UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO:

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA MULTILINEAL.

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA.

PRESENTADO POR:

ROMERO FUENTES, EDITH TEODORA.

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ.

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, ENERO 2020
SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTRO AMÉRICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

RECTOR
MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO.

VICERECTOR ACADÉMICO
DR. MANUEL DE JESÚS JOYA ÁBREGO.

VICERECTOR ADMINISTRATIVO
ING. NELSON BERNABÉ GRANADOS.

SECRETARIO GENERAL
MSC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ.

FISCAL GENERAL
LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN.

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

DECANO
LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ.

VICEDECANO
LIC. OSCAR VILLALOBOS.

SECRETARIO GENERAL
LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA.

DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADUACIÓN
LIC. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA.

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS

AUTORIDADES

JEFE DEL DEPARTAMENTO
MTRA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ.

COORDINADOR DE LA CARRERA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
.

COORDINADOR DE PROCESOS DE GRADUACIÓN
.

TRIBUNAL EVALUADOR

JURADO ASESOR
LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ.

DOCENTE JURADO CALIFICADOR
.

DOCENTE JURADO CALIFICADOR
.

Agradecimientos

En este capitulo colocamos los agradecimientos....

OBJETIVOS

- Objetivos General
  - ....
- Objetivos Específicos
  - ....
  - ....

Contenido

Capítulo 1

Espacios vectoriales

1.1. Espacio vectorial

Definición 1.1 *Un espacio vectorial es una terna* $(V, +, \cdot)$*, donde* V *es un conjunto no vacío y* $+, \cdot$ *son dos operaciones del tipo* $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ *a las que llamaremos "suma de vectores" y "producto por escalares" respectivamente y con las siguientes propiedades: denotando* $+(u, v) = u + v$ *y* $\cdot(\lambda, v) = \lambda v$*,*

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (asociativa).
2. $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (conmutativa).
3. Existe $e \in V$ tal que $e + v = v + e = v$, $\forall v \in V$ (elemento neutro).
4. Para cada $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v + w = w + v = e$ (elemento opuesto).
5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, $\forall v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (seudo-asociativa).
6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ y $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall u, v \in V$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (distributiva).
7. $1v = v$, $\forall v \in V$ (unimodular).

De forma abreviada, diremos que V es un espacio vectorial. A los elementos de V lo llamamos vectores y a los de $\mathbb{R}$, escalares.

Proposición 1.1 *En un espacio vectorial* V*,*

1. *El elemento neutro es único. Se denotará por 0.*

2. *El elemento opuesto de un vector es único. Si v es un vector, su opuesto lo denotamos por $-v$.*

Demostración 1.1 *1) Sea $e \in V$ el elemento neutro de V y supongamos que existe otro elemento $e' \in V$ el cual también cumple que:*
$\forall v \in V$, $v + e' = e' + v = v$, pero también tenemos que $v + e = e + v = v$, $\forall v \in V$. Entonces:
$e + e' = e$ y $e + e' = e'$, por lo tanto $e = e'$. Por lo cual e es único y lo denotamos por 0.

2) Sea $v \in V$ y $a \in V$ su opuesto tal que: $a + v = v + a = e$, y supongamos que existe otro elemento opuesto $b \in V$ de v tal que: $v + b = b + v = e$, entonces:
$v + b = v + a$, ya que $v + a = e = v + b$, luego como $+$ es función tenemos:
$b + v + b = b + v + a$, luego
$(b + v) + b = (b + v) + a$; por propiedad asociativa.
$e + b = e + a$, lo que implica que $b = a$ y por lo tanto el opuesto de v es único. Ahora denotamos el opuesto de v como $-v$.
Dada la definición de espacio vectorial para siguiente proposición no es necesaria su demostración.

Proposición 1.2 *En un espacio vectorial se tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\lambda \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
2. *$0v = \boldsymbol{0}$, $v \in V$.*
3. *$(-\lambda)v = -(\lambda v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$.*
4. *Si $\lambda v = \boldsymbol{0}$, entonces $\lambda = 0$ o $v = \boldsymbol{0}$.*

Demostración 1.2 *1) Sea $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \boldsymbol{0} = \lambda(1\boldsymbol{0}) = (\lambda 1) \cdot \boldsymbol{0}$*

A continuación, damos algunos ejemplos de espacios vectoriales:

1. Si n es un número positivo, se considera el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$ con las misma suma y producto por escalares siguientes:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

   Siempre se supondrá que $\mathbb{R}^n$ tiene esta estructura vectorial y que llamaremos *usual*.

2. Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$ con la suma y producto por escalares como antes.
3. Sea $V = \{p\}$ un conjunto con un único elemento y con $p + p = p$ y $\lambda p = p$.

4. Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; f$ es aplicación $\}$ y para $x \in \mathbb{R}$ se define
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$
5. $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f$ es una función diferenciable$\}$ y la suma y el producto por escalares está definido de forma análoga a la del ejemplo anterior.

A continuación definimos estructuras de espacio vectorial a partir de la teoría de conjuntos. Concretamente, a partir del producto cartesiano, aplicaciones biyectivas, espacios cocientes y subconjuntos.

Definición 1.2 *Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales. Se define en $V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2); v_i \in V_i\}$ las siguientes operaciones:*
$$(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$
$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$
Con esta suma y producto por escalares, $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial y se llama espacio producto. Como caso particular, se tiene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y de la misma forma, se puede definir el espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Definición 1.3 *Se considera V un espacio vectorial y V' un conjunto biyectivo con V. Sea $f : V \to V'$ una biyección entre ambos. Se define en V' la siguiente estructura de espacio vectorial:*
$$v' + u' = f(f^{-1}(v') + f^{-1}(u'))$$
$$\lambda v' = f(f^{-1}(v'))$$
Se dice V' tiene la estructura vectorial inducida de V por la biyección f.

La estructura vectorial inducida en un subconjunto de un espacio vectorial motiva el estudio de subespacio vectorial.

1.2. Subespacio vectorial

Definición 1.4 *Sea V un espacio vectorial y U un subconjunto suyo. Se dice que U es un subespacio vectorial de V si satisface las siguientes propiedades:*

1. Si $u, v \in U$, entonces $u + v \in U$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in U$, entonces $\lambda u \in U$.
3. Con la suma y producto por escalares de V , U es un espacio vectorial.

Proposición 1.3 *Sea U un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces U es un subespacio vectorial si y sólo si*

1. Si $u, v \in U$, entonces $u + v \in U$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in U$, entonces $\lambda u \in U$.

Demostración 1.3 *La condición necesaria observamos que se cumple por la definición así que solo basta probar la condición suficiente.*
Supongamos que U satisface las propiedades 1 y 2. Veamos que con éstas son suficientes para probar todas las propiedades de espacio vectorial. Todas éstas son ciertas de forma trivial, excepto dos: la existencia de elemento neutro y opuesto. Pero para ello basta con probar que el elemento neutro de V se encuentra en U y lo mismo sucede con el elemento opuesto de un vector de U.

Por hipótesis, si $u \in U$, $0u = 0 \in U$. De la misma forma, si $u \in U$, $-1u = -(1u) = -u \in U$. Por lo tanto U es un subespacio vectorial.

En particular, todo subespacio vectorial debe contener el elemento neutro del espacio ambiente, así como los elementos opuestos de todos los vectores del subespacio.

Proposición 1.4 1. *Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales, entonces $U_1 \cap U_2$ también es subespacio vectorial.*

2. *Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V y $U_1 \subset U_2$, entonces U_1 es un subespacio vectorial de U_2.*

Ejemplos.

1. Si V es un espacio vectorial, $\{\mathbf{0}\}$ y V son subespacios vectoriales, llamados subespacios vectoriales triviales.
2. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
3. En general, si $a_1, \ldots, a_n$ son números reales, no todos nulos, el conjunto $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si y sólamente si $b = 0$.
4. Si V_1 y V_2 son espacios vectoriales, entonces $V_1 \times \{\mathbf{0}\}$ y $\{\mathbf{0}\} \times V_2$ son subespacios vectoriales del espacio producto $V_1 \times V_2$.

5. Si V es un espacio vectorial, V es un conjunto biyectivo con V con la estructura de espacio vectorial inducida por una biyección $f : V \to V'$, entonces $U \subset V$ es un subespacio vectorial si y sólo si $f(U)$ es un subespacio vectorial de V'.

Definición 1.5 *Sean U y W subespacios vectoriales de V . Se define la suma de U con W como el conjunto.*

$$U + W = \{u + w; u \in U, w \in W\}$$

Entonces $U + W$ es un subespacio vectorial. Además se tienen las siguientes propiedades:

1. $U + W = W + U$.
2. $U + U = U$.
3. $U \subset U + W$.
4. *$U + W$ es el menor subespacio (con respecto a la inclusión de conjuntos) que contiene a U y a W .*

Definición 1.6 *Un espacio vectorial V es suma directa de dos subespacios vectoriales U y W suyos, y se denota por $V = U \oplus W$, si $V = U + W$ y $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$*

Con el concepto de subespacio vectorial podemos definir una estructura de espacio vectorial en un conjunto cociente.

Definición 1.7 *Sea U un subespacio vectorial de V . En V se define la siguiente relación binaria R:*

$$vRw \text{ si } v - w \in U$$

Entonces R es una relación de equivalencia en V . Al conjunto cociente se denota por V/U. Es evidente que la clase de equivalencia de un vector v es

$$[v] = v + U = \{v + u; u \in U\}.$$

En V/U se define la siguiente suma y producto por escalares:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U.$$

$$\lambda(v + U) = (\lambda v) + U.$$

Estas operaciones están bien definidas: por ejemplo, si $v + U = v' + U$ y $w + U = w' + U, v - v' \in U, w - w' \in U$ y por tanto, $(v + w) + U = (v' + w') + U$.

Proposición 1.5 *V/U es un espacio vectorial. El elemento neutro es $0 + U$ y si $v + U \subset V/U$, su elemento opuesto es $(-v) + U$.*

1.3. Funciones Lineales

Definición 1.8 *Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K. Una función $f : U \to V$ se llama lineal o también homomorfismo de espacios vectoriales si*

(i.) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ y
(ii.) $f(\alpha v) = \alpha f(u)$; $u, v \in U$; $\alpha \in K$

Obsérvese que el $+$ de $u + v$ se refiere a la suma de U y que el $+$ de $f(u) + f(v)$ se refiere a la suma de V. Lo mismo que αv denota la multiplicación escalar de U y $\alpha f(v)$ la de V.

Si en (ii) tomamos $\alpha = 0 \in K$, tenemos que $f(0v) = f(\mathbf{0}) = 0f(v) = \mathbf{0}$, luego $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, i.e., todo homomorfismo de espacios vectoriales (o función lineal) envía el vector cero del dominio en el vector cero del codominio.

Es obvio que las condiciones (i) y (ii) de la definición 1.8 son equivalentes a la siguiente:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v); \alpha, \beta \in K; u, v \in U$$

.

También se suele llamar a una función lineal f. aplicación lineal o transformación lineal. Utilizaremos cualquiera de estas denominaciones.

Ejemplo 1.1 *Sea $U = \mathbb{R}^3$ y $U = \mathbb{R}$ con la suma y multiplicación escalar usuales. Definamos $f : U \to V$ mediante la regla $f(x, y, z) = 3x - 2y + 2z$. Veamos que f es lineal. Como*

$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = 3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2)$
$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = (3x_1, -2y_1 + 2z_1) + (3x_2, -2y_2 + 2z_2)$,

*claramente se cumple la condición (i) de 1.8. También, $f(\alpha(x, y, z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
$= 3\alpha x - 2\alpha y + 2\alpha z = \alpha(3x - 2y + 2z) = \alpha f(x, y, z)$. por lo que se cumple (ii) de 1.8.*

Ejemplo 1.2 *Sea $U = V = \mathbb{R}^2$. Definamos $f : U \to V$ mediante $f(x, y) = (x + 2, y + 3)$. Como $f(0, 0) = (2, 3) \neq (0, 0), f$ no es lineal pues todo homomorfismo de espacios vectoriales envía el vector cero del dominio en el vector cero del codominio.*

Proposición 1.6 *La composición de dos homomorfismos de espacios vectoriales sobre un campo K es un homomorfismo de espacios vectoriales sobre K.*

Demostración 1.4 *Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ funciones lineales. Luego*

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u+v) &= g(f(u+v)) \\ &= g(f(u)+f(v)) \\ &= g(f(u))+g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u)+(g \circ f)(v)\end{aligned}$$

Además, $(g \circ f)(\alpha u) = g(f(\alpha u)) = g(\alpha f(u)) = \alpha g(f(u)) = \alpha(g \circ f)(u)$. Por lo tanto $(g \circ f)$ es una función lineal.

Definición 1.9 *Sea $f : U \to V$ un homomorfismo (o función lineal o aplicación lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. Diremos que f es un isomorfismo, y escribiremos $f : U \overset{\cong}{\to} V$ si existe un homomorfismo $g : V \to U$ tal que $g \circ f = 1_U$ y $f \circ g = 1_V$.*

Es fácil comprobar que, si y existe, está determinada en forma única; la denotaremos con f^{-1} y se llama inverso de f. Así, $f : U \to V$ es isomorfismo si, y sólo si. es biyectiva. Diremos que dos espacios U y V sobre un campo K son isomorfos si existe un isomorfismo$f : U \overset{\cong}{\to} V$ y escribiremos $U \cong V$.

Definición 1.10 *Sea $f : U \to V$ un homomorfismo (función lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. El núcleo de f. denotado $ker f$, es el conjunto de todos los elementos $u \in U$ tales que $f(u) = 0$. La imagen de f. denotada $im f$, es el conjunto de $f(u)$ con $u \in U$.*

Proposición 1.7 *Sea $f : U \to V$ un homomorfismo (función lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. Entonces, si U' es un subespacio de U, $f(U)$ es un subespacio de V y, si V' es un subespacio de V, $f^{-1}(V')$es un subespacio de U.*

Demostración 1.5 *Veamos que $f(U') = \{f(u)|u \in U'\}$ es un subespacio de V. Sean $v, w \in f(U')$ luego, existen $u, u' \in U'$ tales que $f(u) = v, f(u') = w$. Como U' es subespacio de U, $u + u' \in U'$ y a $\alpha u \in U'$. Como f es lineal.*

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in f(U'),$$
$$v + w = f(u) + f(u') = f(u + u') \in f(U')$$
$$\alpha v = \alpha f(u) = f(\alpha u) \in f(U')$$

Por lo tanto, $f(U')$ es un subespacio de V.

Veamos que $f^{-1}(V') = \{u \in U|f(u) \in V'\}$ es un subespacio de U. Sean $u, u' \in f^{-1}(V')$ entonces $f(u)$ y $f(u')$ están en V'. Como V' es un subespacio de V y f es lineal,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in V'$$

$$f(u+u') = f(u) + f(u') \in V'$$
$$f(\alpha u) = \alpha f(u) \in V', \alpha \in K.$$

Luego, $f^{-1}(V')$ es un subespacio de U.

Corolario 1.1 *Sea $f : U \to V$ lineal. Entonces imf es un subespacio de V y $ker\, f$ es un subespacio de U.*

Demostración 1.6 *Inmediata de 1.7 tomando $U' = UyV' = 0$.*

Corolario 1.2 *Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ funciones lineales entre espacios vectoriales sobre un campo K tales que $g \circ f$ es isomorfismo. Entonces $V \cong imf \oplus kerg$.*

Demostración 1.7 *Veamos que im $f+$ ker $g = V$. Sea $v \in V$ y $g(v) \in W$. Como $gf : U \to W$ es un isomorfismo, existe $u \in U$ tal que $gf(u) = g(v)$. Sea $v' = f(u) \in imf$ y $v'' = v - v'$. Entonces $g(v'') = g(v - v') = g(v) - g(v') = gf(u) - g(f(u)) = 0$. Luego $v'' \in kerg$ y, por lo tanto, $v' + v'' \in$ im $f+$ ker g pues v era arbitraria.*

Veamos que im $f\cap$ ker $g = 0$. Sea $v \in imf\cap$ $kerg$. Entonces, como $v \in imf$, existe $u \in U$ tal que $f(u) = v$. Como $v \in$ ker g, $g(v) = 0$. Luego $gf(u) = g(v) = 0$. Como gf es un isomorfismo, $u = 0$. Luego $f(u) = 0$ y, por lo tanto, $v = 0$. Por V im $f\oplus$ ker g .

A continuación estableceremos una propiedad, llamada universal, de la suma directa.

Teorema 1.1 *Sea V un espacio vectorial sobre un campo K , $\varphi_i : V_i \to V, i = 1, 2$ funciones lineales de espacios vectoriales e $\imath_i$ $V_i \to V_1 \oplus V_2$, $i = 1, 2$ las inclusiones naturales. Entonces existe una función lineal única $\varphi : V_1 \oplus V_2 \to V$ tal que $\varphi \circ \imath_i = \varphi_i$, $i = 1, 2$.*

Demostración 1.8 *La afirmación del enunciado puede representarse en el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
V_1 \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\imath_1"] & V_1 \oplus V_2 \arrow[u, "\varphi"] & V_2 \arrow[ul, "\varphi_2"'] \arrow[l, "\imath_2"']
\end{tikzcd}$$

Definamos $\varphi(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2)$. Es fácil comprobar que $\varphi : V1 \oplus V2 \to V$ es la única función lineal tal que el diagrama anterior conmuta, i.e., $\varphi \circ \imath_i = \varphi_i$, $i = 1, 2$. El teorema precedente caracteriza a la suma directa y se puede generalizar fácilmente a n sumandos con solamente considerar $i = 1, 2, ..., n$. El diagrama correspondiente es

$$\begin{tikzcd}
 & V \\
V_j \arrow[ur, "\varphi_j"] \arrow[r, "\imath_j"] & \oplus_{i=1}^{n} V_i \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

donde $\imath_j$ denota la inclusión natural de V_j en $\oplus_{i=1}^{n} V_i$.

Definición 1.11 *Decimos que un vector v de un espacio vectorial V sobre un campo K es una combinación lineal de elementos de un subconjunto S de V si existe un número finito de elementos $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ de S tal que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in K$. Las α_i se llaman coeficientes. Para simplificar la notación, y cuando no haya posibilidad de confusión, quitaremos los límites del conjunto. Por ejemplo escribiremos $\{v_j\}$ en lugar de $\{v_j\}_{j=1}^{n}$.*

Teorema 1.2 *El conjunto de todas las combinaciones lineales $\langle S \rangle$ de un subconjunto no vacío S del espacio vectorial V sobre un campo K es un subespacio de V que contiene a S y es el subespacio más pequeño de V que contiene a S.*

Demostración 1.9 *Sea $v \in S$, como $v = 1v$ entoncesv $\in \langle S \rangle$ y es inmediato comprobar que $O \in \langle S \rangle$. Si $u, v \in \langle S \rangle$ entonces $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ y $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$; β_i , $\beta_j \in K$; $u_i, v_j \in S$. Entonces $u+v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$ y $\alpha u = \alpha(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha\alpha_n$ un. Luego $u + v$ y α_u pertenece a $\langle S \rangle$. Así, $\langle S \rangle$ es un subespacio de V .*

Supongamos que U es un subespacio de V que contiene a S y supongamos que $u_1, \ldots, u_n \in S \subset U$. Entonces $\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n \in U$ con $\alpha_i \in K$. Esto significa que U contiene a todas las combinaciones lineales de S, i.e., U contiene a $\langle S \rangle$.

Definición 1.12 *El subespacio más pequeño de un espacio vectorial V sobre un campo K que contiene a un subconjunto S de V se llama subespacio generado por S.*

Por el teorema 1.2, $\langle S \rangle$ es el subespacio generado por un subconjunto S de V . Además, observe que como es el subespacio más pequeño de V que contiene a S,$\langle S \rangle$ es igual a la intersección de todos los subespacios que contienen a S. Si $\langle S \rangle = V$, todo elemento de V es una combinación lineal de elementos de S. En este caso, diremos que V está generado por el subconjunto S de V .

Ejemplo 1.3 *Sea $S = (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ un subconjunto del$\mathbb{R}^4$. Considere las combinaciones lineales de elementos de S, i.e., expresiones de la forma.*

$$\alpha_1(1,0,0,0) + \alpha_2(0,1,0,0) + \alpha_3(0,0,1,0) + \alpha_4(0,0,0,1).$$

Es claro que cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ puede escribirse como combinación lineal de vectores de S; luego $\langle S \rangle = \mathbb{R}^4$.

1.4. Espacios Vectoriales de Dimensión Finita

Iniciaremos esta sección estudiando, desde otro punto de vista, los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Consideremos la suma directa $K^n = \oplus_{j=1}^n K_j$ con cada K_j igual a K considerado como espacio vectorial sobre si mismo. Sea $\imath_i : K_i \to \oplus_{j=1}^n K_j$ la inclusión natural dada por $\imath_i(\alpha) = (0, \ldots, \alpha, \ldots, 0)$, ($\alpha$ en el lugar i). Y como $\imath_i$ es lineal, la inclusión queda determinada por su valor en 1, $\imath_i(1) = (0, \ldots, 1, \ldots., 0) = ei$. Observe que cada $u \in \oplus_{j=1}^n K_j$ puede escribirse en forma única como $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_j \in K_j$. Denotaremos con g la función

$$g : \{1, \ldots, n\} \to \oplus_{j=1}^n K_j$$

$$i \mapsto e_i$$

dada por $g(i) = e_i$. (g es simplemente una función.)

Proposición 1.8 *Para todo espacio vectorial V sobre un campo K y para toda función f : $1, 2, \ldots, n \to V$ existe una función lineal única $\phi : \oplus_{j=1}^n K_j \to V$ tal que $f = \phi \circ g$.*

$$\begin{tikzcd}
V & \\
\oplus_{j=1}^n K_j \arrow[u, "\phi"] & \{1, \ldots, n\} \arrow[l, "g"'] \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

Demostración 1.10 *Sea $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in \oplus_{j=1}^n K_j$ y sean $v_1 = f(1), \ldots, v_n = f(n)$. Como la expresión de u es única podemos definir una función ϕ mediante la fórmula $\phi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Es inmediato comprobar que ϕ es lineal y que $\phi(e_i) = f(i)$, es decir, $\phi g(i) = f(i)$, o sea, $\phi \circ g = f$.*

Definición 1.13 *Diremos que el conjunto $\{v_j\}$,$j \in 1, 2, \ldots, n$, de elementos de un espacio vectorial V sobre un campo K es*

(i) linealmente independiente si ϕ es inyectiva.
(ii) un conjunto de generadores de V si ϕ es suprayectiva.
(iii) una base de V si ϕ es biyectiva.

En otras palabras, el conjunto $\{v_j\}$, $j \in 1, 2, \ldots, n$ es linealmente independiente $si\phi(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$ implica que $\alpha_j = 0$ para toda j en $1, 2, \ldots, n, \alpha_j \in K_j$.

Diremos que el conjunto $\{v_j\}$, $j \in 1, 2, \ldots, n$, de elementos de un espacio vectorial V sobre un campo$K$ es *linealmente dependiente* si dicho conjunto no es linealmente independiente. Es decir, $\{v_j\}$ es linealmente dependiente si existen escalares $\alpha_i \in K$ no todos cero tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Esta última expresión es válida para $\alpha_j = 0$, $\forall_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y si ésta ultima expresión es válida únicamente para $\alpha_j = 0, j \in 1, 2, \ldots, n$ entonces el conjunto $\{v_j\}$ es linealmente independiente. En otras palabras, el conjunto $\{v_j\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, toda combinación lineal no trivial de vectores del conjunto $\{v_j\}$ es diferente del vector 0.

Decir que ϕ en 1.13 es suprayectiva equivale a decir que todo elemento de V puede escribirse como $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, i.e., como una combinación lineal. El que ϕ sea biyectiva quiere decir que todo elemento $v \in V$ puede escribirse de una y solamente una manera en la forma $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \forall_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Es claro que el conjunto $\{e_j\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, es una base de $\oplus_{j=1}^{n} K_j$ (llamada canónica). Frecuentemente se identifica el conjunto $1, 2, \ldots, n$ con el conjunto de los e_j mediante la biyección dada por $j \mapsto e_j$.

Ejemplo 1.4 *Los vectores del espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$ *sobre* $\mathbb{R}$, $v_1 = (2, 3, 1, 4)$, $v_2 = (3, 2, 1, 0)$ *y* $v_3 = (17, 18, 7, 16)$, *son linealmente dependientes puesto que* $4(2, 3, 1, 4) + 3(3, 2, 1, 0) - (17, 18, 7, 16) = (0, 0, 0, 0)$.

Ejemplo 1.5 *Sean* $v_1 = (5, 4, 7)$, $v_2 = (0, 3, 1)$ *y* $v_3 = (0, 0, 2)$ *vectores del espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *sobre* $\mathbb{R}$. *Sea* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ *una combinación lineal igual a cero. Entonces tenemos un sistema de ecuaciones lineales*

$$5\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$

$$4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$

$$7\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

De la primera ecuación, tenemos que $\alpha_1 = 0$. *De la segunda ecuación con* $\alpha_1 = 0$ *tenemos que* $\alpha_2 = 0$, *y de la tercera ecuación con* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *tenemos que* $\alpha_3 = 0$. *Luego* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ *y los vectores* v_1 , v_2 *y* v_3 *son linealmente independientes.*

Proposición 1.9 *El conjunto de vectores diferentes de cero* $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ *es linealmente dependiente si, y sólo si, uno de ellos es combinación lineal de los vectores precedentes.*

Demostración 1.11 Supongamos que son linealmente dependientes; entonces $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ con alguna $\alpha_i \neq 0$. Sea j el mayor entero tal que $\alpha_j \neq 0$. Entonces $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j + 0 v_{j+1} + \ldots + 0 v_n = 0$, i.e., $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j = 0$. Si j = 1 entonces $\alpha_1 v_1 = 0$ con $\alpha_1 \neq 0$, luego $v_1 = 0$. Si $j > 1$, como los vectores v_j son diferentes de cero y

$$v_j = -\alpha_j^{-1} \alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_j^{-1} \alpha_{j-1} v_{j-1},$$

v_j es combinación lineal de los vectores precedentes.

Supongamos ahora que $v_j = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1}$. Entonces podemos reescribir esto como

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + 0 v_{j+1} + \ldots + 0 v_n = 0$$

con $\alpha_j \neq 0$. Luego, $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es linealmente dependiente.

Observación Es inmediato de la definición 1.13 que si V es un espacio vectorial sobre un campo K con base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ entonces es isomorfo a K^n .

Teorema 1.3 *Sea $X = \{u_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de generadores de un espacio vectorial V sobre un campo K .*

(i) Si u_j es combinación lineal de los vectores $\{u_i\}_{i=1}^{j-1}$ entonces el conjunto $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$ genera a V .

(ii) Si $Y = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente entonces $r \leq n$ y V está generado por un conjunto de la forma $v_1, ..., v_r, u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-r}}$ con $u_{i_j} \in X$.

(iii) Cualquier base de V posee la misma cardinalidad.

Demostración 1.12 *(i) Supongamos que u_j es combinación de $\{u_i\}_{i=1}^{j-1}$, entonces $u_j = \sum_{i=1}^{j=1} \beta_i u_i$ Sea $w \in V$. Como $\{u_i\}_{i=1}^n$ genera a V, $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, sustituyendo u_j con $\sum_{i=1}^{j=1} \beta_i u_i$ tenemos que*

$$w = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i u_i + \alpha_j \sum_{i=1}^{j-1} + \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{j-1} (\alpha_i + \alpha_j \beta_j) u_i + \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Por lo tanto, como w era arbitrario, $\{u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\}$ genera a V .

(ii) Como $\{u_i\}_{i=1}^n$ genera a V , si le agregamos el vector v_1, entonces $\{v_1, u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente dependiente y genera a V .
Por 1.9 uno de los vectores del conjunto $\{v_1, u_1, \ldots, u_n\}$ es una combinación lineal de los vectores precedentes. No puede ser v_1 , pues $\{v_1\}$ es linealmente independiente, tiene que ser uno de los de X, digamos u_j . Por (i) podemos omitir a u_j y obtener un conjunto $\{v_1, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\}$ que genera. Repetimos el procedimiento con v_2 . Entonces $\{v_1, v_2, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\}$ es linealmente dependiente y genera a V . Por 1.9 uno de los vectores del conjunto es una combinación lineal de los precedentes. Como $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente, ese vector debe ser una u_k . Por (i) podemos omitir u_k y obtener un conjunto $\{v_1, v_2, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ que genera a V . Si continuamos el proceso obtendremos un conjunto, para $r \leq n$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-r}}\}$ que genera a V .
(iii) Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V y $\{v_1, v_2, \ldots\}$ otra base de V . Como $\{u_i\}_{i=1}^n$ genera a V , la base $\{v_j\}$ debe contener n o menos vectores, pues, si no, sería linealmente dependiente (por (ii)). Si la base $\{v_j\}$ contiene menos de n vectores, entonces $\{u_i\}_{i=1}^n$ es linealmente dependiente (por (ii). Luego, la base $\{v_j\}$ contiene n elementos.

Obsérvese que los espacios vectoriales K^n y K^m son isomorfos si, y sólo si, $n = m$.

Definición 1.14 La *dimensión* en un espacio vectorial V sobre un campo K, denotada dim V , es el número de elementos de una base de V .

A continuación estableceremos un resultado que relaciona la dimensión de la suma de subespacios, con la de cada uno de ellos.

Teorema 1.4 *Sean U y V subespacios de un espacio vectorial W sobre un campo K de dimensión finita. Entonces*

$$\dim\ (U + V) = \dim\ U + \dim\ V \text{ - } \dim\ (U \cap V).$$

Demostración 1.13 S*ea $n = dim\ U$, $m = dim\ V$ y $r = dim\ (U \cap V)$. Sea $\{u_i\}_{i=1}^r$ una base de $U \cap V$.*
(iii) $\{u_i\}_{i=1}^r$ es parte de una base de U y también de una base de V , digamos $A = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ y $B = \{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$ respectivamente.

Consideremos el conjunto $C = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r}, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$ y veamos que es una base de $U + V$ con lo que habremos terminando. Como A genera a U y B genera a V , C genera a $U + V$. Nos resta probar que C es linealmente independiente.

Corolario 1.3 $\dim\ (U \oplus V) = \dim\ U + \dim\ V$.

Demostración 1.14 Sea $n = \dim\ U$. Como $ker\ f$ es un subespacio de U , $\dim\ (ker\ f) \leq \dim\ U = n$. Sea $r = \dim\ (ker\ f) \leq n$. Veamos que $\dim\ (im\ f) = n - r$. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de $ker\ f$. Podemos extenderla a una base de U de la forma $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$. Consideremos $\{f(w_1), \ldots, f(w_{n-r})\}$ y veamos que es una base de $im\ f$.

Sea $v \in im\ f$. Entonces existe $u \in U$ tal que $f(u) = v$. Como $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ genera a U , $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_{n-r} w_{n-r}$ con α_i, $\beta_i \in K$. Como$f(v_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, r$ pues $v_i \in ker\ f$, tenemos que $f(u) = v = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_{n-r} w_{n-r})$ $= \beta_1 f(w_1) + \ldots + \beta_{n-r} f(w_{n-r})$. Así, $f(w_i)$ genera a la imagen de f .

Ahora veamos la independencia lineal: sea $\beta_1 f(w_1) + \beta_2 f(w_2) + \ldots + \beta_{n-r} f(w_{n-r}) = 0$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^{n-r} \beta_i w_i \in ker\ f$ Como $\{v_i\}$ genera a $ker\ f$, existe $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, r$ tal que

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_{n-r} w_{n-r} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r$$

i.e,

$$\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_{n-r} w_{n-r} - \alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_r v_r = 0$$

Como $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ es una base de U , es linealmente independiente y por lo tanto $\beta_i = \alpha_i = 0$. En particular $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-r$ Luego, los $f(wi)$ son linealmente independientes. Por lo tanto $\dim\ (im\ f) = n - r$.spacios v

1.5. La Matriz Asociada a una Transformación Lineal

Sea K un campo. Denotemos con $Hom_K(U, V)$ el conjunto de transformaciones lineales del espacio vectorial U sobre K en el espacio V sobre K. Sean $f, g : U \to V$ aplicaciones lineales y definamos $f + g : U \to V$ mediante $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$. También, si $f : U \to V$ y $\alpha \in K$ definamos una multiplicación escalar $\alpha f : U \to V$ mediante $(\alpha f)(u) = \alpha(f(u))$. Es inmediato comprobar que $f + g$ y αf son lineales.

Teorema 1.5 *Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K . Entonces $Hom_K(U, V)$ con las operaciones definidas arriba es un espacio vectorial sobre K .*

¿Cuál será la dimensión del espacio $Hom_K(U, V)$ si U y V son de dimensión finita? Para responder esta pregunta, primero veamos un resultado previo que nos dice que una transformación lineal está totalmente determinada si conocemos la imagen de los elementos de la base de U .

Proposición 1.10 *Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K . Sea $\{u_i\}_{i=1}^n$ una base de U y $\{v_i\}_{i=1}^n$ cualesquiera vectores de V . Entonces existe una función lineal única $f : U \to V$ tal que $f(u_i) = v_i, i = 1, \ldots, n$.*

Demostración 1.15 Daremos dos demostraciones.

(1) Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
 & U \arrow[u, "f"] & \\
k_j \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[ur] \arrow[uur] & \bigoplus K_j \arrow[u, "\phi", "\cong"'] \arrow[uu, bend right] & \{1,2,\ldots,n\} \arrow[l, "g"'] \arrow[ul, "g'"'] \arrow[uul, "g''"']
\end{tikzcd}$$

Basta tomar $f = \phi' \circ \phi^{-1}$ donde $\phi' : \oplus_{j=1}^n K_j \to V$ es la función lineal única tal que $\phi' \circ g = g''$ pues ϕ es biyectiva.

(2) Definamos $f : U \to V$ mediante $f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$. En particular $f(u_i) = f(0u_1 + \ldots + 1u_i + 0u_n) = v_i$. Veamos que f es lineal: sean $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ y $u' = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$ entonces $f(u + u') = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = f(u) + f(u')$ y $f(\alpha u) = \sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i v_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha f(u)$. Veamos que f es única: sea $f' : U \to V$ otra aplicación lineal tal que $f'(u_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces $f'(u) = f'(\sum \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i f'(u_i)$
$= \sum \alpha_i v_i = f(u)$. Como u es arbitraria, $f' = f$.

Teorema 1.6 Si dim $U = n$ y dim $V = m$ *entonces* dim $Hom_k(U, V) = nm$.

Demostración 1.16 Sea $\{u_i\}_{i=1}^n$ una base de U y $\{v_j\}_{j=1}^m$ una base de V. Encontremos una base para $Hom_k(U, V)$ y contemos el numeró de elementos de dicha base. Para ello definimos $f_{ij} \in Hom_k(U, V)$ mediante

$$f_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j & si \quad k = i \\ 0 & si \quad k \neq i. \end{cases}$$

Veamos que $\{f_{ij}\}$ es linealmente independiente: supongamos que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij} = 0$; $\alpha_{ij} \in K$. Pero para u_k

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} f_{kj}(u_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} v_j;$$

pero como las v_j son linealmente independientes, para $k = 1, \ldots, n$ tenemos que $\alpha_{k1} = \alpha_{k2} = \ldots = \alpha_{km} = 0$. Luego $\alpha_{ij} = 0$ y por lo tanto $\{f_{ij}\}$ es linealmente independiente. Veamos que $\{f_{ij}\}$ genera a $Hom_k(U, V)$: sea f cualquier elemento de $Hom_k(U, V)$. Sea $w_i = f(u_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Como $w_k \in V$, $w_k = \alpha_{k1}v_1 + \ldots + \alpha_{km}v_m$; $k = 1, \ldots, n\alpha_{ij} \in K$. Luego al evaluar en u_k, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}f_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}f_{kj}(u_k) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}v_j = w_k$ pero $w_k = f(u_k)$. Luego, $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}f_{ij}$ y por lo tanto $\{f_{ij}\}$ genera a $Hom_k(U, V)$. Como hay nm elementos en $\{f_{ij}\}$, dim $Hom_k(U, V) = nm$.

Sea $f : U \to V$ una aplicación de espacios vectoriales U y V con dim $U = m$ y dim $V = n$. Supongamos que $\beta = \{u_i, \ldots, u_m\}$ y $\beta' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ son bases para U y V respectivamente. Como $f(u_i) \in V$, tenemos que

$$\begin{array}{ccccccc} f(u_1) & = & \alpha_{11}v_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}v_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ f(u_m) & = & \alpha_{m1}v_1 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}v_n \end{array}$$

El sistema de ecuaciones anterior lo podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} f(u_1 \\ \vdots \\ f(u_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}v_1 + \ldots + \alpha_{1n}v_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}v_1 + \ldots + \alpha_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

A la matriz

$$[f]_{\beta}^{\beta'} = {}^{t}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

se le llama *matriz asociada a la transformación lineal* f, y decimos que *representa* a f .

Ejemplo 1.6 *sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (2x - y, x + y)$. calculemos $[f]_{\beta}^{\beta'}$ con respecto a la base $\beta = \beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Entonces*

$$f(1, 0) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(1, 0) \ y$$
$$f(0, 1) = (-1, 1) = -1(1, 0) + 1(0, 1).$$

Luego $[f]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.7 *sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por $f(x, y) = (4x+y, 2x-4y)$. Calculemos $[f]_{\gamma}^{\gamma'}$ donde $\gamma = \gamma' = \{(1, 1), (-1, 0)\}$:*

$$f(1, 1) = (5, 2) = (-2)(1, 1) + 1(-7)(-1, 0) \ y$$
$$f(-1, 0) = (-4, -2) = (-2)(1, 1) + (2)(-1, 0). \ \textit{Luego}$$

$$[f]_{\gamma'}^{\gamma} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que si $u = (3,5)$ entonces, en términos de la base $\gamma, u = (3,5) = 5(1,1) + 2(-1,0)$. Luego $f(u) = f(3,5) = (17,-14) = -14(1,1) + 3(-31)(-1,0)$. As que, el vector traspuesto de coordenadas de u es $[u]_\gamma = \binom{5}{2}$ y el vector traspuesto de coordenadas es $[f(u)]\gamma' = \binom{-14}{-31}$. Finalmente

$$[f]_{\gamma'}^{\gamma} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -31 \end{pmatrix} = [f(u)]_{\gamma'}.$$

Tenemos el siguiente resultado que establece lo que observamos en el ejemplo anterior:

Proposición 1.11 *Sean $\beta = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $\beta' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases para los espacios vectoriales U y Vsobre un campo K respectivamente. Sea $f : U \to V$una transformación lineal. Entonces $[f]_\beta^{\beta'}[u]_\beta = [f(u)]_{\beta'}$.*

Demostración 1.17 Demostración. Consideremos $f(u_i) = \alpha_{i1}v_1 + \alpha_{i2}v_2 + \ldots + \alpha_{in}v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}v_j$. Entonces$[f]_\beta^{\beta'}$es la matriz cuyo renglón j es$(alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj})$. Supongamos que $u = \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_m u_m = \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i$. Luego $[u]_\beta =^t (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Aplicando la transformación lineal f a u obtenemos $f(u) = f(\sum_{i=1}^m \gamma_i u_i) = \sum_{i=1}^m \gamma_i f(u_i) = \sum_{i=1}^m \gamma_i (\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}v_j) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m \alpha_{ij}\gamma_j)v_j = \sum_{j=1}^n (\alpha_{1j}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mj}\gamma_m)v_j$.

Luego$[f(u)]\beta'$ es el vector columna cuyo coeficiente en el nivel j es $\alpha_{1j}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mj}\gamma_m$. Calculando

$$[f]_\beta^{\beta'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mj}\gamma_m \\ \vdots \\ \alpha_{1n}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mn}\gamma_m \end{pmatrix} = [f(u)]\beta' \ .$$

La proposición anterior nos dice que, el multiplicar el vector de coordenadas de u con respecto a la base $\beta = u_1, \ldots, u_m$ por la matriz $[f]_\beta^{\beta'}$ 0 nos da el vector de coordenadas del vector $f(u)$ con respecto a la base $\beta' = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Definición 1.15 *Sean $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\gamma = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ bases de U. Considérese*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1_U(u_1) & = & u_1 & = & \alpha_{11}u'_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}u'_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 1_U(u_n) & = & u_n & = & \alpha_{n1}u'_1 & + & \ldots & + & \alpha_{nn}u'_n \end{array}$$

Luego, la matriz cuadrada

$$N_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de transición* de la base β en la base γ. Con frecuencia escribimos simplemente N en lugar de N_β^γ. Si $\beta = \gamma$, N_β^β se denota N_β y se llama *matriz asociada a f con respecto (o relativa)* a β.

La matriz de transición N^{γ}_{β} puede verse como la matriz asociada a la función lineal $1_U : U \to U$ con respecto a las bases β y γ, es decir $N^{\gamma}_{\beta} = [1_U]^{\gamma}_{\beta}$.

Ejemplo 1.8 *Considere* $U = \mathbb{R}^2$ *con bases* $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ *y* $\gamma = \{(1,1),(-1,0)\}$. *Entonces*

$$\begin{array}{c} (1,0) = 0(1,1) + (-1)(-1,0) \quad y \\ (0,1) = 1(1,1) + (1)(-1,0). \end{array}$$

Luego $N^{\gamma}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *por otro lado,*

$$\begin{array}{c} (1,1) = (1)(1,0) + (1)(0,1) \quad y \\ (-1,0) = (-1)(1,0) + 0(0,1). \end{array}$$

Luego $N^{\gamma}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observe que $N^{\beta}_{\gamma} N^{\gamma}_{\beta} = I$.

Lema 1.1 *Sea* $N = N^{\gamma}_{\beta}$ *la matriz de transición de la base* $\beta = \{u_i\}_{i=1}^{n}$ *en la base* $\gamma = \{u'_i\}_{i=1}^{n}$ *del espacio vectorial* U *sobre un campo* K . *Entonces* $N[u]_\gamma = [u]_\beta$, *y* $[u]_\gamma = N^{-1}[u]_\beta$ *para todo* $u \in U$.

Demostración 1.18 Sea $u'_i = \alpha_{i1}u_1 + \alpha_{i2}u_2 + \ldots + \alpha_{in}u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}u_j$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces N es la matriz cuadrada con renglón j igual a $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$.

Si suponemos que $u = \lambda_1 u'_1 + \lambda_2 u'_2 + \ldots + \lambda_n u'_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u'_i$ entonces $[u]_\gamma =^t (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Luego $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u'_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i) u_j = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{1j}\lambda_1 + \alpha_{2j}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{nj}\lambda_n) u_j$. Así, $[u]_\beta$ es el vector columna con coeficiente j igual a $\alpha_{1j}\lambda_1 + \alpha_{2j}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{nj}\lambda_n$.

Por otro lado, el coeficiente j de $N[u]_\gamma$ se obtiene multiplicando el renglónj de N por $[u]_\gamma$, i.e., multiplicando $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$ por ${}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dicha multiplicación es precisamente $\alpha_{1j}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{nj}\lambda_n$. Luego $N[u]_\gamma$ y $[u]_\beta$. tienen los mismos coeficientes. Por lo tanto $N[u]_\gamma = [u]_\beta$. Finalmente, si multiplicamos por N^{-1}, obtenemos $N^{-1}[u]_\beta = N^{-1}N[u]_\gamma = [u]_\gamma$.

Teorema 1.7 *Sea* N *la matriz de transición de la base* $\beta = \beta' = \{u_i\}$ *a la base* $\gamma = \gamma' = \{u'_i\}$ *del espacio vectorial* U . *Sea* $f : U \to U$ *un operador lineal. Entonces* $[f]^{\gamma'}_{\gamma} = N_{-1}[f]^{\beta'}_{\beta} N$ *donde* $N = N^{\beta}_{\gamma}$.

Demostración 1.19 *Sea* $u \in U$, *luego* $N^{-1}[f]^{\beta'}_{\beta} N[u]_\gamma \overset{(1.1)}{=} N^{-1}[f]^{\beta'}_{\beta} N[u]_\beta \overset{(1.11)}{=} N^{-1}[f(u)]_{\beta'} \overset{(1.1)}{=} [f(u)]_{\gamma'}$. *Como* $[f]^{\gamma'}_{\gamma}[u]_\gamma = [f(u)]_{\gamma'}$ *por (1.11) tenemos que* $N^{-1}[f]^{\beta'}_{\beta} N[u]_\gamma = [f]^{\gamma'}_{\gamma}[u]_\gamma$. *Luego* $N^{-1}[f]^{\beta'}_{\beta} N = [f]^{\gamma'}_{\gamma}$.

Ejemplo 1.9 *Considere el operador* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por* $f(x,y) = (4x + y, 2x - 4y)$. *Sean* $\beta = \beta'$ *y* $\gamma = \gamma'$. *Luego*

$$\begin{array}{rl} f(1,0) = (4,2) = 4(1,0) + 2(0,1) & y \\ f(0,1) = (1,-4) = 1(1,0) + (-4)(0,1). & \end{array}$$

Así que

$$[f]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculemos $[f]_{\gamma}^{\gamma'}$ *utilizando el teorema 1.7 con la* $N = N_{\gamma}^{\beta}$ *obtenida en*

$$\begin{aligned} [f]_{\gamma}^{\gamma'} &= N^{-1}[f]_{\beta}^{\beta'}N \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la cual coincide con la matriz $[f]_{\gamma}^{\gamma'}$ de (1.7).

Capítulo 2

Formas y Operadores

2.1. Formas Bilineales

Definición 2.1 Sean U , V y W espacios vectoriales sobre un campo K . Una función $f : U$ x V $\rightarrow W$ se llama bilineal si:

$(i) f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$
$(ii) f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$ y
$(iii) f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v) = f(u, \lambda v); u_1, u_2, u \in U; v_1, v_2, v \in V; \lambda \in K.$

Es decir, $f : U$ x $V \rightarrow W$ es bilineal si es lineal en cada variable cuando la otra se mantiene fija.

Observación. Lo anterior significa que si $v \in V$ se mantiene fija en U x V , la función $u \longmapsto f(u, v)$ es lineal y por lo tanto es un elemento de $Hom_K(U, W)$. De igual forma, si $u \in U$ se mantiene fija en U x V , la función$vf(u, v)$ es lineal y pertenece a $Hom_K(V, W)$. Esto no significa que f sea lineal como función $f : U$ x $V \rightarrow W$. Por ejemplo, $f : \mathbb{R}$ x $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = uv$ es bilineal pero no es lineal. Otro ejemplo, $f : \mathbb{R}$ x $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = u + v$ es lineal pero no es bilineal.

Ejemplo 2.1 Sea A una matriz de m x n. Definamos

$$f : K^m \times K^n \rightarrow K$$

mediante $f(X,Y) = {}^tXAY$. esto es

$$(x_1,\ldots,x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^m x_i a_{in}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} y_j$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

Es inmediato comprobar que $f(X,Y) \in K$ y que es bilineal, ya que las propiedades de las matrices establecen que ${}^tXA(Y+Y') =^t XAY +^t XAY'$ y ${}^tXA(\lambda Y) = \lambda({}^tXAY)$.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{pmatrix}$ entonces

$$f(X,Y) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{pmatrix}$$

$$= 2x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_3y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2 + x3y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_3 + x_3y_3.|$$

Si en 2.1, $W = K$ diremos que f es una *forma bilineal*. Denotamos con $L^2(U,V;K)$ el conjunto de formas bilineales de $U \times V$ en K. Si $U = V$, simplemente denotamos a $L^2(V,V;K)$ con $L^2(V;K)$ o con $Bil(V)$ entendiéndose que se trata de formas bilineales de $V \times V$ en K, que son las que consideraremos en adelante.

A $Bil(V)$ le podemos dar una estructura de espacio vectorial mediante las reglas
$(f+g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$ y $(\lambda f)(u,v) = \lambda f(u,v)$ para $f,g \in Bil(V), \lambda \in K$.

Consideremos el caso en que tengamos el espacio vectorial de homomorfismos $Hom_K(V,K$. Sus elementos $f : V \to K$, que son homomorfismos o aplicaciones lineales, se acostumbra llamarlos *funcionales lineales* o *formas lineales*. También se acostumbra denotar a $Hom_K(V,K$ con $L^1(V;K)$ o simplemente V^* y se le llama espacio dual de V. Su estructura esta dada por

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \text{ y}$$

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v); v \in V, \lambda \in K.$$

Aquí vemos a K como espacio vectorial sobre si mismo.

Ejemplo 2.2 Sea $V = M_n(K)$ el espacio de las matrices cuadradas de $n \times n$.
Sea $f = tr : M_n(K) \to K$ dada por $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, i.e., la traza de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Como $tr(A+B) = trA + trB$ y $tr(\lambda A) = \lambda trA$, tr es un funcional.

Ejemplo 2.3 Sea $V = K^n$. Si $f \in Hom_K(V,K) = V^*$, f tiene una representación matricial de la forma

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \vdots + a_nx_n$$

llamada también *forma lineal*.

Sabemos que si dim $V = n$ entonces dim $V^* = n$ pues $V^* = HomK(V,K)$ y por el teorema 1.6 dim $Hom_K(V,K) = n.1 = n$.

Veamos como determinar una base para V^* a partir de una base de V .

Proposición 2.1 Sea $\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base del espacio vectorial V sobre K. Sean $f_{1,\ldots,f_n} \in Hom_K(V,K) = V^*$ funcionales dadas por $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, i.e., $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$. Entonces $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una base de V^*.

Demostración 2.1 Veamos que $\{f_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente: Supongamos que $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$. Evaluando en v_1 obtenemos $\lambda_1 f_1(v_1) + \ldots + \lambda_n f_n(v_1) = \lambda_1.1 = 0(v_1) = 0$. Luego $\lambda_1 = 0$. Análogamente, evaluando en $v_2, v_3, \ldots, v_n$ obtenemos que $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$. Luego $\{f_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente. Como dim $V^* = n$ y $\{f_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente, es una base de V^* Sin embargo veamos directamente que $\{f_i\}_{i=1}^n$ genera a V^* : sea $f \in V^*$ tal que $f(v_i) = \lambda_i$. Sea $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(v_1), \phi(v_2) = \lambda_2, \ldots, \phi(v_n) = \lambda_n$. Así que $f(v_i) = \phi(v_i)$ para toda $i = 1,\ldots,n$. Puesto que f y ϕ son iguales al evaluarlas en los elementos de la base de $V, f = \phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$. Luego $\{f_i\}_{i=1}^n$ genera a V^*.

La base de V^*, así obtenida, se llama *base dual*.

Ejemplo 2.4 Consideremos la base $\{(1,\ 1),\ (3,\ 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Encontremos su base dual para $(\mathbb{R}^2)^* = Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Deseamos encontrar funcionales $f_1(x,y) = \alpha x + \beta y$ y $f_2(x,y) = \gamma x + \delta y$ tales que $f_1(1,1) = 1, f_1(3,1) = 0, f_2(1,1) = 0, f_{2(3,1)=1}$. Luego

$$\left.\begin{array}{l} f_1(1,1) = 1\alpha + 1\beta = 1 \\ f_1(3,1) = 3\alpha + 1\beta = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$.

También

$$\left.\begin{array}{l} f_2(1,1) = \gamma + \delta = 0 \\ f_2(3,1) = 3\gamma + \delta = 1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\delta = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, una base dual es

$$\left\{ f_1(x,y) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y, f_2(x,y) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right\}.$$

Proposición 2.2 Sea Vun espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K . Sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ una base de V y $\{f_i\}_{i=1}^n$ su base dual. Entonces

(i) si $v \in V, v$ es de la forma

$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n \text{ y}$$

(ii) si $f \in V^*, f$ es de la forma

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n.$$

Demostración 2.2 (i) Sea $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$. Evaluando $f_i(v) = f_i(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Luego $v = f_1(v)v_1 + \ldots + f_n(v)v_n$.

(ii) Sea $v = f_1(v)v_1 + \ldots + f_n(v)v_n$. Luego $f_v = f_1(v)f(v_1) + \ldots + f_n(v)f(v_n) = f(v_1)f_1(v) + \ldots + f(v_n)f_n$.

A continuación encontremos una base para $Bil(V)$.

Proposición 2.3 Sea V un espacio vectorial sobre un campo K de dimensión n. Si $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una base para V^* entonces $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$ dado por $f_{ij}(u,v) = f_i(u)f_j(v)$ es una base lineal para $Bil(V)$.

Demostración 2.3 Sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ una base de V , dual de $\{f_i\}_{i=1}^n$. Veamos que $\{f_{ij}\}$ es linealmente independiente: supongamos que $\sum a_{ij}f_{ij} = 0$. Entonces para índices $r, s = 1, \ldots, n$ tenemos que $(\sum a_{ij}f_{ij})(v_r, v_s) = \sum a_{ij}f_{ij}(v_r, v_s = \sum a_{ij}f_{ij}(v_r)f_j(v_s) = \sum a_{ij}\delta_{ir}\delta_{js} = a_{rs} = 0(v_r, v_s) = 0$. Por tanto $\{f_{ij}\}$ es linealmente independiente.

Veamos que $\{f_{ij}\}$ genera a $Bil(V)$: sea $f \in Bil(V)$ y $a_{ij} = f(v_i, v_j)$. Basta probar que $f(v_r, v_s) = (a_{ij}f_{ij})(v_r, v_s)$ para $r, s = 1, \ldots, n$. Pero como antes, $(a_{ij}f_{ij})(v_r, v_s) = a_{rs} = f(v_r, v_s)$, luego $\{f_{ij}\}$ genera $Bil(V)$.

Observe que dim $Bil(V) = n^2$.

Sea V un espacio vectorial con base $\gamma = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal de V . Si $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ y $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$son vectores de$V$,

$$
\begin{aligned}
f(u,v) &= f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j) \\
&= \alpha_1\beta_1 f(v_1,v_1) + \alpha_1\beta_2 f(v_1,v_2) + \ldots + \alpha_n\beta_n f(v_n,v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(v_i, v_j).
\end{aligned}
$$

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz cuadrada tal que $a_{ij} = f(v_i, v_j)$; luego

$$
\begin{aligned}
f(u,v) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j a_{ij} \\
&= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\
&= {}^t[u]_\gamma A [v]_\gamma.
\end{aligned}
$$

Llamaremos a A *matriz asociada a la forma bilineal* f *con respecto a la base* γ. A menudo denotamos a A como $[f]_\gamma$.

Ejemplo 2.5 Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal dada por $f((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) = 4\alpha_2\beta_2$ y $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\} = \{(1,1), (3,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ Calculemos la matriz asociada a f con respecto a γ, i.e., $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = f(\gamma_i, \gamma_j)$

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= f(\gamma_1, \gamma_1) = f((1,1),(1,1)) = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \\
a_{12} &= f(\gamma_1, \gamma_2) = f((1,1),(3,1)) = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \\
a_{21} &= f(\gamma_2, \gamma_1) = 4 \\
a_{22} &= f(\gamma_2, \gamma_2) = 4
\end{aligned}
$$

Luego $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.6 Sea f como en el ejemplo anterior. Calculemos la matriz B asociada a $f$con respecto a la base $\gamma' = \{\gamma_1', \gamma_2'\} = \{(2,1), (1,-1)\}$:

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= f(\gamma_1', \gamma_1') = f((2,1),(2,1)) = 4 \\
b_{12} &= f(\gamma_1', \gamma_2') = f((2,1),(1,-1)) = -4 \\
b_{21} &= f(\gamma_2', \gamma_1') = f((1,-1),(2,1)) = -4 \\
b_{22} &= f(\gamma_2', \gamma_2') = f((1,-1),(1,-1)) = 4
\end{aligned}
$$

Luego $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

Ahora, calculemos la matriz de transición N de la base γ a la base γ' del ejemplo 2.5:

$$\gamma_1' = (2,1) = \lambda(1,1) + \mu(3,1) \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2} = \mu$$
$$\gamma_2' = (1,-1) = \eta(1,1) + \delta(3,1) \Longrightarrow = -2, \delta = 1.$$

Luego $N = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Observe que ${}^tNAN = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = B$.

Establezcamos la observación del ejemplo 2.6 en el siguiente teorema:

Teorema 2.1 Sea $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal. Si N es la matriz de transición de una base γ a una base γ' de V entonces la matriz B asociada a f con respecto a la base γ' es

$$B =^t NAN$$

donde A es la matriz asociada a f con respecto a γ.

Demostración 2.4 Sean $u, v \in V$arbitrarios. Por