1.7 DEFINICION. Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K. Una función $f: U \longrightarrow V$ se llama *lineal* o también *homomorfismo de espacios vectoriales* si

(i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ y

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$; $\quad u, v \in U$; $\alpha \in K$.

Obsérvese que el $+$ de $u+v$ se refiere a la suma de U y que el $+$ de $f(u)+f(v)$ se refiere a la suma de V. Lo mismo que αv denota la multiplicación escalar de U y $\alpha f(v)$ la de V.

Si en (ii) tomamos $\alpha = 0 \in K$, tenemos que $f(0v) = f(O) = 0f(v) = O$, luego $f(O) = O$, i.e., todo homomorfismo de espacios vectoriales (o función lineal) envía el vector cero del dominio en el vector cero del codominio.

Es obvio que las condiciones (i) y (ii) de la definición 1.7 son equivalentes a la siguiente:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v); \quad \alpha, \beta \in K; u, v \in U.$$

También se suele llamar a una función lineal f, *aplicación lineal* o *transformación lineal*. Utilizaremos cualquiera de estas denominaciones.

Nota. Por abuso de notación se acostumbra escribir 0 en lugar de O.

1.8 EJEMPLO. Sea $U = \mathbb{R}^3$ y $V = \mathbb{R}$ con la suma y multiplicación escalar usuales. Definamos $f: U \longrightarrow V$ mediante la regla $f(x,y,z) = 3x - 2y + 2z$. Veamos que f es lineal. Como

$$\begin{aligned} f((x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \\ &= 3(x_1+x_2) - (y_1+y_2) + 2(z_1+z_2) \end{aligned}$$

y $\qquad f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2) = (3x_1, -2y_1 + 2z_1) + (3x_2 - 2y_2 + 2z_2),$

claramente se cumple la condición (i) de 1.7. También, $f(\alpha(x,y,z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ $= 3\alpha x - 2\alpha y + 2\alpha z = \alpha(3x - 2y + 2z) = \alpha f(x,y,z)$, por lo que se cumple (ii) de 1.7.

1.9 EJEMPLO. Sea $U = V = \mathbb{R}^2$. Definamos $f: U \longrightarrow V$ mediante $f(x,y) = (x+2, y+3)$. Como $f(0,0) = (2,3) \neq (0,0)$, f no es lineal pues todo homomorfismo de espacios vectoriales envía el vector cero del dominio en el vector cero del codominio.

1.10 PROPOSICION. *La composición de dos homomorfismos de espacios vectoriales sobre un campo K es un homomorfismo de espacios vectoriales sobre K.*

Demostración. Sean $f: U \longrightarrow V$ y $g: V \longrightarrow W$ funciones lineales. Luego

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u+v) &= g(f(u+v)) \\ &= g(f(u)+f(v)) \\ &= g(f(u))+g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u)+(g \circ f)(v)\end{aligned}$$

Además, $(g \circ f)(\alpha u) = g(f(\alpha u)) = g(\alpha f(u)) = \alpha g(f(u)) = \alpha(g \circ f)(u)$. Por lo tanto $(g \circ f)$ es una función lineal.■

1.11 DEFINICION. Sea $f: U \longrightarrow V$ un homomorfismo (o función lineal o aplicación lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. Diremos que f es un *isomorfismo*, y escribiremos $f: U \xrightarrow{\cong} V$, si existe un homomorfismo $g: V \longrightarrow U$ tal que $g \circ f = 1_U$ y $f \circ g = 1_V$.

Es fácil comprobar (problema 1.9) que, si g existe, está determinada en forma única; la denotaremos con f^{-1} y se llama *inverso* de f. Así, $f: U \longrightarrow V$ es isomorfismo si, y sólo si, es biyectiva. Diremos que dos espacios U y V sobre un campo K son *isomorfos* si existe un isomorfismo $f: U \xrightarrow{\cong} V$ y escribiremos $U \cong V$.

2.5 DEFINICION. Sea $f: U \longrightarrow V$ un homomorfismo (función lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. El *núcleo* de f, denotado $ker\ f$, es el conjunto de todos los elementos $u \in U$ tales que $f(u) = 0$. La *imagen* de f, denotada $im\ f$, es el conjunto de $f(u)$ con $u \in U$.

2.6 PROPOSICION. *Sea $f: U \longrightarrow V$ un homomorfismo (función lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. Entonces, si U' es un subespacio de U, $f(U')$ es un subespacio de V y, si V' es un subespacio de V, $f^{-1}(V')$ es un subespacio de U.*

Demostración. Veamos que $f(U') = \{f(u) | u \in U'\}$ es un subespacio de V. Sean $v, w \in f(U')$, luego, existen $u, u' \in U'$ tales que $f(u) = v$, $f(u') = w$. Como U' es subespacio de U, $u + u' \in U'$ y $\alpha u \in U'$. Como f es lineal,

$$\begin{aligned} &f(O) = O \in f(U'), \\ &v + w = f(u) + f(u') = f(u + u') \in f(U'), \\ &\alpha v = \alpha f(u) = f(\alpha u) \in f(U'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(U')$ es un subespacio de V.

Veamos que $f^{-1}(V') = \{u \in U | f(u) \in V'\}$ es un subespacio de U. Sean $u, u' \in f^{-1}(V')$, entonces $f(u)$ y $f(u')$ están en V'. Como V' es un subespacio de V y f es lineal,

$$\begin{aligned} &f(O) = O \in V' \\ &f(u + u') = f(u) + f(u') \in V' \\ &f(\alpha u) = \alpha f(u) \in V', \quad \alpha \in K. \end{aligned}$$

Luego, $f^{-1}(V')$ es un subespacio de U.■

2.7 COROLARIO. *Sea $f: U \longrightarrow V$ lineal. Entonces $im\ f$ es un subespacio de V y $ker\ f$ es un subespacio de U.*

Demostración. Inmediata de 2.6 tomando $U' = U$ y $V' = 0$.■

2.13 COROLARIO. *Sean $f: U \longrightarrow V$ y $g: V \longrightarrow W$ funciones lineales entre espacios vectoriales sobre un campo K tales que $g \circ f$ es isomorfismo. Entonces $V \cong im\ f \oplus ker\ g$.*

Demostración. Veamos que $im\ f + ker\ g = V$. Sea $v \in V$ y $g(v) \in W$. Como $gf: U \longrightarrow W$ es un isomorfismo, existe $u \in U$ tal que $gf(u) = g(v)$. Sea $v' = f(u) \in im\ f$ y $v'' = v - v'$. Entonces $g(v'') = g(v - v') = g(v) - g(v') = gf(u) - g(f(u)) = 0$. Luego $v'' \in ker\ g$ y, por lo tanto, $v' + v'' \in im\ f + ker\ g$ pues v era arbitraria.

Veamos que $im\ f \cap ker\ g = \{0\}$. Sea $v \in im\ f \cap ker\ g$. Entonces, como $v \in im\ f$, existe $u \in U$ tal que $f(u) = v$. Como $v \in ker\ g$, $g(v) = 0$. Luego $gf(u) = g(v) = 0$. Como gf es un isomorfismo, $u = 0$. Luego $f(u) = 0$ y, por lo tanto, $v = 0$. Por 2.12, $V \cong im\ f \oplus ker\ g$.■

A continuación estableceremos una propiedad, llamada *universal*, de la suma directa.

2.14 TEOREMA. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, $\varphi_i: V_i \to V$, $i = 1, 2$ funciones lineales de espacios vectoriales e $\imath_i: V_i \longrightarrow V_1 \oplus V_2$, $i = 1, 2$ las inclusiones naturales. Entonces existe una función lineal única $\varphi: V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V$ tal que $\varphi \circ \imath_i = \varphi_i$, $i = 1, 2$.*

Demostración. La afirmación del enunciado puede representarse en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & V & \\ V_1 \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\imath_1"] & V_1 \oplus V_2 \arrow[u, "\varphi"] & V_2 \arrow[l, "\imath_2"'] \arrow[ul, "\varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

Definamos $\varphi(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2)$. Es fácil comprobar que $\varphi: V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V$ es la única función lineal tal que el diagrama anterior *conmuta*, i.e., $\varphi \circ \imath_i = \varphi_i$, $i = 1, 2$.Problema 2.9■

El teorema precedente caracteriza a la suma directa y se puede generalizar fácilmente a n sumandos con solamente considerar $i = 1, 2, \ldots, n$. El diagrama correspondiente es

$$\begin{tikzcd} & V \\ V_j \arrow[ur, "\varphi_j"] \arrow[r, "\imath_j"] & \bigoplus_{i=1}^n V_i \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

donde $\imath_j$ denota la inclusión natural de V_j en $\bigoplus_{i=1}^n V_i$.

2.15 DEFINICION. Decimos que un vector v de un espacio vectorial V sobre un campo K es una *combinación lineal* de elementos de un subconjunto S de V si existe un número finito de elementos $\{v_i\}_{i=1}^n$ de S tal que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in K$. Las α_i se llaman *coeficientes*.

Para simplificar la notación, y cuando no haya posibilidad de confusión, quitaremos los límites del conjunto. Por ejemplo escribiremos $\{v_j\}$ en lugar de $\{v_j\}_{j=1}^n$.

2.16 TEOREMA. *El conjunto de todas las combinaciones lineales $\langle S \rangle$ de un subconjunto no vacío S del espacio vectorial V sobre un campo K es un subespacio de V que contiene a S y es el subespacio más pequeño de V que contiene a S.*

Demostración. Sea $v \in S$, como $v = 1v$ entonces $v \in \langle S \rangle$ y es inmediato comprobar que $O \in \langle S \rangle$. Si $u, v \in \langle S \rangle$ entonces $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ y $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$; $\alpha_i, \beta_j \in K$; $u_i, v_j \in S$. Entonces $u + v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$ y $\alpha u = \alpha(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha\alpha_n u_n$. Luego $u + v$ y αu pertenece a $\langle S \rangle$. Así, $\langle S \rangle$ es un subespacio de V.

Supongamos que U es un subespacio de V que contiene a S y supongamos que $u_1, \ldots, u_n \in S \subset U$. Entonces $\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n \in U$ con $\alpha_i \in K$. Esto significa que U contiene a todas las combinaciones lineales de S, i.e., U contiene a $\langle S \rangle$.■

2.17 DEFINICION. El subespacio más pequeño de un espacio vectorial V

sobre un campo K que contiene a un subconjunto S de V se llama ***subespacio generado por S***.

Por el teorema 2.16, $\langle S \rangle$ es el subespacio generado por un subconjunto S de V. Además, observe que como es el subespacio más pequeño de V que contiene a S, $\langle S \rangle$ es igual a la intersección de todos los subespacios que contienen a S. Si $\langle S \rangle = V$, todo elemento de V es una combinación lineal de elementos de S. En este caso, diremos que V está ***generado*** por el subconjunto S de V.

2.18 EJEMPLO. Sea $S = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^4$. Considere las combinaciones lineales de elementos de S, i.e., expresiones de la forma

$$\alpha_1(1,0,0,0) + \alpha_2(0,1,0,0) + \alpha_3(0,0,1,0) + \alpha_4(0,0,0,1).$$

Es claro que cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ puede escribirse como combinación lineal de vectores de S; luego $\langle S \rangle = \mathbb{R}^4$.