

# Моделирование возникновения волн-убийц

Терешко И.В., Путин А.Л., Филаткин А.А., Носырев А.Н.

17.05.2021

## Аннотация

Рассматривается процесс образования волн аномально большой амплитуды (волн-убийц) на поверхности жидкости. Проводится численное моделирование мелкой воды с помощью уравнения Кортевега-де-Фриза. Для глубокой воды применяется нелинейное уравнение Шрёдингера. Проводится анализ условий и вероятности возникновения волн-убийц.

## 1 Введение

Статья посвящена вопросу моделирования волн-убийц (rogue waves) в океане. В последнее время они привлекают большое внимание океанологов, физиков, математиков. Под волнами-убийцами понимаются спонтанно возникающие аномально большие волны, высота которых превышает значительную высоту ветрового волнения в два раза и более.

В настоящей статье мы будем рассматривать процесс описания этого явления с помощью двух моделей - уравнения Кортевега-де-Фриза и нелинейного уравнения Шрёдингера. С помощью первой модели могут быть описаны нелинейные процессы, возникающие в волнах на мелководье. С помощью второй модели удобно рассматривать возникновение волн-убийц в глубокой воде.

## 2 Методы

### 2.1 Волны на мелкой воде

Для изучения волновых процессов на мелководье можно использовать упрощенную нелинейную теорию, основанную на уравнении Кортевега-де Фриза:

$$u_t + 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

Если применить преобразование Фурье к уравнению, то оно примет следующий вид:

$$\hat{u}_t + 3ik \cdot F[u^2] - ik^3 \cdot \hat{u} = 0$$

где  $F$  - оператор Фурье.

Уравнение решается методом Фурье с разделенным шагом.

Уравнение выглядит следующим образом:

$$\hat{u}_t = -3ikF[u^2] + ik^3\hat{u} \quad (2)$$

Одну его часть ( $\hat{u}_t = ik^3\hat{u}$ ) можно решить точно, в то время как вторую надо решать с некоторым шагом по времени.

Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(k, t + \Delta t) = \hat{u}(k, t) \cdot e^{ik^3\Delta t} \\ \hat{u}(k, t + \Delta t) = \hat{u}_1(k, t + \Delta t) - 3ik\Delta t F[u_1^2] \end{cases}$$

В данной работе используется численный метод Эйлера решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Так как в уравнениях присутствуют и  $\hat{u}$  и  $u$ , то можно использовать преобразование Фурье для того, чтобы избавиться от одного из них.

Итоговые уравнения, которые будут использоваться в нашей работе:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(k, t + \Delta t) = \hat{u}(k, t) \cdot e^{ik^3\Delta t} \\ \hat{u}(k, t + \Delta t) = \hat{u}_1(k, t + \Delta t) - 3ik\Delta t (F[(F^{-1}[\hat{u}_1(k, t + \Delta t)]^2]) \end{cases} \quad (3)$$

## 2.2 Волны-убийцы в хаотическом волновом поле

Уравнение Кортвега-де-Фриза имеет границы применимости. Было установлено [4], что для моделирования волн - убийц в достаточно глубоких водах удобно решать нелинейное уравнение Шрёдингера (nonlinear Shrodinger equation - NLSE), которое достаточно точно отражает непосредственно наблюдаемые процессы возникновения волн аномально высокой амплитуды вследствие нелинейности среды.

Исследуются эффекты градиента океанического течения на нелинейность волнового поля в окрестности точек с нулевой групповой скоростью, поэтому необходимо использовать расширенное уравнение Шрёдингера в форме Смита (R. Smith)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \beta|\psi|^2\psi - \gamma x\left|\frac{dU}{dx}\right|\psi = 0 \quad (4)$$

где  $x$  и  $t$  - пространственная и временная переменные соответственно,  $\psi(x, t)$  - искомая комплекснозначная функция (комплексная амплитуда),  $U(x, t)$  - текущая скоость (в уравнении присутствует градиент скорости в окрестности положений  $U = 0$ ),  $\alpha, \beta, \gamma$  - некоторые коэффициенты.

В данной работе для получения численного решения используется спектральный метод, а именно двухступенчатый метод Фурье (SSFM - split-step Fourier method). Классически коэффициенты принимают значения  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1, \gamma = 1$ .

Сначала решается уравнение первого порядка (для интегрирования применяем преобразование Фурье):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} + |\psi|^2\psi - x\left|\frac{dU}{dx}\right|\psi &= 0 \\ \psi_1(x, t_0 + \Delta t) &= e^{i(|\psi(x, t_0)|^2 - x\left|\frac{dU}{dx}\right|)\Delta t}\psi(x, t_0) \end{aligned}$$

где  $\Delta t$  - шаг по времени.

Аналогично решаем уравнение второго порядка:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$$

$$\psi(x, t_0 + \Delta t) = F^{-1} \left[ e^{-ik^2 \frac{\Delta t}{2}} F[\psi_1(x, t_0 + \Delta t)] \right]$$

где  $k$  - волновое число.

Окончательное численное решение получим как суперпозицию описанных выше решений:

$$\psi(x, t_0 + \Delta t) = F^{-1} \left[ e^{i(|\psi(x, t_0)|^2 - x \frac{dU}{dx}) \Delta t} \psi(x, t_0) + e^{-ik^2 \frac{\Delta t}{2}} F[e^{i(|\psi(x, t_0)|^2 - x \frac{dU}{dx}) \Delta t} \psi(x, t_0)] \right] \quad (5)$$

## 3 Результаты

### 3.1 Результаты работы с KDV моделью

При решении дифференциальных уравнений, описывающих поведение волн на мелкой воде, был получен следующий характерный профиль солитона (рис.1).

Особенность уравнения Кортевег-де Фриза заключается в том, что при определенных начальных условиях можно получить решение в виде солитона. *Солитон* - волна, устойчивая к внешнему воздействию, распространяющаяся в нелинейной среде. Характерное поведение данной волны можно увидеть на рис. 1.

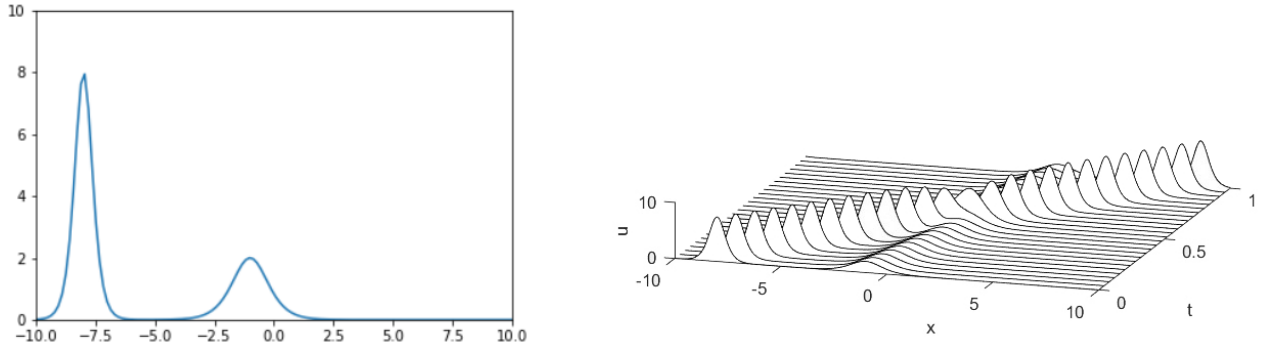


Рис. 1: Характерное поведение солитона

В данной работе были использованы данные о пространственной частоте  $k$  и амплитуде  $h$  волн в Северном Атлантическом океане (характерная высота волн составляет 2 м). Были заданы начальные условия

$$u(x, 0) = \sum_i h_i \cos(k_i x + \phi_i) \quad (6)$$

где  $\phi$  - начальная фаза, которая задается случайно равномерным распределением от 0 до  $2\pi$ ,  $h$  - высота волны (амплитуда).

Так как начальная фаза задается случайным образом, то при каждом новом моделировании будут получаться разные результаты. Было проведено 2000 расчетов и по их результатам построена нормированная гистограмма распределения максимальной высоты волны по количеству возникновений (рис. 2). Здесь высота измеряется в метрах.

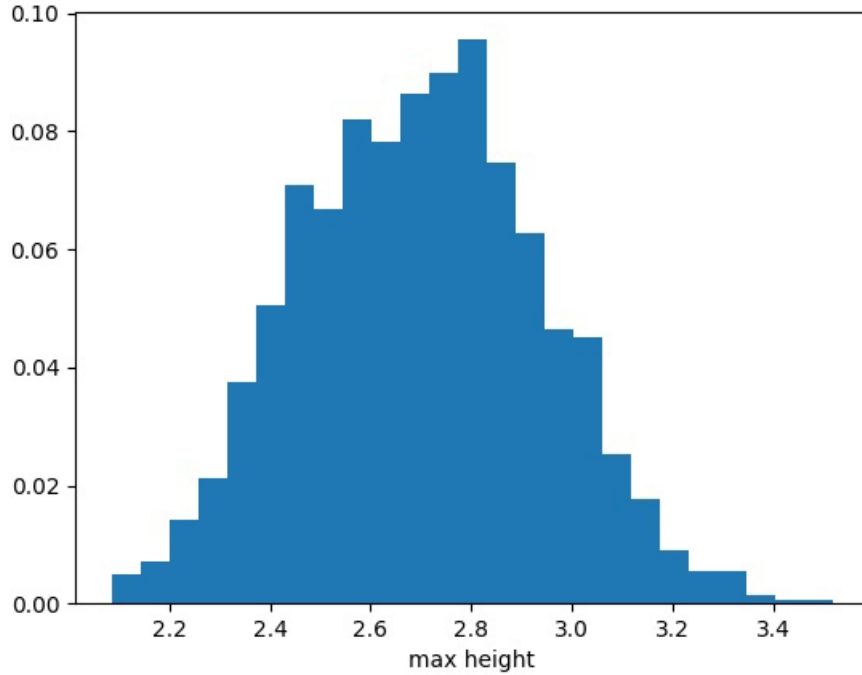


Рис. 2: Распределение вероятностей максимальной высоты волны

Исходя из построенной гистограммы, не возникают волны, превосходящие по высоте исходные в 2 и более раза. Таким образом, волны-убийцы не возникают при моделировании волн в океане на мелкой воде.

### 3.2 Результаты работы с NLSE моделью

Используется быстрое преобразование Фурье(FFT), число спектральных компонент - 2048.

Зададим параметры хаотического волнового поля:

Используются данные о пространственной частоте  $k$  и амплитуде  $h$  волн в Северном Атлантическом океане.

$$|\psi_0| = h$$

Для простейшей имитации хаоса зададим градиент скорости следующим образом:

$$\frac{dU}{dt}(x, t) = \mu(\xi_1 + i\xi_2)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  - независимые одинаково равномерно распределённые случайные величины, в качестве параметра  $\mu$  возьмём 0.2.

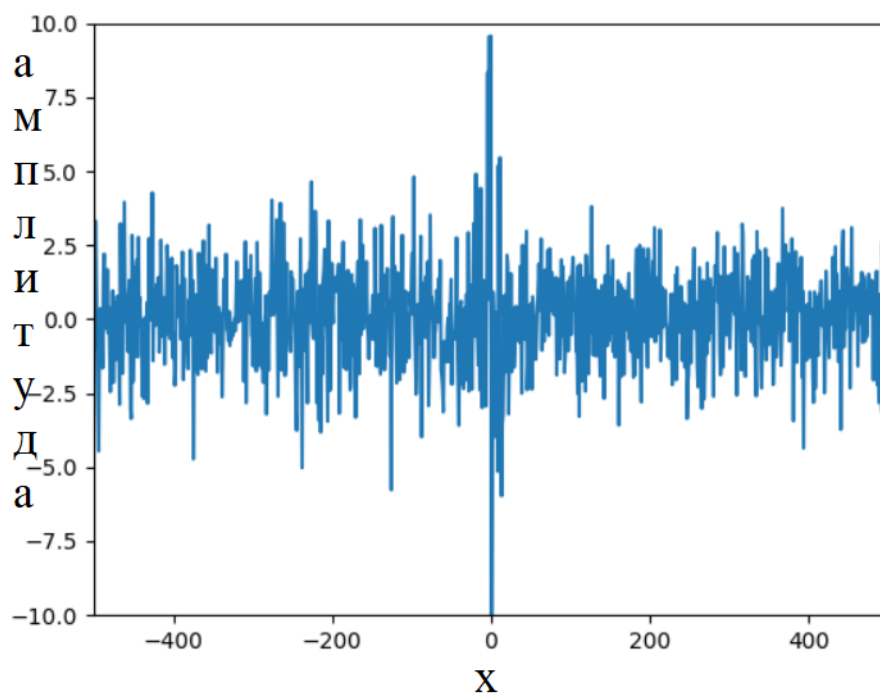


Рис. 3: Возникновение волны-убийцы

Из-за случайного градиента скорости при повторных моделированиях результаты различаются. Было проведено  $\sim 500$  расчётов, результатом которых является нормированная гистограмма распределения максимальной высоты волны в метрах по количеству возникновений. Средняя высота возникающей волны-убийцы: 20 м.

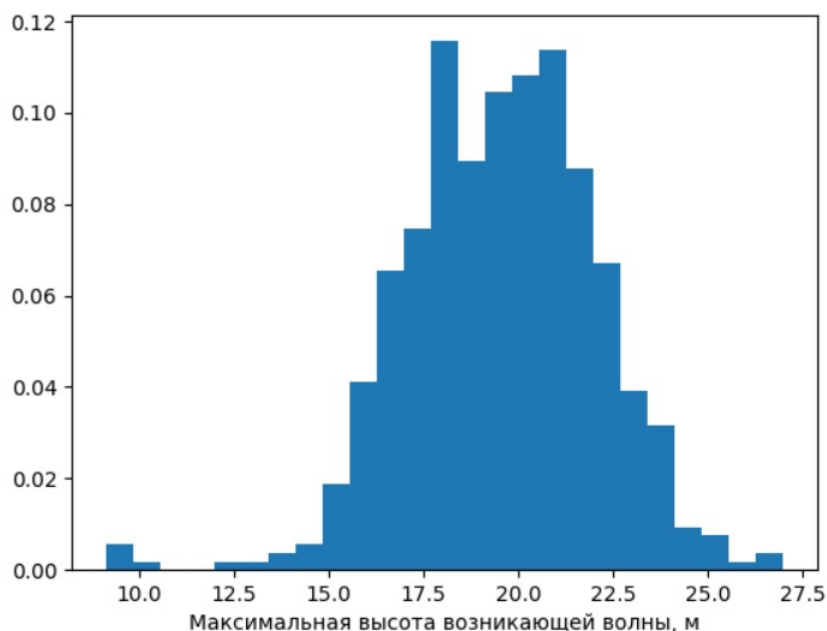


Рис. 4: Распределение вероятностей максимальной высоты волны

Итак, высокие волны, называемые волнами-убийцами, действительно возникают.

## 4 Заключение

Были смоделированы волны на основе двух уравнений: уравнения Кортевега-де-Фриза и нелинейного уравнения Шрёдингера для мелкой и глубокой воды соответственно.

Было рассмотрено солитонное решение уравнения Кортевега-де-Фриза, соответствующее волнам-убийцам. Используя данные о спектре волн в Атлантическом океане, была смоделирована динамика поверхности воды. Расчеты показали, что при нормальных условиях волны аномально большой амплитуды не возникают. Однако существует солитонное решение, которое может иметь место, учитывая хаотичность возникающих в океане волн.

При рассмотрении нелинейного уравнения Шрёдингера, которое лучше подходит для моделирования волн в океане, выяснилось, что волны-убийцы в океане возникают, хотя и с невысокой вероятностью.

Данные модели позволяют прогнозировать высоту возникающих волн, что может быть использовано в целях повышения безопасности морских путешествий и сооружений, находящихся в море или океане.

Ссылка на git-репозиторий с используемым кодом:

<https://github.com/IvanLudvig/roguewaves>

## Список литературы

- [1] Smith, R (1976). Giant waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 77, 417
- [2] Marine Institute, "North Atlantic Ocean Monthly Model Means". URL: <https://data.gov.ie/dataset/north-atlantic-ocean-monthly-model-means>. Accessed 17 May 2021.
- [3] Bayindir, C., 2016, "Shapes and Statistics of the Rogue Waves Generated by Chaotic Ocean Current", ISOPE-2016, Rhodes, Greece
- [4] Pelinovsky, E., Kharif, C. (Eds.). (2008). *Extreme Ocean Waves*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8314-3>
- [5] Debnath, L. (2012). Water Waves and the Korteweg–de Vries Equation. In *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems* (pp. 1771–1809). Springer New York.
- [6] Kharif, C., Pelinovsky, E., Talipova, T., Slunyaev, A. (2001). Focusing of nonlinear wave groups in deep water. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 73(4), 170–175. <https://doi.org/10.1134/1.1368708>
- [7] N. Karjanto. (2020). Peregrine soliton as a limiting behavior of the Kuznetsov-Ma and Akhmediev breathers.
- [8] Dudley, J. M., Dias, F., Erkintalo, M., Genty, G. (2014). Instabilities, breathers and rogue waves in optics. *Nature Photonics*, 8(10), 755–764. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2014.220>