Metody Probabilistyczne - Skrypt

Wiedza skondensowana jak mleko w tubce

prof. dr hab. inż. Aleksander Lasecki

Spis treści

1 Podstawowe zagadnienia

1.1 Podstawowe pojęcia

Zdarzeniem elementarnym nazywamy niepodzielny wynik pewnego doświadczenia.
Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych (dla danego doświadczenia) nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i oznaczamy go przez Ω.
Zdarzeniem losowym nazywamy pewien podzbiór Ω. W przypadku, gdy przestrzeń jest co najwyżej przeliczalna, zbiorem wszystkich zdarzeń losowych jest po prostu $\mathbb{P}(\Omega)$, natomiast w przypadku gdy przestrzeń jest nieprzeliczalna zbiorem tym będzie rodzina $\mathcal{S}$ o której za chwilę.
Jako, że zdarzenia są zbiorami, możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach (*suma, iloczyn itp*).
Zdarzeniem pewnym jest cały zbiór Ω.
Zdarzeniem niemożliwym jest zbiór $\emptyset$.
Zdarzenia **rozłączne** to takie, że $A \cap B = \emptyset$.
Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy zdarzenie $A' = \Omega - A$.
Rodzinę zdarzeń postaci $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, której elementy są parami rozłączne oraz dla której $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ nazywamy **układem zupełnym**.

1.2 Najmniejsze (bo małe ciała są fajne) przeliczalnie addytywne ciało zdarzeń

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz niech $\mathcal{S}^*$ będzie taką rodziną podzbiorów Ω, że $\Omega \in \mathcal{S}^*$, $(\forall A \in \mathcal{S}^*)\,(\Omega - A \in \mathcal{S}^*)$ oraz $(\forall A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathcal{S}^*)\,(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}^*)$. Rodzinę taką nazywamy **przeliczalnie addytywnym ciałem zdarzeń**. Najmniejszą z tych rodzin oznaczać będziemy przez $\mathcal{S}$. Jest to rodzina zbiorów **borelowskich** której elementami są zdarzenia losowe.

1.3 Definicja rozkładu prawdopodobieństwa

Mamy zbiory Ω oraz $\mathcal{S}$. Definiujemy funkcję $\mathbf{P}$ następująco:

$$\mathbf{P}:\ \mathcal{S}\ \rightarrow\ \mathbb{R}$$

$$(\forall A \in \mathcal{S})\,(\mathbf{P}(A) \geqslant 0)$$

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1$$

$$(\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S})\left((\forall A_i,\ A_j)\,(A_i \cap A_j = \emptyset) \rightarrow \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\,(A_i)\right)$$

Funkcję taką nazywamy **rozkładem prawdopodobieństwa**, a jej wartości **prawdopodobieństwem** zdarzeń losowych.

1.4 Podstawowe własności rozkładu prawdopodobieństwa

$$\mathbf{P}\,(\emptyset) = 0$$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\,(A_i)$$

$$\mathbf{P}\,(A') = 1 - \mathbf{P}\,(A)$$

$$\mathbf{P}\,(A \cup B) = \mathbf{P}\,(A) + \mathbf{P}\,(B) - \mathbf{P}\,(A \cap B)$$

$$A \subset B \rightarrow \mathbf{P}\,(A) \leqslant \mathbf{P}\,(B)$$

1.5 Ciekawsze własności rozkładu prawdopodobieństwa

Jeśli zdarzenia A_1, A_2, ... stanowią ciąg **wstępujący**, czyli mamy $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ oraz jeśli $\bigcup_i A_i = A$ wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$$

Dowód przeprowadzamy rozpatrując różnice między kolejnymi zbiorami ($A_i - A_{i-1} = B_i$).
Jeśli zdarzenia A_1, A_2, ... stanowią ciąg **zstępujący**, czyli mamy $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ oraz jeśli $\bigcap_i A_i = A$ wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$$

Do dowodu wykorzystujemy poprzedni fakt.

1.6 Dystrybuanta

Niech $\Omega = \mathbb{R}^1$. Definiujemy funkcję $\mathbf{F}$ w następujący sposób:

1. $\mathbf{F}$ jest niemalejąca
2. $\lim_{x\to-\infty} \mathbf{F}(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to\infty} \mathbf{F}(x) = 1$
3. $\mathbf{F}$ jest lewostronnie ciągła

Taką funkcje nazywamy **dystrybuantą** i definiuje ona, jednoznacznie, rozkład prawdopodobieństwa w następujący sposób:

$$\mathbf{P}(\langle a; b)) = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

Mając rozkład prawdopodobieństwa możemy również w jednoznaczny sposób wyznaczyć dystrybuantę jako:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}((-\infty; x))$$

2 Prawdopodobieństwo warunkowe. Niezależność zdarzeń

2.1 Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem wystąpienia zdarzenia B (przy założeniu, że $\mathbf{P}(B) > 0$) oznaczamy przez $\mathbf{P}(A|B)$ i definiujemy następująco:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B)$$

Zauważmy, że funkcja $\mathbf{P}(A|B)$, przy ustalonym B spełnia aksjomaty rozkładu prawdopodobieństwa.
Na podstawie powyższego wzoru możemy, za pomocą indukcji matematycznej, wyznaczyć wzór na prawdopodobieństwo iloczynu zbiorów:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \ldots \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\,\mathbf{P}(A_2|A_1)\,\mathbf{P}(A_1)$$

2.2 Niezależność zdarzeń

Zdarzenie nazywamy **niezależnymi** jeśli zachodzi następujący warunek:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$$

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$$

Warunek ten możemy również zapisać w postaci:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$$

2.3 Rodziny zdarzeń niezależnych

Rodzinę zdarzeń $\{A_i\}_{i=1}^n$ nazywamy rodziną zdarzeń niezależnych jeśli dla każdych k_1, k_2, ..., k_p, takich, że $1 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant n$ mamy:

$$\mathbf{P}\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_p}\right) = \mathbf{P}\left(A_{k_1}\right)\mathbf{P}\left(A_{k_2}\right)\ldots\mathbf{P}\left(A_{k_p}\right)$$

Rodzinę zdarzeń $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ nazywamy rodziną zdarzeń niezależnych jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$, takiego, że $n > 1$ rodzina $\{A_i\}_{i=1}^n$ jest rodziną zdarzeń niezależnych.
Niech $\{A_i\}_{i=1}^{n+1}$ będzie rodziną zdarzeń niezależnych. Wtedy zdarzenia $\bigcup_{i=1}^n A_i$ oraz A_{n+1} są parą zdarzeń niezależnych.
Niech $\{A_i\}_{i=1}^n$ będzie rodziną zdarzeń niezależnych. Wtedy $\{A_i'\}_{i=1}^n$, czyli rodzina składająca się ze zdarzeń A_1', A_2' itd, jest rodziną zdarzeń niezależnych.

3 Prawdopodobieństwo zupełne. Wzór Bayesa

3.1 Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Niech $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$ będzie układem zupełnym takim, że $(\forall C \in \mathcal{A})\left(\mathbf{P}\left(C\right) > 0\right)$. Wtedy zachodzi następujący wzór:

$$\mathbf{P}\left(B\right) = \sum_i \mathbf{P}\left(B|A_i\right)\mathbf{P}\left(A_i\right)$$

3.2 Twierdzenie Bayesa

Niech $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$ będzie układem zupełnym takim, że $(\forall C \in \mathcal{A})\left(\mathbf{P}\left(C\right) > 0\right)$ oraz $\mathbf{P}\left(B\right) > 0$. Wtedy prawdziwe jest następujące zdanie:

$$(\forall C \in \mathcal{A})\left(\mathbf{P}\left(C|B\right) = \frac{\mathbf{P}\left(B|C\right)\mathbf{P}\left(C\right)}{\sum_i \mathbf{P}\left(B|A_i\right)\mathbf{P}\left(A_i\right)}\right)$$

Lub inaczej:

$$(\forall C \in \mathcal{A})\left(\mathbf{P}\left(C|B\right) = \frac{\mathbf{P}\left(B|C\right)\mathbf{P}\left(C\right)}{\mathbf{P}\left(B\right)}\right)$$

4 Zmienne losowe

4.1 Definicja zmiennej losowej

Niech $(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{P})$ będzie dowolną przestrzenią probabilistyczną. Zmienną losową X nazywamy funkcję zdefiniowaną następująco:

$$X : \Omega \ \to \ \mathbb{R}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathbf{S}\right)$$

W szczególności, gdy Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, każde przekształcenie typy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową.

4.2 Definicja rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{P})$ jest następująca funkcja, określona na rodzinie zbiorów borelowskich na prostej (oznaczmy ją przez $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}$):

$$\mathbf{P}_X(A) = \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}\right)$$

Zauważmy, że zdefiniowane wyżej byty indukują nową przestrzeń probabilistyczną $(\mathbb{R}, \mathbf{S}_{\mathcal{B}}, \mathbf{P}_X)$.
Zgodnie z metodą podaną wcześniej, dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X definiujemy jako:

$$\mathbf{F}_X(x) = \mathbf{P}_X\left((-\infty; x)\right)$$

Otrzymujemy również następującą zależność:

$$\mathbf{P}_X\left(\langle a, b)\right) = \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : a \leqslant X(\omega) < b\}\right) = \mathbf{F}_X(b) - \mathbf{F}_X(a)$$

Możemy również stosować skrócony zapis:

$$\mathbf{P}\left(a \leqslant X < b)\right) = \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : a \leqslant X(\omega) < b\}\right)$$

5 Podstawowe typy zmiennych losowych

5.1 Zmienne losowe typu skokowego

Zmienna losowa typu skokowego (bądź inaczej: dyskretna zmienna losowa) to taka dla której istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $\mathcal{X}$ (czyli zbiór postaci $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lub $\{x_1, x_2, \ldots\}$, gdzie x_k nazywamy wartościami zmiennej losowej) dla którego $\mathbf{P}_X(\mathcal{X}) = 1$.
Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej wygląda wtedy następująco:

$$p(x_k) = \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}\right)$$

Zauważmy, że $\sum_k p(x_k) = 1$ oraz, że dystrybuanta naszej zmiennej losowej jest lewostronnie ciągła, przedziałami stała i ma skoki w punktach gdzie $p(x_k) > 0$ o wartości $p(x_k)$.

5.2 Zmienne losowe typu ciągłego

Niech teraz $\mathcal{X} = \mathcal{R}$. Zmienną losową typu ciągłego jest funkcja zdefiniowana w następny sposób:

$$\mathbf{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

Gdzie f jest funkcją nazywaną **gęstością prawdopodobieństwa**, która jest nieujemna oraz spełnia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$$

W przedziałach w których f jest ciągła zachodzi zależność:

$$\mathbf{F}'(x) = f(x)$$

Prawdopodobieństwo $\mathbf{P}(x_1 \leqslant X < x_2)$ dla $x_1 < x_2$ określamy, z własności dystrybuanty, jako:

$$\mathbf{P}(x_1 \leqslant X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(u)du$$

Zauważmy również, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\mathbf{P}(X = x_0) = 0$$

6 Funkcje zmiennej losowej

6.1 Definicja

Niech X będzie zmienną losową oraz niech g będzie dowolną funkcją borelowską. Wtedy **funkcję zmiennej losowej Y** definiujemy jako:

$$Y(\omega) = g\left(X(\omega)\right)$$

6.2 Własności

Jeżeli znamy gęstość zmiennej losowej X, dystrybuantę zmiennej losowej Y znajdujemy w następujący sposób:

$$\mathbf{F}_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}\left(g(X) < y\right) = \int_{\{x:g(x)<y\}} f_X(x)dx$$

Jeśli g jest funkcją różniczkowalną oraz ściśle monotoniczną (czyli rosnącą lub malejącą), oznaczamy przez g^{-1} funkcję odwrotną do g i mamy: Dla g rosnącej:

$$\frac{d}{dy}\mathbf{F}_Y(y) = f_Y(Y) = \frac{d}{dy}\int_{\{x:g(x)<y\}} f_X(x)dx = \frac{d}{dy}\int_{\{x:x<g^{-1}(y)\}} f_X(x)dx = f_X\left(g^{-1}(y)\right)(g^{-1})'(y)$$

Dla g malejącej:

$$\frac{d}{dy}\mathbf{F}_Y(y) = f_Y(Y) = \frac{d}{dy}\int_{\{x:g(x)<y\}} f_X(x)dx = \frac{d}{dy}\int_{\{x:x>g^{-1}(y)\}} f_X(x)dx = -f_X\left(g^{-1}(y)\right)(g^{-1})'(y)$$

Czyli ogólnie:

$$\frac{d}{dy}\mathbf{F}_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|(g^{-1})'(y)\right|$$

Pamiętajmy, że gdy X jest typu ciągłego oraz g jest ściśle monotoniczna nie implikują tego, że Y jest typu ciągłego.

7 Wartość przeciętna i wariancja

7.1 Definicja wartości przeciętniej

Wartość przeciętną/oczekiwaną/średnią dla zmiennej losowej X typu skokowego określamy jako:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k p(x_k)$$

Przy warunku, że szereg $\sum_k |x_k| p(x_k)$ jest zbieżny.
Wartość przeciętną/oczekiwaną/średnią dla zmiennej losowej X typu ciągłego określamy jako:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx$$

Przy warunku, że całka $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x)dx$ jest zbieżna.

7.2 Wartość przeciętna funkcji zmiennej losowej

Niech zmienna losowa Y będzie funkcją zmiennej losowej X ($Y = g(X)$), przy czym znamy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
Wartość przeciętną/oczekiwaną/średnią dla zmiennej losowej Y typu skokowego określamy jako:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_k g(x_k) p(x_k)$$

Przy warunku, że szereg $\sum_k |g(x_k)| p(x_k)$ jest zbieżny.
Wartość przeciętną/oczekiwaną/średnią dla zmiennej losowej Y typu ciągłego określamy jako:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)dx$$

Przy warunku, że całka $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| f(x)dx$ jest zbieżna.

7.3 Własności wartości przeciętnej

Niech zmienna losowa Y będzie funkcją zmiennej losowej X ($Y = g(X)$) oraz niech g będzie postaci $aX + b$ dla dowolnych a, b. Wtedy określamy wartość przeciętną jako:

$$\mathbb{E}\,(Y) = \mathbb{E}\,(aX + b) = a\mathbb{E}\,(X) + b$$

Niech zmienna losowa Y będzie funkcją zmiennej losowej X ($Y = \sum_i g_i(X)$) oraz niech $\mathbb{E}(g_i(X))$ istnieje dla każdego $i \in [N]$. Wtedy określamy wartość przeciętną jako:

$$\mathbb{E}\,(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_i g_i(X)\right) = \sum_i \mathbb{E}\,(g_i(X))$$

7.4 Definicja wariancji

Wariancja opisuje 'rozrzut' wartości zmiennej losowej względem wartości oczekiwanej. Definiujemy ją w następujący sposób:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Lub inaczej:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Zmienną losową X dla której $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{V}(X) = 1$ nazywamy **zmienną losową standaryzowaną**.
Pierwiastek z wariancji nazywamy **odchyleniem standardowym**.

7.5 Własności wariancji

Niech X będzie zmienną losową dla której istnieje wariancja. Wtedy zachodzi zależność:

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby $\mathbb{V}(X) = 0$ jest to, aby rozkład X był jednopunktowy.
Funkcja φ określona jako:

$$\varphi(c) = \mathbb{E}((X - c)^2)$$

Przyjmuje najmniejszą wartość gdy $c = \mathbb{E}(X)$.

7.6 Nierówność Czebyszewa

Jeśli zmienna losowa X spełniająca warunek $\mathbf{P}(X < 0) = 0$ ma wartość przeciętną $\mathbb{E}(X)$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy:

$$\mathbf{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

7.7 Nierówność Czebyszewa-Bienayme

Jeśli zmienna losowa X ma wariancje $\mathbb{V}(X)$ i wartość przeciętną $\mathbb{E}(X)$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy:

$$\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

7.8 Nierówność Markowa

Jeśli zmienna losowa X ma wartość przeciętną $\mathbb{E}(X)$, to dla dowolnych $\varepsilon, p > 0$ mamy:

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{\varepsilon^p}$$

7.9 Centralne twierdzenie graniczne

Dla danego rozkładu, określonej wartości oczekiwanej m i skończonej wariancji σ^2 określamy zbiór zdarzeń niezależnych, które oznaczamy przez X_i. Wtedy:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Zbiega według rozkładu do standardowego rozkładu normalnego przy $n \to \infty$.

8 Popularne rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych

8.1 Rozkłady jednopunktowy i dwupunktowy

Niech $\mathcal{X} = \{x_0\}$ oraz $\mathbf{P}(X = x_0) = 1$. Wtedy mówimy, że zmienna losowa X ma **rozkład jednopunktowy**. $\mathbb{E}(X) = x_0$, $\mathbb{V}(X) = 0$.
Niech $\mathcal{X} = \{x_0, x_1\}$ oraz $\mathbf{P}(X = x_0) = p$, $\mathbf{P}(X = x_1) = 1 - p$. Wtedy mówimy, że zmienna losowa X ma **rozkład dwupunktowy**. $\mathbb{E}(X) = p(x_0 - x_1) + x_1$, $\mathbb{V}(X) = p(1-p)(x_0 - x_1)^2$.

8.2 Rozkład dwumianowy

Wykonujemy n razy doświadczenie, które można opisać za pomocą rozkładu dwumianowego, przy czym możliwe wyniki to A oraz A'. Prawdopodobieństwo wystąpienia k sukcesów wyraża się wzorem:

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Zauważmy, że:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \ \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

Wartość najbardziej prawdopodobną (nie mylić z wartością oczekiwaną) określamy jako:

$$\Big[(n+1)p\Big]$$

Gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą z x.

8.3 Rozkład Poissona(nie czytać Pojzona)

Niech $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ oraz niech $k \in \mathbb{N}$. Rozkład Poissona($\mathbf{Pois}(\lambda)$, gdzie $\lambda > 0$) określamy jako:

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Mamy, również:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$$

Zauważmy, że jeśli rozważamy serię doświadczeń zgodną ze schematem Bernoulliego, gdzie liczba doświadczeń jest duża, a prawdopodobieństwo sukcesu małe, rozkład Poissona jest dobrą aproksymacją rozkłady Bernoulliego(dwumianowego) dla $\lambda = np$.

8.4 Rozkład jednostajny

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \leqslant a \\ \frac{1}{b-a} & : a < x \leqslant b \\ 0 & : x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a} & : a < x \leqslant b \\ 1 & : x > b \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

8.5 Rozkład wykładniczy

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & : x \geqslant 0,\ \lambda > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & : x \geqslant 0,\ \lambda > 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

8.6 Rozkład normalny

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}(X) = m \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$