Tidligere eksamensopgaver i Matematik for Robotteknologi

November 18, 2021

Generelt

Denne opgavesamling indeholder tidligere eksamensopgaver fra eksaminerne fra Matematik for Robotteknologi (diplomingeniør og civilingeniør). Disse opgaver dækker ca. 2 timers opgaver og svarer til to tredjedele af den skriftlige eksamen for matematik/matematiske metoder (civilingeniør, totalt 3 timers eksamen) og halvdelen for matematik/automation (diplomingeniør, totalt 4 timers eksamen).

I matematikopgaverne må CAS værktøjer ikke benyttes som løsningsmetode, og i samtlige spørgsmål forudsættes det, at den benyttede fremgangsmåde tydeligt fremgår af besvarelsen. CAS værktøjer må dog benyttes til kontrol af ens resultat. Brug af internet er også forbudt under eksamen. Alle andre hjælpemidler er tilladt.

Maj 2021 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Betragt funktionen

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

a)

Bestem lineariseringen $L(x)$ omkring punktet $x = 4$

b)

Anvend lineariseringen $L(x)$ fra a) for at estimere værdien af $f(3) = \sqrt{8}$

c)

Estimer worst case fejlen for estimatet i b)

Opgave 2 (25 point)

Betragt nu funktionen

$$f(x, y) = e^{2x+\pi y} \sin\left(\frac{1}{2}xy\right)$$

a)

Bestem gradienten af $f(x, y)$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

b)

Bestem normalvektoren $\boldsymbol{n}$ til overfladen $z = f(x, y)$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

c)

Bestem tangentplanens ligning i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Opgave 3 (25 point)

a)

Betragt det komplekse tal

$$z = (2+i) \cdot (5+i) \cdot (8+i)$$

hvor i er det komplekse tal. Beregn $|z|$ og $\arg(z)$

b)

Betragt den komplekse ligning

$$w^4 = -256i$$

og bestem $\left|w^4\right|$ og $\arg\left(w^4\right)$

c)

Løs den komplekse ligning fra b)

d)

Betragt de fire komplekse tal:

$$w_1 = 2 \cdot e^{i3\pi/8} \qquad w_2 = 2 \cdot e^{-i5\pi/8} \qquad w_3 = 4 + 2i \qquad w_4 = 4 - 2i$$

Afbild w_1, w_2, w_3 og w_4 i et Argand diagram. Husk at vise alle mellemregninger og illustrere, hvordan du er kommet frem til punkternes placering. Grafiske funktioner, som udfører mellemregninger godkendes ikke, da fremgangsmetode/mellemregninger ikke illustreres i disse (f.eks. funktionen ComplexPlot må IKKE benyttes)

Opgave 4 (25 point)

Betragt en matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

Matrix A har to egenværdier. Den ene egenværdi er $\lambda_1 = 2$. Beregn den anden egenværdi.

b)

Beregn egenvektoren for $\lambda_1 = 2$.

Februar 2021 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Betragt funktionen

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

a)

Bestem lineariseringen $L(x)$ omkring punktet $x = 2$

b)

Anvend lineariseringen $L(x)$ fra a) for at estimere værdien af $f(3) = \sqrt{5}$

c)

Estimer worst case fejlen for estimatet i b)

Opgave 2 (25 point)

Betragt nu funktionen

$$f(x, y) = e^{x+2y} \sin(xy)$$

a)

Bestem gradienten af $f(x, y)$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

b)

Bestem normalvektoren $\boldsymbol{n}$ til overfladen $z = f(x, y)$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

c)

Bestem tangentplanens ligning i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

Opgave 3 (25 point)

a)

Betragt det komplekse tal

$$z = \frac{11 + 10i}{4 - i}$$

hvor i er det komplekse tal. Beregn $|z|$ og $\arg(z)$

b)

Betragt den komplekse ligning

$$w^3 = 64i$$

og bestem $\left|w^3\right|$ og $\arg\left(w^3\right)$

c)

Løs den komplekse ligning fra b)

d)

Betragt de fire komplekse tal:

$$w_1 = 3 \cdot e^{i3\pi/4} \qquad w_2 = 3 \cdot e^{-i\pi/4} \qquad w_3 = 3 + i \qquad w_4 = 3 - i$$

Afbild w_1, w_2, w_3 og w_4 i et Argand diagram. Husk at vise alle mellemregninger og illustrere, hvordan du er kommet frem til punkternes placering. Grafiske funktioner, som udfører mellemregninger godkendes ikke, da fremgangsmetode/mellemregninger ikke illustreres i disse (f.eks. funktionen ComplexPlot må IKKE benyttes)

Opgave 4 (25 point)

Betragt en matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

Matrix A har tre egenværdier. Den ene egenværdi er $\lambda_1 = 6$. Beregn de to sidste egenværdier.

b)

Beregn egenvektoren for $\lambda_1 = 6$.

Januar 2021 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Betragt funktionen

$$f(x) = \sin(x)$$

a)

Bestem lineariseringen $L(x)$ omkring punktet $x = \pi/4$

b)

Anvend lineariseringen $L(x)$ fra a) for at estimere værdien af $\sin(46°)$

c)

Estimer worst case fejlen for estimatet i b)

Opgave 2 (25 point)

Betragt nu funktionen

$$f(x, y) = e^{x+y} \cos(xy)$$

a)

Bestem gradienten af $f(x, y)$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

b)

Bestem normalvektoren $\boldsymbol{n}$ til overfladen $z = f(x, y)$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

c)

Bestem tangentplanets ligning i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Opgave 3 (25 point)

a)

Betragt det komplekse tal

$$z = 2e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)}(1+i)$$

hvor i er det komplekse tal. Beregn $|z|$ og $\arg(z)$

b)

Betragt den komplekse ligning

$$w^3 = 8i$$

og bestem $\left|w^3\right|$ og $\arg\left(w^3\right)$

c)

Løs den komplekse ligning fra b)

d)

En anden kompleks ligning har løsningerne

$$z_1 = 2 \cdot e^{i2\pi/6} \qquad z_2 = 2 \cdot e^{i5\pi/6} \qquad z_3 = 2 \cdot e^{-i\pi/6} \qquad z_4 = 2 \cdot e^{-i4\pi/6}$$

Afbild z_1, z_2, z_3 og z_4 i et Argand diagram. Husk at illustrere, hvordan du er kommet frem til punkternes placering.

Opgave 4 (25 point)

Betragt matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn $\det(A)$ og $\det(B)$

b)

Beregn $\det(A \cdot B)$

c)

Opskriv ligningssystemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ved hjælp af den udvidede matrix og bestem løsningen $\boldsymbol{x}$.

Maj 2020 (2.5 timer)

Opgave 1 (20 point)

Følgende fire ligninger er givet:

$$5 = 10x_1 \qquad 10x_1 = 10x_2 + 20x_3 \qquad 20x_3 = 10x_4 \qquad x_2 = x_3 + x_4$$

a)

Opskriv ligningerne på den udvidede matrixform.

b)

Løs ligningssystemet vha. Gauss Elimination

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

c)

Bestem de værdier af a, der opfylder følgende betingelse:

$$\det \begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ 3 & 2-a \end{pmatrix} = 0$$

Opgave 2 (20 point)

a)

Find alle løsninger til den komplekse ligning:

$$0 = z^2 + 4z + 5$$

Angiv desuden modulus af løsningerne.

b)

Plot følgende komplekse tal i et Argand diagram

$$z_1 = 2 + i \qquad z_2 = 3 \cdot e^{i\pi/4} \qquad z_3 = 2 \cdot e^{-i\pi/3} \qquad z_4 = -3 - 4i$$

Husk at vise, hvordan du er kommet frem til punkternes placering.

Opgave 3 (20 point)

a)

Givet funktionerne $f(x) = 2x - 8$ og $g(x) = e^x - e^4$. Bestem følgende værdier

$$\lim_{x \to 4} f(x) = ? \qquad \lim_{x \to 4} f'(x) = ?$$
$$\lim_{x \to 4} g(x) = ? \qquad \lim_{x \to 4} g'(x) = ?$$

b)

Bestem grænseværdien, eller argumenter for at den ikke eksisterer.

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

Opgave 4 (20 point)

a)

Opdel følgende udtryk

$$\frac{x+1}{(x-1) \cdot (x+5)}$$

i partial brøker.

b)

Bestem integralet:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+7)^2} \right) dx$$

Resultatet skal forkortes på formen $ln(a) + b$, hvor $a \in \mathbb{Z}$ (mængden af de hele tal) og $b \in \mathbb{Q}$ (mængden af de rationale tal).

Opgave 5 (20 point)

a)

Find den generelle løsning til differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y^3$$

Februar 2020 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn determinanten af matrix A.

b)

Anvend gauss elimination for at løse ligningssystemet $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Opgave 2 (25 point)

a)

Betragt det komplekse tal

$$z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot (1 + 2i)$$

og beregn $\mathrm{Re}(z)$ samt $\mathrm{Im}(z)$.

b)

Betragt den komplekse ligning

$$w^3 = -8i$$

Bestem modulus og argumentet af w^3.

c)

Løs den komplekse ligning fra b)

d)

En kompleks ligning har løsningerne

$$w_1 = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad w_2 = 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{6}} \qquad w_3 = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{6}} \qquad w_4 = 4 \cdot e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

Afbild alle løsningerne i et Arganddiagram. Husk at vise, hvordan du er kommet frem til punkternes placering.

Opgave 3 (25 point)

a)

Bestem alle løsninger til differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin(2x) + y$$

b)

Der er fundet følgende løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$.

$$y(x) = x - A \cdot 4^x$$

Bestem den specifikke løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{3}{2}\right) = 5$.

Opgave 4 (25 point)

a)

Differentier følgende to udtryk:

$$f(x) = (\cos(x) + 1)^2$$
$$g(x) = e^{\sin(x)} - 1$$

b)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{x \to \pi} \frac{(\cos(x) + 1)^2}{e^{\sin(x)} - 1}$$

eksisterer. Bestem grænseværdien, hvis den eksisterer, eller redegør for, at grænseværdien ikke eksisterer.

Januar 2020 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn determinanten af matricen A.

b)

Anvend gauss elimination for at løse ligningssystemet $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Opgave 2 (25 point)

a)

Betragt det komplekse tal

$$z = \frac{3+2i}{1-i}$$

og beregn $\text{Re}(z)$ samt $\text{Im}(z)$.

b)

Find alle løsninger til den komplekse ligning $w^3 = -8$.

c)

Plot løsningerne fra opgave b) i et Argand-diagram.
Har du ikke løst opgave b) kan du i stedet plotte de følgende fire punkter:

$$z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{8}} \qquad z_2 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{8}} \qquad z_3 = 3 \cdot e^{-i \cdot \frac{7\pi}{8}} \qquad z_4 = 3 \cdot e^{-i \cdot \frac{3\pi}{8}}$$

Opgave 3 (25 point)

a)

Find alle løsninger til differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$$

b)

Der er fundet følgende løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$.

$$y(x) = A \cdot x \cdot e^{\left(x - \frac{1}{2}\right)} + 2$$

Bestem den speficikke løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

Opgave 4 (25 point)

Betragt funktionen

$$f(x) = \sin(x) - x^2$$

a)

Bestem lineariseringen af $f(x)$ omkring punktet $x = \pi/2$. Beregn derefter et estimat af $f(1.5)$ vha. lineariseringen.

b)

Lav en fejlvurdering i punktet $x = 1.5$, bestem fortegnet af fejlen og det mindst mulige interval, hvori den sande værdi ligger.

Maj 2019 (2.5 timer)

Opgave 1 (20 point)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn determinanten af

$$A - \lambda I$$

hvor I er en identitetsmatrix og λ er en konstant.

b)

Beregn egenværdierne til A

c)

Lad nu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Beregn egenvektorerne til B når det oplyses, at egenværdierne er hhv. 7 og 5.

Opgave 2 (20 point)

Betragt matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn $A \cdot B$

b)

Beregn

$$\det(B)$$

Opgave 3 (20 point)

a)

Løs integralet

$$I = \int 2x \left(\tan^2\left(x^2\right) + 1\right) dx$$

b)

Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \left(3x^2 + 2x\right) y(x)$$

Opgave 4 (20 point)

Betragt den komplekse ligning

$$z^2 = 2 \cdot (-2 - 2i)$$

a)

Beregn modulus og argument af z^2

b)

Beregn alle løsninger til z

c)

En ny kompleks ligning har løsningerne

$$\begin{aligned} w_1 =& 3e^{i\frac{3\pi}{8}} \\ w_2 =& 3e^{i\frac{25\pi}{24}} \\ w_3 =& 3e^{i\frac{-7\pi}{24}} \end{aligned}$$

Afbild alle løsningerne w_1, w_2 og w_3 i et Argand-diagram.

Opgave 5 (20 point)

Betragt funktionerne

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\left(x^3 + x^2\right) - 1 \\ g(x) &= xe^{x^2+1} \end{aligned}$$

a)

Beregn $f'(x)$ og $g'(x)$

b)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(x^3 + x^2\right) - 1}{xe^{x^2+1}}$$

eksisterer. Bestem grænseværdien, hvis den eksisterer, eller argumenter for, at grænseværdien ikke eksisterer.

Februar 2019 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn determinanten af

$$A - \lambda I$$

hvor I er en identitetsmatrix og λ er en konstant.

b)

Beregn egenværdierne til A

c)

Beregn egenvektoren til hver af egenværdierne i b).

Opgave 2 (25 point)

a)

Løs integralet

$$I = \int 2x^2 \cos(4x) dx$$

b)

Lad $f(x)$ være en funktion og betragt integralet med løsningen

$$I = \int f(x) dx = \ln(3x + 1) - 2\ln(3x)$$

Bestem nu

$$\int_2^3 f(x)dx$$

og skriv resultatet på formen $a \cdot \ln(b)$, hvor $a, b \in \mathbb{Q}$ (de rationale tal)

Opgave 3 (25 point)

a)

Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \ln\left(x^y\right)$$

b)

En differentialligning $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ har løsningen

$$y(x) = e^{\left(x^2 \ln(x) + x + C\right)}$$

hvor $C \in \mathbb{R}$. Beregn løsningen når $y(1) = e$.

Opgave 4 (25 point)

Betragt funktionerne

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{\left(x^2+x\right)}\right) - 2x - 1$$
$$g(x) = xe^{\left(x^3+x^2\right)}$$

a)

Beregn $f'(x)$ og $g'(x)$

b)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} e^{\left(x^2+x\right)}\right) - 2x - 1}{xe^{\left(x^3+x^2\right)}}$$

eksisterer. Bestem grænseværdien, hvis den eksisterer, eller argumenter for, at grænseværdien ikke eksisterer.

Januar 2019 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn determinanten af

$$A - \lambda I$$

hvor I er en identitetsmatrix og λ er en konstant.

b)

Beregn egenværdierne til A

c)

Beregn egenvektoren til hver af egenværdierne i b).

Opgave 2 (25 point)

Betragt integralet

$$I = \int \frac{4x+1}{4x^2+2x} dx$$

a)

Beregn integralet I

b)

Beregn

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{4x^2+2x}dx$$

hvor resultatet skrives på formen $a \cdot \ln(b)$, hvor $a, b \in \mathbb{Q}$ (de rationale tal)

Hvis du ikke har løst opgave a, kan du sætte $I = 2\ln(4x) + 2\ln(3x+1)$ og bruge dette delresultat i spørgsmål b. (Dette delresultatet er dog ikke den korrekte løsning til spørgsmål a).

Opgave 3 (25 point)

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

a)

Løs differentialligningen

b)

Beregn løsningen når $y(0) = 0$. Hvis det ikke er muligt at løse a), så kan løsningen $y(x) = \ln(2e^x + C)$ anvendes (dette er dog ikke den rigtige løsning).

Opgave 4 (25 point)

Betragt funktionerne

$$f(x) = e^{\sin\left(x^2\right)} - \cos(x) \tag{1}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \tag{2}$$

a)

Differentier funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ med hensyn til variablen x

b)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin\left(x^2\right)} - \cos(x)}{\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)}$$

eksisterer. Bestem grænseværdien, hvis den eksisterer, eller argumenter for, at grænseværdien ikke eksisterer.

Maj 2018 (2.5 timer)

Opgave 1 (20 point)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn $\det(A)$ og $\det(B)$

b)

Beregn $\det(AB)$

Opgave 2 (20 point)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 9 \\ x + y + z &= 4 \\ x + 2y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

a)

Opskriv ligningssystemet vha. den udvidede matrix

b)

Løs ligningssystemet fra a) vha. gauss/gauss-jordan elimination

c)

Lad nu

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Er $\det(D) = 0$? Beregn eller forklar.

Opgave 3 (20 point)

Lad y være en funktion af x. Betragt differentialligningen

$$x = e^{(-x^2)} y'$$

og løs denne (den fuldstændige fremgangsmåde skal vises - også selve integrationen).

Opgave 4 (20 point)

Betragt den komplekse ligning

$$z^3 = (-4 - 4i)\sqrt{2}$$

a)

Bestem modulus og argument af z^3

b)

Bestem alle løsninger til z

c)

Afbild alle løsninger fra b) i et Argand-diagram. Bemærk, har du ikke løst opgave b) kan du stadig illustrere en arbitrær løsning for $z^3 = a + bi$.

Opgave 5 (20 point)

a)

Differentier funktionerne

$$f(x) = \tan^{-1}\left((x-e)^2\right)$$
$$g(x) = \ln\left(x^2\right) - 2$$

b)

Bestem grænseværdien (hvis den eksisterer) af

$$\lim_{x \to e} \frac{\tan^{-1}\left((x-e)^2\right)}{\ln\left(x^2\right) - 2}$$

eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

Februar 2018 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn $\det(A)$ og $\det(B)$

b)

Beregn $\det(AB)$

c)

Løs ligningssystemet

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Opgave 2 (25 point)

Beregn det bestemte integrale

$$\int_1^2 \ln(x^2)x\,dx$$

Opgave 3 (25 point)

a)

Betragt det komplekse tal

$$w = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

og bestem modulus og argument af w

b)

Betragt ligningen

$$z^4 = -81$$

hvor i er det komplekse tal. Bestem alle løsninger.

c)

Afbild alle løsninger fra c) i et Argand-diagram.

Bemærk, har du ikke løst opgave b) kan du stadig illustrere en arbitrær løsning for $z^4 = a + bi$.

Opgave 4 (25 point)

a)

Differentier udtrykket med hensyn til variablen x

$$\ln\left(\ln\left(x^2\right)\right)$$

b)

Undersøg om grænseværdierne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{x}}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan(x)}$$

eksisterer. Bestem de grænseværdier, som eksisterer, eller argumenter for, at grænseværdierne ikke eksisterer.

Januar 2018 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn $A^T B^T$

b)

Beregn

$$\det\left((BA)^T\right)$$

c)

Løs ligningssystemet

$$(BA)^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Opgave 2 (25 point)

Betragt ligningen

$$z^3 = 4\sqrt{2} - i4\sqrt{2}$$

hvor i er det komplekse tal. Bestem alle løsninger og afbild disse i et Argand-diagram.

Opgave 3 (25 point)

a)

Differentier udtrykket med hensyn til variablen x

$$\ln\left(\arctan\left(e^x\right)\right)$$

b)

Undersøg om grænseværdierne

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(e^x\right)$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{2x}}{e^x}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\arcsin(x)}$$

eksisterer. Bestem de grænseværdier, som eksisterer, eller argumenter for, at grænseværdierne ikke eksisterer.

Opgave 4 (25 point)

Betragt differentialligningen

$$-x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0$$

a)

Bestem alle løsninger til differentialligningen

b)

Bestem løsningen når $x(0) = 3$ og $x'(0) = 0$.

Maj 2017 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}x$$

a)

Bestem alle løsninger til differentialligningen

b)

Bestem løsningen for $y(1) = 1$.

(BEMÆRK: Har du ikke løst opgaven i a), kan du anvende løsningen $y(x) = \ln(x(e^x + C))$. Dette er dog ikke den korrekte løsning til a).)

Opgave 2 (25 point)

Lad $w \in \mathbb{C}$ og betragt ligningen

$$w^4 = 256i$$

a)

Bestem modulus og argumentet af det komplekse tal $s = w^4$

b)

Find alle løsninger til w

c)

Vis alle løsningerne i et argand diagram.

(BEMÆRK: Har du ikke løst opgaven i a), kan du anvende fire vilkårlige løsninger. For at opnå fuld point i denne delopgave skal disse dog placeres korrekt i forhold til hinanden.)

Opgave 3 (25 point)

a)

Betragt matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beregn $\det(A)$ og $\det(AB)$

b)

Lad nu

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beregn determinanten af D og bestem alle løsninger til ligningssystemet $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$.

Opgave 4 (25 point)

Betragt funktionen

$$f(x) = x \cdot cos(x)$$

a)

Estimer $f(1)$ vha. et taylor-polynomie af orden 3 med udviklingspunktet $x = 0$.

b)

Estimer fejlens størrelse vha. Taylors sætning (Lagrange's restled).

HINT: Det kan oplyses, at funktionen $4\sin(t) + t\cos(t)$ ikke har nogen vandrette tangenter for $t \in]0;1[$

Februar 2017 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Betragt differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot x \cdot t \cdot sin(t^2)$$

hvor det kan antages at $x > 0$.

a)

Bestem alle løsninger til differentialligningen

b)

Bestem løsningen for $x(0) = 1$.

(BEMÆRK: Har du ikke løst opgaven i a), kan du anvende løsningen $x(t) = e^{c+tan(t)}$. Dette er dog ikke den korrekte løsning til a).)

Opgave 2 (20 point)

a)

Bestem det ubestemte integrale

$$\int \frac{5+x}{x^2+x-2}dx$$

b)

Beregn nu

$$\int_2^4 \frac{5+x}{x^2+x-2}dx$$

hvor $x > 1$ og forkort resultatet så det står på formen $\ln(a)$, hvor $a \in \mathbb{N}$.

Opgave 3 (25 point)

Lad $w \in \mathbb{C}$ og betragt ligningen

$$w^3 = -64$$

a)

Find alle løsninger til w

b)

Vis alle løsningerne i et argand diagram.

(BEMÆRK: Har du ikke løst opgaven i a), kan du anvende tre vilkårlige løsninger. For at opnå fuld point i denne delopgave skal disse dog placeres korrekt i forhold til hinanden.)

Opgave 4 (30 point)

Betragt matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

Beregn

$$A^T B$$

b)

Beregn

$$\det(A^T B)$$

BEMÆRK: Hvis du ikke har løst opgaven i a), kan du i stedet beregne $\det(D)$, hvor

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Denne matrix er dog ikke den korrekte løsning til a).

c)

Betragt ligningssystemet

$$A^T B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

hvor

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og bestem alle løsninger for $\boldsymbol{x}$, såfremt disse eksisterer. Det forventes, at der anvendes gauss eliminiation.

BEMÆRK: Hvis du ikke har løst opgaven i a), kan du i stedet anvende ligningssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -10 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Januar 2017 (2 timer)

Opgave 1 (25 point)

Betragt differentialligningen

$$2x''(t) + 4x'(t) + 2x(t) = 2t$$

a)

Bestem alle løsninger til differentialligningen

b)

Bestem løsningen for $x(0) = 1$ og $x'(0) = 0$.

Opgave 2 (15 point)

Betragt funktionerne

$$f(x) = \sin(x)$$
$$g(x) = \cosh(x) - 1 + x$$

a)

Bestem lineariseringen omkring punktet $x = 0$ for $f(x)$

b)

Bestem lineariseringen omkring punktet $x = 0$ for $g(x)$

c)

Bestem grænseværdien af

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x) - 1 + x}{\sin(x)}$$

Opgave 3 (15 point)

Betragt det komplekse tal

$$z = (-1 + i\alpha)e^{i\beta}$$

hvor α og β er reelle positive konstanter.

a)

Opskriv reduceret udtryk for $\arg(-1 + i\alpha)$ (brug $\tan^{-1}$).

b)

Opskriv reduceret udtryk for modulus af $-1 + i\alpha$.

c)

Opstil et reduceret udtryk for $\arg(z)$.

d)

Lad nu $\alpha = 1$ og $\beta = \frac{\pi}{2}$. Beregn nu tallet z, således det er på formen $a + bi$.

Opgave 4 (25 point)

Lad $w \in \mathbb{C}$ og betragt ligningen

$$w^4 = -16$$

a)

Find alle løsninger til w

b)

Vis alle løsningerne i et argang diagram.

Opgave 5 (20 point)

Betragt matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Lad nu D være en matrix givet ved

$$D = AB$$

a)

Bestem $\det(A)$ og $\det(B)$

b)

Bestem $\det(D)$

c)

Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

hvor $\boldsymbol{b} = (0, 0, 1)$.

Bestem alle løsninger, hvis sådanne eksisterer.