

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

I

Sia S un semigrupp numerico. Provare che S è pseudo simmetrico se e solo se $PF(S) = \{F(S), F(S)/2\}$.

II

- i) Sia S un semigrupp numerico simmetrico con $m(S) \geq 3$, allora $e(S) \leq m(S) - 1$.
- ii) Sia S un semigrupp numerico pseudo simmetrico con $m(S) \geq 4$, allora $e(S) \leq m(S) - 1$.

III

Sia $S = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$ un semigrupp numerico simmetrico con $m(S) \geq 3$. Provare che per ogni generatore minimale n_i di S , si ha che $n_i < F(S)$.

IV

Sia S un semigrupp numerico con insieme minimale di generatori $\{n_1 < \dots < n_p\}$ e $F(S) > n_1$. Sia $T = S \cup \{F(S)\}$. Provare che

$$(PF(S) \setminus \{F(S)\}) \cup \{F(S) - n_1\} \subseteq PF(T) \subseteq (PF(S) \setminus \{F(S)\}) \cup \{F(S) - n_1, \dots, F(S) - n_p\}.$$

V

Sia S un semigrupp numerico simmetrico con $m(S) \geq 3$ e $T = S \cup \{F(S)\}$. Provare che $t(T) = e(S) = e(T) - 1$. [Aiuto: Usa gli Esercizi III e IV]

VI

Sia S un semigrupp numerico simmetrico e sia x un generatore minimale di S con $x < F(S)$. Mostrare che:

- i) $\{F(S), x\} \subseteq PF(S \setminus \{x\}) \subseteq \{F(S), x, F(S) - x\}$
- ii) $PF(S \setminus \{x\}) = \{F(S), x\}$ se e solo se $2x - F(S) \in S$

VII

Sia $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Provare che $S = \langle m, m+1, \dots, m+m-2 \rangle$ è un semigrupp numerico simmetrico con $F(S) = 2m - 1$

VIII

Se $e \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, allora esiste un semigrupp numerico S con $e(S) = e$ e $t(S) = 2$. [Aiuto: Usa l'Esercizio VI ii) e l'Esercizio VII con $m = e + 2$ e rimuovendo il generatore minimale $2e + 2$]

IX

Provare che se $e \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, allora esiste un semigrupp numerico con $e(S) = e$ e $t(S) = 3$. [Aiuto: Usa l'Esercizio VI ii) e l'Esercizio VII con $m = e$ e rimuovendo il generatore minimale e]

X

Sia S un semigrupp0 numerico pseudo simmetrico e sia x un generatore minimale di S con $x < F(S)$. Provare che:

- i) $\{F(S), x\} \subseteq PF(S \setminus \{x\}) \subseteq \{F(S), x, \frac{F(S)}{2}, F(S) - x\}$.
- ii) $\frac{F(S)}{2} \in PF(S \setminus \{x\})$ se e solo se $x - \frac{F(S)}{2} \notin S$.
- iii) $F(S) - x \in PF(S \setminus \{x\})$ se e solo se $2x - F(S) \notin S$.
- iv) $t(S \setminus \{x\}) = 4$ se e solo se $2x - F(S) \notin S$.