Analiza Matematyczna 1 - powtórzenie

Jakub Gogola, Mikołaj Pietrek, Paweł Wilkosz

19 stycznia 2018

1 Wstęp

Drogi czytelniku! Jeśli to czytasz, prawdopodobnie tak jak ja stoisz u wrót egzaminu a Analizy Matematycznej 1 z prof. Pawłem Krupskim i szukasz źródła które pomoże co w powtórzeniu całej teorii potrzebnej żeby zdać ten piękny przedmiot. W tym celu postanowiłem zrobić tego PDFa :—) (#pdk hehe) jest to zapis notatek Jakuba Gogoli z pewnymi zmianami poczynionymi przeze mnie. Dołączam także kartę wzorów autorstwa Mikołaja Pietrka. Zastrzegam iż jest to projekt non-profit (z czego 50% obiecałem Jakubowi Gogoli i Mikołajowi Pietrkowi).

NIE GWARANTUJĘ SKUTECZNOŚCI PONIŻSZYCH NOTATEK, JEŻELI CHCESZ MIEĆ 100% PEWNOŚĆ POPRAWNOŚCI MATERIAŁU, ZAJRZYJ DO LITERATURY!!!

2 Ciągi

Definicja 2.0.1. (Ciąg liczb rzeczywistych)

Ciągiem liczb rzeczywitych nazywamy dowolną funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Wartości $f(n)$ to wyrazy ciągu.

Definicja 2.0.2. (Granica ciągu)

Liczba $a \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu (a_n), gdy:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant k)(|a_n - a| < \epsilon)$$

Mówimy wtedy, że ciąg jest zbieżny do granicy a, czyli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Lub prościej: $\lim a_n = a$

2.1 Własności ciągów zbieżnych

1. Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.
2. ciąg zbieżny jest ograniczony jeśli $\lim a_n = a$ to $(\exists k)(\forall n \geqslant k)(|a_n - a| < 1)$
3. $\lim |a_n| = |\lim a_n|$

Twierdzenie 2.1.1. (o trzech ciągach)

Jeżeli $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ dla dostatecznie dużych n i $\lim a_n = \lim b_n$ to $\lim a_n = \lim a_n = \lim b_n$

Twierdzenie 2.1.2. Każdy ciąg **monotoniczny** i **ograniczony** jest **zbieżny**

Definicja 2.1.1. (ciąg rozbieżny)

Ciąg jest rozbieżny do ∞, gdy

$$(\forall r \in \mathbb{R})(\exists k)(\forall n \geqslant k)(a_n > r)$$

Ciąg jest rozbieżny do $-\infty$, gdy

$$(\forall r \in \mathbb{R})(\exists k)(\forall n \geqslant k)(a_n < r)$$

Twierdzenie 2.1.3.

1. Jeśli $\lim a_n = \pm\infty$ to $\lim \frac{1}{a_n} = 0$
2. Jeśli $(\lim a_n) = 0$, $a_n > 0$ dla prawie wszystkich n ($(\exists N)(\forall n > N)$) to $\lim \frac{1}{a_n} = +\infty$ (analogicznie $-\infty$ dla $a_n < 0$)
3. Jeśli (a_n) jest **ograniczony** i $\lim(b_n = \infty)$ to $\lim(a_n + b_n) = \infty$
   oraz $\lim(a_n - b_n) = -\infty$ i $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = 0$
4. Jeśli $\lim a_n = a$, $a > 0$, $\lim b_n = \infty$, to $\lim a_n b_n = \infty$ (analogicznie gdy $\lim b_n = -\infty$)

Definicja 2.1.2. (podciąg)

Jeśli $(\forall n \in \mathbb{N}) m_1 < m_2 < ... < m_n \in \mathbb{N}$, to $(a_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ nazywamy podciągiem ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Twierdzenie 2.1.4. Podciąg ciągu zbieżnego do a jest zbieżny do a.

Twierdzenie 2.1.5. (Bolzano-Weierstrasa)

Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny.

<u>WNIOSEK</u>

1. Każdy ciąg ograniczony (a_n) taki, że każdy jego podciąg jest zbieżny do granicy g jest też zbieżny do granicy g.
2. Każdy ciąg ograniczony rozbieżny zawiera przynajmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Twierdzenie 2.1.6. (Warunek Cauchy'ego)

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geqslant k)(|a_m - a_n| < \epsilon)$$

FAKT.

1. Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.
2. Każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest ograniczony.
3. Każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego zawiera podciąg zbieżny.

Twierdzenie 2.1.7. (Cauchy)

Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny $\iff$ spełnia warunek Cauchy'ego.

3 Szeregi liczbowe

Definicja 3.0.1. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Szeregiem o wyrazach a_n, $n = 1, 2, ...$, nazywamy **ciąg sum częściowych**:

$$S_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Definicja 3.0.2.

Granicą ciągu sum częściowych, o ile istnieje, nazywa się sumę szeregu i jest oznaczana $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ...$

Mówimy wtedy że szereg jest zbieżny. W przeciwnym razie - rozbieżny.

Definicja 3.0.3. (n-ta reszta)

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ to **n-ta reszta** szeregu $\sum_{k=1}^{\infty}$

3.1 Podstawowe własności szeregów

1. Jeśli $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ są zbieżne ,to $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k$ jest zbieżny oraz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
2. Jeśli $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny to: $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
3. Jeżeli $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny to ciąg reszt $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny do 0.
4. (Warunek Cauchy'ego)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ jest zbieżny} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(|\underbrace{a_{k+1} + ... + a_{k+m}}_{\substack{\text{m-ta suma częściowa} \\ \text{k-tej reszty}}}| < \epsilon)$$

3.2 Kryteria zbieżności szeregów

1. Leibniz

   Jeżeli ciąg (a_n) jest malejęcy i zbieżny do zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

2. Porównawcze

   Jeśli $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ (ciągi nieujemne) i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny** to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest **zbieżny** i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

   Jeśli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ (ciągi nieujemne) i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny** to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest **rozbieżny**

3. d'Alambert

   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

   $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ - szereg zbieżny
   $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ - nie można określić zbieżności
   $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ - szereg rozbieżny

4. Cauchy

   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ - szereg zbieżny
   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ - nie można określić zbieżności
   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ - szereg rozbieżny

5. całkowe

   Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tworzymy funkcję $f(x)$ taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego n. $f(x)$ - malejąca i dodatnia dla $x \geqslant n_0$ dla pewnego n_0 Szereg jes zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy całka

   $$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$$

   jest zbieżna.

6. warunek konieczny zbieżności szeregu

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

   i równoważnie:

   $$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny}$$

OSZACOWANIA DLA KRYTERIUM PORÓWNAWCZEGO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 - & \text{zbieżny} \\ \alpha \leqslant 1 - & \text{rozbieżny} \end{cases}$$

$$\sin x < x$$

$$\ln x < x - 1$$

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x, \qquad x \in [0; \frac{2}{\pi}x]$$

$$\operatorname{tg} x \leqslant \frac{4}{\pi}x, \qquad x \in [0; \frac{4}{\pi}x]$$

3.3 Szeregi bezwzględnie zbieżne

Definicja 3.3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Twierdzenie 3.3.1. Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Ponadto $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Twierdzenie 3.3.2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny, gdy jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny. (np. kryterium Leibniza)

Twierdzenie 3.3.3. Szeregi bezwzględnie zbieżne są przemienne, to znaczy:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - bezwzględnie zbieżny
$m_1, m_2, ...$ permutacje zbioru $\mathbb{N}$ to:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Twierdzenie 3.3.4. (Riemann)
Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny to $(\forall r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ istnieje taka permutacja $m_1, m_2, ...$ taka, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} = r$$

Istnieje też permutacja $k_1, k_2, ...$ taka, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 3.3.5. (Mnożenie szeregów bezwzględnie zbieżnych)
Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne to:

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

gdzie $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$

Twierdzenie 3.3.6. Do obliczania zbieżności bezwzględnej szeregów można używać kryteriów d'Alamberta i Cauchy'ego.

$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ - szereg bezwzględnie zbieżny
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ - szereg bezwzględnie zbieżny
(analogicznie dla granicy > 1)

4 Szeregi potęgowe

Definicja 4.0.1. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

nazywamy szeregiem potęgowym.

Twierdzenie 4.0.1. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $x = x_0 \neq 0$, to jest zbieżny bezwzględnie $(\forall x \in (-|x_0|, |x_0|))$

Definicja 4.0.2. Promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$$r = \sup\{|x_0| : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ jest zbieżny } \}$$

- Jeśli $x \in (-r; r)$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny.
- Jeśli $x \notin (-r; r)$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny.
- Jeśli $x \pm r$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ moze być zbieżny lub rozbieżny.

4.1 Wyznaczanie promienia zbieżności

$$r = \left[\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}\right] \quad \text{lub} \quad r = \left[\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}|}\right]$$

Następnie należy sprawdzić zbieżność dla $x = \pm r$

5 Funkcje

5.1 Granice funkcji

Definicja 5.1.1. (Punkt skupienia zbioru)

$\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ jest lewostronnym punktem skupienia zbioru D, gdy istnieje ciąg (d_n) taki, że $d_n \in D$, $d_n < a$ i $\lim d_n = a$

$a \in \mathbb{R}$ jest prawostronnym punktem skupienia zbioru A, gdy istnieje ciąg (d_n) taki, że $d_n \in D$, $d_n > a$ i $\lim d_n = a$

a jest punktem skupienia zbioru D gdy jest lewo- lub prawostronnym punktem skupienia.

Intuicyjnie a jest punktem skupienia zbioru D gdy dowolnie blisko a znajduje się nieskończenie wiele liczb ze zbioru D.

PRZYKŁADY:

- D - zbiór skończony - brak punktu skupienia
- $\mathbb{N}$ - brak punktu skupienia
- $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ - punkt skupienia $a = 0$
- $[0, 1]$ - każdy punkt jest punktem skupienia
- $\mathbb{Q}$ - każda liczba rzeczywita jest punktem skupienia

Definicja 5.1.2. (granica funkcji)

Niech: $f : D \to \mathbb{R}$. Niech a będzie lewostronnym punktem skupienia zbioru D. $\lim_{x\to a^-} f(x) = g$, gdy dla każdego ciągu $x_n \to a, x_n \in D, x_n < a$ zachodzi $\lim_{x\to a^-} f(x_n) = g$. Liczbę g nazywamy granicą lewostronną funkcji f w punkcie a.

Analogicznie $\lim_{x\to a^+} f(x) = g$ (punkt skupienia prawostronny i $x_n > a$) nazywamy granicą prawostronną.

Definicja 5.1.3.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = g, \text{ gdy } (\forall x_n \in D), \lim x_n = \pm\infty, \text{ mamy } \lim f(x_n) = g$$

UWAGA Arytmetyka granic jest analogiczna jak w przypadku ciągów. Dotyczy to również twierdzenia o trzech ciągach. (w tym wypadku - trzech funkcjach)

Twierdzenie 5.1.1. (granica funkcji złożonej)

$$\text{Jeśli } \lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{y\to A} g(y) = B, \text{ to } \lim_{x\to a} g(f(x)) = B$$

5.2 Ciągłość funkcji

Definicja 5.2.1. (Heine)
Niech $f : X \to Y; X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Funkcja f jest ciągłą w punkcie a jeśli:

$$(\forall x_n \in X)((x_n \to a) \implies (f(x_n) \to f(a)))$$

- Funkcja jest ciągła lewostronnie, gdy:

$$(\forall x_n \in X)((x_n \to a^-) \implies (f(x_n) \to f(a)))$$

- Funkcja jest ciągła prawostronnie, gdy:

$$(\forall x_n \in X)((x_n \to a^+) \implies (f(x_n) \to f(a)))$$

Fukcja jest ciągła w $a \iff f$ jest ciągła lewo- i prawostronnie w a.

Twierdzenie 5.2.1.
Suma, różnica, iloczyn, iloraz funkcji ciągłych jest ciągły. Złożenie dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Definicja 5.2.2. (Cauchy)
Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0 gdy:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta)(\forall x)((|x - x_0| < \delta) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon))$$

Powyższy warunek nazywamy warunkiem Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie x_0.

Definicja 5.2.3. (jednostajna ciągłość)
Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, gdy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x')((|x - x'| < \delta) \implies (|f(x) - f(x')| < \epsilon))$$

Funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła.

Definicja 5.2.4. (warunek Lipschitza)
Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$$

Każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie 5.2.2.
Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Wówczas f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L wtedy i tylko wtedy gdy jej pochodna jest ograniczona (z góry lub z dołu) przez L.

Definicja 5.2.5. Zbiór Z jest wypukły gdy $a, b \in Z \implies [a, b] \in Z$

Twierdzenie 5.2.3. (Darboux - o przyjmowaniu wartości średnich)
Jeśli $f : Z \to \mathbb{R}$ jest ciągła i Z jest wypukły w $\mathbb{R}$, to $f[Z]$ jest wypukły.
<u>Wniosek:</u>
Jeśli f jest ciągła na zbiorze wypukłym Z i $f(x) < t < f(y)$, to $t \in f[Z]$, funkcja przyjmuje wartości pośrednie $f(x)$ i $f(y)$

Twierdzenie 5.2.4. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ jest ciągła, to $[a, b]$ jest przedziałem domkniętym. W szczególności f przyjmuje wartość największą i najmniejszą.

Twierdzenie 5.2.5. (O funkcji odwrotnej)

Jeśli $f : [a, b] \to f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa to funkcja odwrotna $g = f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ jest ciągła.

5.3 Pochodna funkcji

Definicja 5.3.1. (iloraz różnicowy w punkcie $a \in D_f$)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

alternatywnie dla $x - a = h$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Pochodną funkcji nazywamy granicę ilorazu róznicowego gdy $h \to 0$

Twierdzenie 5.3.1.

$$f \text{ jest różniczkowalna w } a \implies f \text{ jest ciągła w } a$$

5.4 Ekstrema funkcji

Definicja 5.4.1.

$f : D \to \mathbb{R}$ ma maksimum lokalne w punkcie $a \in D$, gdy dla pewnego przedziału $(a - \delta, a + \delta), (\delta > 0)$ (otoczenie punktu a) i dla wszystkich $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$ mamy $f(x) \leqslant f(a)$

Twierdzenie 5.4.1. Jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie a i ma w a ekstremum lokalne, to $f'(a) = 0$. (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Twierdzenie 5.4.2. (Rolle'a)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna w (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie że $f'(c) = 0$.

Twierdzenie 5.4.3. (Lagrange'a)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna w (a, b), to istnieje $c \in (a, b)$, takie że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Twierdzenie 5.4.4. (Cauchy'ego)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe i różniczkowalne w (a, b) i $(\forall x \in (a, b))(g'(x) \neq 0)$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

5.5 Asymptotyczne tempo wzrostu funkcji

Definicja 5.5.1. (Notacja "O")

$$f(x) = O(g(x)) \iff \lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

Definicja 5.5.2. (Notacja "o")

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Definicja 5.5.3. (Notacja "Θ")

$$f(x) = \Theta(g(x)) \iff 0 < \lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

5.6 Reguła de l'Hospitala

Jeśli $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ to

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5.7 Wzór Taylora i Maclaurina

Jeśli funkcja jest n-krotnie różniczkowalna w $[a, b]$, to

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} \cdot f'(a) + ... + \frac{(b-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + ... + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a) + R_n$$

gdzie

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c_n), \quad a < c_n < b$$

Wzór Taylora dla $a = 0$ nazywamy wzorem Maclaurina.

Twierdzenie 5.7.1. Jeżeli ciąg reszt R_n w rozwinięciu Taylora (w szczególności Maclaurina) funkcji f jest zbieżny do 0 dla każdego x z pewnego otoczenia U punktu x_0, szereg

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

jest zbieżny dla każdego $x \in U$

Taki szereg nazywamy szeregiem Taylora (Maclaurina) funkcji f.

5.8 Różniczkowanie szeregów potęgowych

Twierdzenie 5.8.1. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$ mają takie same promienie zbieżności i zachodzi wzór

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$$

dla $|x| < R$ - promień zbieżności (różniczkowanie wyraz po wyrazie)

6 Całki

6.1 Metody liczenia całek nieoznaczonych

6.1.1 Całkowanie przez części

Jeżeli f i g ciągłe pierwsze pochodne to:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

6.1.2 Całkowanie przez podstawienie

Jeżeli funkcję $f(x)$ można zapisać w postaci

$$f(x) = g(h(x)) \cdot h'(x)$$

gdzie funkcja $h(x)$ ma ciągłą pochodną, to

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt$$

gdzie $t = h(x)$

6.2 Całki oznaczone

Jeśli

$$\int f(x)dx = F(x)$$

to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Twierdzenie 6.2.1. (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego)
Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt = f(x)\right)$$

Wynika z tego iż całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania.

6.3 Całki niewłaściwe

6.3.1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Są to całki określone na nieograniczonym przedziale całkowania $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ lub $(-\infty, \infty)$. Liczy je się za pomocą granic.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{T\to-\infty} \int_T^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

Całka niewłaściwa jest

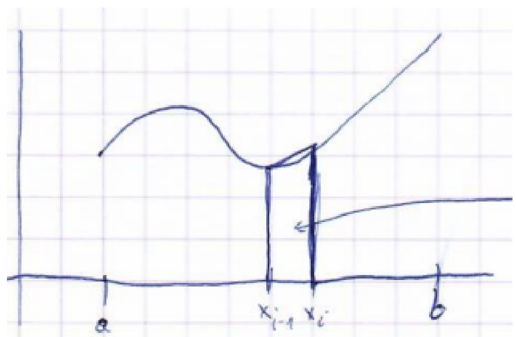
- zbieżna (granica właściwa równa dowolnej liczbie)
- rozbieżna do $\pm\infty$ (granica niewłaściwa)
- rozbieżna (granicy nie da się określić)

6.4 Metody aproksymacji (przybliżania) całek oznaczonych

6.4.1 Przybliżanie całki Riemanna przez sumy całkowe

6.4.2 Metoda trapezów

P = podział $[a, b]$ na n równych części



pole trapezu $\frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{2}\Delta x_i$, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i-1})+f(x_i)\big) = \frac{b-a}{2n}\big(f(a)+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})+f(b)\big)$$

6.4.3 Metoda Simpsona

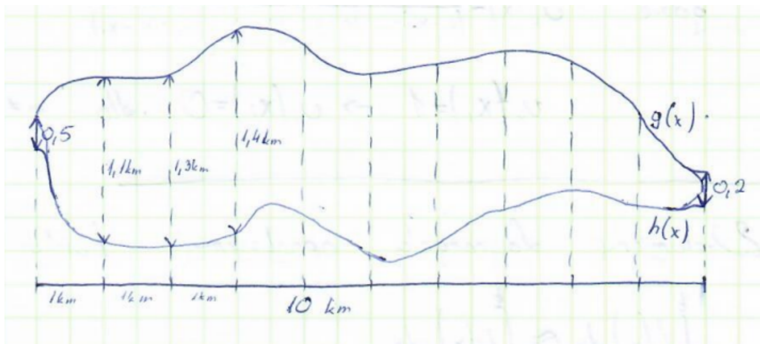
P = podział $[a, b]$ na n równych części, n - parzyste, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\Big[f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+...+4f(x_{n-1})+f(b)\Big]$$

n - ilość punktów podziału
błąd E_n można przybliżyć jako

$$0 \leqslant E_n \leqslant \frac{K}{180n^4}(b-a)^5, \text{ gdzie } K = \max\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a, b]\}$$

Przykład zastosowania



plama ropy

Według wzoru

$$P = \int_0^{10} [g(x) - h(x)]dx \approx \frac{10}{3 \cdot 10} \Big[0.5 + 4 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.3 + 2 \cdot 1.4 + ... + 0.2 \Big]$$

6.4.4 Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Danych jest $(n + 1)$ punktów $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$, w których pewna funkcja przyjmuje wartości (pomiary) $y_0, ..., y_n \in \mathbb{R}$ Zakładamy że funkcja ta jest ciągła (opisuje zjawisko fizyczne ciągłe)

Wtedy istnieje (dokładnie jeden) wielomian stopnia n przyjmujący wartości $y_0, ..., y_n$ w punktach $x_0, ..., x_n$.

$$W(x) = y_0 u_0(x) + y_1 u_1(x) + ... + y_n u_n(x)$$

gdzie

$$u_k(x) = \frac{x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot ... \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot ... \cdot (x_k - x_n)}$$

Jeżeli u_k dla pewnego x przyjmuje wartość 1 to dla innego x przymuje wartość 0.

7 Funkcje wektorowe

Definicja 7.0.1. Przestrzenie euklidesowe $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią liniową (wektorową) z działaniami:

- dodawanie punktów (wektorów):

$$(x_1, ..., x_n) \pm (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

- mnożenie przez skalar:

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$

$\overline{0} = \vec{0} = (0, ..., 0)$ nazywamy wektorem zerowym

Definicja 7.0.2. Wektor $\overline{AB}$ $a, b \in \mathbb{R}^n$, o początku w punkcie A i końcu w B

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, ...b_n - a_n)$$

gdzie a_n to współrzędne punktu A, a b_n to współrzędne punktu B.

7.1 Rachunek wektorowy

Definicja 7.1.1. (dodawanie wektorów)

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Definicja 7.1.2. (iloczyn skalarny)

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + ...x_n y_n, \text{ gdzie } \overline{x} = (x_1, ..., x_n)\overline{y} = (y_1, ..., y_n)$$

Twierdzenie 7.1.1. (własności iloczynu skalarnego)

1. $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$
2. $\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$
3. $(\alpha\overline{x}) \cdot \overline{y} = \alpha(\overline{x} \cdot \overline{y}) = \overline{x} \cdot (\alpha\overline{y})$

Definicja 7.1.3. (iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$)

$$\overline{x} \times \overline{y} = \overline{i}(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \overline{j}(x_3 y_1 - x_1 y_3) + \overline{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = ((x_2 y_3 - x_3 y_2), (x_3 y_1 - x_1 y_3), (x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

Twierdzenie 7.1.2. (własności iloczynu wektorowego)

1. $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \cdot \overline{c}) \times \overline{b} - \overline{(\overline{c} \cdot \overline{b})} \times \overline{c}$
2. $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$
3. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$

Definicja 7.1.4. (norma euklidesowa wektora)

$$||\overline{x}|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

$$||x||^2 = \overline{x} \cdot \overline{x} = \overline{x}^2$$

Definicja 7.1.5. (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza)

$$\overline{x} \cdot \overline{y} \leqslant ||\overline{a}|| \cdot ||\overline{a}||$$

Definicja 7.1.6. (kula w $\mathbb{R}^n$)

$$K(\overline{a}, r) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : ||\overline{x} - \overline{a}|| < r\}$$

gdzie $\overline{a}$ to środek kuli a r to dodatni promień kuli.

7.2 Ciagi i funkcje wektorowe

Definicja 7.2.1. (ciąg w $\mathbb{R}^n$)

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, \text{ co oznaczamy } (\overline{x_n})_{n=1}^{\infty}$$

Intuicyjnie, jest to ciąg wektorów.

Definicja 7.2.2. (granica ciągu w $\mathbb{R}^n$)

$$lim_{n\to\infty} = \overline{x_n} = \overline{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ gdy } (\forall\epsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant k)(||\overline{x_n} - \overline{x}|| < \epsilon)$$

Twierdzenie 7.2.1.
Jeśli $\overline{x} = (x_1, ..., x_n), \overline{x_n} = (x_{n1}, ..., x_{nm})$ to

$$\lim \overline{x_n} = \overline{x} \iff (\forall 1 \leqslant i \leqslant m)(\lim_{n\to\infty} x_{ni} = x_i)$$

Definicja 7.2.3. (Granica funkcji wektorowej)
$f : D \to \mathbb{R}^n : D \subseteq \mathbb{R}$ t_0 - punkt skupienia D

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \overline{x}, \text{ gdy } (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(|t - t_0| < \delta \implies ||f(t) - \overline{x}|| < \epsilon)$$

(Granica funkcji wektorowej jest granicą funkcji składowych)

Twierdzenie 7.2.2. Funkcja wektorowa jest ciągła gdy wszystkie jej składowe są ciągłe.

Twierdzenie 7.2.3. Jeżeli dwie funkcje wektorowe są ciągłe to ich suma, różnica, iloczyn wektorowy i skalarny funkcji wektorowych są ciągłe

Twierdzenie 7.2.4. Pochodna funkcji wektorowej to funkcja wektorowa o składowych będących pochodnymi skłądowych różniczkowanej funkcji. Zatem różniczkujemy "po składowych"

Twierdzenie 7.2.5. Całka nieoznaczona $\int f(x)dx = F(x) + \overline{W}$z funkcji wektorowej to funkcja pierwotna wyznaczana z dokładnością do stałego wektora czyli taka, że $F'(x) = f(x)$

Całka nieoznaczona z funkcji wektorowej to funkcja o składowych równych całkom nieoznaczonym całkowanej funkcji.

Twierdzenie 7.2.6. Całka oznaczona z funkcji wektorowej to wektor o składowych równych całkom oznaczonym z funkcji składowych całkowanej funkcji.

7.3 Interpretacja fizyczna

Jeśli $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ opisuje położenie punktu, to $\overline{r}'(t)$ to wektor prędkości w chwili t.

Analogicznie $\overline{r}''(t)$ to wektor przyspieszenia.

GRANICA	METODA
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{wielomian}{wielomian}$	wyciąganie przed nawias
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\ } - \sqrt{\ }$ $\lim\limits_{n\to\infty} a - \sqrt{\ }$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\ } - a$	mnożenie przez sprzężenie
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{wielomian}{wielomian}\right)^{\infty}$ $[1^{\infty}]$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{\{\ \}}\right)^{\{\ \}} = e^{a}$
$\sqrt[n]{a^n + b^n + \ldots}$	twierdzenie o trzech ciągach
logarytm naturalny	$\ln 0 \to -\infty$ $\ln 1 = 0$ $\ln e = 1$ $\ln \infty \to \infty$
logarytm $dla\ a > 1$	$\log_a 0 \to -\infty$ $\log_a \infty \to \infty$
logarytm	$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$
logarytm $dla\ a < 1$	$\log_a 0 \to \infty$ $\log_a \infty \to -\infty$
logarytmy	$\lim\limits_{\{\ \}\to\infty} \frac{\log_a(1 + \{\ \})}{\{\ \}} = \log_a e$ $\lim\limits_{\{\ \}\to\infty} \frac{\ln(1 + \{\ \})}{\{\ \}} = 1$

GRANICA	METODA
trygonometryczne podstawowe	$\lim\limits_{\{\ \}\to 0} \frac{\sin\{\ \}}{\{\ \}} = 1$ $\lim\limits_{\{\ \}\to 0} \frac{\arcsin\{\ \}}{\{\ \}} = 1$ $\lim\limits_{\{\ \}\to 0} \frac{\mathrm{tg}\{\ \}}{\{\ \}} = 1$ $\lim\limits_{\{\ \}\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\{\ \}}{\{\ \}} = 1$
trygonometryczne	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
a^{∞}	$a^{\infty} = \begin{cases} \infty\ dla\ a > 1 \\ 1\ dla\ a = 1 \\ 0\ dla\ \lvert a \rvert < 1 \end{cases}$
wykładnicze	$\lim\limits_{\{\ \}\to\infty} \frac{a^{\{\ \}} - 1}{\{\ \}} = \ln a$ $\lim\limits_{\{\ \}\to\infty} \frac{e^{\{\ \}} - 1}{\{\ \}} = 1$
suma arytmetycznego	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$
suma geometrycznego	$S_n = a_1 * \frac{1 - q^n}{1 - q}$
$\frac{A}{\pm\infty}$	$\frac{A}{\pm\infty} = 0$
$\frac{A}{0}$	$\frac{A}{0} = \pm\infty$

SYMBOL	DE L'HOSPITAL
$\left[\frac{0}{0}\right]$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	$\lim\limits_{x\to\{\ \}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\{\ \}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
$[\infty - \infty]$	wspólny mianownik wyciągnąć przed nawias
$[0 * \infty]$	$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ lub $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$[1^{\infty}]$ $[0^{0}]$ $[\infty^{0}]$	$a^{b} = e^{b * \ln a}$

GRANICA FUNKCJI	METODA
$\lim\limits_{\{\ \}\to a} f(x)$ (do liczby!)	- wyciąganie przed nawias - grupowanie wyrazów - wz. skróconego mnożenia

FUNKCJA	POCHODNA
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^{x}	$a^{x} \ln(a)$
$\frac{a}{x}$	$-\frac{a}{x^2}$