Санкт-Петербургский государственный университет

Отделение прикладной математики и информатики
Кафедра прикладной кибернетики

Миронов Алексей Владиславович

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. т.н., профессор Юлдашев Р. В.

Санкт-Петербург
2019

Содержание

1 Введение

Рассмотрим систему:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + b\upsilon_e(\theta_e) \\
\dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + h\upsilon_e(\theta_e))
\end{aligned} \tag{1}
$$

Найдем стационарные точки системы (1)

$$
\begin{aligned}
x &= -A^{-1} b\upsilon_e(\theta_e) \\
\upsilon_e(\theta_e) &= \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Возьмем $\theta_e = \theta_s$, для которых выполняется (2). Сделаем замену:

$$
\begin{aligned}
z &= x + A^{-1} b\upsilon_e(\theta_s) \\
\sigma &= \theta_e
\end{aligned} \tag{3}
$$

После замены система (1) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + b(\upsilon_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}) \\
\dot{\sigma} &= -K_{vco}(c^* z + h(\upsilon_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}))
\end{aligned} \tag{4}
$$

2 Теорема

Рассмотрим систему:

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + Bf(\sigma) \\
\dot{\sigma} &= C^* z + Rf(\sigma)
\end{aligned} \tag{5}
$$

Here A, B, C, and R are constant matrices of dimensions n × n, n × m, n × m, and n × n, respectively, whereas the components ϕ_k, $1 \leq k \leq m$, of the vector-valued function $f(\sigma)$ are scalar differen-tiable functions $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$, where ψ_k is the k-th component of the vector ψ.

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function $\chi(p)$ can be written in the form (5) with m = 1 by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions $\phi_k(\sigma_k)$ satisfy the followingconditions: $\phi_k(\sigma_k) \equiv 0$

$$
\begin{aligned}
\mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}, \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \\
\varphi_k(\sigma_k + \Delta_k) = \varphi_k(\sigma_k), \forall \sigma_k \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Here the Δ_k are positive numbers. Sometimes, in the study of the specific pendulum-like systems, only one of the inequalities

$$
\mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} or \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k} \tag{7}
$$

is known, so we will assume the number mu_{1k} to be either finite negative or $-\inf$, and the number μ_{2k} to be either finite positive or inf. When $\mu_{1k} = -\inf$ or $\mu_{2k} = \inf$, we will use the notation $\mu_{1k}^{-1} = 0$ or $\mu_{2k}^{-1} = 0$, respectively.

Let us introduce the numbers:

$$
\nu_k = \int_0^{\Delta_k} \varphi_k(\sigma) d\sigma (\int_0^{\Delta_k} \mid \varphi_k(\sigma) \mid d\sigma)^{-1} \tag{8}
$$

the transfer matrix of system (5) from its “input” f to its “output” $(-d\sigma/dt)$

$$K(p) = C * (A - pI)^{-1}B - R \tag{9}$$

and the diagonal m $\times$ m matrices:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = diag[\mu_{11}, ..., \mu_{1m}], \mu_2 = diag[\mu_{21}, ..., \mu_{2m}], \\ &\nu = diag[\nu_{,1} ..., \nu_m] \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1. Suppose that the stationary set Λ of system (5) consists of isolated points, the pair (A, B) is controllable, the matrix A is Hurwitz, and there exist diagonal m $\times$ m matrices $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, and $\varkappa$ such that the following inequalities are valid:

$$\begin{aligned} &Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^*\varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1}ix]^*\tau[K(ix) + \mu_2^{-1}ix]) \geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ &4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Then system (5) is gradient-like.

Очевидно, что систему (1) можно привести к системе (5) положив:

$$\begin{aligned} &A = A \\ &B = b \\ &C = -K_{vco}c^* \\ &R = -K_{vco}h \\ &f(\sigma) = \upsilon_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} \end{aligned} \tag{12}$$

Положим далее:

$$\begin{aligned} &\upsilon_e(\sigma) = sin(\sigma) \\ &\frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} = \gamma \end{aligned} \tag{13}$$

3 Теорема Декарта

Теорема 2. Если у полинома записанного в стандартной форме все коэффициенты действительные и все его корни также заведомо действительные, то число его положительных корней, если учитывать их кратности, равно числу перемен знаков в ряде его коэффициентов. Если же он имеет и комплексные корни, то это число равно или на четное число меньше числа знакоперемен.

4 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} = \frac{1}{1 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})x + \tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \tag{14}$$

Введем обозначения: $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$, $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$
Рассмотрим первое условие теоремы 1

$$Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^*\varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^*\tau[K(ix) + ix]) \geq \delta \tag{15}$$

Подставим (14) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}&\tau b^2t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0\\ &t \geq 0\end{aligned} \tag{16}$$

Из второго условие теоремы 1 получаем:

$$\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \tag{17}$$

Для оценки полосы захвата системы (1) будем искать максимум ν.

4.1 Оценка максимума ν константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (16) нужно потребовать $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, тогда

$$\begin{aligned}&\varkappa \geq \varepsilon + \tau + \delta\\ &\varkappa^2 \geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta\\ &2 - (\frac{2\varepsilon^2}{\varkappa^2} + \frac{2\delta^2}{\varkappa^2} + \frac{2\tau^2}{\varkappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\varkappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\varkappa^2}) \geq \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}\\ &2 > \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2\end{aligned} \tag{18}$$

4.2 Точная оценка максимума ν

2. Так как $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, то $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$. Для максимизации функции $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ возьмем $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$
Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned}&\tau b^2t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \geq 0\\ &t > 0\end{aligned} \tag{19}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}&A = \tau b^2\\ &B = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2\\ &C = -\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b\end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что для того, что бы выполнялось (19) необходимо потребовать $A \geq 0$ и $C \geq 0$, тогда $B \geq 0$. Тогда по теореме Декарта уравнение $At^2 + Bt + C = 0$ не имеет положительных корней, т.е. выполняется (19). Не умаляя общности, можем положить $\varkappa = 1$ и будем искать максимум следующей функции:

$$f(\delta) = 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \tag{21}$$

Получили задачу на условный экстремум, т.е найти максимум (21), при условии $C \geq 0$. Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Вычислим градиент (21):

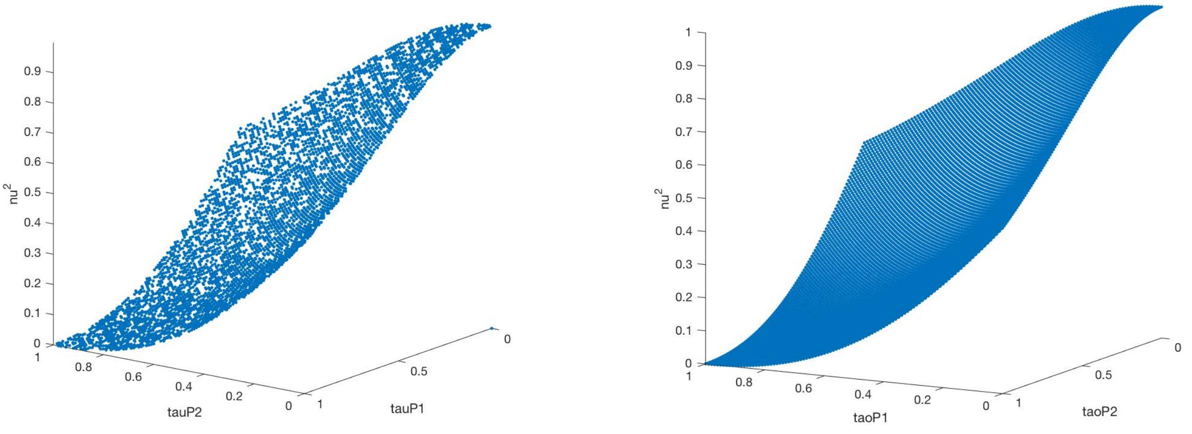
$$(4 - 4\tau - 8\delta, 4\delta) \tag{22}$$

Получаем точку понижения ранга: $\delta = 0, \tau = 1$. Это противоречит условию теоремы $\delta > 0$. Рассмотрим $C = 0$, выразим τ и подставим в (21):

$$f(\delta) = 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \tag{23}$$

Максимум (23) достигается при $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$ и равен

$$\frac{(b-1)^2}{a^2-2b+1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2}-1)^2}{\tau_{p1}^2+\tau_{p2}^2+1} > \nu^2 \tag{24}$$



(a) Численное приближение в MATLAB (b) Вычисленный по (24)

Рис. 1: График зависимости ν^2 от τ_{p1}, τ_{p2}

5 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2} \tag{25}$$

Предположим, что нелинейность $f(\sigma) = \phi(\sigma)$ имеет изолированные нули и удовлетворяет ???????. Неравенство $\tau_{z1} \neq \tau_{p1}$ гарантирует, что функция $\chi(p) = x^{-1}K(x)$ не приводима. Тогда по теореме ???? пара (A, B) управляема. Заметим

$$\det(xI - A) = x^2 + 2\tau_{z1}^{-1}x + \tau_{z1}^{-2} \tag{26}$$

матрица A - матрица Гурвица. Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$ так, что бы максимизировать ν. Для этого подставим (25) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\tau_{p1}^4\tau t^3 + (-\tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{z1}^4\tau + 2\tau_{p1}^2\tau - \tau_{p1}^4\delta + \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa)t^2 + \\
&+ (\tau - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\tau + 4\tau_{z1}b\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\
&t = x^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{27}$$

5.1 $\tau = 0$

Положим в (27) $\tau = 0$, тогда первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta)t^2 + (4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta)t + (\varkappa - \varepsilon - \delta) \geq 0 \\
&t = x^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{28}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}
&A = \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta\\
&B = 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta\\
&C = \varkappa - \varepsilon - \delta
\end{aligned} \tag{29}$$

Для того, что бы выполнялось (28) нужно потребовать: $A \geq 0$ и $C \geq 0$, тогда при $B \geq 0$, по теореме Декарта уравнение не имеет положительных корней, т.е. выполняется (28). Не умаляя общности можем считать $\varkappa = 1$. Получили задачу нахождения условного экстремума при условии:

$$\begin{aligned}
&\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta \geq 0\\
&4\tau_{z1}\tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2\delta \geq 0\\
&1 - \varepsilon - \delta \geq 0
\end{aligned} \tag{30}$$

Максимум может достигаться на границе, или в точках понижения ранга. Представим ε как $\varepsilon(\delta)$ и рассмотрим функцию $\varepsilon\delta$ на границе области (30)

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^4}{\tau_{z1}^4}\delta = \varepsilon\\
&2\frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}} - \frac{1}{2} - \frac{\tau_{p1}^2}{2\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2}\delta = \varepsilon\\
&\varepsilon = 1 - \delta
\end{aligned} \tag{31}$$

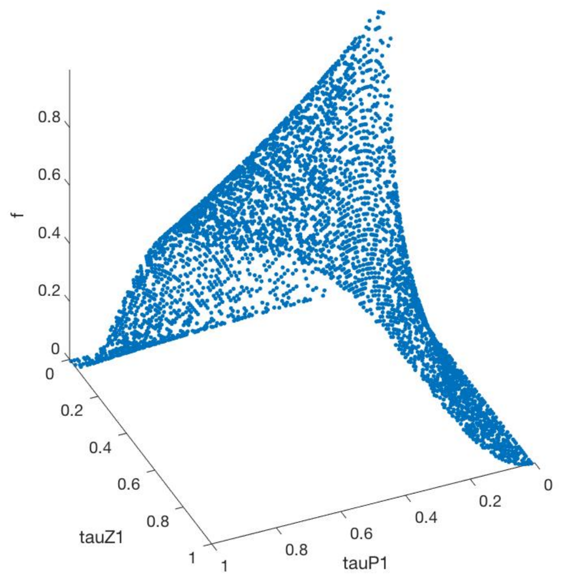
Для этого найдем пересечения прямых (31):

$$\begin{aligned}
&\delta = \frac{1}{1+z^2}, \varepsilon = \frac{z^2}{1+z^2}\\
&\delta = \frac{1-q}{1-z^2}, \varepsilon = \frac{q-z^2}{1-z^2}\\
&\delta = \frac{z^2-q}{z^4-z^2}, \varepsilon = z^2 - \frac{z^4(z^2-q)}{z^4-z^2}\\
&z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}\\
&q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2
\end{aligned} \tag{32}$$

Оценки максимума на границе (31):

$$\begin{aligned}
&\delta = \frac{1}{2}, \varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon\delta = \frac{1}{4}\\
&\delta = \frac{1}{2z^2}, \varepsilon = \frac{z^2}{2}, \varepsilon\delta = \frac{1}{4}\\
&\delta = \frac{q}{2z^2}, \varepsilon = \frac{q}{2}, \varepsilon\delta = \frac{q^2}{4z^2}
\end{aligned} \tag{33}$$

Максимум функции $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ представлен на графике.



При $B < 0$ по теореме Декарта уравнение может иметь 2 корня. В этой ситуации потребуем отрицательность дискриминанта:

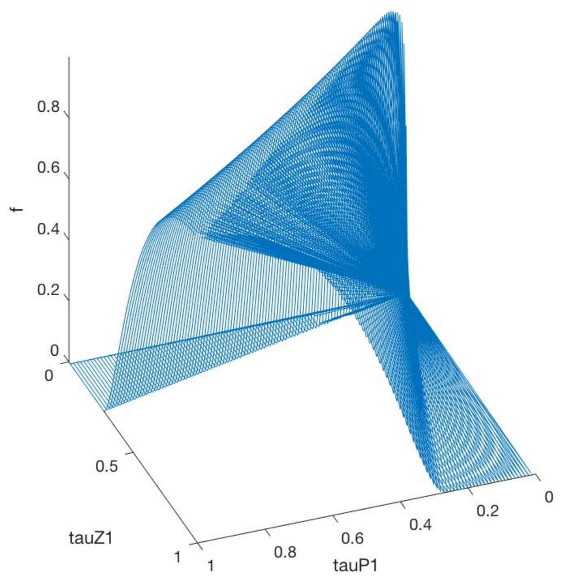
$$\begin{aligned}&-4\tau_{z1}^4\varepsilon\delta + 8\tau_{z1}^4\varepsilon + \tau_{z1}^4 - 16\tau_{z1}^3\tau_{p1}\varepsilon - 8\tau_{z1}^3\tau_{p1} + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varepsilon\delta + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varepsilon + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\delta + \\ &+ 14\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2 - 16\tau_{z1}\tau_{p1}^3\delta - 8\tau_{z1}\tau_{p1}^3 - 4\tau_{p1}^4\varepsilon\delta + 8\tau_{p1}^4\delta + \tau_{p1}^4 \leq 0\end{aligned} \tag{34}$$

$$4(\tau_{z1}^2 - \tau_{p1}^2)^2(2\varepsilon\tau_{z1}^2 - \varepsilon\delta + 2\delta\tau_{p1}^2) + (\tau_{z1} - \tau_{p1})^2(\tau_{z1}^2 - 6\tau_{z1}\tau_{p1} + \tau_{p1}^2) \leq 0 \tag{35}$$

$$4(\tau_{z1} + \tau_{p1})^2(2\varepsilon\tau_{z1}^2 - \varepsilon\delta + 2\delta\tau_{p1}^2) + (\tau_{z1}^2 - 6\tau_{z1}\tau_{p1} + \tau_{p1}^2) \leq 0 \tag{36}$$

$$a\varepsilon + b\delta \geq \varepsilon\delta \tag{37}$$

Если $a > 0, c > 0$, тогда при $b < 0$, уравнение может иметь 2 положительных корня. Дополнительно потребуем, что бы дискримининт уравнения $at^2 + bt + c = 0$ был не положительным. В этом случае получаем нелинейную оптимизационную задачу с нелинейными ограничениями, максимум функции $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ представлен на графике.



5.2 $\tau > 0$

Предположим в (27) $\tau > 0$ и разделим на $\tau_{p1}^4\tau$. Не умаляя общности, можем считать $\tau = 1$, тогда (27) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&t^3 + at^2 + bt + c \geq 0 \\
&A = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(-\tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{z1}^4 + 2\tau_{p1}^2 - \tau_{p1}^4\delta + \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa) \\
&B = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(1 - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2 + 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta) \\
&C = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(\varkappa - \varepsilon - 1 - \delta) \\
&t = x^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{38}$$

Заметим, что по теореме Декарта: $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$

6 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)(1 + \tau_{z2}x)}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} \tag{39}$$

Представим (38) в виде:

$$\begin{aligned}
&K(x) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1 x + \alpha_2\beta_2 x^2}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2} \\
&\alpha_1 = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1} + \tau_{z2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}}
\end{aligned} \tag{40}$$

Предположим:

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \tag{41}$$

Предположим, что нелинейность $f(\sigma) = \phi(\sigma)$ имеет изолированные нули и удовлетворяет ???????. Неравенство (40) гарантирует, что функция $\chi(p) = x^{-1}K(x)$ не приводима. Тогда по теореме ???? пара (A, B) управляема. Заметим

$$\det(xI - A) = x^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}x + \alpha_2^{-1} \tag{42}$$

матрица A - матрица Гурвица. Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$ так, что бы максимизировать ν. Для этого подставим (39) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2^2\tau t^3 + (\alpha_1^2\tau - 2\alpha_2\tau - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2\varepsilon - \alpha_2^2\beta_2^2\tau + \alpha_2^2\beta_2\varkappa)t^2 + \\
&+ (\tau - \alpha_2\varkappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2\varepsilon - \alpha_1^2\beta_1^2\tau - \alpha_2\beta_2\varkappa + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon + 2\alpha_2\beta_2\tau + \alpha_1^2\beta_1\varkappa)t + \\
&+ \varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0
\end{aligned} \tag{43}$$

Положим $\tau = 0$:

$$\begin{aligned}
&(-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \varkappa\alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \varkappa\alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2\varkappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2\varkappa + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + \\
&+ \varkappa - \varepsilon - \delta \geq 0
\end{aligned} \tag{44}$$

Не умаляя общности можем считать $\varkappa = 1$:

$$\begin{aligned}&(-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t+\\&+1 - \varepsilon - \delta \geq 0\end{aligned} \tag{45}$$

Заметим, что $\varepsilon \leq 1 - \delta$. Для максимизации $\varepsilon\delta$ положим $\varepsilon = 1 - \delta$.

$$(\alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta)t + \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0 \tag{46}$$

Нужно потребовать что бы выполнялось следущее условие

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0 \tag{47}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2(\beta_1 - \delta - \beta_1^2 + \beta_1^2\delta) - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0\\&\alpha_1^2 \geq \frac{\alpha_2(1-\beta_2) - 2\alpha_2\delta(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1) - \delta + \beta_1^2\delta} > \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1) - \delta + \beta_1^2\delta} \xrightarrow[\delta\to 0]{} \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1)}\end{aligned} \tag{48}$$

Получили

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1)} \tag{49}$$

Так как максимальное значение достигается на границе положим

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta = 0 \tag{50}$$

Тогда

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)}{\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)} \tag{51}$$

Получили, что

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1) - \alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)]^2} \tag{52}$$