

Spettrometro

Nicolò Raffaelli, Francesco Rossi, Alessndro Varsi

Maggio 2023

Abstract

In questa esperienza di laboratorio di ottica osserveremo gli **spettri** di alcuni gas che emettono radiazione elettromagnetica in seguito a una sollecitazione di tipo elettrico. In particolare utilizzeremo come strumenti lo **spettroscopio**, per la presa dati e l'osservazione del fenomeno di **dispersione**, e un prisma e un reticolo per ottenere questo effetto di "separazione" della radiazione EM emessa dalle lampade a gas eccitate.

Indice

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Lo spettrometro | 2 |
| 1.1 | Composizione | 2 |
| 1.2 | Calibrazione | 2 |
| 2 | Misura con reticolo di diffrazione | 3 |
| 2.1 | Stima del passo del reticolo | 3 |
| 2.2 | Potere dispersivo | 4 |
| 2.3 | Potere Risolutivo | 5 |
| 2.4 | Conclusioni Reticolo | 5 |
| 3 | Misure con il prisma | 6 |
| 3.1 | Stima sull'indice di rifrazione e coefficienti di Cauchy | 6 |
| 3.2 | Potere risolutivo | 7 |
| 3.3 | Analisi dello spettro di un gas ignoto | 8 |

1 Lo spettrometro

1.1 Composizione

Questo strumento è composto da più parti ed è necessario per poter osservare il fascio di radiazione in questione e per la presa dati. Esso è composto da tre elementi principali:

- Collimatore
- Telescopio
- Tavolo Spettrometro

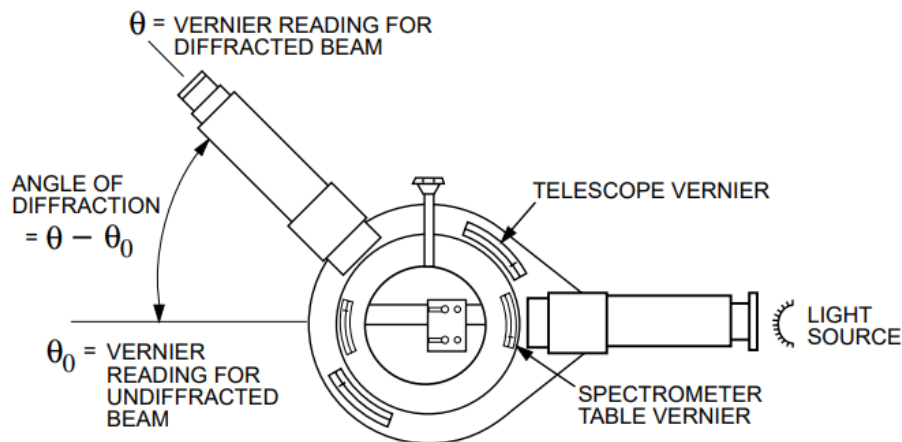


Figura 1: Composizione dello spettrometro

Il sistema comincia con il **collimatore**, necessario per convogliare una la radiazione emessa in una piccola fessura, posta nel punto focale della lente, in modo tale che il prisma e il reticolo vengano investiti da un fascio di raggi paralleli.

Il **telescopio** serve all'osservazione vera e propria, a occhio nudo, della parte di fascio che viene puntata; ruotando questa parte dell'apparato è possibile prendere la misura di angolo corrispondente tramite la scala di Vernier.

Tra questi due strumenti, sul tavolo dello spettrometro, viene posto un **elemento diffrattivo** in grado di creare il fenomeno di dispersione che vogliamo studiare. Nella nostra esperienza sono stati utilizzati un prisma e un reticolo di diffrazione.

1.2 Calibrazione

Per la calibrazione dello spettrometro è stato necessario lavorare separatamente su telescopio e collimatore. Per la calibrazione del telescopio abbiamo cercato il cosiddetto *fuoco all'infinito*, che nel nostro caso è stato creato guardando con il telescopio nella direzione dell'edificio opposto attraverso la finestra.

Successivamente abbiamo calibrato il collimatore, cioè ristretto la fessura il più possibile per garantire la massima precisione, e poi riaggiustato il focus del telescopio in modo che l'immagine prodotta risultasse nitida. In particolare si è ricercata l'apertura migliore per poter soddisfare due caratteristiche necessarie per la corretta realizzazione di tutta l'esperienza: la prima è la risoluzione della fenditura, ossia il grado di vicinanza a una sorgente puntiforme; la seconda è l'intensità del fascio emesso, per cui la fessura non poteva essere stretta al minimo altrimenti avremmo perso intensità del segnale e quindi anche la possibilità di rilevarlo facilmente.

2 Misura con reticolo di diffrazione

In questa prima sezione è stato utilizzato un reticolo di diffrazione per analizzare il fascio emesso da una **lampada al sodio**. Il fascio, dopo essere passato dalla fessura, attraversa il collimatore e si propaga fino al reticolo, per mezzo del quale si genera la caratteristica figura di diffrazione che è possibile osservare tramite il telescopio.

Questo fenomeno è giustificato dal principio di Huygens: le fenditure del reticolo fungono da sorgenti virtuali di onde secondarie, tutte in fase tra di loro, la cui interferenza genera la figura osservata. Il reticolo utilizzato aveva una densità di 600 *fenditure/mm*, a cui corrisponde un passo

$$d_{att} = 1.667 \mu m$$

2.1 Stima del passo del reticolo

L'obiettivo è stato quello di **caratterizzare il reticolo**, attraverso lo studio del suo passo, del suo potere risolutivo e dispersivo. Per questa presa dati è stato necessario allineare l'apparato strumentale con il mezzo di dispersione, cioè controllando che il fascio in uscita dal collimatore incidesse perpendicolarmente al reticolo.

Per assicurare la perfetta perpendicolarità del reticolo (con un precisione ai primi, come suggerisce il manuale PASCO) abbiamo osservato attraverso il cannocchiale, assicurandoci che gli angoli di apertura che danno la figura di interferenza, fossero simmetrici a sinistra e a destra. Questo è stato fatto per il primo massimo, con l'obiettivo di osservare quindi una figura simmetrica; abbiamo così calcolato un angolo di riferimento $\theta_0 = 283.1917^\circ \pm 0.0003^\circ$ per cui telescopio e collimatore fossero sullo stesso asse e calcolato gli angoli di diffrazione:

$$\theta_{DX} = \theta_{misuratoDX} - \theta_{rif}$$

$$\theta_{SX} = \theta_{misuratoSX} - \theta_{rif}$$

Questo angolo di riferimento verrà utilizzato per tutta l'analisi del reticolo, di seguito i dati con errore preso pari alla sensibilità dello strumento:

$$\theta_{misuratoDX} = 300.7083^\circ \pm 0.0004^\circ \rightarrow \theta_{DX} = 17.5167^\circ \pm 0.0004^\circ$$

$$\theta_{misuratoSX} = 265.4166^\circ \pm 0.0004^\circ \rightarrow \theta_{SX} = 17.7750^\circ \pm 0.0004^\circ$$

Si può già ora osservare che la calibrazione da noi effettuata è dell'ordine della decina di primi, che quindi poteva essere eseguita in modo più fine. Questa considerazione è ripresa nelle conclusioni.

Terminata la calibrazione strumentale, abbiamo proceduto con la presa dati, che è stata effettuata solo sul ramo sinistro della figura; questo perchè, una volta allineato l'apparato, sappiamo che il ramo destro è del tutto simmetrico. La raccolta dati si trova in Tabella 1.

La legge che determina i punti di interferenza costruttiva tra le onde coerenti virtualmente generate da ciascuna fenditura del reticolo è la seguente:

$$d \sin \theta = m\lambda \tag{1}$$

con m numero intero che indica l'ordine del massimo. E' perciò possibile dalla presa dati sulla lampada al sodio di cui conosciamo la lunghezza d'onda stimare il passo del reticolo d tramite:

$$d = \frac{m\lambda}{\sin \theta}$$

Abbiamo utilizzato le linee arancio proprie del sodio, da cui è stato possibile rilevare il primo e il secondo ordine; al primo ordine il doppietto del sodio non era distinguibile, mentre era invece facilmente riconoscibile al secondo ordine. Utilizzando per la stima del passo sia il primo che il secondo ordine, abbiamo scelto di prendere il punto medio tra le linee distinguibili del doppietto. Per quanto riguarda gli errori, al primo ordine abbiamo utilizzato la deviazione standard dei valori presi, avendo preso 3

dati per ogni riga, mentre per il secondo ordine abbiamo propagato gli errori relativi alla media tra le righe del doppietto.

$$\theta_{\text{doppietto}} = 327.97^\circ \pm 0.11^\circ$$

Il passo è stato poi stimato utilizzando solo l'angolo corrispondente alla riga arancione propria del sodio. I passi così stimati sono stati poi confrontati con quello aspettato.

Al primo ordine si ha:

$$d_1 = (1.60 \pm 0.05) \mu m$$

t-test:

$$\frac{d_{\text{att}} - d_1}{\sigma_{d_1}} = 1.268$$

Al secondo ordine si ha:

$$d_2 = (1.673 \pm 0.002) \mu m$$

t-test:

$$\frac{d_{\text{att}} - d_2}{\sigma_{d_2}} = 3.37$$

| Colore | Angolo [<i>grad</i>] | ordine |
|---------|------------------------|--------|
| Viola | 299.025 | 1 |
| | 299.1 | |
| | 299.0333333 | |
| Ciano | 300.75 | 1 |
| | 300.8333333 | |
| | 300.7333333 | |
| Verde | 301.5 | 1 |
| | 301.4333333 | |
| | 301.425 | |
| Giallo | 303.45 | 1 |
| | 303.4083333 | |
| | 303.3416667 | |
| Arancio | 304 | 1 |
| | 304.0833333 | |
| | 306.0666667 | |
| Rosso | 305.075 | 1 |
| | 305.0833333 | |
| | 305.075 | |
| Arancio | 328 | 2 |
| | 327.75 | |
| | 327.75 | |
| Arancio | 328.05 | 2 |
| | 328.08 | |
| | 328.17 | |

Tabella 1: Presa dati del reticolo sul sodio

2.2 Potere dispersivo

Il potere dispersivo D quantifica quanto le diverse lunghezze d'onda vengano separate nella figura di diffrazione e dipende dall'ordine delle righe. Può essere calcolata come:

$$D = \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

Si può notare come il potere dispersivo dipenda dall'ordine considerato e dal passo del reticolo: passi brevi implicano maggiore dispersione e viceversa. Nel nostro caso il potere dispersivo al primo ordine risulta:

$$D_1 = (67 \pm 2) \times 10^1 (mm)^{-1}$$

Mentre al secondo ordine è più del doppio:

$$D_2 = (168.3 \pm 0.3) \times 10^1 (mm)^{-1}$$

2.3 Potere Risolutivo

Il potere risolutivo quantifica quanto due lunghezze d'onda arbitrariamente vicine siano distinguibili. Conoscendo la lunghezza del reticolo $l = (35 \pm 1) 10^{-3} m$ abbiamo stimato il numero di fenditure N del reticolo e quindi calcolato il potere risolutivo R per ciascun ordine tramite la formula:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

La relazione è valida per il **Criterio di Rayleigh**, per cui si rimanda agli appunti del corso.

$$R_1 = 21.8 \pm 1.3$$

$$R_2 = 41.9 \pm 1.2$$

2.4 Conclusioni Reticolo

L'analisi dati sul reticolo mostra che al primo ordine i risultati siano buoni grazie alla verifica tramite t-test sul passo del reticolo, mentre al secondo ordine non è così. Si può attribuire questa analisi dati incocludente al secondo ordine sia a una calibrazione non perfetta dello strumento, visto che PASCO suggeriva una precisione dell'ordine del primo mentre noi abbiamo una precisione dell'ordine della decina di primi. Inoltre al secondo ordine, essendoci il doppietto della riga spettrale, abbiamo eseguito una propagazione degli errori che ci ha portato ad avere errori molto piccoli e quindi un t-test non ottimale. Di conseguenza i poteri risolutivo e dispersivo, poichè ricavati attraverso il passo, potrebbero risultare più attendibili al primo ordine. Per quanto riguarda il potere risolutivo, possiamo concludere che abbiamo avuto un buon riscontro rispetto a quello che abbiamo osservato, in quanto i doppietti sono stati visti al secondo ordine dove il valore è più del doppio del primo ordine. Rispetto a quello dispersivo abbiamo ancora una volta una conferma in quanto al secondo ordine il valore ci indica una forte dispersione che quindi conferma il non aver osservato un terzo ordine.

3 Misure con il prisma

Il fenomeno che vogliamo analizzare in questa parte dell'esperienza è la **dispersione ottica**, cioè la dipendenza dell'indice di rifrazione di un mezzo dalla frequenza dell'onda incidente. Una manifestazione macroscopica di questo fenomeno può essere osservata incidendo un prisma di vetro con un fascio di luce (non monocromatica) e osservando quella trasmessa tramite il telescopio. Il risultato delle due rifrazioni è una separazione dei colori giustificata dalla dipendenza dell'angolo di emissione dall'indice di rifrazione.

3.1 Stima sull'indice di rifrazione e coefficienti di Cauchy

Le proprietà di dispersione di tutti i materiali trasparenti sono descritte dalla **Legge di Cauchy**. Tale legge empirica si presenta nella forma:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \simeq A + \frac{B}{\lambda^2}$$

A e B sono chiamati **coefficienti di Cauchy** e dipendono dalla geometria e dalle proprietà intrinseche del materiale. Inizialmente abbiamo cercato di stimare questi due parametri utilizzando una lampada a mercurio. Una stima sull'indice di rifrazione relativo ad ogni lunghezza si può dedurre dall'**angolo di minima deviazione**, differente per ogni colore. Il raggio incide sulla prima faccia del prisma con un angolo (rispetto alla normale) θ_i e, dopo due rifrazioni, emerge dalla seconda faccia con un angolo θ_e . L'angolo di deviazione δ è definito come quello tra la direzione incidente e quella emergente (si veda la Figura 2) e presenta un minimo quando $\theta_i = \theta_e$. Da questa relazione si può ricavare una stima per l'indice di rifrazione relativo del vetro per ogni lunghezza d'onda tramite la seguente equazione:

$$n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

dove $\alpha = 60^\circ$ è l'angolo tra le facce lucidate del prisma.

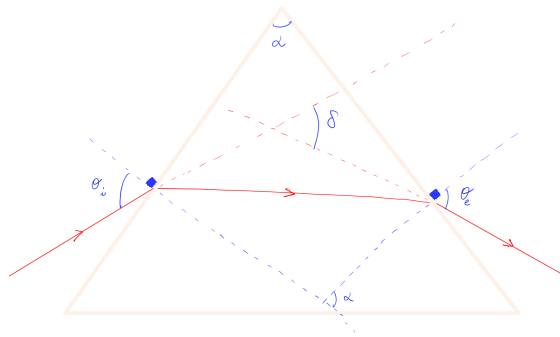


Figura 2: Angolo di minima deviazione

La presa dati è stata effettuata nel seguente modo: per ogni colore si è misurato l'angolo corrispondente all'inversione della direzione di scorrimento della riga spettrale, e δ è stato ricavato tramite differenza con l'angolo di riferimento θ_0 . Per verificare la riproducibilità della misura e ridurre l'errore statistico abbiamo eseguito 3 misure dell'angolo di minima deviazione per ogni riga spettrale. I risultati sono riportati nella Tabella 2.

Abbiamo scelto di utilizzare come valore di δ la media tra le nostre 3 misure e l'errore che abbiamo associato è la deviazione standard della media. L'indice di rifrazione è stato quindi ottenuto tramite l'equazione (2). La lunghezza d'onda da associare ad ogni δ (e quindi ad ogni indice di rifrazione) è stata ricavata dal database del NIST sulla base dello spettro di emissione del mercurio.

Le coppie di dati (λ, n) sono stati interpolati con la funzione

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

| Colore | Angolo [<i>grad</i>] |
|--------|------------------------|
| Viola | 334.35 |
| | 334.3833333 |
| | 334.4166667 |
| Ciano | 333.65 |
| | 333.3833333 |
| | 333.375 |
| Verde | 331.7833333 |
| | 331.8083333 |
| | 331.825 |
| Giallo | 331.475 |
| | 331.4333333 |
| | 331.4916667 |

Tabella 2: Presa dati per lampada al Hg

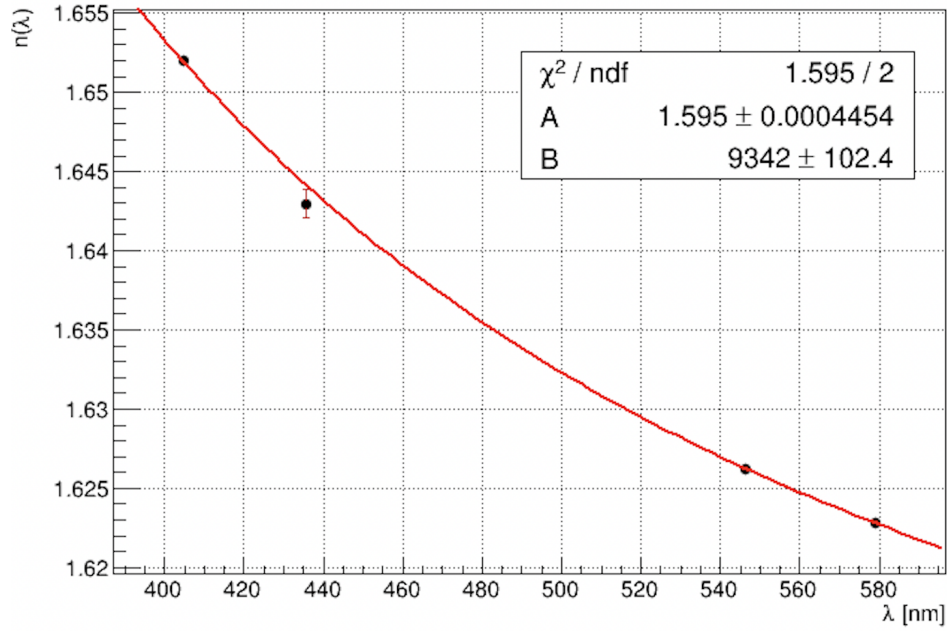


Figura 3: Ricerca dei parametri di Cauchy

Dall'interpolazione si ottengono i parametri di Cauchy per il prisma di vetro:

$$A = 1.5950 \pm 0.0004$$

$$B = (0.0093 \pm 0.0001) \mu m^2$$

Inoltre, dato che serve per l'identificazione di un gas ignoto, ci siamo fatti restituire dal fit la covarianza tra i parametri A e B:

$$\sigma_{AB}^2 = -0.0432961 \quad (3)$$

3.2 Potere risolutivo

La capacità di un prisma di distinguere lunghezze d'onda differenti viene quantificata tramite il parametro R , detto **potere risolutivo**. È definito come il rapporto tra la lunghezza d'onda λ e la minima differenza di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ per cui due righe λ e $\lambda + \Delta\lambda$ sono distinguibili:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Detta L la lunghezza dello spigolo prisma, si dimostra che il potere risolutivo può essere espresso come

$$R = L \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

Utilizzando i coefficienti di Cauchy ricavati sopra e il dato misurato $L = (4.7 \pm 0.1) \text{ cm}$ è possibile calcolare questo parametro

$$\begin{aligned} R &= L \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \\ &= \frac{2LB}{\lambda^3} \\ &= \frac{8.47 \times 10^{11} \text{ nm}^3}{\lambda^3} = \frac{8.47 \times 10^{-16} \text{ m}^3}{\lambda^3} \end{aligned}$$

3.3 Analisi dello spettro di un gas ignoto

Avendo trovato i coefficienti di Cauchy relativi al nostro prisma, è ora possibile ricavare le lunghezze d'onda relative ad ogni riga dello spettro di un gas ignoto, per poi tentare di identificarlo sulla base dei dati tabulati.

Abbiamo sostituito alla lampada a mercurio un tubo spettrale e abbiamo nuovamente misurato gli angoli di minima deviazione per ogni colore. Utilizzando l'equazione (2) è possibile calcolare gli indici di rifrazione relativi ad ogni lunghezza d'onda. La presa dati è riportata nella seguente tabella:

| Colore | Angolo [<i>grad</i>] |
|---------|------------------------|
| Viola | 333.375 |
| | 333.3833333 |
| | 333.4166667 |
| Ciano | 332.7416667 |
| | 332.8416667 |
| | 332.8416667 |
| Arancio | 331.45 |
| | 331.425 |
| | 331.4 |
| Rosso | 331.0833333 |
| | 330.8333333 |

Tabella 3: Presa dati tubo spettrale

Per stimare λ si utilizza la legge di Cauchy con i parametri A e B ricavati prima:

$$\lambda = \sqrt{\frac{B}{n - A}}$$

La propagazione degli errori deve tenere conto della correlazione tra i coefficienti di Cauchy, quindi viene utilizzata la covarianza (3).

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{1}{4} \left[B(n - A)(\sigma_n^2 + \sigma_A^2) + \frac{1}{B(n - A)} \sigma_B^2 - \sigma_{AB}^2 \right]$$

Abbiamo ottenuto le seguenti lunghezze d'onda relative allo spettro di emissione del gas ignoto

$$\begin{aligned} \lambda_{viola} &= (441 \pm 2) \text{ nm} \\ \lambda_{ciano} &= (474 \pm 3) \text{ nm} \\ \lambda_{arancione} &= (583 \pm 3) \text{ nm} \\ \lambda_{rosso} &= (642 \pm 3) \text{ nm} \end{aligned}$$

Analizzando lo spettro di emissione dei gas suggeriti dalla scheda di laboratorio (gas nobili) non siamo stati in grado di trovare una corrispondenza con i nostri dati. Le ipotesi sono due: la procedura

sperimentale ha portato ad un'erronea valutazione degli angoli di minima deviazione (e quindi anche ad un errore nel calcolo dei parametri di Cauchy), oppure la non compatibilità con i dati tabulati potrebbe derivare da una sottostima degli errori.

A causa dell'impossibilità di procedere con un argomento quantitativo abbiamo tentato un approccio "ottico". Prima di tutto abbiamo verificato che le lunghezze d'onda da noi stimate corrispondessero effettivamente ai colori osservati tramite il telescopio, e per farlo abbiamo utilizzato un convertitore *wavelength-color*¹. Questo test qualitativo ha confermato che le lunghezze d'onda stimate corrispondessero ai colori osservati, quindi abbiamo considerato accettabile l'esclusione dell'ipotesi sull'errata stima dei parametri di Cauchy.

Rimanendo sempre su un approccio "visivo", cioè prescindendo da argomenti quantitativi, possiamo affermare che lo spettro di emissione che risulta più compatibile con i nostri dati è quello del Neon. Non possiamo concludere con certezza che il gas nel tubo spettrale sia questo a causa di alcune incongruenze:

1. Secondo il database del NIST dovrebbero apparire delle linee verdi molto intense, mentre noi non le abbiamo osservate.
2. Il viola da noi osservato sembra non essere presente nello spettro di emissione del Neon.

Tentando di tralasciare questi due problemi, è possibile verificare la compatibilità con le altre 3 lunghezze d'onda (ciano, arancione, rosso).

$$\begin{array}{ll} \text{ciano:} & \frac{474 - 472}{3} = 0.67 \\ \text{arancione:} & \frac{585 - 583}{3} = 0.67 \\ \text{rosso:} & \frac{642 - 640}{3} = 0.67 \end{array}$$

Concludiamo quindi che il Neon possa essere considerato un buon candidato.

¹https://pages.cs.wisc.edu/~yetkin/code/wavelength_to_rgb/wavelength.html