Санкт-Петербургский государственный университет

Отделение прикладной математики и информатики
Кафедра прикладной кибернетики

Миронов Алексей Владиславович

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. т.н., профессор Юлдашев Р. В.

Санкт-Петербург
2019

Содержание

1 Введение

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\upsilon_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + h\upsilon_e(\theta_e)) \end{aligned} \tag{1}$$

Найдем стационарные точки системы (1)

$$\begin{aligned} x &= -A^{-1} b\upsilon_e(\theta_e) \\ \upsilon_e(\theta_e) &= \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)} \end{aligned} \tag{2}$$

Возьмем $\theta_e = \theta_s$, для которых выполняется (2). Сделаем замену:

$$\begin{aligned} z &= x + A^{-1} b\upsilon_e(\theta_s) \\ \sigma &= \theta_e \end{aligned} \tag{3}$$

После замены система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b(\upsilon_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)}) \\ \dot{\sigma} &= -K_{vco}(c^* z + h(\upsilon_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)})) \end{aligned} \tag{4}$$

2 Теорема

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= C^* z + Rf(\sigma) \end{aligned} \tag{5}$$

Here A, B, C, and R are constant matrices of dimensions n × n, n × m, n × m, and n × n, respectively, whereas the components ϕ_k, $1 \leq k \leq m$, of the vector-valued function $f(\sigma)$ are scalar differen-tiable functions $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$, where ψ_k is the k-th component of the vector ψ.

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function $\chi(p)$ can be written in the form (5) with m = 1 by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions $\phi_k(\sigma_k)$ satisfy the followingconditions: $\phi_k(\sigma_k) \equiv 0$

$$\begin{aligned} &\mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}, \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \\ &\varphi_k(\sigma_k + \Delta_k) = \varphi_k(\sigma_k), \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{6}$$

Here the Δ_k are positive numbers. Sometimes, in the study of the specific pendulum-like systems, only one of the inequalities

$$\mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} or \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k} \tag{7}$$

is known, so we will assume the number mu_{1k} to be either finite negative or $-\inf$, and the number μ_{2k} to be either finite positive or inf. When $\mu_{1k} = -\inf$ or $\mu_{2k} = \inf$, we will use the notation $\mu_{1k}^{-1} = 0$ or $\mu_{2k}^{-1} = 0$, respectively.

Let us introduce the numbers:

$$\nu_k = \int_0^{\Delta_k} \varphi_k(\sigma) d\sigma (\int_0^{\Delta_k} \mid \varphi_k(\sigma) \mid d\sigma)^{-1} \tag{8}$$

the transfer matrix of system (5) from its "input" f to its "output" $(-d\sigma/dt)$

$$K(p) = C * (A - pI)^{-1}B - R \tag{9}$$

and the diagonal m $\times$ m matrices:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = diag[\mu_{11}, ..., \mu_{1m}], \mu_2 = diag[\mu_{21}, ..., \mu_{2m}], \\ &\nu = diag[\nu_{,1} ..., \nu_m] \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1. Suppose that the stationary set Λ of system (5) consists of isolated points, the pair (A, B) is controllable, the matrix A is Hurwitz, and there exist diagonal m $\times$ m matrices $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, and $\varkappa$ such that the following inequalities are valid:

$$\begin{aligned} &Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^*\varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1}ix]^*\tau[K(ix) + \mu_2^{-1}ix]) \geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ &4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Then system (5) is gradient-like.

Очевидно, что систему (1) можно привести к системе (5) положив:

$$\begin{aligned} &A = A \\ &B = b \\ &C = -K_{vco}c^* \\ &R = -K_{vco}h \\ &f(\sigma) = \upsilon_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} \end{aligned} \tag{12}$$

Положим далее:

$$\begin{aligned} &\upsilon_e(\sigma) = sin(\sigma) \\ &\frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} = \gamma \end{aligned} \tag{13}$$

3 Теорема Декарта

Теорема 2. Если у полинома записанного в стандартной форме все коэффициенты действительные и все его корни также заведомо действительные, то число его положительных корней, если учитывать их кратности, равно числу перемен знаков в ряде его коэффициентов. Если же он имеет и комплексные корни, то это число равно или на четное число меньше числа знакоперемен.

4 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} = \frac{1}{1 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})x + \tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \tag{14}$$

Введем обозначения: $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$, $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$
Рассмотрим первое условие теоремы 1

$$Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^*\varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^*\tau[K(ix) + ix]) \geq \delta \tag{15}$$

Подставим (14) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2) t^2 + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ &t \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Из второго условие теоремы 1 получаем:

$$\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \tag{17}$$

Для оценки полосы захвата системы (1) будем искать максимум ν.

4.1 Оценка максимума ν константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (16) нужно потребовать $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, тогда

$$\begin{aligned} &\varkappa \geq \varepsilon + \tau + \delta \\ &\varkappa^2 \geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ &2 - (\frac{2\varepsilon^2}{\varkappa^2} + \frac{2\delta^2}{\varkappa^2} + \frac{2\tau^2}{\varkappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\varkappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\varkappa^2}) \geq \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} \\ &2 > \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \tag{18}$$

4.2 Точная оценка максимума ν

2. Так как $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, то $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$. Для максимизации функции $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ возьмем $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$
Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} &\tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2) t + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \geq 0 \\ &t > 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &A = \tau b^2 \\ &B = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2 \\ &C = -\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что для того, что бы выполнялось (19) необходимо потребовать $A \geq 0$ и $C \geq 0$, тогда $B \geq 0$. Тогда по теореме Декарта уравнение $At^2 + Bt + C = 0$ не имеет положительных корней, т.е. выполняется (19). Не умаляя общности, можем положить $\varkappa = 1$ и будем искать максимум следующей функции:

$$f(\delta) = 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \tag{21}$$

Получили задачу на условный экстремум, т.е найти максимум (21), при условии $C \geq 0$. Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Вычислим градиент (21):

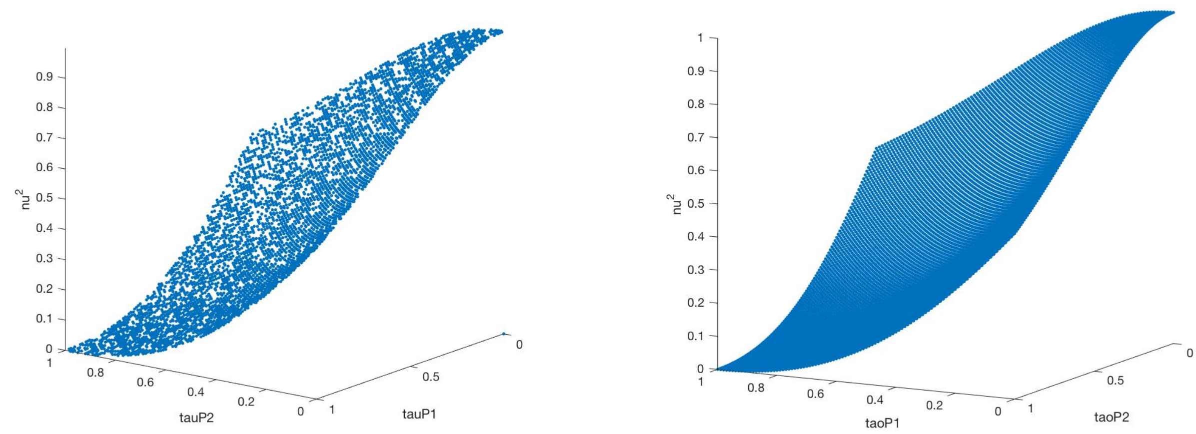
$$(4 - 4\tau - 8\delta, 4\delta) \tag{22}$$

Получаем точку понижения ранга: $\delta = 0, \tau = 1$. Это противоречит условию теоремы $\delta > 0$. Рассмотрим $C = 0$, выразим τ и подставим в (21):

$$f(\delta) = 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \tag{23}$$

Максимум (23) достигается при $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$ и равен

$$\frac{(b-1)^2}{a^2-2b+1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2}-1)^2}{\tau_{p1}^2+\tau_{p2}^2+1} > \nu^2 \tag{24}$$



(a) Численное приближение в MATLAB

(b) Вычисленный по (24)

Рис. 1: График зависимости ν^2 от τ_{p1}, τ_{p2}

5 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2} \tag{25}$$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\tau_{p1}^4\tau t^3 + (-\tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{z1}^4\tau + 2\tau_{p1}^2\tau - \tau_{p1}^4\delta + \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa)t^2 + \\
&+ (\tau - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\tau + 4\tau_{z1}b\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\
&t = x^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{26}$$

Заметим, что при $\tau_{z1} \neq \tau_{p1}$ функция $\chi(x) = p^{-1}K(x)$ не приводима. Тогда по теореме пара (A, B) управляема.

5.1 $\tau = 0$

Положим в (26) $\tau = 0$, тогда первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta)t^2 + (4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta)t + (\varkappa - \varepsilon - \delta) \geq 0 \\
&t = x^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{27}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}
A &= \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta \\
B &= 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta \\
C &= \varkappa - \varepsilon - \delta
\end{aligned} \tag{28}$$

Для того, что бы выполнялось (27) нужно потребовать: $A \geq 0$ и $C \geq 0$, тогда при $B \geq 0$, по теореме Декарта уравнение не имеет положительных корней, т.е. выполняется (27). Не умаляя общности можем считать $\varkappa = 1$. Получили задачу нахождения условного экстремума при условии:

$$\begin{aligned} &\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta \geq 0 \\ &4\tau_{z1}\tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2\delta \geq 0 \\ &1 - \varepsilon - \delta \geq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Максимум может достигаться на границе, или в точках понижения ранга. Представим ε как $\varepsilon(\delta)$ и рассмотрим функцию $\varepsilon\delta$ на границе области (29)

$$\begin{aligned} &\frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^4}{\tau_{z1}^4}\delta = \varepsilon \\ &2\frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}} - \frac{1}{2} - \frac{\tau_{p1}^2}{2\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2}\delta = \varepsilon \\ &\varepsilon = 1 - \delta \end{aligned} \tag{30}$$

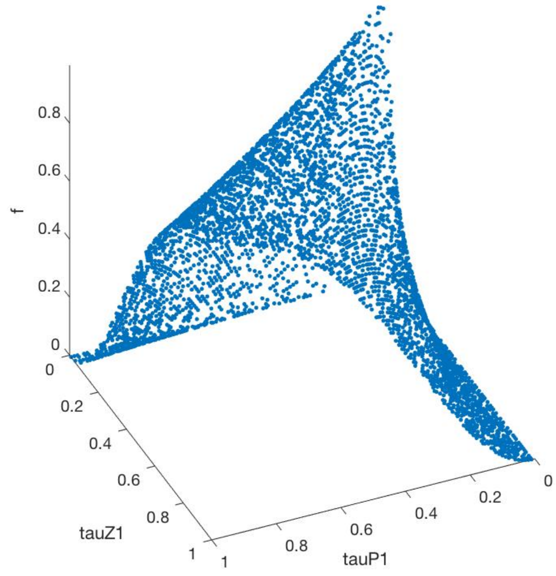
Для этого найдем пересечения прямых (30):

$$\begin{aligned} &\delta = \frac{1}{1+z^2}, \varepsilon = \frac{z^2}{1+z^2} \\ &\delta = \frac{1-q}{1-z^2}, \varepsilon = \frac{q-z^2}{1-z^2} \\ &\delta = \frac{z^2-q}{z^4-z^2}, \varepsilon = z^2 - \frac{z^4(z^2-q)}{z^4-z^2} \\ &z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}} \\ &q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2 \end{aligned} \tag{31}$$

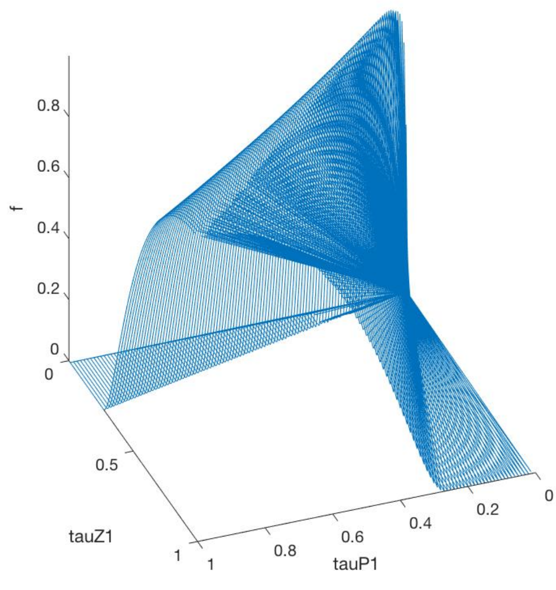
Оценки максимума на границе (30):

$$\begin{aligned} &\delta = \frac{1}{2}, \varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon\delta = \frac{1}{4} \\ &\delta = \frac{1}{2z^2}, \varepsilon = \frac{z^2}{2}, \varepsilon\delta = \frac{1}{4} \\ &\delta = \frac{q}{2z^2}, \varepsilon = \frac{q}{2}, \varepsilon\delta = \frac{q^2}{4z^2} \end{aligned} \tag{32}$$

Максимум функции $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ представлен на графике.



Если $a > 0, c > 0$, тогда при $b < 0$, уравнение может иметь 2 положительных корня. Дополнительно потребуем, что бы дискримининт уравнения $at^2 + bt + c = 0$ был не положительным. В этом случае получаем нелинейную оптимизационную задачу с нелинейными ограничениями, максимум функции $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ представлен на графике.



5.2 $\tau > 0$

Предположим в (26) $\tau > 0$ и разделим на $\tau_{p1}^4 \tau$. Не умаляя общности, можем считать $\tau = 1$, тогда (26) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
& t^3 + at^2 + bt + c \geq 0 \\
& A = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 + 2\tau_{p1}^2 - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa) \\
& B = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(1 - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 + 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) \\
& C = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(\varkappa - \varepsilon - 1 - \delta) \\
& t = x^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{33}
$$

Заметим, что по теореме Декарта: $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$

6 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$
K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)(1 + \tau_{z2}x)}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} \tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\varepsilon + \varkappa - \delta + (-\alpha_2\varkappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2\varepsilon - \beta_2\alpha_2\varkappa + 2\beta_2\alpha_2\varepsilon + \alpha_1^2\beta_1\varkappa)t + \\
& +(\beta_2\alpha_2^2\varkappa - \beta_2^2\alpha_2^2\varepsilon - \alpha_2^2\delta)t^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\varepsilon + 1 - \delta + (-\alpha_2 + 2\alpha_2\delta - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2\varepsilon - \beta_2\alpha_2 + 2\beta_2\alpha_2\varepsilon + \alpha_1^2\beta_1)t + \\
& +(\beta_2\alpha_2^2 - \beta_2^2\alpha_2^2\varepsilon - \alpha_2^2\delta)t^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{36}
$$

Тогда первое условие теоремы принимает вид: