

Wprowadzenie do Teorii Grafów

prof. dr hab. Książę Wenecji

opracował: Mikołaj Pietrek

Spis treści

Wykład 4	1
4.1 Spójność (cd.)	1
4.2 Kilka definicji związanych ze spójnością	1
4.3 Grafy Eulera (eulerowskie)	2
4.3.1 Mosty w Królewcu	2

Wykład 4

4.1 Spójność (cd.)

Przypomnijmy sformułowanie twierdzenia 2.

Twierdzenie 2 (przypomnienie). Jeśli $G = (V, \mathcal{E})$ jest grafem prostym o n wierzchołkach i n krawędziach i k składowych, to zachodzą następujące nierówności:

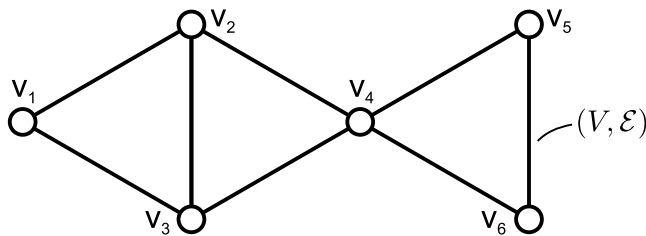
$$n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$$

Wniosek 1. Jeśli dla grafu prostego $G = (V, \mathcal{E})$ o n wierzchołkach i m krawędziach zachodzi nierówność $n > (n - 2)(n - 1)/2$ to G jest spójny.

Dowód. Teza jest prawdziwa, bo (*) nie zachodzi.

4.2 Kilka definicji związanych ze spójnością

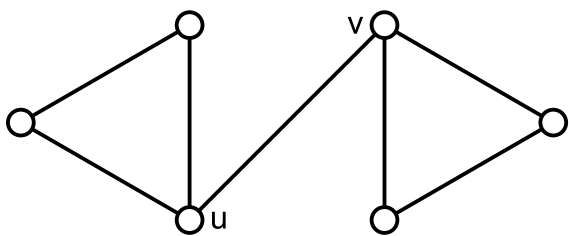
Podzbiór $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ zbioru krawędzi grafu spójnego $G = (V, \mathcal{E})$ nazywamy zbiorem rozspajającym w G jeśli graf $G = (V, \mathcal{E} - \mathcal{S})$ nie jest spójny.



$$\mathcal{S} = \{\{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_1\}\}$$

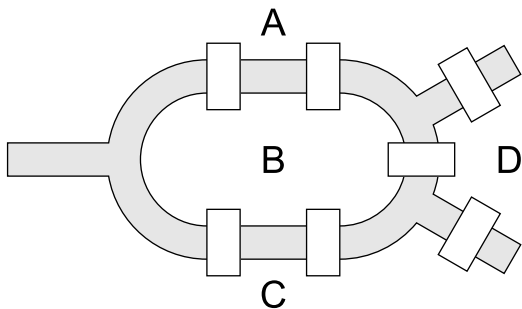
\mathcal{S} jest tu zbiorem rozspajającym.

Zbiór rozspajający \mathcal{S} w grafie $G = (V, \mathcal{E})$ nazywamy rozcięciem, jeśli żaden podzbiór właściwy \mathcal{S} tej własności nie ma (nie jest zbiorem rozspajającym). W powyższym przykładzie \mathcal{S} nie jest rozcięciem, ale $\mathcal{S}' = \{\{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$ jest już rozcięciem. Jeśli $\mathcal{S} = \{\{v, u\}\}$ jest rozcięciem, to krawędź $\{u, v\}$ nazywamy mostem. Przykład:



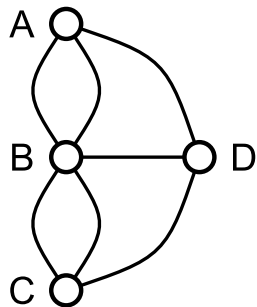
4.3 Grafy Eulera (eulerowskie)

4.3.1 Mosty w Królewcu



Euler spacerując po Królewcu zastanawiał się, czy można odbyć taki spacer, aby przez każdy most przejść jeden raz i skończyć spacer w tym samym miejscu, gdzie się zaczęło.

W istocie mamy tu do czynienia z następującym grafem:



Euler udowodnił następujące twierdzenie dotyczące takich spacerów. Jeśli ścieżkę w której występują wszystkie krawędzie grafu G i każda krawędź występuje dokładnie raz, w której pierwszy i ostatni wierzchołek są równe, nazwiemy cyklem Eulera (eulerowskim), to:

Twierdzenie 3 (Eulera). W grafie $G = (V, \mathcal{E})$ występuje cykl Eulera wtedy, tylko wtedy, gdy G jest spójny i każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Graf w którym jest cykl Eulera nazywamy grafem Eulera (eulerowskim).

Uwaga. Cykl Eulera nie zawsze jest cyklem w sensie używanej przez nas definicji cyklu!

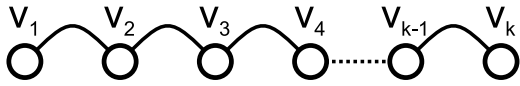
Zanim udowodnimy twierdzenie Eulera, udowodnimy następujący lemat.

Lemat. Jeśli w grafie $G = (V, \mathcal{E})$ stopień każdego wierzchołka jest większy niż 1, to G zawiera jako podgraf cykl.

Dowód. Jeśli G zawiera pętle lub krawędzie wielokrotne, to teza lematu jest trywialna. Możemy dalej założyć, że G jest grafem prostym.

Niech $v_1 \in V$ Ponieważ $\deg(v_2) \geq 2$, więc istnieje krawędź $\{v_2, v_3\}, v_3 \neq v_1$ incydentna z v_1 Ponieważ $\deg(v_3) \geq 2$ to istnieje incydentna z v_3 krawędź $\{v_3, v_4\} \in \mathcal{E}, v_4 \neq v_2$. Jeśli $v_4 \neq v_1$ to dowód jest skończony, bo mamy cykl. Jeśli nie, to kontynuujemy powyższą procedurę.

Założmy, że w jej trakcie skonstruowaliśmy drogę $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle, k \geq 4$.



Ponieważ $\deg(v_k) \geq 2$ więc istnieje krawędź $\{v_k, v_{k+1}\}$ taka że $v_{k+1} \neq v_{k-1}$. (1) Jeśli $v_{k+1} \in \{v_1, v_2, \dots, v_{k-2}\}$ czyli $v_{k+1} = v_i, i \in \{1, \dots, k-2\}$ to mamy cykl $\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i \rangle$. (2) Jeśli nie, to $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ jest drogą i iterujemy naszą procedurę.

Zauważmy, że przypadek (2) nie może zachodzić więcej niż $|V|$, a więc w którymś kroku istotnie otrzymamy cykl. \square