Liceo Scientifico Statale "G. Ferraris"
Elaborato per l'Esame di Stato
Anno Scolastico 2020/2021

Le equazioni differenziali dell'elettromagnetismo e della meccanica quantistica

Alessandro Varsi, V G

Indice

1 INTRODUZIONE

Durante lo studio della fisica svolto nel corso degli ultimi cinque anni spesso si sono incontrate equazioni la cui scrittura è stata necessariamente semplificata a causa dell'assenza di adeguati strumenti matematici. In questo elaborato si vuole introdurre il concetto di *divergenza* e di *rotore*, degli enti matematici che permettono di scrivere in modo corretto le equazioni di Maxwell e l'equazione di Schrödinger. Ho preferito evitare una trattazione matematica formale e troppo astratta per evitare di prescindere dalla fisica, per cui per definire questi enti matematici partirò direttamente da una situazione reale.

1.1 Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono il campo magnetico e il campo elettrico e le relazioni tra i due. Maxwell stesso si accorse che ammettevano soluzioni ondulatoriore, che lui chiamò *onde elettromagnetiche*. Considerate inizialmente dei semplici espedienti matematici, l'esistenza di queste onde fu verificata sperimentalmente nel 1886 da Heinrich Hertz.

1.2 Equazione di Schrödinger

L'equazione di Schrödinger è anch'essa un'equazione differenziale, che in questo caso descrive l'evoluzione temporale del vettore di stato. Nell'elaborato verrà utilizzata la sua forma indipendente dal tempo per ricavare gli autostati e gli autovalori dell'energia di una particella confinata in una buca di potenziale infinita monodimensionale.

2 ELETTROMAGNETISMO

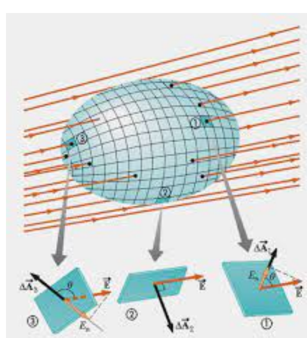
2.1 Divergenza

Questo strumento matematico è utile per scrivere il teorema di Gauss.

2.1.1 Definizione

Partiamo dal flusso del campo elettrico. In una regione di spazio in cui c'è un campo elettrico $\vec{E}$ consideriamo un volume (finito) V di superficie S. Dividiamo S in N porzioni di superficie piccole abbastanza da essere considerate piane, e associamo ad ognuna di esse un'area ΔA_i, quindi tracciamo il vettore normale $\vec{n}$ ad ognuno di questi piani e definiamo

$$\Delta\vec{A}_i = \Delta A_i \cdot \vec{n}$$



Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S è allora, per definizione

$$\Phi(\vec{E}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \bullet \Delta\vec{A}_i$$

Se ci spostiamo nel continuo, possiamo introdurre l'elemento di area infinitesimo dA e il vettore $d\vec{A} = dA \cdot \vec{n}$. Il flusso diventa allora un integrale calcolato lungo la superficie S:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A}$$

Adesso, siccome ci interessano informazioni *locali*, calcoliamo la densità di flusso dividendo il contributo su ogni volumetto diviso il volume stesso V_i

$$\frac{\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A}}{V}$$

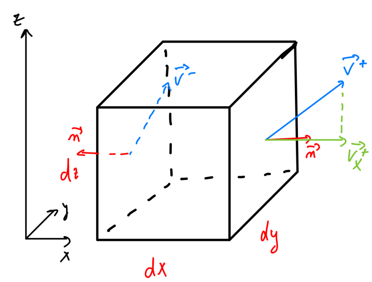
Come di consuetudine, per trovare il valore puntuale di questa quantità facciamo tendere il volumetto a 0 e chiamiamo il risultato *divergenza* del campo elettrico ($div\vec{E}$ oppure $\vec{\nabla} \bullet \vec{E}$). Per cui

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A}}{V} \tag{1}$$

Si assume in questo elaborato che il limite esista sempre.

2.1.2 Espressione matematica

Consideriamo ora un generico campo vettoriale $\vec{v}(x, y, z)$ e calcoliamo la divergenza di tale campo considerando come volume un parallelepipedo infinitesimo di dimensioni dx, dy e dz. Siccome le facce del parallelepipedo sono piane, utilizzando la (1) possiamo passare alla sommatoria e proseguire con i calcoli. Indicherò con $\vec{v}^+$ i vettori uscenti dal volume e con $\vec{v}^-$ i vettori entranti.



$$\vec{\nabla} \bullet \vec{v} = \frac{\sum \vec{v} \bullet d\vec{A}_i}{dxdydz} = \frac{\sum \vec{v}^+ \bullet d\vec{A}_i + \sum \vec{v}^- \bullet d\vec{A}_i}{dxdydz} =$$

$$= \frac{v_x^+ dydz + v_y^+ dxdz + v_z^+ dxdy - v_x^- dydz - v_y^- dxdz - v_z^- dxdy}{dxdydz}$$

Ora, se poniamo $v_x^+ - v_x^- = dv_x$, $v_y^+ - v_y^- = dv_y$ e $v_z^+ - v_z^- = dv_z$, con qualche passaggio algebrico si ottiene la forma matematica della divergenza di un generico campo vettoriale $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{v} = \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}$$

Da qui risulta chiaro che

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

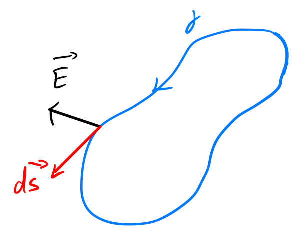
2.1.3 Significato fisico

Estendendo il discorso ad un qualsiasi campo vettoriale $\vec{v}$, possiamo affermare che $\vec{\nabla} \bullet \vec{v}$ è una grandezza scalare che rappresenta la densità di flusso uscente da V nel caso in cui esso sia infinitesimo, ed è quindi una proprietà del campo che ci dà informazioni *locali*; in particolare, quando la divergenza è positiva, ci si trova in presenza di sorgenti del campo, mentre una divergenza negativa indica la presenza di pozzi. Come è noto, nel caso del campo elettrico si parla rispettivamente di cariche positive e negative. I campi che hanno sempre divergenza nulla sono chiamati *solenoidali* (ne è un esempio il campo magnetico).

2.2 Rotore

2.2.1 Definizione

Ragionamenti analoghi a quelli fatti per la divergenza ci servono per introdurre il *rotore*. Consideriamo una linea chiusa γ e la spezziamo in tratti infinitesimi ds a cui associamo un vettore $d\vec{s}$, tangente in ogni punto a γ.



La circuitazione del campo elettrico $\vec{E}$ lungo γ è allora

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \oint_\gamma \vec{E} \bullet d\vec{s} \tag{2}$$

In questo caso conviene considerare il rapporto tra la circuitazione e l'area ad essa associata nel caso in cui essa tenda ad un punto. Il rotore di $\vec{E}$ ($rot\vec{E}$ o $\vec{\nabla} \times \vec{E}$), una grandezza vettoriale, viene definito tramite la sua proiezione lungo la normale alla superficie in questione (prodotto scalare):

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \bullet \vec{n} = \lim_{A \to 0} \frac{\oint_\gamma \vec{E} \bullet d\vec{s}}{A}$$

2.2.2 Espressione matematica

Il vettore rotore di un campo vettoriale $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ è il prodotto vettoriale tra $\vec{\nabla}$ e il campo.

$$rot(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Di conseguenza è un vettore che ha: come modulo $|\vec{v}| \cdot |\vec{\nabla}| \cdot \sin\theta$, dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori; come direzione quella perpendicolare al piano su cui giacciono i due vettori; e come verso quello dato dalla regola della mano destra.

2.2.3 Significato fisico

Quando il rotore di un campo vettoriale è uguale a zero il campo si dice *irrotazionale* perché le sue linee di campo non fanno vortici; ne è un sempio il campo elettrostatico.

2.3 Equazioni di Maxwell

Tramite questi due strumenti matematici le equazioni di Maxwell che descrivono le onde elettromagnetiche possono essere scritte in una forma diversa rispetto a quella vista in classe. Analizziamo le equazioni che riguardano il flusso separatamente rispetto a quelle che riguardano la circuitazione.

2.3.1 Teorema di Gauss e flusso

Nei paragrafi precedenti ho descritto la divergenza del campo elettrico come la *densità di flusso*, per cui

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\Phi(\vec{E})}{dV} \tag{3}$$

Dove dV è un volume infinitesimo. Il teorema di Gauss per il campo elettrico ci dice che

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ma la carica è uguale alla densità volumetrica di carica moltiplicata per il volume; allora per la (3) il teorema di Gauss per il campo elettrico può essere scritto definitivamente nel seguente modo:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

In modo analogo si può ricavare il teorema di Gauss per il campo magnetico:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \tag{5}$$

2.3.2 Teorema di Stokes e circuitazione

Deriviamo adesso il *teorema di Stokes* per un generico campo vettoriale $\vec{v}$, che ci permette di applicare il rotore alle equazioni di Maxwell.

$$\Gamma_\gamma(\vec{v}) = A\Big(\frac{\Gamma_\gamma(\vec{v})}{A}\Big)$$

Per $A \to 0$ il termine tra parentesi è $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \bullet \vec{n}$:

$$\Gamma_\gamma(\vec{v}) = \oint_\gamma \vec{v} \bullet d\vec{s} = A(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \bullet \vec{n}$$

Definendo $d\vec{A} = A \cdot \vec{n}$ e passando alla notazione integrale si ottiene il teorema di Stokes:

$$\oint_\gamma \vec{v} \bullet d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \bullet d\vec{A}$$

Riconosciamo che questo teorema ci dice che la circuitazione di un campo vettoriale è uguale al *flusso del rotore* di quel campo. Possiamo applicare questo risultato alle equazioni di Maxwell che riguardano la circuitazione. Per il campo elettrico:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \int_S A(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \bullet \vec{n} = -\frac{\partial \Phi_S(\vec{B})}{\partial t}$$

Supponendo di prendere una superficie semplice (un quadrato per esempio) perpendicolare ad $\vec{E}$ e dividendo per l'area, otteniamo una nuova formulazione per l'equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{6}$$

Con ragionamenti analoghi si ottiene l'equazione relativa al campo magnetico.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{7}$$

Dove $\vec{j}$ è il vettore *densità di corrente*, che ha come modulo $|\vec{j}| = \frac{i}{A}$ e come direzione e verso gli stessi del campo elettrico $\vec{E}$.

2.3.3 In definitiva

Le equazioni (4), (5), (6) e (7) rappresentano insieme le Equazioni di Maxwell *in forma puntuale*.

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2.3.4 Cenni sulla risoluzione

É possibile ricavare l'equazione d'onda per entrambi i campi ponendosi nelle condizioni di essere nel vuoto, quindi in assenza di correnti elettriche e distribuzioni di carica. In questo caso le equazioni di Maxwell diventano:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \tag{4a}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \tag{5a}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{6a}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{7a}$$

Applicchiamo il rotore alla $(6a)$ e utilizziamo la $(7a)$:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{8}$$

Calcoliamo adesso il rotore del rotore di $\vec{E}$ utilizzando il teorema del prodotto triplo:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla})$$

E tenendo conto che la divergenza del campo elettrico è nulla in assenza di cariche:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} \tag{9}$$

Ora, immaginando di considerare solo una dimensione (per esempio x) e di mettere insieme le equazioni (8) e (9), otteniamo l'equazione di un'onda:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial t^2} = 0$$

che ha velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \ m/s$$

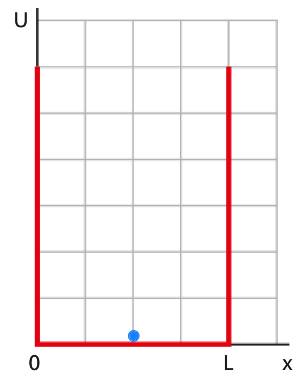
Che è pari a quella della luce, già misurata di Fizeau nel 1851. Con ragionamenti analoghi si potrebbe dimostrare che questo risultato è valido anche per il campo magnetico.

3 MECCANICA QUANTISTICA

Analizziamo il moto di una particella in una buca di potenziale infinita monodimensionale tramite la risoluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Dove $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$ è l'operatore Hamiltoniano e $\nabla^2 = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è il Lapliaciano.



L'energia potenziale ha quindi il seguente andamento:

$$\begin{cases} U(x) = 0 \quad se \quad 0 < x < L \\ U(x) \to \infty \quad se \quad x \leqslant 0 \; o \; x \geqslant L \end{cases}$$

3.1 Ricerca stati discreti

Nella situazione in esame l'equazione di Schrödinger diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E\psi$$

Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali (PDE). Scrivendola in forma normale si risconosce che è l'equazione di un'onda armonica, cioè nella forma: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\omega^2 f$, che ha come integrale generale $f(x) = c_1 \sin\omega x + c_2 \cos\omega x$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

$$\Rightarrow \psi(x) = c_1 \sin\omega x + c_2 \cos\omega x$$

con $\omega^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Le condizioni al contorno che ci permettono di trovare la/le soluzione particolare/i sono che la particella non può trovarsi esattamente sui bordi della buca di potenziale, per cui

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(L) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ci fornisce l'informazione che $c_2 = 0$; per quanto riguarda la seconda, ci troviamo a dover porre l'argomento del *seno* uguale ad un multiplo di π

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L = n\pi \tag{10}$$

Elevando al quadrato possiamo trovare gli autovalori dell'energia

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \tag{11}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.
L'equazione (10) è anche utile per trovari i diversi stati possibili, espressi tramite la funzione d'onda: ricaviamo che $\omega = \frac{\pi}{L} n$ e quindi possiamo riscrivere la funzione d'onda

$$\psi(x) = c \sin\left(\frac{\pi x}{L} n\right)$$

Queste ultime considerazioni ci fanno capire che nel problema analizzato la particella può assumere solo *alcuni* stati (=autostati), a ognuno dei quali corrisponde un preciso valore di energia, calcolabile tramite la (11).

3.2 Normalizzazione

Rimane il problema di trovare la costante c, cioè l'ampiezza del seno. Siccome le condizioni al contorno sono già state utilizzate, bisogna ricorrere al cosiddetto processo di *normalizzazione*, che consiste nell'imporre che la probabilità totale di trovare la particella nella buca sia uguale ad 1; in formule:

$$p = \langle \psi | \psi \rangle^2 = 1 \Rightarrow \langle \psi | \psi \rangle = 1 \Rightarrow \int_0^L [\psi(x)]^2 \, dx = 1 \tag{12}$$

Proseguo con il calcolo dell'integrale:

$$\int_0^L [\psi(x)]^2 \, dx = \int_0^L c^2 \sin^2\left(\frac{\pi x n}{L}\right) dx = c^2 \int_0^L \frac{1 - \cos \frac{2\pi n}{L} x}{2} \, dx = \frac{c^2}{2}\Big[\int_0^L 1 \, dx - \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx\Big] =$$

$$= \frac{c^2}{2}[L - \frac{L}{2\pi n}(0 - 0)] = \frac{c^2 L}{2}$$

Ora, imponendo la condizione di normalizzazione (12) possiamo ricavare l'ampiezza della funzione d'onda.

$$\frac{c^2 L}{2} = 1 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

In definitiva, le autofunzioni diventano:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Esse sono la descrizione matematica di tutti gli stati che la particella in questione può assumere. Di seguito la rappresentazione grafica dei primi 3 stati, ovviamente solo nell'intervallo $[0, L]$.