Матроиды

Харламов Алексей, группа 153

№1

Покажем, что данное множество является матроидом путем проверки необходимых свойств:

1) Пустое множество удовлетворяет нашим условиях, так как мы имеем 0 ребер, следовательно все неравенства наложенные на количество ребер исходящих из вершины принадлежащих B выполняются.

2) Пусть у нас есть набор ребер B, который является независимым множеством, тогда всякое его подмножество так же будет удовлетворять необходимому условию, так как количество ребер выходящих из вершин и принадлежащих B только уменьшается, следовательно множество остается независимым.

3) Пусть у нас есть два множества A и B, причем $|A| < |B|$. Тогда покажем, что мы можем добавить ребро к множеству A и полученное объединение так же будет являться независимым множеством. Рассмотрим вершины, из которых исходят ребра в множестве A. Рассмотрим 2 варианта:

а) в множестве A не осталось вершин, в которые можно добавить ребро из множества B так, чтобы A в объединении с этим ребром оставалось независимым множеством(т.е все неравенства наложенные на количество ребер выходящих из вершин принадлежащих множеству A оставались выполненны), тогда так как мощность множества B больше множества A(то по принципу Дирихле), в B будет использована «новая» вершина, которая не использовалась в A и необходимое неравенство наложенное на ее ребра выполнено, следовательно мы можем добавить это ребро из новой вершины и полученное множество будет оставаться независимым.

б) в множестве A остались вершины, в которые могут быть добавлены ребра из множества B, чтобы вновь образованное множество оставалось независимым. Тогда имеем опять разделение на 2 случая:

б-1) Пусть в B есть ребро, которое исходит из этих вершин, тогда это ребро добавляется к A и полученное объединение остается независимым множеством.

б-2) Пусть в B нет ребер, которые выходят из описанных вершин, тогда так как мощность B больше A, мы будем иметь в B ребро, которое не принадлежит описанным вершинам(так же по принципу Дирихле, так как в B есть все ребра из A, но его мощность больше A), но для него так же выполняется условие неравенства, наложенного на вершину, из которое оно выходит, следовательно мы так же можем его добавить в A и полученное объединение будет независимым множеством.

Таким образом выполнены все условия, наложенные на независимое множество, следовательно оно является матроидом.

№3

Аналогично предыдущей задаче докажем, что пара $\lhd E, I \rhd$ является матроидом путем проверки необходимых свойств.

1) Предположим, что $B \subset \emptyset$. Тогда из исходного графа $G = (V, E \backslash B)$ не удаляется никакое ребро, следовательно связность никак не меняется, следовательно если исходный граф был не связным, данное свойство не выполняется и данная пара не является матроидом, с другой стороны, если исходный граф является связным, свойство выполняется, следовательно в предположении о том, что исходный граф связен(по указания преподавателя ведущего семинарские занятия) рассмотрим следующие необходимые условия наложенные на пару.

2) Имеем набор ребер B, после удаления которых из графа тот остался связным, тогда если мы удалим меньшее количество ребер из данного списка, граф по прежнему будет оставаться связным, таким образом всякое подмножество независимого множества B так же будет выполняться и данное условие верно.

3) Покажем, что если у нас имеется 2 набора ребер A и B, причем $|A| < |B|$, а также после удаления их из графа тот остается связным, тогда мы можем удалить все ребра принадлежащие A, а так же какое-то ребро из B и тот по прежнему будет оставаться связным. Рассмотрим пары вершин, которые связывают каждое ребро из A, таких пар будет $n = |A|$, так как каждому ребру соответствует одна пара. Имеем 2 возможных случая:

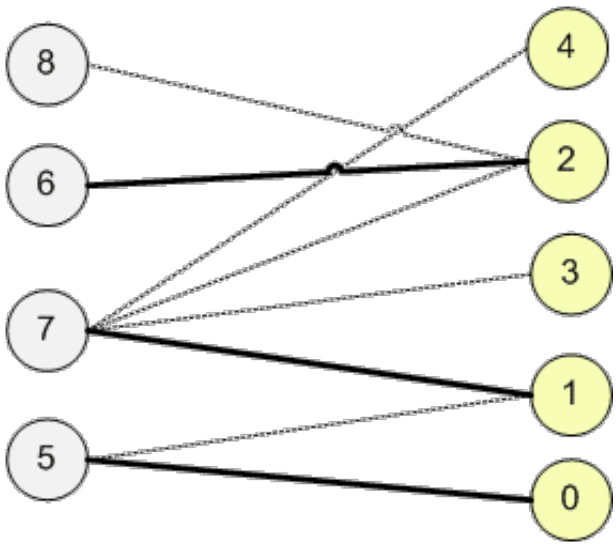
.1) Между вершинами, которые описаны в множестве A может быть удалено одно ребро, принадлежащее B так, что связность остается, тогда к множеству A мы добавляем именно это ребро и полученный граф останется связным, следовательно множество A в объединении с этим ребром будет независимым множеством.

.2) Между вершинами, которые описаны в множестве A не может быть удалено одно ребро так, что полученный граф остается связным, тогда, так как $|B| > |A|$ мы будем иметь хотя бы одну пару вершин(в худшем случае), между которыми может быть удалено ребро с сохранением связности оставшегося графа (опять используя принцип Дирихле). Тогда к A добавляется именно это ребро и полученное множество также остается независимым.

Таким образом имеем выполнимость всех условий матроида для пары $\lhd E, I \rhd$, следовательно это матроид.

№5

Двудольный граф $G = (V, E)$. Множество P паросочетаний в G. Пара $\lhd E, P \rhd$ не является матроидом. Покажем это на примере 3 свойства матроидов. Пусть у нас есть множество паросочетаний A и B, причем $|A| < |B|$ и $|B|$ может быть получено путем удлинения цепи паросочетаний чередованием с добавлением одного ребра (по аналогии с работой алгоритма Куна нахождения наибольшего паросочетания в двудольном графе). Тогда в множестве B мы не имеем ни одного ребра, добавив которое к множеству A мы бы не получили пересечения по вершине с другим ребром, следовательно никоим образом множество A не может быть увеличено и свойство не выполняется.



Граф

Но множество P является пересечением матроидов: $M = (E, I)$ и $N = (E, K)$ Матроиды M и N определяются разбиением элементов E по вершинам из левой и правой долей. Покажем, что они являются матроидами:

1) Пустое множество удовлетворяет условию.

2) Всякие подмножество исходящих ребер так же остается множеством исходящих ребер.

3) Пусть имеется два набора ребер A и B, причем $|A| < |B|$. Тогда добавив произвольное ребро из B мы получим все так же множество ребер, исходящих из какой-то из долей, но с мощностью на 1 больше.

Таким образом имеем пересечение матроидов, которое не является матроидом, следовательно пара $\lhd X, I_1 \cap I_2 \rhd$ не всегда будет являться матроидом.