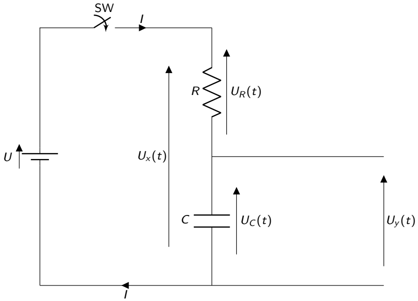
RoboTronix

Grundlæggende (Robot) Elektronik
RC kredsløb

Anders Stengaard Sørensen — Syddansk Universitet

Kursusuge 4

RC kredsløb



- Kontakten SW er indledningsvist slukket, men tændes på tidspunktet: $t = 0$
- Inden kontakten blev tændt ... altså for $t < 0$ sikrede vi os at capacitoren C ikke rummede nogen ladning, så $U_c(t) = 0$ for $t < 0$.
- Vi bemærker at før kontakten tændes er der ikke noget kredsløb, og dermed kan der ikke løbe nogen strøm: $I(t) = 0$ for $t < 0$
- Uden strøm er der ingen spænding over modstanden R, så: $U_R(t) = 0$ for $t < 0$
- Den samlede spænding over R og C: $U_x(t)$ er altså nul før kontakten tændes.

Beskrivende ligninger ... for spændingerne

Først beskriver vi den samlede spænding: $U_x(t)$, der styres af kontakten.

$$U_x(t) = \begin{cases} 0\ V & \text{for } t < 0 \\ U & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Og vi bemærker at denne spænding jo er summen af spænding over modstanden R og capacitoren C:

$$U_X(t) = U_C(t) + U_R(t) \tag{2}$$

Dernæst beskriver vi spændingen over modstanden, der afhænger af strømmen.

$$U_R(t) = R\, I(t) \tag{3}$$

Og spændingen over capacitoren, der afhænger af ladningen capacitoren opbevarer: $Q(t)$

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\, Q(t) \tag{4}$$

Vi husker at capacitoren opsamler og opbevarer al den ladning der løber ind i den i form af strøm ... der jo er ladningens hastighed (strøm er ladning per tid), så:

$$Q(t) = \int I(t)dt \tag{5}$$

Defor kan (4) og (5) samles til:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t)dt \tag{6}$$

Ligninger der beskriver strømmen

For at løse ligningerne for spænding skal vi kende strømmen som funktion af tiden: $I(t)$. Det er samme strøm der går overalt i kredsløbet, så vi starter med ligningen der definerer strømmen i modstanden:

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

Da vi primært er interesserede i spændningen over capacitoren, bruger vi (1) og (2) til at omskrive videre til:

$$I(t) = \frac{U - U_C(t)}{R} \tag{7}$$

Endeligt skriver vi ligningen der beskriver strømmen i capacitoren:

$$I(t) = C\,\frac{d}{dt}U_C(t) \tag{8}$$

Samling af ligningerne

Vi bemærker at (7) og (8) jo beskriver den samme strøm: $I(t)$ og derfor kan samles til:

$$C \frac{d}{dt} U_C(t) = \frac{U - U_C(t)}{R}$$

Der kan omskrives til:

$$\frac{d}{dt} U_C(t) = \frac{U - U_C(t)}{R\,C}$$

Og videre til

$$\frac{d}{dt} U_C(t) = \frac{U}{R\,C} - \frac{1}{R\,C} U_C(t) \tag{9}$$

Løsning af differentialligningen

Vi bemærker at (9) Er en første ordens differentialligning på formen: $y' = b - ay$, der kan uddybes som:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}U_C(t)}_{\text{Dif. kvotienten: } y'} = \underbrace{\frac{U}{R\,C}}_{\text{Konstant: } b} - \underbrace{\frac{1}{R\,C}}_{\text{Konstant: } a} \cdot \underbrace{U_C(t)}_{\text{Funktionen: } y}$$

Ifølge gymnasiets formelsamling har vi:

$$y' = b - a\,y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{b}{a} + c\,e^{-at}$$

Hvilket giver løsningen:

$$U_C(t) = U + c\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

For at finde den sidste konstant: c må vi kigge på systemets begyndelsesbetingelse ved $t = 0$. Netop på dette tidspunkt er kontakten netop tændt, og kredsløbet etableret, men ladningen og spændingen på capacitoren er nul, fordi der endnu ikke er løbet noget ladning ind i den. Vi har altså:

$$U_c(0) = U + c\,\underbrace{e^{-\frac{0}{RC}}}_{e^0=1}$$

Der, kan forkortes til:

$$0\,V = U + c \qquad \Leftrightarrow \qquad c = -U$$

Den endelige løsning på $U_C(t)$ bliver altså:

$$U_C(t) = U - U\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

Der kan skrives lidt pænere som:

$$U_C(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{10}$$

Sammenfatning

Med (10) som løsning på (9) har vi nu et udtryk for spændingen over capacitoren: $U_C(t)$
Vi kan nu nemt beskrive spændingen over modstanden: $U_R(t)$

$$U_R(t) = U - U_C(t)$$

Hvor vi indsætter (10) for at få:

$$U - U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Der kan forkortes til:

$$U_R(t) = U\,e^{-\frac{t}{RC}} \tag{11}$$

Det betyder at lige når kontakten tændes til $t = 0$ ligger hele spændingen U over modstanden, hvilket giver god mening, da capacitoren endnu ikke har opbygget nogen ladning og dermed ikke nogen spænding.
Vi kan gå videre med at skrive ligningen der beskriver stømmen som:

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

Der kan omskrives til

$$I(t) = \frac{U\,e^{-\frac{t}{RC}}}{R}$$

Eller:

$$I(t) = \frac{U}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} \tag{12}$$

Tidskonstanten

Det er tydeligt at hele systemts dynamik styres af udtrykket:

$$e^{-\frac{t}{RC}}$$

Det er også tydeligt at jo større værdier for R og C, jo langsommere ændringer.
Udtrykket: RC definerer vi som systemets "tidskonstant" : τ

$$\tau = RC \tag{13}$$

For at forstå betydningen af τ skal vi se på to værdier af t:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \begin{cases} 1 & \text{for: } t = 0 \\ e^{-1} & \text{for: } t = \tau \end{cases} \tag{14}$$

e^{-1} er det samme som $\frac{1}{e}$, og har ca. værdien: $\frac{1}{e} \simeq 0.37$ eller 37%

Det betyder at: Til $t = 0$ har systemer styret af $e^{-\frac{t}{\tau}}$ deres fulde værdi 100% og når der er gået een "tidskonstant" altså når $t = \tau$, er systemets output faldet til $\frac{1}{e} \simeq 37\%$ af den oprindelige værdi.

Tidskonstanten er simpelthen en målestok for hvor hurtigt systemer styret af $e^{-\frac{t}{\tau}}$ taber deres værdi.

For systemer der består af modstand: R og capacitor: C er tidkonstanten givet ved $\tau = RC$

Hvis man fx har en ukendt capacitor og en kendt modstand, så kan man måle tidskonstanten: τ med et oscillioskop, som den tid det tager at gå fra $U_C = U_{max}$ til $U_C = 37\% U_{max}$. Capacitoren beregnes så som: $C = \frac{\tau}{R}$