

## Tema 2 - Metode Numerice

### ÎN SPATELE UNUI MOTOR DE CĂUTARE

*Termen de predare:* Luni, 11 Mai 2020, ora 23.59

*Responsabili tema:*

Florin Pop (florin.pop@cs.pub.ro)

April 23, 2020

## 1 Descriere generala

*PageRank* este un algoritm de analiză a hiperlegăturilor din Internet, folosit de motorul de căutare Google pentru a acorda o pondere fiecărui element dintr-o mulțime de documente interconectate prin hiperlegături, cu scopul măsurării importanței relative în cadrul mulțimii. Fie un set de  $N$  resurse (pagini web). Fiecare pagină din acest set poate conține link-uri spre alte pagini. Spre unele pagini vor fi îndreptate mai multe link-uri decât spre altele. Cu alte cuvinte, un utilizator (care navighează pe Internet, accesând diverse pagini întâmplător) va accesa cu o probabilitate mai mare unele resurse, iar alte resurse vor fi accesate cu o probabilitate mai mică.

Putem spune că paginile care vor fi vizitate cu o probabilitate mai mare sunt mai *importante* decât celelalte (conțin informații mai multe, sunt lucrări științifice mai citate decât altele etc).

Un **motor de căutare** va trebui să redirecteze în prim-plan paginile cele mai importante (astfel încât dacă un utilizator caută un *ac* (anumite informații, în funcție de cuvintele-cheie tastate de acesta) *în carul cu fân* (mulțimea tuturor paginilor web), atunci această sarcină să nu fie proverbial de imposibilă. Astfel, un motor de căutare are nevoie de un mod de a măsura importanța unei resurse din cadrul unui set, și de un algoritm de calcul a acestei importanțe. Un algoritm care calculează acest factor este *PageRank*, iar *unitatea* de măsură folosită este *indicele PageRank*. Vom nota  $PR(R)$  indicele *PageRank* al resursei  $R$ .

Pentru a înțelege cum funcționează acest algoritm, să ne imaginăm că vrem să calculăm cât de importantă este pagina  $A$ , de exemplu. Să notăm cu  $M(A)$  mulțimea tuturor paginilor din care se poate ajunge la pagina  $A$  printr-un singur clic. Fie  $B \in M(A)$ . Evident, cu cât probabilitatea ca un utilizator să ajungă la pagina  $B$  este mai mare, cu atât probabilitatea de a ajunge la  $A$  este mai mare. De asemenea, cu cât numărul de link-uri deținut de pagina  $B$  este mai mare (vom nota cu  $L(B)$  acest număr) este mai mare, cu atât probabilitatea ca următoarea pagină vizitată să fie  $A$  este mai mică. Dacă luăm în considerare și celelalte pagini din  $M(A)$ , precum și probabilitatea ca un utilizator să continue

navigatul pe Internet (această probabilitate este dată de un coeficient  $d$ ), atunci formula de a calcula  $PR(A)$  (considerând că se știe  $PR(B)$ ,  $\forall B \in M(A)$ ) este:

$$PR(A) = \frac{1-d}{N} + d \sum_{B \in M(A)} \frac{PR(B)}{L(B)}$$

La adresa web [1] (la secțiunea Computation) veți găsi pseudocodul pentru diferiți algoritmi de a determina coeficienții  $PR$ .

O metoda importantă folosită în algoritmul de PageRank este bazată pe funcțiile membru din logica fuzzy. *Logica fuzzy* ([3]) este o logică care extinde logica clasică, booleană. Astfel, dacă în logica booleană o propoziție ia valori dintr-o mulțime a cărei cardinal este 2, în logica fuzzy valoarea de adevăr a unei propoziții  $\in [0, 1]$ . Aceste valori sunt date de așa-zise *funcții membru* ([5]).

## 2 Cerintele temei de casa

### 2.1 Cerinta 1. Algoritmul *Iterative* (40p)

Să presupunem existența unui program care primește ca date de intrare o colecție de  $N$  resurse web și determină un graf, reprezentat printr-o listă de adiacență. Acest graf va fi afișat într-un fișier, astfel: pe prima linie va fi dat numărul  $N$ , iar pe următoarele linii vor fi date listele de vecini: o linie va începe cu numărul nodului (fie  $i$  acest parametru) pentru care se dau vecinii, va urma numărul de noduri cu care se învecinează nodul  $i$ , iar următoarele numere reprezintă nodurile cu care se învecinează  $i$ . Pe ultimele 2 linii sunt date valorile  $val_1$  și  $val_2$  (câte una pe linie; le veți folosi pentru a rezolva cerințele următoare ale temei). Pentru a rezolva cerințele temei, va trebui să construiți matricea de adiacență a acestui graf (notată cu  $A$ :  $A(i, j) = 0$ , dacă nodul  $i$  nu se învecinează cu nodul  $j$ , și 1 altfel).

Să se implementeze algoritmul *Iterative* descris la adresa [1]. Observații:

1. Orice pagină web analizată conține cel puțin un link spre o altă pagină web. Asta înseamnă că matricea  $K$  (din algoritmul *Iterative*) este inversabilă.
2. Sunt unele pagini mai lungi care au link-uri spre ele însele (pentru a permite o navigare mai ușoară), deci nu toate elementele de pe diagonala principală a matricii  $A$  sunt 0. În analiza efectuată, aceste link-uri nu au nicio semnificație, deci acestea nu vor intra în calcul. Deci  $A(i, i) = 0$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ .
3. Algoritmul va fi implementat în fișierul **Iterative.m**; funcția **Iterative** va primi ca argumente, în această ordine: numele fișierului din care va citi graful, parametrul  $d$  (vezi descrierea lui mai sus), parametrul  $eps$  (eroarea care apare în calculul vectorului  $PR$ ). Va avea ca dată de ieșire vectorul  $PR$ .
4. Toate fișierele de intrare vor conține pe prima linie numărul  $N$ , apoi pe următoarele  $N$  linii matricea de adiacență.

## 2.2 Cerinta 2. Algoritmul *Algebraic* (40p)

Să se implementeze algoritmul *Algebraic* de la adresa [1]. Algoritmul se va implementa în fișierul `Algebraic.m`; funcția `Algebraic` va primi ca argumente, în această ordine: numele fișierului de intrare (care are structura fișierului de intrare de la Cerința 1), parametrul  $d$  (care are aceeași interpretare ca la Cerința 1). Va avea ca dată de ieșire vectorul  $PR$ .

Observație. Pentru a calcula inversa unei matrici, se va folosi algoritmul **Gram-Schmidt**: fie  $T$  o matrice (cu  $n$  linii și  $n$  coloane) inversabilă pentru care se cere să se determine  $T^{-1}$ . Avem:  $T = [t_1 t_2 \dots t_n]$ , iar  $T^{-1} = [x_1 x_2 \dots x_n]$  și  $T \cdot T^{-1} = I_n$ . Deci,

$$T \cdot [x_1 x_2 \dots x_n] = [e_1 e_2 \dots e_n]$$

$$T \cdot x_i = e_i(*)$$

unde  $e_i$  este coloana  $i$  din matricea unitate  $I_n$ .

Pentru a afla  $T^{-1}$  se va rezolva sistemul  $(*)$  pentru fiecare  $i$  în parte, folosind algoritmul Gram-Schmidt optimizat.

*Indicație.* Puteți aplica algoritmul Gram-Schmidt o singură dată, pentru a afla  $Q$  și  $R$  astfel încât  $T = Q \cdot R$ ; pe baza matricilor  $Q$  și  $R$  veți rezolva apoi cele  $n$  sisteme de ecuații.

## 2.3 Cerinta 3. Gradul de Apartenență (20p)

Fie următoarea funcție membru:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, val_1); \\ a \cdot x + b, & x \in [val_1, val_2]; \\ 1, & x \in (val_2, 1] \end{cases}$$

unde  $val_1$  și  $val_2$  sunt date în fișierul de intrare, așa cum este descris la Cerința 1;  $a$  și  $b$  sunt valori calculate de voi astfel încât  $u(x)$  să fie o funcție continuă. Această funcție indică gradul de apartenență al paginii a cărui PageRank este  $x$  la mulțimea *paginilor importante*.

Să se scrie fișierul `PageRank.m`; funcția `PageRank` primește ca date de intrare, în această ordine, un nume de fișier, parametrul  $d$ , parametrul  $eps$ . Toți acești parametri au interpretarea de mai sus. `PageRank.m` va scrie un nou fișier, a cărui nume este dat de numele fișierului primit ca parametru, la care se concatenează șirul `.out`. Va scrie în noul fișier, pe prima linie, numărul  $N$  (numărul de pagini web analizate), va calcula vectorul  $PR$  folosind primul algoritm și-l va scrie în fișierul `.out` pe  $N$  linii, apoi va calcula vectorul  $PR$  folosind al doilea algoritm și-l va scrie în fișierul `.out`; se va lăsa un rând gol între  $N$  și primul vector, și un rând gol între cei doi vectori. După acest pas, se va ordona descrescător vectorul  $PR$  calculat de cel de-al doilea algoritm (folosind orice algoritm de sortare, se va nota  $PR_1$  acest vector sortat). Se va lăsa în fișierul de ieșire un spațiu liber, apoi se vor afișa  $N$  linii de forma:

$i \quad j \quad F$

unde  $i$  reprezintă indici în vectorul  $PR_1$  (se vor afișa în ordinea:  $1, 2, 3, \dots, N$ ),  $j$  reprezintă nodul a cărui *PageRank* este  $PR_1(i)$ , iar  $F = u(PR_1(i))$ . Practic,

se va face un clasament al celor mai *importante pagini*, clasament în care interesează locul obținut (adică numărul  $i$ ), numărul paginii care a obținut acest loc, și gradul de apartenență a acestei pagini la mulțimea *paginilor importante*.

### 3 Exemple de date de intrare si de rezultate

#### 3.1 Exemplu 1

$d = 0.85$ ,  $eps = 0.001$ ; Conținutul fișierului `graf1` este:

```
7
1 3 2 3 4
2 3 3 4 5
3 5 1 2 5 6 7
4 5 1 2 3 6 7
5 3 4 6 7
6 3 1 4 5
7 4 1 2 3 5
0.001
0.95
```

Funcția `PageRank.m` va scrie fișierul `graf1.out`:

```
7
0.137730
0.142355
0.156163
0.176215
0.147967
0.119785
0.119785

0.137419
0.142396
0.156189
0.176532
0.147754
0.119855
0.119855

1 4 0.184965
2 3 0.163529
3 5 0.154641
4 2 0.148994
5 1 0.143750
6 7 0.125242
7 6 0.125242
```

### 3.2 Exemplu 2

$d = 0.85$ ,  $eps = 0.001$ ; Fișierul `graf2` conține:

```
8
1 2 2 3
2 5 1 2 4 5 8
3 4 1 2 7 8
4 5 1 2 3 5 6
5 6 1 2 3 4 7 8
6 3 5 7 8
7 5 1 2 3 7 8
8 3 1 2 3
0.08
0.85
```

Funcția `PageRank.m` va scrie fișierul `graf2.out`:

```
8
0.185532
0.218111
0.179646
0.077618
0.087414
0.031813
0.078387
0.141480

0.185572
0.218095
0.179872
0.077464
0.087308
0.031919
0.078385
0.141387

1 2 0.179344
2 1 0.137106
3 3 0.129704
4 8 0.079723
5 5 0.009490
6 7 0.000000
7 4 0.000000
8 6 0.000000
```

## 4 Detalii de implementare si redactare

Tema de casă va implementa funcțiile menționate la fiecare cerință în parte, astfel:

```
function R = Iterative(ume, d, eps)
% Functia care calculeaza matricea R folosind alg. iterativ.
% Intrari:
% -> ume: numele fisierului din care se citeste;
% -> d: coeficientul d, adica probabilitatea ca un anumit
%      navigator sa continue navigarea (0.85 in cele mai
%      multe cazuri)
% -> eps: erorile care apare in algoritmul.
% Iesiri:
% -> R: vectorul de PageRank-uri acordat pentru fiecare pagina.

function R = Algebraic(ume, d)
% Functia care calculeaza vectorul PageRank folosind varianta
% algebrica de calcul.
% Intrari:
% -> ume: numele fisierului in care se scrie;
% -> d: probabilitatea ca un anumit utilizator sa continue
%      navigarea la o pagina urmatoare.
% Iesiri:
% -> R: vectorul de PageRank-uri acordat pentru fiecare pagina.

function [R1 R2] = PageRank(ume, d, eps)
% Calculeaza indicii PageRank pentru cele 3 cerinte
% Scrie fisierul de iesire ume.out
```

Pentru implementarea temei puteti folosi si alte funcții definite de voi, dar cele menționate mai sus sunt obligatorii.

Pentru redactarea temei de casă trebuie să țineți cont de următoarele aspecte:

- codul sursă va conține comentarii semnificative și sugestive cu privire la implementarea algoritmilor.
- existența unui fișier `readme.txt` care va prezenta detaliile legate de implementarea și testarea temei.
- fișierele care compun tema de casa vor fi incluse într-o arhivă `.zip` care respectă specificațiile din regulamentul cursului.
- tema se va implementa în Matlab și va fi testată în mediul Octave.
- pentru această temă termenul de predare este fix și NU este posibilă extinderea lui.

## 5 Resurse Web

1. <http://en.wikipedia.org/wiki/PageRank>
2. <http://www.cs.huji.ac.il/~csip/CSIP2007-intro.pdf>
3. [http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy\\_logic](http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic)
4. <http://www.seattlerobotics.org/encoder/199803/fuz/flindex.html>