## DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

### I

Sia $S$ un semigruppo numerico e sia $x \in S$. Provare che $S \setminus \{x\}$ è un semigruppo numerico se e solo se $x$ appartiene al sistema minimale di generatori di $S$.

### II

Provare che l'intersezione di un numero finito di semigruppi numerici è un semigruppo numerico. Mostrare con un esempio che il risultato non vale per una intersezione infinita.

### III

Siano $S$ e $T$ due semigruppi numerici e sia $m \in S \cap T$ con $m \neq 0$. Provare che se $\mathrm{Ap}(S, m) = \{0, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ e $\mathrm{Ap}(T, m) = \{0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ (con $u_i$, $v_i$ i più piccoli elementi congruenti ad $i$ modulo $m$ in $S$ e $T$, rispettivamente), allora $\mathrm{Ap}(S \cap T, m) = \{0, \max\{u_1, v_1\}, \ldots, \max\{u_{m-1}, v_{m-1}\}$.

### IV

Siano $S$ e $T$ due semigruppi numerici. Provare che:

i) $S + T$ è un semigruppo numerico.

ii) $S + T$ è il più piccolo semigruppo numerico contenente $S \cup T$.

iii) Se $A$ e $B$ sono insiemi di generatori di $S$ e $T$, rispettivamente, allora $A \cup B$ è un insieme di generatori di $S + T$.

Dare un esempio di due semigruppi numerici con insieme minimale di generatori $A$ e $B$ e tale che $A \cup B$ non è un insieme minimale di generatori di $\langle A \cup B \rangle$.