Домашняя работа по оптимизации. Романов Алексей

Задача 5

Доказать, что конус

$$K^{\star} = \{y \in R^n \mid y = A^T v, v >= 0\}$$

является сопряженным для конуса

$$K = \{x \in R^n \mid Ax >= 0\}$$

Так как дано решение подставлю его в определение и проверю выполнимость.

$$K^{\star} = \{y \mid x^T y >= 0, \forall x \in K\} = x^T A^T v = (Ax)^T v$$

$Ax >= 0$ по определению сопряженного конуса, $v >= 0$ дано по условию. Тогда произведение двух положительных чисел даст положительное число. Это и нужно было показать.

Если же $A^T v, v < 0$ в компоненте i. То беря $x_i = 1, x_j = 0, j \neq i$, получим противоречие.

Задача 1

Пусть дано некоторое множество $C \subset R^n$.

Рассмотрим множество

$$C^0 = \{y \in R^n \mid x^T y <= 1, \forall x \in C\}$$

- Докажите выпуклость C^0

Так как $x^T y <= 1$ задает полупространство, то оно выпукло.

По определению выпуклости

$$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \theta \in [0, 1] : \theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \in C$$

Это значит, что любой отрезок, проведенный через две точки, лежащие в C, также лежит в C. Пусть это не так. $\exists y = \theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \notin C, x_1 \in C, x_2 \in C$. Но это невозможно, так как плоскость отсекается полупространство, и если две точки уже принадлежат ему, то и любой отрезок, соединяющий данные точки, принадлежит ему.

- Покажите, что если C - конус, то и C^0 тоже конус. Как он задается?

Надо показать, что $\forall y \in C^0, \alpha > 0 : \alpha y \in C^0$. Пусть $\exists y \in C^0, \alpha >= 0 : \alpha y \notin C^0$

Тогда $x^T y <= 1, \forall x \in C (C - \text{конус})$. Посмотрю на $\alpha x^T y <= 1, \alpha >= 0$. Если $\forall x \in C$ данная запись верна, то доказали. Тогда

$$\exists \hat{x} : \alpha \hat{x}^T y > 1, \hat{x}^T y <= 1$$

.

Воспользуюсь тем, что C - конус. Тогда $\alpha x \in C, \alpha \hat{x}^T y <= 1$. Получаем противоречие с предыдущей записью.

$$C^0 = \{y \in R^n \mid \alpha x^T y <= 1, \forall x \in C, \alpha >= 0\}$$

- Найдите C^0, если $C = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 <= 1\}$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x, x^T x} >= 0 => x^T x <= 1$$

Замечу, что если $y = x$ тогда C^0 будет выполнено. Также выполняется условие для $y = -x, y = 0$.

Замечу, что $x^T y$ похоже на запись $x^T x$. Смотря на эту запись можно понять, что $-|x_i| <= y_i <= |x_i|$

Тогда можно оценить $-1 <= -x^T x <= x^T y <= x^T x <= 1$

Осталось показать достаточность. Пусть в некоторой координате условие нарушено и без ограничния общности можно считать $y_i = |x_i| + \epsilon, \epsilon > 0$. Тогда пусть $x_i = 1, x_j = 0, j \neq i$. Тогда $x^T x = 1, x^T y = 1 + \epsilon > 1$. Противоречие.

- Найдите C^0, если $C = \{x \in R^n \mid x >= 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

Замечу, что $\sum_{i=1}^n x_i = x^T 1$. Поэтому, если $y = 1$ условие на C^0 будет обращаться в равенство. Так как $x >= 0$, то y снизу ограничивать не нужно, все большие отрицательные значения будут давать выполнение условия. Поэтому $y_i <= 1$.

Достаточность. Пусть в некоторой координате условие нарушено и без ограничения общности можно считать $y_i = 1 + \epsilon, \epsilon > 0$. Тогда пусть $x_i = 1, x_j = 0, j \neq i$. Тогда $x^T 1 = 1, x^T y = 1 + \epsilon > 1$. Противоречие.

Задача 3

Пусть A матрица $m \times n$. Доказать что имеет решение одна и только одна из следующих систем:

$$Ax <= 0, x > 0$$

или

$$A^T p >= 0, p >= 0, A^T p \neq 0$$

Сначала покажем, что две системы одновременно не могут иметь решение.

Пусть $\exists \hat{x} : A\hat{x} <= 0, \hat{x} > 0$. Пусть $\exists \hat{p} : A^T \hat{p} >= 0, \hat{p} >= 0, A^T \hat{p} \neq 0$

Так как A имеет размерность $m \times n$, x имеет размерность $n \times 1$, Ax имеет размерность $m \times 1$. A^T имеет размерность $n \times m$, p имеет размерность $m \times 1$,p^T имеет размерность $1 \times m$. Можно перемножить $p^T(Ax)$. Тогда данное произведение будет иметь размерность 1×1.

Поэтому рассмотрю $\hat{p}^T(A\hat{x})$: $\hat{p}^T >= 0, A\hat{x} <= 0$. Тогда $\hat{p}^T(A\hat{x}) <= 0(\bigstar)$.

Но с другой стороны так как $\hat{p}^T A$ определено ($1 \times m$ и $m \times n$ соответственно.), то это произведение можно расписать через скалярное произведение как $\hat{p}^T(A\hat{x}) = (\hat{p}^T A)\hat{x} = (A^T \hat{p})^T \hat{x}$. По условию $\hat{x} > 0, A^T \hat{p} \neq 0, A^T \hat{p} >= 0$. Тогда произведение строго больше нуля. Что дает противоречие с $(\bigstar)$.

Теперь покажем, что хотя бы одна имеет решение. Воспользуюсь теоремой строгой отделимости.

Пусть $\nexists x : b = Ax <= 0, x > 0$. Тогда $b \notin \{z = Ax, z <= 0\}$. Множества b и z строго отделимы.(Знак неравенства строгий).

$$\sup_{z \in Z} a^T z < \inf_{b \in B} a^T b = \inf_{x > 0} a^T Ax$$

$0 <= \sup_{z \in Z} a^T z$ Из-за того, что $z = Ax, z <= 0$. Можно взять $z = 0$. Супремум будет не меньше данного числа по всем z. Тогда $\inf_{x > 0} a^T Ax > 0$, откуда $\inf_{x > 0}(A^T a)^T x > 0$. Отсюда следует, что данное произведение больше нуля тогда и только тогда, когда $A^T a >= 0, A^T a \neq 0$, учитывая что $x > 0$.(Какая-то компонента по $A^T a$ даст ненулевой вклад в данное произведение).

Теперь

$$0 < \inf_{b \in B} a^T b = \inf_{x > 0} a^T Ax$$

Из задания множества $b : Ax > 0$. Тогда это выполнено для $a : a >= 0$.

Искомый вектор a и будет нашим вектором p. Замечу что по условию $p >= 0, A^T p \neq 0$ вектор $p = 0$ невозможен.

Задача 4

Постройте конус, сопряженный к экспоненциальному конусу.

$$K_{exp} = \{(x, y, z) \mid y > 0, ye^{x/y} <= z\}$$

$K^{\star}_{exp} = \{(a, b, c) \mid ax + by + cz >= 0, \forall (x, y, z) \in K_{exp}\}$

$f = ax + by + cz >= 0$, тут $y > 0, z = ye^{x/y} > 0, x \in R$. Так как x принимает значения из R, то если $a > 0$, то взяв большое отрицательное x,при маленьком z получим противоречие.

Рассмотрим случай $a = 0$. $by + cz >= 0$. Это выполнено тогда и только тогда, когда $b >= 0, c >= 0$. Иначе пусть $\hat{b} < 0$. $\hat{b}y + cye^{x/y} = y(\hat{b} + ce^{x/y})$. В $ce^{x/y} : x$ можно подобрать большим отрицательным, чтобы данное произведение обнулилось. Тогда останется $y\hat{b} < 0$. Противоречие. Аналогично показывается с $\hat{c} < 0$. Поэтому пара $(a = 0, b >= 0, c >= 0)$ входит в решение.

Теперь $a < 0$. Тогда исследуем функцию уже двух переменных $f = ax + by + cye^{x/y}$.Хотим оценить функцию в меньшую сторону. Беря производную по x получаем $a + ce^{x/y} = 0$, $x = y\log(-a/c)$. Определим какая это точка. Функция f на интервале $(-\infty; y\log(-a/c))$ принимает положительное значение, ибо $ax > 0$. Значит это точка минимума.

Подставим. $f = ay\log(-a/c) + by - ay = y(a\log(-a/c) + b - a) >= 0. y > 0$. Значит чтобы было выполнено условие сопряжения надо потребовать выполнение $a\log(-a/c) + b - a >= 0$.

Итого $(a = 0, b >= 0, c >= 0)$, $a < 0, a\log(-a/c) + b - a >= 0$.

P. S. Важно, что если $a > 0$, то достаточно сказать, что $x \to -\infty$(становится линейной по x). Если же $a < 0$, чтобы получить минимум нужно потребовать $x \to \infty$, тогда $ye^{x/y}$ будет большим и функция меняет свое поведение на нелинейное => надо исследовать на производные.

Задача 2

Пусть матрица A такая, что $A^T = -A$. Доказать, что система $Ax >= 0, x >= 0, Ax + x > 0$ всегда имеет решение.

Не до конца добил, но думаю если это совместить будет близко к решению.

Лемма Фаркаша.

Система $Ax = b, x >= 0$ несовместна, если $\exists y : A^T y >= 0, b^T y < 0$.

Доказательство.

Заметим, что $K = \{Ax | x >= 0\}$ - конус, как линейные комбинации столбцов.

Система выше совместна, если и только если $b \in K$ (Пытаемся получить b как неотрицательную комбинацию столбцов с неотрицательными коэффициентами).

Расмотрим $b \notin K <=> \exists y : b^T y < 0$(Не подходит в определение конуса), $z^T y >= 0, \forall z \in K$(По определению конуса). Тогда возьмем в качестве $z = Ae_i$. (Очередной базисный вектор). Если взять все такие векторы, то получим условие $A^T y >= 0$.

Из номера 5 знаем, что $K^{\star} = \{y \in R^n \mid y = A^T v, v >= 0\}$ сопряженный для искомого конуса.

Также из условия $A^T = -A$, следует $K^{\star} = \{y \in R^n \mid y = -Av, v >= 0\}$

Далее предположение решения.

Также знаем, что $Ax + x$ тоже конус, ибо $x >= 0$(для a_{ii} увеличился коэффициент на 1.

Далешь нужно поступить от противного и сказать, что существует гиперплоскость между этими двумя конусами, которая их отделяет.(Тогда они будут иметь только 0 в пересечении.)

$$\sup_{z \in Ax} \mathrm{c}^T z < \inf_{p \in Ax + x} c^T p$$

$\sup \mathrm{c}^T Ax < \inf c^T(Ax + x)$, отсюда $0 < \inf c^T x$, но это при $x = 0$, это условие зануляется. Получается $0 < 0$. Противоречие.

In [ ]: