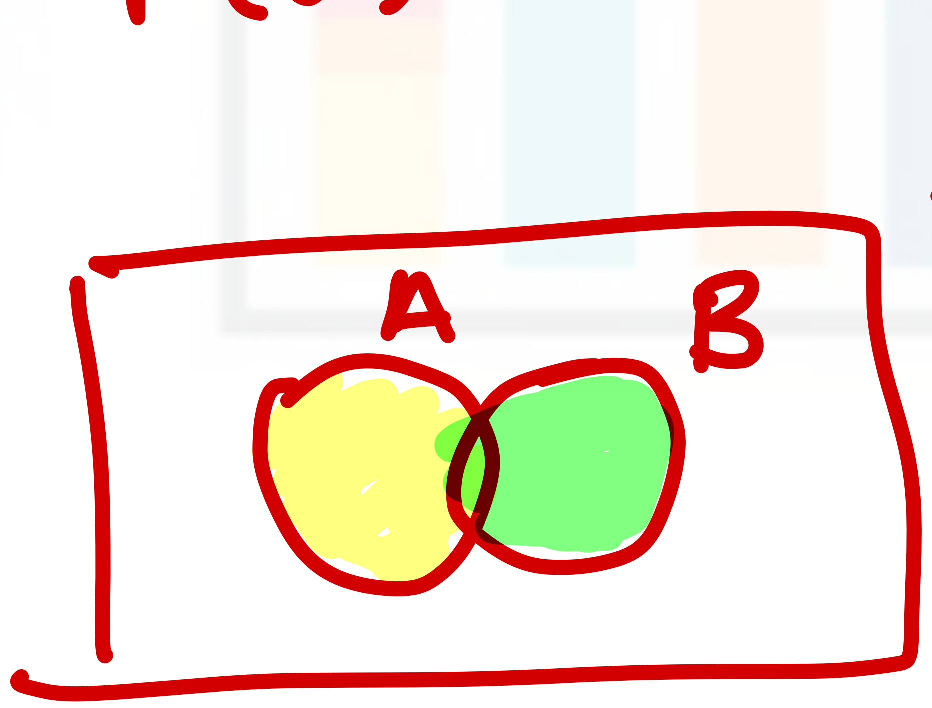
$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$$

$S = E \cup E^c$

$P(S) = P[E \cup E^c]$

$\boxed{1 = P(E) + P(E^c)}$

$P(E) = 1 - P(E^c)$



Probabilidad

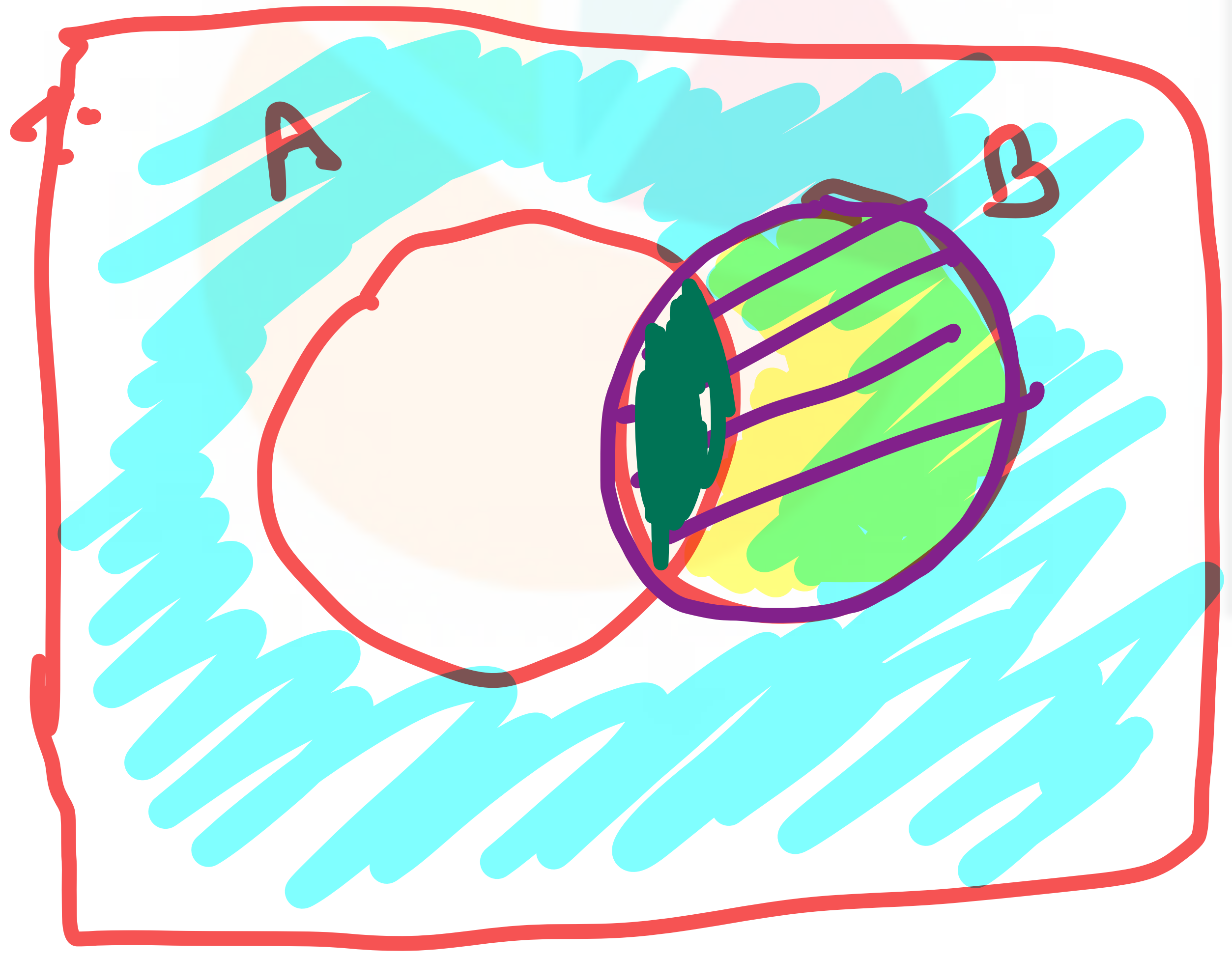
Axiomas de Probabilidad

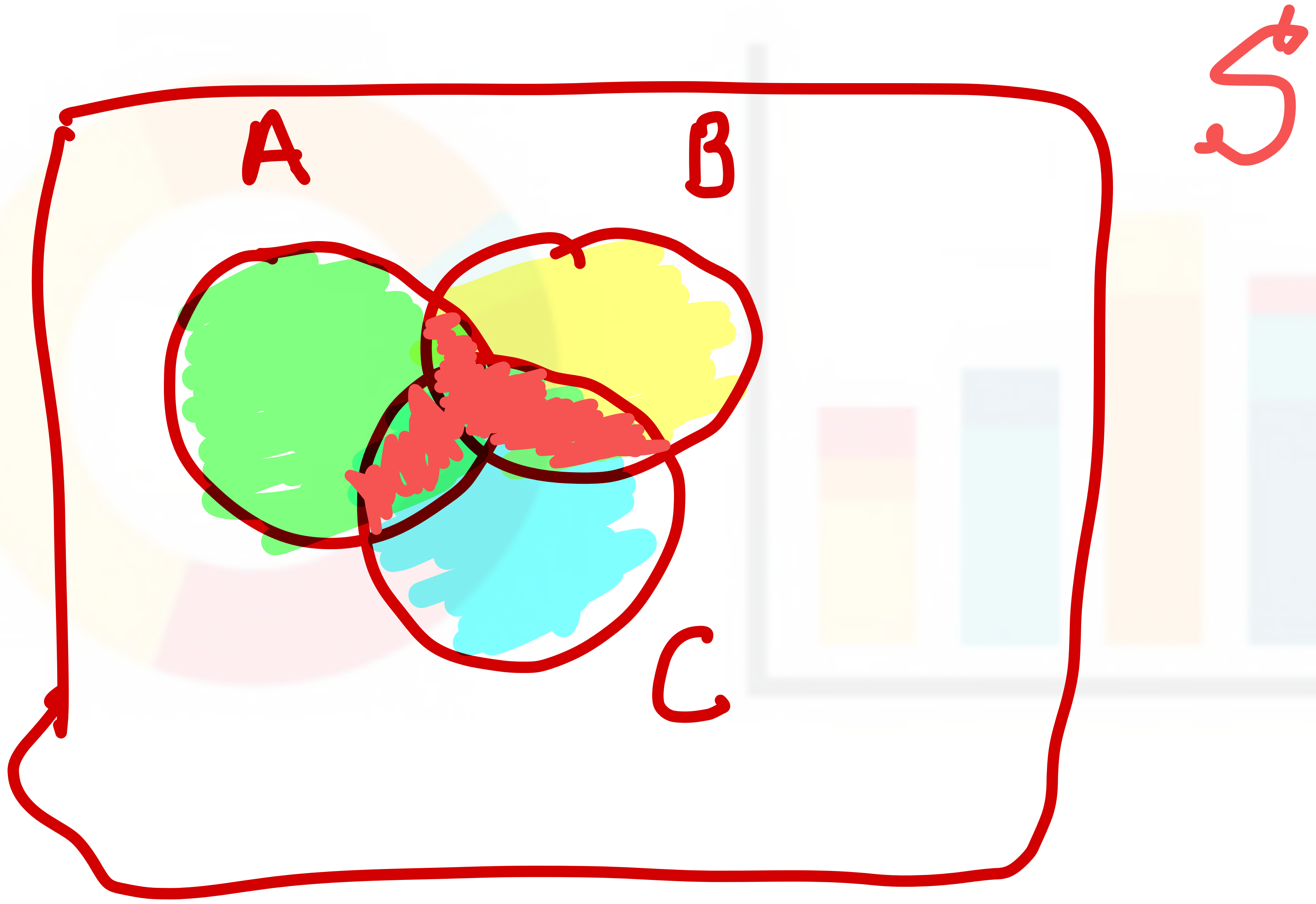
Los axiomas anteriores implican los siguientes resultados:

✓ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

✓ $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ ✓

✓Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.





Probabilidad

Ejemplo

Sean A y B eventos tales que $\boxed{P(A\cup B)} = 0.7$ y $P(B) = 0.2$. Determinar $P(A)$ de tal manera que los eventos A y B sean mutuamente excluyentes.

Solución.

Sabemos que:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(\overbrace{A\cap B}^{\emptyset})$$

$$0.7 = P(A) + 0.2 - 0$$

$$0.7 - 0.2 = P(A)$$

Luego $P(A) = 0.5$.

Probabilidad

Ejemplo

Sean A y B dos eventos, con $P(A) = 1/2$ y $P(B^c) = 1/4$. ¿Pueden ser los eventos A y B mutuamente excluyentes?

Solución.

Suponga que A y B son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Por otro lado veamos cuál es $P(B)$

$$P(B) = 1 - P(B^c)$$
$$P(B) = 1 - 1/4$$
$$P(B) = 3/4$$

Luego $P(A \cup B) = 1/2 + 3/4 = 5/4 > 1.$

Probabilidad

Ejemplo

La siguiente tabla presenta la historia de 940 productos de un proceso de fabricación de semi-conductores. Se elige al azar un producto. Sea A: el evento en que el producto tenga altos niveles de contaminación y B: el evento en que el producto pasó por un proceso de revisión electrónica.

$P(A) = \frac{358}{940}$

$P(B) = \frac{314}{940}$

		Revisión Electrónica		
		No	Si	Total
Contaminación alta	No	514	68	582
	Si	112	$\boxed{246}$	358
	Total	626	314	940

$P(A \cap B) = \frac{246}{940}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{358}{940} + \frac{314}{940} - \frac{246}{940}$ ✓

Probabilidad

Ejemplo

- Calcular la probabilidad de que el semi-conductor tiene altos niveles de contaminación.
- Calcular la probabilidad del evento E: el semi-conductor pasó por un proceso de revisión electrónica.
- Calcular la probabilidad de que el producto tenga altos niveles de contaminación y haya pasado por revisión electrónica.
- Calcular la probabilidad de que el producto tenga altos niveles de contaminación o pase por revisión electrónica.

Probabilidad

Ejemplo

A: Estud. inscritos en Alemán

I: " inscrito en Inglés.

$P(I) = 0.35$

$P(A) = 0.07$

$P(I \cap A) = 0.02$

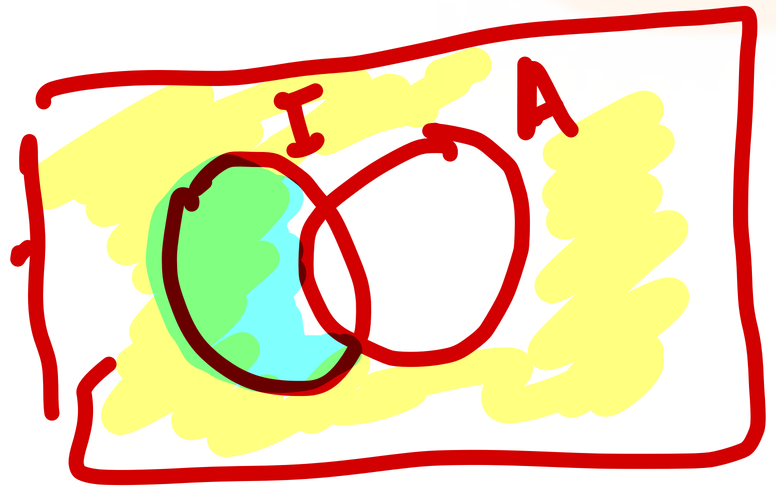
Un total del 35% de los estudiantes de una universidad están inscritos en un curso de inglés, el 7% en un curso de alemán y el 2% en inglés y alemán.

- ✓ ¿Qué porcentaje de estudiantes están inscritos en cursos de inglés pero no de alemán?

y

- ✓ ¿Qué porcentaje no están inscritos ni en inglés ni en alemán?

$$P(I \cap A^c) = P(I) - P(I \cap A)$$
$$= 0.35 - 0.02$$
$$= 0.33 \quad \text{ok}$$



$$P(I^c \cap A^c) = P((I \cup A)^c)$$
$$= 1 - P(I \cup A)$$
$$= 1 - [P(I) + P(A) - P(I \cap A)]$$
$$= 1 - [0.35 + 0.07 - 0.02]$$

Probabilidad

Ejemplo

En un estudio realizado por la alcaldía de la ciudad relacionado con la delincuencia y su relación con la drogadicción, se encontraron los siguientes resultados.

El 65% de los delincuentes son adictos a algún tipo de droga alucinógena, el 40% de los delitos cometidos se han realizado con armas blancas. Además, el 34% de los delincuentes son adictos a alguna droga y realizan sus atracos con armas blancas.

A: usa arma blanca.

D: es adicto a alguna droga.

$P(A) = 0.4$

$P(A \cap D) = 0.35.$

$P(D) = 0.65$

Probabilidad

Ejemplo

Calcular las siguientes probabilidades:

- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea adicto a alguna droga alucinógena?
- ¿Cuál es la probabilidad de que utilice un arma distinta al arma blanca para sus atracos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea adicto o haya ejecutado su delito con un arma blanca? $P(D \cup A) = P(D) + P(A) - P(D \cap A)$
- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea adicto pero si haya ejecutado sus delitos con un arma blanca? $P(D^c \cap A)$

$P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - 0.65.$

Probabilidad

$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.4.$

Gracias

Clase preparada por: Verónica Guarín.