

А. С. Шепелев, Д. А. Долгов, С. Д. Молчанов, С. Б. Борисов

АСТРАДЬ

КРАТКИЙ СБОРНИК ТЕОРИИ
ПО АСТРОНОМИИ

второе издание, исправленное

АСТРОНОМICHESKIJ KRUZJOK
им. Е. П. ЛЕВИТАНА

ЖУКОВСКИЙ
2020

ББК 22.6

А 91

УДК 52

Рецензент:

учитель астрономии М. В. Кузнецов (МОУ Гимназия №1 г. о. Жуковский)

Редакторы:

выпускник Московского государственного университета А. В. Афанасьев,
магистр политехнического института Гренобля, бакалавр Московского физико-
технического института В. А. Сушко

А. С. Шепелев, Д. А. Долгов, С. Д. Молчанов, С. Б. Борисов

Астрадь — краткий сборник теории по астрономии. 2020. — 64 с: 2-е изд.

ISBN 978-5-9909877-1-5

Астрадь является учебным пособием по астрономии, рекомендованным для школьников 7–11 класса. Сборник составлен неоднократными призерами международных олимпиад по астрономии, членами астрономического кружка им. Е. П. Левитана г. о. Жуковский.

Здесь читатель сможет найти необходимый минимум теории для участия в различных олимпиадах школьников по астрономии. Также Астрадь можно использовать и для освоения школьной программы, потому что наряду со сложными темами освещены и самые базовые вопросы астрономии.

Вёрстка: А. С. Шепелев

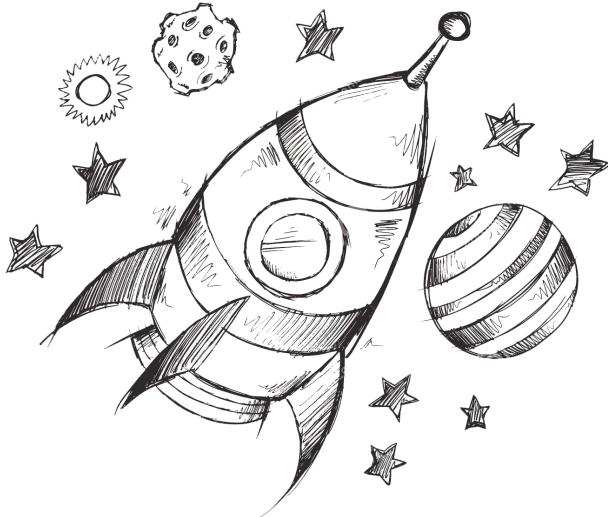
ISBN 978-5-9909877-1-5

© А. С. Шепелев, Д. А. Долгов,
С. Д. Молчанов, С. Б. Борисов, 2018

© Астрономический кружок
им. Е. П. Левитана г. о. Жуковский, 2018

Астроном

краткий сборник теории
по астрономии



Жуковский
2020

Содержание

1 Небесная механика	7
1.1 Расстояние и размеры	7
1.2 Закон всемирного тяготения	8
1.3 Закон сохранения энергии и типы орбит	9
1.4 Законы Кеплера	11
1.5 Движение по орбите	11
1.6 Кеплеровы элементы орбиты	12
1.7 Уравнение Кеплера	13
1.8 Точки Лагранжа	15
1.9 Приливы и отливы	20
1.10 Затмения	21
1.11 Конфигурации планет	24
1.12 Фазы планет и спутников	25
1.13 Синодический период	26
1.14 Собственное движение звёзд	26
1.15 Прецессия	27
2 Конические сечения	27
2.1 Эллипс	27
2.2 Парабола	30
2.3 Гипербола	30
3 Астрофизика	33
3.1 Звёздные величины	33
3.2 Закон Стефана-Больцмана	34
3.3 Энергия излучения	35
3.4 Альbedo	36
3.5 Формула Планка	37
3.6 Закон смещения Вина	38
3.7 Энергия и импульс фотона	39

3.8 Эффект Доплера. Красное смещение	40
3.9 Давление излучения	41
3.10 Предел Эддингтона	41
3.11 Гравитационное линзирование	42
3.12 Закон Хаббла	43
3.13 Шкала электромагнитных волн	43
3.14 Специальная теория относительности. Аберрация	44
3.15 Оптическая толщина	45
3.16 Фотометрия. Показатель цвета	45
3.17 МКТ и термодинамика	46
4 Оптика	49
4.1 Телескоп	49
4.2 Монтировки телескопов	50
4.3 Параметры телескопа	51
5 Сфериическая астрономия	53
5.1 Системы небесных координат	53
5.2 Суточное вращение небесной сферы	55
5.3 Сферическая тригонометрия	56
5.4 Солнечное время. Уравнение времени	59
5.5 Годичное движение Солнца	60
5.6 Рефракция	61
5.7 Сумерки	62
6 Объекты космоса	63
6.1 Солнце	63
6.2 Спектральные классы звёзд	64
6.3 Переменные звёзды	67
6.4 Вырожденные звёзды	68
6.5 Чёрные дыры	69
6.6 Галактики	70

6.7	Другие объекты	72
7	Математика	73
7.1	Системы координат	73
7.2	Скалярное произведение	74
7.3	Векторное произведение	75
7.4	Смешанное произведение	76
7.5	Производная	77
7.6	Интеграл	78
7.7	Телесный угол	79
7.8	Формулы приближенного вычисления	79
7.9	Метод наименьших квадратов	80
7.10	Гармонические колебания	81
7.11	Погрешности	81
	Приложение	84

1 Небесная механика

1.1 Расстояние и размеры

Астрономическая единица — единица измерения расстояния в астрономии, равная большой полуоси орбиты Земли.

$$1 \text{ а. е.} = 149\,597\,870\,700 \text{ м} \simeq 1.5 \times 10^{11} \text{ м.} \quad (1.1)$$

Годичный параллакс¹ (π) объекта — это угол, под которым видно орбиту Земли из окрестностей данного объекта. Применяется к объектам вне Солнечной системы.

$$\operatorname{tg} \pi = \frac{a_{\oplus}}{r}, \quad (1.2)$$

где a_{\oplus} — большая полуось орбиты Земли и r — расстояние до объекта имеют одинаковые единицы измерений. Учитывая малость угла π , можно считать $\operatorname{tg} \pi \simeq \pi$ в (1.2), тогда

$$\pi = \frac{a_{\oplus}}{r}. \quad (1.3)$$

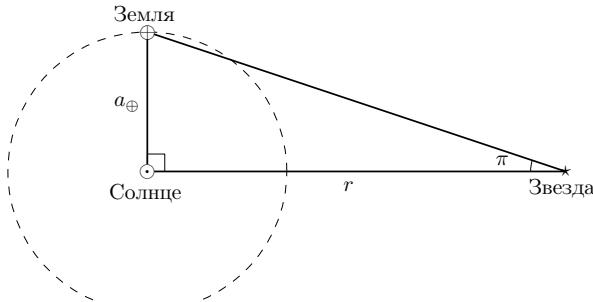


Рис. 1 – Схема годичного параллакса

Расстояние r , с которого большая полуось орбиты Земли a_{\oplus} видна под углом $\pi = 1''$ называется **1 парсеком**. Так как

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 3\,438' \simeq 206265'' \implies 1 \text{ пк} = 206265 \text{ а. е.}, \quad (1.4)$$

следовательно, записывая большую полуось орбиты Земли в а.е., а расстояние до звезды в парсеках, получаем параллакс в секундах. Таким образом,

$$r_{\text{пк}} = \frac{1 \text{ а. е.}}{\pi''}. \quad (1.5)$$

¹Важно отметить, здесь $x\pi$ — лишь обозначение, ничего общего с числом π не имеющее.

Угловой размер объекта — это угол, под которым видно объект. Для сферически симметричных объектов с радиусом R , угловой размер (диаметр) при наблюдении с расстояния r определяется как

$$\rho = 2 \arcsin \frac{R}{r}. \quad (1.6)$$

В случае, когда $r \gg R$, можно считать, что $\sin \rho \simeq \rho$, тогда

$$\rho \simeq \frac{2R}{r}. \quad (1.7)$$

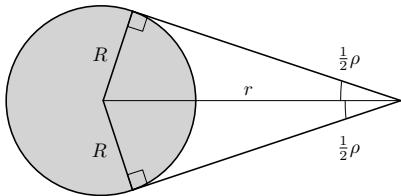


Рис. 2 – Угловой размер

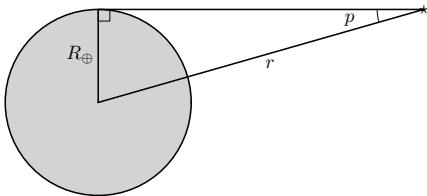


Рис. 3 – Горизонтальный параллакс

Горизонтальный параллакс (p) — это угловой радиус Земли при наблюдении с объекта:

$$\sin p = \frac{R_{\oplus}}{r}. \quad (1.8)$$

Правило Тициуса-Боде — эмпирическая формула, приблизительно описывающая радиусы орбит планет в Солнечной системе:

$$r = \frac{3 \cdot 2^n + 4}{10}, \quad n = -\infty, 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

1.2 Закон всемирного тяготения

Согласно *закону всемирного тяготения*, сила притяжения между двумя точечными телами с массами M и m , находящимися на расстоянии r , равна

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (1.10)$$

где $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ — **гравитационная постоянная**.

Гравитационный потенциал поля точечной (или сферически симметричной) массы M на расстоянии r от нее равен работе, которую необходимо затратить, чтобы принести единичную массу с бесконечности в данную точку. Так как гравитационные силы между двумя массами — это силы притяжения, то эта работа отрицательна. Данная величина

также является **потенциальной энергией** точечной массы на расстоянии r от массы M , а выражение для нее имеет следующий вид:

$$U = -\frac{GM}{r}. \quad (1.11)$$

Напряженность гравитационного поля dU/dr часто называют **ускорением свободного падения** g , она вычисляется по формуле

$$g = \frac{GM}{r^2}. \quad (1.12)$$

Тогда (1.10) можно записать как

$$F = mg. \quad (1.13)$$

1.3 Закон сохранения энергии и типы орбит

Для движения тела с массой m в гравитационном поле тела с массой $M \gg m$ со скоростью v на расстоянии r от гравитационного центра справедливо следующее соотношение:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = E_0, \quad (1.14)$$

где E_0 — постоянная величина, если на тело не действуют внешние силы кроме силы притяжения к центральному телу, равная сумме кинетической и потенциальной энергии тела. Данное равенство принято называть **законом сохранения энергии** для тела, движущегося в поле консервативных (потенциальных) сил.

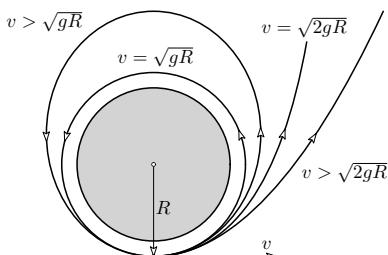


Рис. 4 – Возможные траектории тела

Если $E_0 > 0$, то траектория тела — **гипербола**, ветви которой асимптотически приближаются к двум прямым. Стоит заметить, что на бесконечно большом удалении малого тела от массивного его скорость остается положительной, так как суммарная энергия E_0 больше нуля.

Если $E_0 = 0$, то траектория тела — **парабола**. При стремлении расстояния r между телами к бесконечности скорость тела с стремится к нулю.

Отсюда становится очевидно, что при параболической и гиперболической траекториях движение тела не ограничено (инфinitно).

Если $E_0 < 0$, то траектория тела — *эллипс*. При эллиптической траектории движение ограничено (финитно), так как малое тело не может бесконечно удаляться по причине того, что суммарная энергия меньше нуля.

На Рис. 4 представлены примеры возможных траекторий малого тела относительно центрального (точка С). При $v_0 > v_2$ тело движется по гиперболе, при $v_0 = v_2$ — по параболе, а при $v_0 < v_2$ — по эллипсу.

Первая космическая скорость — минимальная скорость, необходимая для того, чтобы маломассивное тело стало искусственным спутником центрального тела.

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (1.15)$$

где M — масса центрального тела, а R — радиус орбиты. Отсюда несложно получить выражение для скорости искусственного небесного тела на высоте h над поверхностью тела радиуса r_0 :

$$v_h = \sqrt{\frac{GM}{r_0 + h}} = \sqrt{\frac{gr_0^2}{r_0 + h}}. \quad (1.16)$$

Параболическая или вторая космическая скорость — минимальная скорость, необходимая для того, чтобы маломассивное тело преодолело гравитационное притяжение центрального тела, стартуя с расстояния r от его центра масс, и покинуло замкнутую орбиту вокруг последнего. Выражение для нее имеет следующий вид:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (1.17)$$

Для стабильной системы, частный случай которой — тело на круговой орбите, справедлива **теорема о вириале**:

$$2\langle T \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle (\mathbf{F}_k, \mathbf{r}_k) \rangle = -\langle \Pi \rangle, \quad (1.18)$$

где $\langle T \rangle$ — средняя полная кинетическая энергия, \mathbf{F}_k — сила, действующая на k -ю частицу, \mathbf{r}_k — радиус-вектор k -й частицы. Другими словами, удвоенная средняя полная кинетическая энергия T равна средней полной потенциальной энергии Π со знаком минус. Применяя теорему о вириале для тела, обращающегося по круговой орбите, можно получить выражение для первой космической скорости.

1.4 Законы Кеплера

I-ый закон: Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

II-ой закон: Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени заметает равные площади:

$$\frac{dS}{dt} = \text{const} = \frac{S_{\text{элл}}}{T} = \frac{\pi ab}{T}. \quad (1.19)$$

III-ий закон: Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (1.20)$$

где a — большая полуось, T — период обращения.

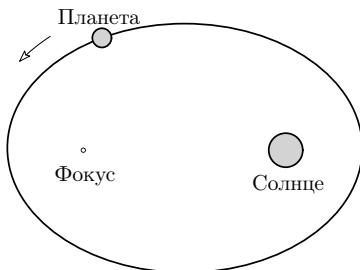


Рис. 5 – Первый закон Кеплера

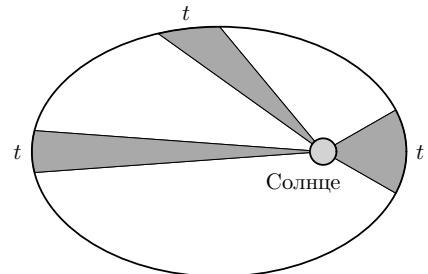


Рис. 6 – Второй закон Кеплера

Обобщённый Ньютона III-ий закон Кеплера имеет следующий вид:

$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{T_2^2(M_2 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \iff \frac{T^2(M + m)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}, \quad (1.21)$$

где M_1 и M_2 — массы центральных тел, m_1 и m_2 — массы обращающихся вокруг них тел. Так как массы планет m много меньше массы звезды M , $M + m \simeq M$.

1.5 Движение по орбите

Закон сохранения момента импульса: векторная сумма моментов импульса замкнутой системы тел относительно выбранной оси остается

постоянной, если суммарный момент \mathbf{M}_Σ внешних сил, действующих на систему, равен нулю. Иначе,

$$\mathbf{L}_\Sigma \equiv \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i] = \text{const.} \quad (1.22)$$

Закон сохранения момента импульса справедлив как для движения по эллипсу, так и по гиперболе и параболе. Следствием этого закона и закона сохранения энергии является *интеграл энергии* — формула для скорости тела в точке орбиты, удалённой на расстояние r от центрального тела с массой M :

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (1.23)$$

Из (1.23) для апоцентра иperiцентра можно заключить следующее:

$$v_{\text{ап}} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \quad v_{\text{пер}} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \quad (1.24)$$

Согласно (1.23) и (2.10) для скорости тела в произвольной точке орбиты справедливо выражение

$$v = \sqrt{\frac{GM}{p} \cdot (1 + 2e \cos \nu + e^2)}, \quad (1.25)$$

где ν — истинная аномалия, а p — фокальный параметр.

1.6 Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы — шесть элементов орбиты, определяющие положение

небесного тела в пространстве в задаче двух тел: *большая полуось* (a), *эксцентриситет* (e), *наклонение* (i), *аргумент перицентра* (ω), *долгота восходящего узла* (Ω), *средняя аномалия* (M). Первые два определяют форму орбиты, третий, четвёртый и пятый — ориентацию плоскости орбиты по отношению к базовой системе координат, связанной с эклиптикой, последний — положение тела на орбите (см. Рис. 7).

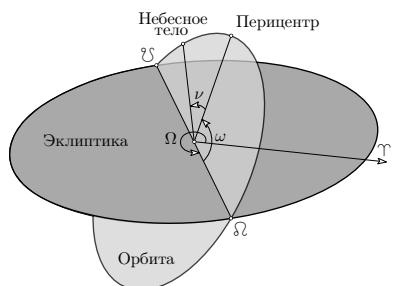


Рис. 7 – Кеплеровы элементы орбиты

Наклонение — это угол между плоскостью орбиты небесного тела и плоскостью эклиптики.

Аргумент перицентра — угол между направлениями на восходящий узел орбиты и наperiцентр при наблюдении из притягивающего центра.

Долгота восходящего узла — угол в плоскости эклиптики между направлением на точку весеннего равноденствия и восходящий узел орбиты. Отсчитывается против часовой стрелки от направления на точку весеннего равноденствия.

Средняя аномалия для тела, движущегося по невозмущённой орбите — произведение его среднего движения и интервала времени после прохождения перицентра.

Узлы орбиты — точки пересечения орбиты и плоскости эклиптики. *Восходящий узел* — точка, в которой тело пересекает плоскость эклиптики при движении в северном направлении, а *исходящий* — в южном.

Истинная аномалия (ν) — угол между радиус-вектором и направлением наperiцентр.

1.7 Уравнение Кеплера

Рассмотрим эллиптическую орбиту o с центром в точке C , центральным телом в фокусе F и большой полуосью a . P —periцентр данной орбиты, следовательно $|CP| = a$. Рассмотрим также окружность c , с центром в точке C и радиусом a , очевидно, эта окружность будет касаться эллипса внешним образом в точке P . Выберем на эллипсе произвольную точку B . Проведем через нее прямую, параллельную малой оси эллипса. Точку пересечения полученной прямой с окружностью c назовем A . Угол $E = \angle PCA$ называется **эксцентрической аномалией** точки B .

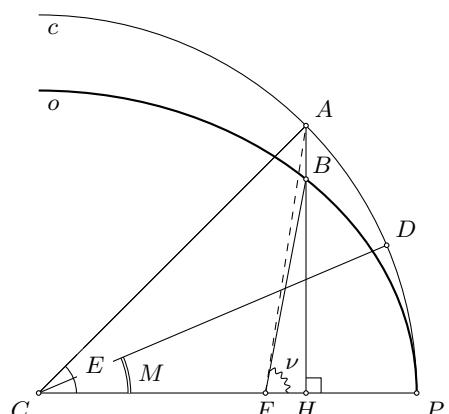


Рис. 8 – К выводу уравнения Кеплера

К выводу уравнения Кеплера

Получим связь между эксцентрической E и средней аномалией M . Прежде всего напомним, что эллипс под действием аффинного преобразования растяжения (вдоль малой оси), переходит в окружность и, наоборот, окружность под действием сжатия переходит в эллипс. В наших обозначениях будем считать, что окружность o под действием сжатия ξ с коэффициентом a/b перешла в эллипс o .

Найдем связь площадей секторов $\diamond BFP$ и $\diamond AFP$. Нетрудно заметить, что второй получается из первого с помощью ξ . Из свойств аффинного имеем:

$$\frac{\text{Area } \diamond BFP}{\text{Area } \diamond AFP} = \frac{b}{a}.$$

Как известно, площадь эллипса $S = \pi ab$, а окружности с той же большой полуосью, соответственно πa^2 . По второму закону Кеплера радиус-вектор тела (FB) за равные промежутки времени заметает равные площади, то есть скорость заметания постоянна и равна $\sigma = \pi ab/T$. А из определения средней аномалии следует, что угловая скорость вектора CD также постоянна и равна $\sigma' = \pi a^2/T$. Отсюда можно сделать вывод о следующем соотношении между площадями секторов $\diamond BFP$ и $\diamond DCP$:

$$\frac{\text{Area } \diamond BFP}{\text{Area } \diamond DCP} = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $\text{Area } \diamond DCP = \text{Area } \diamond AFP$.

Как площадь центрального сектора $\text{Area } \diamond DCP$ можно записать как

$$\text{Area } \diamond DCP = \frac{a^2}{2} M,$$

важное замечание, здесь угол M , конечно, в радианной мере. Аналогично для $\text{Area } \diamond ACP$ имеем:

$$\text{Area } \diamond ACP = \frac{a^2}{2} E.$$

С другой стороны $\diamond ACP = \diamond AFP + \triangle ACF$, значит

$$\text{Area } \diamond ACP = \text{Area } \diamond AFP + \text{Area } \triangle ACF.$$

Заметим, что

$$\text{Area } \triangle ACF = \frac{1}{2} |CF| \cdot |AC| \sin E = \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E = \frac{a^2 e \sin E}{2}$$

Следовательно, из $\text{Area} \diamond DCP = \text{Area} \diamond AFP$ и (1.6) имеем:

$$\frac{a^2}{2}E = \frac{a^2 e \sin E}{2} + \frac{a^2}{2}M;$$

$$M = E(1 - \sin E).$$

Последнее равенство называется **уравнением Кеплера** и связывает среднюю и эксцентрическую аномалии. Найдем теперь зависимость эксцентрической аномалии E от истинной, чтобы связать все три аномалии. Вспомним, что $B \in o$, следовательно, она удовлетворяет уравнению эллипса в декартовых координатах, значит

$$\frac{|CH|^2}{a^2} + \frac{|BH|^2}{b^2} = 1.$$

Далее, $|CH| = |AC| \cos E = a \cos E$, как прилежащий к углу $\angle E$ катет в $\triangle AHC$. Отсюда выражим $|BH|$:

$$|BH| = b \sqrt{1 - \frac{|CH|^2}{a^2}} = b \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 E}{a^2}} = a \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Найдем теперь $|FH|$:

$$|FH| = |CH| - |CF| = a \cos E - ae = a(\cos E - e).$$

Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника $\triangle BFH$:

$$\begin{aligned} |BF|^2 &= |FH|^2 + |BH|^2 = \\ &= a^2(\cos E - e)^2 + a^2(1 - e^2) \sin^2 E = \\ &= a^2(\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E + \sin^2 E - e^2 \sin^2 E) = \\ &= a^2(1 - 2e \cos E + e^2(1 - \sin^2 E)) = a^2(1 - e \cos E)^2 \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение для $|BF|$ и выражение через уравнение эллипса в полярных координатах:

$$|BF| = r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu},$$

$$1 - e \cos E = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu}.$$

Полученное выражение завершает систему уравнения для ν , E и M .

1.8 Точки Лагранжа

Точки Лагранжа — точки во вращающейся системе из двух массивных тел,

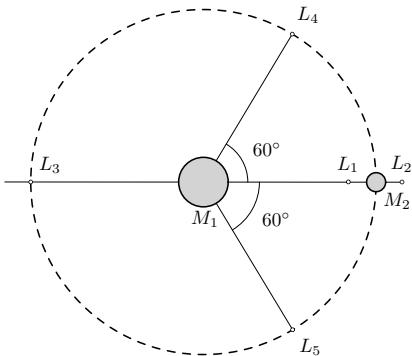


Рис. 9 – Точки Лагранжа

с между Землёй и Солнцем, L_2 — с противоположной стороны от Земли, а точка L_3 располагается за Солнцем. Точки L_4 и L_5 образуют равносторонние треугольники с массивными телами.

Получим выражения для расстояний от центра масс системы до точек Лагранжа. Проще всего это сделать для точек L_1 и L_2 . Пусть R — расстояние между телами, M_1 и M_2 — их массы. Будем искать расстояние r до точки L_1 от тела M_2 .

Из уравнения моментов сил тело с массой M_2 находится на расстоянии βR от центра масс, где $\beta \equiv M_1/(M_1 + M_2)$. Тело с массой M_1 , соответственно, — на расстоянии αR , где $\alpha \equiv M_2/(M_1 + M_2)$. Легко видеть, что $\alpha + \beta = 1$, данный факт пригодится ниже.

Запишем уравнение баланса сил, действующих на пробное тело в точке L_1 :

$$\frac{GM_1m}{(R-r)^2} = \frac{GM_2m}{r^2} + m\omega^2 \left(R \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} - r \right), \quad (1.26)$$

где ω — угловая скорость вращения системы вокруг центра масс, выразим её из обобщенного третьего закона Кеплера:

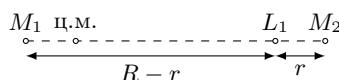
$$\frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \omega^2.$$

Подставим угловую скорость в (1.26):

$$\frac{GM_1m}{(R-r)^2} = \frac{GM_2m}{r^2} + m \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \left(R \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} - r \right),$$

в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействие никаких других сил, кроме гравитационных со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел. В этих точках гравитационные силы, действующие на малое тело, уравновешиваются силами инерции.

Точки L_1 , L_2 и L_3 лежат на одной прямой, соединяющей два массивных тела (см. Рис. 9). В системе Солнце–Земля точка L_1 находится

Рис. 10 – Расположение точки L_1

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} = \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1+M_2}{R^3} \left(R \cdot \frac{M_1}{M_1+M_2} - r \right),$$

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} = \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1}{R^2} - \frac{(M_1+M_2)}{R^2} \cdot \frac{r}{R}.$$

Рассмотрим случай $M_2 \ll M_1$, тогда $r \ll R$, следовательно

$$\frac{M_1}{R^2} \left(1 + \frac{2r}{R} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right) = \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1}{R^2} - \frac{(M_1+M_2)}{R^2} \cdot \frac{r}{R},$$

$$\frac{M_1}{R^2} \left(1 + \frac{2r}{R} - 1 + \frac{r}{R} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right) = M_2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right),$$

$$\frac{M_1}{R^2} \left(\frac{3r}{R} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right) = \frac{M_2}{r^2} \left(1 + o\left(\frac{r}{R}\right) \right),$$

$$\frac{M_1}{R^2} \cdot \frac{3r}{R} \simeq \frac{M_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r \simeq R \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}.$$

Заметим, что в уравнение для точки L_2 с точностью до знака перед r совпадает с (1.26). Следовательно, расстояние от центра масс системы до точек L_1 и L_2 определяются, как

$$R_{1,2} = R \left(1 \mp \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} \right). \quad (1.27)$$

Найдем теперь расстояние R_3 от центра масс до точки L_3 . Пусть точка L_3 находится на расстоянии $R-r$ от тела с массой M_1 . Будем искать расстояние r . Запишем баланс сил, предварительно сократив на Gm :

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} + \frac{M_2}{(2R-r)^2} = \frac{M_1+M_2}{R^3} \left(R-r + R \cdot \frac{M_2}{M_1+M_2} \right). \quad (1.28)$$

Снова рассмотрим случай $M_2 \ll M_1$, когда $r \ll R$, тогда (1.28) будет выглядеть, следующий образом:

$$\frac{M_1}{R^2} \left(1 + \frac{2r}{R} \right) + \frac{M_2}{4R^2} \left(1 + \frac{r}{R} \right) \simeq \frac{M_1}{R^2} + \frac{M_2}{R^2} - \frac{M_1}{R^2} \cdot \frac{r}{R} - \frac{M_2}{R^2} \cdot \frac{r}{R} + \frac{M_2}{R^2},$$

$$\frac{r}{R} \left(\frac{3M_1}{R^2} + \frac{5M_2}{4R^2} \right) \simeq \frac{7M_2}{4R^2} \quad \Rightarrow \quad r \simeq R \cdot \frac{7M_2}{12M_1}.$$

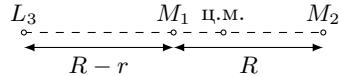


Рис. 11 – Расположение точки L_3

Следовательно, расстояние до точки L_3 от центра масс системы равно

$$R_3 \simeq R - r + R \cdot \frac{M_2}{M_1} = R \left(1 + \frac{5M_2}{12M_1} \right). \quad (1.29)$$

Остается найти координаты точек Лагранжа L_4 и L_5 . Рассмотрим Рис. 12а. Векторы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 — радиус-векторы соответственно тела с массой M_1 , тела с массой M_2 и центра масс относительно точки L_4 . В силу симметрии все рассуждения будут верны и для точки L_5 . Также на рисунке отмечены силы, действующие на тело, располагающееся в точке L_4 : \mathbf{F}_1 — сила гравитации от тела с массой M_1 , \mathbf{F}_2 — с массой M_2 , сила инерции $\mathbf{F}_{\text{и.б.}}$ — центробежная — коллинеарна вектору \mathbf{r}_3 .

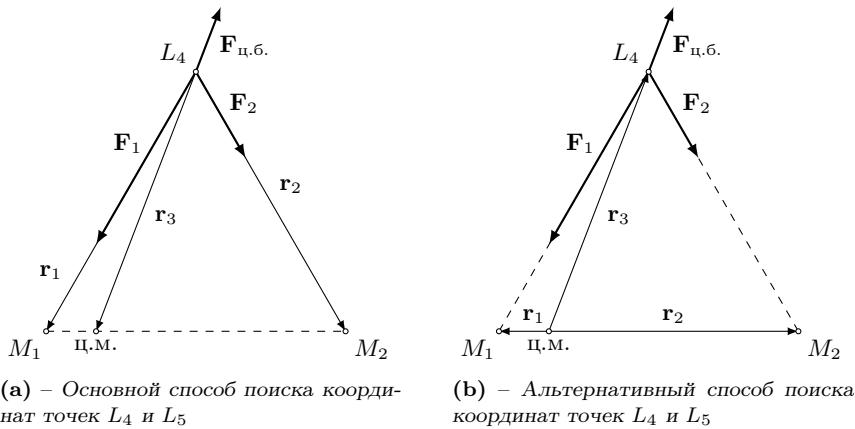


Рис. 12

Будем действовать также, как с точками L_1 , L_2 и L_3 — запишем уравнение баланса сил, сократив на массу пробного тела m :

$$\frac{GM_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1 + \frac{GM_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_2 - \omega^2 \mathbf{r}_3 = 0. \quad (1.30)$$

Из физического смысла радиус-вектора центра масс, что суммарная масса системы, помещенная в центр масс должна создавать такой же момент силы относительно произвольной точки, как вся система, спра-ведливо следующее:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 M_1 + \mathbf{r}_2 M_2}{M_1 + M_2}. \quad (1.31)$$

А так как $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = R$, то выражение для угловой скорости системы принимает вид

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (1.32)$$

Подставляя (1.31) и (1.32) в уравнение баланса сил (1.30) получим:

$$\begin{aligned} \frac{GM_1}{|\mathbf{r}_1|^3}\mathbf{r}_1 + \frac{GM_2}{|\mathbf{r}_2|^3}\mathbf{r}_2 - \frac{GM_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\mathbf{r}_1 - \frac{GM_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\mathbf{r}_2 &= 0, \\ M_1 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_1|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) \mathbf{r}_1 + M_2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) \mathbf{r}_2 &= 0. \end{aligned}$$

В силу неколлинеарности векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 получаем, что

$$|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2|, \quad (1.33)$$

следовательно треугольник $\triangle M_1 L_4 M_2$ равносторонний. Значит в системе координат центра масс y -координата точек L_4 и L_5 равна $\pm R\sqrt{3}/2$. Найдем x -координату точки L_4 в системе координат центра масс:

$$x = -R\alpha + \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \cdot \frac{-2M_2 + M_1 + M_2}{M_1 + M_2} = \frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}.$$

Окончательно для координат точек Лагранжа в системе отсчета центра масс, с осью x , направленной в сторону тела с массой M_2 , имеем следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,2} &= R \begin{pmatrix} 1 \mp \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}_3 = -R \begin{pmatrix} 1 + \frac{5M_2}{12M_1} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{r}_{4,5} &= \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \\ \pm \frac{\sqrt{3}R}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Рассмотрим также второй способ найти координаты точек L_4 и L_5 :

Рассмотрим проекции данных сил на ось, перпендикулярную \mathbf{r}_3 . Зададим ее вектором $\mathbf{r}_3^\perp = (y, -x)$. Получим:

$$\frac{(\mathbf{r}_3^\perp, \mathbf{F}_1)}{|\mathbf{r}_3^\perp|} + \frac{(\mathbf{r}_3^\perp, \mathbf{F}_2)}{|\mathbf{r}_3^\perp|} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& yF_1^x - xF_1^y + yF_2^x - xF_2^y = 0, \\
& \underbrace{\frac{-yM_1(R\alpha + x) + xyM_1}{[(R\alpha + x)^2 + y^2]^{3/2}}}_A + \underbrace{\frac{yM_2(R\beta - x) + xyM_2}{[(R\beta - x)^2 + y^2]^{3/2}}}_B = 0, \\
& yR \left(\frac{M_2\beta}{B} - \frac{M_1\alpha}{A} \right) + xy \left(-\frac{M_2}{B} + \frac{M_2}{B} - \frac{M_1}{A} + \frac{M_1}{A} \right) = 0, \\
& \frac{yRM_1M_2}{M_1 + M_2} \left\{ \frac{1}{[(R\alpha + x)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(R\beta - x)^2 + y^2]^{3/2}} \right\} = 0, \\
& \frac{[(R\beta - x)^2 + y^2]^{3/2} - [(R\alpha + x)^2 + y^2]^{3/2}}{[(R\alpha + x)^2 + y^2]^{3/2}[(R\beta - x)^2 + y^2]^{3/2}} = 0, \\
& R\beta - x = R\alpha + x, \\
& x = \frac{R}{2}(\beta - \alpha) = \frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}.
\end{aligned}$$

Важно отметить, что при полученном значении x выполняется равенство $A = B$, чем мы сейчас и воспользуемся. Найдем y , для этого запишем уравнения баланса сил на ось r_3 :

$$\begin{aligned}
& \frac{(r_3, F_1)}{|r_3|} + \frac{(r_3, F_2)}{|r_3|} + \frac{\omega^2(r_3, r_3)}{|r_3|} = 0, \\
& \frac{M_1 + M_2}{R^3} \cdot (x^2 + y^2) + \frac{-xM_1(R\alpha + x) - y^2M_1}{A} + \frac{xM_2(R\beta - x) - y^2M_2}{B} = 0, \\
& (x^2 + y^2) \left(\frac{M_1 + M_2}{R^3} - \frac{M_1}{A} - \frac{M_2}{B} \right) + xR \left(\frac{M_2\beta}{B} - \frac{M_1\alpha}{A} \right) = 0, \\
& (x^2 + y^2)(M_1 + M_2) \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{B} \right) = 0, \\
& (x - R\beta)^2 + y^2 = R^2, \\
& y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}R.
\end{aligned}$$

1.9 Приливы и отливы

Приливы и отливы — периодические вертикальные колебания уровня океана, являющиеся результатом изменения положения Луны и Солнца. Хотя силы тяготения Солнца почти в 200 раз больше, чем силы тяготения Луны, приливные силы, порождаемые Луной, почти вдвое больше порождаемых Солнцем. Это происходит из-за того, что приливные силы зависят не от величины гравитационного поля, а от степени его неоднородности. Высота приливов зависит от взаимного расположения Луны и Солнца: наибольший — силы от Луны и от Солнца

действуют вдоль одного направления, а наименьший — под прямым углом друг к другу.

Ускорение в центре Земли (T) определяется формулой (1.12):

$$a_T = \frac{GM}{r^2},$$

M — масса возмущающего тела,

r — расстояние между центрами Земли и данного тела. Аналогично, ускорения в точках A и B равны соответственно

$$a_A = \frac{GM}{(r-R)^2} \quad \text{и} \quad a_B = \frac{GM}{(r+R)^2}, \quad (1.35)$$

где R — радиус Земли или иного тела, подверженного воздействию приливных сил. Ускорение в точке A относительно точки T равно

$$a_A - a_T = a_T \cdot \frac{2rR - R^2}{(r-R)^2} = \frac{GM(2rR - R^2)}{r^2(r-R)^2} \xrightarrow{R \ll r} \frac{2GMR}{r^3}. \quad (1.36)$$

Под действием лунного притяжения водная оболочка Земли принимает форму эллипсоида, который вытянут по направлению к Луне. Близ точек A и B будет прилив, а в точках F и D — отлив (см. Рис. 13).

1.10 Затмения

Диаметр тени спутника при полном центральном затмении (когда центры трёх тел лежат на одной прямой) с большой точностью равен

$$d_{\text{тени}} = 2 \cdot \frac{R_{\mathbb{D}}(a_{\oplus} - R_{\oplus}) - R_{\odot}(a_{\mathbb{D}} - R_{\oplus})}{a_{\oplus} - a_{\mathbb{D}}}. \quad (1.37)$$

Среднее значение этой величины — около 200 км, максимальное — 215 км. При нецентральном затмении максимальный диаметр тени Луны на поверхности Земли может достигать 270 км. Это даёт оценку на продолжительность, равную 7.5 минутам. Большинство полных затмений длится 2–4 минуты.

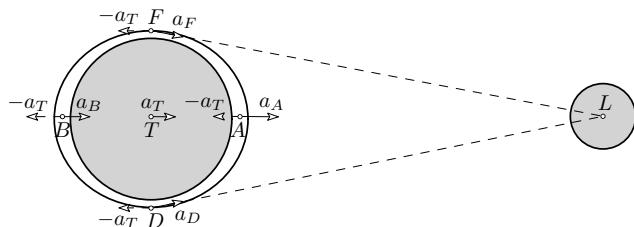


Рис. 13 – К объяснению приливных сил

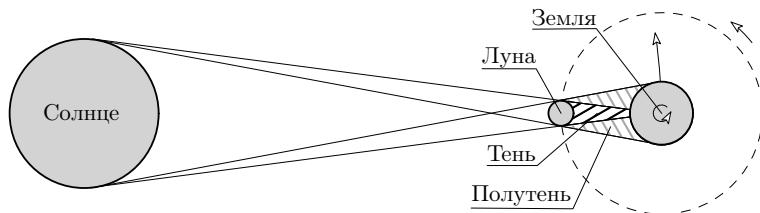


Рис. 14 – Полное солнечное затмение со стороны северного полюса эклиптики

При **кольцеобразном солнечном затмении** Луна так расположена относительно Земли, что конус её тени не достаёт до поверхности планеты, и вокруг Луны можно наблюдать яркое кольцо незакрытой части солнечного диска.

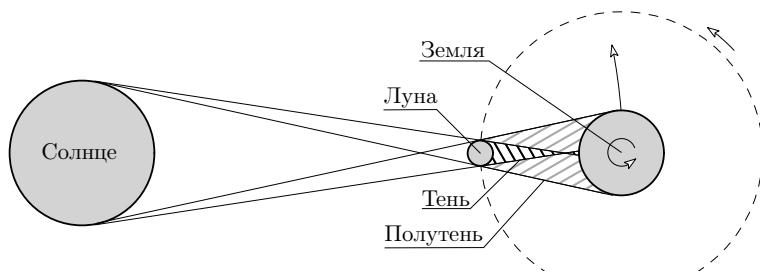


Рис. 15 – Кольцеобразное солнечное затмение со стороны северного полюса эклиптики

При особом расположении Луны и Земли возможны **гибридные** затмения, когда в разных пунктах Земли наблюдаются **кольцеобразное** и **полное** затмение. Причиной такого явления является шарообразность Земли.

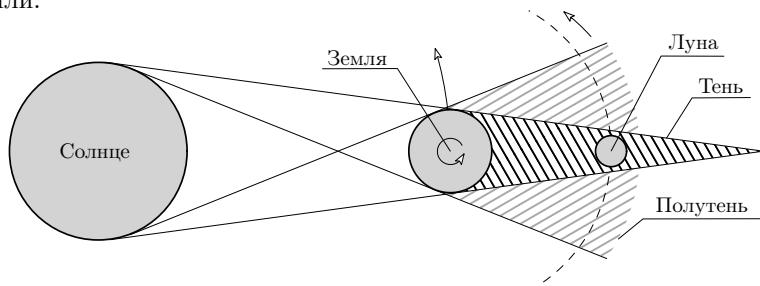


Рис. 16 – Схема лунного затмения со стороны северного полюса эклиптики

Лунное затмение, в отличие от солнечного, видно со всего ночного полушария Земли. Диаметр земной тени на расстоянии Луны превыша-

ет размер последней примерно в 2.5–3 раза. Бывают **частные**, когда лишь часть Луны попадает в земную тень, **полные** — Луна полностью погружается в тень Земли, и **полутеневые** — Луна проходит через полутень Земли, не затрагивая конус тени.

Синодический месяц — промежуток времени между одинаковыми фазами Луны, равен 29.53 суток.

Драконический месяц — промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Луны через один и тот же узел орбиты, — 27.21 суток.

Сарос — промежуток времени, по прошествии которого солнечные и лунные затмения повторяются в прежнем порядке. Происходит это из-за того, что каждый сарос Луна, орбита Луны и Солнце возвращаются в прежнее положение относительно далёких звёзд. Сарос длится ровно 242 драконических месяца, или 223 синодических месяца, или 18 лет 11 дней 8 часов.

Важной характеристикой любого затмения является его **фаза** — для **частных** и **кольцеобразных** затмений: отношение закрытой части x диаметра² затмеваемого тела, проходящего через центр затмевающего тела, ко всему диаметру затмеваемого тела D ; для **полного**: единица плюс отношение расстояния³ между краями дисков затмеваемого и затмевающего тел к диаметру затмеваемого тела D .

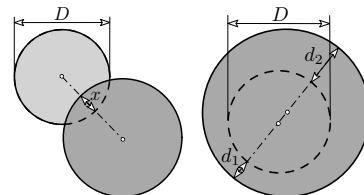


Рис. 17 – Частное и полное затмение

$$\Phi_{\text{част}} = \frac{x}{D} < 1, \quad \Phi_{\text{полн}} = 1 + \frac{\min\{d_1, d_2\}}{D} > 1. \quad (1.38)$$

Иногда вводят такое понятие, как **площадная фаза затмения**, т. е. отношение площади закрытой части диска затмеваемого диска к полной площади его диска. Чаще всего площадную фазу используют применительно к двойным звёздам, когда считают падение блеска при затмении одной звезды другой.

²Здесь имеется в виду *угловой* диаметр

³Расстояние между окружностями l_1 и l_2 — это $\min |L_1 L_2|$ по всем $L_1 \in l_1$ и $L_2 \in l_2$.

1.11 Конфигурации планет

Внутренними планетами называются планеты, большая полуось орбиты a которых меньше большой полуоси орбиты Земли a_{\oplus} . Отсюда следует, что для наблюдателя на Земле *внутренними* планетами являются лишь Венера и Меркурий, остальные относятся к *внешним*. Для таких планет выделяют три основные конфигурации: *верхнее соединение*, *нижнее соединение* и *максимальная элонгация*. Различают две максимальные элонгации — **западную и восточную**, когда планета наблюдается к западу и к востоку от Солнца соответственно.

Внутренняя планета находится в **верхнем соединении**, когда Земля, Солнце и планета лежат на одной прямой, при этом планета и Земля располагаются по разные стороны от Солнца. Если пренебречь наклоном орбит планет к плоскости эклиптики, то для наблюдателя на Земле планета находится точно за Солнцем.

Нижнее соединение

внутренней планеты происходит когда Земля, Солнце и планета, также как и в случае верхнего соединения, располагаются на одной прямой, но для нижнего соединения планета должна находиться между Солнцем и Землей. Если бы орбиты всех планет лежали в одной плоскости, тогда в момент каждого нижнего соединения внутренней планеты наблюдалось бы ее прохождение по диску Солнца для наблюдателя на внешней планете.



Рис. 18 – Конфигурации планет

Элонгацией планеты называется угол Солнце – Земля – планета, отсюда очевидно, что *максимальная элонгация* внутренней планеты наблюдается в момент, когда прямая Земля – планета является касательной к орбите планеты, то есть угол Солнце – планета – Земля является прямым.

Внешними планетами называются планеты, большая полуось орбиты a которых больше большой полуоси орбиты Земли a_{\oplus} . Для таких планет также существуют три основные конфигурации: *соединение*, *противостояние* и *квадратура*. Квадратура бывает **западная** и **восточная**, в какой именно квадратуре находится внешняя планета определяется аналогично максимальной элонгации.

Соединение внешней планеты, подобно верхнему соединению внутренней планеты, наблюдается в момент, когда Солнце, Земля и планета находятся на одной прямой, при этом Солнце находится между планетой и Землей. В этот момент для наблюдателя на внешней планете Земля, являясь нижней планетой, наблюдается в верхнем соединении.

Аналогично, когда планета, Солнце и Земля располагаются на одной прямой, но Солнце и планета лежат по разные стороны от Земли, считается, что внешняя планета находится в **противостоянии**. Земля же находится в нижнем соединении для наблюдателя на внешней планете, наблюдаемой в противостоянии.

Квадратурой называется конфигурация, когда угол между направлениями на планету и Солнце (угол Солнце – Земля – планета) является прямым. Стоит заметить, что для наблюдателя на планете Земля будет наблюдаться в максимальной элонгации, причем если планета с Земли наблюдалась в восточной квадратуре, тогда Земля будет в западной максимальной элонгации и наоборот.

1.12 Фазы планет и спутников

Фаза планеты (спутника) — отношение площади освещённой части видимого диска ко всей его площади. Фаза рассчитывается по формуле

$$\Phi = \frac{1 + \cos \phi}{2} = \cos^2 \frac{\phi}{2}, \quad (1.39)$$

где ϕ — **фазовый угол** — угол между лучом света, падающим от Солнца на планету, и лучом, отразившимся от неё в сторону наблюдателя (см. Рис. 19). Фаза объекта может принимать значения от 0 до 1.

Видимая граница между освещенной и неосвещенной частями поверхности объекта называется **терминатором**. В зоне терминатора для наблюдателя на объекте источник пересекает горизонт.

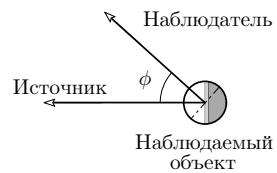


Рис. 19 – Фазовый угол

1.13 Синодический период

Синодический период (период смены фаз) — время, прошедшее между двумя последовательными одноимёнными конфигурациями одного тела при наблюдении с другого.

Относительная угловая скорость планет равна разности скоростей углового перемещения одной планеты ($2\pi/T_1$) и другой ($2\pi/T_2$) по орбите. Из определения относительной угловой скорости вытекает общая формула для продолжительности синодического периода:

$$\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right|. \quad (1.40)$$

Для внешних и внутренних планет соответственно выражения принимают следующий вид:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\text{пл}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{пл}}} - \frac{1}{T_{\oplus}}, \quad (1.41)$$

где S — синодический период, $T_{\text{пл}}$ — сидерический период планеты, T_{\oplus} — сидерический период обращения Земли.

В случае, если тела обращаются в противоположные стороны, то связь их синодического периода с сидерическими очевидным образом принимает вид:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (1.42)$$

1.14 Собственное движение звёзд

Собственным движением (μ) называется изменение координат звёзд на небесной сфере, вызванное относительным движением звёзд и Солнца, обычно измеряется в mas/год.

$$\mu = \sqrt{\mu_{\delta}^2 + \mu_{\alpha}^2 \cos^2 \delta} = \frac{V_{\tau}}{D}, \quad (1.43)$$

где V_{τ} — тангенциальная относительная скорость звезды, D — расстояние до неё, μ_{δ} — собственное движение по склонению, μ_{α} — собственное движение по прямому восхождению, определяются по следующим формулам:

$$\mu_{\delta} = \frac{\delta(t_2) - \delta(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad \mu_{\alpha} = \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (1.44)$$

1.15 Прецессия

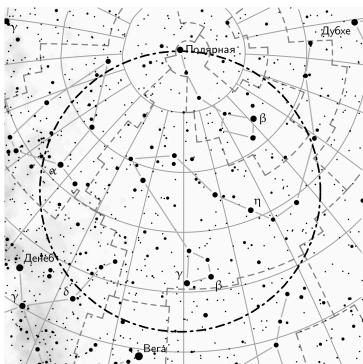


Рис. 20 – Прецессионное движение северного полюса мира

Под действием возмущающих сил ось вращения Земли совершает прецессионное движение: описывает вокруг оси эклиптики конус с углом раствора 23.5° с периодом около 25 765 лет. Из-за этого меняется положение полюс мира. Например, сейчас полюс мира практически совпадает с Полярной звездой (α UMi), а 15 000 лет назад роль полярной звезды играла Вега (α Lyg). Если считать, что величина прецессии постоянна, то полюсы мира описывают вокруг полюсов эклиптики малые круги с радиусом 23.5° . В действительности же величина прецессии меняется, поэтому

путь полюсов мира представляет собой не окружность, а спираль.

Поворот оси Земли имеет различные последствия. Во-первых, меняется продолжительность тропического года, он становится примерно на 20 минут короче звёздного, во-вторых, меняется вид звёздного неба (см. Рис. 20).

2 Конические сечения

2.1 Эллипс

Эллипс — плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки которой до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна.

$$|F_1M| + |F_2M| = \text{const} \quad (2.1)$$

Центром эллипса называется середина отрезка, соединяющего его фокусы.

Большая ось эллипса — прямая, проходящая через фокусы эллипса; **малая ось** — прямая ей перпендикулярная и проходящая через центр эллипса.

Главные отрезки эллипса: **большая полуось** (a) — расстояние от центра эллипса до его пересечения с большой осью; **малая полуось** (b) определяется дословно также, заменив большую ось на малую; **фокальное расстояние** (c) — расстояние от центра эллипса до одного из фокусов, что тоже самое, половина расстояния между фокусами.

Рассмотрим крайнюю левую и крайнюю правую точки эллипса на Рис. 21, назовем их A и B соответственно, тогда сумма расстояний l от каждой из них до фокусов F_1 и F_2 равна:

$$AF_1 + AO + OF_2 = AF_1 + a + c = l = BF_2 + BO + OF_1 = BF_2 + a + c.$$

Откуда следует, что $AF_1 = BF_2$. Легко видеть, что $AB = 2a$, значит $l = AF_1 + AO + OF_2 = AO + OF_2 + F_2B = 2a$. Получается, сумма расстояний до фокусов от любой точки эллипса равна его удвоенной большой полуоси.

В силу равенства прямоугольных треугольников $\triangle F_1OC$ и $\triangle F_2OC$ равны их гипотенузы F_1C и F_2C , причем $F_1C = F_2C = l/2 = a$. Отсюда получается одно из основных соотношений в эллипсе:

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (2.2)$$

Эксцентриситет (e) — числовая характеристика, показывающая степень отклонения конического сечения от окружности. Для эллипса e лежит в интервале $(0, 1)$ и определяется формулой

$$e = \frac{c}{a}. \quad (2.3)$$

Апоцентр — наиболее удаленная точка от заданного фокуса точка эллипса. Из определения эллипса вытекает соотношение для расстояния от фокуса до апоцентра (Q):

$$Q = a(1 + e). \quad (2.4)$$

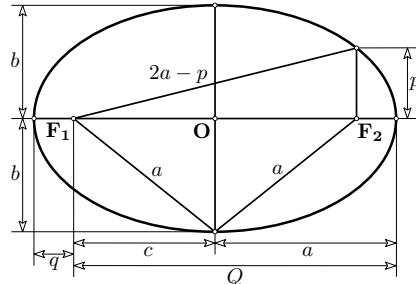


Рис. 21 – Эллипс

Перицентр — ближайшая точка точки эллипса к заданному фокусу. Из определения эллипса вытекает соотношение для расстояния от фокуса до перицентра (q):

$$q = a(1 - e). \quad (2.5)$$

Фокальный параметр (p) — длина перпендикуляра, проведенного из фокуса до точки пересечения с эллипсом. Из теоремы Пифагора и определения эллипса следует нижеприведенная формула для расчета его длины:

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) = b\sqrt{1 - e^2}. \quad (2.6)$$

Площадь эллипса (S) — площадь части плоскости, ограниченной эллипсом, равна

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.7)$$

Уравнение эллипса в декартовых координатах представляет собой уравнение замкнутой кривой второго порядка, канонический вид которого:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.8)$$

Его можно представить параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t; \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.9)$$

В полярных координатах уравнение принимает следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \varphi}, \quad (2.10)$$

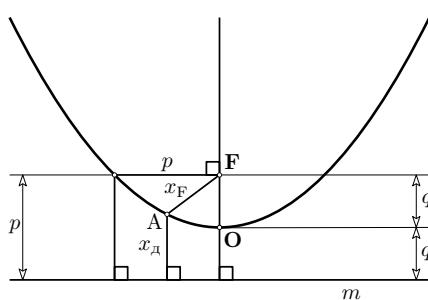


Рис. 22 – Парабола

где φ — **истинная аномалия** — угол перицентру — фокус — заданная точка, отсчитываемый в сторону движения по эллипсу. При знаке плюс перед e второй фокус эллипса будет находиться в точке $(0, 2c)$, а при минус — в точке $(\pi, 2c)$.

Кроме этого, эллипс обладает важным *оптическим свойством*, которое можно сформулировать так: свет от источника в одном из фокусов, отражается эллипсом так, что отражённые лучи пересекаются во втором фокусе или,

лировать так: свет от источника в одном из фокусов, отражается эллипсом так, что отражённые лучи пересекаются во втором фокусе или,

что тоже самое, касательная к эллипсу в заданной точке образует с фокальными радиусами в данной точке равные острые углы.

2.2 Парабола

Парабола — геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой (называемой **директрисой** параболы) и данной точки (называемой **фокусом** параболы).

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px, \quad (2.11)$$

где p — **фокальный параметр**, равный расстоянию между фокусом параболы и директрисой или удвоенному расстоянию между фокусом параболы и вершиной.

Парабола в полярной системе координат (r, φ) с центром в фокусе и нулевым направлением вдоль оси параболы (от фокуса к вершине) может быть представлена в виде уравнения

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}. \quad (2.12)$$

Эксцентриситет параболы равен $e = 1$. Важно отметить, что парабола не имеет **большой и малой полуоси**.

Как и все конические сечения, парабола обладает *оптическим свойством*, которое формулируется следующим образом: пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей.

2.3 Гипербола

Гипербола — геометрическое место точек евклидовой плоскости, абсолютное значение разности расстояний от которых до двух выделенных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, постоянно и равно удвоенной действительной полуоси гиперболы.

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a \quad (2.13)$$

Ближайшие друг к другу точки двух ветвей гиперболы называются **вершинами** гиперболы. **Большая или действительная полуось** (a) гиперболы — расстояние от центра гиперболы до одной из вершин. **Фокальное расстояние** (c) — расстояние от центра гиперболы до одного из фокусов. **Эксцентриситетом** гиперболы (e), как и эллипса, является отношение фокального расстояния к большой полуоси, так как большая полуось гиперболы всегда меньше её фокального расстояния, эксцентриситет гиперболы $e > 1$ и может быть найдет из определения:

$$e = \frac{c}{a}. \quad (2.14)$$

Перицентрическое расстояние (q) — расстояние от фокуса до ближайшей вершины гиперболы, можно найти, как

$$q = a(e - 1). \quad (2.15)$$

Минимальная полуось (b) — длина перпендикуляра к оси абсцисс, восстановленного из вершины до пересечения с асимптотой. Равна **прицельному параметру** (f) — расстоянию от фокуса до асимптоты гиперболы.

Фокальный параметр (p) — длина отрезка, перпендикулярного к действительной оси, проведённого от фокуса до гиперболы. Определяется формулой

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (2.16)$$

Каноническое уравнение гиперболы в прямоугольных декартовых координатах записывается следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.17)$$

В *极坐标ах* уравнение принимает вид:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \quad (2.18)$$

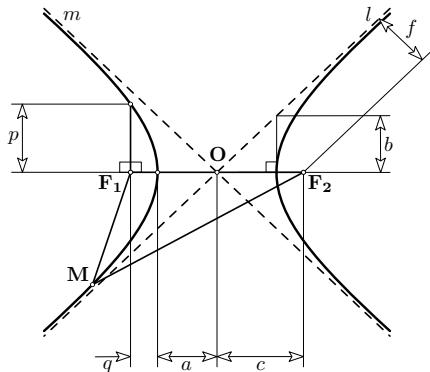


Рис. 23 – Гипербола

причём полюс находится в фокусе гиперболы, а вершина гиперболы лежит на продолжении полярной оси.

Уравнение двух асимптот является уравнением пересекающихся прямых:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0. \quad (2.19)$$

Важным соотношением для элементов гиперболы является

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (2.20)$$

Также, как и любое коническое сечение, гипербола имеет своё *optическое свойство*: свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается второй ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе.

3 Астрофизика

3.1 Звёздные величины

Звёздная величина — безразмерная числовая характеристика яркости объекта. Известно, что увеличению светового потока в 100 раз соответствует уменьшение видимой звёздной величины ровно на 5 единиц. Тогда уменьшение звёздной величины на одну единицу означает увеличение светового потока в $\sqrt[5]{100} \approx 2.512$ раз, то есть звёздные величины являются логарифмической шкалой измерения плотности потока. Зависимость, связывающая отношение освещённостей E_1 и E_2 и разность звёздных величин m_1 и m_2 двух объектов, называется **формулой Погсона** и имеет вид

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0.4(m_2 - m_1)} \iff m_2 = m_1 + 2.5 \lg \frac{E_1}{E_2}. \quad (3.1)$$

Широко используется понятие **абсолютной звёздной величины** M — это видимая звёздная величина m при наблюдении с установленного расстояния: для звёзд — 10 пк, для тел Солнечной системы — 1 а. е., причем считается, что тело находится в 1 а. е. и от наблюдателя и от Солнца, а фаза равна единице, то есть можно считать, что наблюдатель находится в центре Солнца, а тело в 1 а. е. от него.

Кроме этого, важно понятие **болометрической звёздной величины** m_{bol} — это звёздная величина, при расчёте которой учитывается полная мощность излучения источника во всех диапазонах электромагнитных волн. Обычная звёздная величина или видимая учитывает излучение лишь в видимой части спектра от примерно 380 нм до примерно 780 нм. Разность между болометрической и видимой звёздными величинами называется **болометрической поправкой** (BC), своей для каждого спектрального класса звёзд. Из определения, болометрическая поправка может быть найдена по формуле

$$BC = m_{\text{bol}} - m. \quad (3.2)$$

Абсолютную звёздную величину звезды можно получить по формуле Погсона (3.1) из видимой звёздной величины m и расстояния r до неё в парсеках

$$M = m + 2.5 \lg \frac{E}{E_{\text{абс}}} = m + 2.5 \lg \frac{(10 \text{ пк})^2}{r^2} = m + 5 - 5 \lg r. \quad (3.3)$$

Если принимать к рассмотрению межзвездное поглощение A , то формулу (3.3) необходимо уточнить:

$$M = m + 5 - 5 \lg r - Ar. \quad (3.4)$$

3.2 Закон Стефана-Больцмана

Закон Стефана — Больцмана определяет зависимость плотности мощности излучения абсолютно чёрного тела (АЧТ) u от его температуры T :

$$u = aT^4, \quad (3.5)$$

где a — некая универсальная константа. Отсюда полная светимость АЧТ с площадью поверхности S

$$L = S\sigma T^4, \quad (3.6)$$

константа σ называется **постоянной Стефана-Больцмана**.

Важно отметить, что закон Стефана-Больцмана — прямое следствие формулы Планка (3.18 – 3.19), так как, исходя из физического смысла формулы Планка, справедливы равенства

$$\sigma T^4 = \int_0^\infty B(\lambda, T) d\lambda \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\theta = \pi \int_0^\infty B(\lambda, T) d\lambda \text{ и} \quad (3.7)$$

$$= \int_0^\infty B(\nu, T) d\nu \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\theta = \pi \int_0^\infty B(\nu, T) d\nu. \quad (3.8)$$

Здесь интегрирование ведется в сферических координатах (φ, θ) по телесному углу $d\Omega = d\varphi \cos \varphi d\theta$. А $\sin \varphi$ отвечает за проекцию единичной площадки на направление излучения. Вычислим данный интеграл, чтобы получить значение постоянной Стефана-Больцмана:

$$\sigma T^4 = \pi \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} d\nu.$$

Сделаем замену $x = \frac{h\nu}{kT}$, следовательно, $dx = \frac{h}{kT} d\nu$, тогда

$$\sigma T^4 = \frac{2\pi}{c^2} \int_0^\infty \underbrace{\frac{k^3 T^3}{h^2} x^3}_{h\nu^3} \cdot \frac{1}{e^x - 1} \cdot \underbrace{\frac{kT}{h}}_{d\nu} dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Значение интеграла $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ равно $\frac{\pi^4}{15}$, откуда

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}.$$

Для звёзд главной последовательности выполняется соотношение $L \sim M^\alpha$, где α — коэффициент пропорциональности, который зависит от массы звезды следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha &= 2.5, & M < 0.5M_\odot; \\ \alpha &= 4, & 0.5M_\odot < M < 8M_\odot; \\ \alpha &= 2.5, & M > 8M_\odot.\end{aligned}$$

Также существует примерная зависимость светимости звёзды от её радиуса, имеющая вид $L \sim R^{5.2}$.

3.3 Энергия излучения

Энергия излучения — энергия, переносимая излучением. Обозначается Q_e .

Поток излучения — физическая величина, характеризующая мощность, переносимую излучением,

$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}. \quad (3.9)$$

Теорема Гаусса: через любую замкнутую поверхность потоки от одинаковых источников равны.

Спектральная плотность потока излучения — поток излучения, приходящийся на малый единичный интервал спектра,

$$\Phi_{e,\lambda}(\lambda) = \frac{d\Phi_e(\lambda)}{d\lambda}, \quad \Phi_{e,\nu}(\nu) = \frac{d\Phi_e(\nu)}{d\nu} = \frac{\lambda^2}{c} \Phi_{e,\lambda}(\lambda). \quad (3.10)$$

Объемная плотность энергии излучения — количество энергии на единицу объема

$$U_e = \frac{dQ_e}{dV}. \quad (3.11)$$

Светимость — величина, представляющая собой световой поток излучения, испускаемого с малого участка светящейся поверхности единичной площади,

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS_1}, \quad (3.12)$$

здесь S_1 — площадь объекта, испускающего энергию.

Яркость — световой поток, приходящийся на единичный телесный угол, в расчёте на единичную площадку проекции излучающей поверхности на картинную плоскость,

$$L_e = \frac{d^2\Phi_e}{d\Omega dS_1 \cos \varepsilon}, \quad (3.13)$$

где ε — угол между направлением потока излучения и нормалью к плоскости излучающей поверхности.

Интегральная яркость — интеграл яркости по видимой поверхности источника. Показывает количество энергии, пришедшее от источника за единицу времени.

$$\Lambda_e = \int_S L_e(\mathbf{r}) ds. \quad (3.14)$$

Освещенность — величина, равная отношению светового потока, падающего на малый участок поверхности, к его площади — поверхностная плотность потока

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dS_2} \sim \frac{1}{r^2}, \quad (3.15)$$

здесь S_2 — площадь поверхности приёмника, r — расстояние от источника.

3.4 Альбедо

Альбедо (A) — характеристика отражательной способности поверхности какого-либо объекта. Альбедо является отношением отражённого светового потока к падающему на поверхность объекта. Тогда для нахождения поглощённой части излучения используется соотношение

$$E_\pi = E_0 \cdot (1 - A), \quad (3.16)$$

где E_π — поглощённая часть излучения, E_0 — пришедшее излучение, A — альбедо. А для отражённой части излучения $E_{\text{отр}}$ можно использовать формулу

$$E_{\text{отр}} = A \cdot E_0. \quad (3.17)$$

Существует несколько видов альбедо: *геометрическое*, *сферическое* и *бондовское*. **Геометрическое альбедо** равно отношению освещённости у Земли, создаваемой планетой в полной фазе, к освещённости, которую создал бы плоский абсолютно белый экран того же размера, что

и планета, расположенный на её месте перпендикулярно лучу зрения и солнечным лучам. **Сферическое альбедо** определяется как отношение светового потока, рассеянного телом во всех направлениях, к потоку, падающему на это тело. Может быть определено и для некоторого диапазона длин волн, и для всего спектра. Сферическое альбедо для всего спектра излучения называется **альбедо Бонда**.

3.5 Формула Планка

Формула Планка — выражение для спектральной плотности мощности излучения абсолютно чёрного тела на интервале частот $[\nu, \nu + d\nu]$, распространяющейся с телесным углом $d\Omega$, которое было получено Максом Планком в 1900 году. Данное выражение имеет следующий вид:

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц} \cdot \text{ср}} \right], \quad (3.18)$$

где ν — частота излучения, T — температура АЧТ, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, c — скорость света.

Если записать закон излучения Планка (3.18) для длин волн, то

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{ср}} \right]. \quad (3.19)$$

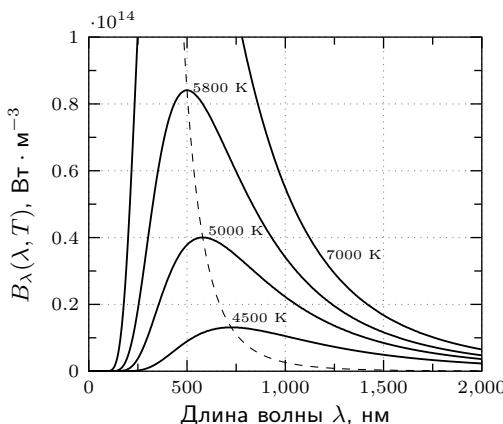


Рис. 24 — Кривые спектральной плотности мощности изотропного излучения АЧТ с разной температурой. Однако формулу Рэлея-Джинса используют и сейчас для описания кривой Планка на больших длинах волн.

Стоит заметить, что при переходе в функции к длинам волн меняется не только частота на длину волны, но и выражение для интервала.

Формула Планка появилась, когда стало ясно, что формула Рэлея-Джинса удовлетворительно описывает излучение только в области больших длин волн, а с убыванием длин волн даёт сильные расхождения с реальными данными.

Проделаем обратные действия: получим формулу Рэлея-Джинса из формулы Планка. Длинноволновая часть спектра характеризуется соотношением $h\nu \ll kT$, то есть

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}.$$

Подставляя полученное выражение в знаменатель (3.18), получим

$$B_\nu(\nu, T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{kT}{h\nu} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}.$$

Проделав то же самое для выражения через длину волны, получим:

$$B(\lambda, T) \simeq \frac{2ckT}{\lambda^4}, \quad B(\nu, T) \simeq \frac{2\nu^2 kT}{c^2}. \quad (3.20)$$

В коротковолновой области, наоборот, $h\nu \gg kT$, следовательно, в знаменателе формулы Планка единица много меньше стоящей там экспоненты, то есть

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \approx \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Отсюда получаются выражения, называемые приближением Вина:

$$B(\lambda, T) \simeq \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right), \quad B(\nu, T) \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (3.21)$$

3.6 Закон смещения Вина

Закон смещения Вина — закон, устанавливающий зависимость длины волны λ_{\max} , на которой спектральная плотность излучения $B_\lambda(\lambda, T)$ абсолютно чёрного тела достигает своего максимума, от температуры T этого тела:

$$\lambda_{\max} \approx \frac{b}{T} \equiv \frac{0.0029 \text{ м} \cdot \text{К}}{T}. \quad (3.22)$$

Закон является следствием исследования функции Планка (3.5) на экстремальность. Проведем это исследование. Зафиксируем температуру чёрного тела и введем обозначения: $\alpha 2hc^2$ и $\beta = hc/kT$. Тогда задача сводится к поиску экстремума функции

$$B(\lambda) = \frac{\alpha \lambda^{-5}}{\exp(\beta \lambda^{-1}) - 1}$$

Продифференцируем $B(\lambda)$:

$$\begin{aligned} B'(\lambda) &= \frac{-5\alpha\lambda^{-6}}{\exp(\beta\lambda^{-1}) - 1} + \frac{-\alpha\lambda^{-5}}{(\exp(\beta\lambda^{-1}) - 1)^2} \cdot \exp(\beta\lambda^{-1}) \cdot (-\beta\lambda^{-2}) = \\ &= \frac{\alpha\lambda^{-7}}{(\exp(\beta\lambda^{-1}) - 1)^2} \left[-5\lambda \left(\exp \frac{\beta}{\lambda} - 1 \right) + \beta \exp \frac{\beta}{\lambda} \right] c \end{aligned}$$

Остается приравнять выражения в квадратных скобках к нулю, и найти корни получившегося уравнения.

$$\begin{aligned} \beta \exp \frac{\beta}{\lambda} - 5\lambda \left(\exp \frac{\beta}{\lambda} - 1 \right) &= 0; \\ \frac{\beta}{\lambda} \exp \frac{\beta}{\lambda} - 5 \left(\exp \frac{\beta}{\lambda} - 1 \right) &= 0, \quad \text{пусть } x = \frac{\beta}{\lambda}; \\ \frac{x e^x}{e^x - 1} &= 5. \end{aligned}$$

К сожалению решение полученного уравнения не выражается в элементарных функциях. Численные методы дают ответ $x = 4.9651\dots$. Возвращаясь к исходным переменным, имеем:

$$\frac{hc}{kT\lambda} = x \approx 4.9651.$$

Выражая отсюда λ , окончательно получаем следующее:

$$\lambda \approx \frac{hc}{4.9651kT} = \frac{2.898\dots \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{K}}{T} \approx \frac{0.0029 \text{ м} \cdot \text{K}}{T}.$$

3.7 Энергия и импульс фотона

Фотон — материальная, электрически нейтральная частица, квант электромагнитного поля (переносчик электромагнитного взаимодействия). В силу корпускулярно-волнового дуализма фотон можно рассматривать либо как частицу, либо как волну. Фотон не имеет массы, однако обладает энергией

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \tag{3.23}$$

и импульсом, определяемом как

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}, \tag{3.24}$$

где коэффициент пропорциональности $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Дж · с называется *постоянной Планка*.

3.8 Эффект Доплера. Красное смещение

Эффект Доплера — эффект изменения частоты и длины волны электромагнитного излучения, регистрируемого приёмником, вызванное относительным движением источника и приёмника (см. Рис. 25).

При $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ с большой точностью выполняется следующее важное соотношение:

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \quad (3.25)$$

где λ_0 — лабораторная длина волны излучения источника, а λ — наблюдаемая. В действительности же имеет место более общий случай: *релятивистский эффект Доплера*, обусловленный проявлением СТО при $v \simeq c$, для которого формула (3.25) усложняется и принимает вид

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cdot \cos \theta}, \quad (3.26)$$

где ν — частота, с которой наблюдатель принимает волны, ν_0 — частота, с которой источник испускает волны, v — скорость источника, θ — угол между направлением на источник и вектором его скорости в системе отсчёта приёмника. Если источник радиально удаляется от наблюдателя, то $\theta = 0$, если приближается, то $\theta = \pi$. Важно, что (3.25) напрямую следует из (3.26) при $\beta \ll 1$.

Красное смещение — явление сдвига спектральных линий химических элементов в красную (длинноволновую) сторону обусловленное относительным движение объектов. Параметр красного смещения определяется из наблюдаемой и лабораторной длин волн, как

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (3.27)$$

Доплеровское смещение длины волны в спектре источника, движущегося с лучевой скоростью v_r и полной скоростью v ,

$$z = \frac{1 + v_r/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.28)$$



Рис. 25 – Эффект Доплера

Гравитационное красное смещение — проявление эффекта изменения частоты излучения испущенного массивным объектом, таким как звезда или чёрная дыра. Наблюдается как сдвиг спектральных линий в спектре источника в красную область спектра. Гравитационное красное смещение определяется из формулы, выведенной Эйнштейном,

$$z_G = \frac{GM}{c^2 R} - \frac{GM}{c^2 r}, \quad (3.29)$$

где M — масса гравитирующего тела, R — радиальное расстояние от центра масс тела до точки излучения (радиус источника), r — радиальное расстояние от центра масс источника до точки наблюдения. В случае, когда наблюдатель находится от источника много дальше его радиуса, т. е. выполняется соотношение $r \gg R$ выражение (3.29) можно упростить до

$$z_G \simeq \frac{GM}{c^2 R}. \quad (3.30)$$

3.9 Давление излучения

Давление электромагнитного излучения, падающего на поверхность тела, в отсутствии рассеяния выражается формулой

$$p = \frac{I}{c} \cdot (1 - k + A) \cdot \cos \beta, \quad (3.31)$$

здесь I — поток падающего излучения, c — скорость света, k — коэффициент пропускания, A — коэффициент отражения, а β — угол падения излучения.

Давление фотонного газа определяется соотношением

$$p_{\text{Ф.г.}} = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma T^4}{3c}, \quad (3.32)$$

где u — плотность энергии фотонного газа, T — температура фотонного газа.

Возможными областями применения являются солнечный парус, а в более отдалённом будущем — фотонный двигатель.

3.10 Предел Эддингтона

Предел Эддингтона — величина мощности электромагнитного излучения, исходящего из недр звезды, при которой его давления достаточно для компенсации веса оболочек звезды, которые окружают зону

термоядерных реакций, то есть звезда находится в состоянии равновесия: не сжимается и не расширяется.

Сила тяжести F_g , действующая со стороны тела массы M на протон, находящийся на расстоянии r от него, равна

$$F_g = \frac{GMm_p}{r^2}. \quad (3.33)$$

Поток излучения I от тела со светимостью L на расстоянии r выражается выражается, как

$$I = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (3.34)$$

Тогда сила F_r , действующая на электрон вследствие томсоновского рассеяния фотонов на электронах,

$$F_r = \frac{I\sigma_T}{c}, \quad (3.35)$$

где σ_T — томсоновское сечение рассеяния фотона на электроне, равное

$$\sigma_T = \left(\frac{8\pi}{3}\right) \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = 6.65 \times 10^{-29} \text{ м}^2. \quad (3.36)$$

Таким образом, так как $F_g = F_r$, то

$$L_{\text{ЭДД}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} = \frac{M}{M_\odot} \times 10^{31} \text{ Вт.} \quad (3.37)$$

3.11 Гравитационное линзирование

Гравитационное линзирование — эффект, связанный с искривлением пути

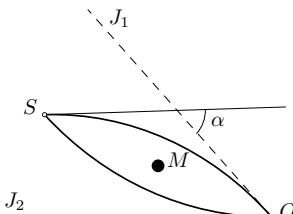


Рис. 26 — Гравитационное линзирование

распространения электромагнитного излучения гравитационным полем массивного тела или системы тел (галактик, скопления галактик, скопления тёмной материи).

На Рис. 26 показано, как происходит гравитационное линзирование: S — источник электромагнитных волн, O — наблюдатель, J_1 и J_2 — видимые положения источника, M — массивное тело массы M и радиуса R .

Для угла преломления лучей α в ходе гравитационного линзирования справедлива формула

$$\alpha = \frac{4GM}{Rc^2}. \quad (3.38)$$

3.12 Закон Хаббла

Закон Хаббла — эмпирический закон, связывающий скорость удаления галактик V и расстояние R до них линейным образом:

$$V = HR, \quad (3.39)$$

величина $H = 68 \text{ км/с} \cdot \text{Мпк}$) называется *постоянной Хаббла*.

При $v \ll c$ можно использовать приближение эффекта Доплера, тогда

$$V = cz. \quad (3.40)$$

Равенство (3.40) справедливо только при $z \ll 1$, а при больших значениях z космологическое красное смещение нельзя связывать с эффектом Доплера, поэтому можно пользоваться только формулой

$$\frac{dz}{dt} = -H(z)(1+z), \quad (3.41)$$

где постоянная Хаббла введена как функция красного смещения.

3.13 Шкала электромагнитных волн

Гамма излучение возникают при радиоактивных распадах ядер, при торможении электронов энергией более 10^5 эВ и при других взаимодействиях элементарных частиц. Используются в гамма-дефектоскопии, при изучении свойств вещества.

Рентгеновские лучи излучаются при большом ускорении электронов, например их торможение в металлах. Получают при помощи рентгеновской трубы: электроны в вакуумной трубке ускоряются электрическим полем при высоком напряжении, достигая анода, при соударении резко тормозятся. При торможении электроны движутся с ускорением и излучают электромагнитные волны с малой длиной.

Ультрафиолетовые лучи — излучение Солнца, ртутных ламп и т. п. Используются в ультрафиолетовой микроскопии, в медицине.

Видимое излучение — часть электромагнитного излучения, воспринимаемая глазом (от фиолетового до от красного).

Инфракрасное излучение — тепловое, излучается любым нагретым телом.

Радиоволны используются повсеместно в обычной жизни, это и сотовая связь, и радиолокация, и спутниковая связь, и многое другое.

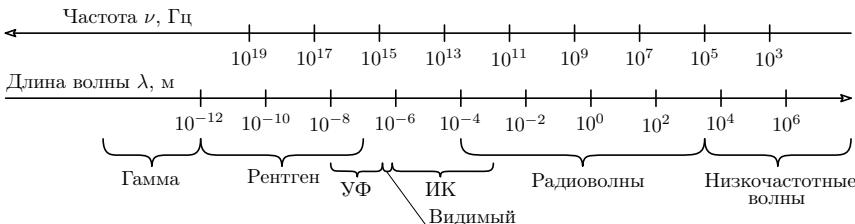


Рис. 27 – Шкала электромагнитных волн

Низкочастотные волны — диапазон, традиционно используемый в электротехнике. В промышленной электроэнергетике используется частота 50 Гц, на которой осуществляется передача электрической энергии по линиям и преобразование напряжений трансформаторными устройствами.

3.14 Специальная теория относительности. Аберрация

Обычно в СТО рассматриваются две инерциальные системы S и S' . Время и координаты некоторого события, измеренные относительно системы S , обозначаются как (t, x, y, z) , а координаты и время этого же события, измеренные относительно системы S' , как (t', x', y', z') . Удобно считать, что координатные оси систем параллельны друг другу, и система S' движется вдоль оси x системы S со скоростью v . Одной из задач СТО является поиск соотношений, связывающих (t', x', y', z') и (t, x, y, z) , которые называются *преобразованиями Лоренца*. Общий вид **преобразований Лоренца** в векторном виде, когда относительная скорость систем отсчёта имеет произвольное направление:

$$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{c^2} \right), \quad (3.42)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma \mathbf{v} t + (\gamma - 1) \cdot \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2}, \quad (3.43)$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ — Лоренц фактор, являющийся коэффициентом масштабирования; \mathbf{r} и \mathbf{r}' — радиус-векторы события относительно систем отсчёта S и S' .

Если сориентировать координатные оси по направлению относительного движения инерциальных систем и выбрать это направление в ка-

честве оси x , то преобразования Лоренца примут вид:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma (x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (3.44)$$

При скоростях много меньше скорости света ($v \ll c$) преобразования Лоренца переходят в *преобразования Галилея*:

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (3.45)$$

Аберрация — явление, состоящее в том, что движущийся наблюдатель видит светило не в том направлении, в котором он видел бы его в тот же момент, если бы находился в покое. Причём смещается светило в сторону движения наблюдателя. Происходит это из-за конечности скорости света и из-за изменения системы отсчёта для наблюдателя. Угол aberrационного смещения можно найти по следующей формуле

$$\sigma = \frac{v}{c} \sin \theta, \quad (3.46)$$

где v — скорость наблюдателя, θ — угол между направлением вектора скорости наблюдателя и направлением на объект.

3.15 Оптическая толщина

Оптическая толщина — безразмерная величина, характеризующая степень непрозрачности среды для проходящего сквозь неё излучения,

$$\tau = \int n(x)\sigma(x) dx, \quad (3.47)$$

где τ — оптическая толщина среды, n — концентрация частиц, σ — сечение их взаимодействия.

Поток I_0 на входе связан с потоком I на выходе формулой

$$I = I_0 e^{-\tau}. \quad (3.48)$$

3.16 Фотометрия. Показатель цвета

Фотометрическая система UVB — система, разработанная для классификации звезд в зависимости от их цвета. В этой системе изменяются звездные величины звезд на трех участках спектра: U (максимум чувствительности $\lambda_{\text{макс}}^U = 350$ нм), B ($\lambda_{\text{макс}}^B = 430$ нм) и V

$(\lambda_{\text{макс}}^V = 550 \text{ нм})$. Для звёзд спектрального класса A0V все три значения равны, поэтому такие звёзды являются фотометрическим стандартом. Одним из таких стандартов является яркая звезда северного неба Вега.

Показатель цвета $(B - V)$ — разница блеска объекта в фильтрах B и V , измеряется в звёздных величинах. Существует эмпирическая зависимость, связывающая показатель цвета $(B - V)$ и температуру объекта,

$$T = 4600 \cdot \left(\frac{1}{0.92(B - V) + 1.7} + \frac{1}{0.92(B - V) + 0.62} \right). \quad (3.49)$$

Избыток цвета $E(B - V)$ — разность между наблюдаемым показателем цвета звезды и нормальным, свойственным ее спектральному классу.

$$E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0 = (B - B_0) - (V - V_0) = A_B - A_V, \quad (3.50)$$

величины A_B и A_V — поглощения на голубом и видимом участках спектра.

Межзвёздное поглощение — суммарный эффект рассеяния и истинного поглощения света пылевыми частицами в межзвёздной среде. Известно соотношение, связывающее межзвёздное поглощение с избытком цвета,

$$\frac{A_V}{E(B - V)} = R \approx 3.1. \quad (3.51)$$

3.17 МКТ и термодинамика

Молекулярно-кинетическая теория изучает процессы, происходящие в макроскопических телах, на основе предположения о том, что вещество состоит из частиц, движение которых подчиняется законам механики Ньютона.

Уравнение Менделеева-Клайперона является следствием этой теории и связывает давление (P), объем (V) и температуру (T) идеального газа:

$$PV = \nu RT, \quad (3.52)$$

здесь $R = 8.31 \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$ — универсальная газовая постоянная, а ν — количество вещества идеального газа. Иначе, можно

записать

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu} RT, \quad (3.53)$$

где n — концентрация, k — постоянная Больцмана, ρ — плотность газа, μ — молярная масса.

Частицы газа имеют равномерное распределение в предоставленном пространстве и распределение Максвелла по энергиям, то есть вероятность, что частица обладает энергией E равна

$$f_E(E) = \frac{2\pi\sqrt{E}}{\sqrt{(\pi kT)^3}} \exp\left(\frac{-E}{kT}\right). \quad (3.54)$$

После некоторых математических преобразований несложно получить выражение для средней энергии $\langle E \rangle$ частиц идеального газа:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT, \quad (3.55)$$

следовательно, **среднеквадратичная скорость** определяется, как

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}. \quad (3.56)$$

Однако, исходя из распределения (3.54), *наиболее вероятная скорость* частиц

$$v_{\text{н.в.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (3.57)$$

Первое начало термодинамики гласит:

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (3.58)$$

где δQ — подведенная теплота, dU — изменение внутренней энергии газа, δA — работа газа.

Внутренняя энергия газа определяется соотношением

$$U = \frac{i}{2}RT, \quad (3.59)$$

здесь i — количество степеней свободы частиц газа.

Теплоёмкость идеального газа — отношение количества теплоты, сообщённого газу ΔQ , к изменению температуры ΔT , которое при этом произошло, в расчёте на один моль:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \quad (3.60)$$

Изотермический процесс — при котором температура газа не изменяется:

$$PV = \text{const}, \quad C_T = +\infty, \quad (3.61)$$

индекс теплоёмкости соответствует величине, постоянной в течение процесса.

Изохорический процесс — когда объём, занимаемый газом, не изменяется:

$$\frac{P}{T} = \text{const}, \quad C_V = \frac{i}{2}R. \quad (3.62)$$

Изобарический процесс — тот, при котором давление газа не изменяется:

$$\frac{V}{T} = \text{const}, \quad C_P = \frac{i+2}{2}R = C_V + R. \quad (3.63)$$

Адиабатический процесс — процесс, в котором количество подведенной теплоты δQ равно нулю:

$$PV^\alpha = \text{const}, \quad C_Q = 0, \quad (3.64)$$

где $\alpha = C_P/C_V$ — показатель адиабаты.

4 Оптика

4.1 Телескоп

Телескоп — устройство для наблюдения удаленных объектов. На данный момент существуют телескопы, для наблюдения во всех диапазонах электромагнитного излучения. По наблюдаемому диапазону телескопы делят на *оптические телескопы, радиотелескопы, рентгеновские телескопы и гамма-телескопы*. Каждый из классов в свою очередь содержит множество подклассов. Поговорим подробнее про оптические телескопы.

Оптические телескопы по своей схеме делятся на три типа: *рефлекторы* (диоптрические), *рефракторы* (катаоптрические) и *катадиоптрические*.

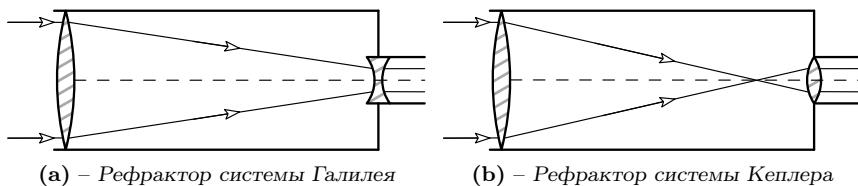


Рис. 28 – Оптические схемы телескопов рефракторов

Рефрактор (линзовый телескоп) — оптический телескоп, в котором для собирания света используется система линз.

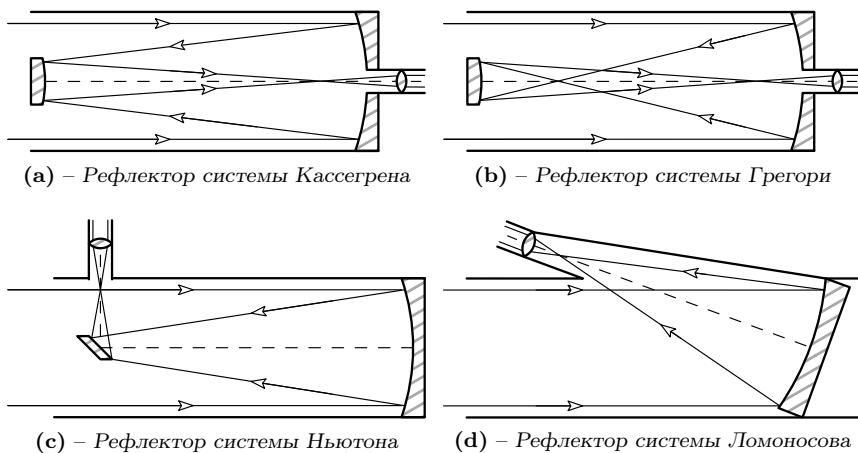


Рис. 29 – Оптические схемы телескопов рефлекторов

Рефлектор (зеркальный телескоп) — оптический телескоп, светособирающий элемент — зеркало.

Катадиоптрический (зеркально-линзовый) **телескоп** — оптический телескоп, в котором используется как система линз, так и зеркал.

4.2 Монтировки телескопов

Монтировки телескопов разделяют на два основных вида: **экваториальная** и **альтазимутальная** монтировка (см. Рис. 30).

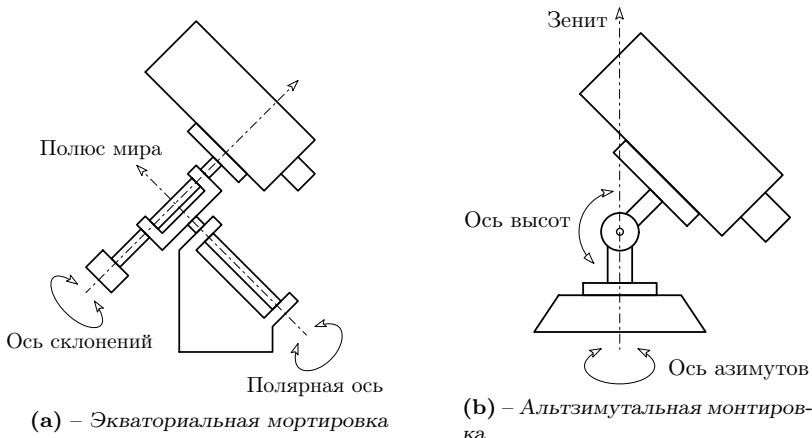


Рис. 30 – Виды монтировок

Экваториальная монтировка — монтировка, одна ось которой направлена на полюс мира (полярная ось), а другая параллельна небесному экватору (ось склонения). Для гидирования на такой монтировке, нужно лишь поворачивать её с постоянной угловой скоростью вокруг полярной оси в направлении роста часового угла. Важно отметить, существует несколько разновидностей экваториальных монтировок: *немецкая, английская, американская* монтировки и монтировка *с рамой*.

Альтазимутальная монтировка — монтировка телескопа, имеющая вертикальную и горизонтальную оси вращения, позволяющие поворачивать телескоп по высоте и азимуту. Для слежения за космическими объектами, перемещающимися по небесной сфере вследствие суточного вращения Земли, телескоп нужно поворачивать одновременно вокруг обеих осей с разными переменными скоростями.

4.3 Параметры телескопа

Из геометрической оптики известно, что лучи, проходящие через оптический центр линзы, не преломляются. Отсюда следует важное соотношение для линейного размера l изображения объекта с угловым размером ρ в фокальной плоскости:

$$l = \rho F, \quad (4.1)$$

здесь F — фокусное расстояние используемого телескопа. Так как при помощи окуляра наблюдатель фактически смотрит на фокальную плоскость с расстояния f — фокусного расстояния окуляра, то угловой размер изображения, которое видит наблюдатель равно

$$\alpha = \frac{l}{f}. \quad (4.2)$$

Следовательно, **увеличение телескопа** Γ — наблюдаемого и реального угловых размеров объекта равно отношению фокусных расстояний телескопа и окуляра. Из подобных треугольников также следует, что

$$\Gamma = \frac{F}{f} = \frac{D}{d}, \quad (4.3)$$

где D — диаметр входного зрачка (телескопа), d — диаметр выходного зрачка (окуляра). Важно отметить, что диаметры выходного и входного зрачка — диаметры пучков света, а не самих линз.

Увеличение называется *равнозрачковым*, если диаметр выходного зрачка равен диаметру глазного зрачка наблюдателя, то есть

$$\Gamma_{\text{р.з.}} = \frac{D}{d_{\text{г}}}, \quad (4.4)$$

где $d_{\text{г}}$ — диаметр человеческого зрачка, обычно в тёмное время суток принимается за 6 мм.

Однако при росте увеличения детальность наблюдаемого изображения не улучшается. Происходит это в силу волновой природы света и, как следствие, явления *дифракции* на входном отверстии телескопа. Наименьший угловой размер ещё различимых деталей определяется **разрешающей способностью** телескопа — это наименьшее угловое расстояние между двумя точечными объектами, при котором в телескоп ещё можно различить их раздельно. Предельное разрешение телескопа определяется формулой

$$\beta = \frac{1.22\lambda}{D}, \quad (4.5)$$

где λ — длина волны наблюдений, при визуальных наблюдениях $\lambda \approx 550$ нм.

Кроме того, чем больше увеличение, тем меньше **поле зрения** — множество направлений, доступных для наблюдения. Из соотношений (4.2) и (4.3) следует зависимость *поле зрения телескопа* α_t от *поля зрения окуляра* $\alpha_{\text{ок}}$:

$$\alpha_t = \frac{\alpha_{\text{ок}}}{\Gamma}, \quad (4.6)$$

поле зрения стандартного окуляра составляет 45° .

Также, поле зрения телескопа можно вычислить, зная время прохождения звезды через его центр τ и её склонение δ :

$$\alpha_t = \frac{\tau \cos \delta}{4}. \quad (4.7)$$

Масштаб — отношение углового размера объекта к линейному размеру его изображения на фокальной плоскости, следовательно

$$\mu = \frac{\rho}{l} = \frac{\rho}{\rho F} = \frac{1}{F} = \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]. \quad (4.8)$$

Относительное отверстие — геометрический параметр телескопа, равный отношению диаметра телескопа к его фокусному расстоянию

$$\forall = \frac{D}{F}. \quad (4.9)$$

Светосила — отношение освещенностей входного отверстия и фокальной плоскости, равна квадрату относительного отверстия.

$$A = \forall^2 = \frac{D^2}{F^2}. \quad (4.10)$$

Пожалуй, самой важной характеристикой телескопа является то, насколько слабые объекты можно зафиксировать с его помощью. Эта величина называется **проницающей способностью телескопа** — это предельная звёздная величина объектов, которые доступны для наблюдения в данный телескоп. Чаще всего проницающая способность определяется из формулы Погсона (3.1) в ходе сравнения телескопа с глазом ($m_g \simeq 6^m$), здесь нужно учесть:

1. Отношение площадей собирающих поверхностей.

2. Диаметр выходного пучка может быть больше размера приёмника, тогда часть света теряется.
3. Отношение времён экспозиций (выдержка глаза составляет около 0.3 сек).
4. Отношение квантовых эффективностей⁴.
5. Прочие эффекты, возникающие в ходе фотографических наблюдений.

При учёте только первых двух пунктов проникающая способность равна

$$m_t = m_r + 5 \lg \frac{D}{d_r} - 5 \lg \max \left\{ \frac{d}{d_r}, 1 \right\}. \quad (4.11)$$

5 Сферическая астрономия

5.1 Системы небесных координат

Каждая из систем небесных координат является сферической системой координат, в которой радиус не имеет значения, так как параллакс не учитывается, а объекты считаются бесконечно удалёнными от наблюдателя.

Горизонтальная система координат — система координат, в которой основной плоскостью является плоскость математического горизонта, а полюсами — **зенит** и **надир** — точки небесной сферы, расположенные ровно над наблюдателем и под ним соответственно. Одной координатой является либо **высота** светила h — угловое расстояние между светилом и математическим горизонтом, отсчитываемое в сторону зенита, либо его **зенитное расстояние** z — угловое расстояние между зенитом и светилом. Другой координатой является **астрономический азимут** A — угол SZS_* , отсчитываемый в сторону запада. Половина большого круга, перпендикулярного горизонту, — ZS_*Z' называется **вертикалом** объекта.

Первая экваториальная система координат — система координат, основной плоскостью которой является плоскость небесного экватора $QEQW'$. Одной координатой при этом является **склонение** δ — угловое расстояние между светилом и плоскостью небесного экватора,

⁴**Квантовая эффективность** — отношение мощности регистрируемого излучения к мощности подающего для единицы площади приемника.

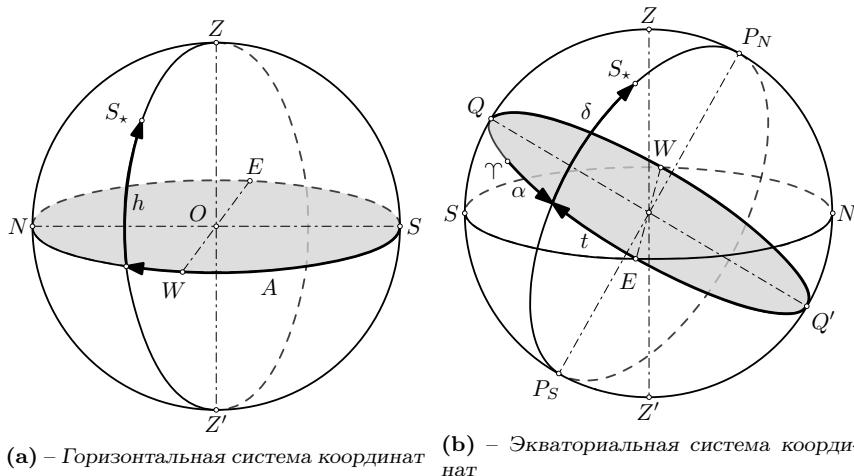
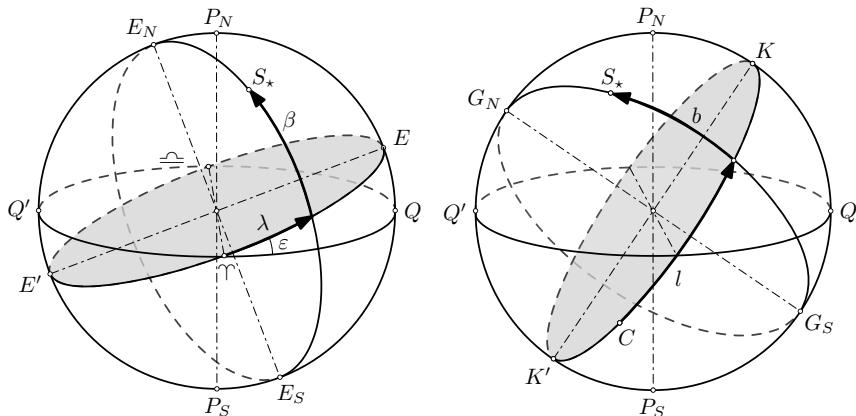


Рис. 31 – Системы координат I

отсчитываемое в сторону севера. Половина большого круга, вдоль которой отсчитывается склонение, перпендикулярна небесному экватору и называется **кругом склонений** или **кругом равных часовых углов (прямых восхождений)**. Наряду со склонением используется **полярное расстояние** r — угловое расстояние между светилом и полюсом мира. Другой координатой является **часовой угол** t — дуга небесного экватора от верхней точки небесного экватора до круга склонения светила в сторону запада, или угол между небесным меридианом и кругом склонения светила. Υ и Σ — точки весеннего и осеннего равноденствия соответственно.

Вторая экваториальная система координат — система, аналогичная предыдущей. Одной координатой по прежнему является **склонение** δ . А другой координатой является **прямое восхождение** α — угловое расстояние между точкой весеннего равноденствия и кругом склонений светила в сторону годичного движения Солнца.

Эклиптическая система координат — система координат, основной плоскостью которой является плоскость эклиптики $E\Sigma E'\Upsilon$. Одной координатой при этом является **эклиптическая широта** β — угловое расстояние между светилом и плоскостью эклиптики, отсчитываемое в сторону северного полюса мира, а другой — **эклиптическая долгота** λ — угловое расстояние между точкой весеннего равноденствия и



(а) – Эклиптическая система координат (б) – Галактическая система координат

Рис. 32 – Системы координат II

кругом эклиптической широты светила. Полюса эклиптики E_N и E_S имеют координаты $(18^h, 90^\circ - \varepsilon)$ и $(6^h, -90^\circ + \varepsilon)$.

Галактическая система координат — система координат, основной плоскостью которой является плоскость нашей галактики, которая наклонена к плоскости небесного экватора под углом 62.6° . Одной координатой при этом является **галактическая широта** b — угол между плоскостью галактического экватора и направлением на светило, а другой — **галактическая долгота** l — угол между направлением на точку начала отсчёта C и плоскостью круга галактической широты светила. Точка C является направлением на центр галактики и имеет координаты: $\alpha = 17^h 45.6^m$, $\delta = -28^\circ 56.2'$. CKK' — плоскость галактического экватора; G_N , G_S — северный и южный полюса галактики соответственно.

5.2 Суточное вращение небесной сферы

Вследствие вращения Земли вокруг своей оси для наблюдателя на поверхности небесные объекты совершают суточное движение параллельно небесному экватору, плоскость которого совпадает с плоскостью экватора Земли. Очевидно, в ходе такого движения высота светил постоянно меняется и в некоторые моменты времени достигает своего максимального и минимального значения.

Верхняя и нижняя кульминация — моменты пересечения светилом небесного меридиана, причём при верхней кульминации светило имеет наибольшую высоту, а при нижней — наименьшую.

Высота светила в верхней и нижней кульминации со склонением $|\delta| < |\varphi|$, соответственно:

$$h_{\text{в}} = 90^\circ - \varphi + \delta, \quad h_{\text{н}} = -90^\circ + \varphi + \delta. \quad (5.1)$$

Если же светило имеет склонение $|\delta| > |\varphi|$, то высота в верхней и нижней кульминации вычисляется так:

$$h_{\text{в}} = 90^\circ + \varphi - \delta, \quad h_{\text{н}} = -90^\circ - \varphi - \delta. \quad (5.2)$$

Из формул для высоты в нижней кульминации вытекает условие, определяющее, пересекает ли звезда горизонт:

$$\begin{cases} h_{\text{в}} = +90^\circ - |\varphi + \delta| > 0^\circ, \\ h_{\text{н}} = -90^\circ + |\varphi + \delta| < 0^\circ; \end{cases} \iff |\delta| < 90^\circ - |\varphi|. \quad (5.3)$$

Используя формулы сферической тригонометрии (см. 5.3), можно выразить зависимость часового угла светила от его зенитного расстояния:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}. \quad (5.4)$$

Отсюда следует, что для часового угла захода и восхода светила справедливо равенство:

$$\cos t_{\uparrow\downarrow} = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta. \quad (5.5)$$

Аналогично, для вычисления азимута светила верна формула

$$\cos A = \frac{\cos \delta \cos t - \cos \varphi \cos z}{\sin \varphi \sin z}. \quad (5.6)$$

Следовательно, азимуты точек восхода и захода

$$A_{\uparrow} = \arccos \left(-\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \right) \quad \text{и} \quad A_{\downarrow} = -A_{\uparrow}. \quad (5.7)$$

Звёздное время z — часовой угол точки весеннего равноденствия. Из определений прямого восхождения и часового угла следует справедливость равенства

$$z = \alpha + t. \quad (5.8)$$

5.3 Сфериическая тригонометрия

Для решения некоторых задач астрономии, связанных с видимыми положениями небесных тел, требуются знания о сферической тригонометрии. *Сферический треугольник* — фигура на поверхности сферы, состоящая из трёх точек и трёх дуг больших кругов, соединяющих эти точки. Пусть A , B и C — углы сферического треугольника, а a , b и c — его стороны.

Сферические треугольники обладают следующими свойствами:

1. Два сферических треугольника равны, если они подобны.
2. Каждая сторона меньше суммы двух других сторон и больше их разности.
3. Сумма всех сторон $a + b + c$ всегда меньше 2π .
4. Сумма углов сферического треугольника $\pi < A + B + C < 3\pi$.
5. Разность суммы двух углов и третьего угла меньше π

Площадь сферического треугольника определяется по формуле:

$$S = R^2(A + B + C - \pi), \quad (5.9)$$

где $A + B + C - \pi$ — *сферический избыток*.

Рассмотрим сферический треугольник ABC , радиус векторы вершин соответственно \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} . причем из определения сферы $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = r$. Пусть против вершин A , B и C лежат стороны с угловой мерой a , b и c соответственно. Повернем сферические координаты и нормируем так, чтобы $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (\sin c, 0, \cos c)$, тогда $\mathbf{c} = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$.

Теперь запишем выражение для $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$:

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b. \quad (5.10)$$

Аналогично,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \cos b = \sin a \sin c \cos B + \cos a \cos c, \quad (5.11)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \cos c = \sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b. \quad (5.12)$$

Выразим отсюда $\cos A$:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b}. \quad (5.13)$$

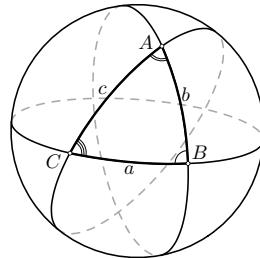


Рис. 33 – Сферический треугольник

Формулы (5.10) – (5.13) называются **сферической теоремой косинусов для стороны** (5.10) – (5.12) и, соответственно **для угла** (5.13).

Из основного тригонометрического тождества имеем:

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1 - \cos^2 A = 1 - \left[\frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b} \right]^2 = \\ &= \frac{\sin^2 c \sin^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos c \cos b - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b} = \\ &= \frac{(1 - \cos^2 c)(1 - \cos^2 b) - \cos^2 a + 2 \cos a \cos c \cos b - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b + \cos^2 c \cos^2 b - \cos^2 a}{\sin^2 c \sin^2 b} + \\ &\quad + \frac{2 \cos a \cos c \cos b - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos c \cos b}{\sin^2 c \sin^2 b}. \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из левой и правой части и деля их на $\sin a$ имеем

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos c \cos b}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Заметим, что правая часть равенства циклична по переменным a , b и c , следовательно, **сферическая теорема синусов** имеет вид

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \quad (5.14)$$

Напоследок получим **формулу пяти элементов**. Для этого запишем теорему косинусов в выражим в ней один из косинусов, применяя ее же:

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b, \\ \cos a &= \sin c \sin b \cos A + (\sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b) \cos b, \\ \cos a - \cos a \cos^2 b &= \sin c \sin b \cos A + \sin a \sin b \cos b \cos C, \\ \cos a \sin^2 b &= \sin c \sin b \cos A + \sin a \sin b \cos b \cos C, \\ \cos a \sin b &= \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Параллактический треугольник — треугольник на небесной сфере, образованный пересечением небесного меридиана, вертикального круга и часового круга светила. *Вертикальный круг* — большой круг

небесной сферы, проходящий через nadir, zenith и светило. Часовой круг — большой круг небесной сферы, проходящий через полюса мира и наблюдаемое светило.

Применяя теоремы синусов и косинусов к параллактическому треугольнику, нетрудно получить следующие соотношения:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (5.16)$$

$$\sin z \sin A = \cos \delta \sin t \quad (5.17)$$

$$\sin z \cos A = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t \quad (5.18)$$

5.4 Солнечное время. Уравнение времени

Истинные солнечные сутки — промежуток времени между двумя последовательными одноимёнными кульминациями Солнца.

Истинное солнечное время — промежуток времени между нижней кульминацией Солнца и его текущим положением. Рассчитывается по формуле

$$T_{\text{ист}} = t_{\text{солн}} + 12^h, \quad (5.19)$$

где $t_{\text{солн}}$ — часовой угол Солнца.

Среднее солнечное время ($T_{\text{ср}}$) — промежуток времени между нижней кульминацией *среднего Солнца* и текущим его положением. **Среднее Солнце**

точка небесной сферы, которая равномерно движется по небесному экватору, совершая полный оборот за тропический год. Зная долготу наблюдателя, нетрудно вычислить среднее солнечное время:

$$T_{\text{ср}} = \text{UTC} + \frac{\lambda}{15^\circ/\text{час}},$$

где UTC — *всемирное время* — среднее (или, что тоже самое, истинное) солнечное время на Гринвиче (меридиан с долготой $\lambda = 0^\circ$).

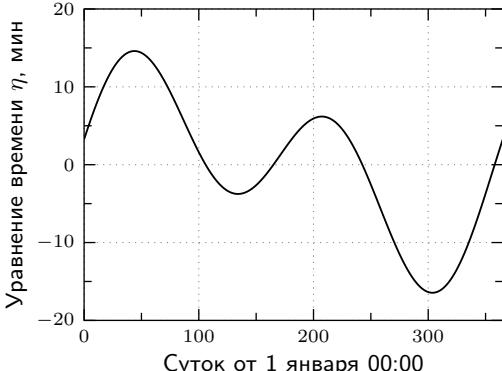


Рис. 34 – График уравнения времени

Поясное или гражданское время — среднее солнечное время на срединном меридиане географического часового пояса. В России также установлено декретное время, которое на 1 час больше поясного.

Уравнение времени — разница между истинным солнечным временем и средним солнечным временем, возникающая по причине неравномерности движения Земли по орбите и наклона земного экватора к плоскости эклиптики (см. Рис. 34). Пусть $B \equiv 2\pi(x - 81)/T_{\oplus}$, где x — количество суток, прошедшее с 1 января 00:00, тогда

$$\eta = T_{\text{ист}} - T_{\text{cp}} = 7.53 \cos B + 1.5 \sin B - 9.87 \sin 2B. \quad (5.20)$$

5.5 Годичное движение Солнца

В течение сидерического года Земля совершает полный оборот вокруг Солнца. Вследствие этого Солнце движется относительно далёких звёзд для наблюдателя на Земле. Это движение совершается по большому кругу небесной сферы, называемому **эклиптикой** и совпадающему с плоскостью орбиты Земли. Однако, в силу прецессии земной оси с периодом около 25765 лет, период такого движения равен *тропическому году*, который длиннее сидерического года примерно на 20 мин 25 сек.

В моменты, когда Солнце находится в *точке весеннего равноденствия* (20 марта, реже 21) его координаты: $\alpha = 0^h$, $\delta = 0^\circ$. Во время прохождения этой точки обе координаты Солнца растут. Так происходит до момента, пока Солнце не пройдет *точку летнего солнцестояния* (21 июня, реже 20), после этого склонение Солнца начинает уменьшаться. В момент прохождения *точки осеннего равноденствия* (22 или 23 сентября), координаты Солнца составляют $\alpha = 12^h$, $\delta = 0^\circ$. После прохождения *точки зимнего солнцестояния* (22 или 21 декабря) склонение Солнца начинает увеличиваться.

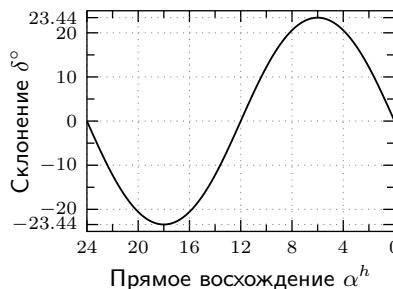


Рис. 35 — График зависимости склонения Солнца от его прямого восхождения

Пренебрегая сферическими искажениями, годичный путь Солнца по небесной сфере можно считать синусоидой, откуда

$$\delta = \varepsilon \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad (5.21)$$

где t — время, прошедшее с момента весеннего равноденствия, T — тропический год.

Более точная формула следует из сферической тригонометрии и имеет вид

$$\delta = \arcsin \left(\sin \varepsilon \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} \right). \quad (5.22)$$

Известно, что движение Солнца по эклиптике происходит неравномерно, поэтому данные формулы не являются абсолютно точными.

Прямое восхождение Солнца связано со склонением формулой

$$\sin \alpha = \frac{\tan \delta}{\tan \varepsilon}. \quad (5.23)$$

Выражения (5.22) и (5.23) следуют из формул перехода между экваториальной и эклиптической системами координат, получаемых из сферической тригонометрии.

5.6 Рефракция

Рефракция — явление преломления световых лучей, приходящих от небесных светил, в атмосфере планеты. Для наблюдателя на поверхности планеты с атмосферой положение светила будет отличаться от истинного на некоторый угол. Средняя величина рефракции у горизонта для земной атмосферы равна $35'$.

Для зенитного расстояния $z < 70^\circ$ величины рефракции можно определить по формуле

$$\rho = 60.25'' \cdot \tan z' \cdot \frac{p}{760} \frac{273^\circ}{273^\circ + t^\circ}, \quad (5.24)$$

где t° — температура воздуха в $^\circ\text{C}$, p — атмосферное давление в мм рт. ст., z' — видимое зенитное расстояние. При н. у.: $p = 760$ мм рт. ст. и $t = 0^\circ\text{C}$, формула (5.24) принимает вид

$$\rho = 60.25'' \cdot \tan z'. \quad (5.25)$$

5.7 Сумерки

Сумерки — часть суток, когда Солнце находится неглубоко под горизонтом. В зависимости от высоты Солнца под горизонтом различают *гражданские, навигационные и астрономические сумерки*:

1. Гражданские — от 0° до -6°
2. Навигационные — от -6° до -12°
3. Астрономические — от -12° до -18°

Когда Солнце опускается ниже -18° , наступает ночь.

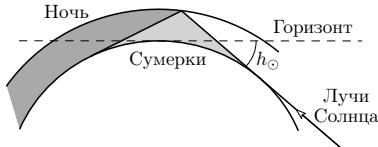


Рис. 36 – Сумерки

6 Объекты космоса

6.1 Солнце

Солнце — центральное тело Солнечной системы, в нём сосредоточено 99,866% всей массы. Водород составляет 73% общей массы Солнца, гелий — 25%. Остальные элементы: кислород, углерод, азот, магний, кремний, железо, сера, алюминий, натрий, кальций, никель и другие дают вклад всего 2%.

По спектральной классификации Солнце — звезда типа G2V (жёлтый карлик на главной последовательности). Температура поверхности Солнца составляет 5778 К, поэтому Солнце светит почти в белом свете, но прямой свет Солнца у поверхности Земли приобретает жёлтый оттенок из-за рассеяния и поглощения коротковолновой части спектра в атмосфере.

Солнце вырабатывает энергию путём термоядерного синтеза. Каждую секунду в ядре около 4 млн. тонн вещества превращается в лучистую энергию.

Строение Солнца. В центре Солнца находится ядро с радиусом 150 – 180 тыс. км, где идут термоядерные реакции. Плотность ядра около 1.5×10^5 кг/м³, а температура в его центре достигает 1.5×10^7 К.

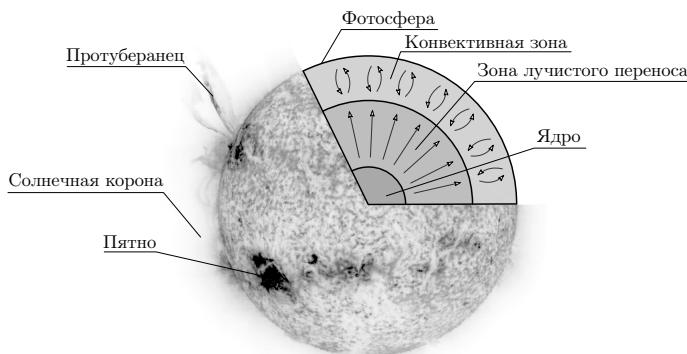


Рис. 37 – Строение Солнца. Фотография со спутника SOHO в фильтре H_{α} (негатив)

Над ядром, на расстояниях примерно от $0.25R_{\odot}$ до $0.7R_{\odot}$ от его центра, находится зона лучистого переноса. В этой зоне перенос энергии происходит главным образом с помощью излучения и поглощения фо-

тонов. Температура в этой зоне лежит в интервале от 2×10^6 К сверху до 7×10^6 К снизу.

Над зоной лучистого переноса (радиоактивная зона) находится *конвективная зона*. Это слой толщиной примерно 2×10^5 км, в котором перенос энергии к поверхности совершается движением самого вещества. При приближении к поверхности конвективной зоны температура падает до 5800 К.

Фотосфера — видимая поверхность Солнца, по которой определяется размер Солнца. Эффективная температура фотосферы $T_{\odot} = 5778$ К.

Хромосфера — внешняя оболочка Солнца толщиной около 2000 км, окружающая фотосферу. Из хромосферы происходят горячие выбросы вещества — *спики*. Температура хромосферы увеличивается с высотой до 2×10^4 К.

Солнечная корона — последний внешний слой Солнца, который состоит из протуберанцев и энергетических извержений, образующих солнечный ветер. Средняя температура короны 2×10^6 К, а в некоторых частях достигает и 20×10^6 К. Столь высокая температура обусловлена процессами, происходящими в магнитном поле звезды. Однако, несмотря на столь высокую температуру, корона видна лишь во время солнечных затмений, так как плотность её очень мала.

Вращение Солнца происходит не твердоцельно — угловая скорость на разных широтах отличается, при удалении от экватора она уменьшается. Период вращения Солнца на разных широтах можно найти, наблюдая за солнечными пятнами и другими образованиями в фотосфере звезды. На экваторе период вращения составляет 25.05 суток, к полюсу он увеличивается до 34 суток. По наблюдениям за пятнами в течение длительного периода при помощи метода наименьших квадратов можно найти зависимость углового перемещения пятна за сутки от гелиографической широты:

$$\Delta\lambda = 14.37^\circ - 2.7^\circ \sin^2 \varphi, \quad (6.1)$$

где $\Delta\lambda$ — угловое перемещение пятна, φ — гелиографическая широта. Данная зависимость верна только для широт $\varphi < 40^\circ$.

6.2 Спектральные классы звёзд

Звёзды в зависимости от своего цвета делятся на *спектральные классы*, основные из них представлены в Таблице 1. Масса, радиус и све-

Класс	T, K	Цвет	M, M _⊙	R, R _⊙	L, L _⊙
O	$3 \times 10^4 - 6 \times 10^4$	Голубой	60	15	1.4×10^6
B	$1 \times 10^4 - 3 \times 10^4$	Бело-голубой	18	7	2×10^4
A	$7.5 \times 10^3 - 1 \times 10^4$	Белый	3.1	2.1	80
F	$6 \times 10^3 - 7.5 \times 10^3$	Жёлто-белый	1.7	1.3	6
G	$5 \times 10^3 - 6 \times 10^3$	Жёлтый	1.1	1.1	1.2
K	$3.5 \times 10^3 - 5 \times 10^3$	Оранжевый	0.8	0.9	0.4
M	$2 \times 10^3 - 3.5 \times 10^3$	Красный	0.3	0.4	0.04

Таблица 1 – Современная спектральная классификация звёзд

тимость приведены средних представителей спектрального класса, лежащих на главной последовательности (V).

Запись спектрального класса представляет собой латинскую букву, арабское число и римское число, например, спектральный класс Солнца – G2V. арабское число показывает к какой именно части спектрального класса относится звезда: к более синей (число меньше) или к красной (число больше). Так, G10V – это тоже самое, что K0V. Спектральный класс (показатель цвета) и абсолютная звёздная величина задают положение звезды на *Диаграмме Герцшпрunga-Рассела*.

Диаграмма Герцшпрunga-Рассела показывает зависимость светимости или абсолютной звёздной величины от спектрального класса, показателя цвета ($B - V$) или эффективной температуры фотосферы звезды.

Была предложена примерно в 1910 году независимо Эйнаром Герцшпрунгом и Генри Расселом. Диаграмма используется для классификации звёзд и соответствует современным представлениям о звёздной эволюции.

Около 90% звёзд находятся на главной последовательности. Их светимость обусловлена термоядерными реакциями превращения водорода в гелий. Выделяется также несколько ветвей проэволюционировавших звёзд-гигантов, в которых происходит горение гелия и более тяжёлых элементов. В левой нижней части диаграммы находятся полностью проэволюционировавшие белые карлики.

Мнемонические правила для запоминания спектральных классов: «Oh Be A Fine Girl, Kiss Me Right Now Sweetheart.» и «Вообразите: Один Бритый Англичанин Финики Жевал Как Морковь – Разве Не Смешно?»

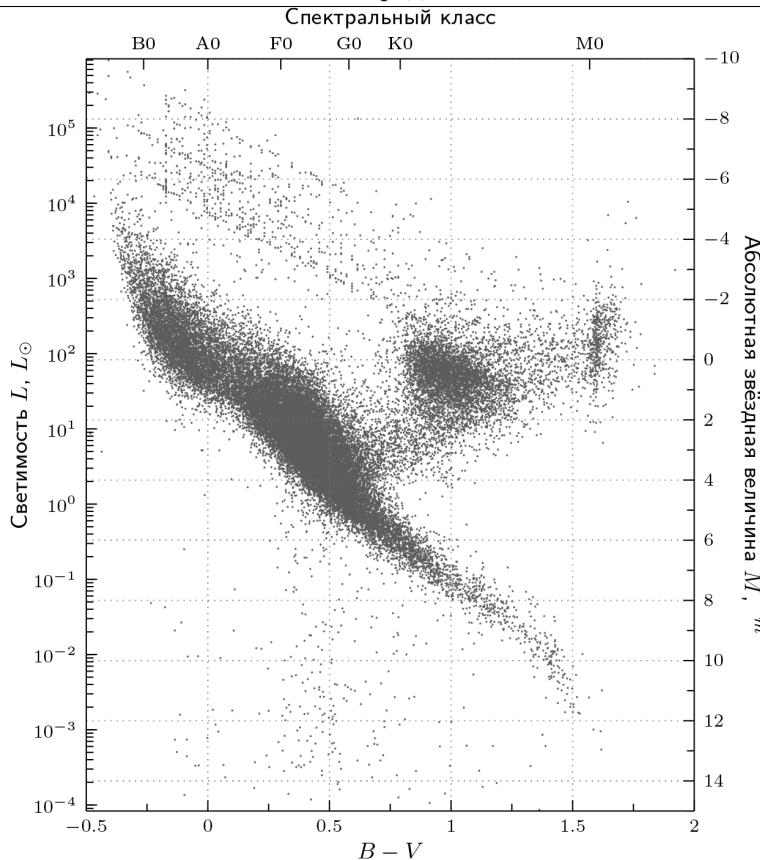


Рис. 38 – Диаграмма Герцспрунга–Рассела

Помимо основных спектральных классов звёзд существуют дополнительные: W – звёзды Вольфа-Райе, очень тяжёлые яркие звёзды с температурой порядка 70000 К и интенсивными эмиссионными линиями спектра; L – звёзды или коричневые карлики с температурой 1500–2000 К и соединениями металлов в атмосфере; T – метановые коричневые карлики с температурой 700 – 1500 K; Y – очень холодные (метано-аммиачные) коричневые карлики с температурой ниже 700 K; C – углеродные звёзды, гиганты с повышенным содержанием углерода. Ранее относились к классам R и N.

6.3 Переменные звёзды

Переменные звёзды — звёзды, у которых наблюдаются колебания блеска. Для отнесения звезды к разряду переменных достаточно, чтобы блеск звезды хотя бы однажды претерпел изменение.

Переменные звёзды делятся на две большие группы: *затменные* и *физические*, причём физические подразделяются на *пульсирующие* и *эруптивные*.

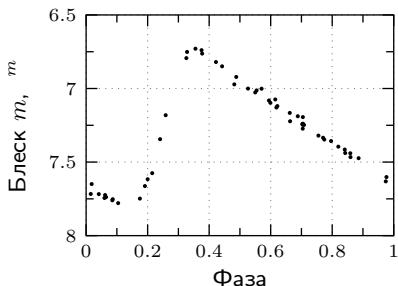


Рис. 39 – Кривая блеска переменной типа δ Серпентинуса. Периодичность изменения блеска определяется физическими процессами в звезде.

К **пульсирующим** переменным относят те звёзды, переменность которых вызвана процессами, происходящими в их недрах. Эти процессы приводят к периодическому изменению температуры поверхности и радиуса фотосфера, а вместе с ними и блеска звезды. Период переменности варьируется в пределе от долей суток до нескольких лет в зависимости от типа переменной.

Классический пример пульсирующих переменных звёзд — *цефеиды*, названные в честь первой открытой переменной данного типа — δ Серпентинуса. Абсолютную звёздную величину M и период T (в сутках) цефеид связывает соотношение

$$M = -1.43^m - 2.81 \lg T. \quad (6.2)$$

К **эруптивным** переменным звёздам относятся звёзды, меняющие свой блеск нерегулярно или единожды за время наблюдений. Все изменения блеска эруптивных звёзд связывают с бурными процессами и вспышками в их хромосферах и коронах. К таким, например, относятся *новые* и *сверхновые*.

Затменно-переменные звёзды — системы из двух звёзд, суммарный блеск которых периодически изменяется с течением времени. Причиной изменения блеска могут быть затмения звёзд друг другом, или изменение их формы взаимной гравитацией в тесных системах. На Рис. 40–42 представлены кривые блеска затменно-переменных звёзд трёх основных типов.

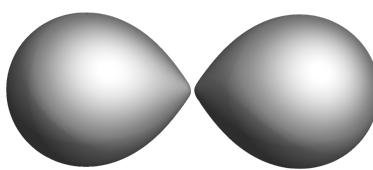
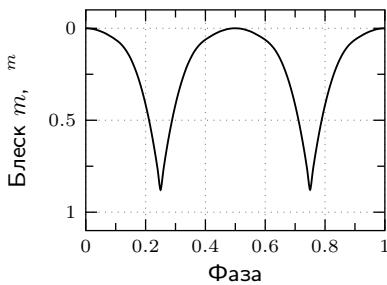


Рис. 40 – Кривая блеска переменной типа W UMa

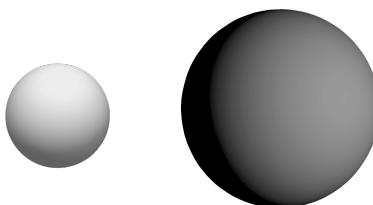
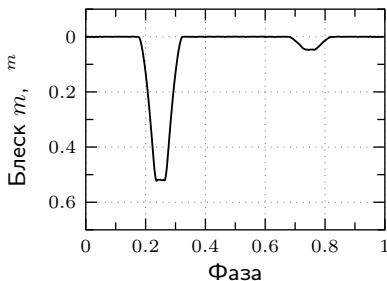


Рис. 41 – Кривая блеска переменной типа β Per

6.4 Вырожденные звёзды

Вырожденные звёзды — звёзды, в которых силам гравитации противостоят силы давление вырожденного газа. К таким относятся *белые карлики* и *нейтронные звёзды*.

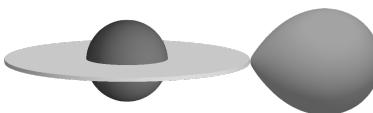
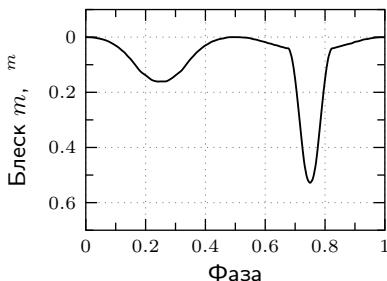


Рис. 42 – Кривая блеска переменной типа β Lyr

Белые карлики — проэволюционировавшие звёзды лишённые собственных источников термоядерной энергии и светящие за счёт остывания. Масса белого карлика находится в диапазоне от $0.6M_{\odot}$ до $1.44M_{\odot}$. Верхняя границы массы белого карлика называется пределом Чанд-

расекара, звезда с массой больше данного предела не может существовать как белый карлик. Радиус белых карликов примерно в 10^2 раз меньше солнечного, т.е. можно считать, что $R_{\text{БК}} \simeq R_{\oplus}$. Плотность белых карликов лежит в диапазоне $10^7 - 10^{10}$ кг/м³.

Нейтронная звезда — сверхплотная звезда, образующаяся в результате взрыва Сверхновой. Вещество нейтронной звезды состоит в основном из нейтронов. Масса нейтронной звезды лежит в пределах от $0.1M_{\odot}$ до $2 - 2.8M_{\odot}$ (предел Оппенгеймера-Волкова). Размер данной звезды составляет лишь $10 - 20$ км, а плотность составляет $10^{16} - 10^{18}$ кг/м³. Дальнейшему гравитационному сжатию нейтронной звезды препятствует давление ядерной материи, возникающее за счёт взаимодействия нейтронов. Так как нейтронные звёзды образуются в результате коллапса массивных звёзд, то из-за сохранения момента импульса скорость их вращения может достигать 10^5 км/с. При наличии сильного магнитного поля и быстром вращении нейтронная звезда может наблюдаться с Земли как **пульсар**.

6.5 Чёрные дыры

Чёрная дыра (**ЧД**) — область пространства-времени с массой M , гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть её не могут даже объекты, движущиеся со скоростью света c . Граница этой области называется *горизонтом событий*, а её характерный размер R_G — *гравитационным радиусом*, для величины которого справедливо равенство

$$R_G = \frac{2GM}{c^2}. \quad (6.3)$$

Минимальная масса ЧД составляет около $2.5M_{\odot}$. А плотность ЧД определяется отношением ее массы M к объему V , следовательно

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3c^6}{32\pi M^2 G^3}. \quad (6.4)$$

Эффект излучения (испарения) **Хокинга** — эффект, при котором гравитационное поле чёрной дыры поляризует вакуум, в результате чего возможно образование не только виртуальных, но и реальных пар частица – античастица. Одна из частиц, оказавшаяся чуть ниже горизонта событий, падает внутрь чёрной дыры, а другая, оказавшаяся чуть выше горизонта, улетает, унося энергию (то есть часть массы) чёрной

дыры. Для мощности излучения ЧД справедлива формула

$$L = \frac{hc^6}{30720\pi^2 G^2 M^2}, \quad (6.5)$$

где h — постоянная Планка. Спектр хокинговского излучения для безмассовых полей оказался строго совпадающим с излучением абсолютно чёрного тела, что позволило приписать ЧД температуру, равную

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 k GM}, \quad (6.6)$$

где k — постоянная Больцмана.

6.6 Галактики

Морфологическая классификация галактик — система разделения галактик на группы по визуальным признакам, используемая в астрономии. Наиболее известной является классификация, разработанная Хабблом и дополненная другими учеными.

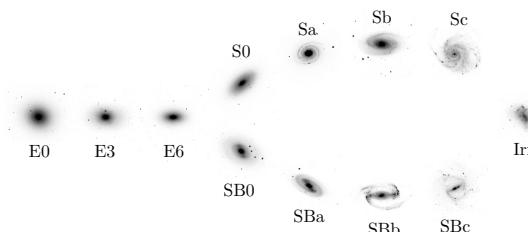


Рис. 43 – «Вилка Хаббла»

Согласно данной классификации галактики делятся на 4 типа:

1. **Эллиптические галактики** имеют гладкую эллиптическую форму без отличительных деталей с равномерным уменьшением яркости от центра к периферии. Обозначаются буквой Е с индексом. Индекс можно рассчитать по формуле

$$i = 10 \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right), \quad (6.7)$$

где a и b — большая и малая полуоси видимого эллипса.

К эллиптическим галактикам с абсолютной звёздной величиной меньше -18^m применимо соотношение Фабер-Джексона:

$$L \propto \sigma^4, \quad (6.8)$$

где σ — дисперсия скоростей вещества в галактике.

2. **Сpirальные галактики** состоят из уплощенного диска из звезд и газа, в центре которого находится сферическое уплотнение, называемое балджем, а также обширного сферического гало. Спиральные галактики обозначаются SB при наличии бара (перемычки между рукавами) или S при отсутствии бара. В зависимости от размеров ядра и балджа галактики делят на 3 группы: a, b и c. Для галактик Sa характерен большой балдж, для галактик Sc — маленький. Галактики Sb представляют собой нечто среднее между галактиками Sa и Sc.

Светимость спиральных галактик L связана с их максимальной скоростью вращения v_{\max} **соотношением Талли-Фишера:**

$$L \propto v_{\max}^4. \quad (6.9)$$

Абсолютная звёздная величина Млечного пути $M_{\text{MW}} \simeq -21^m$.

3. **Неправильные или иррегулярные галактики** — галактики, лишенные как вращательной симметрии, так и значительного ядра. Обозначение: Irr.
4. **Линзовидные галактики** — галактики, являющиеся переходными между спиральными и эллиптическими. Обозначения: S0, SB0.

6.7 Другие объекты

Шаровое звёздное скопление — скопление звёзд, состоящее из нескольких сотен тысяч светил, тесно связанных гравитацией. Млечный путь насчитывает около 160 шаровых звёздных скоплений. Диаметры шаровых скоплений составляют 20–60 пк, массы — 10^4 – 10^6 солнечных.

Планетарная туманность — система из звезды, называемой ядром туманности, и симметрично окружающей ее светящейся газовой оболочки. Планетарные туманности образуются при сбросе внешних слоёв (оболочек) красных гигантов и сверхгигантов с массой от $0.8M_\odot$ до $8M_\odot$ на завершающей стадии их эволюции. Характерный размер — 1–2 св. лет.

Рассеянное звёздное скопление — слабо связанная группа из сотен или тысяч звёзд, сформировавшихся из одного гигантского молекулярного облака и имеющих одинаковый возраст. Рассеянные звёздные скопления встречаются только в тонком диске Галактики, их типичный диаметр — несколько парсек.

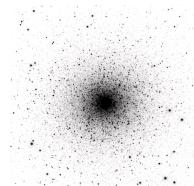


Рис. 44 — Шаровое скопление M13 (негатив)

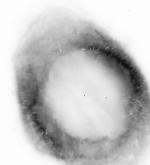


Рис. 45 — Планетарная туманность M57 (негатив)

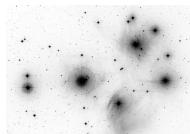


Рис. 46 — Рассеянное звёздное скопление M45 (негатив)

7 Математика

7.1 Системы координат

Зафиксируем точку O в пространстве и рассмотрим произвольную точку M . Вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M . Пусть в рассматриваемом пространстве также выбран базис, тогда совокупность точки O и базиса называется **декартовой системой координат**. Причем точка O — начало координат, а базисные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ задают координатные оси.

Однако пользоваться представлением векторов в произвольном базисе довольно сложно, поэтому рассмотрим специальный тип — **ортонормированный базис** — это такой базис, в котором базисные векторы попарноортогональны и длина каждого равна единице.

Тогда **прямоугольной декартовой системой координат** (ПДСК) называют декартову систему координат с ортонормированным базисом.

В практических задачах использовать ПДСК не всегда удобно, поэтому рассмотрим также другие системы координат. На плоскости, то есть в пространстве \mathbb{R}^2 , имеющем размерность два, часто применяется полярная система координат. В ней координатами вектора является его длина r — расстояние точки от начала отсчета, и угол φ с начальной осью.

Пусть (x, y) — координаты некоторого вектора в ПДСК на \mathbb{R}^2 , тогда не сложно получить, что его координаты в полярной системе координат (начальная ось совпадает с осью Ox) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = y/r, \\ \cos \varphi = x/r. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (7.1)$$

Теперь пусть (x, y, z) — координаты некоторого вектора в ПДСК на \mathbb{R}^3 . Обозначим за h — длину проекции этого вектора на ось z , r — длину его проекции на плоскость Oxy , φ — угол между проекцией на плоскость Oxy и осью Ox . Тогда тройка (r, φ, h) — координаты рассматриваемого

векторы в цилиндрической системе координат и верно представление

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = y/r, \\ \cos \varphi = x/r, \\ h = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = h. \end{cases} \quad (7.2)$$

Остается рассмотреть сферическую систему координат. Здесь координатами точки будет длина радиус-вектора r и два угла: θ — угол между радиус-вектором и плоскостью Oxy и φ — угол между проекцией радиус-вектора на плоскость Oxy и осью Ox . Верны формулы перехода:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arcsin z/r, \\ \sin \varphi = y/r, \\ \cos \varphi = x/r. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases} \quad (7.3)$$

7.2 Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется билинейная операция над ними, зависящая только от длин этих векторов и угла между ними, результатом которой является скаляр. Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} выражается следующим образом:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}. \quad (7.4)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n. \quad (7.5)$$

Докажем эквивалентность (7.4) и (7.5). Пусть в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_2\}$ векторы имеют следующие представления:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{e}_i. \quad (7.6)$$

Заметим, что $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) = |\mathbf{a}| |\mathbf{e}_i| \cos \theta_i = |\mathbf{a}| \cos \theta_i = a_i$, где θ_i — угол вектора \mathbf{a} с i -м базисным вектором \mathbf{e}_i . Тогда

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \left(\mathbf{a} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n b_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \mathbf{a}^T \mathbf{b}. \quad (7.7)$$

Из (7.4) и (7.5) очевидна билинейность и симметричность скалярного произведения, то есть

$$((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})) = ((\mathbf{c} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}). \quad (7.8)$$

Практическое применение скалярное произведение находит в вопросах проверки ортогональности векторов (как частный случай нахождения угла между векторами), потому что $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$, так как

$$\cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \quad (7.9)$$

Отсюда также получается выражение для проекции вектора \mathbf{a} на прямую с направляющим вектором \mathbf{l} :

$$\text{pr}_{\mathbf{l}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|^2} \mathbf{l}. \quad (7.10)$$

Используя скалярное произведение, получим важную утверждение теоремы косинусов из планиметрии: пусть $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, то есть имеем треугольник со сторонами $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ и $|\mathbf{c}|$. Рассмотрим скалярное произведение вектора \mathbf{c} самого на себя:

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) &= ((\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} \quad (7.12)$$

7.3 Векторное произведение

Тройку векторов будем называть правой, если для наблюдателя, находящегося в конце третьего вектора, кратчайший поворот от первого вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки, иначе левой.

Рассмотрим еще одну операцию над векторами — **векторное произведение** $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — антисимметричную и билинейную, задаваемую по правилу:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n}, \quad (7.13)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к плоскости, построенной на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , направление которой определяется таким образом, чтобы тройка

векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ была правой. Из определения понятно, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Так как площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} равна удвоенной площади треугольника, построенного на этих же векторах, то

$$|[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]| = |[\mathbf{a} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})]| = |[\mathbf{b} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})]| \quad (7.14)$$

$$ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A \Rightarrow \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}. \quad (7.15)$$

Последнее двойное равенство называется теоремой синусов.

Рассмотрим выражение для векторного произведения в координатной форме:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] &= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] = \\ &= [(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \times (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)] = \\ &= a_1b_1\mathbf{0} + a_1b_2\mathbf{e}_3 - a_1b_3\mathbf{e}_2 - a_2b_1\mathbf{e}_3 + a_2b_2\mathbf{0} + a_2b_3\mathbf{e}_1 + a_3b_1\mathbf{e}_2 - a_3b_2\mathbf{e}_1 + a_3b_3\mathbf{0} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_1 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (7.16) \end{aligned}$$

7.4 Смешанное произведение

Векторное произведение определяет вектор площади параллелограмма, построенного на двух векторах, а скалярное произведение — величину проекции одного вектора на другой. Рассмотрим такую операцию:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]). \quad (7.17)$$

Разберем, что является результатом данной операции: $[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{n}$ — вектор нормали к плоскости векторов \mathbf{b} и \mathbf{c} такой, что $|\mathbf{n}| = |b||c| \sin \widehat{\mathbf{bc}} \equiv S$ — площадь параллелограмма.

Идем дальше, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = |a||n| \cos \widehat{\mathbf{an}}$ — произведение длины вектора \mathbf{n} на длину проекции $\text{pr}_{\mathbf{n}} \mathbf{a}$. Значит величина смешанного произведения есть объем параллелепипеда, построенного на них.

В матричной форме смешанное произведение можно записать, как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (7.18)$$

то есть определитель матрицы $n \times n$ — ориентированные объем n -мерного параллелепипеда, построенного на n векторах.

Практическое значение смешанного произведения основано на его свойстве: если проекция вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{n} — $\text{pr}_{\mathbf{n}} \mathbf{a} = 0$, значит, векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} лежат в одной плоскости, либо хотя бы один из них нулевой, что также означает, что эти три вектора лежат в одной плоскости.

Отсюда можно сделать вывод, что равенство нулю смешанного произведения трех векторов означает из компланарность или, что тоже самое, равенство нулю объема параллелепипеда, построенного на них.

7.5 Производная

Производная в точке — предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. *Геометрический смысл производной:* значение производной в точке численно равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке. Следовательно, точки, где производная обнуляется, соответствуют локальным минимумам и максимумам функции.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (7.19)$$

Общепринятые обозначения для производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \dot{f}(x_0). \quad (7.20)$$

Правила дифференцирования:

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g'; & \left(\frac{f}{g} \right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}; \\ (Cf)' &= Cf'; & \frac{d}{dx} f(g(x)) &= \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}. \\ (fg)' &= f'g + fg'; \end{aligned}$$

Таблица производных:

$$(x^a)' = ax^{a-1}; \quad (\cos x)' = -\sin x; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

7.6 Интеграл

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx, \quad F'(x) = f(x). \quad (7.21)$$

Определенный интеграл характеризуется верхним и нижним пределом интегрирования. Значение определенного интеграла численно равно площади под графиком функции на данном интервале.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (7.22)$$

Правила интегрирования:

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx; \quad \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C;$$

$$\int f dg = fg - \int g df; \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$$

Таблица интегралов:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C; \quad \int \frac{dx}{-\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{|x-a|}{|x+a|} + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

7.7 Телесный угол

Телесный угол — часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол). Телесный угол измеряется в стерадианах и равен отношению площади сферы, которую вырезает данный угол, к квадрату радиуса данной сферы.

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (7.23)$$

Телесный угол полной сферы равен 4π . Величину телесного угла, образованного конусом с углом раствора α можно определить по формуле

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right). \quad (7.24)$$

Телесный угол, соответствующий сегменту сферы радиуса R и высоты h , равен

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right). \quad (7.25)$$

Для сферического треугольника с углами α , β и γ справедливо соотношение

$$\Omega = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad (7.26)$$

7.8 Формулы приближенного вычисления

Формулы приближенного вычисления при $x \ll 1$:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \approx x \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \approx x \qquad \ln(1+x) \approx x$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \qquad e^x \approx 1 + x$$

$$\sin(\theta + x) \approx \sin \theta + x \cos \theta \qquad \cos(\theta + x) \approx \cos \theta - x \sin \theta$$

Также существует равенство для нескольких малых переменных:

$$(1+a)^\alpha (1+b)^\beta \dots \approx 1 + \alpha a + \beta b + \dots$$

7.9 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных. Данный метод помогает найти функцию, на которую лучшим образом ложатся точки на графике. Для этого определяется функция f , сумма квадратов отклонений e_i которой от заданных точек (x_i, y_i) , минимальна.

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \min_{g(x)} \sum_{i=1}^n [y_i - g(x_i)]^2 \quad (7.27)$$

Вывод формул для коэффициентов линейной функции $f(x) = ax + b$ по МНК:

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \rightarrow \min_{a, b} .$$

Условие (7.27) выполняется при равенстве нулю обеих частных производных функции $F(a, b)$, то есть

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i = 0; \\ \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n b = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (7.28)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \langle y \rangle - a \langle x \rangle \quad (7.29)$$

Погрешности найденных коэффициентов определяются выражениями

$$\sigma_a \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2}, \quad (7.30)$$

$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (7.31)$$

7.10 Гармонические колебания

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому закону. Уравнение гармонических колебаний представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (7.32)$$

Его общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = C_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (7.33)$$

где C_0 , C_1 и C_2 — некоторые константы, определяющие амплитуду колебаний, а φ_0 — начальная фаза колебаний. Отсюда видно, что для периода колебаний справедливо соотношение

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (7.34)$$

Гармонические колебания совершаются под действием упругих или квазиупругих сил, значение которых пропорционально отклонению со знаком минус. Примерами гармонических колебаний могут служить математический и пружинный маятники.

7.11 Погрешности

Погрешность — величина, характеризующая точность измерений. Страно говоря, численное значение чего-либо без указанной величины погрешности не несёт никакой информации, потому что *относительная погрешность* может быть как 0.01%, так и 30%. Погрешность отражает достоверность результата. Однако в задачах указывать погрешность не принято, но следить за ней нужно. При представлении ответа в стандартной форме последний знак в множителе должен соответствовать последнему значащему знаку и по порядку совпадать с *абсолютной погрешностью* результата.

Абсолютная погрешность — разность между найденным на опыте и истинным значением физической величины:

$$\Delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}} \quad (7.35)$$

Относительная погрешность — отношение абсолютной погрешности к значению измеряемой величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} = \frac{x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}}{x_{\text{ист}}} \quad (7.36)$$

Качество измерений обычно определяется относительной, а не абсолютной погрешностью, потому что одна и та же абсолютная погрешность может составлять как тысячные доли, так и несколько процентов от измеряемой величины.

Грубые ошибки возникают вследствие ошибки экспериментатора или неисправности аппаратуры. Если установлено, что в каких-то измерениях присутствуют грубые ошибки, то такие изменения следует отбросить.

Систематические ошибки — ошибки, которые сохраняют свою величину и знак во время эксперимента. Такие ошибки могут быть связаны с погрешностью прибора или с постановкой опыта. Измерения, полученные с такими ошибками, следует корректировать на величину ошибки, которую можно получить опытным путем.

Случайные ошибки — ошибки, которые меняют знак и значение от опыта к опыту. Случайные ошибки подчиняются теории вероятности, а также обладают определенными закономерностями:

1. При большом числе измерений ошибки одинаковых величин, но разного знака встречаются одинаково часто.
2. Частота появления ошибок уменьшается с ростом величины ошибки. Иначе говоря, большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.
3. Ошибки измерений могут принимать непрерывный ряд значений.

В качестве наилучшего значения для измеряемой величины обычно принимают среднее арифметическое из всех полученных результатов:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (7.37)$$

Величина σ характеризует точность измерений. Значение $x = x_0 \pm \sigma$ означает, что величина x с вероятностью 0.68 лежит в данном интервале. $x = x_0 \pm 2\sigma$ с вероятностью 0.95 лежит в данном промежутке. При $x = x_0 \pm 3\sigma$ данная вероятность равна 0.997.

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{ср}})^2} \quad (7.38)$$

величина $\sigma_{\text{отд}}$ называется *среднеквадратичным отклонением*.

В действительности, погрешность одного вычисления не так интерес-

на, как погрешность $\sigma_{\text{ср}}$ среднего результата

$$x = x_{\text{ср}} \pm \sigma_{\text{ср}}, \quad \text{где } \sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{n}}. \quad (7.39)$$

Случайные и систематические погрешности складываются по формуле

$$\sigma_{\text{полн}}^2 = \sigma_{\text{систем}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2 \quad (7.40)$$

Ошибки при косвенных измерениях. Если исследуемая величина представляет собой сумму или разность двух измеренных величин, иначе, $a = b \pm c$, то наилучшее значение величины a равно сумме (или разности) наилучших значений слагаемых:

$$a_{\text{наил}} = b_{\text{наил}} \pm c_{\text{наил}} = \langle b \rangle \pm \langle c \rangle, \quad (7.41)$$

погрешность в этом случае определяется по формуле

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_c^2}. \quad (7.42)$$

Если искомая величина равна произведению или частному двух других, то есть $a = bc^{\pm 1}$, тогда

$$a_{\text{наил}} = \langle b \rangle \langle c \rangle^{\pm 1} \quad (7.43)$$

$$\frac{\sigma_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2} \quad (7.44)$$

В случае $a = b^\beta c^\gamma e^\varepsilon \dots$ для погрешности справедлива формула

$$\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 = \beta^2 \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\sigma_e}{e}\right)^2 + \dots \quad (7.45)$$

И наконец, формула для общего случая $a = f(b, c, e, \dots)$:

$$a_{\text{наил}} = f(b_{\text{наил}}, c_{\text{наил}}, e_{\text{наил}} \dots) \quad (7.46)$$

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e}\right)^2 \sigma_e^2 + \dots \quad (7.47)$$

Приложение

Объект	Большая полуось a , а.е.	Сидерический период T , год	Эксцентриситет e	Наклонение i , $^\circ$	Долгота восходящего узла Ω , $^\circ$	Аргумент periцентра ω , $^\circ$
Меркурий	0.387	0.241	0.206	7.00	48.3	29.1
Венера	0.723	0.615	0.007	3.39	76.7	54.9
Земля	1.000	1.000	0.017	0.00	348.7	114.2
Марс	1.524	1.881	0.093	1.85	49.6	286.5
Церера	2.765	4.601	0.079	10.6	80.4	2.83
Юпитер	5.204	11.86	0.048	1.31	100.6	275.1
Сатурн	9.582	29.46	0.056	2.49	113.6	336.0
Уран	19.23	84.01	0.044	0.77	74.0	96.5
Нептун	30.06	164.8	0.011	1.77	131.8	265.6
Плутон	39.48	247.9	0.249	17.1	110.2	113.8

Таблица 2 – Параметры орбит больших тел Солнечной системы

Объект	Символ	Масса M , кг	Радиус R , м	Период T , ч	Наклон оси i , $^\circ$
Солнце	\odot	1.99×10^{30}	6.97×10^8	609.1	7.25
Меркурий	☿	3.33×10^{23}	2.44×10^6	1408.	0.035
Венера	♀	4.87×10^{24}	6.05×10^6	5833.	177.4
Земля	\oplus	5.97×10^{24}	6.37×10^6	23.93	23.44
Луна	☽	7.35×10^{22}	1.74×10^6	655.7	1.54
Марс	♂	6.42×10^{23}	3.39×10^6	24.62	25.19
Церера	♃	9.39×10^{20}	4.63×10^5	9.077	3
Юпитер	♄	1.90×10^{27}	7.00×10^7	9.925	3.13
Сатурн	♆	5.68×10^{26}	5.82×10^7	10.53	26.73
Уран	♇	8.68×10^{25}	2.54×10^7	17.24	97.77
Нептун	♈	1.02×10^{26}	2.46×10^7	15.97	28.32
Плутон	♉	1.30×10^{22}	1.19×10^6	153.3	119.6

Таблица 3 – Физические характеристики больших тел Солнечной системы

Светимость Солнца L_{\odot}	3.828×10^{26} Вт
Видимая звёздная величина Солнца m_{\odot}	-26.74^m

Абсолютная звёздная величина Солнца M_\odot	$+4.83^m$
Показатель цвета Солнца $(B - V)_\odot$	$+0.67^m$
Эффективная температура Солнца T_\odot	5778 К
Большая полуось орбиты Луны a_\oplus	384399 км
Эксцентризитет орбиты Луны e_\oplus	0.055
Наклонение плоскости орбиты Луны к эклиптике i_\oplus	5.15°
Сидерический период Луны T_\oplus	27.3217 сут
Геометрическое альбедо Луны A_\oplus	0.12
Видимая звёздная величина Луны в полнолунии m_\odot	-12.7^m
Геометрическое Альбедо Земли A_\oplus	0.37
<hr/>	
Заряд электрона e	-1.6×10^{-19} Кл
Постоянная Планка h	6.626×10^{-34} Дж · с
Постоянная Стефана-Больцмана σ	5.670×10^{-8} Вт · м $^{-2}$ · К $^{-4}$
Гравитационная постоянная G	6.672×10^{-11} м 3 · с $^{-2}$ · кг $^{-1}$
Постоянная Больцмана k	1.381×10^{-23} Дж · К $^{-1}$
Постоянная Хаббла H	67 км · с $^{-1}$ · Мпк $^{-1}$

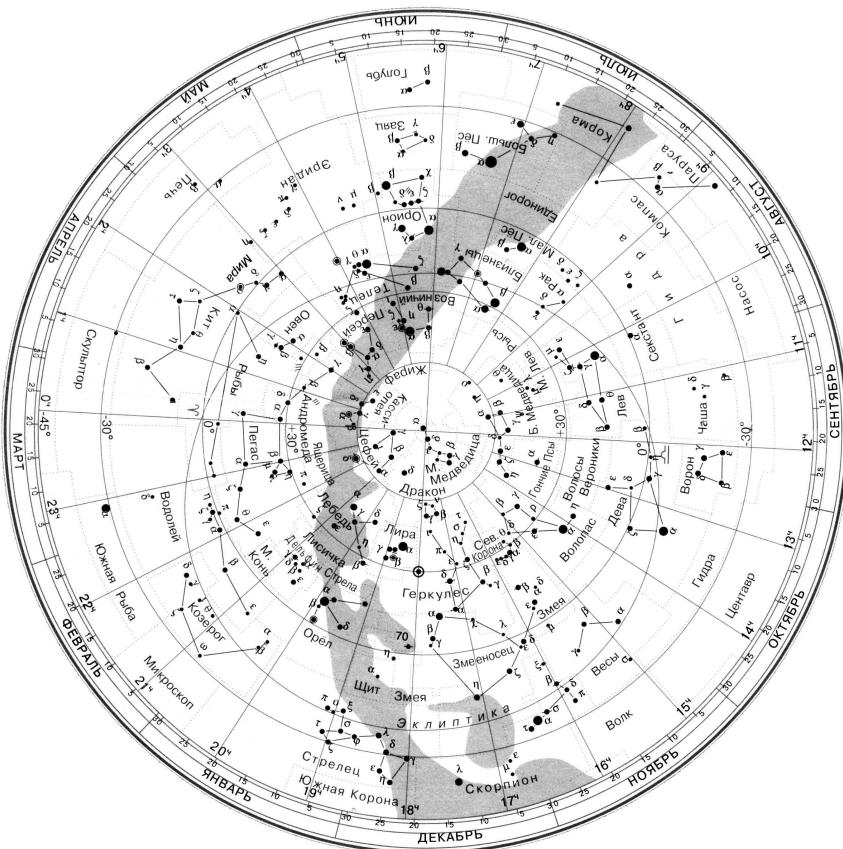


Рис. 47 – Карта звездного неба -45° по склонению

Подписано в печать 19.02.2018.

Формат 84×108/32. Бумага офсетная. Печать
оффсетная.

Тираж 500 экз.

Отпечатано в ГУП МО «Коломенская типография».

140400, г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2а