Matematyka Dyskretna - zagadnienia

dr hab. Szymon Żeberski

opracował: Mikołaj Pietrek

Semestr letni 2016/2017 - strona internetowa

1 Zasada indukcji matematycznej

1. Zbiory skończone, podstawowe tożsamości
2. Zasada Włączeń i Wyłączeń
3. Skończona przestrzeń probabilistyczna

2 Współczynniki dwumianowe Newtona

1. $\binom{n}{k} = \left|[\{1, 2, \ldots, n\}]^k\right|$
2. $r^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(r-i), \qquad r^{\overline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(r+i)$
3. Dla liczby rzeczywistej r oraz całkowitej dodatniej k definiujemy $\binom{r}{k} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!}$
4. $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$
5. Negowanie górnego indeksu $\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$
6. $(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
7. $(x+y)^r = \sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$ dla $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$
8. Tożsamość Cauchy'ego $\binom{n+m}{k} = \sum_j \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$
9. Tożsamość Cauchy'ego w ogólnej postaci $\binom{r+s}{k} = \sum_j \binom{r}{j}\binom{s}{k-j}$
10. $\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n}$

3 Permutacje

1. Grupa S_n, permutacja odwrotna, mnożenie (składanie) permutacji
2. Rozkład permutacji na cykle
3. Rozkład permutacji na transpozycje, transpozycje liczb sąsiednich
4. Wektor inwersji
5. Znak permutacji $sgn(\sigma)$
6. $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau)$
   (a) dowód „obrazkowy”
   (b) dowód indukcyjny opatry na lemacie $sgn(\sigma\tau) = -sgn(\tau) = sgn(\tau\sigma)$ dla $\sigma = (j, j+1)$
7. Grupa alternująca $A_n = \{\sigma \in S_n : \ sgn(\sigma) = 1\}$
8. $A_n \lhd S_n$

4 Liczby Stirlinga

1. Liczby pierwszego rodzaju (cykliczne) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ dla $n > 0$
3. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$
4. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$
5. Liczby drugiego rodzaju (partycyjne) $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$
6. $\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$ dla $n > 0$
7. $\begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1$, $\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}$
8. $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$
9. $x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$
10. $x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$
11. Liczby Bella $B_n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$

5 Grafy

1. Grafy proste
2. Przykłady: $K_n,\ L_n,\ C_n,\ K_{n,m}$
3. Grafy spójne, cykle w grafach
4. Drzewa
5. Grafy dwudzielne
6. Stopień wierzchołka, $\sum\limits_{v\in V} deg_G(v) = 2|E|$
7. Twierdzenie Halla

6 Funkcje tworzące

1. Ciąg Fibonacciego
2. Ukorzenione drzewa binarne, liczby Catalana $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$
3. Liczby Catalana, więcej przykładów

7 Klasy kombinatoryczne

1. Klasa kombinatoryczna $(\mathcal{A}, |\cdot|)$, $|\cdot| : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$
2. $\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} :\ |a| = n\}$, $a_n = |\mathcal{A}_n|$
3. Funkcja tworząca klasy kombinatorycznej $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
4. Przykłady $\mathcal{E},\ Z$
5. Suma $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ oraz produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ klas kombinatorycznych
6. Jeśli $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, to $C(x) = A(x) + B(x)$
7. Jeśli $\mathcal{D} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, to $D(x) = A(x)B(x)$
8. Klasa kombinatoryczna $\mathcal{S}eq(\mathcal{A})$
9. Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{S}eq(\mathcal{A})$, to $B(x) = \dfrac{1}{1 - A(x)}$
10. Podklasa
11. Tworzenie klas kombinatorycznych z wykorzystaniem relacji równoważności
12. Klasa kombinatoryczna $\mathcal{P}set(\mathcal{A})$ oraz $\mathcal{C}ycle(\mathcal{A})$
13. Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{P}set(\mathcal{A})$, to $B(x) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 + x^k)^{a_k} = exp\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} A(x^k)\right)$
14. Klasa kombinatoryczna $\mathcal{M}set(\mathcal{A})$ (o ile $\mathcal{A}_0 = \emptyset$)
15. Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{M}set(\mathcal{A})$, to $B(x) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-a_k} = exp\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} A(x^k)\right)$

16. Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{C}ycle(\mathcal{A})$, to $B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} ln\left(\frac{1}{1-A(x^k)}\right)$

17. Podstawowe własności funkcji Eulera φ

18. Pomocnicza klasa $\Delta(\mathcal{A}) = \{(a,a): \ a \in \mathcal{A}\}$

19. Związek pomiędzy klasami $\mathcal{M}set(\mathcal{A})$ oraz $\mathcal{P}set(\mathcal{A})$ opisany równością $M(x) = P(x)M(x^2)$

20. Ograniczone klasy kombinatoryczne $\mathcal{P}set_k(\mathcal{A}),\ \mathcal{M}set_k(\mathcal{A})$

21. Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{P}set_2(\mathcal{A})$, to $B(x) = \frac{1}{2}(A(x)^2 - A(x^2))$

22. Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{M}set_2(\mathcal{A})$, to $B(x) = \frac{1}{2}(A(x)^2 + A(x^2))$

23. Funkcje tworzące dwóch zmiennych

    (a) Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{S}eq(\mathcal{A})$, to $B(x,y) = \frac{1}{1-yA(x)}$

    (b) Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{P}set(\mathcal{A})$, to $B(x,y) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+yx^k)^{a_k} = exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k A(x^k)\right)$

    (c) Jeśli $\mathcal{B} = \mathcal{M}set(\mathcal{A})$, to $B(x,y) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-yx^k)^{-a_k} = exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^k A(x^k)\right)$

8 Wykładnicze funkcje tworzące

1. Dla ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiujemy $\hat{A}(x) = \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$

2. Dwumianowy splot i iloczyn wykładniczych funkcji tworzących

3. Liczby Bella B_n oraz zależność $\hat{B}'(x) = e^x \hat{B}(x)$

4. $\hat{B}(x) = e^{e^x - 1}$

5. Wzór Dobińskiego $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$

Semestr letni 2016/2017 - najważniejsze wzory z wykładu

Potęgi dolne/górne

$$x^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(x-i) \qquad x^{\overline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(x+i) \qquad x^{\underline{0}} = \prod_{i=0}^{-1}(x-i) = 1 \qquad x^{\underline{1}} = x^1 = x$$

Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \binom{-x+k-1}{k}$$

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \Rightarrow (x+1)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k$$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

$$\sum_k \binom{l}{m+k} \binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n}$$

definicja: liczba wszystkich k-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego

Liczby Stirlinga I rodzaju (cykliczne)

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix} = \binom{n}{2} \qquad \begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} = (n-1)!$$

$$\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix} x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} x^k \qquad \begin{bmatrix}n+1\\m+1\end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} \binom{k}{m}$$

definicja: liczba permutacji w S_n, które rozbijają się na k cykli (w kanonicznym rozbiciu), wliczając jednoelementowe

Liczby Stirlinga II rodzaju (partycyjne)

$$\begin{Bmatrix}n\\0\end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{Bmatrix}n\\n\end{Bmatrix} = 1 \qquad \begin{Bmatrix}n\\n-1\end{Bmatrix} = \binom{n}{2} \qquad \begin{Bmatrix}n\\n-1\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}n\\2\end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1$$

$$\begin{Bmatrix}n+1\\k\end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}n\\k-1\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix}n-1\\k\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}n-1\\k-1\end{Bmatrix}$$

definicja: liczba partycji zbioru $[n]$ składających się z k części

Podstawy teorii grafów

Definicje

- ścieżka (droga) - skończony ciąg krawędzi w postaci $a \to v_1 \to v_2 \to ... \to v_{k-1} \to b$, gdzie a jest wierzchołkiem początkowym, natomiast b wierzchołkiem końcowym (bez powtarzających się wierzchołków)
- długość ścieżki - liczba krawędzi ścieżki
- cykl - skończony ciąg krawędzi, w ktöym powtarza się jedynie początek (będący równocześnie końcem)
- stopień wierzchołka - ilość krawędzi do niego dochodzących.
- dopełnienie grafu ($\overline{G}$) - zbiór wierzchołków jest identyczny jak w grafie G, natomiast wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy nie są połączone w grafie G.

Przykłady

- spójny - graf, w którym dla każdego wierzchołka istnieje droga do każdego innego wierzchołka
- prosty - bez pętli własnych i krawędzi wielokrotnych.
- regularny - graf prosty, w którym wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień
- drzewo - spójny graf acykliczny
- drzewo rozpinające - drzewo, które zawiera wszystkie wierzchołki grafu G, a zbiór krawędzi drzewa jest podzbiorem zbioru krawędzi grafu
- pełny (K_n) - każdy wierzchołek jest połączony bezpośrednio krawędzią z każdym innym
- pełny dwudzielny ($K_{n,m}$) - graf pełny, którego wierzchołki mogą być podzielone na dwa zbiory, tak by w obrębie jednego zbioru żaden wierzchołek nie był połączony z innym
- pusty (P_n) - nieposiadający krawędzi
- liniowy (L_n) - otrzymany poprzez usunięcie jednej krawędzi z grafu cyklicznego
- cykliczny (C_n) - regularny graf spójny, którego każdy wierzchołek jest stopnia drugiego

Grupy automorfizmów

- $\Gamma(K_n) \cong S_n$
- $\Gamma(K_{n,m}) \cong S_n \times S_m$ dla $n \neq m$
- $\Gamma(K_{n,n}) \cong Z_2 \times S_n \times S_n$
- $\Gamma(P_n) \cong S_n$
- $\Gamma(L_n) \cong Z_2$
- $\Gamma(C_n) \cong D_n$
- $\Gamma(\overline{G}) = \Gamma(G)$ dla dowolnego grafu G

Klasy kombinatoryczne

Uwaga: w poniższych wzorach a_n oznacza ilość elementów o randze n

dla klasy $\mathcal{A} = (A, |\cdot|)$ definiujemy $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\mathcal{E}(x) = (e, |\cdot|) \qquad |e| = 0 \qquad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n = 1$

$\mathcal{Z}(x) = (z, |\cdot|) \qquad |z| = 1 \qquad Z(x) = x$

$\mathbf{Seq}(\mathcal{A})(x) = \frac{1}{1 - \mathcal{A}(x)}$

$\mathbf{Pset}(\mathcal{A})(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)^{a_n}$

$\mathbf{Mset}(\mathcal{A})(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^n)^{a_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-a_n}$

$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(z) = \mathcal{A}(z) + \mathcal{B}(z)$

$(\mathcal{A} \times \mathcal{B})(z) = \mathcal{A}(z) \cdot \mathcal{B}(z)$