

Рассмотрим передаточную функцию: $K(x) \frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)} = \frac{1}{1+(\tau_{p1}+\tau_{p2})x+\tau_{p1}\tau_{p2}x^2}$

Введем обозначения: $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$ $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$

Рассмотрим первое условие теоремы:

$$Re(\kappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^* \tau [K(ix) + ix]) \geq \delta$$

Подставим, рассматриваемую передаточную функцию в условие теоремы:

$$K(ix) = \frac{1}{1+ax+bx^2} = \frac{1-bx^2-iax}{(1-bx^2)^2+a^2x^2}$$

$$K(ix)^* K(ix) = \frac{1}{(1-bx^2)^2+a^2x^2}$$

$$\frac{\tau b^2 x^6 + (\tau a^2 - 2\tau b)x^4 + (\kappa b + \tau)x^2 + (\kappa - \varepsilon - \tau)}{(1-bx^2)^2+a^2x^2} \geq \delta$$

В результате преобразований условие теоремы принимает следующий вид:

$$\tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (\kappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\kappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0$$

Где $t = x^2$

Второе условие теоремы имеет вид:

$$4\varepsilon\delta > \nu^2 \kappa^2$$

$$\frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2} > \nu^2$$

Хотим найти $\max \nu$. Для этого будем искать максимум $\frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2}$

1. Очевидно, что $\kappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$

$$\kappa \geq \varepsilon + \tau + \delta$$

$$\kappa^2 \geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta$$

$$2 - \left(\frac{2\varepsilon^2}{\kappa^2} + \frac{2\delta^2}{\kappa^2} + \frac{2\tau^2}{\kappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\kappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\kappa^2} \right) \geq \frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2}$$

$$2 > \frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2}$$

2. Так как $\kappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, то $\varepsilon \leq \kappa - \tau - \delta$. Для максимизации функции $\frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2}$ возьмем $\varepsilon = \kappa - \tau - \delta$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (\kappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \geq 0$$

И будем искать максимум следующей функции: $\frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2} = \frac{4(\kappa-\tau-\delta)\delta}{\kappa^2} = 4\frac{\delta}{\kappa} - 4\frac{\delta}{\kappa}\frac{\tau}{\kappa} -$

$$4\frac{\delta^2}{\kappa^2} = 4z - 4z_1z - 4z^2,$$

где $z_1 = \frac{\tau}{\kappa}$, $z = \frac{\delta}{\kappa}$

Опустим константу, так как она не влияет на максимизацию функции. Будем рассматривать $f(z) = z - z_1z - z^2$, как функцию от z с параметром z_1 .

Очевидно, что максимум этой функции достигается при $z_{max} = \frac{1-z_1}{2}$ и $f(z_{max}) = \frac{(1-z_1)^2}{4}$

Для того, что бы выполнялось первое условие теоремы возможны 2 случая: отрицательный дискриминант или оба корня меньше 0.

Рассмотрим дискриминант:

$$D = (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)^2 - 4\tau b^2(\kappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)$$

Разделим на $\kappa^2 > 0$

$$\frac{D}{\varkappa^2} = \left(\frac{\tau}{\varkappa}a^2 - 2\frac{\tau}{\varkappa}b - \frac{\delta}{\varkappa}b^2\right)^2 - 4\frac{\tau}{\varkappa}b^2\left(b + \frac{\tau}{\varkappa} - \frac{\delta}{\varkappa}a^2 + 2\frac{\delta}{\varkappa}b\right) = (z_1a^2 - 2z_1b - zb^2)^2 - 4z_1b^2(b + z_1 - za^2 + 2zb) = (z_1a^2 - 2z_1b - \frac{1-z_1}{2}b^2)^2 - 4z_1b^2(b + z_1 - \frac{1-z_1}{2}a^2 + 1 - z_1b) = z_1^2(-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2) - z_1(\frac{b^4}{2} + 2b^3 - a^2b^2 + 4b^2) + \frac{b^4}{4}$$

Множество допустимых значений z_1 состоит из тех z_1 для которых: $D < 0$ или $D \geq 0$ и $x_2 < 0$, где x_2 наибольший корень.
Рассмотрим $D_1 = (\frac{b^4}{2} + 2b^3 - a^2b^2 + 4b^2)^2 - b^4(-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2)$.
Реализуется случаи:

$$2.1 \ D_1 < 0 \text{ и } (-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2) > 0$$

Пусть $\varkappa = 1$, тогда $D \geq 0$, значит $M = \max_{\frac{(\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2) + \sqrt{D(z_1)}}{2\tau b^2} \leq 0} |1 - z_1|$

$$f_{max} = \frac{(1-M)^2}{4}$$

$$2.2 \ D_1 \geq 0 \text{ и } (-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2) > 0$$

Пусть $\varkappa = 1$, тогда корни уравнения $D = 0$ будут $d_{1,2} = \frac{(\frac{b^4}{2} + 2b^3 - a^2b^2 + 4b^2) \pm \sqrt{D_1}}{2(-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2)}$

При $z_1 \in (d_1, d_2)$ $D < 0$, значит $M_1 = \max_{z_1 \in (d_1, d_2)} |1 - z_1|$

При $z_1 \in (-\inf, d_1] \cup [d_2, +\inf)$ $D \geq 0$, значит $M_2 = \max_{\frac{(\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2) + \sqrt{D(z_1)}}{2\tau b^2} \leq 0} |1 - z_1|$

$$M = \max\{M_1, M_2\}$$

$$f_{max} = \frac{(1-M)^2}{4}$$

