Zusatzblatt 4
Funktionen, Abbildungen und Mengen

Diskrete Strukturen (IN0015), Wintersemester 2025/26

Ziel des Blattes

Dieses Aufgabenblatt dient als Vorbereitung auf Übungsblatt 4. Es wiederholt Grundlagen zu Abbildungen, Mengenoperationen und Notation. Die Aufgaben bauen *schrittweise* aufeinander auf – von einfachen Beispielen bis zu kurzen Beweisen.

Teil A: Notation und Grundlagen

Erinnerung: Mengen-Notation

$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ bezeichnet die Menge der ersten n natürlichen Zahlen. Beispiel: $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

A1. (1 P) Schreiben Sie die Mengen [3], [6] und [1] explizit auf.

A2. (1 P) Wie viele Elemente hat [8]? *Hinweis: Denken Sie an die Definition aus der Box oben.*

A3. (2 P) Geben Sie eine Abbildung $f\colon [5] \to [5]$ in Tabellenform an, z. B.:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	_	_	_	_	_

und erklären Sie in einem Satz, was $f(3) = 2$ bedeutet.

A4. (1 P) Beschreiben Sie in Worten, was mit dem Ausdruck $f\colon A \to B$ gemeint ist. *Hinweis: Verwenden Sie Begriffe wie „Definitionsbereich“ und „Wertebereich“.*

A5. (2 P) Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$. Wie viele verschiedene Abbildungen $f\colon A \to B$ gibt es insgesamt? *Tipp: Jedes Element aus A kann beliebig einem Element aus B zugeordnet werden.*

Teil B: Abbildungen und Funktionsgraphen (T4.1–T4.2)

Erinnerung: Funktionsgraph

Zu einer Abbildung $f\colon A \to B$ gehört der Graph

$$G_f = (A, \{(x, f(x)) \mid x \in A\}).$$

Man kann ihn tabellarisch oder als gerichteten Graphen darstellen.

B6. (2 P) Gegeben sei $f\colon [4] \to [4]$ mit

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1,\ f(4) = 4.$$

Zeichnen Sie den Graphen G_f (als Pfeildiagramm oder Paare $(x, f(x))$).

B7. (2 P) Bestimmen Sie $f \circ f$ für dieselbe Abbildung. *Hinweis: Wenden Sie f zweimal an, z. B. $f(f(1)) = f(2) = 3$.*

B8. (2 P) Geben Sie für f aus Aufgabe B6 den kleinsten $k > 0$ an, sodass $f^k(x) = x$ für alle x gilt. *Hinweis: Prüfen Sie die Länge der Zyklen in G_f.*

B9. (2 P) Seien $f, g\colon [3] \to [3]$ definiert durch

$$f(x) = x + 1 \bmod 3, \quad g(x) = x + 2 \bmod 3.$$

Berechnen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

B10. (3 P) Zeigen Sie, dass die Komposition zweier bijektiver Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ wieder bijektiv ist. *Tipp: Zeigen Sie zuerst die Injektivität, dann die Surjektivität.*

Teil C: Alphabete und Wörter (T4.3)

Erinnerung: Wörter

Sei Σ ein Alphabet, z. B. $\Sigma = \{a, b\}$. Ein Wort der Länge k ist ein Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in \Sigma$. Die Menge aller Wörter der Länge k heißt Σ^k.

C11. (1 P) Geben Sie alle Wörter der Länge 2 über $\Sigma = \{a, b\}$ an.

C12. (2 P) Wie viele Wörter der Länge 3 gibt es über $\Sigma = \{a, b, c\}$?

C13. (2 P) Sei $w = (a, b, a)$. Geben Sie $|w|$, das heißt die Länge von w, an und bestimmen Sie $f(w)$ für

$$f(w) = \begin{cases} 2|w|, & \text{falls } x_1 = a \\ 2|w| - 1, & \text{falls } x_1 = b \end{cases}$$

C14. (3 P) Füllen Sie die Lücken:

Sei $w = (a, b, a, b)$, dann ist $|w| =$ ________ und $f(w) =$ ________.

C15. (3 P) Betrachten Sie die Abbildungen $f\colon \{a, b\} \to \{0, 1\}$ mit $f(a) = 0, f(b) = 1$ und $g\colon \{0, 1\} \to \{a, b\}$ mit $g(0) = a, g(1) = b$. Was gilt für $F \circ G$ und $G \circ F$, wenn F, G wortweise erweitert werden? (Kreuzen Sie an oder begründen Sie kurz.)

☐ $(F \circ G) = \mathrm{Id}$ ☐ $(G \circ F) = \mathrm{Id}$
☐ keines von beidem

Teil D: Bilder und Urbilder von Mengen (T4.4)

Begriffserinnerung

Für $f\colon A \to B$ und $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ gilt:

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}, \quad f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

D16. (2 P) Sei $f\colon \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c\}$ mit $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = c$. Berechnen Sie $f(\{1,2\})$, $f(\{3,4\})$ und $f^{-1}(\{a,b\})$.

D17. (2 P) Füllen Sie den Lückentext aus:

Sei $x \in X$. Dann $f(x) \in f(X)$ und somit $x \in$ ________________.

Also gilt $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

D18. (2 P) Füllen Sie:

Sei $y \in f(f^{-1}(Y))$. Dann existiert $x \in f^{-1}(Y)$ mit $f(x) = y$.Aus $x \in f^{-1}(Y)$ folgt $f(x) \in Y$, also $y \in Y$.

D19. (3 P) Zeigen Sie: $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ für alle $X, Y \subseteq A$. *Tipp:* Wählen Sie ein beliebiges $b \in f(X \cap Y)$ und zeigen Sie die Inklusion Schritt für Schritt.

D20. (4 P) Zeigen Sie: f ist injektiv genau dann, wenn $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ für alle $X, Y \subseteq A$ gilt. *Hinweis:* Verwenden Sie die Aussagen der vorigen Aufgabe und argumentieren Sie in beide Richtungen.

Ende des Aufgabenblattes – good luck!

Total points: ___ / 42