# TCFSH_2015_18

# 數學第二冊第一章
# 數列與級數

$$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

座號：________________

姓名：________________

http://cplee8tcfsh.blogspot.tw/

## 1-1 數列

一、數列的表示法：
數列以 $\langle a_n \rangle$ 表示之， $a_1$ 表示第 1 項(首項)， $a_2$ 表示第 2 項，...， $a_n$ 表示第 $n$ 項。
項數有限的數列稱為有限數列，有無窮多項的數列稱無窮數列。

Ex1.觀察下列數列相鄰項之間的規律：

(1) 1,3,5,7,9,11,13,15,... 。[ $a_{n+1}=a_n+2$ ]
(2) 2,4,8,16,32,64,128,256,⋯ 。[ $a_{n+1}=2\cdot a_n$ ]
(3) 1,3,7,15,31,63,127,255,⋯ 。[ $a_{n+1}=2\cdot a_n+1$ ][ $a_{n+1}=a_n+2^n$ ]
(4) 1,2,4,7,11,16,22,29,⋯ 。[ $a_{n+1}=a_n+n$ ]
(5) 0,1,3,6,10,15,21,28,⋯ 。[ $a_{n+1}=a_n+n$ ]

描述相鄰項之間的關係式稱為**遞迴關係式**。
謎之彬音：不同的數列可能有相同的遞迴式，故需加上初始條件以茲區分。

Ex2.寫出下列數列的遞迴式：

(1) 1,3,5,7,9,11,13,15,⋯ 。[ $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+2 \end{cases}$ ]
(2) 2,4,8,16,32,64,128,256,⋯ 。[ $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=2\cdot a_n \end{cases}$ ]
(3) 1,3,7,15,31,63,127,255,⋯ 。[ $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=2\cdot a_n+1 \end{cases}$ ]
(4) 1,2,4,7,11,16,22,29,⋯ 。[ $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+n \end{cases}$ ]
(5) 0,1,3,6,10,15,21,28,⋯ 。[ $\begin{cases} a_1=0 \\ a_{n+1}=a_n+n \end{cases}$ ]

上題的(2)與(3)對應項之間都相差 1。
若 $\langle a_n \rangle=2,4,8,16,32,64,128,256,\cdots$ 的第 $n$ 項是 $2^n$ ，
則 $\langle b_n \rangle=1,3,7,15,31,63,127,255,\cdots$ 的第 $n$ 項是 $2^n-1$ 。
將 $a_n=2^n$ 與 $b_n=2^n-1$ 稱為該數列的一般項。
謎之彬音：一般項是指直接以項序 $n$ 表示 $a_n$ 。($n$=100 代入即得第 100 項)

二、常見的數列
等差數列(*A.P.*)(*Arithmetic Progressions*)：
若數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列

1.遞迴式： $a_{n+1}=a_n+d$ ，其中 $d$ 為定值，稱公差。
2.一般式： $a_n=a_1+(n-1)d$ 。
3.性質： $a_n=a_m+(n-m)d$ 。
4.設 $a$、$b$、$c$ 成等差數列，
則稱 $b$ 是 $a$、$c$ 的等差中項， $b=\dfrac{a+c}{2}$

謎之彬音：等差數列可用二個變數表示： $a,a+d,a+2d,a+3d,a+4d,\cdots$
謎之彬音：三項的等差數列可用 $a-d,a,a+d$ 表示

等比數列($G.P.$)(*Geometric Progressions*)：
若數列 $\langle a_n\rangle$ 為等比數列，( $r\neq 0$ ， $a_1\neq 0$ )
1.遞迴式： $a_{n+1}=r\cdot a_n$ ，其中 $r$ 為定值，稱公比。
2.一般式： $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$ 。
3.性質： $a_n=a_m\cdot r^{n-m}$ 。
4.設 $a,b,c\in\mathbb{R}$ ，$a$、$b$、$c$ 成等比數列，
則稱 $b$ 是 $a$、$c$ 的等比中項， $b=\pm\sqrt{ac}$ 。
謎之彬音：等比數列可用二個變數表示： $a,a\cdot r,a\cdot r^2,a\cdot r^3,a\cdot r^4,\cdots$
謎之彬音：三項的等比數列可用 $\frac{a}{r},\ a,\ a\cdot r$ 表示

算幾不等式：算術平均 ≥ 幾何平均( $AM\geq GM$ )
1. $a,b\in\mathbb{R}^+$ ， $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$
2.等號成立於 $a=b$ 時

調和數列($H.P.$)(*Harmonic Progressions*)：
1.當 $\left\langle\frac{1}{a_n}\right\rangle$ 為等差數列時，稱數列 $\langle a_n\rangle$ 為調和數列( $\forall a_n\neq 0$ )
2.設 $a$、$b$、$c$ 成調和數列，則稱 $b$ 是 $a$、$c$ 的調和中項，$b=\frac{2ac}{a+c}$ (調和平均 H.M.)

Ex3.小串爬山，上山速率 $4km/hr$，下山速率 $6km/hr$，試求平均速率？[4.8]

平均(mean)不等式： $a,b\in\mathbb{R}^+$ ， $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$ (SM≧AM≧GM≧HM)

三、數學歸納法原理(M.I.)(*Principle of Mathematical Induction*)
1、證明要素：開始性、持續性
2、常見證明流程
(1)檢驗 $n=1$ 時，原式成立(開始性)
(2)假設 $n=k$ 時，原式成立；證明 $n=k+1$ 時，原式亦成立(持續性)
此二個步驟缺一不可(能開始且持續)
反例 1： $n^2-n+41$ 為質數?( $41,43,47,53,61,71,83,97,\cdots$ )
反例 2： $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1$ ?
謎之彬音：Real Man!

數學歸納法常見證明類型：
1.等式型

Ex4. $\forall n\in\mathbb{N}$ ，證明： $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

Ex5. $\forall n\in\mathbb{N}$ ，證明： $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Ex6. $\forall n\in\mathbb{N}$ ，試證： $2^{8n+1}-2^{4n}$ 的個位數字都是 6

2.倍數型

Ex7. $\forall n\in\mathbb{N}$ ，試證： $9^{n+1}-8n-9$ 為 64 的倍數

Ex8. $\forall n\in\mathbb{N}$ ， $10^{2n}+5\cdot 12^n-6$ 恆為自然數 $k$ 的倍數，求 $k$ 最大值，並證明。[22]

四、一階遞迴數列的一般式：(觀察 ⇒ 猜測 ⇒ 證明)
謎之彬音：一階線性遞迴關係 $a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ 的通式解，請參閱附錄。

Ex9.數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，求 $a_n$。

解：觀察 $a_1=1,a_2=3,a_3=7,a_4=15,a_5=31,a_6=63,a_7=127$，猜測 $a_n=2^n-1$

證明：

(1)當 $n=1$ 時 $a_1=1=2^1-1$，成立

(2)設 $n=k$ 時成立，即 $a_k=2^k-1$

則 $n=k+1$ 時 $a_{k+1}=2\cdot a_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1$，成立

(3)由數學歸納法原理知 $\forall n\in N$，$a_n=2^n-1$ 恆成立。

Ex10.數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$，求 $a_n$。

解：觀察 $a_2=\dfrac{3\times1-1}{4\times1-1}=\dfrac{2}{3},a_3=\dfrac{3\times\frac{2}{3}-1}{4\times\frac{2}{3}-1}=\dfrac{3}{5},a_4=\dfrac{3\times\frac{3}{5}-1}{4\times\frac{3}{5}-1}=\dfrac{4}{7},\cdots$，猜測 $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$

證明：

(1)當 $n=1$ 時 $a_1=1=\dfrac{1}{2\times1-1}$，成立

(2)設 $n=k$ 時成立，即 $a_k=\dfrac{k}{2k-1}$

則 $n=k+1$ 時 $a_{k+1}=\dfrac{3a_k-1}{4a_k-1}=\dfrac{3\frac{k}{2k-1}-1}{4\frac{k}{2k-1}-1}=\dfrac{3k-(2k-1)}{4k-(2k-1)}=\dfrac{(k+1)}{2(k+1)-1}$，成立

(3)由數學歸納法原理知 $\forall n\in N$，$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$ 恆成立。

Ex11.盲人點字！

Ex12.一等差數列之第 4 項為 $-15$，第 12 項為 9，則從第幾項開始為正數？[10]

Ex13.數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n+2n$，則 $a_n=$？[ $n^2-n+1$ ]

Ex14.數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n+(2n+1)$，則 $a_n=$？[ $n^2$ ]

Ex15. $\forall n\in\mathbb{N}$，試證：$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2=-n(2n+1)$

Ex16. $\forall n\in\mathbb{N}$，試證：$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$

Ex17. $\forall n\in\mathbb{N}$，試證：$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{2}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

Ex18.已知 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ，且 $1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ，試推測 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$ 和，並證明。[ $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ ]

Ex19. $\forall n\in\mathbb{N}$ ， $2^{6n-3}+3^{2n-1}$ 恆為自然數 $k$ 的倍數，求 $k$ 的最大值，並證明[11]

Ex20. $\forall n\in\mathbb{N}$ ，試證：$3^{2n+1}+2^{n+2}$ 必為 7 的倍數。

Ex21.「河內塔（*Hanoi Tower*）問題」有 $A,B,C$ 三柱，其中 $A$ 柱上套著 $n$ 個大小不同的圓盤，將其由小到大編號為 1，2，……,$n$。若藉助 $A,B,C$ 三柱作橋樑，且每次移動圓盤時都保持較大圓盤在下面，較小圓盤放在上面的規定，設 $a_n$ 表示將 $n$ 個圓盤全部由 $A$ 柱搬到 $C$ 柱所需的最少次數，則：

(1) $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式為?(2) $a_n$ =?[ $\begin{cases}a_1=1\\a_n=2\cdot a_{n-1}+1,n\geq2\end{cases}$ ， $a^n=2^n-1$ ]

Ex22.某人爬樓梯時，有時一步上一階，有時一步上二階。若 $a_n$ 表示某人上 $n$ 階樓梯的方法數，試求：

(1)求 $a_n,a_{n-1},a_{n-2}$ 之遞廻關係式 及初始值。

(2)樓梯有 10 階，某人上樓或跨一階或二階，此人上樓共有多少種方法

[(1) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ，$a_1=1$ ，$a_2=2$ (2) 89]

解：(1)若某人第一步跨上一階，則尚有 $n-1$階，有 $a_{n-1}$種方法

若第一步跨上二階，則尚有 $n-2$階，有 $a_{n-2}$種方法

故其遞迴關係式為 $a_1=1$，$a_2=2$ 且 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，$n$=3,4,5,6,…

(2) $a_3=a_2+a_1=2+1=3$ $\quad a_7=a_6+a_5=13+8=21$

$a_4=a_3+a_2=3+2=5$ $\quad a_8=a_7+a_6=21+13=34$

$a_5=a_4+a_3=5+3=8$ $\quad a_9=a_8+a_7=34+21=55$

$a_6=a_5+a_4=8+5=13$ $\quad a_{10}=a_9+a_8=55+34=89$

Ex23.樓梯有 10 階，某人上樓時或跨一階，或二階，或三階，此人上樓共有多少種方法？[274]

Ex24.求下列各數列的一般項 $a_n$：

(1) $a_1=2$ ，且 $a_n=3a_{n-1},(n\in N,n\geq2)$ 。[ $a_n=2\cdot3^{n-1}$ ]

(2) $a_1=3$ ，且 $a_{n+1}=a_n+(2n+1),(n\in N)$ 。[ $a_n=n^2+2$ ]

(3) $a_1=\dfrac{1}{3}$ ，且 $a_{n+1}=(\dfrac{n}{n+3})a_n,n\in N$ 。[ $\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}$ ]

Ex25.已知數列 <$a_n$> 滿足 $a_1=1$ ，且 $a_n=\dfrac{3a_{n+1}-4}{a_{n+1}-1}$ ， $\forall n\in\mathbb{N}$ ，則
(1)求 $a_2,a_3,a_4$ (2)推測第 $n$ 項
(3)利用數學歸納法證明(2)的結果。[ $\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{4},\dfrac{2n-1}{n}$ ]

Ex26.三個正數成等差遞增數列，其和 15，各項平方和為 93，求此數列？[2,5,8]

Ex27.數列 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,...，問：(1)數字 10 在第幾項到第幾項？
(2)第 100 項為何？(3)前 100 項之和為何？[46，55，14，945]

Ex28.數列 $\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{1},\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{3},\dfrac{5}{1},\dfrac{1}{7},\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{1},\cdots\cdots$ 的第 40 項為何？[ $\dfrac{7}{11}$ ]

Ex29.將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：
第 1 列 1
第 2 列 2,3
第 3 列 4,5,6
第 4 列 7,8,9,10
第 5 列 11,12,13,14,15
試問第 100 列第 3 個數是多少？[4953]

Ex30.某人購買一棟房屋，簽約時先付 100 萬元，餘款分二十期付清。已知這二十期款額成等差數列，前兩期共 30.5 萬元，三、四兩期共 28.5 萬元，則此棟房屋總價為何？[315]

Ex31.設三數成等差數列，其和為 90，若此三數依次加上 1、3、49 後，則成等比數列，求原來的三個數。[10,30,50 或 98,30,-38]

Ex32.在 4 與 12 之間依序插入 10 個數 $a_1$，$a_2$，$a_3$，...，$a_{10}$，使此 12 個數成等差，則 $a_7$＝？[100/11]

Ex33.設一個等比數列，若 $a_1+a_2+a_3=18$，$a_2+a_3+a_4=-9$，求公比。[ $-\dfrac{1}{2}$

Ex34.設二相異自然數 $m,n$，若一等差數列的第 $m$ 項為 $a$，第 $n$ 項為 $b$，則第 $m+n$ 項為？[ $\dfrac{am-bn}{m-n}$ ]

Ex35.設三正數成等比數列，其和 39，若此三數依次減去 1、2、12 後，則成等差數列，求此三數。[4,10,25 或 25,10,4]

Ex36.三角形三邊長成 $G.P.$，公比 $r$，試證 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<r<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

Ex37.有一個 101 項的等差數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{101}$ ，其和為 0，且 $a_{71}=70$ ，則 $(A)$ $a_1+a_{101}>0$ $(B)$ $a_2+a_{100}<0$ $(C)$ $a_3+a_{99}=0$ $(D)$ $a_{51}=51$ $(E)$ $a_1<0$ 。$[CE]$

## 1-2 級數

一、數列以 $\langle a_n \rangle$ 表示之，級數以 $S_n$ 或 $\sum$ (sigma/ summation)表示之。

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$ 。

性質：$\begin{cases} a_1=S_1 \\ a_n=S_n-S_{n-1}, n\geq 2 \end{cases}$

項數有限的級數稱為有限級數，有無窮多項的級數稱無窮級數。

Ex38.設數列＜$a_n$＞之前 $n$ 項和 $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$ ，則 $a_n$＝？[ $\dfrac{1}{4n^2-1}$ ]

Ex39.設數列＜$a_n$＞之前 $n$ 項和 $S_n=n^2+2$ ，則 $a_n$＝？[ $\begin{cases} a_1=3 \\ a_n=2n-1, n\geq 2 \end{cases}$ ]

二、$\sum$ 表示法：

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\sum_{k=1}^{10} k$$

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100=\sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$1+3+5+7+9+\cdots+99=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$$

$$1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+\cdots+97\cdot 99=\sum_{k=1}^{49}(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=100}^{148}(2k-199)(2k-197)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

謎之彬音：$\infty$ 表示 *infinity* 即 無限大，$\infty$ 表示無止境的大數。

謎之彬音：$\infty$ 非定值，除非另有規定，否則禁用等號。

Ex40.求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ 之值。[9]

三、$\sum$ 的公式與性質：

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c=c+c+c+\cdots+c=nc$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k\pm\sum_{k=1}^{n} b_k$ (乘法與除法無此性質)
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c(a_k)=c\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k$ ($c$ 為與 $k$ 無關的常數)
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=101}^{n+100} a_{k-100}$

謎之彬音：此處 $k$ 為 $\sum$ 的內部自訂變數。(此處 $n$ 為 $\sum$ 的外部常數)
謎之彬音：內部的意思是當 $\sum$ 消失，$k$ 就無法存在。
謎之彬音：如果不喜歡 $k$，其他變數名稱亦可。 $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{n} a_j=\sum_{t=1}^{n} a_t=\cdots$

Ex41.證明： $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Ex42.求 $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\cdots+$ 至第 $n$ 項之和？[ $\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$ ]

Ex43.已知 $\sum_{k=1}^{3}(ak^2+bk)=30$ ， $\sum_{k=1}^{3}(ak^2-bk)=54$ ，求數對 $(a,b)$ 。[ $(3,-2)$ ]

四、等差級數(Arithmetic Series)

1. $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

2.連續 $k$ 項和=中項(平均)之 $k$ 倍， $S_{2n-1}=(2n-1)\cdot a_n$，總和比=平均比。
例如：二個等差數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$ ，
$\langle a_n\rangle$ 的前 9 項和 $S_9=9\cdot a_5$ ， $\langle b_n\rangle$ 的前 9 項和 $T_9=9\cdot b_5$ ，
則 $S_9:T_9=(9\cdot a_5):(9\cdot b_5)=a_5:b_5$

Ex44.設有二等差數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$ ， $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k, T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ ，
(1)若 $a_n$：$b_n$=$(3n+1)$：$(7n-11)$；試求 $S_7$：$T_7$ 與 $S_n$：$T_n$
(2)若 $S_n$：$T_n$=$(3n+1)$：$(7n-11)$；試求 $a_7$：$b_7$ 與 $a_n$：$b_n$
[13:17，$(3n+5):(7n-15)$；1:2，$(3n-1):(7n-9)$]

Ex45.等差數列之首 $n$ 項和為 9，首 $2n$ 項和為 12，求首 $3n$ 項和為何？[9]

Ex46.等差數列 $\langle a_n\rangle$ ，若 $a_5=8$ ， $a_{11}=-10$ ，求 $S_n$ 的最大值。[77]

五、等比級數(Geometric Series)

1. $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n=\begin{cases} n\cdot a_1 & ,r=1 \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} & ,r\neq1 \end{cases}$

2.(補充)若 $|r|<1$ 且 $n\to\infty$ ，則 $r^n\to0$ ，
得 $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\frac{a_1}{1-r}$

Ex47.等比數列之首 $n$ 項和為 48，首 $2n$ 項和為 60，求首 $3n$ 項和為何？[63]

Ex48.設有三數成等比數列，其和為 28，平方和為 336，求此數列？
[4,8,16 或 16,8,4]

Ex49.某人參加銀行儲蓄存款，每年年初存入 1 萬元，年利率 10%，每年複利一次，求第 10 年年底的本利和。[已知$(1.1)^{10}=2.59$]。[17.49 萬]

Ex50.某人年初向銀行借款 100 萬元，年利率 8%，複利計算，若此人每年年底需還本息一次，每次所還的金額相同，分十年還清，試問每次要還多少元？(四捨五入至千位， $1.08^{10}=2.16$ )[149000]

五、分式級數(拆項對消)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Ex51.求 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$ 之值。[ $\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$ ]

Ex52.求 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ 之值。[ $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ ]

Ex53.所有動物中身材最好的是?[斑馬]

Ex54.等差數列 $\langle a_n\rangle$ ，若 $a_{10}=23$ ， $a_{25}=-22$ ，則此數列從第幾項開始級數和為負值。[35]

Ex55.等差數列 $\langle a_n\rangle$ ，每項均為實數且公差為負值，若 $|a_8|=|a_{13}|$ ，則當 $n$ 為何值時 $S_n$ 有最大值。[10]

Ex56.正奇數分組如下：(1)，(3,5)，(7,9,11)，(13,15,17,19)，……，
則(1)第 $n$ 群的首項為何？(2)第 $n$ 群中各數總和為何？(3)999 為第幾群之第幾個數？
[ $n^2-n+1$ ， $n^3$ ，32，4]

Ex57.某水果販將橘子堆成長方形垛，若最底層長邊有 10 個橘子，短邊有 5 個，則此長方形垛最多有幾個橘子？[130]

Ex58.數列 $\langle a_n\rangle$ 前 $n$ 項的和 $S_n=n^2+2n+3$ ，求 $a_n$ 。[ $a_n=\begin{cases}6 & ,n=1\\ 2n+1 & ,n\geq 2\end{cases}$ ]

Ex59.數列 $\langle a_n\rangle$ ， $a_1+2\cdot a_2+3\cdot a_3+\cdots+n\cdot a_n=n(n+1)(n+2),\forall n\in\mathbb{N}$ ，求 $a_n$ 。
[ $3n+3$ ]

Ex60.設首項為 100，公差為 $-3$ 的等差數列之前 $n$ 項和為 $S_n$，
則當 $n$=？時，$S_n$ 有最大值為？[34，1717]

Ex61.一凸多邊形之所有內角成等差，公差為 5 度，最小角為 120 度，求邊數?[9]

Ex62.設 $a_n=(n+1)+(\frac{n}{2}+2)+(\frac{n}{4}+3)+(\frac{n}{8}+4)$ ， $\forall n\in\mathbb{N}$ ，有關數列<$a_n$>下列何者敘述為真？$(A)$為等差數列，公差為 10$(B)$為等差數列，公差為 15/8$(C)$為等比數列，公比為 1/8$(D)$為等比數列，公比為 1/2$(E)$既非等差亦非等比。[B]

Ex63.假設某鎮每年的人口數逐年成長，且成一等比數列。已知此鎮十年前有 25 萬人，現在有 30 萬人，那麼二十年後，此鎮人口應有幾萬人（求到小數點後一位）[43.2]

Ex64.一個邊長為 $n$ 的大正方形中，共有 $n^2$ 個單位正方形。如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了 $a_n$ 根火柴棒，求 $a_{n+1}-a_n$ 。[$4n+4$]

Ex65.一等差數列<$a_n$>之首項 $a_1$=50，公差為 $-4$ ，求 $\sum_{n=1}^{40}|a_n|$ =？[1796]

Ex66.設一等差級數數列的首項 $2+45i$，公差是 $1-3i$，若此數列的首 $n$ 項和為 $S_n$，則使 $S_n$ 為實數的正整數 $n$＝？[31]

Ex67.設有一等比數列，首項為 7，末項為 448，總和為 889，若此數列的公比為 $r$，項數為 $n$，則數對（$n$，$r$）。[(7,2)]

Ex68.在一直線上置有木樁 100 支，每支相隔 5 公尺，在第 30 支的地方有一人，想要木樁逐一搬運集中該處，問至搬完，共應走多少公尺路？[29200]

Ex69.設有兩個等差數列＜$a_n$＞＝＜1，4，7，10，…，1000＞，
＜$b_n$＞＝＜11，21，31，41，…，1001＞今從＜$a_n$＞與＜$b_n$＞二數列中
取出相同的項形成一個新數列＜$c_n$＞，試求此數列的和。[16863]

Ex70.設＜$a_n$＞為等差數列，首項－200，公差為 7。
(1)若 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 之值為最小，此時 $n$ 記為 $n_0$，則 $n_0$＝？
(2)承上，求此時 $\sum_{k=1}^{n_0}a_k$ 之值。[29，-2958]

Ex71.級數 5.5＋55.55＋555.555＋⋯＋至第 20 項之和為 $\frac{5}{81}(10^{21}+10^{k}+t), k, t\in Z$ ，則 $k$＝？$t$＝？[-20，-11]

Ex72. $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$ 之和。[ $6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$ ]

Ex73.等比級數其公比為正，前 10 項和為 2，前 20 項和為 2050，那麼公比為？首項為？[2，2/1023]

Ex74.平面上 $n$ 條直線最多把平面分成幾個區域。[ $\frac{n^2+n+2}{2}$ ]

Ex75.平面上 $n$ 個圓最多把平面分成幾個區域。[ $n^2-n+2$ ]

Ex76.平面上過同一個定點的 $n$ 個圓最多把平面分成幾個區域。[ $\frac{n^2+n+2}{2}$ ]

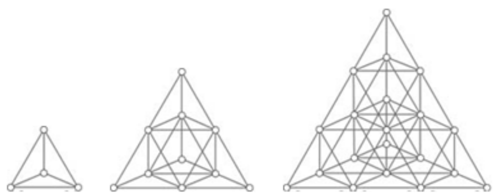
Ex77.空間中 $n$ 個平面最多把空間分成幾個區塊。[ $\frac{n^3+5n+6}{6}$ ]

Ex78.在圓上取 $n$ 個點($n$≧2)，兩兩相連所得的直線是否最多將此圓內區域分割成為 $2^{n-1}$ 個區域。[否][ $1+C_2^n+C_4^n$ ]

Ex79.大考考古：

Ex80.利用公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ，可計算出 $11^3+12^3+\cdots+20^3$ 之值為 (1)41075(2)41095(3)41115(4)41135(4)41155[91 自][1]

Ex81.用單位長的不鏽鋼條焊接如下圖系列的四面體鐵架，圖中的小圈圈「∘」表示焊接點，圖(一)有兩層共 4 個焊接點，圖(二)有三層共 10 個焊接點，圖(三)有四層共 20 個焊接點。試問依此規律，推算圖(五)有六層共多少個焊接點？[91 社][56]

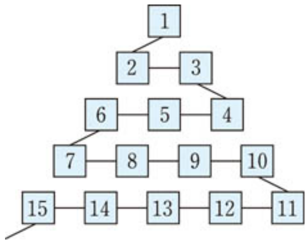


圖(一)　圖(二)　圖(三)

Ex82.若數列＜ $a_n$ ＞滿足 $a_1=\frac{1}{7}$ ， $a_2=\frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)$ ,( $n\geq 1$ )，則 $a_{101}-a_{100}$ ＝？[92 社][ $\frac{3}{7}$ ]

Ex83.已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，則下列哪一選項為此數列之公差？(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5[93 學][3]

Ex84.右圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇行模型，數字 1 出現在第 1 列；數字 2，3 出現在第 2 列；數字 6，5，4 ( 由左至右 ) 出現在第 3 列；數字 7，8，9，10 出現在第 4 列；依此類推。試問第 99 列，從左至右算，第 67 個數字為？[94 社][4884]

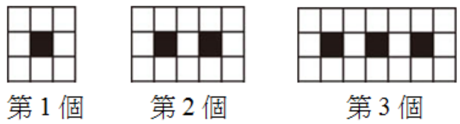



Ex85.假設實數 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 是一個等差數列，且滿足 $0<a_1<2$ 及 $a_3=4$ 。若定義 $b_n=2^{a_n}$ ，則以下哪此選項是對的？

(1) $b_1,b_2,b_3,b_4$ 是一個等比數列

(2) $b_1<b_2$ (3) $b_2>4$ (4) $b_4>32$ (5) $b_2\times b_4=256$ [95 學][12345]

Ex86.用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：拼成第 95 個圖需要用幾塊白色地磚。[95 學][478]




Ex87.某巨蛋球場 $E$ 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排 ( 即 13 排 )，發現此排共有 64 個座位，則此球場 $E$ 區共有幾個座位。[96 學][1600]

Ex88.平面上坐標皆為整數的點稱為格子點。我們將原點以外的格子點分層，方法如下：若 ( $a$，$b$ ) 是原點 ( 0，0 ) 以外的格子點，且 $|a|$ 和 $|b|$ 中最大值為 $n$，則稱( $a$，$b$ ) 是在第 $n$ 層的格子點 ( 例如 ( 3，－4 ) 是在第 4 層；( 8，－8 ) 是在第 8 層 )。則在第 15 層的格子點個數為______。[96 社][478]

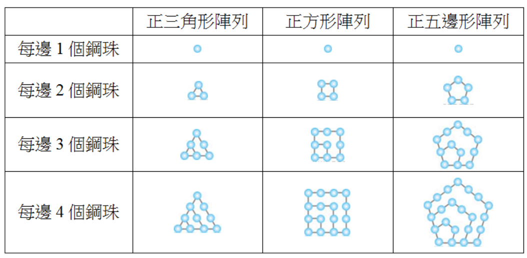
Ex89.已知 $a_1,a_2,a_3$ 為一等差數列，而 $b_1,b_2,b_3$ 為一等比數列，且此六數皆為實數，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a_1<a_2$ 與 $a_2>a_3$ 可能同時成立 (2) $b_1<b_2$ 與 $b_2>b_3$ 可能同時成立

(3) 若 $a_1+a_2<0$ ，則 $a_2+a_3<0$ (4) 若 $b_1\cdot b_2<0$ ，則 $b_2\cdot b_3<0$

(5) 若 $b_1,b_2,b_3$ 皆為正整數且 $b_1<b_2$ ，則 $b_1$ 整除 $b_2$ [97 學][24]

Ex90.用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如圖所示：已知 $m$ 個鋼珠恰好可以排成每邊 $n$ 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個。且知若用這 $m$ 個鋼珠去排成每邊 $n$ 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n$＝______，$m$＝______。[97 自][9，126]



Ex91.數列 $a_1+2,\cdots,a_k+2k,\cdots,a_{10}+20$ 共有十項，且其和為240，則 $a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_{10}$ 之值為(1) 31 (2) 120 (3) 130 (4) 185 (5) 218[98學][3]

Ex92.設 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 為一實數數列，且對所有的正整數 $n$ 滿足 $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}-a_n$ 。請問下列哪些選項是正確的？

(1)如果 $a_1=1$ ，則 $a_2=1$

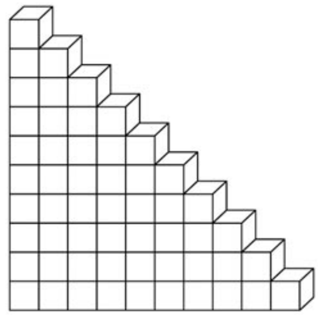
(2)如果 $a_1$ 是整數，則此數列的每一項都是整數

(3)如果 $a_1$ 是無理數，則此數列的每一項都是無理數

(4) $a_2\le a_4\le\cdots\le a_{2n}\le\cdots$ ( $n$ 為正整數)

(5)如果 $a_k$ 是奇數，則 $a_{k+2},a_{k+4},\cdots,a_{k+2n},\cdots$ 都是奇數( $n\in\mathbb{N}$ )[99學][234]

Ex93.將邊長為1公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如右圖所示，其中第1層 ( 最下層 )有10塊，第2層有9塊，…，依此類推。當堆疊完10層時，該階梯形立體的表面積 ( 即該立體的前、後、上、下、左、右各表面積的面積總和 )為多少？



(1) 75平方公分(2) 90平方公分(3) 110平方公分

(4) 130平方公分(5) 150平方公分[101學][5]

Ex94.設實數組成的數列$\langle a_n\rangle$是公比為－0.8的等比數列，實數組成的數列$\langle b_n\rangle$是首項為10的等差數列。已知$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$。請選出正確的選項。

(1) $a_9\times a_{10}<0$ (2) $b_{10}>0$ (3) $b_9>b_{10}$ (4) $a_9>a_{10}$ (5) $a_8>b_8$[102學][13]

## 附錄：常見遞迴式直接解法

**1.累加型： $a_{n+1}=a_n+f(n)$ (後項與前項係數相同)**

Ex95.數列 $\langle a_n\rangle$ ，若 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n+(n+1)^2,\forall n\in\mathbb{N}$ ，求 $a_n$ 。

解：

$$a_n=\cancel{a_{n-1}}+n^2$$

$$\cancel{a_{n-1}}=\cancel{a_{n-2}}+(n-1)^2$$

$$\cancel{a_{n-2}}=\cancel{a_{n-3}}+(n-2)^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$+)\ \cancel{a_2}=a_1+2^2$$

$\therefore$一般項 $a_n=a_1+2^2+3^2+\cdots+n^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**2.累乘型： $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$ (無附加項)**

Ex96.數列＜$a_n$＞，已知 $a_1=2$ 且 $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n$， $n\in\mathbb{N}$ ，求 $a_n$ 。

解：由 $a_2=\dfrac{3}{1}a_1$ ； $a_3=\dfrac{4}{2}a_2$ ； $a_4=\dfrac{5}{3}a_3$ ；……； $a_n=\dfrac{n+1}{n-1}a_{n-1}$

相乘得 $a_n=a_1\cdot\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n-2}\cdot\dfrac{n+1}{n-1}=2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$ ，$n\geqq 2$

而 $n=1$ 代入上式亦成立，故 $a_n=n(n+1)$， $\forall n\in N$

**3.混合型： $a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ ，(其中 $p$ 、$q$ 是常數)($p=1$ 為累加型)($q=0$ 為累乘型)**

Ex97.數列＜$a_n$＞，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+3, n\in N$ ，求 $a_n$ 。

[法一]$\because a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}+3$ 且 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+3$

$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}(a_n-a_{n-1})$ 即 $b_n=\dfrac{1}{2}b_{n-1}$

$\therefore$階差數列 $\langle b_n\rangle$ 為公比 $r=\dfrac{1}{2}$ 的等比數列，

其首項 $b_1=a_2-a_1=\dfrac{7}{2}-1=\dfrac{5}{2}$

故 $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\dfrac{\frac{5}{2}[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]}{1-\frac{1}{2}}=1+5[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]=6-5(\frac{1}{2})^{n-1}$

Ex98.續上題

[法二]令不動點 $L=a_{n+1}=a_n$ $\Rightarrow L=\dfrac{1}{2}L+3\Rightarrow L=6$ 原式即 $a_{n+1}-6=\dfrac{1}{2}(a_n-6)$

$$\cancel{(a_2-6)}=\frac{1}{2}(a_1-6)$$

$$\cancel{(a_3-6)}=\frac{1}{2}\cancel{(a_2-6)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\times)\quad (a_n-6)=\frac{1}{2}\cancel{(a_{n-1}-6)}$$

相乘對消得 $a_n-6=\dfrac{1}{2^{n-1}}(a_1-6)$ ，故 $a_n=6-\dfrac{5}{2^{n-1}}$

4.(課外)二階遞迴：$a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$

設原式為 $a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n, n\geq 1$，（其中 $p,q,a_1,a_2$ 是給定常數），

令 $p=\alpha+\beta$ ，$q=-\alpha\cdot\beta$ ，(即 $\alpha,\beta$ 是二次方程式 $x^2-px-q=0$ 的兩根)

得 $a_{n+2}=(\alpha+\beta)\cdot a_{n+1}-\alpha\cdot\beta\cdot a_n$ $\Rightarrow\begin{cases}(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\\(a_{n+2}-\beta a_{n+1})=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)\end{cases}$

分別以累乘型運算 $\Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\cdots\cdots(1)\\a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)\cdots\cdots(2)\end{cases}$

$(2)-(1)$ 得 $(\alpha-\beta)a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)-\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$

可解出 $a_n=\dfrac{a_2-\beta a_1}{\alpha(\alpha-\beta)}\alpha^n+\dfrac{a_2-\alpha a_1}{\beta(\beta-\alpha)}\beta^n$ 。

謎之音：最好是有人想背這個公式啦！

謎之彬音：那...改良一下 $a_n=h\cdot\alpha^n+k\cdot\beta^n$ 這樣有沒漂亮一點呀。

謎之音：挖勒！還是不知道 $h$ 與 $k$，有啥用？

謎之彬音：挖勒,too！啊是不會隨便代個 $a_1,a_2$ 解 $h,k$ 喔(請看下面例題[法二])

Ex99.數列 $\langle a_n\rangle$ ，$\begin{cases}a_1=3,a_2=5\\a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n, n\geq 1\end{cases}$ ，求 $a_n$ 。

[法一]

特徵方程 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0, \alpha=2, \beta=3$

$\Rightarrow\begin{cases}(a_{n+2}-2a_{n+1})=3(a_{n+1}-2a_n)\\(a_{n+2}-3a_{n+1})=2(a_{n+1}-3a_n)\end{cases}$，(計算恕略)累乘後 $\Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}-2a_n=3^{n-1}(a_2-2a_1)\\a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}(a_2-3a_1)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}-2a_n=-3^{n-1}\\a_{n+1}-3a_n=-4\cdot 2^{n-1}\end{cases}$ $\Rightarrow a_n=2^{n+1}-3^{n-1}$

[法二]

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0, \alpha=2, \beta=3$

令 $a_n=h\cdot 2^n+k\cdot 3^n$ ，當 $n=1,2$ $\Rightarrow\begin{cases}a_1=2h+3k=3\\a_2=4h+9k=5\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}h=2\\k=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ $\Rightarrow a_n=2^{n+1}-3^{n-1}$

費波那契數列（Fibonacci sequence）或簡稱費氏數列 $\langle F_n\rangle$ ：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，……

假設一對（雌雄各一）新生小兔，經過一個月後就長成大兔子，再一個月後會生出一對（雌雄各一）小兔子，而且從此以後每個月都會生出一對（雌雄各一）小兔子。

假設每對小兔子的生長與生育過程都是這樣只生不死(萬歲萬歲萬萬歲)。

設 $F_n$ 表示第 $n$ 個月時兔子的對數，根據假設，畫樹狀圖來協助我們瞭解，

以●表示一對新生兔子，○表示一對大兔子。

由題意知，從 $n\geq 3$ 起，

第 $n$ 個月時的兔子可分為大兔子與新生小兔兩種。

每對大兔子都是從第 $n-1$ 個月留下來的，

因此第 $n$ 個月時的大兔子對數與

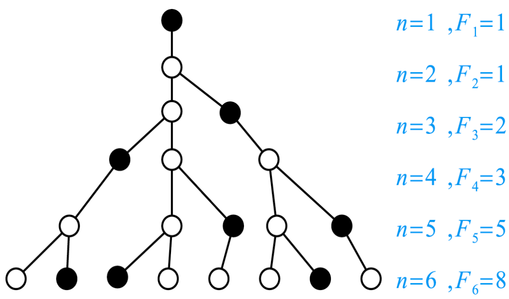
第 $n-1$ 個月時的兔子對數相等。

而新生小兔的父母必須在第 $n-2$ 個月時就存在，

再者每次兔子的生育都是生一對。

因此，第 $n$ 個月時的新生小兔的對數

與第 $n-2$ 個月時的兔子對數相等。




因此，數列 $\langle F_n\rangle$ 中隱含著以下的遞迴關係式：$\begin{cases}F_1=F_2=1\\F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\geq 3\end{cases}$

Ex100.設 $\langle F_n\rangle$ 是費波那契數列：$\begin{cases}F_1=1,F_2=1\\F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,n\geq 1\end{cases}$，求 $F_n$ 。

解： $x^2-x-1=0\Rightarrow\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

令 $F_n=h(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+k(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

當 $n=1,2$ $\Rightarrow\begin{cases}F_1=h(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})+k(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})=1\\F_2=h(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2+k(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_1=h(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})+k(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})=1\\F_2=h(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2})+k(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2})=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}h=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\k=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n,n\geq 1$

Ex101.設 $F_n$ 是費波那契數列：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$（ $n\geq 1$ ），則 (1) $F_{12}^2-F_{13}F_{11}$ =？(2)前 500 項中有幾項是奇數。[-1，334]

Ex102.用 7 與 8 二種阿拉伯數字組成 $n$ 位正整數，且無連續二個 8 相鄰，設滿足條件的 $n$ 位正整數有 $a_n$ 個。若 $a_n<100$ ，求 $n$ 最大值。[9]

Ex103.用 7 與 8 二種阿拉伯數字組成 $n$ 位正整數，且無連續三個 8 相鄰，設滿足條件的 $n$ 位正整數有 $a_n$ 個。若 $a_n<2010$ ，求 $n$ 最大值。[12]

5.(課外)分式遞迴：(1)異根:均同減,相除,迭代(2)重根:同減,倒數,假分數換帶分數

Ex104.設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=0$， $a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{4-a_n}$ ，求 $a_n$ 。

解： $L=\dfrac{L+2}{4-L}\Rightarrow L=1,2$ (異根)

$\begin{cases}a_{n+1}-1=\dfrac{a_n+2}{4-a_n}-1=\dfrac{2(a_n-1)}{4-a_n}\cdots(1)\\a_{n+1}-2=\dfrac{a_n+2}{4-a_n}-2=\dfrac{3(a_n-2)}{4-a_n}\cdots(2)\end{cases}$ $\dfrac{(1)}{(2)}\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{2}{3}\dfrac{a_n-1}{a_n-2}$ (G.P.)

$\Rightarrow\dfrac{a_n-1}{a_n-2}=(\dfrac{2}{3})^{n-1}\dfrac{a_1-1}{a_1-2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{3})^{n-1}$ $\Rightarrow a_n=\dfrac{2^{n-1}-3^{n-1}}{2^{n-2}-3^{n-1}}$

Ex105.設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=1$， $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$ ，求 $a_n$ 。

解： $L=\dfrac{3L-1}{4L-1}\Rightarrow L=\dfrac{1}{2}$ (重根)

$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_n-\frac{1}{2}}{4a_n-1}$ $\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}=\dfrac{4a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}=4+\dfrac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$ (A.P.)

$\Rightarrow\dfrac{1}{a_n-\frac{1}{2}}=4(n-1)+\dfrac{1}{a_1-\frac{1}{2}}=4n-2$ $\Rightarrow a_n=\dfrac{n}{2n-1}$

6.(課外)高階遞迴(特徵方程)

(1).重根二階遞迴：遞迴式：$a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$，( $p^2+4q=0$ )

若 $x^2-px-q=0$ 有重根β、β，則一般式 $a_n=h\cdot\beta^n+k\cdot n\cdot\beta^n$

取該數列之前二項代入求出係數 $h$，$k$，即可得 $a_n$ 一般式

(2).三階遞迴數列：

三異根：遞迴式 $a_{n+3}=p\cdot a_{n+2}+q\cdot a_{n+1}+r\cdot a_n$

若 $x^3-px^2-qx-r=0$ 之根為α、β、γ，則一般式 $a_n=g\cdot\alpha^n+h\cdot\beta^n+k\cdot\gamma^n$

二同一異根：遞迴式 $a_{n+3}=p\cdot a_{n+2}+q\cdot a_{n+1}+r\cdot a_n$

若 $x^3-px^2-qx-r=0$ 之根為α、β、β，則一般式 $a_n=g\cdot\alpha^n+(h+k\cdot n)\cdot\beta^n$

三同根：遞迴式 $a_{n+3}=p\cdot a_{n+2}+q\cdot a_{n+1}+r\cdot a_n$

若 $x^3-px^2-qx-r=0$ 之根為β、β、β，則一般式 $a_n=(g+h\cdot n+k\cdot n^2)\cdot\beta^n$

(補充)階差數列：若 $b_{n-1}=a_n-a_{n-1}$，則稱數列 $\langle b_n\rangle$ 是原數列 $\langle a_n\rangle$ 的階差數列，則

$$a_n-\cancel{a_{n-1}}=b_{n-1}$$

$$\cancel{a_{n-1}}-\cancel{a_{n-2}}=b_{n-2}$$

$$\cancel{a_{n-2}}-\cancel{a_{n-3}}=b_{n-3}$$

……

$$\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=b_2$$

$$+)\quad \cancel{a_2}-a_1=b_1$$

∴一般項 $a_n=a_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

謎之彬音：若 $\langle a_n\rangle$ 的一般式為 $k$ 次多項式，則 $\langle b_n\rangle$ 的一般式為 $k$-1 次多項式(差分)