1 Введение

Рассмотрим систему:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + bv_e(\theta_e) \\
&\dot{\theta}_e = \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + hv_e(\theta_e))
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Найдем стационарные точки системы (1)

$$
\begin{aligned}
&x = -A^{-1} bv_e(\theta_e) \\
&v_e(\theta_e) = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Возьмем $\theta_e = \theta_s$, для которых выполняется (2). Сделаем замену:

$$
\begin{aligned}
&z = x + A^{-1} bv_e(\theta_s) \\
&\sigma = \theta_e
\end{aligned}
\tag{3}
$$

После замены система (1) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = Az + b(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)}) \\
&\dot{\sigma} = -K_{vco}(c^* z + h(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)}))
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2 Теорема

Рассмотрим систему:

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = Az + Bf(\sigma) \\
&\dot{\sigma} = C^* z + Rf(\sigma)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Here A, B, C, and R are constant matrices of dimensions n × n, n × m, n × m, and n × n, respectively, whereas the components ϕ_k, $1 \leq k \leq m$, of the vector-valued function $f(\sigma)$ are scalar differen-tiable functions $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$, where ψ_k is the k-th component of the vector ψ.

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function $\varkappa(p)$ can be written in the form (5) with m = 1 by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions $\phi_k(\sigma_k)$ satisfy the followingconditions: $\phi_k(\sigma_k) \not\equiv 0$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}, \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \\
&\varphi_k(\sigma_k + \Delta_k) = \varphi_k(\sigma_k), \forall \sigma_k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Here the Δ_k are positive numbers. Sometimes, in the study of the specific pendulum-like systems, only one of the inequalities

$$\mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} or \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k} \tag{7}$$

is known, so we will assume the number mu_{1k} to be either finite negative or $-\inf$, and the number μ_{2k} to be either finite positive or $\inf$. When $\mu_{1k} = -\inf$ or $\mu_{2k} = \inf$, we will use the notation $\mu_{1k}^{-1} = 0$ or $\mu_{2k}^{-1} = 0$, respectively.

Let us introduce the numbers:

$$\nu_k = \int_0^{\Delta_k} \varphi_k(\sigma) d\sigma (\int_0^{\Delta_k} \mid \varphi_k(\sigma) \mid d\sigma)^{-1} \tag{8}$$

the transfer matrix of system (5) from its "input" f to its "output" $(-d\sigma/dt)$

$$K(p) = C * (A - pI)^{-1} B - R \tag{9}$$

and the diagonal m $\times$ m matrices:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = diag[\mu_{11}, ..., \mu_{1m}], \mu_2 = diag[\mu_{21}, ..., \mu_{2m}], \\ &\nu = diag[\nu_{,1} ..., \nu_m] \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1. Suppose that the stationary set Λ of system (5) consists of isolated points, the pair (A, B) is controllable, the matrix A is Hurwitz, and there exist diagonal m $\times$ m matrices $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, and $\varkappa$ such that the following inequalities are valid:

$$\begin{aligned} &Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1} ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1} ix]) \geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ &4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Then system (5) is gradient-like.

Очевидно, что систему (1) можно привести к системе (5) положив:

$$\begin{aligned} &A = A \\ &B = b \\ &C = -K_{vco} c^* \\ &R = -K_{vco} h \\ &f(\sigma) = v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)} \end{aligned} \tag{12}$$

Положим далее:

$$\begin{aligned} &v_e(\sigma) = sin(\sigma) \\ &\frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)} = \gamma \end{aligned} \tag{13}$$

3 Теорема Декарта

Теорема 2. Если многочлена записанного в стандартной форме действительные и все его корни также заведомо действительные, то число его положительных корней, если учитывать их кратности, равно числу перемен знаков в ряде его коэффициентов. Если же оно имеет и комплексные корни, то число это равно или на некоторое четное число меньше числа этих перемен знаков.

4 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)} = \frac{1}{1+(\tau_{p1}+\tau_{p2})x+\tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \tag{14}$$

Введем обозначения: $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$, $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$
Рассмотрим первое условие теоремы:

$$Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^*\varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^*\tau[K(ix) + ix]) \geq \delta \tag{15}$$

Подставим, рассматриваемую передаточную функцию в условие теоремы. В результате первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ &t \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Второе условие теоремы имеет вид:

$$\begin{aligned} &4\varepsilon\delta > \nu^2\varkappa^2 \\ &\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Будем искать максимум $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$

4.1 Оценка максимума ν константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (16) нужно $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$

$$\begin{aligned} &\varkappa \geq \varepsilon + \tau + \delta \\ &\varkappa^2 \geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ &2 - (\frac{2\varepsilon^2}{\varkappa^2} + \frac{2\delta^2}{\varkappa^2} + \frac{2\tau^2}{\varkappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\varkappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\varkappa^2}) \geq \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} \\ &2 > \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \tag{18}$$

4.2 Точная оценка максимума ν

2. Так как $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, то $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$. Для максимизации функции $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ возьмем $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$
Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} &\tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \geq 0 \\ &t > 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \tau b^2 \\ B &= \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2 \\ C &= -\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что для того, что бы выполнялось (19) необходимо потребовать $A > 0$ и $C \geq 0$, тогда $B \geq 0$. Тогда по теореме Декарта уравнение $At^2 + Bt + C = 0$ не имеет положительных корней, т.е. выполняется (19). Не умаляя общности, можем положить $\varkappa = 1$ и будем искать максимум следующей функции:

$$f(\delta) = 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \tag{21}$$

Получили задачу на условный экстремум, т.е найти максимум (21), при условии $C \geq 0$. Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Вычислим градиент (21):

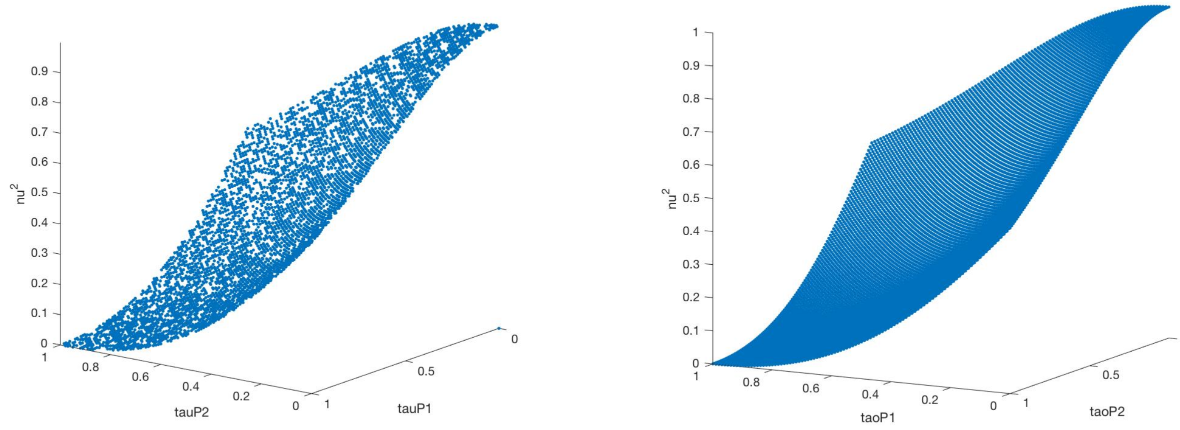
$$(4 - 4\tau - 8\delta, 4\delta) \tag{22}$$

Получаем точку понижения ранга: $\delta = 0, \tau = 1$. Это противоречит условию теоремы $\delta > 0$. Рассмотрим $C = 0$, выразим τ и подставим в (21):

$$f(\delta) = 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \tag{23}$$

Максимум (23) достигается при $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$ и равен

$$\frac{(b-1)^2}{a^2 - 2b + 1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \tag{24}$$



(a) Численное приближение в MATLAB (b) Вычисленный по (24)

Рис. 1: График зависимости ν^2 от τ_{p1}, τ_{p2}

5 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2} \tag{25}$$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned}&\tau_{p1}^4\tau t^3 + (-\tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{z1}^4\tau + 2\tau_{p1}^2\tau - \tau_{p1}^4\delta + \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa)t^2 + \\ &+ (\tau - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\tau + 4\tau_{z1}b\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ &t = x^2 \geq 0\end{aligned} \tag{26}$$

Заметим, что при $\tau_{z1} \neq \tau_{p1}$ функция $\chi(x) = p^{-1}K(x)$ не приводима. Тогда по теореме пара (A, B) управляема.

5.1 $\tau = 0$

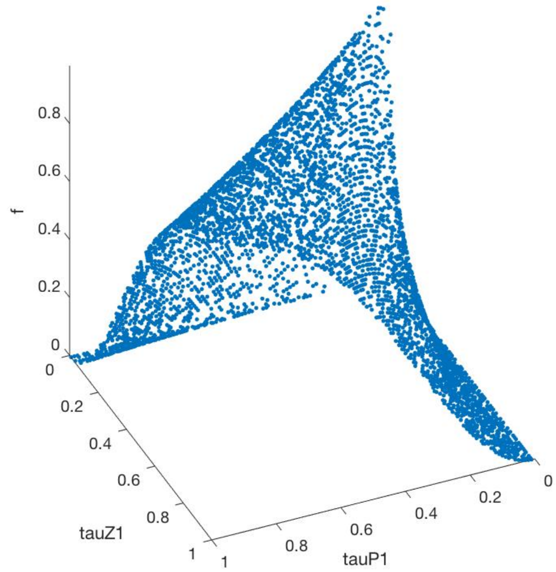
Положим в (26) $\tau = 0$, тогда первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}&(\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta)t^2 + (4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta)t + (\varkappa - \varepsilon - \delta) \geq 0 \\ &t = x^2 \geq 0\end{aligned} \tag{27}$$

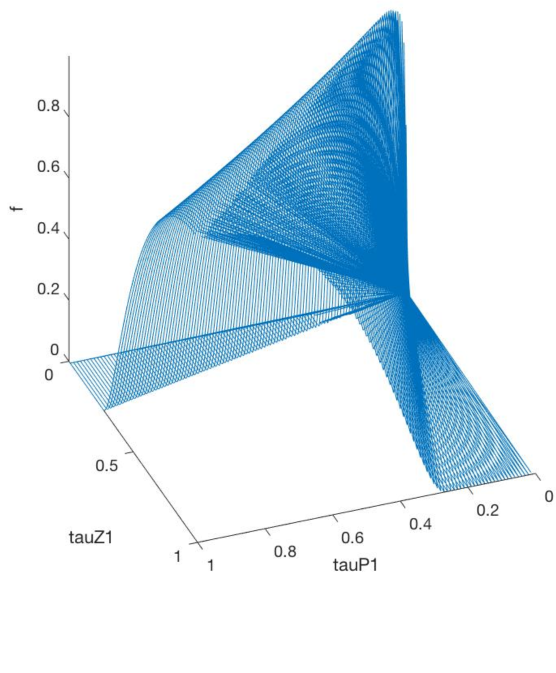
Обозначим:

$$\begin{aligned}A &= \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta \\ B &= 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta \\ C &= \varkappa - \varepsilon - \delta\end{aligned} \tag{28}$$

Для того, что бы выполнялось (27) нужно потребовать: $A \geq 0$ и $C \geq 0$, тогда при $B \geq 0$, по теореме Декарта уравнение не имеет положительных корней, т.е. выполняется (27). Не умаляя общности можем считать $\varkappa = 1$. Получили нелинейную оптимизационную задачу с линейными ограничениями, где максимум функции $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ представлен на графике.



Если $a > 0, c > 0$, тогда при $b < 0$, уравнение может иметь 2 положительных корня. Дополнительно потребуем, что бы дискримининт уравнения $at^2 + bt + c = 0$ был не положительным. В этойм случаем получаем нелинейную оптимизационную задачу с нелинейными ограничениями, максимум функции $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ представлен на графике.



5.2 $\tau > 0$

Предположим в (26) $\tau > 0$ и разделим на $\tau_{p1}^4 \tau$. Не умаляя общности, можем считать $\tau = 1$, тогда (26) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
& t^3 + at^2 + bt + c \geq 0 \\
& a = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 + 2\tau_{p1}^2 - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa) \\
& b = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(1 - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 + 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) \\
& c = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(\varkappa - \varepsilon - 1 - \delta) \\
& t = x^2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Заметим, что по теореме Декарта: $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$