

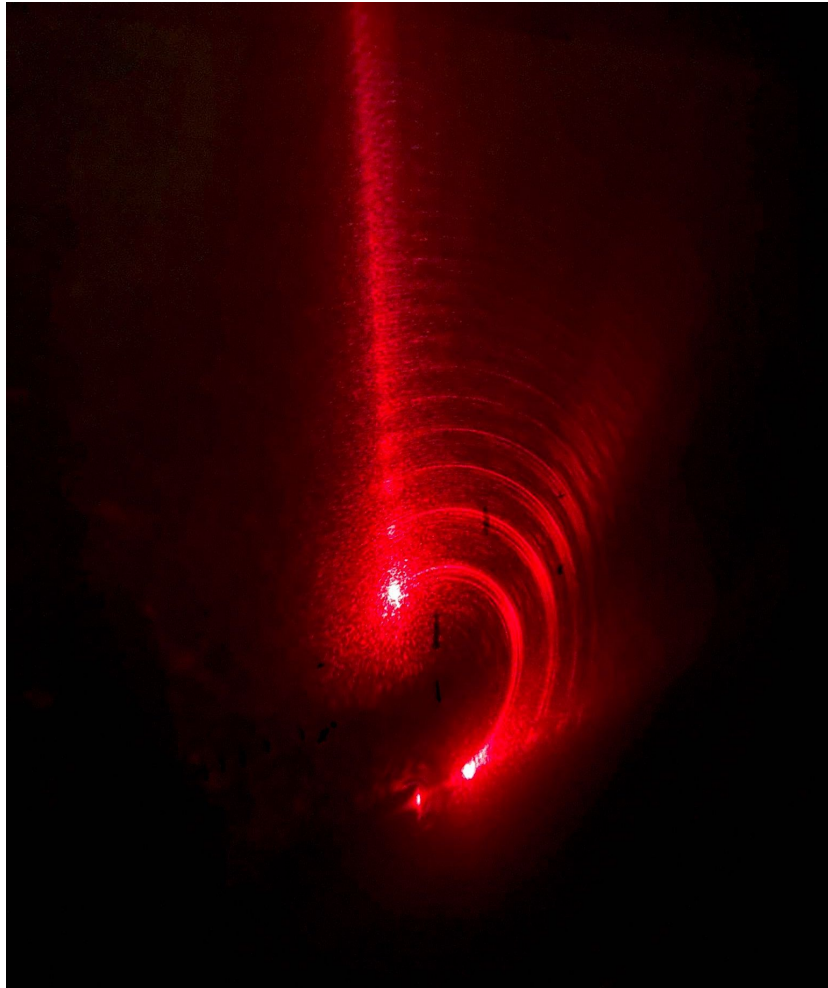
Interferometro

Nicolò Raffaeli, Francesco Rossi, Alessandro Varsi

Maggio 2023

Abstract

In questa esperienza di laboratorio di ottica abbiamo utilizzato due diverse configurazioni di **interferometro** per osservare e analizzare fenomeni di interferenza. Le condizioni di interferenza possono essere realizzate utilizzando una singola sorgente di luce e producendo delle sorgenti secondarie ottenute facendo percorrere ai raggi dei cammini ottici differenti. I raggi, una volta ricombinati su uno schermo, danno luogo a massimi (interferenza costruttiva) e minimi (interferenza distruttiva) di intensità, che si osservano nei punti in cui i raggi sono, rispettivamente, in fase e in opposizione di fase.



Indice

1	Introduzione	3
2	Interferometro di Fabry-Perot	3
2.1	Studio della figura di interferenza	3
2.2	Calibrazione del micrometro	5
3	Interferometro di Michelson	7
3.1	Calibrazione	7
3.2	Indice rifrazione aria	7
3.3	Indice rifrazione vetro	9
4	Diffrazione con righello	11
5	Appendice	13
5.1	Formule media pesata	13
5.2	Tabelle	13

1 Introduzione

Gli interferometri utilizzati in questa esperienza, quello di Michelson e quello di Fabry-Perot, sono dei separatori di ampiezza. La capacità di questi strumenti di permetterci di studiare l'interferenza tra onde elettromagnetiche si basa sulla possibilità di **modificare il cammino ottico** dei diversi raggi in modo tale da introdurre uno sfasamento variabile, ma coerente nel tempo (la condizione di coerenza deriva dalla stabilità del laser).

In particolare, quello che si osserva sullo schermo variando il cammino ottico è uno scorrimento delle frange di interferenza (costruttiva), che si presentano come delle corone circolari più o meno spesse a seconda della precisione sulla preparazione dell'apparato. La condizione di interferenza costruttiva si realizza quando la differenza di cammino ottico tra i raggi è pari ad un multiplo intero della lunghezza d'onda del fascio emesso dal laser.

Entrambe le configurazioni presenti in laboratorio utilizzano una lente convergente per introdurre una leggera divergenza nel fascio emesso dal laser, che poi incontra un sistema di specchi e lastre semiriflettenti che permettono la separazione dell'ampiezza.

2 Interferometro di Fabry-Perot

L'interferometro in questa configurazione prevede due specchi semi-riflettenti, di cui uno fisso e l'altro mobile, che formano la cosiddetta **cavità di Fabry-Perot**, all'interno della quale i raggi subiscono continue riflessioni e rifrazioni che introducono una differenza di fase coerente. Modificando la posizione dello specchio mobile si osserva il tipico scorrimento di frange che vogliamo studiare.

Il percorso dei raggi è illustrato nella seguente figura:

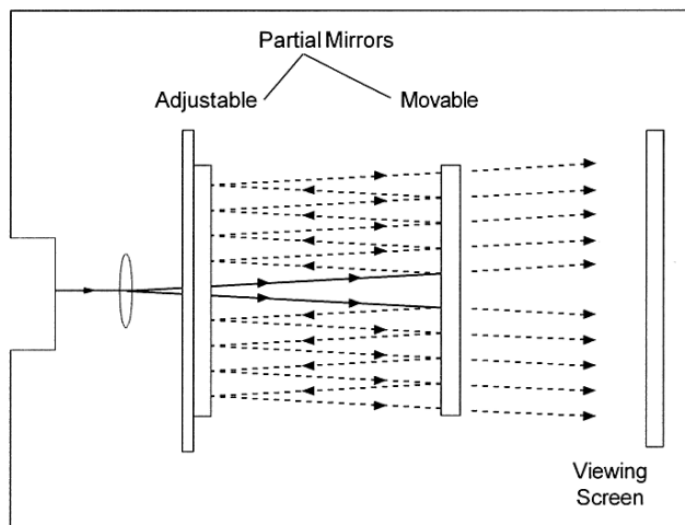


Figura 1: Funzionamento della cavità di Fabry-Perot

2.1 Studio della figura di interferenza

In questa prima parte abbiamo come obiettivo quello di verificare la legge che descrive la posizione dei massimi di interferenza:

$$\delta_r \frac{\lambda}{2\pi} + 2d\cos\theta = N\lambda \quad (1)$$

dove

- N è l'ordine del massimo (la variabile dipendente nella nostra analisi dati).
- θ è l'apertura angolare relativa a quel massimo.

- d è l'apertura della cavità (distanza tra gli specchi).
- $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ la lunghezza d'onda del laser presente in laboratorio.
- δ_r lo sfasamento indotto dalle riflessioni dentro alla cavità.

Per la verifica della legge abbiamo inizialmente misurato il raggio r dei cerchi che si formavano sullo schermo (foglio bianco appeso al muro di fronte all'apparato) e la distanza sorgente-schermo $D = (126.1 \pm 0.1) \text{ cm}$. Quest'ultima è stata ottenuta considerando la sorgente nel punto focale della lente ($f = 18 \text{ mm}$), che essendo una lente convergente si trova oltre la lente stessa. Dato che le frange avevano uno spessore maggiore della sensibilità del righello, il raggio di queste corone circolari è stato misurato ponendosi nel loro centro.

In Figura 2 è presente una schematizzazione dell'apparato con tutte le grandezze rilevanti.

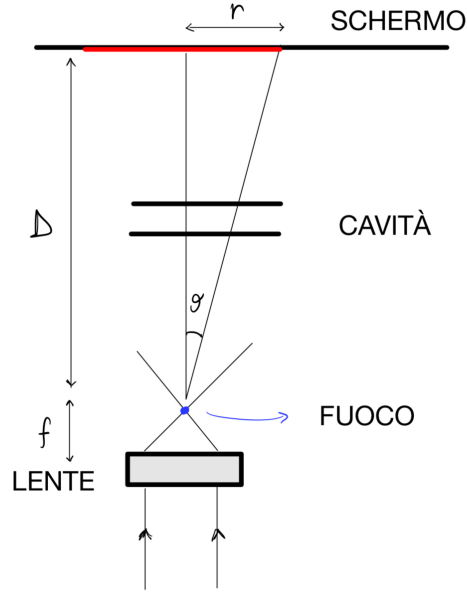


Figura 2: Localizzazione della sorgente in Fabry-Perot (non in scala)

Le misure relative a questa parte di esperimento sono raccolte nella tabella (3).

Il valore del coseno di θ è stato ricavato tramite relazioni geometriche

$$\cos\theta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}} \quad (2)$$

In questo modo l'errore sulla misura risulta essere

$$\sigma_{\cos\theta} = \frac{r}{D^2 + r^2} \sigma_d \quad (3)$$

con $\sigma_d = \sigma_D = \sigma_r = 0.1 \text{ cm}$ è indicato l'errore relativo all'utilizzo del righello come strumento di misura per le distanze.

A questo punto abbiamo interpolato i dati tramite la funzione

$$N(\cos\theta) = p_0 + p_1 \cos\theta$$

con

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\delta_r}{2\pi} \\ p_1 &= \frac{2d}{\lambda} \end{aligned} \quad (4)$$

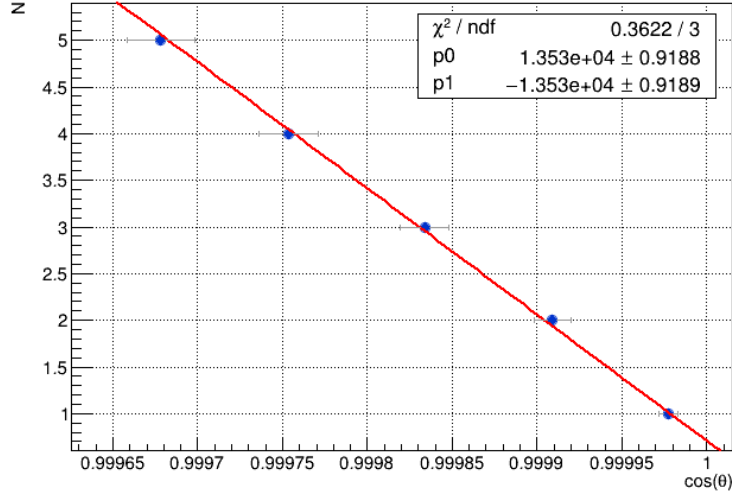


Figura 3: Interpolazione per ricercare d

Dai parametri liberi restituiti dal fit è possibile ricavare l'apertura della cavità di Fabry-Perot utilizzando la (4). Si ottiene

$$d = (4.2714 \pm 0.0003) \text{ mm}$$

Il valore del χ^2_{rid} mostra un ottimo adattamento dei dati al modello e il fatto che sia molto minore di 1 è causato dal grande errore sul valore del coseno dell'angolo corrispondente ai massimi.

2.2 Calibrazione del micrometro

Il micrometro che misura gli spostamenti dello specchio mobile necessita di una calibrazione per poter essere utilizzato come strumento di precisione. In questa parte di esperimento si cerca il fattore correttivo che deve essere applicato ad ogni misura fatta con il micrometro, sfruttando i fenomeni di interferenza.

Spostando lo specchio mobile di una quantità Δd si osserva uno scorrimento delle frange di interferenza sullo schermo perché viene modificato il cammino ottico tra i raggi in modo tale che un massimo torna a cadere nella stessa posizione angolare quando Δd è pari a un multiplo intero di lunghezze d'onda. La legge che prevede il numero di frange che scorrono al variare dello spostamento è quindi

$$2\Delta d \cos\theta = \Delta N \lambda \quad (5)$$

I valori dei ΔN raccolti sono riportati nella Tabella 4.

Tramite questa equazione è possibile misurare lo spostamento Δd con alta precisione sfruttando i fenomeni ondulatori della luce. Fissato un punto iniziale da cui far partire la misura ogni volta, abbiamo scelto una delle circonferenze corrispondenti all'interferenza costruttiva e ne abbiamo calcolato l'apertura con il metodo geometrico utilizzato nel paragrafo precedente. Si ottiene

$$\cos\theta = 0.9999 \pm 0.001$$

Abbiamo scelto uno spostamento $\Delta d_{att} = (25 \pm 1) \mu\text{m}$ e abbiamo contato diverse volte il numero di frange per ridurre l'errore statistico. Con 9 misure, fatte partendo sempre dallo stesso punto e utilizzando lo stesso Δd , si ottiene

$$\Delta N = 66.4 \pm 0.8$$

L'errore associato è la deviazione standard della media delle misure. Utilizzando la (5) e propagando l'errore si ottiene

$$\Delta d_{mis} = (21.7 \pm 0.2) \mu\text{m}$$

Il fattore correttivo risulta quindi essere

$$\epsilon = \frac{\Delta d_{mis}}{\Delta d_{att}} = 0.87 \pm 0.04$$

e lega la lettura sul micrometro (Δd_{att}) allo spostamento reale dello specchio mobile (Δd_{mis}).

3 Interferometro di Michelson

La seconda parte dell'esperienza prevedeva di eseguire nuove misure con l'interferometro di Michelson. Analogamente all'interferometro di Fabry-Perot l'obiettivo di questo strumento è creare una differenza di cammino ottico tra i due raggi, originati dalle sorgenti virtuali (corrispondenti ai due specchi) per poi analizzarne la figura di interferenza che questi creano quando ricombinati coerentemente. A differenza di Fabry-Perot non abbiamo alcuna cavità ma un sistema più complesso di specchi e lenti che crea due cammini ottici differenti, qui riportati:

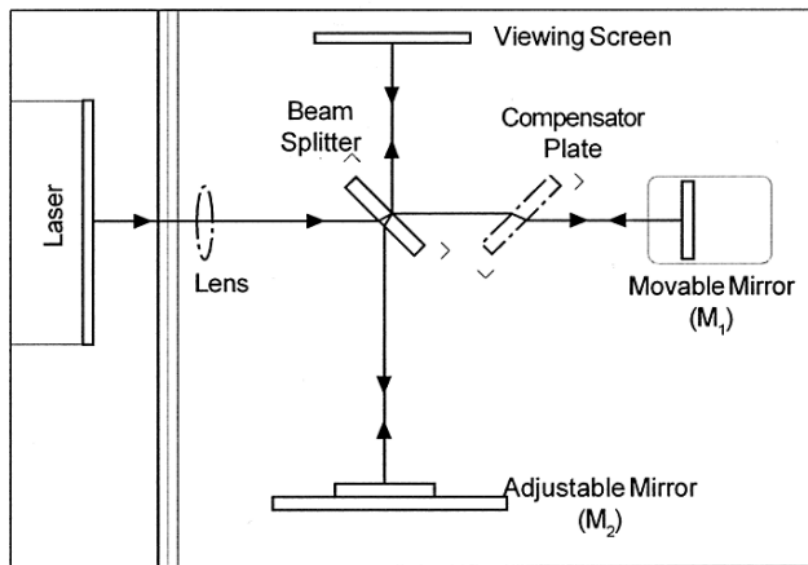


Figura 4: Cammino ottico in Interferometro Michelson

NOTA: il compensatore presentato in figura è un elemento che non è stato messo nel nostro apparato strumentale, sotto indicazione della scheda di laboratorio.

3.1 Calibrazione

Inizialmente abbiamo provato a verificare la precisione del micrometro in questa configurazione con lo stesso intervallo $\Delta d = 25 \mu m$. I dati raccolti sono riportati nella Tabella 5. Utilizzando lo stesso procedimento illustrato nel Paragrafo 2.2 si ottiene

$$\Delta d_{mis} = (20.7 \pm 0.4) \mu m$$

E quindi il fattore correttivo risulta essere

$$\epsilon = \frac{\Delta d_{mis}}{\Delta d_{att}} = 0.83 \pm 0.05$$

I fattori correttivi calcolati con le due configurazioni sono compatibili, infatti

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 0.59$$

L'errore sul fattore correttivo nella configurazione di Michelson viene leggermente maggiore quindi possiamo concludere che quella di Fabry-Perot è più precisa.

3.2 Indice rifrazione aria

In questa parte di esperimento aggiungiamo un **nuovo elemento** che induce un cambiamento nel cammino ottico ovvero la cella a vuoto montata sul "rotational pointer". Come fatto finora sfruttiamo le modifiche di cammino ottico, in questo caso dovuto alla presenza di aria nella camera a pressione

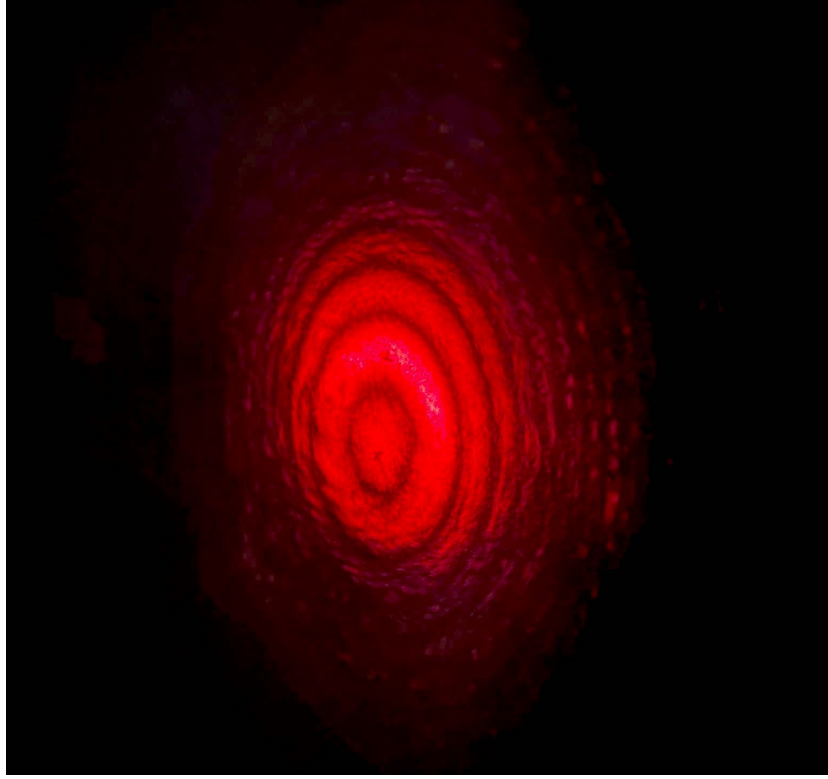


Figura 5: Figura di interferenza nell'apparato Michelson

variabile per calcolare l'indice di rifrazione n dell'aria. Sapendo che il coefficiente dell'aria è legato alla pressione interna alla camera secondo la relazione lineare:

$$n = m \cdot P + 1 \quad (6)$$

dove m è il coefficiente angolare, si possono legare la differenza dei cammini ottici (in quanto dipendenti da n) al variare della pressione. Come visto finora la modifica di un cammino ottico si traduce in un scorrimento di frange ΔN descritto dall'equazione (1) per cui vale la seguente relazione:

$$2dm\Delta P = \Delta N\lambda \quad (7)$$

che lega linearmente la variazione di pressione al passaggio di frange.

La **presa dati** è stata effettuata fissando a priori il numero di frange da far scorrere all'aumentare della pressione, e successivamente veniva letta la pressione sul barometro. Per ogni conteggio di frange la misura è stata ripetuta tre volte: questo procedimento ci ha permesso di ridurre l'errore associato a ciascun conteggio scegliendo la deviazione standard della media come stimatore piuttosto che la sensibilità del barometro, essendo quest'ultima 2 kPa . I dati sono riportati nella tabella (6).

Abbiamo quindi eseguito un'interpolazione per trovare m utilizzando la forma funzionale

$$\Delta P = A\Delta N + B$$

con

$$A = \frac{\lambda}{2d \cdot m} \quad (8)$$

Dall'equazione (7) ci aspetta $B = 0$. Di seguito è riportato il risultato dell'interpolazione:

Il χ^2_{rid} rivela quindi un buon adattamento dei dati alla distribuzione d'ipotesi. Eseguiamo un t-TEST per verificare che la retta passi per l'origine:

$$\frac{|B|}{\sigma_B} = 1,3 < 2$$

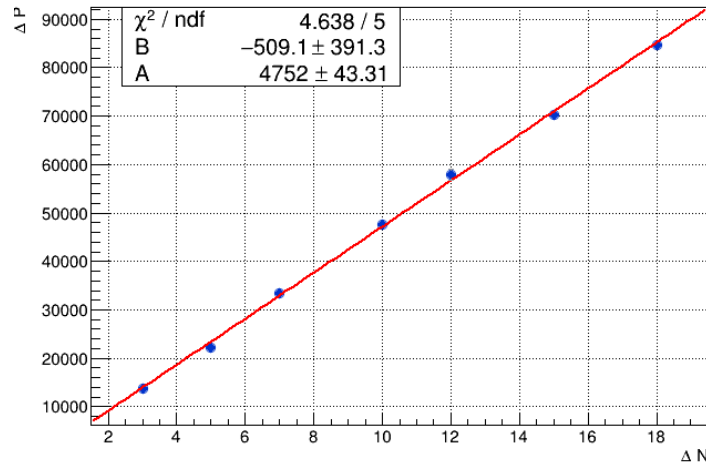


Figura 6: Fit della dipendenza lineare tra il passaggio di un certo numero di frange e la differenza di pressione all'interno della camera

E' possibile dunque a questo punto estrarre dal coefficiente angolare della retta il parametro m che determina la dipendenza lineare dell'indice di rifrazione dell'aria dalla pressione; m è legato ad A secondo la relazione descritta dalla (8):

$$m = \frac{\lambda}{2d \cdot A}$$

Per cui riportiamo la miglior stima di m , con l'errore propagato a partire dall'errore di A :

$$m = (2.22 \pm 0.02) \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$$

Conoscendo quindi la relazione che intercorre tra l'indice di rifrazione dell'aria e la pressione, ci siamo chiesti se fosse valida la comune approssimazione a $n = 1$ dell'indice di rifrazione dell'aria se $P = 1 \text{ atm}$. Abbiamo calcolato n_{atm} dalla relazione (6), ottenendo:

$$n_{atm} = 1.00022 \pm 0.00001$$

Non è quindi completamente corretta l'approssimazione secondo la quale $n_{atm} = 1$, abbiamo però stimato l'errore percentuale:

$$\frac{n_{att} - n_{atm}}{n_{att}} = 0.02 \%$$

Concludiamo quindi essere ottimale l'approssimazione in esame, essendo l'informazione persa irrilevante.

3.3 Indice rifrazione vetro

Analogamente a quanto fatto per l'aria aggiungiamo un nuovo elemento, ovvero una lastra di vetro, sempre posta sopra al "rotational pointer". Muovendo quest'ultimo, si osserva lo scorrere delle frange fino a un punto di inversione, il quale coincide con il minimo cammino ottico. Fissando questa configurazione come θ_0 di riferimento, abbiamo ruotato la lastra e contato il passaggio di frange, legando il ΔN all'angolo di rotazione.

Per la raccolta dei dati abbiamo preceduto in due modi differenti:

Nella **prima presa dati** abbiamo fatto ruotare il vetrino, segnando il numero di frange passate al variare dell'angolo, utilizzando come riferimento $\theta_0 = 0$. I dati sono riportati nella tabella (7). Per questa prima presa dati abbiamo iniziato a prendere gli angoli e il corrispondente numero di frange passate solo dopo aver superato i 10 come suggerito da manuale PASCO.

Nella **seconda presa dati** abbiamo scelto tre ΔN passaggi di frange, volutamente piccoli, e per ognuno di questi è stato misurato l'angolo corrispondente 4 volte per meglio stimarne l'errore. I dati sono riportati nella tabella (8). In questa seconda presa dati abbiamo potuto migliorare l'errore sull'angolo attraverso la riproducibilità della misura, tuttavia non prendendo angoli superiori ai 10

come suggerito da PASCO.

Abbiamo quindi stimato n_1 indice di rifrazione del vetro con la prima campagna dati, attraverso la formula:

$$n = \frac{(2d - \Delta N \lambda)(1 - \cos \theta)}{2d \cdot (1 - \cos \theta) - \Delta N \lambda} \quad (9)$$

In questo caso n_1 è dunque la media pesata di un set di n_1 , valori calcolati per ΔN e θ corrispondenti, con errore stimato attraverso la sigma pesata:

$$n_1 = 1.58 \pm 0.02$$

Per la seconda campagna dati abbiamo invece calcolato la media degli angoli corrispondenti per ogni ΔN fissato e la relativa deviazione standard dalla media. I risultati sono riassunti nella seguente tabella:

ΔN	$\theta(rad)$	σ_θ
20	0.0807	0.0017
40	0.1152	0.0012
60	0.1414	0.0016

Tabella 1: Tabella riassuntiva

Abbiamo quindi calcolato un set di n_2 dalla (9), e anche in questo caso scelto come stimatore migliore la media pesata e relativo errore pesato:

$$n_2 = 1.50 \pm 0.05$$

A causa dell'errore associato alla misura dell'angolo, ovvero quello della scala di Vernier, per entrambe le prese dati è stato necessario propagare tale errore al set di n ottenuto tramite la (9), che risulta essere

$$\sigma_n = (2d - \Delta N \lambda) \sin \theta \frac{4d - \Delta N \lambda - 4d \cos \theta}{(2d - \Delta N \lambda - 2d \cos \theta)^2} \cdot \sigma_\theta$$

Abbiamo anche per completezza calcolato una media pesata dei due valori ottenuti:

$$n_{vetro} = 1.56 \pm 0.02$$

Una primissima considerazione riguarda l'errore associato alla misura dall'angolo: nella prima presa dati abbiamo fatto leva sul numero delle misure, assumendo come errore la sensibilità del Vernier che è di 6 primi; nella seconda presa dati, con l'intento di diminuire questa nostra sensibilità abbiamo poi associato un errore di poco inferiore, tra i 4.1 e i 5.9 primi (si faccia riferimento alla tabella sopra, dove tale errore è presentato in radianti). Di contro la seconda presa dati conta solamente 3 campioni; è quindi giustificato che la prima stima sia più precisa. La seconda considerazione è la seguente: per meglio stimare il coefficiente è meglio lavorare su angoli della decina di gradi; questo perchè lavorando ad angoli piccoli, il coseno dell'angolo, da cui la formula (9) dipende, varia di poco. Alla luce di queste considerazioni, diciamo migliore la stima eseguita con la prima campagna dati, che per altro è molto vicina al valore medio pesato tra le due.

4 Diffrazione con righello

In questa ultima parte abbiamo utilizzato un righello metallico preso in laboratorio come reticolo di diffrazione del nostro raggio laser.

La procedura adottata è la seguente: abbiamo posizionato il righello sul tavolo sulla stessa direzione del laser e fatto incidere quest'ultimo sulla parte finale del righello. Così facendo parte del raggio non veniva deviato dal righello e proseguiva il suo cammino seguendo la direzione data dall'inclinazione del laser, mentre parte del laser veniva riflesso. La parte del raggio riflesso si traduce sullo schermo come figura di interferenza, ovvero si osservano una serie di punti che corrispondono ai massimi di interferenza, in quanto le scanalature del righello si comportano come fenditure di un reticolo di diffrazione.

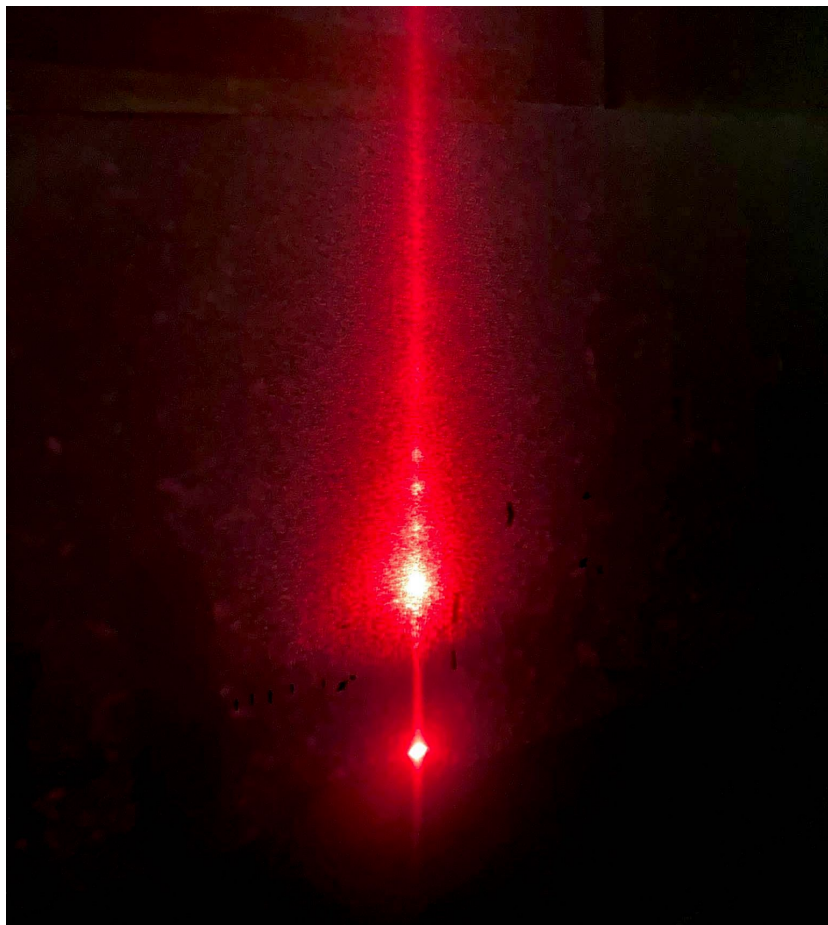


Figura 7: Figura di Interferenza ottenuta con righello

I due punti notevoli sono P_t e P_0 che corrispondono rispettivamente al raggio non deviato e il massimo di ordine zero. L'obiettivo di questa parte è stimare la lunghezza d'onda λ tramite la seguente legge

$$d(\cos \theta_{inc} - \cos \theta_N) = N\lambda$$

dove

- $d = 1 \text{ mm}$ è il "passo" del reticolo dato dal righello.
- θ_{inc} è l'angolo corrispondente al punto dell'ordine zero.
- θ_N è l'angolo corrispondente ai vari ordini.

Fissato $\theta = 0$ il riferimento nel punto medio tra P_t e P_0 , è possibile poi calcolare i coseni corrispondenti ai vari massimi (equazione (2)) e i relativi errori (equazione (3)) come nella prima parte di esperienza.

Abbiamo quindi raccolto i dati fino al terzo ordine, l'ultimo distinguibile ad occhio nitidamente. Ci siamo quindi segnati i diametri dei punti di interferenza costruttiva per determinare un errore, e la distanza l dal punto medio tra P_t e P_0 al punto corrispondente a ciascun ordine. I dati utili così ricavati sono riassunti in tabella:

<i>Ordine</i>	$l(m)$	σ_l
1	0.039	0.002
2	0.051	0.002
3	0.061	0.002

Tabella 2: Tabella riassuntiva

Dai tre ordini è stato possibile ottenere tre stime della lunghezza d'onda dalla relazione:

$$\lambda = \frac{d(\cos \theta_{inc} - \cos \theta_N)}{N}$$

$$\lambda_1 = (570 \pm 130) \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = (630 \pm 80) \text{ nm}$$

$$\lambda_3 = (650 \pm 70) \text{ nm}$$

Per cui abbiamo deciso di stimare al meglio la lunghezza d'onda con una media pesata delle misure:

$$\lambda_{best} = (630 \pm 50) \text{ nm}$$

Il valore risulta compatibile con quello dichiarato dal manuale PASCO per il laser utilizzato come sorgente, come è possibile intuire visto il grande errore associato alla nostra misura:

$$\frac{632.8 - 630}{50} = 0.056$$

5 Appendice

5.1 Formule media pesata

Siano x_1, x_2, \dots, x_N N valori con errori rispettivamente $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$, allora la loro media pesata è definita nel seguente modo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2}$$

Mentre l'errore associato è

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2}}$$

5.2 Tabelle

$raggi(cm)$	$\cos(\theta)$	$\sigma_{\cos(\theta)}$
0.85	0.999977	0.000005
1.7	0.999909	0.000011
2.3	0.999833	0.000014
2.8	0.999753	0.000017
3.2	0.999678	0.000020

Tabella 3: Presa dati per legge massimi di interferenza

$indice$	ΔN	$\Delta d(\mu m)$
1	72	25
2	67	25
3	68	25
4	66	25
5	71	25
6	67	25
7	68	25
8	68	25
9	71	25

Tabella 4: Presa dati calibrazione micrometro Fabry-Perot

$indice$	ΔN	$\delta d(\mu m)$
1	55	25
2	56	25
3	56	25
4	61	25
5	62	25
6	63	25
7	56	25
8	57	25
9	59	25

Tabella 5: Presa dati calibrazione micrometro Michelson

ΔN	$P(kPa)$	$\sigma_P(kPa)$
3	14	2
	14	2
	13	2
6	22	2
	24	2
	21	2
9	46	2
	49	2
	48	2
12	56	2
	60	2
	58	2
15	69	2
	72	2
	70	2
18	86	2
	84	2
	84	2

Tabella 6: Presa dati indice Aria

ΔN	$\theta(grad)$	σ_θ
115	9.9	0.1
130	10.3	0.1
160	12.7	0.1
190	13.9	0.1
220	14.3	0.1
250	16.4	0.1

Tabella 7: Presa dati indice vetro primo giorno

ΔN	$\theta(grad)$
20	4.5
	4.5
	4.9
	4.6
40	6.5
	6.8
	6.6
	6.5
60	8.0
	8.3
	8.2
	7.9

Tabella 8: Presa dati indice vetro secondo giorno