Рекурсия

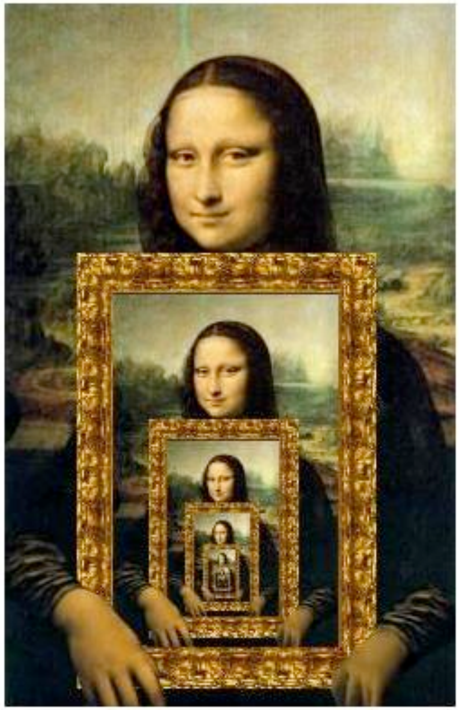
Составитель: Рощупкин Александр

Рекурсия

Рекурсивный подход

“что бы понять рекурсию, нужно понять рекурсию…”

* **Рекурсия** – описание объекта или процесса внутри него самого
* Альтернатива итерации
* Необходимо задачу представить в рекурсивном виде



Подход “Разделяй и властвуй”

* Подход «разделяй и властвуй» заключается том, что выполнение одной сложной задачи можно разбить на несколько задач того же типа, но меньшего размера и комбинирования их решения для получения ответа к исходной задаче
* Разбиения выполняются до тех пор, пока все подзадачи не окажутся элементарными
* **Шаг рекурсии** — способ сведения задачи к более простой
* Вывод: Задачу необходимо разбить на шаги и определить элементарную подзадачу

Пример рекурсии

* Представим задачу возведения в степень так: «что бы возвести число в степень, нужно возвести в степень меньшее число» $x^n = x * x^{n-1}$
* Возведём двойку в четвёртую степень: **pow(2, 4)**
* pow(2, 4) = 2 * pow(2, 3)
* pow(2, 3) = 2 * pow(2, 2)
* pow(2, 2) = 2 * pow(2, 1)
* pow(2, 1) = 2

Рекурсивный метод

* Рекурсивным считается такой метод, который вызывает сам себя,
* Простейший пример – это бесконечная рекурсия

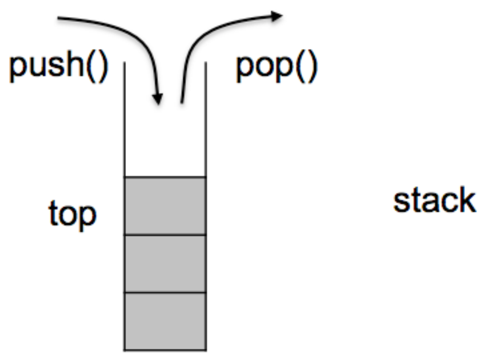
```java
public void infinit() {
    System.out.println("Infinit");
    infinit();
}
```

* Вызов рекурсивного метода происходит бесконечно, что приводить к переполнению стека, т.к. информация о каждом вызове помещается в системный стек

```
Exception in thread "main" java.lang.StackOverflowError
```

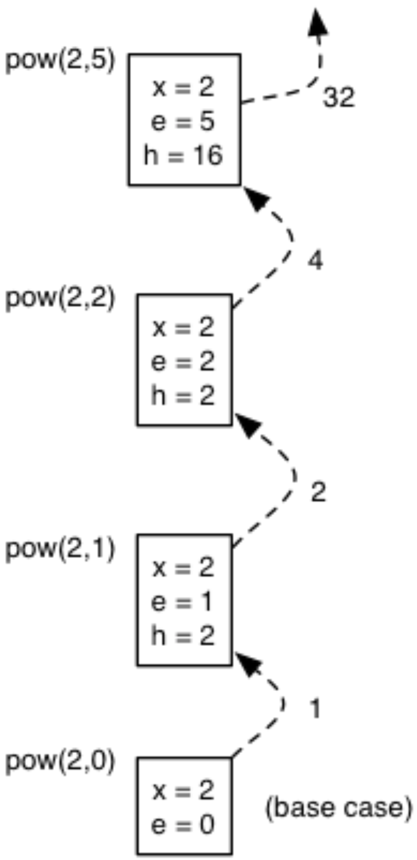
Стек

* Стек – структура данных, работающая по принципу: последний зашёл, первый вышел (LIFO)
* Элементы помещаются и извлекаются с вершины



Системный стек

* Хранит информацию блоками – фреймам
* Каждый фрейм содержит значения локальных переменных и адрес возврата при вызове
* Пример возведения в 5 степень



Механика работы рекурсии

* Стековый фрейм
  * При каждом рекурсивном вызове, в системный стек помещается информация о вызове (значения локальных переменных и адрес возврата)
* Рекурсивный спуск
  * Помещение стековых фреймов в стек. Выполнение операций перед вызовом – операции на спуске
* Рекурсивный подъём
  * Извлечение стековых фреймов из стека. Выполнение операций после вызова – операции на подъёме

Конечная рекурсия

- В рекурсивном вызове должно быть условие выхода при условии окончания рекурсивного алгоритма

```
public void print(int count) {
    if (count > 0) {
        System.out.println(count);
        print(count - 1);
    }
}
```

- Напишите рекурсивный метод который будет выводить на экран возрастающую последовательность чисел
- Написать метод, вычисляющий сумму элементов возрастающей последовательности

Пример факториала

* Итеративная формула $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$
* Рекурсивная формула $n! = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ n \cdot (n-1)! & n > 0. \end{cases}$

```
public int factorial(int n) {
    if (n == 0) {
        return 1;
    }
    return n * factorial(n - 1);
}
```

Двойная рекурсия

* Двойная рекурсия – это такой рекурсивный метод, который содержит два рекурсивных вызова

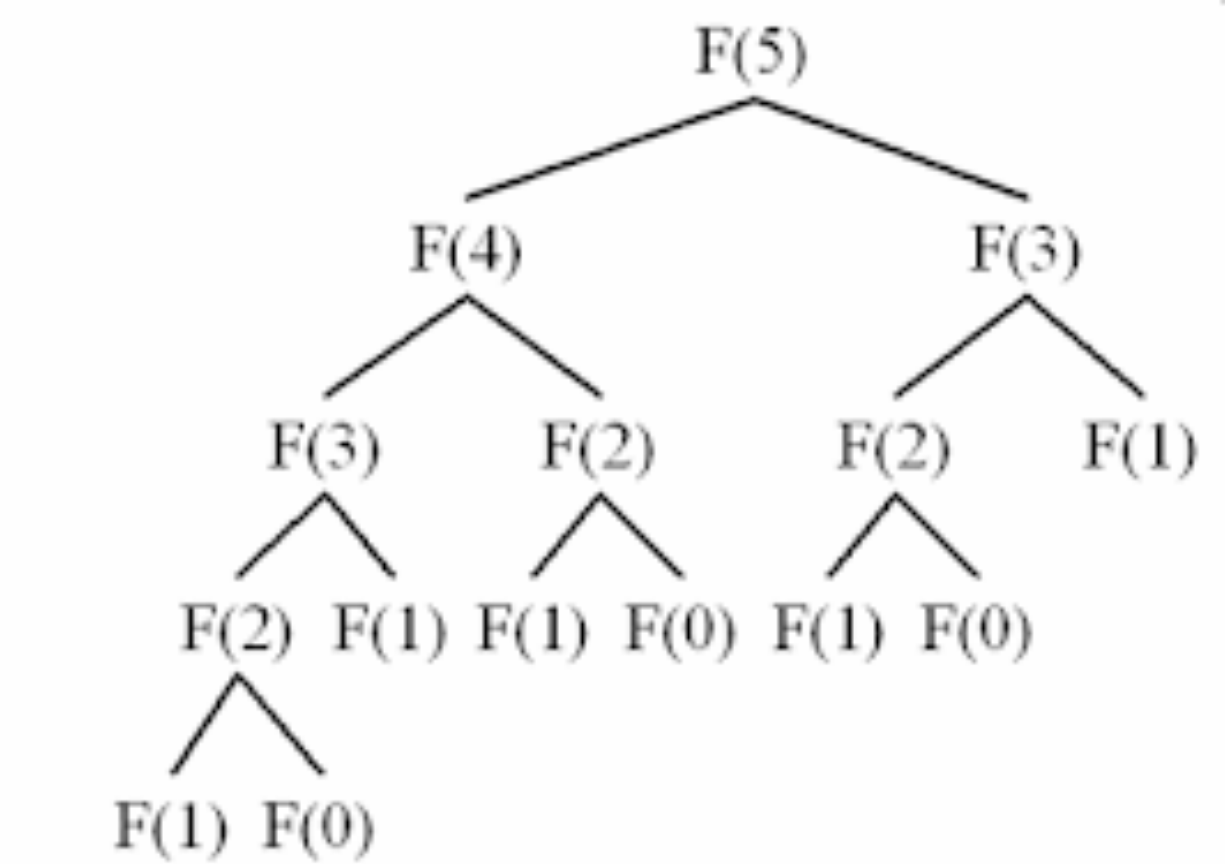
```
public void doubl() {
    doubl();
    doubl();
}
```

Пример чисел Фибоначчи

- Числа Фибоначчи – это элементы числовой последовательности, вычисленные по формуле
$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711

```
public int fib(int n) {
    if (n <= 2) {
        return 1;
    }
    return fib(n - 2) + fib(n - 1);
}
```

Графическое представление



Рекурсивные структуры данных

- Рекурсия удобна для работы с рекурсивными структурами данных или со структурами, которые можно представить в рекурсивном виде
- Массив, список, дерево

Дополнительный материал

Хвостовая рекурсия

- **Хвостовая рекурсия** — частный случай рекурсии, при котором любой рекурсивный вызов единственен и является последней операцией перед возвратом из функции.

```
public int factorial(int n) {
    return (n==0) ? 1 :  n * factorial(n - 1);
}
```

- **Оптимизация хвостовой рекурсии** путём преобразования её в плоскую итерацию реализована во многих оптимизирующих компиляторах

Пример вычисления факториала

* Оптимизация возможна в том случае если метод, вызвавший “сам себя”, должен немедленно возвратить результат рекурсивного вызова, не производя над ним предварительно никаких преобразований
* Как мы видим, рекурсивный вызов является последней инструкцией метода factorial(). Однако этот метод возвращает результат рекурсивного вызова, умноженный на значение переменной n, т. е. преобразованный.
* По этой причине рекурсия, реализованная в методе factorial(), не является хвостовой и не подходит для оптимизации

Преобразуем в хвостовую рекурсию

- Для того чтобы преобразовать её в хвостовую, введём новую локальную переменную sum, в которой будут храниться промежуточные результаты суммирования.
- Значение этой переменной будет передаваться в новую версию нашего рекурсивного метода вместе со значением n

```
public int factorialTr(int acc, int n) {
    if (n == 0) {
        return acc;
    }
    return factorialTr(acc * n, n - 1);
}
```

Преобразуем в итерацию

- Нужно отказаться от рекурсивного вызова, при котором заполняется стек локальными переменными.
- Нужно ввести дополнительную локальную/переменные переменную и хранить промежуточные значения в ней/них

```
public int factorialIt(int acc, int n) {
    while(true) {
        if (n == 0) {
            return acc;
        }
        int acc_ = acc * n;
        n = n - 1;
        acc = acc_;
    }
}
```

Оптимизация хвостовой рекурсии в скале

- Можно воспользоваться аннотацией над методом, тогда компилятор оптимизирует хвостовую рекурсию в итерацию

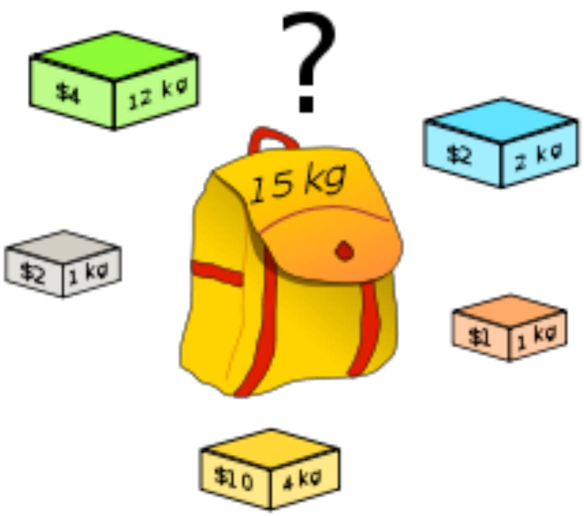
```
@tailrec
def factorial(n: Int): BigInt = {

 if (n == 0) {
                1
 }
 else {
                n *
                factorial(n - 1)
 }
}
```

- Но если это будет сделать невозможно, то он выдаст ошибку

  Error:(16, 9) could not optimize @tailrec annotated method factorial: it contains a recursive call not in tail position
  n * factorial(n - 1)

Задача о рюкзаке

* Уложить как можно большее число ценных вещей в рюкзак при условии, что вместимость рюкзака ограничена
* Из заданного множества предметов со свойствами «стоимость» и «вес» требуется отобрать подмножество с максимальной полной стоимостью, соблюдая при этом ограничение на суммарный вес



Рюкзак 0-1

- Существует несколько видов задач о рюкзаке:
  - Рюкзак 0-1
  - Ограниченный рюкзак
  - Неограниченный рюкзак
  - Рюкзак с мультивыбором
  - Множественный рюкзак
  - Многомерный рюкзак
- Рассмотрим простейшую из них: Рюкзак 0-1 (*0-1 Knapsack Problem*)
- *Дано* N *предметов,* n_i *предмет имеет массу* w_i>0 *и стоимость* p_i>0*. Необходимо выбрать из этих предметов такой набор, чтобы суммарная масса не превосходила заданной величины* W *(вместимость рюкзака), а суммарная стоимость была максимальна.*

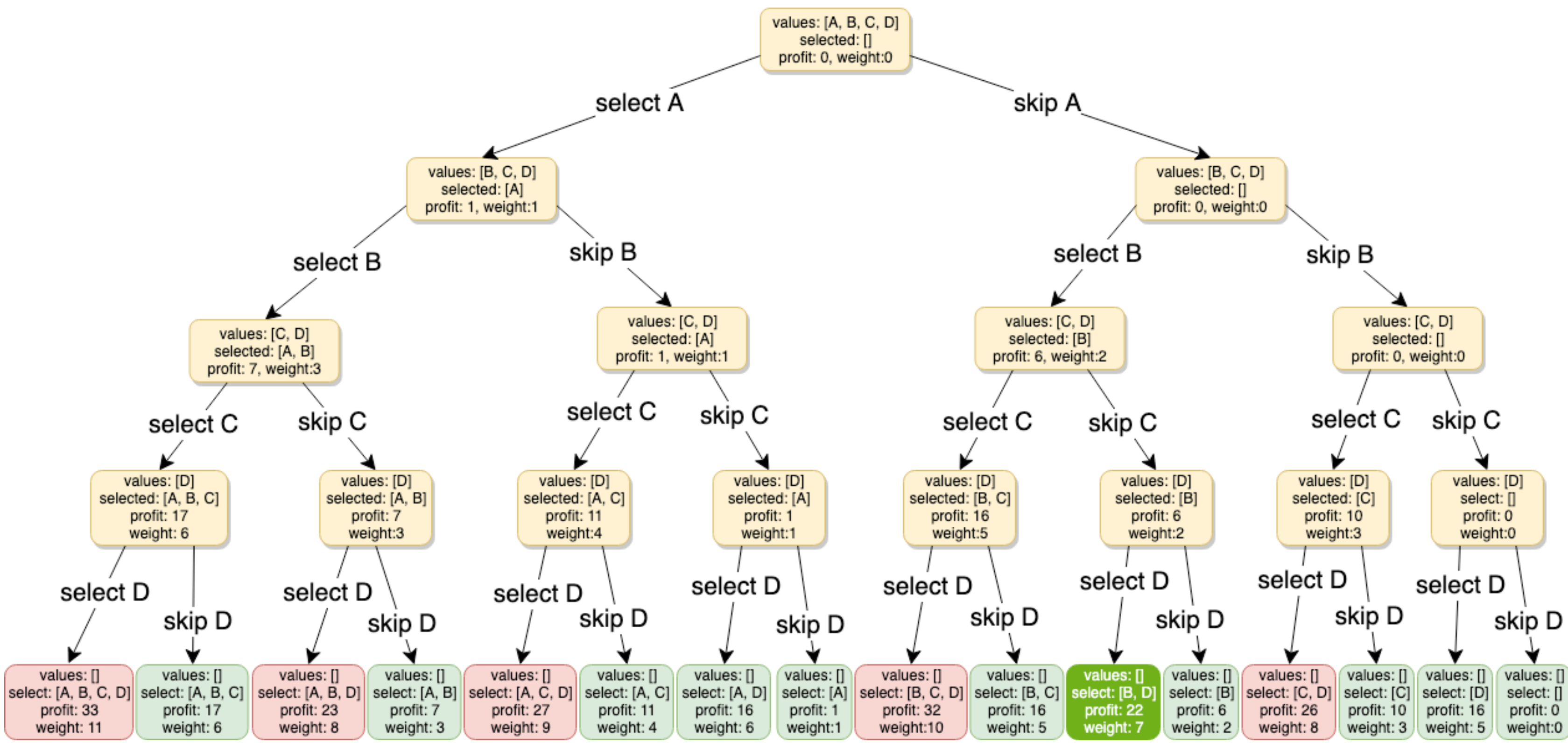
Полный перебор

* Допустим, имеется N предметов, которые можно укладывать в рюкзак. Нужно определить максимальную стоимость груза, вес которого не превышает W
* Берём 4 объекта у которых есть вес и стоимость
* Для каждого предмета существует 2 варианта: предмет либо кладётся в рюкзак, либо нет

Графическое изображение

items	A	B	C	D
profit	1	6	10	16
weight	1	2	3	5

Capacity: 7



```java
public class Knapsack {
    /**
     * @param profits стоимость предметов
     * @param weights веса предметов
     * @param n количество предметов
     * @param capacity объём рюкзака
     * @return максимальная стоимость предметов
     */
    public static int knapSack(int[] profits, int[] weights, int n, int capacity) {
        // основной случай: отрицательный объём
        if (capacity < 0) {
            return Integer.MIN_VALUE;
        }

        // основной случай: больше нет предметов или нулевой объём
        if (n < 0 || capacity == 0) {
            return 0;
        }

        // Case 1. Включить текущий элемент n в рюкзак(profits[n]) и рекурсивный вызов для
        // оставшихся элементов (n - 1) с уменьшенным объёмом(capacity - weights[n])
        int include = profits[n] + knapSack(profits, weights, n - 1, capacity - weights[n]);

        // Case 2. Иключить текущий элемент n из рюкзака и рекурсивный вызов для оставшихся элементов (n - 1)
        int exclude = knapSack(profits, weights, n - 1, capacity);

        // выбираем наибольшее значения из двух случаев - включая текущий предмет или не включая
        return Math.max(include, exclude);
    }

    // 0-1 Knapsack problem
    public static void main(String[] args) {
        // задаём наши предметы с помощью двух массивов, в одном цена, во втором вес
        int[] profit = {1, 6, 10, 16};
        int[] weights = {1, 2, 3, 5};
        // Объём рюкзака
        int capacity = 7;
        System.out.println("Knapsack value is " + knapSack(profit, weights, profit.length - 1, capacity));
    }
}
```

Метод ветвей и границ

* Идея метода состоит в том, что бы отсортировать предметы по их удельной стоимости (отношению ценности к весу) и строить дерево полного перебора.
* Его улучшение заключается в том, что в процессе построения дерева, для каждого узла мы оцениваем верхнюю границу ценности решения, и продолжаем строить дерево только для узла с максимальной оценкой.
* Когда максимальная верхняя граница оказывается в листе дерева, алгоритм заканчивает свою работу.

Динамическое программирование

- *Динамическое программирование* — метод решения задачи путём её разбиения на несколько одинаковых подзадач, рекуррентно связанных между собой
- Основная суть – нахождение одинаковых задач, решение одной из них только один раз и затем использование этого решения для всех

Рекурсия N-го порядка

- Рекурсией N-го порядка называют рекурсивный метод в котором находятся N рекурсивных вызовов

```
public void recursionN(int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        recursionN(n);
    }
}
```

Домашнее задание

- Написать рекурсивный метод, который выводит последовательность чисел от N до K
- Написать рекурсивный метод, который возвращает наибольшее значение в массиве
- Написать рекурсивный метод, который определяет, является ли переданная в метод строка палиндромом
- Написать рекурсивный метод, который возвращает сумму цифр, переданного в метод числа