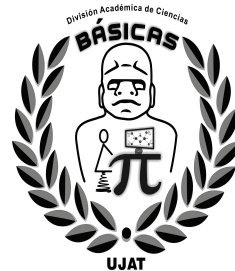




UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



MODELO TRITROFICO DE ESPECIES
CON EFECTO ALLEE ADITIVO

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
PATRICIA ZAVALA VAZCONCELOS

DIRECTORES
DR. ALEJANDRO PEREGRINO PÉREZ
DR. LUIS MIGUEL VALENZUELA GÓMEZ.

Cunduacán, Tab.

Agosto 2022

Índice general

Introducción	II
1. Preliminares	1
1.1. Sistemas Lineales	1
1.1.1. Sistemas Lineales Desacoplados	1
1.1.2. Diagonalización	5
1.1.3. Operador Exponencial	7
1.1.4. Teorema Fundamental Para Sistemas Lineales	11
1.1.5. Subespacios Invariantes	13
1.2. Sistemas no Lineales.	17
1.2.1. Teorema de Existencia y Unicidad	17
1.2.2. El máximo intervalo de Existencia	19
1.2.3. Flujo de una Ecuación Diferencial	22
1.2.4. Linealización	25
1.2.5. Teorema de la Variedad Estable	28
1.2.6. Teorema de Hartman-Grobman	31
1.2.7. Funciones de Liapunov	34
1.2.8. Bifurcación de Hopf.	37
2. Modelo tritrófico de especies con efecto Allee aditivo.	39
2.1. Presentación del modelo.	39
2.2. Modelo de una sola especie con efecto Allee Aditivo.	40
2.2.1. Puntos de equilibrio.	42
2.3. Modelo tritrófico de especies con efecto Allee aditivo.	44
2.4. Análisis cualitativo del modelo.	48
2.4.1. Puntos de Equilibrio.	49
2.4.2. Análisis de Estabilidad.	55
2.4.3. Análisis de la bifurcación de Hopf.	57
3. Simulaciones numéricas	60
3.1. Condiciones de la Bifurcación de Hopf	60

Introducción

Por otra parte, Hastings y Powell [12] proporcionaron un modelo matemático de la cadena alimentaria de tres especies utilizando respuestas funcionales Holling tipo II, que muestra el caos en el sistema biológico. Desde entonces, el modelo y su modificación han sido aceptados tanto por biólogos como por matemáticos[13, 18, 19, 17, 14, 22, 16, 23, 28, 25]. Por ejemplo, este modelo encuentra su aplicabilidad en el ecosistema acuático compuesto por fitoplancton, zooplancton y peces[27]. La investigación analítica del comportamiento temporal cualitativo local alrededor del punto de equilibrio interno del modelo HP fue realizada por Mandal et.al[20].

En el presente trabajo, modificamos el modelo de cadena alimentaria de tres especies propuesto por Hastings y Powell (modelo HP). La especie del nivel más bajo de la cadena alimenticia es inducida al efecto Allee. Así, la tasa de crecimiento per-cápita de la primera especie se ha modificado en consecuencia. Nuestro objetivo es investigar el efecto Allee en el modelo HP de tres especies y cómo afecta a la dinámica del modelo de cadena alimentaria de tres especies. Proponemos la modificación del modelo HP mediante la incorporación del término aditivo del efecto Allee y estudiamos el sistema dinámico variando la fuerza del efecto Allee.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las herramientas necesarias de Ecuaciones Diferenciales para el análisis y posterior desarrollo de nuestro modelo matemático. Estos resultados se pueden observar en el capítulo 2.

1.1. Sistemas Lineales

Iniciemos con el estudio de sistemas lineales de Ecuaciones Diferenciales.

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz de $n \times n$ y

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

La solución de (1.1) con condición inicial $x(0) = x_0$ es dada por:

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

donde e^{At} es una matriz de $n \times n$, definida en términos de una serie de potencias de la matriz At . Posteriormente estudiaremos la convergencia de e^{At} y como se calcula, en términos de los valores y vectores propios de A .

1.1.1. Sistemas Lineales Desacoplados

Los sistemas lineales desacoplados son un caso particular de (1.1). Un método para resolver este tipo de sistemas es mediante el método de separación de variables. Entonces si tenemos

$$\dot{x} = ax,$$

la solución general está dada por:

$$x(t) = ce^{at},$$

donde la constante $c = x(0)$, es decir, el valor de la función $x(t)$ en el tiempo $t = 0$.

Ejemplo 1.1.1. Consideremos el siguiente sistema lineal desacoplado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 \\ \dot{x}_2 &= -5x_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Utilizando el método de separación de variables la solución general del sistema (1.2) es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{3t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{-5t}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Reescribiendo el sistema en la forma (1.1), se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

observe que, $A = \text{diag}[3, -5]$, así la solución general del sistema lineal desacoplado esta dada por

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} c, \tag{1.4}$$

donde $c = x(0)$. En general si A es una matriz diagonal, el sistema (1.1) es un sistema lineal desacoplado.

Ahora, consideremos (1.3) como ecuaciones paramétricas en función de t , de una trayectoria definida por:

$$\begin{aligned} \sigma : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \sigma(t) = (x_1(t), x_2(t)), \end{aligned}$$

la cual describe una curva en el plano x_1x_2 , a esta curva se le conoce como la *órbita* del sistema (1.3). El plano x_1x_2 es conocido como *plano fase* de las soluciones. En este ejemplo el origen es un *punto de equilibrio*, ya que para $c_1 = c_2 = 0$, se tiene que $x_1(t) = 0 = x_2(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Observe que las soluciones que inician sobre el eje x_1 se acercan al origen cuando $t \rightarrow \infty$ mientras que las que inician sobre el eje x_2 se acercan al origen

cuando $t \rightarrow -\infty$.

El *retrato fase* de un sistema de ecuaciones diferenciales tales como (1.1), es el conjunto de todas curvas solución de (1.1) en el espacio fase \mathbb{R}^n . La figura 1.1 proporciona una representación geométrica del retrato fase del sistema lineal desacoplado (1.2).

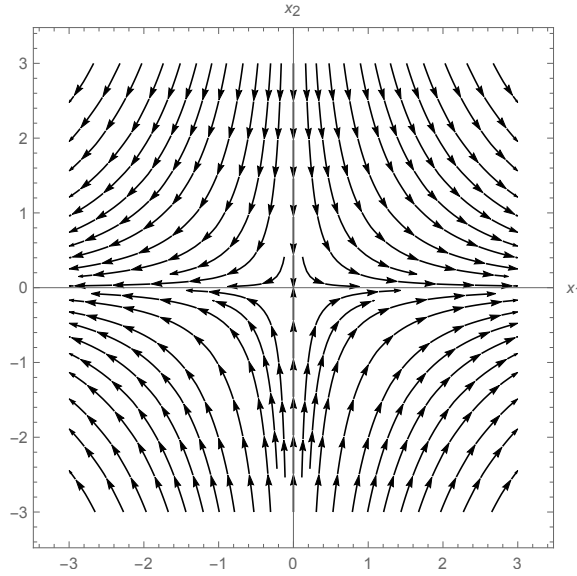


Figura 1.1: Retrato fase del sistema (1.2).

El *sistema dinámico* definido por el sistema lineal (1.1) es un mapeo

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

definido por la solución $x(t, c)$ dada por (1.4); es decir, el sistema dinámico para este ejemplo se escribe como

$$\phi(t, c) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} c.$$

Geométricamente, el sistema dinámico describe el movimiento de los puntos en el espacio fase a lo largo de las curvas solución definidas por el sistema de ecuaciones diferenciales.

La función

$$g(x) = Ax,$$

en el lado derecho de (1.1), define un mapeo $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (lineal en este caso). Este mapeo (no necesariamente lineal) define un *campo vectorial* sobre \mathbb{R}^2 , es decir, a cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, el mapeo g asigna un vector $g(x)$.

Si dibujamos cada vector $g(x)$ con su punto inicial $x \in \mathbb{R}^2$, obtenemos una representación geométrica del campo vectorial como se muestra en la Figura 1.3.

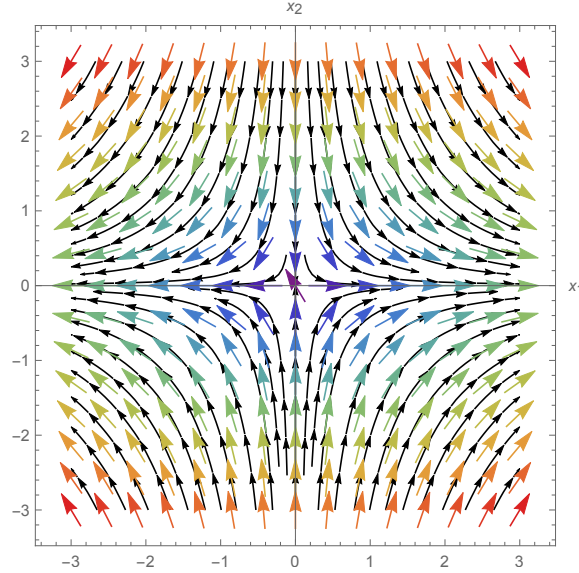


Figura 1.2: Campo Vectorial del sistema (1.2).

Note que en cada punto de x en el espacio fase \mathbb{R}^2 , las curvas solución de (1.3) son tangentes a los vectores del campo vectorial Ax . Esto pasa ya que en $t = t_0$, el vector velocidad $v_0 = \dot{x}(t_0)$ es tangente a la curva $x = x(t)$ en el punto $x_0 = x(t_0)$ y como $\dot{x} = Ax$ a lo largo de las curvas solución.

Ejemplo 1.1.2. Consideremos el siguiente sistema lineal desacoplado en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3.\end{aligned}\tag{1.5}$$

La solución general esta dada por

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1 e^{-t}, \\ x_2(t) &= c_2 e^t, \\ x_3(t) &= c_3 e^{-t}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

El retrato fase para este sistema se ilustra en la siguiente figura

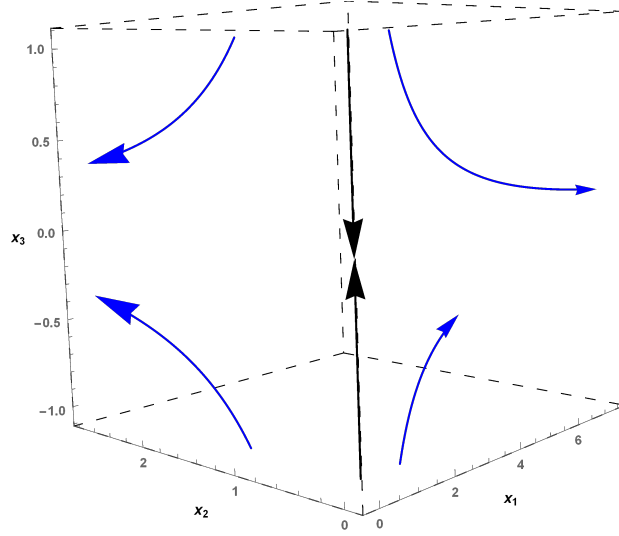


Figura 1.3: Campo Vectorial del sistema (1.5).

1.1.2. Diagonalización

La técnica algebraica de diagonalizar una matriz cuadrada A puede usarse para reducir el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax$$

a un sistema lineal desacoplado. Primero consideramos el caso cuando A tiene valores propios reales y distintos. El siguiente Teorema de Álgebra Lineal nos permite resolver el sistema lineal (1.1).

Teorema 1.1.1. Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de una matriz A de $n \times n$ son reales y distintos, entonces cualquier conjunto de vectores propios $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forman una base para \mathbb{R}^n , la matriz $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ es invertible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n].$$

Este Teorema dice que si una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es representada por la matriz A de $n \times n$ con respecto a la base estándar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , entonces con respecto a cualquier base de vectores propios $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, T es representada por la matriz diagonal de valores propios $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$. Una prueba de este Teorema puede verse en [26].

Para reducir el sistema (1.1) a un sistema lineal desacoplado usando el Teorema (1.1.1), aplicaremos el siguiente cambio de coordenadas

$$y = P^{-1}x,$$

donde P es la matriz invertible enunciada en el Teorema. Entonces,

$$\begin{aligned} x &= Py, \\ \dot{y} &= P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy, \end{aligned}$$

y de acuerdo con el Teorema (1.1.1), obtenemos el siguiente sistema lineal desacoplado para la variable y .

$$\dot{y} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]y,$$

cuya solución es

$$y(t) = E(t)y(0),$$

donde $E(t)$ es la matriz diagonal

$$E(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}].$$

Dado que $y(0) = P^{-1}x(0)$ y $x(t) = Py(t)$, obtenemos que la solución del sistema (1.1) es

$$x(t) = PE(t)P^{-1}x(0). \quad (1.7)$$

Ejemplo 1.1.3. Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + x_2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

el cual se puede escribir de la forma $\dot{x} = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$, con vectores propios

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

La matriz P y su inversa están dadas por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así, bajo la transformación $y = P^{-1}x$, se obtiene el sistema lineal desacoplado

$$\dot{y}_1 = 4y_1,$$

$$\dot{y}_2 = -2y_2,$$

el cual tiene como solución general $y_1(t) = c_1 e^{4t}$, $y_2(t) = c_2 e^{-2t}$. De acuerdo a la ecuación (1.7), la solución general del sistema (1.8) esta dada por

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1}C,$$

donde $C = (c_1, c_2)$, o equivalentemente

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{c_1}{2} (e^{4t} + e^{-2t}) + \frac{c_2}{2} (e^{4t} - e^{-2t}) \\ x_2 &= \frac{c_1}{2} (e^{4t} - e^{-2t}) + \frac{c_2}{2} (e^{4t} + e^{-2t}). \end{aligned}$$

1.1.3. Operador Exponencial

Una técnica para calcular la solución del sistema (1.1) cuya matriz no es diagonalizable es mediante el uso de un operador exponencial de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para esto, es necesario definir el concepto de convergencia en el espacio lineal $L(\mathbb{R}^n)$ de los operadores lineales en \mathbb{R}^n . Esto se hace usando el operador norma de T definida como

$$||T|| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|$$

donde $|x|$ denota la norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$, es decir

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

La convergencia de una sucesión de operadores $\{T_k\}$ con $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$, se define en términos de la norma del operador de la siguiente manera:

Definición 1.1.4. Una sucesión de operadores lineales $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ se dice que converge a un operador lineal $T \in L(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \rightarrow \infty$, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

si $\forall \varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq N$, $\|T - T_k\| < \varepsilon$.

Lema 1.1.5. Para $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes afirmaciones

1. $|T(x)| \leq \|T\| \|x\|$
2. $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$
3. $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ para toda $k \in \mathbb{N} \cup 0$

Teorema 1.1.2. Sea $T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $t_0 > 0$. La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

converge absolutamente y uniformemente para todo $|t| \leq t_0$.

Demostración 1.1.6. Sea $a = \|T\|$. Del lema (1.1.5) se deduce que si $|t| \leq t_0$, entonces

$$\left\| \frac{T^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|T\| |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!}.$$

Pero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0}.$$

Por lo tanto, por el criterio de M-Weierstrass se deduce que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo t con $|t| \leq t_0$.

Definición 1.1.7. Sea A una matriz de $n \times n$ para toda $t \in \mathbb{R}$, se define

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Para una matriz A de $n \times n$, e^{At} es una matriz de $n \times n$ que se puede calcular en términos de los valores y vectores propios de A .

A partir de la definición (1.1.7) se tienen las siguientes propiedades:

1. Si P y T son transformaciones lineales en \mathbb{R}^n y $S = PTP^{-1}$, entonces $e^S = Pe^T P^{-1}$.
2. Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$ entonces $e^{At} = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1}$.
3. Si S y T son transformaciones lineales en \mathbb{R}^n que conmutan, es decir, que satisfacen $ST = TS$, entonces $e^{S+T} = e^S e^T$.
4. Si T es una transformación lineal en \mathbb{R}^n , la inversa de la transformación lineal e^T es dada por $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

Ejemplo 1.1.8. Calcula la exponencial de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Primero calculemos el polinomio característico de la matriz A , para ello,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= 5 - \lambda(-4 - \lambda) + 18 = -20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2. \end{aligned}$$

Así, el polinomio característico es

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Ahora, encontremos los valores propios de la matriz A , para ello

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 2 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1.$$

Por otra parte, calculemos sus vectores propios:

■ Para $\lambda_1 = 2$ tenemos que

$$(A - \lambda_1 I)v = (A - 2I)v = \left(\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

esto implica que

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)v &= \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 3x_1 - 6x_2 &= 0 \\ x_1 &= 2x_2. \end{aligned}$$

Así un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$ es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } x_2 \in \mathbb{R}.$$

■ De igual manera, para $\lambda_2 = -1$ tenemos que

$$(A - \lambda_2 I)v = (A + I)v = \left(\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)v &= \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 3x_1 - 3x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Por tanto, un vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$ es

$$v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Luego de v_1 y v_2 , se tiene que

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

esto implica que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior, se sigue que

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la matriz resultante es una matriz diagonal

$$e^B = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la exponencial de la matriz A es

$$\begin{aligned} e^A &= Pe^BP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^2 & e^{-1} \\ e^2 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^2 - e^{-1} & -2e^2 + 2e^{-1} \\ e^2 - e^{-1} & -e^2 + 2e^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.1.4. Teorema Fundamental Para Sistemas Lineales

A continuación, daremos un resultado que garantiza la existencia y unicidad de la solución de un sistema lineal.

Lema 1.1.9. Sea A una matriz cuadrada, entonces

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Teorema 1.1.3 (Teorema fundamental para Sistemas Lineales). Sea A una matriz de $n \times n$. Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema del valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

tiene una solución única dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (1.10)$$

Observe la similitud en la forma de la solución (1.10) con la solución $x(t) = e^{at}x_0$ de la ecuación diferencial elemental de primer orden $\dot{x} = ax$ y la condición inicial $x(0) = x_0$.

Ejemplo 1.1.10. Encuentra la solución del sistema lineal $\dot{x} = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución

La matriz A se puede expresar como la suma de dos matrices, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde ,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora veamos que $BC = CB$. Es decir,

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $BC = CB$. Por lo que $e^{At} = e^{Bt}e^{Ct}$. Como B es una matriz diagonal, entonces

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

y

$$e^{Ct} = I + Ct + \frac{(Ct)^2}{2} + \frac{(Ct)^3}{3!} + \cdots +,$$

lo cual implica que

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema Fundamental para Sistemas Lineales se tiene que la solución para el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ esta dada por $x(t) = e^{At}x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto

$$x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0.$$

1.1.5. Subespacios Invariantes

En esta subsección definiremos los subespacios estable, inestable y central denotados de la siguiente manera E^s, E^u y E^c , respectivamente, del sistema lineal (1.1) y daremos algunas propiedades importantes de los subespacios antes mencionados.

Definición 1.1.11. Sea λ un valor propio de la matriz A de multiplicidad $m \leq n$. A cualquier solución v de $(A - \lambda I)^k v = 0$, con $k = 1, \dots, m$, se le llama vector propio generalizado de A .

Sea A una matriz de $n \times n$ con k valores propios reales y $w_j = u_j + iv_j$ con $j = k+1, \dots, k+m$, donde m satisface la relación $n = 2m + k$, son los valores propios generalizados que corresponden a los valores propios complejos, así $B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$ es una base en \mathbb{R}^n .

Denotaremos por

$$\begin{aligned} E^s &= \text{Gen} \{u_j, v_j | a_j < 0\}, \\ E^c &= \text{Gen} \{u_j, v_j | a_j = 0\}, \\ E^u &= \text{Gen} \{u_j, v_j | a_j > 0\}. \end{aligned}$$

Los subespacios de \mathbb{R}^n generados por las partes reales e imaginarias de los vectores propios generalizados w_j correspondientes a los valores propios λ_j con parte real negativa, positiva y cero se les llama, subespacio estable (E^s), inestable (E^u) y central (E^c), respectivamente. No es difícil ver que el espacio \mathbb{R}^n se escribe como suma directa de los subespacios anteriores, es decir, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$.

Definición 1.1.12. Un subespacio $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es invariante con respecto al flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si $(e^{At})(E) \subset E$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Los siguientes resultados nos dan una relación entre la dinámica dada por el flujo e^{At} y los subespacios definidos anteriormente.

Proposición 1.1.13. Los subespacios E^s , E^u y E^c son invariantes respecto al flujo $\Phi_t(x_0) = e^{At}x_0$ del sistema (1.1).

En términos de los valores propios se tiene las siguientes características:

- ★ Si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real distinta de cero, entonces al flujo se le llama *flujo hiperbólico*, y al sistema (1.9) se le llama *sistema lineal hiperbólico*.
- ★ Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, al origen se le llama *pozo*.
- ★ Si todos los valores propios de A tienen parte real positiva, al origen se le llama *fuelle*.

Teorema 1.1.4. Sea A una matriz real de $n \times n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x_0 = 0$ y para $x_0 \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} |e^{At}x_0| = \infty$
2. Todos los valores propios de A tienen parte real negativa.
3. Hay constantes positivas a , c , m y M tal que para toda $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |e^{At}x_0| &\leq Me^{ct}|x_0|, & \text{para } t \leq 0 & \text{ y} \\ |e^{At}x_0| &\geq me^{at}|x_0|, & \text{para } t \geq 0. \end{aligned}$$

Como caso particular tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.1.14. Si $x_0 \in E^s$, entonces $e^{At}x_0 \in E^s$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x_0 = 0$; si $x_0 \in E^u$, entonces $e^{At}x_0 \in E^u$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At}x_0 = 0$.

Ejemplo 1.1.15. Encuentre los subespacios estables, inestables y centrales E^s , E^u y E^c del sistema lineal (1.1) con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Además, dibuja el retrato fase. ¿Esta matriz define un flujo hiperbólico, e^{At} ?

Solución.

Observe que A es una matriz diagonal. Entonces, los valores propios son:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \text{ y } \lambda_3 = 3.$$

Calculemos ahora los vectores propios.

- Para $\lambda_1 = -1$ se tiene que

$$(A - \lambda I)v = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

esto implica que

$$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de lo anterior se obtiene que

$$x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } -x_2 = 0, \text{ entonces } x_2 = 0$$

$$\text{Si } 4x_3 = 0, \text{ entonces } x_3 = 0.$$

Así, un vector propio asociado a $\lambda_1 = -1$ es

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } x_1 \in \mathbb{R}.$$

- De igual manera, para $\lambda_2 = -2$ se tiene que

$$(A - \lambda I)v = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de lo anterior se tiene que,

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } 5x_3 = 0, \text{ entonces } x_3 = 0.$$

por tanto, un vector propio asociado a $\lambda_2 = -2$ es

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } x_2 \in \mathbb{R}.$$

- Por último, para $\lambda_3 = 3$

$$(A - \lambda I)v = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

de modo que,

$$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de lo anterior se tiene

$$\text{Si } -4x_1 = 0, \text{ entonces } x_1 = 0$$

$$\text{Si } -5x_2 = 0, \text{ entonces } x_2 = 0$$

$$x_3 = 0 \in \mathbb{R}.$$

Por lo que, un vector propio asociado a $\lambda_3 = 3$ es

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Como $\lambda_1 = -1 < 0$ y $\lambda_2 = -2 < 0$, esto implica que

$$E^s = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle (1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T \rangle$$

y como $\lambda_3 = 3 > 0$, entonces

$$E^u = \langle v_3 \rangle = \langle (0, 0, 1)^T \rangle,$$

y dado que no existen más valores propios, se tiene que

$$E^c = \{0\}.$$

Para el retrato fase, como el subespacio estable E^s es el plano x_1, x_2 y el subespacio inestable E^u es x_3 , entonces su retrato fase es :

Finalmente, como los valores propios de A tienen parte real diferente de cero, por lo tanto la matriz define un flujo hiperbólico $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1.2. Sistemas no Lineales.

En esta sección estudiaremos algunos resultados básicos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal dado en la forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.11}$$

donde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ y E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

1.2.1. Teorema de Existencia y Unicidad

En esta subsección daremos las condiciones para la existencia y unicidad del sistema no lineal (1.11) con condición inicial dada.

Definición 1.2.1. Supongamos que $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Entonces $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (1.11) en un intervalo I , si $x(t)$ es diferenciable en I y si para todo $t \in I$, se tiene que $x(t) \in E$, entonces

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Si $x_0 \in E$, entonces $x(t)$ es una solución del sistema (1.11) con valor inicial $x(t_0) = x_0$ en un intervalo I , con $t_0 \in I$. Mostraremos que bajo ciertas condiciones en la función f , el sistema no lineal (1.11) tiene una única solución a través de cada punto $x_0 \in E$ definida en un intervalo maximal de existencia $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. En general, no es posible resolver el sistema no lineal (1.11); sin embargo, daremos información cualitativa sobre el comportamiento local de la solución.

Teorema 1.2.1 (*Teorema de Existencia y Unicidad*). Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $x_0 \in E$ y $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $f \in C^1(E)$. Entonces existe una $a > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \tag{1.12}$$

tiene una única solución $x(t)$ definida en el intervalo $[-a, a]$.

Ejemplo 1.2.2. Muestre que $x(t)$ es una solución del problema de valor inicial (1.12) para todo $t \in I$ si y sólo si $x(t)$ es una función continua que satisface la ecuación integral,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds \text{ para todo } t \in I$$

Demostración 1.2.3. \Rightarrow) Supongamos que $x(t)$ es solución de (1.12) para todo $t \in I$, entonces por la definición (1.2.1), $x(t)$ debe ser diferenciable en I , en consecuencia $x(t)$ es continua en I .

Luego, como $f(x(t)) \in C(E)$ para toda $t \in I$, esto implica que $x(t) \in E$ para toda $t \in I$ y además

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ para todo } x(t) \in E.$$

Aplicando el operador integral en ambos lados de la igualdad y con un respectivo cambio de variable se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{x(0)}^{x(t)} x'(s) ds &= \int_0^t f(x(s)) ds \\
x(s) \Big|_{x(0)}^{x(t)} &= \int_0^t f(x(s)) ds \\
x(t) - x(0) &= \int_0^t f(x(s)) ds.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Ya que $x(t)$ es solución de (1.12), entonces $x(0) = x_0$, por lo que (1.13) es equivalente a

$$x(t) - x(0) = \int_0^t f(x(s)) ds.$$

Por tanto, despejando $x(t)$ de (1.13), se tiene que

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s)) ds \text{ para todo } t \in I.$$

\Leftrightarrow Supongamos que $x(t)$ es una función continua que satisface lo siguiente

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s)) ds \text{ para todo } t \in I. \tag{1.2.5}$$

Aplicando la derivada con respecto a t en la igualdad (1.2.5) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t f(x(s)) ds \\
x(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t f(x(s)) ds.
\end{aligned}$$

Notemos que $x(t)$ es diferenciable para toda $t \in I$ y como f es continua para toda $t \in I$, entonces por el Teorema Fundamental del Calculo, se tiene que

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Por tanto $x(t)$ es solución para el problema (1.12) de valor inicial.

1.2.2. El máximo intervalo de Existencia

El Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad (1.2.1) establece que si $f \in C^1(E)$, entonces el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{1.14}$$

tiene una única solución definida en algún intervalo $(-a, a)$.

Teorema 1.2.2. Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $x_0 \in E$, $f \in C^1(E)$ y (α, β) el intervalo maximal de solución del problema (1.14). Si $\beta < \infty$, existe $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$.

Ejemplo 1.2.4. Encuentre el intervalo maximal de existencia (α, β) para el siguiente problema de valor inicial y si $\alpha > -\infty$ o $\beta < \infty$ discuta el límite de la solución cuando $t \rightarrow \alpha^+$ o cuando $t \rightarrow \beta^-$ respectivamente.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Solución

Observe que $\dot{x} = x^2$ es equivalente a tener

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

Usando el método de separación de variables, tenemos que

$$\begin{aligned}dx &= x^2 dt \\ \frac{dx}{x^2} &= dt,\end{aligned}\tag{1.15}$$

luego, aplicando el operador integral en (1.15) y realizando un cambio de variable se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x^2} dx &= \int_0^t ds \\ \int_{x(0)}^{x(t)} x^{-2} dx &= \int_0^t ds \\ -\frac{1}{x} \Big|_{x(0)}^{x(t)} &= s \Big|_0^t \\ -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(0)} &= t \\ -\frac{1}{x(t)} &= t - \frac{1}{x_0} \\ x(t) &= \frac{x_0}{1 - tx_0}\end{aligned}$$

Por otro lado,

- si $\frac{x_0}{1 - tx_0} > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1 + tx_0}{x_0} &> 0 \\ 1 - tx_0 &> 0 \\ -tx_0 &> -1 \\ t &< \frac{1}{x_0}\end{aligned}$$

por lo que el intervalo maximal esta dado por

$$(\alpha, \beta) = \left(-\infty, \frac{1}{x_0}\right), \text{ cuando } x_0 > 0$$

y cuando $t \rightarrow \left(\frac{1}{x_0}\right)^-$ la solución $x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \rightarrow \infty$.

- Si $\frac{x_0}{1 - tx_0} < 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1 - tx_0}{x_0} &< 0 \\ 1 - tx_0 &< 0 \\ -tx_0 &< -1 \\ t &> \frac{1}{x_0}\end{aligned}$$

así, el intervalo maximal está dado por

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{x_0}, \infty\right), \text{ cuando } x_0 < 0$$

y cuando $t \rightarrow \left(\frac{1}{x_0}\right)^+$ la solución $x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \rightarrow -\infty$.

- Si $x_0 = 0$, el intervalo maximal esta dado por

$$(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty).$$

1.2.3. Flujo de una Ecuación Diferencial

Anteriormente definimos el flujo, $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, del sistema

$$\dot{x} = Ax.$$

El mapeo $\phi_t = e^{At}$ satisface las siguientes propiedades básicas para toda $x \in \mathbb{R}^n$:

- (i) $\phi_0(x) = x$
- (ii) $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$ para toda $s, t \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\phi_{-t}(\phi_t(x)) = \phi_t(\phi_{-t}(x)) = x$ para toda $t \in \mathbb{R}$.

En esta sección definiremos el flujo, ϕ_t , del sistema lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.16}$$

y mostraremos que satisface estas propiedades básicas. En la siguiente definición, denotaremos el máximo intervalo de existencia (α, β) de la solución $\phi(t, x_0)$ del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

por $I(x_0)$ desde los extremos α y β del intervalo maximal generalmente dependen de x_0 .

Definamos el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ como

$$\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times E \mid t \in I(x_0)\}$$

donde $I(x)$ es el intervalo maximal.

Definición 1.2.5. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$, sea $\phi(t, x_0)$ la solución del problema de valor inicial (1.17) definida en su intervalo maximal de existencia $I(x_0)$. Entonces para $t \in I(x_0)$, el conjunto de funciones ϕ_t definidas por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

se le llama *flujo de la ecuación diferencial* (1.16) o el flujo definido por la ecuación diferencial (1.16).

Teorema 1.2.3. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(E)$. Entonces para toda $x_0 \in E$, si $t \in I(x_0)$ y $s \in I(\phi_t(x_0))$, se sigue que $s + t \in I(x_0)$ y

$$\phi_{s+t}(x_0) = \phi_s(\phi_t(x_0)).$$

Teorema 1.2.4. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(E)$. Si $(t, x_0) \in \Omega$, entonces existe una vecindad u de x_0 tal que

- (1) $\{t\} \times u \subset \Omega$.
- (2) $v = \phi_t(u)$ es abierto en E .
- (3) $\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x$ para toda $x \in u$.
- (4) $\phi_t(\phi_{-t}(y)) = y$ para toda $y \in v$.

Definición 1.2.6. Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(E)$ y $\phi_t : E \rightarrow E$ el flujo de la ecuación diferencial (1.16) definido para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces un conjunto $S \subset E$ es llamado *invariante con respecto al flujo* ϕ_t si $\phi_t(S) \subset S$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y S es llamado *positivamente (o negativamente) invariante con respecto al flujo* ϕ_t si $\phi_t(S) \subset S$ para toda $t \geq 0$ (o $t \leq 0$).

Ejemplo 1.2.7. Determine el flujo $\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ para el sistema no lineal (1.16) con

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

y muestre que el conjunto $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{-x_1^2}{4} \right\}$ es invariante con respecto al flujo ϕ_t .

Solución.

Sea $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, entonces la solución general de $\dot{x} = x_1$ es

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}.$$

Ahora, para $\dot{x}_2 = 2x_2 + x_1^2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= 2x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 - 2x_2 &= x_1^2, \end{aligned}$$

multiplicando por e^{-2t} ambos lados de la igualdad tenemos que

$$\begin{aligned} e^{-2t} (\dot{x}_2 - 2x_2) &= e^{-2t} (c_1 e^{-2t})^2 \\ \frac{d}{dt} (e^{-2t} x_2) &= c_1 e^{-2t} e^{-2t}, \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable tenemos

$$\frac{d}{ds} (e^{-2s} x_2(s)) ds = c_1 e^{-4t} dt,$$

por otro lado, integrando la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds} (e^{-2s} x_2(s)) ds &= \int_0^t c_1 e^{-4s} ds \\ e^{-2t} x_2(t) - e^0 x_2(0) &= c_1 \left(-\frac{1}{4} \right) e^{-4s} \Big|_0^t \\ e^{-2t} x_2(t) - c_2 &= -\frac{1}{4} c_1^2 e^{-4t} + \frac{1}{4} c_1^2 e^0 \\ e^{-2t} x_2(t) &= -\frac{1}{4} c_1^2 e^{-4t} + \frac{1}{4} c_1^2 + c_2 \\ x_2(t) &= -e^{-2t} \frac{1}{4} c_1^2 e^{-4t} + \frac{1}{4} c_1^2 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} \\ x_2(t) &= \frac{1}{4} c_1^2 e^{-2t} + \frac{1}{4} c_1^2 e^{2t} + c_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

Luego, sea $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in S$, entonces

$$\phi_t(c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\frac{1}{4} c_1^2 e^{-2t} + \frac{1}{4} c_1^2 e^{2t} + c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Si $c_2 = -\frac{c_1^2}{4}$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_t(c) &= \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\frac{1}{4} c_1^2 e^{-2t} + \frac{1}{4} c_1^2 e^{2t} - \frac{c_1^2}{4} e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\frac{1}{4} c_1^2 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ -\frac{x_1^2(t)}{4} \end{pmatrix} \in S. \end{aligned}$$

1.2.4. Linealización

Para analizar el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.18)$$

hay que determinar los puntos de equilibrio de (1.18) y describir el comportamiento de (1.18) cerca de sus puntos de equilibrio. En las próximas dos secciones mostraremos el comportamiento local del sistema no lineal (1.18) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 el cual está cualitativamente determinado por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.19)$$

con la matriz $A = Df(x_0)$, cerca del origen. La función lineal $Ax = Df(x_0)x$ es llamada la *parte lineal de* f en x_0 .

Definición 1.2.8. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto de equilibrio* (o *punto critico*) de (1.18), si $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 se llama *punto de equilibrio hiperbólico* de (1.18) si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real cero. El sistema lineal (1.19) con la matriz $A = Df(x_0)$ se llama *linealización de* (1.18) en el punto x_0 .

Si $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio de (1.18), entonces $f(0) = 0$ y, por el Teorema de Taylor,

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + \cdots .$$

Se sigue que la función lineal $Df(0)x$ es una buena primera aproximación para la función lineal $f(x)$ cerca de $x = 0$ y es razonable esperar que el comportamiento del sistema no lineal (1.18) cerca del punto $x = 0$ se aproximará por el comportamiento de su linealización en $x = 0$.

Tenga en cuenta que si x_0 es un punto de equilibrio de (1.18) y $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el flujo de la ecuación diferencial (1.18), entonces $\phi_t(x_0) = x_0$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, x_0 es llamado *punto fijo del flujo* ϕ_t ; o también se le llama *cero, punto crítico o punto singular del campo vectorial* $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.9. Los puntos de equilibrio de la matriz A se pueden clasificar de acuerdo al signo que tenga la parte real de sus valores propios, es decir:

1. x_0 es una fuente si la parte real de todos los valores propios de la matriz A son positivos.

2. x_0 es un pozo si la parte real de todos los valores propios de la matriz A son negativos.
3. x_0 es una silla, si es un punto de equilibrio hiperbólico y además la matriz A tiene valores propios con parte real positiva y por lo menos uno con parte real negativa.

Ejemplo 1.2.10. Clasifica los puntos de equilibrio (Pozo, Fuente o Silla) del sistema no lineal (1.18) con $f(x)$ dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_1x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

Solución.

Calculemos sus puntos de equilibrio, para ello

$$\begin{aligned} x_1 - x_1x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1^2 &= 0, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} x_1(1 - x_2) &= 0 \\ x_2 - x_1^2 &= 0, \end{aligned}$$

♠ Si $x_1 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x_2 - 0 &= 0 \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

♠ De igual forma, si $x_2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 1 - x_1^2 &= 0 \\ x_1^2 &= 1 \\ x_1 &= \pm 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio son

$$(0, 0), (1, 1), (-1, 1)$$

Ahora, calculamos $Df(x)$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

evaluando $Df(x)$ en los puntos de equilibrios, tenemos

1. Para $(0, 0)$ se tiene que

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 - 0 & 0 \\ -2(0) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, el punto de equilibrio $(0, 0)$, es un punto de equilibrio hiperbólico y es una funete ya que $\lambda_1 = 1$ es de multiplicidad 2.

2. De igual manera, para $(1, 1)$ tenemos que

$$A_1 = Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 - 1 & -1 \\ -2(1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, calculemos el polinomio característico de la matriz A_1 , para ello

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A_1 - \lambda I) = \det \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right) = -\lambda(1 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2. \end{aligned}$$

Para encontrar los valores propios de A_1 hacemos

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 2 &= 0 \\ (\lambda - 2)(\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ el punto de equilibrio $(1, 1)$, es un punto de equilibrio hiperbólico y además es una silla.

3. Por último, para $(1, 1)$ se tiene que

$$A_2 = Df(-1, 1) = \begin{pmatrix} 1 - 1 & -(-1) \\ -2(-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que la matriz A_2 es similar a la matriz A_1 por lo que el procedimiento siguiente es análogo al anterior y por lo que se concluye que el punto de equilibrio $(1, 1)$, es un punto de equilibrio hiperbólico y además es una silla.

1.2.5. Teorema de la Variedad Estable

El teorema de la variedad estable es uno de los resultados más importantes en la teoría local cualitativa de ecuaciones diferenciales. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema lineal

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.20)$$

tiene variedades estable (S) y inestables (U) tangentes al punto x_0 en los subespacios estables (E^s) y inestables (E^u) del sistema linealizado

$$\dot{x} = Ax \quad (1.21)$$

donde $A = Df(x_0)$. Además, S y U tienen las mismas dimensiones que E^s y E^u , y si ϕ_t es el flujo del sistema no lineal (1.20), entonces S y U son positivamente o negativamente invariante bajo ϕ_t respectivamente y satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = x_0 \text{ para toda } c \in S$$

y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = x_0 \text{ para toda } c \in U.$$

Definición 1.2.11. Una n -variedad diferenciable M , es un espacio métrico conexo con una cubierta $\{U_\alpha\}$, es decir $(\cup U_\alpha = M)$ tal que

1. Para toda α , U_α es homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n , $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$.
2. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$, $h_\beta : U_\beta \rightarrow B$ son homeomorfismos, entonces $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son subconjuntos de \mathbb{R}^n y el mapeo

$$h = h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es diferenciable y para toda $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, el determinante Jacobiano es distinto de cero, es decir, $\det Dh(x) \neq 0$.

Teorema 1.2.5 (Teorema de la variedad estable). Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto que contiene al origen, sea $f \in C^1(E)$, ϕ_t el flujo del sistema no lineal (1.20). Suponga que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ valores propios con parte real positiva. Entonces existe una k variedad diferenciable S tangente al subespacio E^s del sistema lineal (1.21) en 0 tal que para toda $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ y para toda $x_0 \in S$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0$$

y existe una $(n - k)$ -variedad diferenciable U tangente al subespacio inestable E^u de (1.21) en 0 tal que para toda $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ y para toda $x_0 \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0$$

Ejemplo 1.2.12. Resolver el sistema del problema 2 y probar que S y U están dadas por

$$S : x_2 = \frac{x_1^2}{3} \quad \text{y} \quad U : x_1 = 0.$$

Dibujar S , U , E^s y E^u .

Solución.

El sistema a resolver es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Claramente, la solución de la primera ecuación diferencial con condición inicial $x_1(0) = x_1$ es

$$x_1(t) = x_1 e^{-t}.$$

Ahora, calculemos la solución de la segunda ecuación diferencial, considerando que la condición inicial es $x_2(0) = x_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \\
x_1^2 &= \dot{x}_2 - x_2 \\
(x_1 e^{-t})^2 &= \dot{x}_2 - x_2 \\
x_1^2 e^{-2t} &= \dot{x}_2 - x_2,
\end{aligned}$$

resolviendo lo anterior por el método del Factor Integrante, obtenemos que

$$\begin{aligned}
e^{-t}(\dot{x}_2 - x_2) &= e^{-t}(x_1^2 e^{-2t}) \\
\dot{x}_2 e^{-t} - x_2 e^{-t} &= x_1^2 e^{-3t} \\
\frac{d}{dt}(x_2 e^{-t}) &= x_1^2 e^{-3t} \\
x_2 e^{-t} &= -\frac{x_1^2}{3} e^{-3t} + c \\
x_2(t) &= -\frac{x_1^2}{3} e^{-2t} + c e^t.
\end{aligned}$$

Observe que

$$x_2 = x_2(0) = -\frac{x_1^2}{3} e^{-2(0)} + c e^0 = -\frac{x_1^2}{3} + c,$$

por lo que $x_2 = -\frac{x_1^2}{3} + c$, esto implica que $c = x_2 + \frac{x_1^2}{3}$.

Entonces,

$$x_2(t) = -\frac{x_1^2}{3} e^{-2t} + (x_2 + \frac{x_1^2}{3}) e^t,$$

de esta manera

$$\phi_t(x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ -\frac{x_1^2}{3} e^{-2t} + (x_2 + \frac{x_1^2}{3}) e^t \end{bmatrix}.$$

Luego, veamos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = 0$, si y sólo si,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1 e^{-t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{x_1^2}{3} e^{-2t} + \lim_{t \rightarrow \infty} (x_2 + \frac{x_1^2}{3}) e^t = 0$$

por tanto, si $x_2 + \frac{x_1^2}{3} = 0$, entonces $x_2 = -\frac{x_1^2}{3}$. Así,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -\frac{x_1^2}{3} \right\}.$$

De manera similar tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = 0$, si y sólo si,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1 e^{-t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{x_1^2}{3} e^{-2t} + \lim_{t \rightarrow \infty} (x_2 + \frac{x_1^2}{3}) e^t = 0$$

por lo tanto, $x_1 = 0$. Así,

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\}.$$

Finalmente, del sistema (1.24) notemos que su único punto de equilibrio es el origen, $(0, 0)$, por lo que

$$Df(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = Df(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo tanto, $E^s = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $E^u = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. En conclusión E^s es el eje x_1 y $E^u = U$ es el eje x_2 . Gráficamente tenemos lo siguiente

1.2.6. Teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.23}$$

tiene la misma estructura que el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \tag{1.24}$$

con $A = Df(x_0)$.

Teorema 1.2.6 (Hartman-Grobman). Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen, $f \in C^1(E)$ y $\phi(t)$ el flujo del sistema no lineal (1.23). Si $f(0) = 0$ y la matriz $A = Df(0)$ no tiene valores propios con parte real cero, entonces existe un homeomorfismo H , de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, sobre un abierto V que contiene al origen tal que para $x_0 \in U$ y $t \in I(x_0)$

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0).$$

Es decir, el sistema (1.23) es topológicamente conjugado al sistema lineal $\dot{y} = Ay$.

El teorema de Hartman-Grobman nos dice que si x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal (1.24), existe un entorno de x_0 en el que f es topológicamente conjugada a la linealización de f en el punto de equilibrio x_0 de la ecuación diferencial, $\dot{x} = Df(x_0)x$.

Ejemplo 1.2.13. Resolver el sistema

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + z^2 \\ \dot{z} &= z\end{aligned}\tag{1.25}$$

Solución

Del sistema (1.25) se puede observar que es fácil determinar las soluciones de la primera y segunda ecuación diferencial.

Si la condición inicial para la primera ecuación es $y_1(0) = c_1$, entonces la solución general es $y_1(t) = c_1 e^t$, de manera similar para la tercera ecuación tenemos que, si la condición inicial es $z(0) = c_3$, entonces la solución general es $z(t) = c_3 e^t$.

Finalmente para la segunda ecuación diferencial del sistema (1.25), sustituimos $z(t)$ teniendo que

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 &= -y_2 + (c_3 e^t)^2 \\ \dot{y}_2 + y_2 &= c_3^2 e^{2t}.\end{aligned}$$

Resolviendo la última expresión, usando el factor integrante tenemos que

$$\begin{aligned}e^t(\dot{y}_2 + y_2) &= e^t(c_3^2 e^{2t}) \\ \dot{y}_2 e^t + y_2 e^t &= c_3^2 e^{3t} \\ y_2(t) &= \frac{c_3^2}{3} e^{2t} + c e^{-t},\end{aligned}$$

considerando $y_2(0) = c_2$, entonces

$$\begin{aligned}c_2 &= \frac{c_3^2}{3} e^{2(0)} + c e^{-(0)} \\ c &= c_2 - \frac{c_3^2}{3},\end{aligned}$$

así,

$$y_2(t) = \frac{c_3^2}{3}e^{2t} + (c_2 - \frac{c_3^2}{3})e^{-t}.$$

Por lo que

$$\phi_t(c) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ \frac{c_3^2}{3}e^{2t} + (c_2 - \frac{c_3^2}{3})e^{-t} \\ c_3 e^t \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Luego, veamos que si $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = 0$ si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1 e^{-t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{c_3^2}{3}e^{2t} + (c_2 - \frac{c_3^2}{3})e^{-t}) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} c_3 e^t = 0$$

por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_3^2}{3}e^{2t} = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} c_3 e^t = 0$, entonces $c_3 = 0$. En consecuencia la variedad estable es

$$S = \{c \in \mathbb{R}^3 | c_3 = 0\}.$$

De manera similar, vamos a determinar el conjunto de la variedad inestable, para ello si $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = 0$ si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1 e^{-t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{c_3^2}{3}e^{2t} + (c_2 - \frac{c_3^2}{3})e^{-t}) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} c_3 e^t = 0$$

Por tanto si $\lim_{t \rightarrow \infty} c_1 e^{-t} = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} (c_2 - \frac{c_3^2}{3})e^{-t} = 0$, entonces $c_1 = 0$ y $c_2 = \frac{c_3^2}{3}$. Así

$$U = \{c \in \mathbb{R}^3 | c_1 = 0 \text{ y } c_2 = \frac{c_3^2}{3}\}.$$

Ahora bien, del sistema (1.25) note que $f(y_1, y_2, z) = (-y_1, -y_2 + z^2, z)$, entonces, si consideramos que $f(y_1, y_2, z) = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} -y_1 &= 0 \\ -y_2 + z^2 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

de lo anterior se obtiene que $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ y $z = 0$, es decir, el único punto de equilibrio del sistema (1.25) es $(0, 0, 0)$. Por consiguiente, calculemos la derivada de $f(y_1, y_2, z)$ teniendo que

$$Df(y_1, y_2, z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Evalutando en el punto de equilibrio se tiene que

$$Df(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se concluye que el punto de equilibrio $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio hiperbólico y dado que tenemos al menos un valor propio positivo 1 y un valor propio negativo -1 , entonces $(0, 0, 0)$ es una silla. Además el subespacio estable y inestable son

$$E^s = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } E^u = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

1.2.7. Funciones de Liapunov

La estabilidad de un punto de equilibrio x_0 de (1.23) es determinado por el signo de la parte de los valores propios λ_j de la matriz $Df(x_0)$. Un punto de equilibrio hiperbólico x_0 es asintóticamente estable si y sólo si $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ para $j = 1, \dots, n$; es decir, si y sólo si x_0 es un pozo, y será inestable si y sólo si es una fuente ó una silla. La estabilidad de los puntos de equilibrio no hiperbólicos suele ser más difícil de determinar. Para ello introduciremos la siguiente definición.

Definición 1.2.14. Sea ϕ_t el flujo de (1.23) definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto de equilibrio x_0 de (1.23) es estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$ y $t \geq 0$ tenemos

$$\phi_t(x) \in N_\varepsilon(x_0).$$

Un punto de equilibrio x_0 es inestable si no es estable, y es asintóticamente estable si es estable y si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$ tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0.$$

Del Teorema de la Variedad Estable y del Teorema de Hartman- Grobman se deduce que cualquier pozo de (1.23) es asintóticamente estable y cualquier fuente o silla de (1.23) es inestable.

Teorema 1.2.7. Si x_0 es un pozo de (1.23) y $Re(\lambda_j) < -\alpha < 0$ para todos los valores propios λ_j de la matriz $Df(x_0)$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda $x \in N_\delta(x_0)$, el flujo ϕ_t de (1.23) satisface

$$|\phi_t(x) - x_0| \leq \varepsilon e^{-\alpha t},$$

para toda $t \geq 0$.

Teorema 1.2.8. Si x_0 es un punto de equilibrio estable de (1.23), entonces la matriz $Df(x_0)$ no tiene valores propios con parte real positiva.

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio no hiperbólico, una herramienta que se utiliza es el método de Liapunov.

Definición 1.2.15. Si $f \in C^1(E)$, $V \in C^1(E)$ y ϕ_t el flujo de (1.23), entonces la derivada de la función $V(x)$ a lo largo de la solución $\phi_t(x)$ es:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(x)) \big|_{t=0} = DV(x)f(x).$$

La última igualdad se sigue de la regla de la cadena. Tenga en cuenta que

- * Si $\dot{V} \leq 0$, entonces $V(\phi_t(x))$ es decreciente.
- * Si $\dot{V} \geq 0$, entonces $V(\phi_t(x))$ es creciente.

Teorema 1.2.9. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $x_0 \in E$, $f \in C^1(E)$ y $f(x_0) = 0$. Supongamos que existe una función de valor real $V \in C^1(E)$ tal que $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$:

- a) Si $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda $x \in E$, entonces x_0 es estable.
- b) Si $\dot{V}(x) < 0$ para toda $x \in E \setminus \{x_0\}$, entonces x_0 es asintóticamente estable.
- c) Si $\dot{V}(x) > 0$ para toda $x \in E \setminus \{x_0\}$, entonces x_0 es inestable.

Ejemplo 1.2.16. Utilice la función Liapunov $v(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ para mostrar que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1x_2^2 + x_3^2 - x_1^3 \\ x_1 + x_3^3 - x_2^3 \\ -x_1x_3 - x_3x_1^2 - x_2x_3^2 - x_3^5 \end{bmatrix}$$

Demuestre que las trayectorias del sistema linealizado $\dot{x} = Df(0)x$ para este problema radica en círculos en planos paralelos al plano x_1, x_2 ; por lo tanto, el origen es estable, pero no asintóticamente estable para el sistema linealizado.

Solución

Tenemos que $v(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Calculemos ahora $\dot{v} = Dv(x) \cdot f(x)$

$$\begin{aligned}
 \dot{v}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + 2x_3\dot{x}_3 \\
 &= 2x_1(-x_2 - x_1x_2^2 + x_3^2 - x_1^3) + 2x_2(x_1 + x_3^3 - x_2^3) \\
 &\quad + 2x_3(-x_1x_3 - x_3x_1^2 - x_2x_3^2 - x_3^5) \\
 &= -2x_1x_2 - 2x_1^2x_2^2 + 2x_1x_3^2 - 2x_1^4 \\
 &\quad + 2x_2x_1 + 2x_2x_3^3 - 2x_2^4 - 2x_1x_3^2 - 2x_3^2x_1^2 - 2x_2x_3^3 - 2x_3^6 \\
 &= -2x_1^2x_2^2 - 2x_1^4 - 2x_2^4 - 2x_3^2 - 2x_3^6 \\
 &= -2x_1^2x_2^2 - 2x_1^4 - 2x_2^4 - 2x_3^2x_1^2 - 2x_3^6 \\
 &= -2(x_3^6 + x_2^4 + x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2)
 \end{aligned}$$

como $(x_3^6 + x_2^4 + x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2) > 0$. Por lo tanto $\dot{v}(x_1, x_2, x_3) < 0$ para toda $x \in E \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Se concluye que $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Luego, calculemos $Df(x_1, x_2, x_3)$

$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -x_2^2 - 3x_1^2 & -1 - 2x_1x_2 & 2x_3 \\ 1 & -3x_2 & 3x_3^2 \\ -x_3 - 2x_3x_1 & -x_3^2 & -x_1 - x_1^2 - 2x_2x_3 - 5x_3^4 \end{bmatrix}.$$

Evaluemos $Df(x)$ en el punto de equilibrio $(0, 0, 0)$

$$Df(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

finalmente calculamos la ecuación diferencial lineal

$$\dot{y} = Df(0, 0, 0)\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para analizar el retrato fase consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= -y_2 \\
 \dot{y}_2 &= y_1 \\
 \dot{y}_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

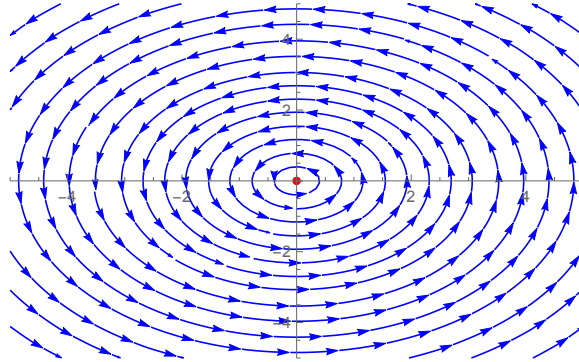


Figura 1.4: Retrato fase del sistema (1.2).

Por lo tanto, $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio estable y del retrato fase se puede observar que $(0, 0, 0)$ no es asintóticamente estable.

1.2.8. Bifurcación de Hopf.

La bifurcación de Hopf, es un tipo de bifurcación que presentan algunos sistemas, de tal manera que al variar el valor del parámetro de bifurcación del sistema, este sufre un cambio en la estabilidad del punto crítico en estudio, dando origen o desapareciendo una órbita periódica, la cual tienen determinada estabilidad, dicha estabilidad es proporcionada por el signo del primer coeficiente de Lyapunov.

De esta manera, este trabajo está enfocado en analizar lo que ocurre alrededor de este tipo de bifurcación.

Teorema 1.2.10 (Bifurcación de Hopf). Considere el sistema parametrizado

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe (x_0, μ_0) tal que

$$(H1) \quad f(x_0, \mu_0) = 0$$

(H2) $Dxf(x_0, \mu_0)$ posee un único par de valores propios en el eje imaginario y el resto están fuera de él.

(H3) $\frac{d}{d\mu}(Re(\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$.

donde $\lambda(\mu)$ es un valor propio de $Dxf(x_0, \mu)$.

Entonces, existe una única variedad central tridimensional que pasa por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. La dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r \\ \dot{\theta} &= w + c\mu + br^2\end{aligned}$$

Si $l_1 \neq 0$, entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenspacio generado por $\lambda(\mu_0) \cdot \lambda(\mu_0)$.

Si $l_1 < 0$ las órbitas periódicas son estables (caso supercrítico), mientras que si $l_1 > 0$ son inestables (caso subcrítico).

Capítulo 2

Modelo tritrófico de especies con efecto Allee aditivo.

2.1. Presentación del modelo.

En la dinámica de una población, el efecto Allee juega un papel importante en la descripción de la tasa de crecimiento de las especies. El concepto de efecto Allee fue acuñado por primera vez por Warder Clyde Allee en la década de 1930, el término principio de Allee se introdujo por primera vez en 1950[6, 3]. El concepto Allee intenta explicar el beneficio que puede tener una especie en la presencia de conespecíficos. Una de las restricciones que se tiene, es que para poder visualizar el efecto Allee se requiere una población pequeña, ya que la tasa de crecimiento se reduce. Varios tipos de factores biológicos y ambientales, como las dificultades para encontrar pareja, la supervivencia de las especies, la baja probabilidad de éxito en el apareamiento, la baja tasa de endogamia, la agresión antidepredadora, la evitación de los depredadores debido al cambio evolutivo son causantes del efecto Allee. Existe una importante y rica literatura dedicada a describir el fenómeno del efecto Allee, que establece una relación positiva entre cualquier componente medible de la aptitud individual y el tamaño de la población, cuantificado por el número o la densidad de las especies. En el mundo real se ha observado que muchas especies animales y vegetales experimentan una disminución de la tasa de crecimiento per cápita cuando sus poblaciones alcanzan tamaños pequeños o densidades bajas. El efecto Allee puede ser fuerte de tal manera que la tasa de crecimiento se vuelve negativa a partir de una determinada densidad de especies como con secuencia de una densidad baja en la población [7, 31, 4, 24, 32]. Así, la extinción de especies por debajo de una determinada densidad de población es evidente en caso de un fuerte efecto Allee.

Los resultados del Allee en los diferentes aspectos de una especie como son: la reproducción, la conservación y el comportamiento han sido un

aspecto importante para los investigadores en los últimos años. En muchas poblaciones como los insectos de la seda[15], las plantas[9, 11], los invertebrados marinos[30], las bacterias[29], los mamíferos y las aves[30, 5], se ha informado de las evidencias experimentales de los efectos Allee. Para describir el efecto Allee es necesario modificar la tasa de crecimiento logístico de la población de una sola especie. Una revisión de modelos de una sola especie sometida al efecto Allee demográfico fue presentada por Boukal y Berek[8]. Muchos aspectos matemáticos y biológicos de la dinámica poblacional causada por el efecto Allee han sido estudiados por los investigadores en años recientes. Por ejemplo, el efecto Allee en las presas fue considerado para la relación bidimensional por Leslie-Gower[10] y la condición sobre la existencia de tres ciclos límite.

2.2. Modelo de una sola especie con efecto Allee Aditivo.

El modelo clásico de crecimiento poblacional de tipo logístico esta dado por

$$\frac{dX}{dT} = RX \left(1 - \frac{X}{K}\right), \quad (2.1)$$

donde R es la tasa de crecimiento per-cápita de la población X y K es la capacidad de carga.

Para incorporar el efecto Allee al modelo (2.1), es necesario modificar la función de crecimiento logístico, mediante un término Allee multiplicativo o aditivo. Por ejemplo, en el caso del efecto Allee multiplicativo [8] el modelo (2.1) toma la forma

$$\frac{dX}{dT} = RX \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{A} - 1\right) \quad (2.2)$$

donde A representa el umbral de población Allee. Para el efecto Allee aditivo [21] el modelo se convierte en

$$\frac{dX}{dT} = RX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{MX}{Ba + X}, \quad (2.3)$$

donde M y B_a son la tasa de saturación del efecto Allee y la población de presas, respectivamente.

La función de crecimiento natural representada por el efecto Allee aditivo ha sido estudiada de manera amplia en [1, 2, 33, 21].

Consideremos el cambio de variable para el modelo (2.3) dado por

$$x = \frac{X}{K} \text{ y } t = RT, \quad (2.4)$$

lo cual implica que

$$X = xK \text{ y } T = \frac{t}{R},$$

al derivar se obtiene

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{R} \text{ y } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dX}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dX}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dX}{dT} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{KR} \frac{dX}{dT}.$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (2.2) y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{1}{KR} \right) RX \left(1 - \frac{X}{K} \right) - \left(\frac{1}{KR} \right) \frac{MX}{B_a + X} \\ &= \frac{1}{KR} \left(RX - \frac{RX^2}{K} \right) - \frac{1}{KR} \left(\frac{MX}{B_a + X} \right) \\ &= \frac{1}{KR} \left(RKx - \frac{R(Kx)^2}{K} \right) - \frac{1}{KR} \left(\frac{MKx}{B_a + Kx} \right) \\ &= \frac{1}{KR} \left(RKx - \frac{RK^2x^2}{K} \right) - \frac{1}{KR} \left(\frac{MKx}{B_a + Kx} \right) \\ &= \frac{1}{KR} (RKx - RKx^2) - \frac{1}{KR} \left(\frac{MKx}{B_a + Kx} \right) \\ &= x - x^2 - \frac{Mx}{RB_a + KRx} = x - x^2 - \frac{\frac{M}{RB_a}x}{\frac{RB_a}{RB_a} + \frac{KR}{RB_a}}. \end{aligned}$$

Así, el modelo de una sola especie con efecto Allee puede escribirse como

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - \frac{mx}{1 + b_ax}, \quad (2.5)$$

donde

$$m = \frac{M}{B_aR}, \quad b_a = \frac{K}{B_a}. \quad (2.6)$$

2.2.1. Puntos de equilibrio.

Para calcular los puntos de equilibrio del modelo (2.5) resolvemos la ecuación

$$x(1 - x) - \frac{mx}{1 + b_ax} = 0,$$

la cual después de realizar algunas manipulaciones algebraicas obtenemos

$$x(1 + b_ax - x - b_ax^2 - m) = 0.$$

Así, las soluciones de esta última ecuación están dadas por

$$x = 0 \tag{2.7}$$

y las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$-b_ax^2 + x(b_a - 1) - m + 1 = 0.$$

Para resolver la segunda ecuación hacemos uso de la fórmula general de segundo grado y obtenemos

$$x_{1,2}^* = \frac{-(b_a - 1) \pm \sqrt{(b_a - 1)^2 - 4(-b_a)(-m + 1)}}{2(-b_a)}.$$

Así, el modelo (2.3) tiene dos puntos de equilibrio no triviales:

$$x_1^* = \frac{(b_a - 1) + \sqrt{(b_a - 1)^2 - 4b_a(m - 1)}}{2b_a}$$

y

$$x_2^* = \frac{(b_a - 1) - \sqrt{(b_a - 1)^2 - 4b_a(m - 1)}}{2b_a}.$$

La tasa de crecimiento per-cápita esta por

$$g(x) = (1 - x) - \frac{m}{1 + b_ax}, \tag{2.8}$$

donde el término $\frac{m}{1 + b_ax}$ representa el efecto Allee aditivo en el modelo (2.5).

A partir de la expresión de $g(x)$ encontramos que

$$\frac{dg(x)}{dx} = -1 + \frac{mb_a}{(1 + b_ax)^2} \tag{2.9}$$

y

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} = -\frac{2mb_a^2}{(1+b_ax)^3} < 0, \quad (2.10)$$

ya que todos los valores de los parámetros son positivos. Así que $g(x)$ es cóncava y tiene un único punto crítico en

$$x_c = \sqrt{\frac{m}{b_a}} - \frac{1}{b_a}.$$

Para el modelo de una sola especie, la dinámica de la población es la siguiente: Si $x_c > 0$, $g(x)$ es creciente en $[0, x_c]$ y decreciente en $[x_c, \infty]$. Así que a bajas densidades de población la tasa de crecimiento per-cápita tiene una correlación positiva con el tamaño de la población, a este fenómeno se le conoce como efecto Allee. Por otro lado la condición $x_c > 0$ implica que

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{b_a}} - \frac{1}{b_a} &> 0 \\ \sqrt{\frac{m}{b_a}} &> \frac{1}{b_a} \\ \frac{1}{b_a^2} &> \frac{m}{b_a} \\ \frac{1}{b_a} &< m \end{aligned} \quad (2.11)$$

la condición (2.11) describe el efecto Allee.

1. La restricción sobre m dada por

$$\frac{1}{b_a} < m < 1$$

describe el efecto Allee débil. En este caso para cualquier condición inicial en el modelo (2.5) la solución converge asintóticamente a x_1^* .

2. Para la restricción

$$\frac{1}{b_a} < 1 < m < \frac{(b_a - 1)^2 + 4b_a}{4b_a}$$

tenemos un efecto Allee fuerte. En este caso x_2^* es inestable.

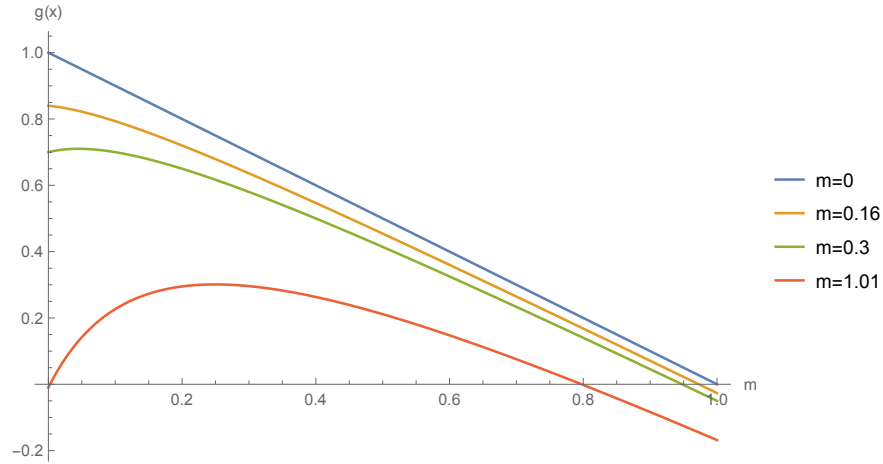


Figura 2.1: Tasa de crecimiento per cápita para diferentes valores de m .

La figura (2.1) muestra la tasa de crecimiento para diferentes valores de m :

- i) Si $m = 0$, entonces no hay efecto Allee.
- ii) Si $m = 0.16$ con punto crítico $x_c = -0.0211146$, entonces no hay efecto Allee.
- iii) Si $m = 0.3$ con punto crítico $x_c = 0.044949$, entonces hay un efecto Allee débil.
- iv) Si $m = 1.01$ con punto crítico $x_c = -0.0211146$, entonces hay un efecto Allee fuerte.

En cada caso fijamos el parámetro $b_a = 5$. La naturaleza cóncava de la curva comienza con el inicio del efecto Allee débil. Para este efecto, fijamos $m = 0.3$ mayor que $\frac{1}{b_a}$. Para el efecto Allee fuerte tomamos $m = 1.01$ para el mismo b_a . Podemos observar en el gráfico (línea roja) de la tasa de crecimiento per cápita para el efecto Allee fuerte que $g(x)$ sigue siendo negativa para un tamaño de población pequeño (x). Así, la población se extinguiría por debajo del tamaño crítico de la población.

2.3. Modelo tritrófico de especies con efecto Allee aditivo.

Consideremos que X es el número de especies en el nivel más bajo de la cadena alimentaria, Y el número de especies que dependen de X , y Z el

número de especies que se alimentan de Y . Siguiendo la discusión de la sección anterior el modelo de cadena alimentaria de tres especies con efecto Allee aditivo esta dado por

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= RX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{MX}{B_a + X} - C_1 F_1(X)Y, \\ \frac{dY}{dT} &= F_1(X)Y - F_2(Y)Z - D_1 Y, \\ \frac{dZ}{dT} &= C_2 F_2(Y)Z - D_2 Z,\end{aligned}\tag{2.12}$$

con respuestas funcionales Holling tipo II , donde

$$F_i(V) = \frac{A_i V}{B_i + V}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots \tag{2.13}$$

y, donde,

R y K denotan la tasa de crecimiento intrínseca y la capacidad de carga, respectivamente. C_1 y C_2 son las tasas de conversión de presa a depredador para las especies Y y Z . La tasa de mortalidad de las especies Y y Z se indican con D_1 y D_2 , respectivamente. Las constantes A_i y B_i parametrizan la respuesta funcional de saturación. B_i es el nivel de la población de presas donde la tasa de depredación por unidad de presa es la mitad de su valor máximo. El término aditivo del efecto Allee es dado por $\frac{M}{B_a + X}$, donde M y B_a son la tasa de saturación del efecto Allee y el tamaño de la población de presas, respectivamente.

Para simplificar el modelo, usamos el cambio de variable

$$x = \frac{X}{K}, \quad t = RT, \quad y = \frac{C_1 Y}{K} \quad \text{y} \quad z = \frac{C_1 Z}{C_2 K} \tag{2.14}$$

como consecuencia tenemos que

$$X = Kx, \quad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{R}, \quad Y = \frac{K}{C_1}y \quad \text{y} \quad Z = \frac{C_2 K}{C_1}$$

derivando x en (2.14) obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dX}{dT} = \frac{1}{K} \frac{dX}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dX}{dT} \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{KR} \frac{dX}{dT}.$$

Sutituyendo $\frac{dX}{dT}$ del modelo (2.12), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{KR} (RX) \left(1 + \frac{X}{K}\right) - \frac{1}{KR} \left(\frac{MX}{B_a + X}\right) - \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_1X}{B_1 + X}\right) Y \\
&= \frac{1}{KR} \left(RX - \frac{RX^2}{K}\right) - \frac{1}{KR} \left(\frac{MX}{B_a + X}\right) - \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_1X}{B_1 + X}\right) Y \\
&= \frac{1}{KR} \left(R(Kx) - \frac{R(Kx)^2}{K}\right) - \frac{1}{KR} \left(\frac{MKx}{B_a + Kx}\right) - \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_1Kx}{B_1 + Kx}\right) \frac{K}{C_1} y \\
&= \frac{1}{KR} \left(RKx - \frac{RK^2x^2}{K}\right) - \frac{1}{KR} - \frac{1}{KR} \left(\frac{MKx}{B_a + Kx}\right) - \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_1Kx}{B_1 + Kx}\right) \frac{K}{C_1} y \\
&= \frac{1}{KR} (RKx - RKx^2) - \frac{1}{KR} - \frac{1}{KR} \left(\frac{MKx}{B_a + Kx}\right) - \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_1Kx}{B_1 + Kx}\right) \frac{K}{C_1} y \\
&= x - x^2 - \frac{Mx}{RB_a + RKx} - \left(\frac{A_1Kx}{B_1 + Kx}\right) y \\
&= x - x^2 - \frac{\frac{M}{RB_a}x}{\frac{RB_a}{RB_a} + \frac{RK}{RB_a}x} - \left(\frac{\frac{A_1K}{RB_1}x}{\frac{RB_1}{RB_1} + \frac{RK}{RB_1}x}\right) y \\
&= x - x^2 - \frac{\frac{M}{RB_a}x}{1 + \frac{K}{B_a}x} - \left(\frac{\frac{A_1}{RB_1}x}{1 + \frac{K}{B_1}x}\right) y = x - x^2 - \frac{mx}{1 + b_ax} - \frac{m_1xy}{1 + b_1x} \\
\text{donde } m &= \frac{M}{RB_a}, \quad b_a = \frac{RB_a}{RB_a}, \quad m_1 = \frac{A_1}{RB_1} \quad y \quad b_1 = \frac{K}{B_1}, \\
&= x(1 + x) - \frac{mx}{1 + b_ax} - \frac{m_1xy}{1 + b_1x}.
\end{aligned}$$

Derivamos y en (2.14) para obtener

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{K} \frac{dY}{dt} = \frac{C_1}{K} \frac{dY}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{C_1}{K} \frac{dY}{dT} \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{C_1}{KR} \frac{dY}{dT}.$$

Al sustituir $\frac{dY}{dT}$ del modelo (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_1 X}{B_1 + X} \right) Y - \frac{C_1}{KR} \frac{A_2 Y}{B_2 + Y} Z - \frac{C_1}{KR} D_2 Y \\
&= \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_1 K x}{B_1 + K x} \right) \frac{K}{C_1} y - \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_2 \frac{K}{C_1} y}{B_2 + \frac{K}{C_1} y} \right) \frac{C_2 K}{C_1} z - \frac{C_1}{KR} \frac{D_2 K}{C_1} y \\
&= \frac{1}{R} \left(\frac{A_1 K x}{B_1 + K x} \right) y - \frac{C_2}{R} \left(\frac{A_2 \frac{K}{C_1} y}{B_2 + \frac{K}{C_1} y} \right) z - \frac{D_2}{R} y \\
&= \left(\frac{A_1 K x}{R B_1 + R K x} \right) y - \left(\frac{\frac{A_2 C_2 K R}{C_1} y}{R B_2 + \frac{R K}{C_1} y} \right) z - \frac{D_2}{R} y \\
&= \left(\frac{\frac{A_1 K}{R B_1} x}{\frac{R B_1}{R B_1} + \frac{R K}{R B_1} x} \right) y - \left(\frac{\frac{A_2 C_2 K}{C_1 R B_2} y}{\frac{R B_2}{R B_2} + \frac{R K}{R C_1 B_2} y} \right) z - \frac{D_2}{R} y \\
&= \left(\frac{\frac{A_1 K}{R B_1} x}{1 + \frac{K}{B_1} x} \right) y - \left(\frac{\frac{A_2 C_2 K}{C_1 R B_2} y}{1 + \frac{K}{C_1 B_2} y} \right) z - \frac{D_2}{R} y \\
&= \frac{m_1 x y}{1 + b_1 x} - \frac{m_2 y z}{1 + b_2 y} - d_2 y
\end{aligned}$$

donde $m_2 = \frac{A_2 C_2 K}{C_1 R B_2}$ y $d_2 = \frac{D_2}{R}$.

Finalmente, derivando z en (2.14) obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C_1}{C_2 K} \frac{dZ}{dt} = \frac{C_1}{C_2 K} \frac{dZ}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{C_1}{C_2 K} \frac{dZ}{dT} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{C_1}{C_2 K R} \frac{dZ}{dT}.$$

Sustituyendo $\frac{dZ}{dT}$ del modelo (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{C_1}{C_2 K R} C_2 \left(\frac{A_2 Y}{B_2 + Y} \right) Z - \frac{C_1}{C_2 K R} D_2 Z \\
&= \frac{C_1}{KR} \left(\frac{A_2 \frac{K}{C_1} y}{B_2 + \frac{K}{C_1} y} \right) \frac{C_2 K}{C_1} z - \frac{C_1}{C_2 K R} \frac{D_2 K}{C_1} z \\
&= \left(\frac{\frac{A_2 C_2 K}{C_1} y}{R B_2 + \frac{K R}{C_1} y} \right) z - \frac{D_2}{R} z \\
&= \left(\frac{\frac{A_2 C_2 K}{C_1 R B_2} y}{1 + \frac{K}{R B_2 C_1} y} \right) z - \frac{D_2}{R} z \\
&= \left(\frac{m_2 y z}{1 + b_2 y} \right) - d_2 z.
\end{aligned}$$

En resumen, el modelo (2.12) con efecto Allee aditivo puede escribirse como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{mx}{1+b_ax} - \frac{m_1xy}{1+b_1x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{m_1xy}{1+b_1x} - \frac{m_2yz}{1+b_2y} - d_1y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{m_2yz}{1+b_2y} - d_2z,\end{aligned}\tag{2.15}$$

recordando que

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{A_1K}{RB_1}, \quad m_2 = \frac{A_2C_2K}{C_1RB_2}, \quad b_1 = \frac{K}{RB_1}, \\ b_2 &= \frac{C_2K}{RB_2C_1}, \quad d_1 = \frac{D_1}{R}, \quad d_2 = \frac{D_2}{R}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

2.4. Análisis cualitativo del modelo.

Para que el sistema (2.15) tenga sentido biológico se requiere que las soluciones no tengan un crecimiento exponencial. El siguiente resultado garantiza el requerimiento anterior

Teorema 2.4.1. Todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ del sistema (2.15) están uniformemente acotadas.

Demostración 2.4.1. Definimos la función

$$P(t) = x(t) + y(t) + z(t),\tag{2.17}$$

diferenciando (2.17) y sustituyendo las ecuaciones del modelo (2.15) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \\ &= x(1-x) - \frac{mx}{1+b_ax} - d_1y - d_2z.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} + \mu P(t) &= x(1-x+\mu) - \frac{mx}{1+b_ax} - (d_1-\mu)y - (d_2-\mu)z. \\ &\leq x(1-x+\mu) - (d_1-\mu)y - (d_2-\mu)z \leq \frac{(1+\mu)^2}{4},\end{aligned}$$

donde $\mu = \min\{d_1, d_2\}$. Usando la teoría de desigualdad diferencial, podemos escribir

$$0 \leq P(t) \leq \frac{(1 + \mu)^2}{4\mu} + P(0)e^{-\mu t}.$$

De esto podemos concluir que cuando $t \rightarrow \infty$, se cumple

$$0 \leq P(t) \leq \frac{(1 + \mu)^2}{4\mu}.$$

Por lo anterior se define

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq x + y + z \leq \frac{(1 + \mu)^2}{4\mu}, \mu = \min\{d_1, d_2\} \right\},$$

como el conjunto con sentido biológico del modelo (2.15) el cual es positivamente invariante.

2.4.1. Puntos de Equilibrio.

Para calcular los puntos de equilibrio del modelo (2.15) resolvemos $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ y $\frac{dz}{dt} = 0$.

i) Si $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, entonces claramente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el punto de equilibrio trivial $E_0 = (0, 0, 0)$.

ii) Si $y = 0$ y $z = 0$, sustituyendo en el sistema (2.15) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - \frac{mx}{1 + b_a x} - \frac{m_1 x(0)}{1 + b_1 x} = x(1 - x) - \frac{mx}{1 + b_a x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{m_1(0)(0)}{1 + b_1(0)} - \frac{m_2(0)(0)}{1 + b_2(0)} - d_1(0) = 0 \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{m_2(0)(0)}{1 + b_2(0)} - d_2(0) = 0, \end{aligned}$$

así, solo resta resolver $\frac{dx}{dt} = 0$, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - \frac{mx}{1 + b_ax} = 0,$$

o de forma equivalente

$$x \left[(1 - x) - \frac{m}{1 + b_ax} \right] = 0.$$

Si $x \neq 0$, entonces se tienen las equivalencias

$$\begin{aligned} (1 - x)(1 + b_ax) - m &= 0 \\ 1 + b_ax - x - b_ax^2 - m &= 0 \\ -b_ax^2 + x(b_a - 1) - m + 1 &= 0 \\ b_ax^2 + x(1 - b_a) + m - 1 &= 0 \end{aligned}$$

En conclusión, se tiene un punto de equilibrio en el eje x , $E_1 = (\bar{x}, 0, 0)$, donde \bar{x} es la raíz positiva de la ecuación cuadrática

$$b_ax^2 + (1 - b_a)x + (1 - m) = 0. \quad (2.18)$$

Tenemos el siguiente análisis

- a) Si $1 - m < 0$ y $1 - b_a > 0$, entonces el discriminante $(b_a - 1)^2 - 4b_a(m - 1) > 0$ y claramente

$$-(1 - b_a) + \sqrt{(b_a - 1)^2 - 4b_a(m - 1)} > 0.$$

Por lo tanto, tenemos una raíz positiva \bar{x} y un punto de equilibrio en el eje x , $E_1 = (\bar{x}, 0, 0)$.

- b) Si $1 - m > 0$ y $(b_a - 1)^2 - 4b_a(m - 1) < 0$, entonces no existen raíces reales y por lo tanto ningún punto de equilibrio en el eje x .
- c) Si $1 - m > 0$, $1 - b_a < 0$ y $(b_a - 1)^2 - 4b_a(m - 1) > 0$, entonces existen exactamente dos raíces positivas x_1^* y x_2^* de la ecuación (2.18) y dos puntos de equilibrio en el eje x .

iii) Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{mx}{1+b_ax} - \frac{m_1xy}{1+b_1x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{m_1xy}{1+b_1x} - \frac{m_2y(0)}{1+b_2y} - d_1y = \frac{m_1xy}{1+b_1x} - d_1y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{m_2(0)(0)}{1+b_2(0)} - d_2(0) = 0,\end{aligned}$$

resolvamos ahora $\frac{dx}{dt} = 0$ y $\frac{dy}{dt} = 0$, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}x(1-x) - \frac{mx}{1+b_ax} - \frac{m_1xy}{1+b_1x} &= 0 \\ \frac{m_1xy}{1+b_1x} - d_1y &= 0\end{aligned}$$

factorizando y en la segunda ecuación se obtiene

$$\left(\frac{m_1x}{1+b_1x} - d_1 \right) y = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{m_1x}{1+b_1x} - d_1 = 0$$

despejando x obtenemos

$$x = \frac{d_1}{m_1 - d_1b_1}$$

ahora factorizando x en la primera ecuación tenemos

$$x \left((1-x) - \frac{m}{1+b_ax} - \frac{m_1y}{1+b_1x} \right) = 0$$

o equivalentemente

$$(1-x) - \frac{m}{1+b_ax} - \frac{m_1y}{1+b_1x} = 0$$

al despejar y se obtiene

$$y = \frac{(1-x)(1+b_ax)(1+b_1x) - m(1+b_1x)}{m_1} = \frac{((1-x)(1+b_ax) - m)(1+b_1x)}{m_1}$$

En conclusión, tenemos el punto de equilibrio $E_2 = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$, donde

$$\tilde{x} = \frac{d_1}{m_1 - d_1 b_1}$$

y

$$\tilde{y} = \frac{((1-\tilde{x})(1+b_a\tilde{x}) - m)(1+b_1\tilde{x})}{m_1(1+b_a\tilde{x})}.$$

El sistema tiene el punto de equilibrio coexistente (x^*, y^*, z^*) , donde

$$y^* = \frac{d_2}{m_2 - d_2 b_2}, \quad z^* = \frac{1}{m_2 - d_2 b_2} \left\{ \frac{m_1 x^*}{1 + b_1 x^* - d_1} \right\} \quad (2.19)$$

y x^* es la solución de la ecuación cúbica

$$P_1 x^{*3} + P_2 x^{*2} + P_3 x^* + P_4 = 0, \quad (2.20)$$

donde

$$\begin{aligned} P_1 &= -b_a b_1 < 0, \\ P_2 &= b_a b_1 - b_1 - b_a, \\ P_3 &= b_a + b_1 - 1 - b_1 m - \frac{m_1 d_2}{m_2 - d_2 b_2}, \\ P_4 &= 1 - m - \frac{m_1 d_2}{m_2 - d_2 b_2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para calcular x^*, y^* y z^* despejaremos x, y y z del modelo (2.15). Primero igualamos a cero la ecuación (3) del modelo (2.15) teniendo que

$$\begin{aligned} \frac{m_2 y z}{1 + b_2 y} - d_2 z &= 0 \\ z \left(\frac{m_2 y}{1 + b_2 y} - d_2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Si $z \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{m_2 y}{1 + b_2 y} - d_2 &= 0 \\
 \frac{m_2 y}{1 + b_2 y} &= d_2 \\
 m_2 y &= d_2(1 + b_2 y) \\
 m_2 y &= d_2 + d_2 b_2 y \\
 m_2 y - d_2 b_2 y &= d_2 \\
 y(m_2 - d_2 b_2) &= d_2 \\
 y^* &= \frac{d_2}{m_2 - d_2 b_2}.
 \end{aligned}$$

Ahora usemos la ecuación (2) del modelo (2.15) para encontrar z^* ,

$$\begin{aligned}
 \frac{m_1 x y}{1 + b_1 x} - \frac{m_2 y z}{1 + b_2 y} - d_1 y &= 0 \\
 y \left(\frac{m_1 x}{1 + b_1 x} - \frac{m_2 z}{1 + b_2 y} - d_1 \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Si $y \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{m_1 x}{1 + b_1 x} - \frac{m_2 z}{1 + b_2 y} - d_1 &= 0 \\
 \frac{m_2 z}{1 + b_2 y} &= \frac{m_1 x}{1 + b_1 x} - d_1 \\
 z^* &= \left[\frac{m_1 x}{1 + b_1 x} - d_1 \right] \frac{1 + b_2 y^*}{m_2}.
 \end{aligned}$$

Finalmente de la ecuación (1) del modelo (2.15) tenemos que

$$\begin{aligned}
 x(1 - x) - \frac{m x}{1 + b_a x} - \frac{m_1 x y}{1 + b_1 x} &= 0 \\
 x \left(1 - x - \frac{m}{1 + b_a x} - \frac{m_1 y}{1 + b_1 x} \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Si $x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
1 - x - \frac{m}{1 + b_a x} - \frac{m_1 y}{1 + b_1 x} &= 0 \\
(1 + b_a x) \left[1 - x - \frac{m}{1 + b_a x} - \frac{m_1 y}{1 + b_1 x} \right] &= 0 \\
1 + b_a x - x - b_a x^2 - m - \frac{m_1 y(1 + b_a x)}{1 + b_1 x} &= 0 \\
(1 + b_1 x) \left[1 + b_a x - x - b_a x^2 - m - \frac{m_1 y(1 + b_a x)}{1 + b_1 x} \right] &= 0 \\
1 + b_1 x + b_a x + b_1 b_a x^2 - x - b_1 x^2 - b_a x^2 \\
- b_a b_1 x^3 - m - b_1 x m - m_1 y^* - m_1 y^* b_a x &= 0 \\
- b_a b_1 x^{*3} + b_1 b_a x^{*2} - b_1 x^{*2} - b_a x^{*2} + b_a x^* + b_1 x^* - x^* - b_1 m x^* \\
- \frac{m_1 d_2 b_a x^*}{m_2 d_2 b_2} - \frac{m_1 d_2}{m_2 - d_2 b_2} - m + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Así x^* es la solución de la ecuación cúbica

$$P_1 x^{*3} + P_2 x^{*2} + P_3 x^* + P_4 = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
P_1 &= -b_a b_1, \\
P_2 &= b_a b_1 - b_1 - b_a, \\
P_3 &= b_a + b_1 - 1 - b_1 m - \frac{m_1 d_2 b_a}{m_2 - d_2 b_2}, \\
P_4 &= 1 - m - \frac{m_1 d_2}{m_2 - d_2 b_2}.
\end{aligned}$$

El siguiente teorema garantiza la existencia de un punto de equilibrio de coexistencia factible.

Teorema 2.4.2. Sea

$$\Delta = 18P_1 P_2 P_3 P_4 - 4P_2^3 P_4 + P_2^2 P_3^2 - 4P_1 P_3^3 - 27P_1^2 P_4^2 \quad (2.22)$$

el discriminante de (2.20). Ahora bien, si $\Delta > 0$, y

- Si $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $P_4 > 0$ o $P_2 < 0$, $P_3 > 0$, $P_4 > 0$ o $P_2 < 0$, $P_3 < 0$, $P_4 > 0$, entonces la ecuación (2.20) tiene una única raíz positiva,

- Si $P_2 > 0$, $P_3 < 0$, $P_4 < 0$ o $P_2 < 0$, $P_3 < 0$, $P_4 > 0$, la ecuación tiene dos raíz positivas,
- Si $P_2 > 0$, $P_3 < 0$ y $P_4 > 0$, la ecuación (2.20) tiene tres raices positivas.

Demostración 2.4.2. Como Δ es el discriminante de (2.20), existen tres raíces reales distintas si $\Delta > 0$. Para $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $P_4 > 0$ o $P_2 < 0$, $P_3 > 0$, $P_4 > 0$ o $P_2 < 0$, $P_3 < 0$, $P_4 > 0$, hay un cambio de signo y según la regla de los signos de Descartes, la ecuación tiene una sola raíz positiva. El otro enunciado del teorema se puede demostrar siguiendo la misma regla.

Observación 2. El punto de equilibrio límite $E_2 = (0, \tilde{y}, \tilde{z})$ no es un punto de equilibrio factible ya que $\tilde{y} = \frac{d_2}{m_2 - d_2 b_2}$ y $\tilde{z} = -\frac{d_2}{m_2 - d_2 b_2}$ (para $m_2 > d_2 b_2$, $\tilde{z} < 0$ y para $m_2 < d_2 b_2$, $\tilde{y} < 0$.)

2.4.2. Análisis de Estabilidad.

Cualquier punto de equilibrio $E = (x, y, z)$ del sistema (2.15) es estable si todas las raíces de las matrices Jacobianas, J , tienen partes reales negativas, donde

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

con

$$\begin{aligned} J_{11} &= (1 - 2x) - \frac{m}{1 + b_a x} + \frac{m b_a x}{(1 + b_a x)^2} - \frac{m_1 y}{1 + b_a x} + \frac{m_1 b_1 x y}{(1 + b_1 x)^2}, \\ J_{12} &= -\frac{m_1 x}{1 + b_1 x} \\ J_{13} &= 0, \\ J_{21} &= \frac{m_1 y}{1 + b_1 x} - \frac{m_1 b_1 x y}{(1 + b_1 x)^2}, \\ J_{22} &= \frac{m_1 x}{1 + b_1 x} - \frac{m_2 z}{1 + b_2 y} + \frac{m_2 b_2 y z}{(1 + b_2 y)^2} - d_1 \\ J_{23} &= -\frac{m_2 y}{1 + b_2 y}, \\ J_{31} &= 0, \\ J_{32} &= \frac{m_2 z}{1 + b_2 y} - \frac{m_2 b_2 y z}{(1 + b_2 y)^2}, \\ J_{33} &= \frac{m_2 y}{1 + b_2 y} - d_2. \end{aligned}$$

Teorema 2.4.3. El punto de equilibrio $E_0 = (0, 0, 0)$ es estable si $m > 1$.

Demostración 2.4.3. La matriz jacobiana en $E_0 = (0, 0, 0)$ es

$$J = \begin{pmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Los valores propios de la matriz Jacobiana son $\lambda_1 = 1 - m$, $\lambda_2 = -d_1$ y $\lambda_3 = -d_2$. Todos los valores propios de la matriz son negativos para $m > 1$.

Teorema 2.4.4. El punto de equilibrio axial $E_1 = (\bar{x}, 0, 0)$ es localmente asintóticamente estable si

$$m > (1 + b_a \bar{x})^2 (1 - 2\bar{x}), \quad \text{y } d_1 > \frac{m_1 \bar{x}}{1 + b_1 \bar{x}}. \quad (2.25)$$

Demostración 2.4.4. En el equilibrio axial $E_1 = (\bar{x}, 0, 0)$, la matriz Jacobiana es dada por

$$J(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & 0 \\ 0 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & P_4 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

donde $P_1 = 1 - 2\bar{x} - \frac{m}{(1+b_a \bar{x})^2}$, $P_2 = -\frac{m_1 \bar{x}}{(1+b_1 \bar{x})}$, $P_3 = \frac{m_1 \bar{x}}{(1+b_1 \bar{x})} - d_1$, y $P_4 = -d_2$. Los valores propios están dados por $\lambda_1 = P_1$, $\lambda_2 = P_3$ y $\lambda_3 = P_4$. Por lo tanto, el punto de equilibrio axial es localmente estable asintóticamente si $m > (1 + b_a \bar{x})^2 (1 - 2\bar{x})$ y $d_1 > \frac{m_1 \bar{x}}{1+b_1 \bar{x}}$.

Teorema 2.4.5. El punto de equilibrio de la frontera $E_2 = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$ es localmente estable asintóticamente si $\tilde{\sigma}_1 > 0$, $\tilde{\sigma}_3 > 0$ y $\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 > \tilde{\sigma}_3$.

Demostración 2.4.5. En el equilibrio axial $E_2 = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$, la matriz Jacobiana es dada por

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & 0 \\ Q_3 & Q_4 & Q_5 \\ 0 & 0 & Q_6 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

donde $Q_1 = (1 - 2\tilde{x}) - \frac{m}{(1+b_a \tilde{x})^2} - \frac{m_1 \tilde{y}}{(1+b_1 \tilde{x})^2}$, $Q_2 = -\frac{m_1 \tilde{x}}{1+b_1 \tilde{x}}$, $Q_3 = \frac{m_1 \tilde{y}}{(1+b_1 \tilde{x})^2}$, $Q_4 = \frac{m_1 \tilde{x}}{1+b_1 \tilde{x}} - d_1$, $Q_5 = -\frac{m_2 \tilde{y}}{1+b_2 \tilde{y}}$, $Q_6 = \frac{m_2 \tilde{y}}{1+b_2 \tilde{y}} - d_2$. La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^3 + \tilde{\sigma}_1 \lambda^2 + \tilde{\sigma}_2 \lambda + \tilde{\sigma}_3 = 0, \quad (2.28)$$

donde $\tilde{\sigma}_1 = -(Q_1 + Q_4 + Q_6)$, $\tilde{\sigma}_2 = Q_4Q_6 + Q_1(Q_4 + Q_6) + Q_2Q_3$, $\tilde{\sigma}_3 = -(Q_1Q_4 + Q_2Q_3)Q_6$. Así, el equilibrio axial será estable si los coeficientes de la ecuación característica satisfacen el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, es decir, $\tilde{\sigma}_1 > 0$, $\tilde{\sigma}_3 > 0$ y $\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 > \tilde{\sigma}_3$.

Teorema 2.4.6. El punto de equilibrio interior $E_4 = (x^*, y^*, z^*)$ es localmente estable asintóticamente si $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 > 0$ y $\sigma_1\sigma_2 > \sigma_3$, donde $\sigma_1 = -(R_1 + R_4 + R_7)$, $\sigma_2 = R_1R_7 - R_1R_4 - R_2R_3 - R_5R_6$ y $\sigma_3 = R_1R_5R_6 - R_1R_4R_7 - R_2R_7R_3$ con $R_1 = (1 - 2x^*) - \frac{m}{(1+b_ax^*)^2} - \frac{m_1y^*}{(1+b_1x^*)^2}$, $R_2 = -\frac{m_1x^*}{1+b_1x^*}$, $R_3 = \frac{m_1y^*}{(1+b_1x^*)^2}$, $R_4 = \frac{m_1x^*}{1+b_1x^*} - \frac{m_2z^*}{(1+b_2y^*)^2} - d_1$, $R_5 = -\frac{m_2y^*}{1+b_2y^*}$, $R_6 = \frac{m_2z^*}{(1+b_2y^*)^2}$, $R_7 = \frac{m_2y^*}{1+b_2y^*} - d_2$.

Demostración 2.4.6. En el equilibrio interior $E_4 = (x^*, y^*, z^*)$, la matriz Jacobiana es dada por

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ R_3 & R_4 & R_5 \\ 0 & R_6 & R_7 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^3 + \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda + \sigma_3 = 0. \quad (2.30)$$

Por tanto el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz nos proporciona la condición de un punto de equilibrio interno asintóticamente estable como $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 > 0$ y $\sigma_1\sigma_2 > \sigma_3$.

2.4.3. Análisis de la bifurcación de Hopf.

Ahora, estudiamos la bifurcación local de Hopf de E^* . Cualquiera de los parámetros del modelo puede ser un parámetro de bifurcación. Consideremos $\alpha = (m, m_1, m_2, b_a, b_1, b_2, d_1, d_2)$ como parámetro genérico de bifurcación del sistema.

Teorema 2.4.7. El sistema (2.17), sufre una bifurcación de Hopf en torno al punto de equilibrio coexistente E^* siempre que el valor del parámetro crítico $\alpha = (m, m_1, m_2, b_a, b_1, b_2, d_1, d_2) = \alpha^* = (m^*, m_1^*, m_2^*, b_a^*, b_1^*, b_2^*, d_1^*, d_2^*)$ contenido en el siguiente dominio.

$$\Gamma_{HB} = \left\{ \alpha^* \in R^{8+} : \sigma_1(\alpha^*)\sigma_2(\alpha^*) - \sigma_3(\alpha^*) = 0, \text{ con } \sigma_2 > 0, \dot{\sigma}_3 - (\dot{\sigma}_1\sigma_2 + \sigma_1\dot{\sigma}_2 \neq 0) \right\}. \quad (2.31)$$

Demostración 2.4.7. Usando la condición, $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = 0$, la ecuación característica (2.30) se convierte en

$$(\lambda^2 + \sigma_2)(\lambda + \sigma_1) = 0, \quad (2.32)$$

que tiene tres raíces, es decir $\lambda_1 = +i\sqrt{\sigma_2}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\sigma_2}$ y $\lambda_3 = -\sigma_1$.

Por lo tanto, existe un par de valores propios puramente imaginarios para $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = 0$.

Ahora verificamos la condición de transversalidad. Para ello, diferenciamos la ecuación característica (2.30) con respecto a α para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\alpha} &= -\frac{\lambda^2\dot{\sigma}_1 + \lambda\dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_3}{3\lambda^2 + 2\lambda\sigma_1 + \sigma_2} \Big|_{\lambda=i\sqrt{\sigma_2}} = \frac{-(i\sqrt{\sigma_2})^2\dot{\sigma}_1 - (i\sqrt{\sigma_2})\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_3}{3(i\sqrt{\sigma_2})^2 + 2(i\sqrt{\sigma_2})\sigma_1 + \sigma_2} \\ &= \frac{-(-\sigma_2)\dot{\sigma}_1 - i\dot{\sigma}_2\sqrt{\sigma_2} - \dot{\sigma}_3}{-3\sigma_2 + 2i\sigma_1\sqrt{\sigma_2} + \sigma_2} = \frac{\dot{\sigma}_1\sigma_2 - i\dot{\sigma}_2\sqrt{\sigma_2} - \dot{\sigma}_3}{-2\sigma_2 + 2i\sigma_1\sqrt{\sigma_2}} \\ &= \frac{\sigma_2\dot{\sigma}_1 - i\dot{\sigma}_2\sqrt{\sigma_2} - \dot{\sigma}_3}{-2\sigma_2 + 2i\sigma_1\sqrt{\sigma_2}} \cdot \frac{-2\sigma_2 - 2i\sigma_1\sqrt{\sigma_2}}{-2\sigma_2 - 2i\sigma_1\sqrt{\sigma_2}} \\ &= \frac{\dot{\sigma}_3 - \dot{\sigma}_1\sigma_2 + \sigma_1\dot{\sigma}_2(2\sigma_2 + 2i\sigma_1\sqrt{\sigma_2})}{4\sigma_2^2 - (-4\sigma_1^2\sigma_2)} \\ &= \frac{-2\sigma_2^2\dot{\sigma}_1 + 2i\dot{\sigma}_2\sigma_2\sqrt{\sigma_2} + 2\sigma_2\dot{\sigma}_3 - 2i\sigma_2\dot{\sigma}_1\sigma_1\sqrt{\sigma_2}}{4\sigma_2^2 - (-4\sigma_1^2\sigma_2)} \\ &+ \frac{2(i)(i)\sigma_1\dot{\sigma}_2(\sqrt{\sigma_2})(\sqrt{\sigma_2}) + 2i\sigma_1\dot{\sigma}_3}{4\sigma_2^2 - (-4\sigma_1^2\sigma_2)} \\ &= \frac{-2\sigma_2^2\dot{\sigma}_1 + 2i\dot{\sigma}_2\sigma_2\sqrt{\sigma_2} + 2\sigma_2\dot{\sigma}_3 - 2i\sigma_1\sigma_2\dot{\sigma}_1\sqrt{\sigma_2} - 2\sigma_1\dot{\sigma}_2\sigma_2 + 2i\sigma_1\dot{\sigma}_3\sqrt{\sigma_2}}{4\sigma_2^2 + 4\sigma_1^2\sigma_2} \\ &= \frac{2(-\sigma_2^2\dot{\sigma}_1 + i\dot{\sigma}_2\sigma_2\sqrt{\sigma_2} + \sigma_2\dot{\sigma}_3 - i\sigma_1\sigma_2\dot{\sigma}_1\sqrt{\sigma_2} - \sigma_1\dot{\sigma}_2\sigma_2 + i\sigma_1\dot{\sigma}_3\sqrt{\sigma_2})}{2(2\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2)} \\ &= \frac{-\sigma_2^2\dot{\sigma}_1 + \sigma_2\dot{\sigma}_3 - \sigma_1\dot{\sigma}_2\sigma_2}{2\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2} + \frac{i\dot{\sigma}_2\sigma_2\sqrt{\sigma_2} - i\sigma_2\dot{\sigma}_1\sigma_1\sqrt{\sigma_2} + i\sigma_1\dot{\sigma}_3\sqrt{\sigma_2}}{2\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2} \\ &= \frac{\sigma_2(-\sigma_2\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_3 - \sigma_1\dot{\sigma}_2)}{\sigma_2(2\sigma_2 + 2\sigma_1^2)} + i \left[\frac{\sqrt{\sigma_2}(\sigma_2\dot{\sigma}_2 + \sigma_1\dot{\sigma}_3 - \sigma_1\dot{\sigma}_1\sigma_2)}{2\sigma_2(\sigma_2 + \sigma_1^2)} \right] \\ &= \frac{\dot{\sigma}_3 - \dot{\sigma}_1\sigma_2 + \sigma_1\dot{\sigma}_2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2)} + i \left[\frac{\sqrt{\sigma_2}(\sigma_2\dot{\sigma}_2 - \sigma_1\dot{\sigma}_3 + \sigma_1\dot{\sigma}_1\sigma_2)}{2\sigma_2(\sigma_1^2 + \sigma_2)} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^*} = \frac{\dot{\sigma}_3 - \dot{\sigma}_1\sigma_2 + \sigma_1\dot{\sigma}_2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2)} \neq 0 \Leftrightarrow \dot{\sigma}_3 - \dot{\sigma}_1\sigma_2 + \sigma_1\dot{\sigma}_2 \neq 0. \quad (2.33)$$

Por lo que la bifurcación de Hopf se produce en $\alpha = \alpha^*$.

Capítulo 3

Simulaciones numéricas

En este capítulo mostraremos las soluciones numéricas que garantizan la estabilidad y coexistencia de las tres especies en el modelo matemático descrito en el capítulo anterior. Tomaremos como parámetro de bifurcación de nuestro sistema a d_1 .

3.1. Condiciones de la Bifurcación de Hopf

En este capítulo se muestran simulaciones numéricas que garantizan la coexistencia de las especies en el modelo tritrofico (2.15) mediante la existencia de órbitas periódicas estables. Con el objetivo de tener un punto de equilibrio $p^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{d_2}{m_2 - b_2 d_2}, \frac{(2+b_1)d_1 - m_1}{(2+b_1)(b_2 d_2 - m_2)}\right)$ en el primer octante se asigna

$$b_a = \frac{2(2 + b_1)b_2 d_2(2m - 1) - 8d_2 m_1 - 2(2 + b_1)(2m - 1)m_2}{(2 + b_1)b_2 d_2 + 4d_2 m_1 - (2 + b_1)m_2}.$$

Por el Teorema (2.4.7) se considera la tasa de mortalidad $d_1 \in \Gamma_{HB}$ como el parámetro de bifurcación

$$d_1 = -\frac{125 - 400m + 2752m^2 - 5A}{800m + 768m^2}$$

donde

$$A = \sqrt{625 + 4000m - 22400m^2 - 51200m^3 + 397312m^4},$$

y el parámetro σ_2 es

$$\sigma_2(d_1) = -\frac{-25 - 80m + 576m^2 + A}{12800m^2}.$$

La figura 3.1 muestra las gráficas de los parámetros de bifurcación $d_1(m)$ y $\sigma_2(d_1)$ como función del efecto Allee.

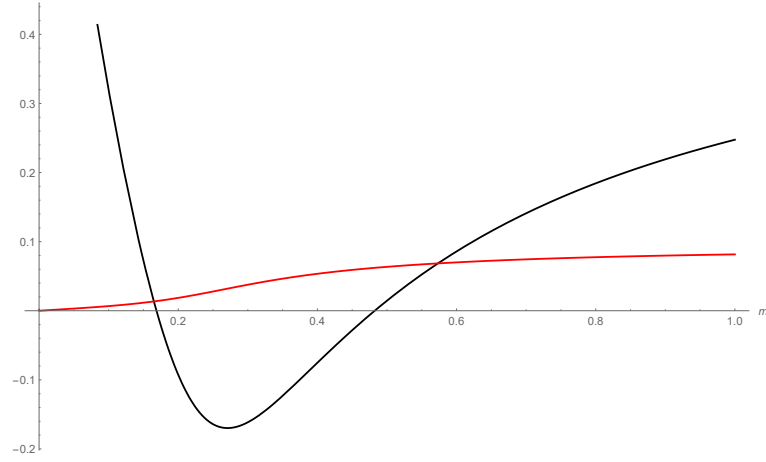


Figura 3.1: La curva d_1 en color negro es positiva para $m \in (0, 0.16) \cup (0.48, \infty)$, mientras que la curva de color rojo corresponde a $\sigma_2(d_1)$ que es positiva para $m > 0$.

La condición de transversalidad esta dada por

$$\frac{d\lambda}{dd_1} = \frac{(390625 - 16m(-203125 + 4m(75(2900 - 41A) + 16m(87000 - 3906250 + 160m(-203125 + 4m(296875 - 365A4m(-86925 + 16m(-13175 + 45784m) + 1247A))))))}{+32m(59375 + 2m(-132375 + 16m(-22265 + 90836m))))))}$$

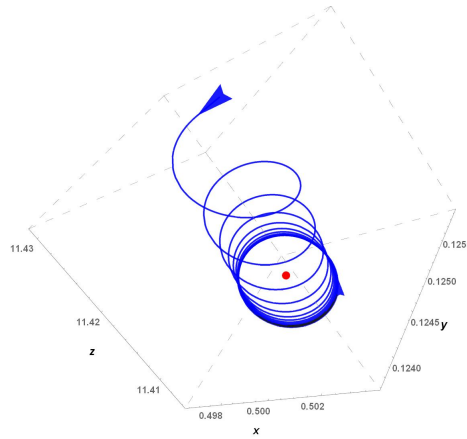


Figura 3.2: Solución numérica del sistema (2.15) con el conjunto de parámetros $d_1 = 0.858$, $b_1 = 3$, $m_1 = 5$, $m_2 = \frac{1}{10}$, $d_2 = \frac{1}{100}$, $b_2 = 2$, $m = 0.6$ y $b_a = 2.8$.

Para realizar la figura (3.2) se tomaron valores positivos para d_1 a fin de encontrar la estabilidad y coexistencia de las especies. Para ello se consideró el siguiente intervalo

$$[0, 0 \cdot 16] \text{ y } [0 \cdot 48, \infty].$$

Además se calculo el primer coeficiente de Lyapunov en dónde $l_1 = -0 \cdot 224$, este término nos garantiza la existencia de órbitas periódicas alrededor del punto de equilibrio, cuyas coordenadas son $X = 0 \cdot 5$, $Y = 0 \cdot 125$ y $Z = 11 \cdot 426$.

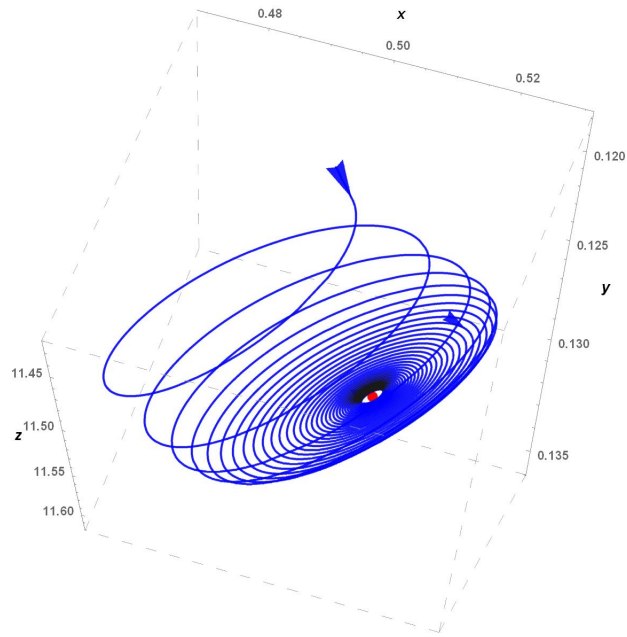


Figura 3.3: Solución numérica del modelo (2.15) con el conjunto de parámetros $d_1 = 0 \cdot 079$, $d_2 = \frac{1}{100}$, $b_2 = 2$, $b_1 = 3$, $b_a = 2 \cdot 8$, $m_2 = \frac{1}{10}$, $m_1 = 5$, y $m = 0 \cdot 59$.

El comportamiento del sistema se convierte en un ciclo límite cuando $d_1 = 0 \cdot 079$ y cuando nuestro punto de equilibrio es estable, esto se puede ver en la figura (3.3). Las coordenadas del punto de equilibrio son $X = 0 \cdot 5$, $Y = 0 \cdot 125$ y $Z = 11 \cdot 43$. Al hacer está perturbación observe que se pierden las órbitas periódicas mostradas en la figura anterior.

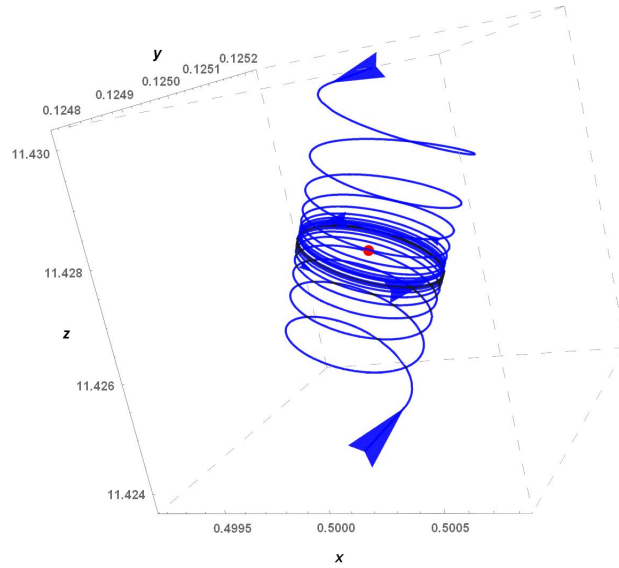


Figura 3.4: Estabilidad del sistema (2.15) tomando el conjunto de parámetros $d_1 = 0 \cdot 86$, $d_2 = \frac{1}{100}$, $b_2 = 2$, $b_1 = 3$, $b_a = 2 \cdot 8$, $m_2 = \frac{1}{10}$, $m_1 = 5$ y $m = 0 \cdot 601$.

Observe que al perturbar el parámetro de bifurcación se obtienen órbitas periódicas alrededor del punto de equilibrio el cual es inestable y por ende el sistema se vuelve estable lo cual nos garantiza la coexistencia de las tres especies, es decir, la existencia de presas, depredador y superdepredador en un mismo entorno. Esto se puede ver en la figura (3.4).

Conclusiones

Bibliografía

- [1] Aguirre P, González-Olivares E, Saez E. (2009). *Three limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive allee effect*. SIAM J Appl Math 69 (5): 1244-1262.
- [2] Aguirre P, González-Olivares E, Saez E. (2009). *Two limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect*. Nonlinear Anal Real World Appl 10(3): 1401-1416.
- [3] Allee WC, Bowen E. (1932). *Studies in animal aggregations: mass protection against colloidal silver among goldfishes*. Journal of Experimental Zoology 61 (2): 185-207.
- [4] Boukal DS, Sabelis MW, Berec L. (2007). *How predator functional responses and Allee effects in prey affect the paradox of enrichment and population collapses*. Theor Popul Biol 72: 136-147.
- [5] Courchamp F, Grenfell B, Clutton-Brock T. (2000). *Impact of natural enemies on obligately cooperatively breeders*. Oikos 91: 311-322.
- [6] Courchamp F, Berec J, Gascoigne J. (2008). *Allee effects in ecology and conservation*. Oxford University Press, Oxford, New York, USA.
- [7] Courchamp F, Berec L, Gascoigne J. (2008). *Allee effects in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, Oxford.
- [8] David S, Boukal Ludek Berec. (2002). *Single-species Models of the Allee Effect: Extinction Boundaries*. Sex Ratios and Mate Encounters. J theor Biol 218: 375-394.
- [9] Ferdy J, Austerlitz F, Moret J, Gouyon P, Godelle B. (1999). *Pollinator-induced density dependence in deceptive species*. Oikos 87: 547-560.
- [10] González-Olivares E, Mena-Lorca J, Rojas-Palma A. Jos D. Flores. (2011). *Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model*

- as consequences of the Allee effect on prey.* Appld Math Model 35: 366-381.
- [11] Gopalsamy K. (1992). *Stability and Oscillation in Delay Differential Equation of Population Dynamics*. Kluwer Academic, Dor-drecht.
- [12] Hastings A, Powell T. (1991). *Chaos in three-species food chain*. Ecology 72: 896-903.
- [13] Jorgensen SE. (1995). *The growth rate of zooplankton at the edge of chaos: ecological models*. J Theor Biol 175: 13-21.
- [14] Klebanoff A, Hastings A. (1994). *Chaos in three species food chains*. J Math Biol 32: 427-451.
- [15] Kuussaari M, Saccheri I, Camara M., Hanski I. (1998). *Allee effect and population dynamics in the Glanville fritillary butterfly*. Oikos 82: 384-392.
- [16] Kuznetsov YA, Rinaldi S. (1996). *Remarks on Food chain dynamics*. Math Biosci 134: 1-33.
- [17] Mandal S, Ray S, Roy S, Jørgensen SE. (2006). *Order to chaos and vice versa in an aquatic ecosystem*. Ecol Model 197: 498-504.
- [18] Mandal S, Ray S, Roy S, Jørgensen SE. (2007). *Investigation of thermodynamic properties in an ecological model developing from order to chaotic states*. Ecol Model 204: 40-46.
- [19] Mandal S, Ray S, Roy SK. (2009). *Study of biocomplexity in an aquatic ecosystem through ascendancy*. Biosystems 95: 30-34.
- [20] Mandal S, Panja MM, Ray S, Roy SK. (2010). *Qualitative behavior of three species food chain around inner equilibrium point: spectral analysis*. Nonlinear Anal-Model 15(4): 459-472.
- [21] Manna K, Banerjee M. (2018). *Stationary, non-stationary and invasive patterns for a prey-predator system with additive Allee effect in prey growth*. Ecol. Complex 36: 206-217.
- [22] McCann K, Yodzis P. (1994). *Bifurcation structure of three species food-chain model*. Theor Popul Biol 48: 93-125.
- [23] Nath B, Kumari K, Kumar V, Das KP. (2019). *Refugia and Allee effect in prey species stabilize chaos in a tri-trophic food chain model*. Differ Equ Dyn Syst.

- [24] Ni W, Wang M. (2016). *Dynamics and patterns of a diffusive Leslie-Gower prey-predator model with strong Allee effect in prey*. J Differ Equations 261: 4244-4274.
- [25] Pal N, Samanta S, Chattopadhyay J. (2014). *Revisited Hastings and Powell model with omnivory and predator switching*. Chaos Solitons and Fractals 66: 58-73.
- [26] Perko Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. (3rd Edition). Springer.
- [27] Roy U, Sarwardi S, Majee NC, Ray S. (2016). *Effect of salinity and fish predation on zooplankton dynamics in Hooghly-Matla estuarine system, India*. Ecol Inf 35: 19-28.
- [28] Saifuddin M, Samanta S, Biswas S, Chattopadhyay J. (2017). *An eco-epidemiological model with different competition coefficients and strong-Allee in the prey*. International Journal of Bifurcation and Chaos 27(08): p.1730027.
- [29] Smith R, Tan C, Srimani JK, Pai A. (2014). *Programmed Allee effect in bacteria causes a tradeoff between population spread and survival*. Proc Natl Acad Sci 111: 1969-1974.
- [30] Stoner AW, Ray-Culp M. (2000). *Evidence for Allee effects in an over-harvested marine gastropod: density-dependent mating and egg production*. Mar Ecol Prog Ser 202: 297-302.
- [31] Wang MH, Kot M. (2001). *Speeds of invasion in a model with strong or weak Allee effects*. Math Biosci 171: 83-97.
- [32] Wang J, Shi J, Wei J. (2011). *Dynamics and pattern formation in a diffusive predator-prey system with strong Allee effect in prey*. J Differ Equations 251: 1276-1304.
- [33] Zhang B, Wang B, Lv G. (2011). *Exponential extinction of a stochastic predator-prey model with Allee effect*. Appl. Math. Model 35: 366-381.