Technische Universität München

Diskrete Strukturen (IN0015)

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr. Stefanie Jegelka — Jonathan Eichhorn, Marta Grobelna, Fabian Weisbrodt, Yongkuan Zhang

Übungsblatt 2

Tutoriumsaufgaben

T2.1 (a) Sei $M = \{\{0,1,3\},\{0,2,3,5\},\{2,3\},\{0,3,4,5\}\}$. Bestimmen Sie jeweils die folgenden Mengen:

- $\bigcap M$ und $\bigcup M$.
- $N = \{x \in 2^{\bigcup M} \mid \text{Für jedes } m \in M \text{ gilt } x \subseteq m\}$.
- $(\bigcup M) \times (\bigcap M)$.

(b) Es seien $A, B, C \subseteq \Omega$ beliebige Teilmengen der Grundmenge Ω. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Identitäten und Definitionen soweit wie möglich. Der finale Ausdruck darf nur noch Schnitte, Vereinigungen und Komplemente der Grundmengen A, B und C enthalten.
Geben Sie bei jedem Umformungsschritt die verwendete Identität oder Definition an und markieren Sie die vom Umformungsschritt betroffenen Teilausdruck.

$$\overline{\overline{(B \triangle C)} \cap (A \setminus \overline{C})}$$

T2.2 Verwenden Sie KV-Diagramme, um folgende Behauptungen zu überprüfen:

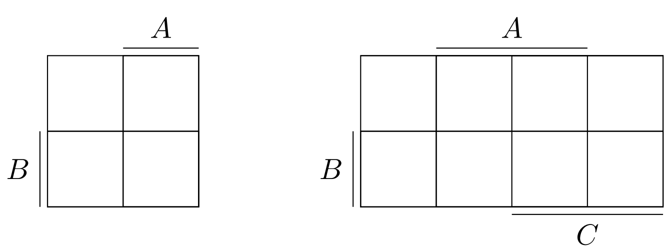
(a) $\overline{A \Delta B} = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Konstruieren Sie hierfür jeweils schrittweise die KV-Diagramme für beide Seiten der jeweiligen Gleichung.

Falls linke und rechte Seite nicht dasselbe KV-Diagramm besitzen, stellen Sie mittels der KV-Diagramme konkrete Mengen auf, so dass sich die beiden Mengenterme tatsächlich zu unterschiedlichen Mengen auswerten.

Verwenden Sie das KV-Format aus den Folien:



T2.3 Geben Sie einen Induktionsbeweis, dass

(a) für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{n(n+1)}{2} \overset{\text{zu zeigen}}{=} \sum_{k=0}^{n} k$$

(b) für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \overset{\text{zu zeigen}}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

(c) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(d) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\Phi + \Phi^{-1}} \qquad \text{mit } \Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

wobei die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ induktiv definiert ist durch

$$F_0 := 0 \qquad F_1 := 1 \qquad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Z.B. gilt $F_2 = 1 + 0 = 1,\ F_3 = 1 + 1 = 2,\ F_4 = 2 + 1 = 3,\ F_5 = 3 + 2 = 5$ usw.

Hausaufgaben

Abgabe über TUMexam bis Freitag, 31.10.25, 14:00. Beachten Sie die Hinweise in unserem Moodle-Kurs. Verwenden Sie für die Abgabe ausschließlich das über Ihren individuellen TUMexam-Link zur Verfügung gestellte Template.

H2.1 Hausaufgaben Gruppen

Andrea, Björn und Cäcilia müssen sich in zwei Gruppen aufteilen um DS Hausaufgaben abzugeben. Leider sind die drei Studierenden nur teilweise befreundet. Um Streitigkeiten innerhalb einer Gruppe zu vermeiden werden folgendee Anforderungen gestellt:

- Andrea mag Björn nicht und kann mit ihm nicht in einer Gruppe sein.
- Björn und Cäcilia mögen Andrea und würden gerne mit ihr in einer Gruppe sein.
- Mindestens eine Person muss in jeder Gruppe sein.

(a) Formalisieren Sie jede dieser Vorgaben als eine aussagenlogische Formel mit Hilfe der Variablen A (Andrea), B (Björn) und C (Cäcilia).

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob alle Vorgaben gleichzeitig umgesetzt werden können. Gibt es mehrere Möglichkeiten, die Vorgaben umzusetzen?

H2.2 Der Beweis ist heiß

Detlef Seelenbaum ist zur Gameshow *Der Beweis ist heiß*™ eingeladen worden. In dieser werden den Kandidat*innen nacheinander verschiedene mathematische Behauptungen präsentiert. Nachdem ihnen eine Behauptung gezeigt wurde müssen die Kandidaten dann entscheiden ob diese wahr oder falsch ist. Geben sie eine falsche Antwort müssen sie die Show verlassen, ist ihre Antwort korrekt kommen sie in die nächste Runde.
Durch einen Insider sind Sie an die Fragen der nächste Show gekommen, in welcher Herr Seelenbaum teilnehmen wird. Da Detlef eine guter Freund von Ihnen ist möchten Sie ihm helfen der erste Sieger von *Der Beweis ist heiß*™ in der neuen Staffel zu werden.
Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen ob sie wahr oder falsch sind und beweisen Sie ihre Antwort. Achten Sie dabei auf eine saubere Beweisstruktur!

(a) $\sqrt[7]{7} \notin \mathbb{Q}$.

(b) Für alle ganzen Zahlen m gibt es eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $m^3 - 3m + 2 = 2n + 2$.

(c) Es gibt ganze Zahlen m, n mit $m^3 + 3m^2 + 4m + 2 = 8n + 3$.

(d) Für jede reelle Zahl $\epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $\epsilon > \frac{1}{n}$.

(e) Es gibt positive ganze Zahlen x, y mit $x^4 + y^4 = 5^4$.
Hinweis: Nein Patrick, der große Satz von Fermat[1] *ist hierfür kein geeignetes Instrument. (Begründungen, die diesen verwenden, werden nicht akzeptiert)*

(f) Es gibt genau eine reelle Zahl e, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x \cdot e = x$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s_Last_Theorem`

H2.3 Zu NAND und NOR

Man kann zeigen, dass in der Aussagenlogik die Verknüpfungen und, oder und nicht ausreichen; jede andere Verknüpfung kann durch diese drei ausgedrückt werden, zum Beispiel ist 'wenn A, dann B' synoym zu 'B oder nicht A' (*unabhängig von der konkreten Wahl von* A, B).

Jeder konventionelle Prozessor ist letztendlich eine physische Umsetzung von Aussagenlogik; allerdings verwenden Prozessoren meistens nicht die drei Standardverknüpfungen, sondern entweder ausschließlich 'NAND' oder ausschließlich 'NOR' Schaltungen, die durch die folgende Wahrheitstabelle definiert sind:

A	B	(A NAND B)	(A NOR B)
false	false	true	true
false	true	true	false
true	false	true	false
true	true	false	false

In Worten: 'A NAND B' ist eine Abkürzung für 'nicht (A und B)', während 'A NOR B' für 'nicht (A oder B)' steht.

(a) Drücken Sie und, oder und nicht nur mithilfe von NAND bzw. NOR aus. (Z.B. ist 'nicht A' äquivalent zu 'A NAND A' bzw. 'A NOR A'.)

(b) Betrachten Sie das wie folgt definierte XOR:

A	B	(A XOR B)
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	falsch

Bestimmen Sie, wie sich XOR nur mithilfe von und, oder und nicht ausdrücken lässt.

(c) Die sogenannten *De-Morganschen Gesetze* lauten, dass 'nicht (A und B)' synonym ist zu '(nicht A) oder (nicht B)' und 'nicht (A oder B)' zu '(nicht A) und (nicht B)'. Zeigen Sie dies in Ihrer Hausaufgabe.

(d) Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle, um die Wahrheitswerte von 'wenn (A genau dann wenn B), dann C' zu bestimmen. Können Sie einen dazu synonymen Ausdruck finden, der ausschließlich und, oder und nicht verwendet?