Estudi matemàtic i computacional dels objectes fractals

ESBORRANY 2024-09-08

Agraïments

Als contribuïdors del sistema de composició tipogràfica Typst, utilitzat en aquest treball.

Als contribuïdors del fòrum Stack Exchange Mathematics, que han proveït materials d'ajuda i explicacions que han resultat imprescindibles.

Abstract

Resumen

Taula de continguts

Capítol 1

Introducció a la geometria fractal

En aquest primer capítol, s'exposarà el concepte de fractal. Es discutirà el seu origen i les característiques associades a ell, així com la seva utilitat en altres àrees.

1.1. La geometria fractal a la natura

La geometria fractal és un dels camps de les matemàtiques que més ha despertat la curiositat del públic per la seva bellesa, així com per la seva omnipresència a la natura. Es solen associar les fractals amb formes com flocs de neu (Figura 1) i cols autosimilars (Figura 3).

Figura 1: Floc de neu. *Domini públic.*

Figura 2: Patrons fractals en un cristall congelat. *By Schnobby - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19055302>*

Figura 3: Un romanesco, un tipus de col que presenta autosimilitud. *Ioangogo - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39553243>*

Figura 4: Dendrita d'òxid de manganès formada en pedra calcària. Escala en mil · límetres. *Mark A. Wilson (Department of Geology, The College of Wooster).*

Benoît Mandelbrot va

És incorrecte, tanmateix, pensar que tota la g

Això no obstant, els fractals també són una bona representació de la realitat. Si bé la geometria euclidiana, a la qual estem acostumats, acaba sent llisa quan ens hi apropem prou, això no representa amb precisió el món natural. La geometria fractal té un enfocament diferent i considera que les formes no són llises, sinó infinitament rugoses.

Per aquest motiu,

La geometria fractal és un d'aquells conceptes matemàtics que, quan hom els coneix, els observa a tot

1.2. Definició de fractal

La definició d'un fractal no és tan senzilla com hom podria pensar. Hi ha diverses característiques que es solen associar als fractals (Falconer, 2014a; Mandelbrot, 1982):

- **Irregularitat geomètrica.** No es poden descriure completament a partir de la geometria euclidiana convencional, si no és amb una definició recursiva (i.e. cíclica, que es conté a si mateixa).
- **Autosimilitud exacta o parcial.** Com a conseqüència de la propietat anterior, molts fractals es contenen a si mateixos, és a dir, que si desenvolupem o representem la seva definició podem trobar còpies de si mateix. Això és evident en el cas de definicions clarament recursives, com el triangle de Sierpinski, però també es troba en fractals definits de formes diferents, com el conjunt de Mandelbrot, on aquesta autosimilitud és absolutament inesperada.

- **Estructura detallada minúscula.** Les formes geomètriques convencionals, si ens hi apropem suficient, acaben semblant llises. En canvi, els fractals tenen una rugositat que sovint és infinita (al següent apartat es defineix formalment aquest terme).
- **Definició simple.** Les fractals tenen definicions molt senzilles. Això, considerant les propietats anteriors, és sorprenent. Alguns fractals s'obtenen amb un algoritme recursiu, de manera que successives iteracions d'aquest porten a una aproximació més exacta de la fractal.

  Aquesta característica resulta, a la vegada, útil i problemàtica. És útil perquè facilita molt la seva representació —són increïblement senzills de generar amb un llenguatge de programació—, però és problemàtica perquè aleshores és més complicat estudiar les
- **Dificultats en la mesura.** Sovint resulta inútil realitzar mesures comunes com la llargada o l'àrea en els objectes fractals, ja que aquestes són o bé impossibles de fer o resulten en valors nuls o infinits.

Properament veurem, tanmateix, que no tots els fractals comparteixen totes aquestes característiques. Per aquest motiu, no existeix una sola definició de fractal; aquest terme s'utilitza més àmpliament per designar qualsevol forma geomètrica que presenti alguna de les propietats anteriors, especialment l'autosimilitud i l'estructura detallada minúscula.

I aquesta, de fet, era la intenció de Mandelbrot quan va introduir el terme. Segons ell, l'obsessió pel formalisme dels matemàtics no eñls

Capítol 2

Estudi matemàtic dels objectes fractals

Definició 2.1 *(Diàmetre)*: Donat un conjunt $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, definim el seu *diàmetre*, denotat amb $|E|$, com la distància més gran possible entre qualsevol parella de punts. Simbòlicament, $|E| = \sup\big\{d\big(x_i, x_j\big) : x_i, x_j \in E\big\}$.

Definició 2.2 *(Recobriment-δ)*: Donat un conjunt A, una cobertura-δ és una col · lecció comptable $\{E_i\}$ de conjunts amb diàmetres $|E_i| \leq \delta$ tals que el conjunt A conté la unió de tots els conjunts de la col · lecció. Simbòlicament[1]:

$$C_\delta(A) = \{E_i : |E_i| \leq \delta\}, A \subseteq \bigcup_i E_i$$

Definició 2.3 *(Funció gamma)*: La funció gamma $\Gamma(z)$ està definida als nombres complexos amb part real positiva i és una extensió del concepte de factorial, definit només a nombres enters positius, a aquest conjunt superior. La funció es defineix així:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Es compleix que, per a tot n enter positiu, $\Gamma(n) = (n-1)!$, i, similarment al factorial, per a tot z complex, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

[1]La definició real d'un recobriment fa ús de *conjunts indexats* però s'ha optat per usar una definició simplificada.

2.1. Dimensió fractal

El concepte de dimensió, en matemàtiques avançades, té molts significats; no es limita només al nombre d'eixos per representar una forma geomètrica a l'espai euclidià. Específicament, aquesta mesura s'anomena *dimensió topològica*.

Si bé la dimensió topològica es pot entendre intuïtivament, la seva definició formal no és tan senzilla.

La dimensió fractal és la forma més utilitzada de

2.1.1. Dimensió de Hausdorff

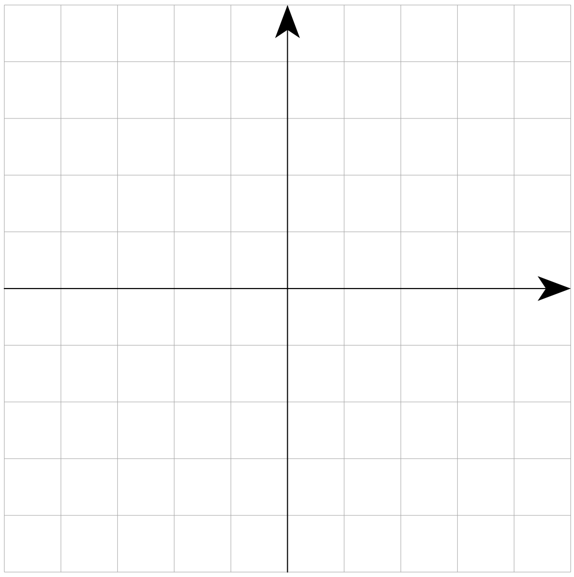
Mesura de Lebesgue

Abans d'exposar les diferents dimensions de les fractals,

Quan parlem de mesura de Lebesgue, és només una forma més elegant de referir-se a les mesures convencionals de llargada, àrea, volum, etc, per a $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$. És a dir, és una generalització del concepte de *llargada* per a qualsevol dimensió n. Denotem $\mathcal{L}^n$ com la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$ (altres notacions en són λ^n o vol^n).

La mesura de Lebesgue, tanmateix, no és convenient quan tenim un subconjunt m-dimensional de R^n amb $m < n$ (Morgan, 2000). Per exemple, considerem una corba A en un pla, que és una varietat $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^2$. La mesura de Lebesgue no ens permetria calcular la llargada d'aquesta corba: $\mathcal{L}^2(A) = 0$ perquè $\mathcal{L}^2$ és l'àrea i una corba no en té, i $\mathcal{L}^1(A)$ no existeix perquè $\mathcal{L}^n$ només funciona per a subconjunts de $\mathbb{R}^n$. En definitiva, aquesta mesura no serveix en aquestes situacions.

TODO 2.1: Il · lustració de corba en un pla.



Mesura de Hausdorff

La mesura de Hausdorff ve motivada per calcular la *llargada* (és clar, de forma genèrica per a qualsevol dimensió) de qualsevol subconjunt d'un espai mètric, evitant els problemes que causa la mesura de Lebesgue.

Definició 2.4 *(Mesura de Hausdorff)*: Definim **la mesura de Hausdorff** s-dimensional com la suma més petita possible de diàmetres elevats a s dels conjunts que formen una cobertura-δ, amb δ tendint a zero. Simbòlicament:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_i |E_i|^s : |E_i| \leq \delta, A \subseteq \bigcup_i E_i \right\}, s \in [0, +\infty), \delta \in \mathbb{R}$$

La justificació d'aquesta definició està explicada amb summe detall a l'annex corresponent.

Teorema 2.1 *(Relació entre la mesura de Lesbegue i la mesura de Hausdorff)*: Donat un conjunt A i la mesura de Hausdorff n-dimensional del conjunt A on n és un nombre enter positiu, la mesura de Hausdorff i la mesura de Lebesgue segueixen la relació

$$\mathcal{H}^n(A) = c_n^{-1} \mathcal{L}^n(A)$$

on c_n és el volum d'una n-esfera de diàmetre 1, que es calcula amb l'expressió

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

on Γ és la funció gamma (Definició 2.3).

La mesura de Hausdorff compleix les següents proposicions, la demostració dels quals es troba a l'annex:

Proposició 2.1: Si $\mathcal{H}^s(A) > 0$ i $s < t$, aleshores $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$.

Proposició 2.2: Si $\mathcal{H}^t(A) < +\infty$ i $s < t$, aleshores $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

Aquestes proposicions impliquen que la mesura de Hausdorff s-dimensional és o bé $+\infty$ per a valors petits de s o bé 0 per a s valors grans de s, excepte un valor molt concret. Aquest valor de s és la dimensió de Hausdorff. Per tant, podem definir-la així:

$$\dim_{\mathrm{H}} A = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = +\infty\}$$

2.1.2. Condició del conjunt obert

2.2. Fractals de recursivitat geomètrica

Aquests tipus de fractals també s'anomenen Sistemes de Funcions Iterades, o *IFS* per abreviar.

2.2.1. Triangle i catifa de Sierpinski

2.3. Fractals de funcions sobre el pla

2.3.1. Conjunts de Julia

2.3.2. Conjunt de Mandelbrot

2.3.3. Fractal de Newton

2.4. Atractors estranys

2.4.1. Teoria del caos

2.4.2. Atractor de Lorentz

2.5. Fractals tridimensionals

Quaternions

Capítol 3

Estudi computacional dels objectes fractals

Explicació de la part pràctica del projecte.

3.1. Anàlisi algorísmic

Complexitat temporal dels algoritmes per generar cada fractal.

3.2. Entorn de generació

Explicació de com aplicar els algoritmes. Amb quin llenguatge, en quin entorn. També mostrar la interfície del programa.

Capítol 4

Conclusió

Capítol 5

Annexos

5.1. Glossari

complexitat temporal Com creix el temps que triga a executar-se un algoritme en funció de les variables d'entrada. Per exemple, $O(n^2)$ indica que si es dobla el nombre d'ítems d'entrada, es quadruplica el temps d'execució.

5.2. Justificacions i demostracions matemàtiques

Per reduir la llargada del cos principal del treball, es presenten aquí demostracions d'algunes proposicions i teoremes, així com explicacions addicionals de les definicions matemàtiques presentades. Recordeu que les referències com *Proposició 2.1* són clicables.

Explicació de Definició 2.4: La idea d'aquesta mesura és considerar tots els recobriments-δ (Definició 2.2) possibles del conjunt A que es vol mesurar:

$$\left\{ \{E_i : |E_i| \leq \delta\} : A \subseteq \bigcup_i E_i \right\}, \delta \in (0, +\infty)$$

Aleshores, per a cada recobriment, es calcula la suma dels diàmetres elevats a un nombre real positiu o nul s.

$$\left\{\sum_i |E_i|^s : |E_i| \leq \delta, A \subseteq \bigcup_i E_i\right\}, \delta \in (0,+\infty), s \in [0,+\infty)$$

Per últim, hem de tenir en compte que el conjunt A podria ser un subconjunt propi de les unions de les col · leccions, és a dir, cada unió podria contenir elements que A no conté. Per minimitzar aquest error, agafem l'ínfim de la col · lecció:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_i |E_i|^s : |E_i| \leq \delta, A \subseteq \bigcup_i E_i\right\}, s \in [0,+\infty), \delta \in \mathbb{R}$$

Si δ es redueix, el nombre de col · leccions —és a dir, recobriments possibles— també redueix i aleshores l'ínfim augmenta (o no disminueix). Per tant, agafem el límit de $\delta \to 0$:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0} \inf\left\{\sum_i |E_i|^s : |E_i| \leq \delta, A \subseteq \bigcup_i E_i\right\}, s \in [0,+\infty), \delta \in \mathbb{R}$$

Finalment, aquesta expressió és la definició de la mesura de Hausdorff s-dimensional.

Demostració de Proposició 2.1: Fixem-nos en el sumatori dels diàmetres d'un sol recobriment. Si $s < t$, aleshores, sabent que $|E_i| \leq \delta$:

$$\sum_i |E_i|^t = \sum_i |E_i|^{t-s} |E_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |E_i|^s$$

Si fem l'ínfim de la primera i l'última expressió per a tots els recobriments, tenim que:

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta$$

Per obtenir la mesura de Hausdorff sense el paràmetre δ, fem el límit als dos costats:

$$\mathcal{H}^t(A) \leq \lim_{\delta\to 0}(\delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta) = 0 \cdot \mathcal{H}^s$$

Com hem fixat que $\mathcal{H}^s(A) > 0$, perquè es compleixi la desigualtat és necessari que $\mathcal{H}^t = +\infty$. ■

Demostració de Proposició 2.2: Fem ús de la mateixa expressió que a la demostració anterior:

$$\mathcal{H}^t(A) \leq \lim_{\delta\to 0}(\delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta) = 0 \cdot \mathcal{H}^s$$

Com hem fixat que $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, tota l'expressió és nul · la: $\mathcal{H}^t(A) = 0$. ■

5.3. Annex 3: Descripció de la interfície de l'explorador de fractals

5.4. Annex 4: Fragments de codi

Capítol 6

Bibliografia

3Blue1Brown. (2017, gener 27). *Fractals are typically not self-similar.* https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4

3Blue1Brown. (2021a, octubre 12). *From Newton's method to Newton's fractal (which Newton knew nothing about).* https://www.youtube.com/watch?v=-RdOwhmqP5s

3Blue1Brown. (2021b, octubre 16). *Beyond the Mandelbrot set, an intro to holomorphic dynamics.* https://www.youtube.com/watch?v=LqbZpur38nw

Douady, A., & Hubbard, J. H. (1985). *On the dynamics of polynomial-like mappings.*

Falconer, K. (2003). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application.* Wiley.

Falconer, K. (2014a). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application* (p. xx). Wiley.

Falconer, K. (2014b). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application* (p. 44-45). Wiley.

Falconer, K. (2014c). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application* (p. 11-12). Wiley.

Falconer, K. (2014d). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application* (p. 46-47). Wiley.

Frame, M., Mandelbrot, B. B., & Neger, N. *Fractal Geometry*. https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/

Mandelbrot, B. B. *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*. Science. https://users.math.yale.edu/users/mandelbrot/web_pdfs/howLongIsTheCoastOfBritain.pdf

Mandelbrot, B. B. (1982). *La geometría fractal de la naturaleza* (3ª edición). Tusquets Editores.

Mandelbrot, B. B. (1987). *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión* (7ª edición). Tusquets Editores.

Morgan, F. (2000). *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide* (p. 7-8).

Numberphile. (2019, abril 18). *What's so special about the Mandelbrot Set?*. https://www.youtube.com/watch?v=FFftmWSzgmk