Matematikopgaver i Matematik for ingeniører 1 (BA-MAT1) 2024

Henrik Skov Midtiby

23. oktober 2024

Indhold

1 Matricer, vektorer og ligningssystemer

Opgave 1.1 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.2 hint solution

Skriv et linært ligningssystem, hvis koefficient matrice er

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 1.3 hint solution

Differentier og forenkl udtrykket:

$$y = x \cdot e^{-x} - x$$

Opgave 1.4 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.5 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.6 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.7 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.8 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.9 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.10 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}^T = ?$$

Opgave 1.11 hint solution

Løs ligningssystemet eller vis at der ikke findes en løsning til ligningssystemet.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ -4x + 2y - 6z &= 2 \end{aligned}$$

Opgave 1.12 hint solution

Bestem rangen af matricen

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Opgave 1.13 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} =?$$

Opgave 1.14 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} =?$$

Opgave 1.15 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} =?$$

Opgave 1.16 hint solution

Løs ligningssystemet eller vis at der ikke findes en løsning til ligningssystemet.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -4w - x - y + 2z &= -4 \\ -2w + 3x + 3y - 6z &= -2 \end{aligned}$$

Opgave 1.17 hint solution

Bestem rangen af matricen

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 1.18 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.19 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

2 Differens og differentialkvotient

Opgave 2.1 hint solution

Bestem den afledte af

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

Opgave 2.2 hint solution

Find forskriften for den rette linje der tangerer $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ ved $x = 2$.

Opgave 2.3 hint hint hint solution

Beregn den afledte af

$$f(x) = (1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x)(1 + 4x)$$

Opgave 2.4 hint hint solution

Find forskriften for den rette linje der tangerer $y = \sqrt{x + 1}$ ved $x = 3$.

Opgave 2.5 hint solution

Beregn den afledte af

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^3 + 2)}{(x^2 + 2)(x^3 + 1)}$$

Opgave 2.6 hint hint solution

Vis at hvis f kan differentieres med x og $f(x) > 0$, så gælder der

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Benyt derefter denne regel (Square Root Rule) til at bestemme den afledte af

$$\sqrt{x^2 + 1}.$$

Opgave 2.7 hint hint solution

Find en formel for tangentlinjen til Oprindeligt $x = -1$

$$y = (1 + x^{2/3})^{3/2}$$

ved $x = 1$.

Opgave 2.8 hint solution

Beregn et antal afledte af funktionen

$$f(x) = \cos(ax).$$

Beregn så mange at du kan gætte formlen for den n'te afledte ($f^{(n)}(x)$). Verificer derefter gættet vha. induktion.

Opgave 2.9 hint hint solution

Med cirka hvor mange procent vil et volumen ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$) af en kugle med radius r øges, hvis radius stiger med 2%?

Opgave 2.10 hint solution

Hvis f og g er funktioner, der begge kan differentieres mindst to gange, vis at følgende gælder:

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

Opgave 2.11 hint hint solution

Benyt differentialer til at approksimere ændringen i funktionen

$$h(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

fra $t = 2$ til $t = 2 + \frac{\pi}{10}$.

Opgave 2.12 hint hint solution

(Poiseuille's Law) Volumenflowet F (i liter per minut) af en væske igennem et rør er proportional til rørets radius i fjerde potens:

$$F = k \cdot r^4$$

Approksimer hvor meget radius skal øges for at øge flowet igennem røret med 10%.

3 Lineariseringer

Opgave 3.1 hint solution

Lineariser nedenstående funktion omkring punktet $x = \pi$.

$$\sin(x)$$

Opgave 3.2 hint solution

Benyt en passende linearisering til at approksimere den angivne værdi.

$$\cos(49^\circ)$$

Bestem fortegnet på fejlen og estimer dennes størrelse. Benyt denne information til at angive et interval der med sikkerhed indeholder værdien.

Opgave 3.3 hint hint solution

Om en funktion $g(x)$ vides det at $g(2) = 1$, $g'(2) = 2$ og $|g''(x)| < 1+(x-2)^2$ for alle $x > 0$. Bestem den bedste approksimation du kan for $g(1.8)$. Hvor stor kan fejlen blive?

Opgave 3.4 hint solution

Vis at lineariseringen af $\sin(\theta)$ ved $\theta = 0$ er $L(\theta) = \theta$. Hvor stor kan den procentvise fejl i approksimationen $\sin(\theta) \sim \theta$ blive hvis $|\theta| < 17^\circ$?

4 Komplekse tal

Opgave 4.1 hint solution

Bestem real og imaginær delen af tallet $z = -5+2i$ og plot det i det komplekse plan.

Opgave 4.2 hint hint solution

Bestem modulus og argument af $z = -1 + i$.

Opgave 4.3 hint solution

Differentier og forenkl udtrykket:

$$x(t) = e^{3t} \cdot \ln(t)$$

Opgave 4.4 hint solution

Bestem modulus og argument af $z = -5i$.

Opgave 4.5 hint solution

Hvis $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ og $\arg(w) = \frac{\pi}{2}$, bestem $\arg(z \cdot w)$.

Opgave 4.6 hint solution

Omskriv det komplekse tal til kartesisk form $z = a + ib$. Vi ved at $|z| = 2$ og $\arg(z) = \pi$.

Opgave 4.7 hint solution

Bestem modulus og argument af $z = 3i$.

Opgave 4.8 hint solution

Bestem real og imaginær delen af tallet $z = -\pi i$ og plot det i det komplekse plan.

Opgave 4.9 hint solution

Omskriv det komplekse tal til kartesisk form $z = a + ib$. Vi ved at $|z| = 5$ og $\arg(z) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.

Opgave 4.10 hint solution

Bestem den kompleks konjugerede til $5 + 3i$.

Opgave 4.11 hint solution

Hvis $\arg(z) = \frac{-5\pi}{6}$ og $\arg(w) = \frac{\pi}{4}$, bestem $\arg(\frac{z}{w})$.

Opgave 4.12 hint solution

Beskriv geometrisk eller lav en skitse af den mængde af punkter z i det komplekse plan som opfylder kravet: $|z| = 2$.

Opgave 4.13 hint solution

Omskriv det komplekse tal til kartesisk form $z = a + ib$. Vi ved at $|z| = 1$ og $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

Opgave 4.14 hint solution

Bestem modulus og argument af $z = -2$.

Opgave 4.15 hint solution

Beskriv geometrisk eller lav en skitse af den mængde af punkter z i det komplekse plan som opfylder kravet: $|z - 3 + 4i| \leq 5$.

Opgave 4.16 hint solution

Forenkl udtrykket $(4 + i)(4 - i)$.

Opgave 4.17 hint hint solution

Benyt de Moivres sætning til at finde en trigonometrisk identitet (omskrivningsregel) for $\cos(3\theta)$ ud fra $\cos(\theta)$ og en tilsvarende for $\sin(3\theta)$ ud fra $\sin(\theta)$.

Opgave 4.18 hint solution

Bevis at $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Opgave 4.19 hint solution

Bestem de tre kubikrødder af $-8i$.

Opgave 4.20 hint solution

Bestem den kompleks konjugerede til $-3 - 5i$.

Opgave 4.21 hint solution

Find alle komplekse løsninger til ligningen

$$z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0$$

Opgave 4.22 hint solution

Find alle løsninger til $z^5 + a^5 = 0$, når a er et positivt reelt tal.

5 Blok 5 – Inverse funktioner

Opgave 5.1 hint hint solution

Vis at funktionen $f(x) = 2x - 1$, er en–til–en og bestem den inverse funktion f^{-1}. Angiv desuden definitions og værdimængden for f og f^{-1}.

Opgave 5.2 hint hint solution

Forenkl udtrykket:

$$2^{1/2} \cdot 8^{1/2}$$

Opgave 5.3 hint hint solution

Forenkl udtrykket:

$$\log_x \left(x \cdot \left[\log_y(y^2)\right]\right)$$

Opgave 5.4 hint solution

Bestem $g^{-1}(1)$ når $g(x) = x^3 + x - 9$. Vis desuden at g er en–en–tydig.

Bemærk at I *ikke* skal bestemme den inverse funktion $(g^{-1}(x))$.

Opgave 5.5 hint solution

Differentier og forenkl udtrykket:

$$y = x^2 \cdot e^{x/2}$$

Opgave 5.6 hint hint solution

Forenkl udtrykket:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 4^{x/2}$$

Opgave 5.7 hint hint solution

Vis at funktionen $f(x) = \frac{1}{x+1}$, er en–til–en og bestem den inverse funktion f^{-1}. Angiv desuden definitions og værdimængden for f og f^{-1}.

Opgave 5.8 hint hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}6 & -2 & -2\\10 & -3 & 1\\-10 & 5 & 1\end{bmatrix}\right) = ?$$

Opgave 5.9 hint hint hint solution

Vis at $f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$ har en invers og bestem $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

Opgave 5.10 hint hint solution

Forenkl udtrykket:

$$2^{\log_4(8)}$$

Opgave 5.11 hint hint solution

Løs ligningen

$$2\log_3(x) + \log_9(x) = 10$$

med hensyn til x.

Opgave 5.12 hint solution

Differentier og forenkl udtrykket:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Opgave 5.13 hint solution

Løs ligningssystemet eller vis at der ikke findes en løsning til ligningssystemet.

$$\begin{aligned} 3x + 7y - 4z &= -46\\ 5w + 4x + 8y + z &= 7\\ -w + 6x \qquad + 2z &= 13 \end{aligned}$$

Opgave 5.14 hint solution

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix}6 & -2 & -2\\10 & -3 & 1\\-10 & 5 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}9 & 4 & -4\\4 & 7 & 0\\-4 & 0 & 11\end{bmatrix} =?$$

Opgave 5.15 hint solution

Differentier og forenkl udtrykket:

$$y = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$$

Opgave 5.16 hint solution

Differentier og forenkl udtrykket:

$$y = 2^{\left(x^2 - 3x + 8\right)}$$

6 Blok 7 – Trigonometri

Opgave 6.1 hint solution

Forenkl udtrykket

$$\cos(\arctan(x))$$

Opgave 6.2 hint solution

Differentier og forenkl nedenstående udtryk

$$y = \arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right)$$

Opgave 6.3 hint solution

Forenkl udtrykket

$$\sin(\arctan(x))$$

Opgave 6.4 hint solution

Vis at $\tan(x) > x$ for $0 < x < \pi/2$.

Opgave 6.5 hint solution

Differentier og forenkl nedenstående udtryk

$$y = \arctan(a \cdot x + b)$$

Opgave 6.6 hint solution

Differentier og forenkl nedenstående udtryk

$$f(x) = x \arcsin(x)$$

Opgave 6.7 solution

Bestem den afledte af $g(x) = \tan(\arctan(x))$ og skitser grafen for $g(x)$.

7 Matematik facts der er gode at kunne

Brøker

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a \cdot b}{c \cdot b} = \frac{a}{c}$$

Potenser

$$a^0 = 1$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Logaritmer

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$$

$$\log(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\log_{10}(10) = 1$$

Afledte

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(c) &= 0 \\
\frac{d}{dx}(x) &= 1 \\
\frac{d}{dx}\left(x^2\right) &= 2 \cdot x \\
\frac{d}{dx}\left(x^n\right) &= n \cdot x^{n-1} \\
\frac{d}{dx}\left(e^x\right) &= e^x \\
\frac{d}{dx}(\sin(x)) &= \cos(x) \\
\frac{d}{dx}(\cos(x)) &= -\sin(x) \\
\frac{d}{dx}(\ln(x)) &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Afledte, regneregler

$$
\begin{aligned}
\text{definition} \qquad f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \\
\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] &= \frac{d}{dx}[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)] \\
\frac{d}{dx}[f(g(x))] &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

Komplekse tal

$$\text{Kartesisk form} \qquad z = a + i \cdot b$$

$$\text{Polær form} \qquad z = m \cdot e^{i \cdot \theta}$$

$$e^{i \cdot \theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

$$m = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + n \cdot \pi \qquad n \in 0, 1 \text{ afhængig af } a \text{ og } b$$

Integraler

$$\int 1 \; dx = x + k$$

$$\int x \; dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 + k$$

$$\int x^2 \; dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 + k$$

$$\int x^n \; dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + k$$

$$\int \sin(x) \; dx = -\cos(x) + k$$

$$\int \cos(x) \; dx = \sin(x) + k$$

$$\int \exp(x) \; dx = \exp(x) + k$$

$$\int \ln(x) \; dx = x \cdot \ln(x) - x + k$$

Omskrivning af integraler

$$\int [f(x) + g(x)] \; dx = \int f(x) \; dx + \int g(x) \; dx$$

$$\int [f(x) \cdot g'(x)] \; dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \; dx$$

Taylor udviklinger

taylor om x_0 $\qquad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x$

taylor sum $\qquad f(x) = \sum_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$

taylor $\qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$

taylor $\qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$

taylor $\qquad \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Navngivne funktioner

ret linje $\qquad y = a \cdot x + b$

parabel $\qquad y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

hyperbel $\qquad y = a \cdot x^{-1}$

Blandet

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$$

$$e = 2.718281\ldots$$

$$\pi = 3.14159\ldots$$

8 Hints

Første hint til 1.1 Tilbage til opgave 1.1
Vær særligt opmærksom på dimensionerne af matricerne.

For at to matricer kan lægges sammen og trækkes fra hinanden skal de have samme dimensioner

Første hint til 1.2 Tilbage til opgave 1.2
Bemærk at der kun er opgivet en koefficient matrice

Lad hhv. første anden og tredje ligning være lig k_1, k_2 og k_3 da resultatmatricen ikke er opgivet, og matricen ikke står på udvidet matrice form.

Første hint til 1.3 Tilbage til opgave 1.3
Benyt at hvert led kan differentieres for sig.

Bemærk derudover at første led er et produkt, der kan differentieres via produktreglen: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Første hint til 1.4 Tilbage til opgave 1.4
Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:
$A: \ m \times n \quad \wedge \quad B: \ n \times p$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Første hint til 1.5 Tilbage til opgave 1.5
Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:
$A: \ m \times n \quad \wedge \quad B: \ n \times p$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Første hint til 1.6 Tilbage til opgave 1.6

Værdien af udtrykket er defineret da matricerne har samme mål

To matricer trækkes fra hinanden som vist nedenfor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.7 Tilbage til opgave 1.7

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:
$A : \ m \times n \quad \wedge \quad B : \ n \times p$

Første hint til 1.8 Tilbage til opgave 1.8

Værdien af udtrykket er defineret da matricerne har samme mål

To matricer trækkes fra hinanden som vist nedenfor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.9 Tilbage til opgave 1.9

Vær særligt opmærksom på dimensionerne af matricerne.

For at to matricer kan lægges sammen og trækkes fra hinanden skal de have samme dimensioner

Første hint til 1.10 Tilbage til opgave 1.10

Transponer først matricen.

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Første hint til 1.11 Tilbage til opgave 1.11

Benyt Gauss elimination, ved at skrive ligningssystemet op på udvidet matrice form.

Første hint til 1.12 Tilbage til opgave 1.12

Rangen beskriver det maksimale antal lineære uafhængige rækker.

Udfør Gauss-elimination på matricen.

Tæl herefter antallet af rækker der ikke kun består af 0'er

Første hint til 1.13 Tilbage til opgave 1.13

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:
$A: \ m \times n \quad \wedge \quad B: \ n \times p$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Første hint til 1.14 Tilbage til opgave 1.14

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:
$A: \ m \times n \quad \wedge \quad B: \ n \times p$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Første hint til 1.15 Tilbage til opgave 1.15

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:
$A: \ m \times n \quad \wedge \quad B: \ n \times p$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Første hint til 1.16 Tilbage til opgave 1.16

Omskriv ligningssystemet til udvidet matrice form og udfør Gauss elimination.

Der er uendeligt mange løsninger, hvis rangen er mindre end antallet af unikke rækkevariabler.

Første hint til 1.17 Tilbage til opgave 1.17

Udfør Gauss-elimination på matricen.

Tæl herefter antallet af rækker der ikke kun består af 0'er.

Første hint til 1.18 Tilbage til opgave 1.18

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:
$A: \ m \times n \quad \wedge \quad B: \ n \times p$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Første hint til 1.19 Tilbage til opgave 1.19

Undersøg først om matricerne vil komme til at opfylde kravet for gange-operationen ($A: \ m \times n \quad \wedge \quad B: \ n \times p$) efter at de to første matricer er ganget sammen.

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Første hint til 2.1 Tilbage til opgave 2.1

Benyt at hvert led kan differentieres for sig:

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x) = \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}2x$$

Første hint til 2.2 Tilbage til opgave 2.2

Benyt formlen for Linearisering:

$$L(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Første hint til 2.3 Tilbage til opgave 2.3

Reducer udtrykket enten helt eller nok til at benytte produktreglen.

Første hint til 2.4 Tilbage til opgave 2.4

Linearisering L(x) er givet ved:

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Benyt kædereglen til at bestemme $y'(x)$

Første hint til 2.5 Tilbage til opgave 2.5

Se at udtrykket kan skrives som $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ og at kvotient-reglen derfor kan benyttes: $f'(x) = (\frac{g(x)}{h(x)})' = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$

Første hint til 2.6 Tilbage til opgave 2.6

Benyt kædereglen til at bestemme $\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}$

Første hint til 2.7 Tilbage til opgave 2.7

Linearisering er givet ved $L(x) = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$

Første hint til 2.8 Tilbage til opgave 2.8

Differentier udtrykket indtil der ses et mønster Den skiftende trigonomiske funktion kan med fordel kaldes f ved den generelle løsning

Første hint til 2.9 Tilbage til opgave 2.9

Hvis r stiger med 2%, svarer det til, i ligningen, at erstatte r med $1.02 \cdot r$.

Første hint til 2.10 Tilbage til opgave 2.10

Den afledte af to funktioner ganget sammen kan findes ved produktreglen $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Benyt denne til først at bestemme den dobbeltafledte

Første hint til 2.11 Tilbage til opgave 2.11

Lineariser funktionen omkring $t = 2$, benyt $L(x) = h'(x_0) \cdot (x - x_0) + h(x_0)$

Første hint til 2.12 Tilbage til opgave 2.12

Hvis f skal øges med 10%, svare det til at udtrykket på højre side skal være 1.1 gang større.

Første hint til 3.1 Tilbage til opgave 3.1

Lineariseringen er givet ved

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Første hint til 3.2 Tilbage til opgave 3.2

1. Til info $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Find lineariseringen af funktionen omkring et passende punkt. (Et passende punkt er et punkt du vælger som du kender resultatet på.) $L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

3. $x_0 = punkt_{passende}$ og $x = punkt_{opgivet}$

4. Find fejlen for linearisering $e(t) = \frac{f''(c)}{2}(t - x_0)^2$

5. Intervallet hvori resultatet befinder sig er $[L(x_0) + e(t), L(x_0)]$

Første hint til 3.3 Tilbage til opgave 3.3

Benyt Taylors sætning, der siger at fejlen kan skrives som

$$\text{error} = \frac{|f''(a)|}{2}(x - x_0)^2$$

hvor a ligger mellem x_0 og x.

Første hint til 3.4 Tilbage til opgave 3.4

Benyt Taylors sætning, der siger at fejlen kan skrives som

$$\text{error} = \frac{|f(a)|}{2}(x - x_0)^2$$

hvor a ligger mellem x_0 og x.

Første hint til 4.1 Tilbage til opgave 4.1

Komplekse tal er på formen $z = a + bi$

Første hint til 4.2 Tilbage til opgave 4.2

Til at bestemme modulus kan pythagoras læresætning anvendes.
For at bestemme argumentet ses der på hvordan vinklen findes til linjen der går fra origo til z

Første hint til 4.3 Tilbage til opgave 4.3

Benyt produktreglen $(\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x))$

Første hint til 4.4 Tilbage til opgave 4.4

Prøv at tegn det på det komplekse plan.

Første hint til 4.5 Tilbage til opgave 4.5

Start med at stille z og w op på eksponentiel form, med r_1 og r_2 som modulus

Første hint til 4.6 Tilbage til opgave 4.6

Husk at $\pi = 180°$ og se så på hvor i det komplekse plan den vinkel svare til.

Første hint til 4.7 Tilbage til opgave 4.7

Læg mærke til at z ligger på den imaginære akse. Tegn det evt. da det kan være det nemmere at se på et plot.

Første hint til 4.8 Tilbage til opgave 4.8

Et komplekst tal kan skrives på formen $a + bi$

Første hint til 4.9 Tilbage til opgave 4.9

Læg mærke til at $arg(z)$ er skrevet på formen der benyttes til at bestemme argumentet til et komplekst tal i første og fjerde kvadrant.

Første hint til 4.10 Tilbage til opgave 4.10

Når $z = a + bi$ så er $\bar{z} = a - bi$

Første hint til 4.11 Tilbage til opgave 4.11

Skriv z og w op på eksponentiel form med r_z og r_w som modulus. Derefter kan potens regneregler benyttes til at bestemme $\arg(\frac{z}{w})$.

Første hint til 4.12 Tilbage til opgave 4.12

Læg mærke til at det kun er modulus der er blevet oplyst. Argumentet kan altså have en hvilken somhelst værdi.

Første hint til 4.13 Tilbage til opgave 4.13

Formlen $r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ kan benyttes til at omskrive fra polær form til kartesisk form.

Første hint til 4.14 Tilbage til opgave 4.14

Prøv at tegne det ind i det komplekse plan og se hvad vinklen bliver fra den positive side af den reelle akse og hvor langt væk punktet ligger fra origo

Første hint til 4.15 Tilbage til opgave 4.15

Du kan illustrere dette ved at bruge ligningen for en cirkel.

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = r^2$$

Hvor r er cirklens radius og x og y fås fra det givne krav. a og b kendes ikke, da disse er de variable i cirklens ligning.
Når denne ligning er fundet vides centrum af cirklen og dets radius.

Første hint til 4.16 Tilbage til opgave 4.16

Se på tredje kvadratsætning

Første hint til 4.17 Tilbage til opgave 4.17

de Moivres sætning for $n = 3$ er

$$\cos(3\theta) + i \cdot \sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^3$$

Første hint til 4.18 Tilbage til opgave 4.18

Prøv at skriv dem op på kartesisk form $(a + bi)$.

Første hint til 4.19 Tilbage til opgave 4.19

Opskriv på polær form.

Første hint til 4.20 Tilbage til opgave 4.20

For at nå frem til den kompleks konjugerede ganger den imaginære del (b) med -1

Første hint til 4.21 Tilbage til opgave 4.21

Første hint til 4.22 Tilbage til opgave 4.22

Isolér z i ligningen.

Første hint til 5.1 Tilbage til opgave 5.1

Undersøg om funktionen er en-en tydig. Dette kan gøres ved at se om funktionen er konstant voksende eller aftagende. Altså er $f'(x) > 0$ overalt eller $f'(x) < 0$ overalt.

Første hint til 5.2 Tilbage til opgave 5.2

Benyt potensregneregler til at omskrive udtrykket

Første hint til 5.3 Tilbage til opgave 5.3

Benyt følgende regneregler for logaritmer:

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$$
$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Første hint til 5.4 Tilbage til opgave 5.4

Vi kender ikke til analytiske metoder til at løse ligningen, så der må gættes en løsning i stedet for.

Første hint til 5.5 Tilbage til opgave 5.5

For at løse opgaven skal både produktreglen og kædereglen anvendes.

Første hint til 5.6 Tilbage til opgave 5.6

Benyt denne potensregneregel til at forenkle udtrykket

$$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$$

Første hint til 5.7 Tilbage til opgave 5.7

En funktion der altid er aftagende er en-til-en.

Første hint til 5.8 Tilbage til opgave 5.8

For at to matricer kan ganges sammen skal A være en (m x n)-matrice og B en (n x p)-matrice resultatmatricen bliver en (m x p)-matrice

Dimensionerne på matricerne er

$$< 3 \times 1 > \cdot < 1 \times 3 > \cdot < 3 \times 3 >$$

Første hint til 5.9 Tilbage til opgave 5.9

Vis at $f'(x) > 0$ for alle x værdier.

Første hint til 5.10 Tilbage til opgave 5.10

Slift logaritmens base til 2.

Første hint til 5.11 Tilbage til opgave 5.11

Skift logaritmebase til 3.

Første hint til 5.12 Tilbage til opgave 5.12

Benyt brøkregneregel til at opdele udtrykket i to led

Første hint til 5.13 Tilbage til opgave 5.13

Udnyt at ligningssystemet kan opskrives på matriceform

Første hint til 5.14 Tilbage til opgave 5.14

Første hint til 5.15 Tilbage til opgave 5.15

Benyt at udtrykket kan omskrives som 2 produkter

Første hint til 5.16 Tilbage til opgave 5.16

Benyt at udtrykket kan omskrives ved brug af den naturlige logaritme og derefter e

$$2 = e^{\ln(2)}$$

Første hint til 6.1 Tilbage til opgave 6.1

Opgaven kan løses ved at tegne en trekant, der er relateret til udtrykket $\theta = \arctan(x)$.

Første hint til 6.2 Tilbage til opgave 6.2

Benyt

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Første hint til 6.3 Tilbage til opgave 6.3

Tegn en retvinklet trekant hvor udtrykket $\theta = \arctan(x)$ kan findes.

Første hint til 6.4 Tilbage til opgave 6.4

Vis at $\tan(0) = 0$ og at $\frac{d}{dx}(\tan(x) - x) > 0$ for alle x i intervallet $0 < x < \pi/2$.

Første hint til 6.5 Tilbage til opgave 6.5

Benyt

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Første hint til 6.6 Tilbage til opgave 6.6

Benyt

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Andet hint til 2.3 Tilbage til opgave 2.3

Betragt funktionen som en række produkter og grupper produkterne. Derefter kan produktreglen anvendes i alt tre gange. Tilbage er så at rydde op i et ret grimt udtryk ...

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left((1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)\right)$$

Produktreglen anvendes første gang

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx}[(1+x)] \cdot [(1+2x)(1+3x)(1+4x)] \\ &\quad + (1+x) \cdot \frac{d}{dx}[(1+2x)(1+3x)(1+4x)] \end{aligned}$$

Produktreglen anvendes anden gang og $\frac{d}{dx}[(1+x)]$ beregnes

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot [(1+2x)(1+3x)(1+4x)] \\ &\quad + (1+x) \cdot \Bigg(\frac{d}{dx}[(1+2x)] \cdot [(1+3x)(1+4x)] \\ &\qquad + (1+2x) \cdot \frac{d}{dx}[(1+3x)(1+4x)]\Bigg) \end{aligned}$$

Produktreglen anvendes tredje gang

$$
\begin{aligned}
&= (1+2x)(1+3x)(1+4x) + (1+x)\cdot(2\cdot[(1+3x)(1+4x)] \\
&\qquad +(1+2x)\cdot\frac{d}{dx}[(1+3x)(1+4x)]\Big) \\
&= (1+2x)(1+3x)(1+4x) + (1+x)\cdot\Big(2\cdot[(1+3x)(1+4x)] \\
&\qquad +(1+2x)\cdot\left[\frac{d}{dx}[(1+3x)]\cdot(1+4x) + (1+3x)\cdot\frac{d}{dx}(1+4x)\right]\Big) \\
&= (1+2x)(1+3x)(1+4x) + (1+x)\cdot\Big(2\cdot(1+3x)(1+4x) \\
&\qquad +(1+2x)\cdot[3\cdot(1+4x)+(1+3x)\cdot 4]\Big)
\end{aligned}
$$

Vi er nu nået til det endelige udtryk, som vi ikke ønsker at forsimple mere

$$
\begin{aligned}
&= (1+2x)(1+3x)(1+4x) + (1+x)\cdot 2\cdot(1+3x)(1+4x) \\
&\quad + (1+x)(1+2x)\cdot 3\cdot(1+4x) + (1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot 4
\end{aligned}
$$

Andet hint til 2.4 Tilbage til opgave 2.4

I kædereglen

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

sættes $g(x) = x+1$ og $f(x) = \sqrt{(}x)$.

Andet hint til 2.6 Tilbage til opgave 2.6

Måske gør omskrivningen $\sqrt{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{2}}$ det lettere at overskue.

Andet hint til 2.7 Tilbage til opgave 2.7

Kædereglen $\frac{d}{dx}(g(h(x))) = g'(h(x))\cdot h'(x)$ kan benyttes til at bestemme $y'(x)$

Andet hint til 2.9 Tilbage til opgave 2.9

Omskriv udtrykket til formen $V = \frac{4}{3}\pi r^3\cdot x$ hvor x herefter kan omskrives til procent

Andet hint til 2.11 Tilbage til opgave 2.11

Benyt kædereglen til at differentiere h Benyt lineariseringen til at bestemme værdien i punktet $t = 2 + \frac{10}{\pi}$

Andet hint til 2.12 Tilbage til opgave 2.12

Udtrykket kommer til at se således ud: $F = k\cdot r^4\cdot 1.1$

Omskriv herefter udtrykket så konstanten bliver ganget på radius r.

Andet hint til 3.3 Tilbage til opgave 3.3

Benyt $x_0 = 2$ og

Andet hint til 4.2 Tilbage til opgave 4.2

Formlen til at beregne $arg(z)$ er når z ligger i anden kvadrant er

$$arg(z) = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) + \pi$$

Andet hint til 4.17 Tilbage til opgave 4.17

Gang parentesen ud og sammenlign siderne.

Andet hint til 5.1 Tilbage til opgave 5.1

Find herefter den inverse funktion ved at isolere x, og herefter bytte om på x og y.

Andet hint til 5.2 Tilbage til opgave 5.2

Benyt følgende potensregneregel:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Andet hint til 5.3 Tilbage til opgave 5.3

$$\log_x\left(x \cdot \left[\log_y(y^2)\right]\right) = \log_x(x) + \log_x\left(\log_y(y^2)\right)$$

Andet hint til 5.6 Tilbage til opgave 5.6

$$\frac{x}{2} = x \cdot \frac{1}{2}$$

Andet hint til 5.7 Tilbage til opgave 5.7

For at finde den inverse skal x isoleres i udtrykket

$$y = \frac{1}{x+1}$$

Andet hint til 5.8 Tilbage til opgave 5.8

Matricerne kan godt ganges sammen.

Andet hint til 5.9 Tilbage til opgave 5.9

For funktioner med en invers gælder følgende.

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Andet hint til 5.10 Tilbage til opgave 5.10

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Andet hint til 5.11 Tilbage til opgave 5.11

Basen kan ændres ved $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Tredje hint til 2.3 Tilbage til opgave2.3

Efter at have ganget parenteserne sammen fås

$$f(x) = 1 + 10x + 35x^2 + 50x^3 + 24x^4$$

Herefter kan udtrykket lettere differentieres.

Tredje hint til 5.9 Tilbage til opgave5.9

Udtrykket:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Kan differentieres med kædereglen og heraf fås:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

9 Løsninger

Solution to 1.1 Tilbage til opgave 1.1

Matricerne kan ikke adderes eller trækkes fra hinanden, da matrix dimensionerne ikke stemmer overens.

Solution to 1.2 Tilbage til opgave 1.2

Da resultatmatricen ikke er opgivet, benyttes k_1, k_2 og k_3 i stedet. Hvorefter koefficientmatricen benyttes til at opskrive ligningssystemet.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} -5y - 3z &= k_1 \\ -5x + 2y + 4z &= k_3 \\ -3x + 4y &= k_3 \end{aligned}$$

Solution to 1.3 Tilbage til opgave 1.3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x \cdot e^{-x} - x\right)$$

Differentier hvert led for sig

$$= \frac{d}{dx}\left(x \cdot e^{-x}\right) - \frac{d}{dx}(x)$$

Anvend produkt reglen

$$= \frac{d}{dx}(x) \cdot e^{-x} + (x) \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) - 1$$

Anvend kæde reglen

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) - 1 \\ &= e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) - 1 \\ &= e^{-x} - x \cdot e^{-x} - 1 \\ &= e^{-x} \cdot (1 - x) - 1 \end{aligned}$$

Solution to 1.4 Tilbage til opgave 1.4

Hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 10 \cdot 5 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ -10 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 49 \\ -43 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.5 Tilbage til opgave 1.5

Hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6\cdot 9-2\cdot 4-2\cdot -4 & 6\cdot 4-2\cdot 7-2\cdot 0 & 6\cdot -4-2\cdot 0-2\cdot 11 \\ 10\cdot 9-3\cdot 4+1\cdot -4 & 10\cdot 4-3\cdot 7+1\cdot 0 & 10\cdot -4-3\cdot 0+1\cdot 11 \\ -10\cdot 9+5\cdot 4+1\cdot -4 & -10\cdot 4+5\cdot 7+1\cdot 0 & -10\cdot -4+5\cdot 0+1\cdot 11 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 54 & 10 & -46 \\ 74 & 19 & -29 \\ -74 & -5 & 51 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.6 Tilbage til opgave 1.6

For at trække de to matricer fra hinanden trækker man de tilhørende elementer i de to matricer fra hinanden, således at $a_{11}-b_{11}=c_{11}$, $a_{12}-b_{12}=c_{12}$, $a_{21}-b_{21}=c_{21}$ osv.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-6 & 2-1 \\ 2+4 & 4-7 \\ 1+8 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.7 Tilbage til opgave 1.7

Da matricen på højre side ikke har lige så mange rækker som matricen på venstre side har kolonner kan disse to matricer ikke ganges med hinanden.

Solution to 1.8 Tilbage til opgave 1.8

For at trække de to matricer fra hinanden trækker man de tilhørende elementer i de to matricer fra hinanden, således at $a_{11}-b_{11}=c_{11}$, $a_{12}-b_{12}=c_{12}$, $a_{21}-b_{21}=c_{21}$ osv.

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-0 & 1-2 \\ -4-2 & 7-4 \\ -8-1 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 3 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.9 Tilbage til opgave 1.9

Da matricerne ikke er lige store kan de ikke lægges sammen.

Solution to 1.10 Tilbage til opgave 1.10

Start med at transponerer matricen på højre side af gange tegnet. Derefter hvert element i den resulterende matrice bestemmes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side sammen med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 6 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 8 \\ 10 \cdot 3 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 8 \\ -10 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 38 \\ -22 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.11 Tilbage til opgave 1.11

Til at starte med sættes ligningssystemet op på udvidet matrixform, hvorefter rangen bestemmes.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ -4x + 2y - 6z &= 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2 \cdot R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Da matricen er af rang et vil der være uendeligt mange løsninger til ligningssystemet. For at finde en af løsningerne kan man da den er af rang et, give 2 af konstanterne en tilfældig værdi og løse for den sidste. y og z bliver i dette tilfælde sat lig 0 hvorefter der løses for x

$$2x - 0 + 3 \cdot 0 = -1 \leftrightarrow 2x = -1 \leftrightarrow x = -0.5$$

Til sidst sættes værdierne ind i ligningerne for at teste løsningen

$$\begin{aligned} 2 \cdot -0.5 - 0 + 3 \cdot 0 = -1 &\leftrightarrow -1 = -1 \\ -4 \cdot -0.5 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 2 &\leftrightarrow 2 = 2 \end{aligned}$$

Solution to 1.12 Tilbage til opgave 1.12

Der benyttes Gauss-elimination til at bestemme rang

$$\begin{bmatrix}0 & -2 & 1 & 3\\1 & 4 & 0 & 7\\5 & 5 & 5 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{R_3/5 \to R_3} \begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 7\\0 & -2 & 1 & 3\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 7\\0 & -2 & 1 & 3\\0 & -3 & 1 & -6\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3 \to R_2} \begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 7\\0 & 1 & 0 & 9\\0 & -3 & 1 & -6\end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4 \cdot R_2 \to R_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -29\\0 & 1 & 0 & 9\\0 & -3 & 1 & -6\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 3 \cdot R_2 \to R_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -29\\0 & 1 & 0 & 9\\0 & 0 & 1 & 21\end{bmatrix}$$

Det er ikke muligt at få ren nuller på nogle rækker og den er derfor a rang 3

Solution to 1.13 Tilbage til opgave 1.13

Hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix}9 & 4 & -4\\4 & 7 & 0\\-4 & 0 & 11\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}6 & -2 & -2\\10 & -3 & 1\\-10 & 5 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}9 \cdot 6 + 4 \cdot 10 - 4 \cdot -10 & 9 \cdot -2 + 4 \cdot -3 - 4 \cdot 5 & 9 \cdot -2 + 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1\\4 \cdot 6 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot -10 & 4 \cdot -2 + 7 \cdot -3 + 0 \cdot 5 & 4 \cdot -2 + 7 \cdot 1 + 0 \cdot 1\\-4 \cdot 6 + 0 \cdot 10 + 11 \cdot -10 & -4 \cdot -2 + 0 \cdot -3 + 11 \cdot 5 & -4 \cdot -2 + 0 \cdot 1 + 11 \cdot 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}134 & -50 & -18\\94 & -29 & -1\\-134 & 63 & 19\end{bmatrix}$$

Solution to 1.14 Tilbage til opgave 1.14

Først transponeres matricen på venstre side af gange tegnet. Derefter kan hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 & -10 \\ -2 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 \cdot 6 + 10 \cdot 10 - 10 \cdot -10 & 6 \cdot -2 + 10 \cdot -3 - 10 \cdot 5 & 6 \cdot -2 + 10 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \\ -2 \cdot 6 - 3 \cdot 10 + 5 \cdot -10 & -2 \cdot -2 - 3 \cdot -3 + 5 \cdot 5 & -2 \cdot -2 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ -2 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot -10 & -2 \cdot -2 + 1 \cdot -3 + 1 \cdot 5 & -2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 236 & -92 & -12 \\ -92 & 38 & 6 \\ -12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.15 Tilbage til opgave 1.15

Hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 8 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 40 \\ 3 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.16 Tilbage til opgave 1.16

Ligningssystemet skrives først op på udvidet matrixform, hvorefter Gauss-elimination benyttes til at bestemme rangen.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -4w - x - y + 2z &= -4 \\ -2w + 3x + 3y - 6z &= -2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 3 & -6 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1 \cdot 3 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2 \cdot R_3 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Da rangen er 2 og der er 4 ubekendte kan 2 af de ubekendte gives en tilfældig værdi. I dette tilfælde er $y = 1$ og $z = 0$. Disse værdier kan så sættes ind i ligningssystemet hvorefter de to sidste ubekendte kan bestemmes.

$$\begin{aligned} x + 1 - 2 \cdot 0 &= 0 \\ -4w - x - 1 + 2 \cdot 0 &= -4 \\ -2w + 3x + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 &= -2 \end{aligned}$$

x kan nu bestemmes ud fra øverste ligning, hvorefter denne kan indsættes i en af ligningerne under for at bestemme w

$$\begin{aligned} x + 1 - 2 \cdot 0 = 0 &\leftrightarrow x = -1 \\ -4w - (-1) - 1 + 2 \cdot 0 = -4 &\leftrightarrow w = 1 \end{aligned}$$

Til sidst indsættes værdierne i alle ligningerne for at tjekke efter

$$w = 1 \qquad x = -1 \qquad y = 1 \qquad z = 0$$

$$\begin{aligned} -1 + 1 - 2 \cdot 0 = 0 &\leftrightarrow 0 = 0 \\ -4 \cdot 1 - (-1) - 1 + 2 \cdot 0 = -4 &\leftrightarrow -4 = -4 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 = -2 &\leftrightarrow -2 = -2 \end{aligned}$$

Solution to 1.17 Tilbage til opgave 1.17

Der benyttes Gauss-elimination til at bestemme matricens rang

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1/3 \to R_1]{R_2/3 \to R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4 \cdot R_2 \to R_3}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 5 & \frac{20}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 5 \cdot R_1 \to R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er ikke muligt at få flere rækker med rene nuller, og matricen er derfor af rang 2

Solution to 1.18 Tilbage til opgave 1.18

Resultatet bestemmes ved at gange a_{11} med b_{11}, a_{12} med b_{21} og a_{13} med b_{31} og derefter lægge disse tal sammen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 31$$

Solution to 1.19 Tilbage til opgave 1.19

Først ganges matricerne i parentesen sammen hvorefter den resulterende matrice kan ganges sammen med matricen på højre side af gange tegnet.

$$\left(\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}6 & -2 & -2\\10 & -3 & 1\\-10 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot 3 & 5\cdot 0 & 5\cdot 8\\1\cdot 3 & 1\cdot 0 & 1\cdot 8\\2\cdot 3 & 2\cdot 0 & 2\cdot 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -2 & -2\\10 & -3 & 1\\-10 & 5 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}15 & 0 & 40\\3 & 0 & 8\\6 & 0 & 16\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -2 & -2\\10 & -3 & 1\\-10 & 5 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}15\cdot 6+0\cdot 10+40\cdot -10 & 15\cdot -2+0\cdot -3+40\cdot 5 & 15\cdot -2+0\cdot 1+40\cdot 1\\3\cdot 6+0\cdot 10+8\cdot -10 & 3\cdot -2+0\cdot -3+8\cdot 5 & 3\cdot -2+0\cdot 1+8\cdot 1\\6\cdot 6+0\cdot 10+16\cdot -10 & 6\cdot -2+0\cdot -3+16\cdot 5 & 6\cdot -2+0\cdot 1+16\cdot 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-310 & 170 & 10\\-62 & 34 & 2\\-124 & 68 & 4\end{bmatrix}$$

Solution to 2.1 Tilbage til opgave 2.1

Hvert led differentieres for sig selv, derved fås:

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$$
$$f'(x)=0+1+2x+3x^2+4x^3$$

Solution to 2.2 Tilbage til opgave 2.2

For at benytte ligningen for tangentlinjen $L(x)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$, bestemmes først den afledte, ved at differentiere hvert led for sig.

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$$
$$f'(x)=0+1+2x+3x^2+4x^3$$

Herefter indsættes der i ligningen for tangentlinjen

$$\begin{aligned}L(x)&=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)\\&=(1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3)\cdot(x-2)+(1+2+2^2+2^3+2^4)\\&=(49)\cdot(x-2)+31\\&=(49x-98)+31\\&=49x-67\end{aligned}$$

Altså bliver løsningen på tangentlinjen til punktet x=2

$$L(x) = 49x - 67$$

Solution to 2.3 Tilbage til opgave 2.3

Først ganges parenteserne sammen to og to

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x) \\ &= (1+2x+x+2x^2)(1+4x+3x+12x^2) \\ &= (1+3x+2x^2)(1+7x+12x^2) \end{aligned}$$

Herefter kan der enten benyttes produktregel, ellers kan parenteserne ganges sammen igen. Ved denne løsning vælges sidste mulighed

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+3x+2x^2)(1+7x+12x^2) \\ &= 1+7x+12x^2+3x+21x^2+36x^3+2x^2+14x^3+24x^4 \\ &= 1+10x+35x^2+50x^3+24x^4 \end{aligned}$$

Til slut kan hvert led differentieres for sig

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+10x+35x^2+50x^3+24x^4 \\ f'(x) &= 0+10+70x+150x^2+96x^3 \end{aligned}$$

Solution to 2.4 Tilbage til opgave 2.4

Lineariseringen er givet ved $L(x) = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$. Det er derfor nødvendigt at bestemme den afledte, hertil benyttes kædereglen:
$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x)} \qquad\qquad f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$g(x) = x+1 \qquad\qquad g'(x) = 1$$

Indsættes dette i kædereglen fås

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(g(x)) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 \end{aligned}$$

Da $y'(x)$ nu kendes, kan der indsættes i ligningen for linearisering.

$$\begin{aligned}
L(x) &= y'(x_0)\cdot(x-x_0)+y(x_0)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3+1}}(x-3)+\sqrt{1+3}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-3)+\sqrt{4}\\
&= \frac{1}{2\cdot 2}(x-3)+2\\
&= \frac{1}{4}(x-3)+2\\
&= \frac{1}{4}x-\frac{3}{4}+2\\
&= \frac{1}{4}x-\frac{3}{4}+\frac{8}{4}\\
&= \frac{1}{4}x+\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Altså bliver løsningen på tangentlinjen til punktet x=3

$$L(x)=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$$

Solution to 2.5 Tilbage til opgave 2.5

Parenteserne i hhv, nævner og tæller ganges sammen og Kvotientreglen $f'(x) = (\frac{g(x)}{h(x)})' = \frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h(x)^2}$ benyttes. Herefter bestemmes $g(x)$, g', h og h'

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^5+x^3+2x^2+2\\
g'(x) &= 5x^4+3x^2+4x\\
h(x) &= x^5+2x^3+x^2+2\\
h'(x) &= 5x^4+6x^2+2x
\end{aligned}$$

Disse kan nu indsættes i Kvotientreglen, derved fås følgende udtryk

$$f'(x)=\frac{(5x^4+3x^2+4x)\cdot(x^5+2x^3+x^2+2)-(x^5+x^3+2x^2+2)\cdot(5x^4+6x^2+2x)}{(x^5+2x^3+x^2+2)^2}$$

Det er ikke nødvendigt at reducere dette udtryk yderligere.

Solution to 2.6 Tilbage til opgave 2.6

For at vise at $\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ gælder, benyttes kædereglen (bemærk navngivning):

$\frac{d}{dx}(h(g(x))) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$
Samt at $\sqrt{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{2}}$

Først bestemmes h og g samt deres afledte

$$h(x) = \sqrt{x}$$
$$h'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$g(x) = f(x)$$
$$g'(x) = f'(x)$$

Disse kan nu indsættes i udtrykket for kædereglen:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Det er nu bevist at udtrykket er gældende. Herefter kan $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}$ bestemmes:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solution to 2.7 Tilbage til opgave 2.7

Benytter kædereglen ($\frac{d}{dx}\left(g(h(x))\right) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$)for at differentiere.

$$g(x) = x^{3/2} \qquad g'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$
$$h(x) = 1 + x^{2/3} \qquad h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(1 + x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} \\ &= \sqrt{1 + x^{2/3}} \cdot x^{-1/3} \end{aligned}$$

Bestemmer værdier

$$f\left(x_0\right) = f(1) = \left(1 + 1^{2/3}\right)^{3/2} = 2^{3/2} = \sqrt{8}$$
$$f'\left(x_0\right) = f'(1) = \sqrt{1 + 1^{2/3}} \cdot x^{-1/3} = \sqrt{2}$$

Indsætter i udtrykket for $L(x)$

$$\begin{aligned}L(x) &= \sqrt{8} + \sqrt{2} \cdot (x-1) \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot (x-1) \\ &= \sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(x+1)\end{aligned}$$

Solution to 2.8 Tilbage til opgave 2.8

Udtrykket $f(x) = \cos(ax)$ differentieres indtil der ses et mønster

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos(ax) \\ f'(x) &= a \cdot -\sin(ax) = -a \cdot \sin(ax) \\ f''(x) &= a^2 \cdot -\cos(ax) = -a^2 \cdot \cos(ax) \\ f'''(x) &= a^3 \cdot \sin(ax) = a^3 \cdot \sin(ax) \\ f''''(x) &= a^4 \cdot \cos(ax) = a^4 \cdot \cos(ax)\end{aligned}$$

Der ses et mønster med a der kan beskrives ved a^n. Når der tages et lige antal afledte (n er lige), er den afledte funktion en cosinus. Ved et ulige antal afledte er den afledte funktion sinus. Desuden skifter fortegnet på funktionen når der tages to afledte. Alt i alt betyder det at funktionen kan skrives som :

$$f^n(x) = \begin{cases} (-1)^{(n+1)/2} \cdot a^n \cdot \sin(a \cdot x) & n \text{ er ulige} \\ (-1)^{n/2} \cdot a^n \cdot \cos(a \cdot x) & n \text{ er lige} \end{cases}$$

Solution to 2.9 Tilbage til opgave 2.9

r erstattes med $1.02r$

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3}\pi(1.02r)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 1.02^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 1.0612\end{aligned}$$

Der ses at V stiger med ca. $1.0612 = 6.1\%$

Solution to 2.10 Tilbage til opgave 2.10

Den dobbeltafledte bestemmes ved at benytte produktreglen på produktreglen. $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg' \\ (fg)'' &= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') \\ &= f''g + 2f'g' + fg''\end{aligned}$$

Solution to 2.11 Tilbage til opgave 2.11

Funktionen lineariseres omkring $t = 2$, ved brug af $L(x) = h'(x_0) \cdot (x - x_0) + h(x_0)$

h differentieres ved brug af kædereglen $\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f(x) = \cos(x) \qquad f'(x) = -\sin(x)$$
$$g(x) = \frac{\pi t}{4} \qquad g'(x) = \frac{\pi}{4}$$
$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

Linearisering omkring $t = 2$ opskrives

$$\begin{aligned}
L(x) &= h'(2) \cdot (x - 2) + h(2) \\
&= -\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi 2}{4}\right) \cdot (x - 2) + \cos\left(\frac{\pi 2}{4}\right) \\
&= -\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (x - 2) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi}{4}(x - 2) = \frac{-\pi x + 2\pi}{4}
\end{aligned}$$

Herefter indsættes $t = 2 + \frac{\pi}{10}$

$$\begin{aligned}
L\left(2 + \frac{\pi}{10}\right) &= \frac{-\pi(2 + \frac{\pi}{10}) + 2\pi}{4} \\
&= \frac{-2\pi - \frac{\pi^2}{10} + 2\pi}{4} \\
&= \frac{-\pi^2}{40} \approx -0,25
\end{aligned}$$

Solution to 2.12 Tilbage til opgave 2.12

Først ganges højre side med 1.1 da dette øger F med 10% Herefter omskrives udtrykket således r ganges med denne nye konstant

$$\begin{aligned}
F &= k \cdot r^4 \cdot 1,1 \\
&= k \cdot (r \cdot (1.1)^{\frac{1}{4}})^4 \\
&= k \cdot (r \cdot 1.0241)^4
\end{aligned}$$

Det kan nu ses at r skal øges med 0.0241 eller 2.4% for at øge F med 10%

Solution to 3.1 Tilbage til opgave 3.1

Lineariser nedenstående funktion omkring $x_0 = \pi$

$$f(x) = \sin(x)$$

Lineariseringen er givet ved

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &= f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x - \pi) \\ &= \sin(\pi) + \frac{d}{dx}(\sin(x))\Big|_{x=\pi} \cdot (x - \pi) \\ &= 0 + \cos(x)|_{x=\pi} \cdot (x - \pi) \\ &= -1 \cdot (x - \pi) \\ &= \pi - x \end{aligned}$$

Solution to 3.2 Tilbage til opgave 3.2

Den funktion der skal lineariseres er $f(x) = \cos(x)$, vi skal nu vælge et passende punkt at linearisere omkring. Punktet skal være tæt ved 49° og vi skal kende funktions værdien og den afledte i punktet. Derfor valges $x_0 = 45° = \pi/4$ Lineariseringen bliver så

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x - \pi/4) \end{aligned}$$

Punktet $49° = 49 \cdot \pi/180$ indsattes i lineariseringen. Det giver.

$$\begin{aligned} \cos(49°) &= L(49 \cdot \pi/180) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (49 \cdot \pi/180 - \pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (4 \cdot \pi/180) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\pi/45) \\ &= 0.6577 \end{aligned}$$

Herefter findes funktionen for fejlen for lineariseringen:

$$e(t) = \frac{f''(c)}{2}(t - x_0)^2$$

hvor $c = x_0 = 45°$

$$e(t) = \frac{-cos(\pi/4)}{2}(t - \pi/4)^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}(t - \pi/4)^2$$

$t = 49°$ indsættes

$$\begin{aligned} e\left(\frac{49\pi}{180}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{49\pi}{180} - 48\pi/180\right)^2 \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{45}\right)^2 \\ &= -0.0017 \end{aligned}$$

Intervallet hvori resultatet af $cos(49°)$ ligger med sikkerhed er:

$$[0.6577 - 0,0017; 0.6577] = [0.6560; 0.6577]$$

Solution to 3.3 Tilbage til opgave 3.3

Givet

$$\begin{aligned} g(2) &= 1 \\ g'(2) &= 2 \\ |g'(x)| &< 1 + (x-2)^2 \quad \text{for alle} \quad x > 0 \end{aligned}$$

Bestem den bedste approksimation af $g(1.8)$.

Vi har fået nok information til at linearisere $g(x)$ omkring $x = 2$.

$$\begin{aligned} L(x) &= g(2) + g'(z) \cdot (x-2) \\ &= 1 + 2 \cdot (x-2) \end{aligned}$$

Lineariseringen benyttes til at estimere værdien at $g(1.8)$

$$\begin{aligned} g(1.8) &\simeq L(1.8) \\ &= 1 + 2 \cdot (1.8 - 2) \\ &= 1 - 0.4 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Fejlen på lineariseringen er begrænset af

$$\frac{f''(a)}{2} \cdot (x-2)^2$$

Den værdi indsættes i udtrykket for fejlen

$$\begin{aligned}\text{error} &= \frac{|f''(a)|}{2}(1.8-2)^2 \leq \frac{1.04}{2}\cdot(1.8-2)^2\\ &= \frac{1.04}{2}\cdot 0.2^2\\ &= 0.0104\cdot 2\\ &= 0.0208\end{aligned}$$

Samlet set kan man sige at $g(1.8)$ er i intervallet

$$0.6-0.0208 \leq g(1.8) \leq 0.6+0.0208$$

Solution to 3.4 Tilbage til opgave 3.4

Lineariseringen er givet ved

$$\begin{aligned}h(\theta) =& f(\theta)+f(0)\cdot\Theta\\ &= \sin(0)+\frac{d}{dx}\sin(x)\bigg|_{x\neq 0}\\ &= 0+\cos(0)\cdot\Theta\end{aligned}$$

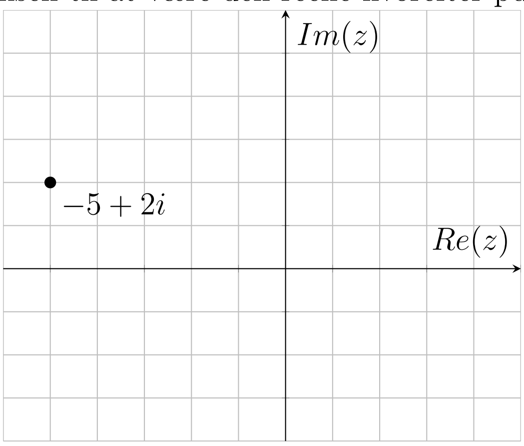
Ikke afsluttet

Solution to 4.1 Tilbage til opgave 4.1

Den reelle del er den del der ikke er ganget med i og den imaginære er den der er ganget med i

$$\begin{aligned}Re(z) &= -5\\ Im(z) &= 2\end{aligned}$$

For at tegne det ind på en graf sættes y aksen til at være den imaginære og x aksen til at være den reelle hvorefter punktet tegnes ind.



Solution to 4.2 Tilbage til opgave 4.2

Til at bestemme modulus benyttes Pythagoras' læresætning.
For at bestemme argumentet skal man først bestemme hvilken kvadrant z ligger i. I dette tilfælde ligger den i anden kvadrant og formlen $arg(z) = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) + \pi$ benyttes derfor.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3 \cdot \pi}{4}$$

Solution to 4.3 Tilbage til opgave 4.3

$x(t) = e^{3t} \cdot \ln(t)$

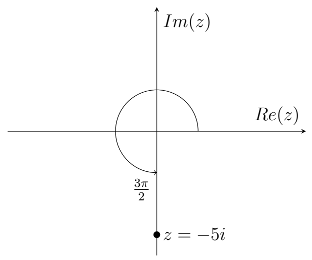
Produktreglen ($\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$) benyttes da $x(t)$ kan skrives som to separate funktioner ganget sammen. Desuden benyttes $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$ og $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$$x'(t) = 3 \cdot e^{3t} \cdot \ln(t) + e^{3t} \cdot \frac{1}{t} = e^{3t}\left(3\ln(t) + \frac{1}{t}\right)$$

Solution to 4.4 Tilbage til opgave 4.4

$z = -5i$

$$|z| = \sqrt{(-5)^2} = 5$$
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{-5}{0}\right) = \frac{3\pi}{2}$$



Bemærk at vinklen er $\frac{3\pi}{2}$ da den ligger på den negative del af den imaginære akse og at modulus er 5 da den reelle del er 0 og længden derfor er lig den imaginære del.

Solution to 4.5 Tilbage til opgave 4.5

$\arg(z) = \frac{3\pi}{4} \qquad \arg(w) = \frac{\pi}{2}$

z og w skrives på polær form, med modulus på henholdsvis r_1 og r_2. Derefter ganges disse to sammen og der bruges potens-regneregler til at bestemme argumentet

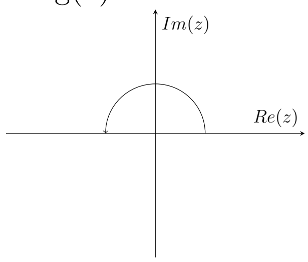
$$z \cdot w = r_1 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}} \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\arg(z \cdot w) = \frac{5\pi}{4}$$

Solution to 4.6 Tilbage til opgave 4.6

$|z| = 2 \qquad \arg(z) = \pi.$

Bemærk at $\arg(z) = \pi$ og der derfor ikke er nogen imaginær del. Desuden viser $\arg(z)$ at den reelle del er negativ



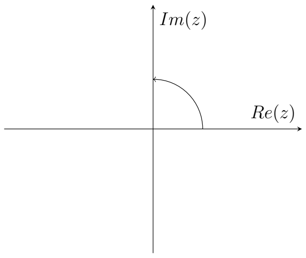
Dette betyder at $z = -2$ da modulus er 2

Solution to 4.7 Tilbage til opgave 4.7

$z = 3i$

Bemærk at der ikke er nogen reel del, dette koblet sammen med at den imaginære del er positiv betyder at argumentet er $\frac{\pi}{2}$

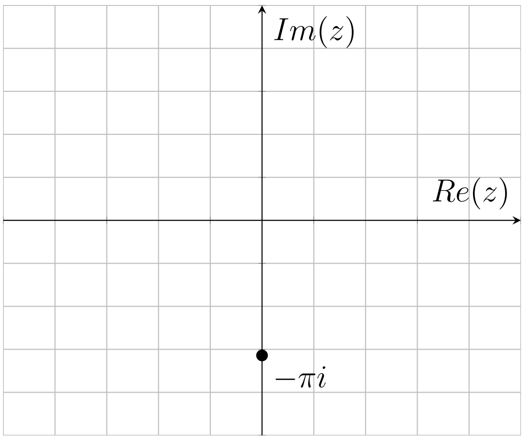
$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$$
$$|z| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$



Solution to 4.8 Tilbage til opgave 4.8

$z = -\pi i$

$$Re(z) = 0$$
$$Im(z) = -\pi$$



Solution to 4.9 Tilbage til opgave 4.9

$|z| = 5 \qquad \arg(z) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

Ses der på formlen for argumentet til z i første og fjerde kvadrant $arg(z) = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)$ ses der at den imaginære del er 3 og den reelle er 4. Dette kan så tjekkes efter ved at se om moduls giver 5 hvis den imaginære del er 3 og den reelle er 4. $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$$z = 4 + 3i$$

Solution to 4.10 Tilbage til opgave 4.10

$z = 5 + 3i$

$$\bar{z} = 5 - 3i$$

Solution to 4.11 Tilbage til opgave 4.11

$\arg(z) = \frac{-5\pi}{6}$ $\quad\arg(w) = \frac{\pi}{4}$

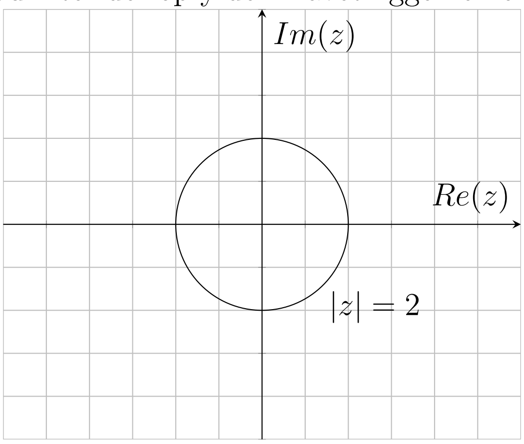
z og w skrives på eksponentiel form, med modulus på henholdsvis r_z og r_w. Derefter divideres disse to med hinanden og der bruges potens-regneregler til at bestemme argumentet.

$$\frac{z}{w} = \frac{r_z \cdot e^{i\frac{-5\pi}{6}}}{r_w \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{r_z}{r_w} \cdot e^{i\left(\frac{-5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = R \cdot e^{i\left(\frac{-10\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right)} = R \cdot e^{i\frac{-13\pi}{12}}$$
$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{-13\pi}{12}$$

Solution to 4.12 Tilbage til opgave 4.12

$|z| = 2$

$|z|$ beskriver hvor langt væk fra origo punktet ligger. Derfor vil mængden af punkter der opfylder kravet ligge i en cirkel med radius 2 og center i origo.



Solution to 4.13 Tilbage til opgave 4.13

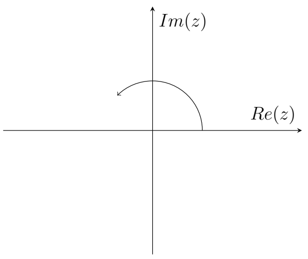
$|z| = 1$ $\quad\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

Til at omskrive fra polær til kartesisk bruges formlen $r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$$z = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$
$$1 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 \cdot i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Der tjekkes efter ved at beregne modulus

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{2^2} + \frac{\sqrt{2}^2}{2^2}} = \sqrt{1} = 1$$

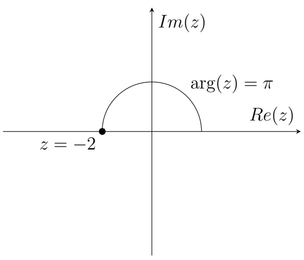


Solution to 4.14 Tilbage til opgave 4.14

$z = -2$

Da der ikke er en kompleks del er modulus 2 og da punktet ligger på den negative del af den reelle akse er argumentet π

$$|z| = 2$$
$$\arg(z) = \pi$$

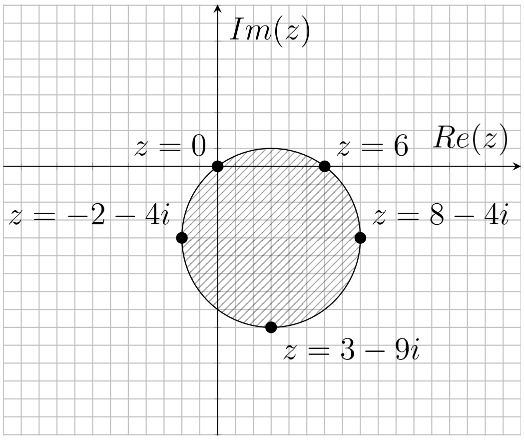


Solution to 4.15 Tilbage til opgave 4.15

$|z - 3 + 4i| \leq 5$

Ligningen omskrives så a og b komponenterne af z kan bestemmes. Derefter bestemmes nogle af de z værdier som udfylder $|z-3+4i| = 5$, disse punkter vil så kunne forbindes til en cirkel, alle punkter inden for denne cirkel vil således opfylde kriteriet $|z - 3 + 4i| \leq 5$

$$|z - 3 + 4i| = \sqrt{(a-3)^2 + (b+4)^2}$$
$$(a-3)^2 + (b+4)^2 \leq 25$$



Det skraverede område indeholder mængden af punkter z som opfylder kriteriet $|z - 3 + 4i| \leq 5$. Bemærk at cirklens center ligger i punktet (3,-4).

Solution to 4.16 Tilbage til opgave 4.16

$$(4+i)(4-i) = 4 \cdot 4 + 4i - 4i - i^2 = 16 + 1 = 17$$

Solution to 4.17 Tilbage til opgave 4.17

$$\begin{aligned}
A &= \cos(3\theta) + i \cdot \sin(3\theta) \\
&= (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^3 \\
&= (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \cdot \left(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 + 2 \cdot i \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)\right) \\
&= \cos(\theta)^3 - \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^2 + 2i \cdot \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \\
&\qquad + i \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)^2 - i \cdot \sin(\theta)^3 - 2\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^2 \\
&= \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^2 + 3i \cdot \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - i \cdot \sin(\theta)^3
\end{aligned}$$

Ved at sammenligne de reelle og de imaginære dele på begge sider fåes;

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(\theta)^3 - 3 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^2 \\
&= \cos(\theta)^3 - 3 \cdot \cos(\theta) \cdot \left(1 - \cos(\theta)^2\right) \\
&= 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Tilsvarende for $\sin(3\theta)$

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= 3 \cdot \cos(\theta)^2 \cdot \sin(\theta) - \sin(\theta)^3 \\
&= 3 \cdot \left(1 - \sin(\theta)^2\right) \cdot \sin(\theta) - \sin(\theta)^3 \\
&= 3 \cdot \sin(\theta) - 4\sin(\theta)^3
\end{aligned}$$

Solution to 4.18 Tilbage til opgave 4.18

$\overline{z+w}$ skrives op på kartesisk form $(a+bi)$ og der omskrives.

$$\overline{z+w} = (a_z + a_w) - (b_z i + b_w i) = a_z - b_z i + a_w - b_w i =$$
$$(a_z - b_z i) + (a_w - b_w i) = \overline{z} + \overline{w}$$

Solution to 4.19 Tilbage til opgave 4.19

Skriv $8i$ på polær form. Vi skal løse ligningen

$$\omega^3 = -8i$$
$$\left(r_\omega \cdot e^{i\theta_\omega}\right)^3 = 8 \cdot e^{i3\pi/2}$$
$$r_\omega^3 \cdot e^{i\theta_\omega 3} = 8 \cdot e^{i3\pi/2}$$
$$r_\omega = 2 \quad \text{og} \quad \theta_\omega = \pi/2 + n \cdot 2\pi/3 \quad n = 1,2,3$$

Dermed har vi løsningerne:

$$\omega_1 = 2 \cdot e^{i\pi/2} = 2i$$
$$\omega_2 = 2 \cdot e^{i7\pi/6}$$
$$\omega_3 = 2 \cdot e^{i11\pi/6}$$

Solution to 4.20 Tilbage til opgave 4.20

For at nå frem til den kompleks konjugerede ganger den imaginære del (b) med -1

$$z = -3 - 5$$
$$\overline{z} = -3 + 5$$

Solution to 4.21 Tilbage til opgave 4.21

Solution to 4.22 Tilbage til opgave 4.22

$z^5 + a^5 = 0$, når a er et positivt reelt tal.

$$z^5 + a^5 = 0 \rightarrow z^5 = -a^5$$
$$z = \sqrt[5]{-a^5} = \sqrt[5]{-1} \cdot \sqrt[5]{a^5} = -1^{\frac{1}{5}} \cdot a = -a$$

Solution to 5.1 Tilbage til opgave 5.1

Ved at differentiere ser vi at $f'(x)$ altid er skarpt større end nul.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2x-1) &= 2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Derfor er funktionen konstant voksende og dermed er den også en–til–en.

Erstat $f(x)$ med y og isoler x i udtrykket, så har vi den inverse funktion.

$$\begin{aligned} y &= 2x-1 \\ y+1 &= 2x \\ \frac{y+1}{2} &= x \end{aligned}$$

Nu byttes der om på x og y i udtrykket, og vi har den inverse funktion.

$$g(x) = \frac{x+1}{2}$$

Altså er funktionen

$$g(x) = \frac{x+1}{2}$$

invers til $f(x)$.

Solution to 5.2 Tilbage til opgave 5.2

Der benyttes potens regneregler til at forenkle udtrykket.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$2^{1/2} \cdot 8^{1/2} = (2 \cdot 8)^{1/2} = 16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$$

Solution to 5.3 Tilbage til opgave 5.3

Først benyttes $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ til at dele den yderste logaritme op i to. Herefter benyttes $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$ til at flytte potensen ud af logaritmen og til sidst benyttes $log_a(a) = 1$

$$\begin{aligned} \log_x\left(x \cdot \left[\log_y(y^2)\right]\right) &= \log_x(x) + \log_x\left(\log_y(y^2)\right) \\ &= \log_x(x) + \log_x\left(2 \cdot \log_y(y)\right) \\ &= 1 + \log_x(2 \cdot 1) \\ &= 1 + \log_x(2) \end{aligned}$$

Solution to 5.4 Tilbage til opgave 5.4

Vi viser først at $g(x)$ er en-en-tydig, ved at vise at den afledte altid er skarpt større end nul.

$$g'(x) = 3x^2 + 1 \quad g'(x) > 0$$

At bestemme $g^{-1}(1)$ er det samme som at løse denne ligning mht x.

$$g(x) = 1$$

Altså hvilken inputværdi skal $g(x)$ have for at returnere 1. Vi indsætter i udtrykket

$$1 = x^3 + x - 9$$
$$0 = x^3 + x - 10$$

Umiddelbart kan vi ikke finde en løsning ved at se på ovenstående. Vi kan dog prøve at gætte en løsning.

Første gæt $x = -3$:

$$g(-3) = (-3)^3 + (-3) - 9 = -27 - 3 - 9 = -39$$

Da vi ved at funktionen altid er voksende skal vi gætte på et højere tal.

Andet gæt $x = 2$:

$$g(2) = 2^3 + 2 - 9 = 8 + 2 - 9 = 1$$

Succes! Da $g(2) = 1$ er $g^{-1}(1) = 2$.

Solution to 5.5 Tilbage til opgave 5.5

$$f(x) = x^2 \cdot e^{x/2}$$

Først anvendes produktreglen

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \cdot e^{x/2} + x^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{x/2}\right)$$

Derefter anvendes kædereglen

$$\begin{aligned} &= 2x \cdot e^{x/2} + x^2 \cdot e^{x/2} \cdot \frac{d}{dx}(x/2) \\ &= 2x \cdot e^{x/2} + x^2 \cdot e^{x/2} \cdot 1/2 \end{aligned}$$

Til sidst flyttes fælles faktorer ud foran en parentes

$$= x \cdot e^{x/2} \cdot (2 + x/2)$$

Solution to 5.6 Tilbage til opgave 5.6

Benytter først $a^{b \cdot c} = \left(a^b\right)^c$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 4^{x/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(4^{1/2}\right)^x$$

Herefter benyttes $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ og udtrykket reduceres

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(4^{1/2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 2^x = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^x = 1^x = 1$$

Solution to 5.7 Tilbage til opgave 5.7

Først undersøges den afledte af funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{d}{dx}(x+1)^{-1} \\ &= -1(x+1)^{-2} \\ &= \frac{-1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Det ses at den afledte altid er negativ fraregnet i $x = -1$ huor funktionen ikke er defineret). Derfor er funktionen en-til-en og den må have en invers.

Den inverse funktion findes ved at isolere x i forskriften

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \\ (x+1) \cdot f(x) &= 1 \Leftrightarrow \\ x + 1 &= \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1}{f(x)} - 1 \end{aligned}$$

Vi kan nu opskrive den inverse funktion $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$$

Definitions mængden for $f(x)$ og værdimængden for $f-1/(x)$ er alle reelle tal fraregnet -1.

Definitions mængden for $f^{-1}(x)$ og værdimængden for $f(x)$ er alle reelle tal fraregnet 0.

Solution to 5.8 Tilbage til opgave 5.8

Matricerne kan ganges sammen

Først udregnes produktet inde i parentesen.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\cdot 6 - 8\cdot 10 & -3\cdot 2 + 8\cdot 5 & -3\cdot 2 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62 & 34 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Herefter beregnes $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -62 & 34 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -62 & 34 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -62\cdot 5 & 34\cdot 5 & 2\cdot 5 \\ -62 & 34 & 1 \\ -62\cdot 2 & 34\cdot 2 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -310 & 170 & 10 \\ -62 & 34 & 1 \\ -124 & 68 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 6 + 0\cdot 10 + 8\cdot(-10) & 3\cdot(-2) + 0\cdot(-3) + 8\cdot 5 & 3\cdot(-2) + 0\cdot 1 + 8\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -62 & 34 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -62 & 34 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5\cdot(-62) & 5\cdot 34 & 5\cdot 2 \\ 1\cdot(-62) & 1\cdot 34 & 1\cdot 2 \\ 2\cdot(-62) & 2\cdot 34 & 2\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -310 & 170 & 10 \\ -62 & 34 & 2 \\ -124 & 68 & 4 \end{pmatrix}$$

Solution to 5.9 Tilbage til opgave 5.9

Først vises det at $f(x)$ har en invers:

Tilgang vis at $f'(x) > 0$ for alle x værdier (fraregnet et enkelt punkt)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 \cdot \left(x^2+1\right)^{-1}\right)$$

Produktreglen benyttes

$$= 12x^2 \cdot \left(x^2+1\right)^{-1} + 4x^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\left(x^2+1\right)^{-1}\right)$$

Kædereglen benyttes

$$\begin{aligned}
&= 12x^2 \cdot \left(x^2+1\right)^{-1} + 4x^3 \cdot - \left(x^2+1\right)^{-2} \cdot 2x \\
&= \frac{12x^2}{x^2+1} + \frac{-4x^3}{\left(x^2+1\right)^2} \cdot 2x \\
&= \frac{12x^2}{x^2+1} - \frac{8x^4}{\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

Venstre brøk forlænges med x^2+1 for at få fælles nævner

$$\begin{aligned}
&= \frac{12x^4 + 12x^2 - 8x^4}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{4x^4 + 12x^2}{\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

Dette udtryk er nul ved $x = 0$ og ellers er det positivt. $f(x)$ er derfor en voksende funktioner og har derfor en invers.

Herefter bestemmes $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

For funktioner med en invers gælder følgende:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Man kan sige at funktionen og dens inverse ophæver hinanden.

Herefter kan dette udtryk differentieres med kædereglen.

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

Dvs. at vi skal bestemme denne værdi

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Først bestemmes $f^{-1}(2)$ ved at løse ligningen $2 = \frac{4x^3}{x^2+1}$. Der er ingen standardmetode til at løse ligningen, men det er let at eftervise at $x = 1$ er en løsning. Vi har altså at $f^{-1}(2) = 1$.

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(2) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{f'(1)} \\
&= \left.\frac{\left(x^2+1\right)^2}{4x^4+12x^2}\right|_{x=1} \\
&= \frac{4}{4+12} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Dvs. at hældningen af den inverse funktion er 1/4.

Solution to 5.10 Tilbage til opgave 5.10

Først benyttes $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

$$2^{\log_4(8)} = 2^{\log_4(4\cdot 2)} = 2^{\log_4(4)+\log_4(2)} = 2^{1+\log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)}$$

Herefter benyttes $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

$$2^{1+\log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)} = 2^{1+\frac{1}{2}\cdot 1} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

Solution to 5.11 Tilbage til opgave 5.11

Først ændres basen på andet led, således baserne er ens

$$2\log_3(x) + \log_9(x) = 10 \Leftrightarrow 2\log_3(x) + \frac{\log_3(x)}{\log_3(9)} = 10$$

Herefter benyttes $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

$$\begin{aligned}
2\log_3(x) + \frac{\log_3(x)}{\log_3(9)} = 10 &\Leftrightarrow 2\log_3(x) + \frac{\log_3(x)}{2\cdot\log_3(3)} = 10 \\
&\Leftrightarrow 2\log_3(x) + \frac{\log_3(x)}{2} = 10
\end{aligned}$$

Venstre led laves om til en brøk og forlænges med $\frac{1}{2}$ for at få samme nævner

$$\Leftrightarrow \frac{4\log_3(x)}{2} + \frac{\log_3(x)}{2} = 10$$

$log_3(x)$ sættes uden for parentes og de to brøker lægges sammen

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot \log_3(x) = 10$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x) = 4$$
$$\Leftrightarrow 3^{\log_3(x)} = 3^4$$
$$\Leftrightarrow x = 81$$

Solution to 5.12 Tilbage til opgave 5.12

Udtrykket opdeles i to led der kan differentieres hvert for sig

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{e^x}{2}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)$$
$$= \frac{e^x}{2} + \frac{-e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Solution to 5.13 Tilbage til opgave 5.13

Ligningssystemet opskrives på matriceform og Gauss-elimination benyttes

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 7 & -4 & -46 \\ 5 & 4 & 8 & 1 & 7 \\ -1 & 6 & 0 & 2 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-R_1 \to R_2]{R_3\cdot(-1) \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 7 & -4 & -46 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 53 \\ 1 & -6 & 0 & -2 & -13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \to R_1 \\ R_1 \to R_3 \\ R_2 - 5R_1 \to R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 0 & -2 & -13 \\ 0 & 31 & 1 & 15 & 118 \\ 0 & 3 & 7 & -4 & -46 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 - 2R_3 \to R_1 \\ R_2 - 10R_3 \to R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 14 & -10 & -105 \\ 0 & 1 & -69 & 65 & 578 \\ 0 & 3 & 7 & -4 & -46 \end{array}\right]$$

Der ses at rangen af matricen er mindre end antallet af ukendte variabler. Derfor er der uendeligt mange løsninger.

Solution to 5.14 Tilbage til opgave 5.14

Matricerne ganges sammen

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6\cdot 9 - 2\cdot 4 - 2(-4) & 6\cdot 4 - 2\cdot 7 - 2\cdot 0 & 6(-4) - 2\cdot 0 - 2\cdot 11 \\ 10\cdot 9 - 3\cdot 4 + 1(-4) & 10\cdot 4 - 3\cdot 7 + 1\cdot 0 & 10(-4) - 3\cdot 0 + 1\cdot 11 \\ -10\cdot 9 + 5\cdot 4 + 1(-4) & -10\cdot 4 + 5\cdot 7 + 1\cdot 0 & -10(-4) + 5\cdot 0 + 1\cdot 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 54 & 10 & -46 \\ 74 & 19 & -29 \\ -74 & -5 & 51 \end{bmatrix}$$

Solution to 5.15 Tilbage til opgave 5.15

Udtrykket omskrives til 2 produkter

$$\frac{dy}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}\left(x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

Produktreglen benyttes på venstre led

$$\frac{dy}{dx}(y) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} - x = 2x\ln(x) + x - x = 2x\ln(x)$$

Solution to 5.16 Tilbage til opgave 5.16

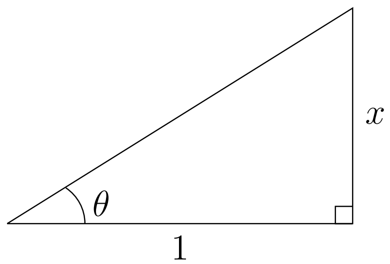
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(2^{\left(x^2-3x+8\right)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\left(e^{\ln(2)}\right)^{\left(x^2-3x+8\right)}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(2)\left(x^2-3x+8\right)}\right) \end{aligned}$$

Kædereglen benyttes

$$\begin{aligned} &= e^{\ln(2)\left(x^2-3x+8\right)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\ln(2)\cdot\left(x^2-3x+8\right)\right) \\ &= 2^{x^2-3x+8}\cdot\ln(2)\cdot(2x-3) \end{aligned}$$

Solution to 6.1 Tilbage til opgave 6.1

Det lugter af en trekant. Vi tegner en trekant hvor $\arctan(x)$ kan findes.



Længden af hypotenusen kan vha Pythagoras bestemmes til $\sqrt{1^2 + x^2}$. Cosinus er givet ved forholdet mellem den hosliggende side og hypotenusen, altså

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Og da $\theta = \arctan\,(x)$ har vi

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Solution to 6.2 Tilbage til opgave 6.2

Først anvendes kædereglen.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2-4x+1}{9}}} \cdot \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Brøken forlænges med tre

$$= \frac{3}{3\sqrt{1-\frac{4x^2-4x+1}{9}}} \cdot \frac{2}{3}$$

Tretallet tages ind i kvadratroden. Desuden forkortes der med 3 fra tælleren i den første brøk og nævneren i den anden brøk

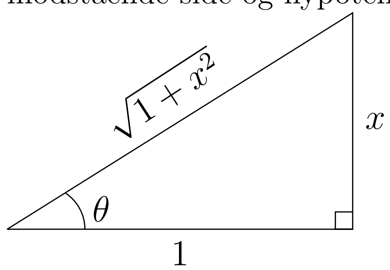
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{3^2 \cdot \left(1 - \frac{4x^2-4x+1}{9}\right)}} \cdot \frac{2}{1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{9 \cdot \left(1 - \frac{4x^2-4x+1}{9}\right)}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{9 - 4x^2 + 4x - 1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 8}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4 \cdot (-x^2 + x + 2)}}
\end{aligned}
$$

En faktor 4 hives ud af kvadratroden

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{2\sqrt{-x^2 + x + 2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}
\end{aligned}
$$

Solution to 6.3 Tilbage til opgave 6.3

Først tegnes en retvinklet trekant, hvor $\arctan(x) = \theta$ indgår. Trekanten har følgende side længder 1 (hos liggende side), x (modstående side) og $\sqrt{1+x^2}$ (hypotenusen). Derefter kan sinus udtrykkes ved forholdet mellem den modstående side og hypotenusen



$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Solution to 6.4 Tilbage til opgave 6.4

Først vises at $\tan(0) - 0$ er lig 0

$$
\begin{aligned}
\tan(x) - x &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - x \\
\tan(0) - 0 &= \frac{\sin(0)}{\cos(0)} - 0 \\
&= \frac{0}{1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Herefter vises at $\frac{d}{dx}(\tan(x) - x) > 0$ for alle x i intervallet $0 < x < \pi/2$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan(x) - x) &= \frac{d}{dx}(\tan(x)) - 1 \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) - 1
\end{aligned}
$$

Kvotientreglen kan så benyttes

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos(x)^2} - 1 \\
&= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x)}{\cos(x)^2} + \frac{\sin(x) \cdot \sin(x)}{\cos(x)^2} - 1 \\
&= 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} - 1 \\
&= \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}
\end{aligned}
$$

Da både $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er større end nul i intervallet $0 < x < \pi/2$ er $\tan(x)$ større end nul i dette interval.

Solution to 6.5 Tilbage til opgave 6.5

Kædereglen samt $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ benyttes til at differentierer udtrykket.

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\arctan(a \cdot x + b) \\
&= \frac{1}{1 + (a \cdot x + b)^2} \cdot a \\
&= \frac{a}{1 + (a \cdot x + b)^2}
\end{aligned}
$$

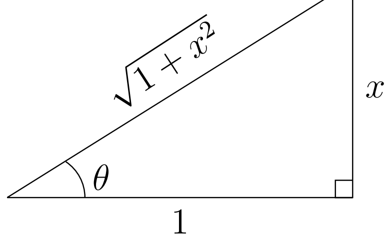
Solution to 6.6 Tilbage til opgave 6.6

Produktreglen samt $f(x) = x \arcsin(x)$ benyttes til at differentierer funktionen

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x \arcsin(x)\right) \\
&= x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \cdot \arcsin(x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin(x)
\end{aligned}
$$

Solution to 6.7 Tilbage til opgave 6.7

Der startes med at tegne en trekant hvor den hoslæggende er 1 den modstående er x og hypotenusen er $\sqrt{1+x^2}$

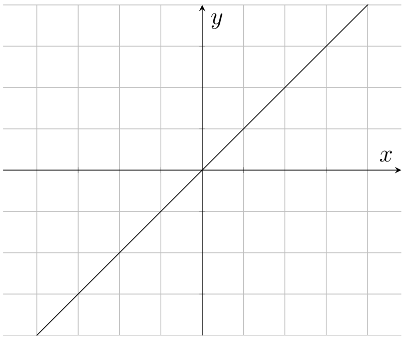


$\arctan(x)$ vil således være lig med θ på tegningen og $\tan(\theta)$ kan så omskrives.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \tan(\arctan(x)) = \tan(\theta) \\
&= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\
&= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{1} \\
&= \frac{x \cdot \sqrt{1+x^2}}{1 \cdot \sqrt{1+x^2}} \\
&= x
\end{aligned}
$$

her efter kan g(x) differentieres

$$
g'(x) = \frac{dx}{dx} = 1
$$


y
x

Todo list