FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2024/25
Stand: 26. November 2024

1. Hausarbeit – Logik

Abgabe: 13.12.2024 im ISIS-Kurs [WiSe 2024/25] Logik

Informationen zur Hausarbeit:

Diese Hausarbeit ist eine ergebnisorientierte Teilleistung der Portfolioprüfung des Moduls Logik. Sie besteht aus mehreren Aufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung. Die Hausaufgabe muss in Gruppen von 2 bis 4 Studierenden abgegeben werden. Die Einteilung in die Gruppen findet über den ISIS-Kurs statt und Sie müssen in der Gruppe abgeben, in welche Sie sich eingetragen haben. **Ihre Abgaben müssen bis zum 13. Dezember 2024, 23:55 Uhr im ISIS-Kurs hochgeladen sein.**

Alle Abgaben müssen durch ein Textverarbeitungsprogramm (wie z.B. LaTeX) erstellt werden. Jede der Aufgaben in der Hausarbeit muss als separates PDF abgegeben werden. Die jeweiligen Aufgabenstellungen müssen nicht in die Abgabe übernommen werden.

Auf beiden Abgaben müssen die **Matrikelnummern** der Gruppenmitglieder gut sichtbar, oben auf der ersten Seite stehen. Wir tragen die Punkte nur für die Gruppenmitglieder ein, welche auch auf den Abgaben stehen. Bitte geben Sie Ihre Namen nicht an.

Sie können insgesamt 40 Punkte in dieser Hausarbeit erreichen. Jeder Punkt in der Hausarbeit entspricht dabei $\frac{1}{4}$ Portfoliopunkten. Es sind also bis zu 10 Portfoliopunkte erreichbar.

Sie dürfen Aussagen aus dem Teil der Vorlesung und des Skripts zur Aussagenlogik, und aus den Aufgabenstellungen der Tutoriumsblätter und der freiwilligen Hausaufgaben verwenden, ohne diese zu beweisen. Bitte geben Sie in den letzten beiden Fällen immer an, auf welches Blatt, welche Aufgabe und welche Unteraufgabe Sie sich beziehen.

Nutzen Sie die Symbole, die in der Aussagenlogik definierte Semantik haben, nur mit der festgelegten Semantik. Nutzen Sie insbesondere die Junktoren der Aussagenlogik nur innerhalb von aussagenlogischen Formeln.

Alle Antworten sind zu begründen.

Hausaufgabe 1 20 Punkte

Du möchtest dich mit deinen Kommiliton*innen zum Plätzchenbacken verabreden. Um Zeit zu haben, dich mit allen zu unterhalten, möchtest du dafür mehrere Treffen organisieren. Sei K die Menge der Kommiliton*innen, mit denen du dich treffen willst, sei T die Menge der Termine, an denen du bereit wärst etwas zu organisieren, und sei P die Menge der Plätzchensorten. Des Weiteren sei $M \subseteq K \times P$ die Relation, die (k, p) genau dann enthält, wenn der*die Kommilitone*in k die Plätzchensorte p mag. Geben Sie eine Formel $\varphi_{K,T,P,M} \in \mathrm{AL}$ an, die genau dann erfüllbar ist, wenn es eine Möglichkeit gibt, deine Komiliton*innen so einzuladen, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

(i) Jede*r Kommilitonin*e wird zu genau einem Termin eingeladen und zusätzlich gibt es für jede*n Komilitonin*en mindestens einen Ausweichtermin.

(ii) Jede Plätzchensorte wird bei maximal einem Treffen gebacken.

(iii) An jedem Termin, bei dem mindestens eine Person eingeladen wird, wird mindestens eine Plätzchensorte gebacken. Wenn zu einem Termin niemand eingeladen wird, dann werden an diesem Termin auch keine Plätzchen gebacken.

(iv) Wenn jemand zu einem Termin eingeladen wird, dann muss diese Person alle Plätzchensorten mögen, die an diesem Termin gebacken werden.

(v) An jedem Ausweichtermin einer Person sollte mindestens eine Plätzchensorte gebacken werden, die diese Person mag.

Erklären Sie zudem, wie man aus einer erfüllenden Belegung ihrer Formel ablesen kann, wer zu welchen Terminen eingeladen wird, wann die Ausweichtermine der Kommiliton*innen sind, und welche Plätzchen an diesen Terminen gebacken werden.

Anmerkung: Sie dürfen in dieser Aufgabe unter ihren großen Disjunktionen und Konjunktionen nur zwei Arten von Bedingungen nutzen. Sie dürfen checken, ob ein Objekt in einer der Mengen K, T, P oder M enthalten ist und Sie dürfen Objekte auf Gleichheit überprüfen (also Bedingungen wie $k \in K, m \notin M, k = k', t \neq t' \ldots$). Insbesondere dürfen sie keine neuen Mengen definieren.

Hausaufgabe 2 2+3+7+8=20 Punkte

Für $n, r, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $m \geq 2$ sei $\mathsf{AL}_{n,r,m}$ die durch folgende Regeln induktiv definierte Menge von Formeln:

- Jede Variable $X \in AVar$ ist eine Formel in $\mathsf{AL}_{n,r,m}$.
- Für jede Variable $X \in AVar$ ist $\neg X$ eine Formel in $\mathsf{AL}_{n,r,m}$.
- Für jede Zahl $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ Formeln in $\mathsf{AL}_{n,r,m}$ sind, auch $\textcircled{r_m}\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k \rangle$ eine Formel in $\mathsf{AL}_{n,r,m}$.

Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ und eine zu $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ passende Belegung β ist die Semantik des neuen Junktors jeweils folgendermaßen definiert:

$$[\![\textcircled{r_m}\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k \rangle]\!]^\beta := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{i=1}^{k} [\![\varphi_i]\!]^\beta \equiv r \pmod m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Semantik von Variablen und negierten Variablen ist wie in der Aussagenlogik definiert.
Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben ohne Wahrheitstafeln zu verwenden.

(i) Geben Sie eine Formel $\psi \in \mathsf{AL}_{6,1,5}$ an, die äquivalent zu $(Y \wedge Z) \in \mathsf{AL}$ ist und geben Sie eine Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ an, die äquivalent zu $\textcircled{1_5}\langle Y, Z \rangle \in \mathsf{AL}_{6,1,5}$ ist. Sie müssen keine Begründungen angeben.

(ii) Geben Sie äquivalente Formeln $\chi_1 \in \mathsf{AL}_{2,2,4} \setminus \mathsf{AL}_{5,0,3}$ und $\chi_2 \in \mathsf{AL}_{5,0,3} \setminus \mathsf{AL}_{2,2,4}$ an und begründen Sie deren Äquivalenz.

(iii) Zeigen Sie, dass es nicht für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ eine äquivalente Formel in $\mathsf{AL}_{2,2,4}$ gibt.

(iv) Zeigen Sie mit Hilfe von struktureller Induktion, dass es für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ eine äquivalente Formel in $\mathsf{AL}_{5,0,3}$ gibt.

Hinweis: Der Junktor $\textcircled{r_m}\langle\rangle$ lässt sich in Latex mit dem package `circledsteps` durch `$\Circled{r_m}\langle \rangle$` darstellen.

Hinweis: Für Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \geq 2$ gilt $a \equiv b \pmod c$ genau dann, wenn der Rest bei der ganzzahligen Division mit Rest von a durch c gleich dem Rest bei der ganzzahligen Division mit Rest von b durch c ist.

Hinweis: Wir erweitern hier den Äquivalenzbegriff aus der Vorlesung, sodass er neben Formeln aus AL auf die gleiche Weise auch auf Formeln aus den hier definierten Logiken anwendbar ist. Also Formeln

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathsf{AL} \cup \bigcup_{\substack{n,r,m \in \mathbb{N} \\ n \geq 1 \\ m \geq 2}} \mathsf{AL}_{n,r,m}$$

sind äquivalent, wenn sie von genau den gleichen Belegungen erfüllt werden.