Struktury formalne, czyli elementy Teorii Modeli

Szymon Wróbel, notatki z wykładu dra Szymona Żeberskiego

semestr zimowy 2016/17

1 Język

1.1 Sygnatura językowa

Sygnatura językowa: $L = (\{f_i\}_{i\in I}, \{P_j\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K})$

- f_i - symbol funkcyjny
- P_j - symbol relacji
- c_k - symbol stałej

Dodatkowo mamy funkcje:

$$\alpha : I \mapsto \mathbb{N}\backslash\{0\}$$
$$\beta : J \mapsto \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

Funkcja f_i jest $\alpha(i)$-arna, a relacja P_j jest $\beta(i)$-arna
Sygnatura to L, α, β

Przykład
Teoria ciał uporządkowanych (ciało uporządkowane to np. $\mathbb{R}$) Jakie symbole używamy:

- Symbole funkcyjne $(+), (\cdot)$ – funkcje binarne, $(-), (^{-1})$ – funkcje unarne
- Symbol relacyjny $\leqslant$ – relacja binarna
- Stałe 0,1

Czyli sygnatura języka ciał uporządkowanych jest następująca:

$$(\{+, \cdot, -, ^{-1}\}, \{\leqslant\}, \{0, 1\})$$
$$\alpha(+) = 2, \alpha(\cdot) = 2, \alpha(-) = 1, \alpha(^{-1}) = 1$$
$$\beta(\leqslant) = 2$$

Dodatkowo mamy symbole:

- logiczne: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =$
- pomocnicze: $), ($
- zmiennych: $x_0, x_1, x_2, ...$

1.2 Termy języka $\mathcal{L}$ (o sygnaturze (L, α, β))

Definicja: Zbiór termów $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ jest to najmniejszy zbiór spełniający warunki:

- $c_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, dla każdego $k \in K$
- $x_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$
- jeśli $\alpha(i) = n$ i $\tau_1, \tau_2, ...\tau_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, to $f_i(\tau_1, \tau_2, ...\tau_n) \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$

Przykłady termów w języku teorii ciał uporządkowanych:

$$0, 1, x, y, z, +(x, y), \cdot(0, 0), -(+(+(x, y),^{-1}(z)))$$

Wersja normalna (notacja infiksowa): $(x + y), (0 \cdot 0), -((x + y) + z^{-1})$

1.3 Formuły języka $\mathcal{L}$

Definicja: Zbiór formuł $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

- jeśli $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, to $(\tau_1 = \tau_2) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$
- jeśli $\beta(j) = n$ i $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, to $P_j(\tau_1, \tau_2, ...\tau_n) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$
- jeśli $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, to $\neg\varphi, (\varphi\wedge\psi), (\varphi\vee\psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), (\forall x_n)\varphi, (\exists x_n)\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$

Przykłady formuł języka teorii ciał uporządkowanych:

$$(\exists x)(x + y = 1 + 0)$$

$$(\forall x)(\exists y)(x + y \leqslant y^{-1})$$

1.4 Model języka $\mathcal{L}$

Jest to $\mathbb{M} = (M, \{f_i^M\}_{i\in I}, \{P_j^M\}_{j\in J}, \{c_k^M\}_{k\in K})$, gdzie:

- M to niepusty zbiór (M nazywamy uniwersum struktury)
- $f_i^M : M^{\alpha(i)} \mapsto M$
- $P_j \subseteq M^{\beta(j)}$
- $c_k^M \in M$

1.5 Interpretacja termów (bez zmiennych) w modelu $\mathbb{M}$

Konwencja: $\tau \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \to \tau^M \in M$
(τ^M : interpretacja termu τ)

- $(c_k)^M = c_k^M$
- $(f_i(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n))^M = f_i^M(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$

Przykład
$\tau = \cdot(+(1,1),1)$, struktura $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, ...)$
$\tau^{\mathbb{R}} = ((1+1)^{\mathbb{R}} \cdot 1)^{\mathbb{R}} = 2 \cdot 1 = 2$

CEL: mając $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ pokazać $\mathbb{M} \models \varphi$
Załóżmy, że φ jest zdaniem, tzn. w φ nie wystepują zmienne wolne.
W formułach $(\forall x)\psi$, $(\exists x)\psi$ zmienna x występująca w ψ jest związana.

Przykład
$(\exists y)((\forall x)(x \leqslant y) \wedge x = y)$ W formule x=y w powyższej formule, x jest wolny

Rozszerzamy język $\mathcal{L}$ do $\mathcal{L}(M)$
W $\mathcal{L}(M)$ mamy dodatkowo stałe c_a, dla $a \in M$
Owe stałe interpretujemy naturalnie, tzn. $c_a^M = a$

Definicja: ($\mathbb{M} \models \varphi$ dla zdań φ w języku $\mathcal{L}(M)$)

- $\mathbb{M} \models \tau_1 = \tau_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tau_1^M = \tau_2^M$
- $\mathbb{M} \models P_j(\tau_1, \tau_2, ...\tau_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$(\tau_1^M, \tau_2^M, ..., \tau_n^M) \in P_j^M$$
- $\mathbb{M} \models \varphi \vee \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{M} \models \varphi$ lub $\mathbb{M} \models \psi$
- $\mathbb{M} \models \neg\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathbb{M} \models \varphi$
- $\mathbb{M} \models (\exists x)\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a \in M$ takie, że $\mathbb{M} \models \varphi(c_a)$ (w $\varphi(x)$ mogą występować zmienne wolne, $\varphi(c_a)$ to formuła $\varphi(x)$ po zastąpieniu wszystkich wystąpień x przez c_a)
- $\mathbb{M} \models (\forall x)\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in M$ $\mathbb{M} \models \varphi(c_a)$

1.6 Spełnianie formuł

Niech $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ będzie formułą języka $\mathcal{L}$, w której występują zmienne wolne $x_1, ..., x_n$

Domknięcie uniwersalne tej formuły to:

$$\overline{\varphi} = (\forall x_1)(\forall x_2)...(\forall x_n)\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Definiujemy:
$$\mathbb{M} \models \varphi, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathbb{M} \models \overline{\varphi}$$

Przykład
$$\varphi = (\forall x)(x \geqslant 0 \to (\exists y)(y \cdot y))$$
$\mathbb{R} \models \varphi$, bo jeśli $a \geqslant 0$, to istnieje $b = \sqrt{a}$, takie, że $b \cdot b = a$
Ale $\mathbb{Q} \models \neg\varphi$, bo nie istnieje $b \in \mathbb{Q}$, takie że $b \cdot b = 2$

1.7 Teoria

Definicja: Ustalmy język $\mathcal{L}$. Teorią nazywamy zbiór $T \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$

Definicja: $\mathbb{M}$ jest modelem teorii T, jeśli $(\forall\varphi \in T)\ \mathbb{M} \models \varphi$
(Piszemy w skrócie $\mathbb{M} \models T$)

Przykład
Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem teorii grup, tzn. jego sygnatura $L = (\{\cdot, ^{-1}\}, \emptyset, e)$
$\cdot$ jest binarna, $^{-1}$ jest unarna

$$GT = \{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e,\ x \cdot e = e \cdot x = x\}$$

Jeśli $\mathbb{M} \models GT$, to $\mathbb{M}$ jest grupą.
Wiemy, że grupy istnieją, np. $(\mathbb{R}, \{+, -\}, \emptyset, 0)$, $(S_n, \{\circ, ^{-1}\}, \emptyset, \{id\})$

1.8 Dowodzenie w teorii T

Co to znaczy, że $T \models \varphi$? (czytamy: teoria T dowodzi φ)
Istnieje dowód, czyli ciąg formuł $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$

- $\varphi_i \in T$ (φ_i jest aksjomatem)

  lub

- φ_i jest tautologią Klasycznego Rachunku Logicznego, np.

  $$\varphi_i = (\forall x)(\gamma(x) \wedge \delta(x)) \to (\forall x)(\gamma(x)) \wedge (\forall x)(\delta(x))$$

  lub

- φ_i powstaje z $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}$ przy pomocy reguł dowodzenia

Wyjaśnienie
$\psi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ jest tautologią KRL $\iff$ dla dowolnego $\mathcal{L}$-modelu $\mathbb{M}$, mamy $\mathbb{M} \models \psi$

1.9 Reguły dowodzenia

$\dfrac{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k}{\alpha}$ oznacza, że z przesłanek $\alpha_1, ..., \alpha_k$ można wnioskować α

Poprawna reguła dowodzenia ma własność:
dla dowolnego modelu $\mathbb{M}$: jeśli $\mathbb{M} \models \alpha_1$, $\mathbb{M} \models \alpha_2$, ..., $\mathbb{M} \models \alpha_k$, to $\mathbb{M} \models \alpha$
Wystarczą dwie reguły dowodzenia:
Modus Ponens: $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$
Zasada generalizacji: $\dfrac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$

1.10 Sprzeczność, niesprzeczność, zupełność

Definicja: Teoria T jest sprzeczna jeśli istnieje $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, dla której $T \models \varphi$ i $T \models \neg\varphi$

Uwaga: Każdy program wyborczy jest sprzeczny. Dobry program wyborczy to taki, którego dowód sprzeczności jest długi i nieoczywisty.

Definicja: Teoria T jest niesprzeczna $\iff$ T nie jest teorią sprzeczną.

Twierdzenie
Teoria T jest niesprzeczna $\iff$ $(\forall T_0 \subseteq T)(T_0$ skończona $\to T_0$ niesprzeczna$)$
Dowód:

$\to$ oczywiste

$\leftarrow$ niewprost
Załóżmy, że T sprzeczna. Wtedy istnieje φ, takie że $T \models \varphi$ i $T \models \neg\varphi$. W dowodach wykorzystujemy skończony zbiór aksjomatów T_0, zatem $T_0 \models \varphi$ i $T_0 \models \neg\varphi$ $\square$

Twierdzenie (Gödel)

$$T \text{ jest niesprzeczna} \iff \text{T ma model } ((\exists \mathbb{M})(\mathbb{M} \models T))$$

Komentarz: Aby pokazać $\leftarrow$, zauważmy, że $T \models \varphi$ implikuje $\mathbb{M} \models \varphi$

Wniosek: Jeśli dowolny skończony $T_0 \subseteq T$ ma model, to T niesprzeczna.

Definicja: Teoria T jest zupełna ($T \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$), jeśli dla każdego $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$:

$$T \models \varphi \text{ lub } T \models \neg\varphi$$

Uwaga: Jeśli T nie jest zupełna, to istnieje φ, dla którego:

$$\neg(T \models \varphi) \land \neg(T \models \neg\varphi)$$

Mówimy wtedy, że φ jest niezalezne od T

Fakt: Jeśli $\neg T \models \varphi$ to $T \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna.

Oczywiście, jeśli $T \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna, to $\neg T \models \varphi$

Wniosek: Aby pokazać, że T nie jest zupełna wystarczy znaleźć $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, takie, że $T \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczna i $T \cup \{\neg\varphi\}$ niesprzeczna.

Przykład: CH jest niezależna od ZFC.

Przykład 2: GT jest niesprzeczna i nie jest zupełna

Niech $\varphi =$"jest n!+1 elementów"
$\varphi_n = (\exists x_1)(\exists x_2)...(\exists x_{n!})(\exists x_{n!+1})(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j)$

$\mathbb{R} \models \varphi$, $S_n \models \neg\varphi$

Przykład 3: Rozważmy teorię GT_∞ (teoria nieskończonych grup)

$GT_\infty = GT \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie φ_n zdefiniowana jak w poprzednim przykładzie.

GT_∞ jest niesprzeczna i nie jest zupełna:
Niech $\psi = (\forall x, y)(x \cdot y = y \cdot x)$

$\mathbb{R} \models \psi$, $S_\infty \models \neg\psi$ (S_∞ - grupa permutacji liczb naturalnych)
Dowód dla S_∞:
Używając twierdzenia Gódla wystarczy stwierdzić, że $S_n \models \neg\psi$, dla $n \geqslant 3$.
Zatem $GT_\infty \cup \{\neg\psi\}$ jest niesprzeczna $\square$

1.11 Teoria modelu, podstruktury

Definicja: Niech $\mathbb{M}$ będzie modelem dla języka $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}-$strukturą).
Teorią modelu $\mathbb{M}$ nazywamy zbiór $\mathfrak{Th}(\mathbb{M}) = \{\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}} : \mathbb{M} \models \varphi\}$

Fakt: $\mathfrak{Th}(\mathbb{M})$ jest niesprzeczną, zupełną teorią.
Dowód:
$\mathbb{M} \models \mathfrak{Th}(\mathbb{M})$, więc $\mathfrak{Th}(\mathbb{M})$ jest teorią niesprzeczną.
Weźmy dowolne $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$
Załóżmy, że $\varphi \notin \mathfrak{Th}(\mathbb{M})$ (w przeciwnym wypadku $\mathfrak{Th}(\mathbb{M}) \models \varphi$)
Wtedy nieprawda, że $\mathbb{M} \models \varphi$. Z definicji spełniania wtedy $\mathbb{M} \models \neg\varphi$ $\square$

Definicja: Niech $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ będą $\mathcal{L}-$strukturami

1. $\mathbb{M}$ jest izomorficzne z $\mathbb{N}$ ($\mathbb{M} \cong \mathbb{N}$) jeśli istnieje izomorfizm $\varphi : M \to N$, taki że:
   - φ jest bijekcją

- φ zachowuje strukturę, tzn.

$$(\forall i)(\forall a_1, a_2, ..., a_n, b \in M)(f_i^M(a_1, a_2, ..., a_n) = b \iff f_i^N(\varphi(a_1), \varphi(a_2), ..., \varphi(a_n)) = \varphi(b))$$

$$(\forall j)(\forall a_1, a_2, ..., a_n)(P_j^M(a_1, a_2, ..., a_n) \iff P_j^N(\varphi(a_1), \varphi(a_2), ..., \varphi(a_n)))$$

$$(\forall k)(\varphi(c_k^M) = c_k^N)$$

2. $\mathbb{M}$ jest elementarnie równoważne $\mathbb{N}$, jeśli $\mathfrak{Th}(\mathbb{M}) \cong \mathfrak{Th}(\mathbb{N})$

Fakt: Jeśli $\mathbb{M} \cong \mathbb{N}$ to $\mathbb{M} \equiv \mathbb{N}$

1.12 Elementarne podstruktury

Definicja: $\mathbb{M} \preccurlyeq \mathbb{N}$ ($\mathbb{M}$ jest elementarną podstrukturą (podmodelem) $\mathbb{N}$) oznacza, że $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ oraz dla dowolnego $\varphi(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{F_L}$ oraz $a_1, ...a_n \in M$ mamy $\mathbb{M} \models \varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \iff \mathbb{N} \models \varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n})$

Fakt: Jeśli $\mathbb{M} \preccurlyeq \mathbb{N}$ to $\mathbb{M} \equiv \mathbb{N}$
Dowód:
Weźmy dowolne zdanie $\varphi \in \mathcal{F_L}$. Wtedy z definicji elementarnej podstruktury:
$\mathbb{M} \models \varphi \iff \mathbb{N} \models \varphi$, czyli $\varphi \in \mathfrak{Th}(\mathbb{M}) \iff \varphi \in \mathfrak{Th}(\mathbb{N})$
Zatem $\mathfrak{Th}(\mathbb{M}) = \mathfrak{Th}(\mathbb{N})$, czyli $\mathbb{M} \equiv \mathbb{N}$ □

Twierdzenie (test Tarskiego-Vaughta)
Niech $\mathbb{M}$ będzie $\mathcal{L}$-strukturą oraz $A \subseteq M$.
Wtedy A jest uniwersum elementarnej podstruktury $\mathbb{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej formuły $\varphi(x_1, y_1, ..., y_n) \in \mathcal{F_L}$ oraz elementów $a_1, ..., a_n \in A$:

$$\mathbb{M} \models (\exists x)\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \iff \text{istnieje } a \in A, \text{ że } \mathbb{M} \models \varphi(c_a, c_{a_1}, ..., c_{a_n})$$

Dowód:

$\rightarrow$ Weźmy dowolne $\varphi \in \mathcal{F_L}$, $a_1, ..., a_n \in A$
$\mathbb{M} \models (\exists x)\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \iff$ (z elementarności)
$\mathbb{A} \models (\exists x)\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \iff$ (z definicji spełniania)
istnieje $a \in A$ $\mathbb{A} \models \varphi(c_a, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \iff$ (z elementarności)
istnieje $a \in A$ $\mathbb{M} \models \varphi(c_a, c_{a_1}, ..., c_{a_n})$ □

$\leftarrow$ A jest uniwersum podstruktury

1. Relacje
   P_j - relacja $\beta(j)$-arna
   $P_j^{\mathbb{A}} = P_j^{\mathbb{M}} \cap A^{\beta(j)}$
2. Funkcje
   Trzeba sprawdzić, że $f_i^{\mathbb{M}} \upharpoonright A^{\alpha(i)} : A^{\alpha(i)} \mapsto A$
   Niech $a_1, ..., a_n \in A$
   Wtedy $\mathbb{M} \models (\exists x)(x = f_i(c_{a_1}, ..., c_{a_n}))$
   Z założenia, istnieje $a \in A$, $\mathbb{M} \models (c_a = f_i(c_{a_1}, ..., c_{a_n}))$
   A zatem $f_i^{\mathbb{M}}(c_{a_1}, ..., c_{a_n}) = a$

3. Stałe
   $\mathbb{M} \models (\exists x)(c_k = x)$
   Z założenia, istnieje $a \in A$ $\mathbb{M} \models (c_a = c_k)$, co oznacza, że $a = c_k^{\mathbb{M}}$

Pokażemy, że $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{M}$
(dowód przez indukcję względem skomplikowania formuły ψ)

1. ψ – formuła atomowa
   $\mathbb{A} \models \psi \iff \mathbb{M} \models \psi$ (wynika z $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{M}$)
2. $\psi = \varphi_1 \vee \varphi_2$
   $\mathbb{A} \models \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff$ (z założenia indukcyjnego)
   $\mathbb{M} \models \varphi_1$ lub $\mathbb{M} \models \varphi_2 \iff \mathbb{M} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$
3. $\psi = \neg\varphi$ itp. analogicznie ...
4. $\psi = (\exists x)\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}), a_1, ..., a_n \in A$ $\mathbb{M} \models (\exists x)\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \iff$
   (z założenia)
   istnieje $a \in A$ $\mathbb{M} \models \varphi(c_a, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \iff$
   istnieje $a \in A$ $\mathbb{A} \models \varphi(c_a, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \iff$
   $\mathbb{A} \models (\exists x)\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n})$ $\square$

Twierdzenie: (dolne Löwenheima–Skolema)
Niech $\mathbb{M}$ będzie $\mathcal{L}$-strukturą, $\mathcal{L}$ przeliczalny. Niech $A \subseteq M$, A przeliczalny.
Wtedy istnieje $\mathbb{M}' \preccurlyeq \mathbb{M}$, taki, że $A \subseteq M'$
Dowód:
Niech $A_0 = A$
Niech $\Phi_0 = \{\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) : \mathbb{M} \models (\exists x)\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n})\}$
$(\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}\cup\{c_a : a \in A_0\}})$
$|\Phi_0| \leqslant \aleph_0$

Niech $a_\varphi \in M$, że $\mathbb{M} \models \varphi(c_{a_\varphi}, c_{a_1}, ..., c_{a_n})$, dla $\varphi \in \Phi_0$

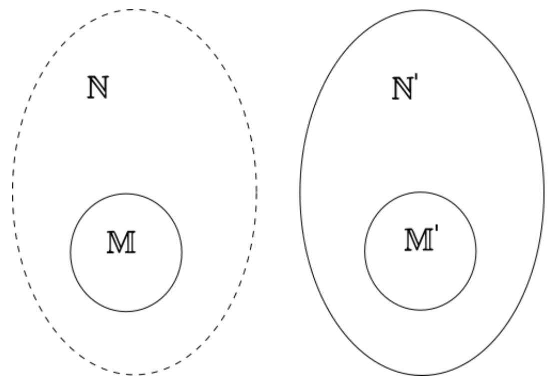
$A_1 = \{a_\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$, $|A_1| \leqslant \aleph_0$
$\Phi_1 = \{\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) : \mathbb{M} \models (\exists x)\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n})$
$(\varphi(x, c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}\cup\{c_a : a \in A_1\}})$

Kontynuujemy, kładziemy $M' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
M' jest przeliczalny, $A \subseteq M'$
M' spełnia test Tarskiego-Vaughta! $\square$

Twierdzenie: (górne Löwenheima–Skolema)
Niech $\mathbb{M}$ będzie $\mathcal{L}$-strukturą. Niech $\kappa > |M|, M$ nieskończony.
Wtedy istnieje $\mathbb{N} \succcurlyeq \mathbb{M}, |N| \geqslant \kappa$
Dowód:
Niech $T = \mathfrak{Th}(\mathbb{M}, \{c_a, a \in M\})$
(teoria modelu $\mathbb{M}$ w języku wzbogaconym o stałe c_a (dla $a \in M$))
Wzbogaćmy język o kolejne dodatkowe stałe : $\{c_\alpha : \alpha \in \kappa\}$
Niech $T' = T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha \neq \beta\}$

T' jest niesprzeczny, bo dowolny skończony fragment $T_0 \subseteq T'$ ma model.
W $\mathbb{M}$ interpretujemy stałe c_α (występujące w T_0), tak aby były parami różne.

Z twierdzenia Gödla istnieje $\mathbb{N}' \models T'$, $|N'| \geqslant \kappa$, bo $N' \supseteq \{c_\alpha^{\mathbb{N}'} : \alpha \in \kappa\}$ W $\mathbb{N}'$ istnieje izomorficzna kopia modelu $\mathbb{M}$
$M' = \{c_\alpha^{\mathbb{N}'} : \alpha \in M\}$ ($\mathbb{M}'$ to "zielony" model $\mathbb{M}$)



Fakt: DLO_0 jest zupełna (teoria gęstych liniowych porządków bez końców)
Dowód: (lista 9)
Wiemy, że jeśli $\mathbb{M} \models DLO_0$ i $\mathbb{N} \models DLO_0$ oraz $|M| = |N| = \aleph_0$, to $\mathbb{M} \cong \mathbb{N}$

Przypuśćmy, że DLO_0 nie jest zupełna.
Wtedy istnieje φ, takie że $T = DLO_0 \cup \{\varphi\}$ i $S = DLO_0 \cup \{\neg\varphi\}$ są niesprzeczne.
Niech $\mathbb{M} \models S, \mathbb{N} \models T$
Z dolnego twierdzenia Löwenheima–Skolema istnieją przeliczalne $\mathbb{M}', \mathbb{N}'$, że

$$\mathbb{M}' \preccurlyeq \mathbb{M},\ \ \mathbb{N}' \preccurlyeq \mathbb{N}$$

Wtedy $\mathbb{M}' \cong \mathbb{N}$. Zatem $\mathfrak{Th}(\mathbb{M}') = \mathfrak{Th}(\mathbb{N}')$.
Ale $\varphi \in \mathfrak{Th}(\mathbb{M}')$, a $\neg\varphi \in \mathfrak{Th}(\mathbb{N}')$
co jest sprzecznością z definicją teorii modelu. $\square$