Преобразование Фурье и его банда

№3

Рассмотрим всевозможные приложения маленькой строки к другой.
Для каждой позиции j в большой строке посчитаем
d[j] = $\sum_{i=0}^{n}(a[j+i]-b[i])^2$. Откуда можно заметить, что
d[j] = 0 тогда и только тогда, когда можно приложить к этой позиции маленькую строчку. Действительно, тогда каждое $a[j+i] == b[i]$ и имеем сумму 0.
Рассмотрим, как посчитать d[j].
Знаем, что $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ откуда x^2 мы независимо умеем считать как просто для большой строки префикс суммы квадратов.
Потом для любой подстроки за $O(1)$ данное выражение считается путем разности префиксов частичных значений на границах.
Для маленькой строки точно также y^2 будет посчитан 1 раз.
Теперь посчитаем $x * y$, для этого необходимо посчитать всевозможные скалярные произведения одной строки на другую,сделаем это с помощью преобразования Фурье(как это было рассказано на лекции).
В следствии всего вышеописанного имеем требуемую ассимптотику:
$O(nlogn)$ на Фурье + $O(n)$ проход по всей строке = $\mathrm{O}(nlogn)$

№4аб

Сведем данную задачу к предыдущей, с требуемой асимптотикой, но проделаем изначально несколько модицикаций. Рассмотрим все элементы последовательности a, если среди них есть отрицательные, то добавим ко всем членам минимальное из них + 1, если же среди них нет отрицательных, добавим ко всем элементам последовательности 1. Знаки вопроса же заменим на 0. В меньшей последовательности проделаем все те же самые операции, после чего перейдем к решению предыдущей задачи. Покажем, что мы действительно получим искомое. Заметим, что заменой знаков вопроса на 0, при вычислении разности квадратов введенного функционала, они не будут вносить никакого результата в сумму, следовательно, если эта сумма отличается на значение меньшее количества знаков вопроса, то данная позиция приложения удовлетворяет нас.
Покажем, что добавлением одного и того же значения к элементам, мы не изменим результата. Так как мы вычисляем $(x'-y')^2$, где $x' = x + k$ а, $y' = y + k$, то $x' - y' = x + k - y - k = x - y$, следовательно значения введенного нами функционала не изменятся и задача по прежнему выполнима за требуемую асиматотику $O(nlogn)$.