УДК 534.13

А. Г. Петров, В. Ф. Копьев

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского

Излучение звука сферой с переменной температурой

Решена модельная задача излучения звука неоднородностями температуры в сжимаемом теплопроводном покоящемся газе. На поверхности сферы задан гармонический закон изменения температуры. Получены точные выражения для возмущений температуры и давления в линейной постановке при условии компактности сферы как источника звука. Показано, что вблизи сферы возмущения давления малы и его можно считать постоянным, что позволяет вблизи использовать классическое уравнение теплопроводности и альтернативным образом получить выражение для возмущений давления вдали от сферы на основе оценки скорости изменения объёма пристенного сферического слоя.

Ключевые слова: генерация шума, пульсации температуры, теплопроводность

A. G. Petrov, V. F. Kopiev

The Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky

Sound radiation by a sphere with variable temperature

The model problem of sound emission by temperature inhomogeneities in a compressible heat-conducting gas at rest has been solved. A harmonic law of temperature oscillation is specified on the surface of the sphere. Exact expressions for temperature and pressure disturbances in a linear formulation are obtained under the condition that the sphere as a sound source is compact. It is shown that pressure disturbances near the sphere are small and can be considered constant, which makes it possible to use the classical heat equation near the sphere and alternatively obtain an expression for pressure disturbances far from the sphere based on estimating the rate of change in the volume of the near-wall spherical layer.

Key words: sound generation, temperature oscillation, thermal conductivity

1. Введение

Известны механизмы излучения звука нестационарными течениями [2,3,5], когда звуковое поле является следствием вихревых турбулентных пульсаций. При малом числе Маха нестационарное течение в области аэродинамических источников звука может рассматриваться в приближении несжимаемой жидкости [4], и звук образуется за счет динамических процессов в вихревом течении. При этом можно рассмотреть альтернативный механизм генерации, связанный с вязкой диссипацией в турбулентном течении, который обычно проявляет себя вблизи границ (так называемый константиновский механизм генерации/затухания [6,7]). При неоднородности температуры также могут проявляться два аналогичных механизма [1]: один напрямую связан с теплопроводностью, другой связан с нестационарным переносом неоднородности температуры и может быть существенен в горячих турбулентных течениях (горячих струях). В настоящей работе рассматривается источник первого типа, связанный с теплопроводностью. Простейшей задачей, в которой реализуется источник подобного типа, имеющей к тому же важное методическое значение, является задача о покоящемся шаре, поверхность которого имеет температуру, периодически меняющуюся во времени. В таком случае течение в главном приближении является стационарным, а пульсации происходят за счет неоднородности температуры. В рассматриваемой постановке при учете малости колебаний температуры и компактности сферы как источника звука задача может быть решена точно.

Эффекты акустического излучения в случае неоднородностей температуры имеют прямое отношение к излучению шума горячими потоками, экспериментальное исследование которых до последнего времени было ограничено в силу отсутствия требуемой экспериментальной базы. Появление в акустическом отделении ЦАГИ стенда с горячим потоком в заглушенной камере [8] позволит проводить фундаментальные и прикладные исследования в области генерации шума неизотермическими потоками[1].

2. Постановка задачи

Пусть на поверхности сферы радиуса a заданы граничные условия на температуру:

$$T(t,a) = T_0 + T' e^{-i\omega t}. \tag{1}$$

Сфера погружена в вязкий совершенный газ, подчиняющийся уравнениям Навье – Стокса:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\dfrac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \\ \rho\dfrac{dv_i}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(S_{ij} - \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right), \\ \rho c_p\dfrac{dT}{dt} - \dfrac{dp}{dt} = \kappa\dfrac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} + 2\mu\left(S_{ij}S_{ij} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)^2\right), \\ p = \rho R T, \\ S_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь ρ, p, T, v_i — поля плотности, давления, температуры и скорости соответственно, c_p, κ, μ, R — известные постоянные. Граничные условия (*прилипания* и *убывания* возмущений, *распространяющихся от сферы* на бесконечность):

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v}|_{r=a} = \lim_{r\to+\infty}\boldsymbol{v}(t,x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{0}, \quad (r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}), \\ \lim_{r\to+\infty}\begin{Bmatrix} p \\ \rho \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ \rho_0 \\ T_0 \end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix} p \\ \rho \\ T \end{Bmatrix} - ik\begin{Bmatrix} p \\ \rho \\ T \end{Bmatrix} = o\left(\frac{1}{r}\right),\ r\to+\infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Требуется решить задачу (1) – (3) и определить интенсивность акустических возмущений, создаваемых пульсациями температуры на сфере. Возмущения считать малыми.

Будем считать, что сфера — акустически компактный источник и справедливы соотношения

$$k \ll \frac{1}{a} \ll \sqrt{\frac{\omega}{\chi}} = \frac{1}{l}, \tag{4}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, $\chi = \kappa/(c_p\rho)$ — коэффициент температуропроводности.

[1]Модернизация стенда УНУ «Заглушенная камера с потоком АК-2» ФАУ ЦАГИ проводится при поддержке Минобрнауки России по соглашению №075-15-2022-1036.

3. Линеаризация задачи

Линеаризуем задачу, явно выделив возмущения относительно стационарного состояния:

$$\begin{aligned} &\rho \to \rho_0 + \rho, \\ &p \to p_0 + p, \\ &T \to T_0 + T, \end{aligned}$$

и учтём, что среднее течение отсутствует (вязкостью можно пренебречь, см. [6]), а задача сферически симметрична:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla p, \\ \rho_0 c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} - \dfrac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta T, \\ p = \rho_0 R T + \rho R T_0. \end{cases} \tag{5}$$

4. Получение уравнения для температуры

Из первых двух уравнений (5) стандартным образом можно исключить скорость:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta p = 0. \tag{6}$$

Выразим плотность из уравнения состояния и подставим в (6):

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad c^2 = \gamma R T_0, \quad \gamma = c_p / c_v. \tag{7}$$

Продифференцируем (7) по времени:

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) - \Delta \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3}. \tag{8}$$

Выразим из уравнения энергии производную давления по времени:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \Delta T \right) \tag{9}$$

и подставим её в уравнение (8):

$$c_p \chi \Delta^2 T - \left(\frac{\gamma c_p}{c^2} \chi \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_p \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta T + \left(\frac{\gamma c_p}{c^2} - \frac{1}{T_0} \right) \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = 0. \tag{10}$$

Учтём, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega, \quad \frac{\gamma}{c^2} - \frac{1}{c_p T_0} = \frac{1}{c^2}.$$

Тогда уравнение (10) преобразуется:

$$\Delta^2 T + \left(i \frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2 \right) \Delta T + i \frac{\omega}{\chi} k^2 T = 0. \tag{11}$$

5. Общее решение уравнения для температуры

Если мы получим решение $T(r)$, то из уравнения энергии (9) сразу находим $p(r)$. Удобно ввести замену $F(r) = rT(r)$, после которой уравнение (11) на новую функцию F с учётом сферической симметрии задачи будет иметь вид

$$F^{(4)} + \left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right) F'' + i\frac{\omega}{\chi} k^2 F = 0. \tag{12}$$

Это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Его решение ищется в виде $e^{\lambda r}$, откуда

$$\lambda^4 + \left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right) \lambda^2 + i\frac{\omega}{\chi} k^2 = 0.$$

Решение этого биквадратного уравнения:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right) \pm \sqrt{\left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right)^2 - 4i\frac{\omega}{\chi}k^2}}.$$

А общее решение уравнения (12) представляется в виде

$$F = C_1 e^{\lambda_1 r} + C_2 e^{\lambda_2 r} + C_3 e^{\lambda_3 r} + C_4 e^{\lambda_4 r}.$$

Для определения констант используем условия на границе сферы (закон изменения температуры и условие прилипания) и на бесконечности (условие излучения и убывания).

6. Удовлетворение условиям излучения и убывания

Чтобы использовать условия на бесконечности, необходимо знать представление комплексных чисел в алгебраическом виде $\lambda = a + ib$. Такое представление можно получить путём разложения корней по формуле Тейлора (используя (4)):

$$\begin{aligned}
&-\left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right) \pm \sqrt{\left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right)^2 - 4i\frac{\omega}{\chi}k^2} = \\
&\quad = -\left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right) \pm \sqrt{-\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^2 + (\gamma k^2)^2 + 2i\frac{\omega}{\chi}\gamma k^2 - 4i\frac{\omega}{\chi}k^2} \approx \\
&\quad \approx -\left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right) \pm i\frac{\omega}{\chi}\sqrt{1 + 2i\frac{\chi}{\omega}k^2(2-\gamma)} \approx \\
&\quad \approx -\left(i\frac{\omega}{\chi} + \gamma k^2\right) \pm \left(i\frac{\omega}{\chi} - k^2(2-\gamma)\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом,

$$\lambda_{1,3} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ik,$$

$$\lambda_{2,4} = \pm\sqrt{-i\frac{\omega}{\chi} - k^2(\gamma-1)} \approx \pm\left[(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} - (1+i)\sqrt{\frac{2\chi}{\omega}}\frac{k^2}{4}(\gamma-1)\right] = \pm(...).$$

Чтобы удовлетворить условию излучения, мнимая часть должна быть положительной, а условие убывания требует отрицательной действительной части, поэтому

$$F = rT = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-(...)r}. \tag{14}$$

Отметим, что если пренебречь слагаемым в показателе экспоненты порядка $k^2\sqrt{\chi/\omega}$, то из граничных условий на сфере будет видно, что $C_1 = 0$. Это означает, что акустические возмущения в главном приближении отсутствуют, и для их определения необходимо в разложении удерживать и члены более высокого порядка.

7. Удовлетворение условиям на сфере

Граничное условие на температуру даёт

$$
\begin{aligned}
&aT' = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2, \\
&\tilde{C}_1 = C_1 \exp\left(-a(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} + a(1+i)\sqrt{\frac{2\chi}{\omega}}\frac{k^2}{4}(\gamma-1)\right), \\
&\tilde{C}_2 = C_2 \exp(ika).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Условие прилипания можно переписать в терминах давления, используя линеаризованное уравнение импульсов:

$$
\left.\begin{aligned}
&v(t,a) = 0 \\
&\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}
\end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r}(t,a) = 0. \tag{16}
$$

Подставим найденное общее решение (14) в уравнение энергии, чтобы найти давление:

$$
\frac{-i\omega p}{\rho_0 c_p} = -i\omega T - \frac{\chi}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}.
$$

Опустим несложные, но громоздкие выкладки и запишем для давления окончательно:

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{\rho_0 c_p} \approx \frac{C_1}{r} ik^2 \frac{\chi}{\omega}(\gamma-1)\exp\left(-r(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} + r(1+i)\sqrt{\frac{2\chi}{\omega}}\frac{k^2}{4}(\gamma-1)\right) + \\
+ \frac{C_2}{r}\left(1 + ik^2\frac{\chi}{\omega}\right)\exp(ikr).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Условие (16) даёт второе равенство для определения констант:

$$
\tilde{C}_1 \frac{(ka)^2}{2}(\gamma-1)(1+i) + \tilde{C}_2\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} = 0. \tag{18}
$$

Решение системы (15), (18):

$$
\tilde{C}_1 \approx T'a,\ \tilde{C}_2 \approx -T'(\gamma-1)k^2 a\sqrt{\frac{\chi}{\omega}}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right).
$$

8. Результаты

Таким образом, пульсации давления

$$
p(t,r) = P_0 \frac{a}{r} e^{-i\omega t}\left\{ i(kl)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(1-i)(r-a)}{\sqrt{2}l}\right) - k^2 al \cdot \exp\left(ik(r-a) + i\frac{\pi}{4}\right)\right\} \tag{19}
$$

и температуры

$$
T(t,r) = T' \frac{a}{r} e^{-i\omega t}\left\{ \exp\left(-\frac{(1-i)(r-a)}{\sqrt{2}l}\right) - k^2 al(\gamma-1) \cdot \exp\left(ik(r-a) + i\frac{\pi}{4}\right)\right\}, \tag{20}
$$

где $P_0 = \rho_0 c_p T'(\gamma-1)$, $l = \sqrt{\chi/\omega}$. Первый экспоненциально убывающий член в (19) всюду много меньше второго звукового члена, поэтому им можно пренебречь. Оставшийся звуковой член с учётом $c_p(\gamma-1) = c^2/T_0$ запишется в виде

$$
\frac{p}{\rho_0 c^2} = -\frac{l}{r}\frac{T'}{T_0}(ka)^2 \exp\left(-i\omega t + ik(r-a) + i\frac{\pi}{4}\right). \tag{21}
$$

Такой же результат был получен в [1] на основе акустической аналогии Блохинцева – Хоу.

Мощность акустического излучения:

$$I = 4\pi r^2 \frac{|p|^2}{2\rho_0 c} = 2\pi \left(\frac{T'}{T_0}\right)^2 a^2 \rho_0 c^3 (ka)^2 (kl)^2. \qquad (22)$$

В дополнение скажем, что приближенно решить рассматриваемую задачу можно «более физично». Пульсации температуры на сфере приводят к пульсациям объёма газа вблизи неё (тонкий слой газа около стенки). Эти пульсации легко оценить, зная коэффициент объемного расширения β и характерную толщину приповерхностного слоя $l = \sqrt{\chi/\omega}$, в который подводится тепло:

$$\dot{V} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T} \cdot V \frac{\partial T}{\partial t} \approx \beta \cdot 4\pi a^2 l \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -4\pi a^2 \sqrt{\omega\chi} \frac{T'}{T_0} \exp\left(-i\omega t + i\frac{\pi}{2}\right). \qquad (23)$$

Тогда по известным формулам (см. [6]), используя (23), находим выражения для давления

$$p(t,r) = \frac{\rho_0 \ddot{V}(t - r/c)}{4\pi r} \approx -\rho_0 c^2 \frac{l}{r} \frac{T'}{T_0} (ka)^2 \exp\left(-i\omega t + ikr\right)$$

и мощности излучения

$$I = \frac{\rho_0 \overline{\ddot{V}^2}}{4\pi c} \approx 2\pi \left(\frac{T'}{T_0}\right)^2 a^2 \rho_0 c^3 (ka)^2 (kl)^2,$$

что соответствует (22).

9. Заключение

Получено точное решение задачи об излучении звука при колебаниях температуры сферы в теплопроводном покоящемся газе. Это решение позволяет проанализировать известные приближенные подходы, основанные на физическом сращивании решений, характерных в области теплового слоя (вблизи поверхности сферы), и в дальнем звуковом поле [1, 5, 6]. Показано, что пульсации давления малы во всей области вне сферы и определяются малым звуковым членом (второй член в (19)). Температура ведет себя по-другому: её пульсации вблизи сферы определяются экспоненциально затухающим с расстоянием первым членом (20), аналогичным решению уравнения теплопроводности при постоянном давлении. При удалении от поверхности сферы эти колебания переходят в звуковые колебания температуры (второй член в (20)).

Рассмотренный механизм излучения, по-видимому, будет мал в свободных турбулентных течениях. Представляет интерес рассмотреть альтернативный механизм, связанный с динамикой течения и переносом неоднородностей температуры и реализующийся при отсутствии теплопроводности, а также сравнить эффективность излучения звука вихревыми пульсациями и пульсациями температуры, характерными для неизотермических турбулентных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 21-71-30016).

Список литературы

1. *Lighthill M.J.* On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory // Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1952. P. 564–587.

2. *Lighthill M.J.* On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound // Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1954. P. 1–32.

3. *Мунин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев Е.А.* Аэродинамические источники шума. Москва : Машиностроение, 1981. 248 с.

4. *Crow S.C.* Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem // Stud. Appl. Math. 49. 1970. P. 21–44.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. Москва : Физматлит, 2021. 728 с.
6. *Наугольных К.А., Рыбак С.А.* Об излучении звука турбулетным пограничным слоем // Акустический журнал. 1980. Т. 26. С. 890–894.
7. *Howe M.S.* Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute // Journal of Fluid Mechanics. 1975. P. 625–673.
8. *Копьев В.Ф., Батура Н.И., Макашов С.Ю., Остриков Н.Н.* Дооснащение УНУ «Заглушенная камера с потоком АК-2» системой подогрева потока // Тезисы докладов XX научно-технической конференции по аэроакустике. 2023. С. 200–203.

References

1. *Lighthill M.J.* On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory. Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1952. P. 564–587.
2. *Lighthill M.J.* On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound. Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1954. P. 1–32.
3. *Munin A.G., Kuznetsov V.M., Leontiev E.A.* Aerodynamic noise sources. Moscow : Mashinostroenie, 1981. 248 p. (in Russian).
4. *Crow S.C.* Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem. Stud. Appl. Math. 49. 1970. P. 21–44.
5. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Course of theoretical physics. V. 6. Fluid mechanics. Moscow : Fizmatlit, 2021. 728 p. (in Russian).
6. *Naugolnykh K.A., Rybak S.A.* Sound radiation from a turbulent boundary layer. Akusticheskii Zhurnal. 1980. V. 26. P. 890–894. (in Russian).
7. *Howe M.S.* Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. Journal of Fluid Mechanics. 1975. P. 625–673.
8. *Kopiev V.F, Batura N.I., Makashov S.Y., Ostrikov N.N.* Retrofitting of the «Silenced chamber with flow» with a flow heating system. Abstracts of the XX Scientific and Technical Conference on Aeroacoustics. 2023. P. 200–203. (in Russian).

Поступила в редакцию 10.11.2023