DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

I

Provare che $t(S) = 1$ se e solo se $g(S) = \dfrac{F(S)+1}{2}$.

II

Sia S un semigruppo numerico diverso da $\mathbb{N}$ e sia $PF(S) = \{f_1 > f_2 > \cdots > f_t\}$.

i) Provare che $S \cup \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ è un semigruppo numerico per ogni $k \in \{1, \ldots, t\}$.

ii) Provare che se $F(S) > m(S)$, allora $T = S \cup \{F(S)\}$ è un semigruppo numerico con $e(S) \leq e(T) \leq e(S) + 1$. Dare un esempio in cui $e(T) = e(S)$ ed uno in cui $e(T) = e(S) + 1$.

III

Siano a, b due interi con $0 < b < a$ e sia $S = \langle a, a+1, \ldots, a+b \rangle$. Provare che $F(S) = \left\lceil \dfrac{a-1}{b} \right\rceil a - 1$, dove per $q \in \mathbb{Q}$, $\lceil q \rceil$ denota il minimo degli interi maggiori o uguali a q.

IV

Sia S un semigruppo numerico e sia $m \in S^*$. Mostrare che $T = (m+S) \cup \{0\}$ è un semigruppo numerico con $m(T) = m$, $e(T) = m$ e $t(T) = m - 1$. [Aiuto: Provare ed utilizzare il fatto che se $\mathrm{Ap}(T, m) = \{w(0), \ldots, w(m-1)\}$, allora per ogni $i, j \in \{1, \ldots, m-1\}$ si ha $w(i) + w(j) > w(i + j \ mod(m))$]

V

Sia S un semigruppo numerico. Provare che la congettura di Wilf vale se:

i) $t(S) = 1$.

ii) $t(S) = 2$.

iii) $e(S) = m(S) - 1$.

VI

Provare che se S è un semigruppo numerico con $m(S) = 3$, allora $\{3, 3g(S) - F(S), F(S) + 3\}$ è un insieme di generatori (non necessariamente minimale) per S.

VII

Sia S un semigruppo numerico con insieme minimale di generatori $\{n_1 < \cdots < n_p\}$. Provare che se $m(S) = 4$, allora $\{4, n_2, 4g(S) - F(S) - n_2 + 2, F(S) + 4\}$ è un insieme di generatori (non necessariamente minimale) di S.