Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

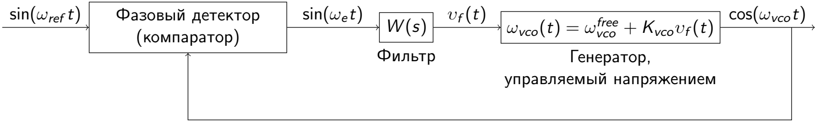
Миронов Алексей Владиславович

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

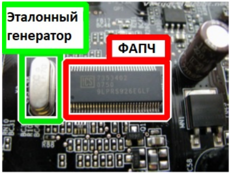
Научный руководитель: д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

21 апреля 2020 г.

Принцип работы ФАПЧ



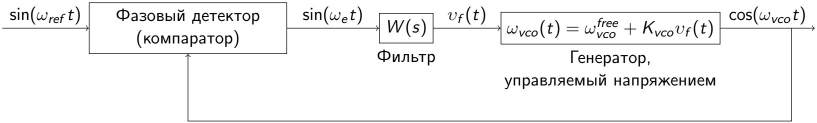
Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, подстраивающая частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала.



Применение системы ФАПЧ:

1. Телекоммуникационное обородование
2. Навигационное оборудование (GPS, Глонасс, Галилео)
3. Компьютеры (микропроцессоры)

Математическая модель ФАПЧ



Дифференциальные уравнения ФАПЧ

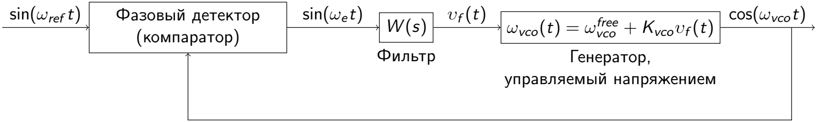
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma), \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma)), \end{aligned} \tag{1}$$

A — постоянная матрица $n \times n$, B и C постоянные n — мерные векторы, D — константа, $x(t)$ — n-мерный вектор состояний системы, K_{vco} — коэффициент передачи.

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}\left(D - C^T A^{-1} B\right)}, \tag{2}$$

где $\omega_e^{free} = \omega_{ref} - \omega_{vco}^{free}$ — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН.

Постановка задачи



Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН $|\omega_p|$ такая, что система (1) глобально асимптотически устойчива для всех $0 \leqslant |\omega_e^{free}| < |\omega_p|$.
Задача: оценить полосы захвата дла передаточных функций фильтров:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}, \quad W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$$

$$0 < \tau_{pi} < 1, \quad 0 < \tau_{zi} < 1, \quad i = 1,2, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{z1}$$

$$W(s) = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1,\alpha_2$$

Теорема

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma), \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma)) \end{aligned} \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$|\ \nu\ | = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}} \qquad (4)$$

Теорема (Леонов Г. А., Райтман Ф., Смирнова В. Б., 1992 г., Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems)

Пара (A, B) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geqslant 0$, и $\varkappa$, такие что имеют место неравенства:

$$\mathrm{Re}\left(\varkappa W(ix) - \varepsilon\,[W(ix)]^2 - \tau\,[W(ix) - ix]^T\,[W(ix) + ix]\right) \geqslant \delta, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2$$

Тогда система (3) глобально асимптотически устойчива.

Передаточная функция $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

Условия теоремы:

$$\mathrm{Re}\left(\varkappa W(ix) - \varepsilon\left[W(ix)\right]^2 - \tau\left[W(ix) - ix\right]^T\left[W(ix) + ix\right]\right) \geqslant \delta,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2$$

Для передаточной функции фильтра:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \tag{5}$$

оценка ν будет наибольшей при следующих значениях параметров:

$$\varkappa = 1,\ \varepsilon = 1 - \tau - \delta,\ \tau = \tau_{p1}\tau_{p2} + \delta(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2),\ \delta = \frac{1 - \tau_{p1}\tau_{p2}}{2(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1)}$$

Получим оценку для ν^2:

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \tag{6}$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

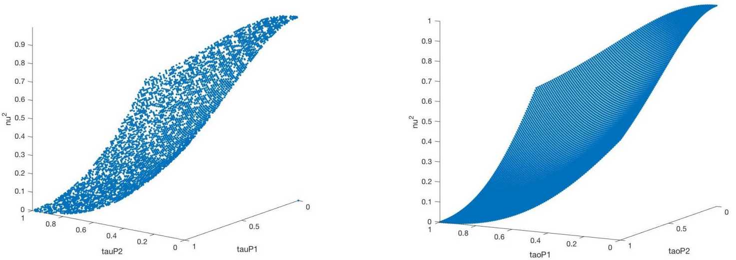


Рис.: Слева численная оценка ν^2 в MATLAB с помощью функции fmincon. Справа график ν^2, построенный по (7)

Оценка для ν^2:

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \tag{7}$$

Из следующих соотношений получим оценку полосы захвата:

$$|\,\nu\,| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \gamma K_{vco}\left(D - C^T A^{-1} B\right) = \omega_e^{free} \tag{8}$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

Условия теоремы:

$$\mathrm{Re}\left(\varkappa W(ix) - \varepsilon\,[W(ix)]^2 - \tau\,[W(ix) - ix]^T\,[W(ix) + ix]\right) \geqslant \delta,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2$$

Для передаточной функции фильтра:

$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2} \tag{9}$$

положим $\varkappa = 1$, $\tau = 0$. Оценка ν будет наибольшей, если параметры ε, δ лежат на одной из граней многоугольника, ограниченного $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ и

$$\varepsilon(\delta) = z^2 - z^4\delta, \quad \varepsilon(\delta) = q - z^2\delta, \quad \varepsilon(\delta) = 1 - \delta,$$

где $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}$, $q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$. Тогда ν^2 не превзойдет одного из следущих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^2-1} - \left(\frac{z^2-q}{z^2-1}\right)^2 \tag{10}$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

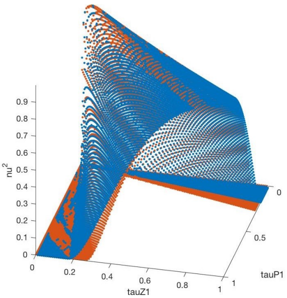


Рис.: Синим цветом представлена численная оценка ν^2 согласно 1 и 2 условиям теоремы в MATLAB с помощью функции fmincon. Красным цветом представлен график ν^2, построенный по (11), как максимум по всем граням многоугольника

ν^2 не превосходит одного из следущих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^2-1} - \left(\frac{z^2-q}{z^2-1}\right)^2 \tag{11}$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2}$

Условия теоремы:

$$\operatorname{Re}\left(\varkappa W(ix) - \varepsilon\,[W(ix)]^2 - \tau\,[W(ix) - ix]^T\,[W(ix) + ix]\right) \geqslant \delta,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2$$

Для передаточной функции фильтра:

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1 s + \alpha_2\beta_2 s^2}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \tag{12}$$

оценка ν будет наибольшей при следующих значениях параметров:

$$\tau = 0, \quad \varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \tag{13}$$

Чтобы гарантировать положительность δ потребуем:

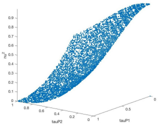
$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \tag{14}$$

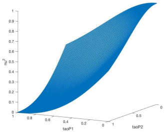
Тогда получим оценку:

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2}$$

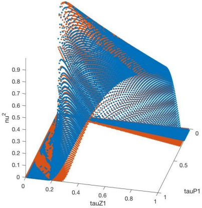
Выводы

1. Для передаточной функции $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ была найдена оценка полосы захвата





2. Для передаточной функции $W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$ была найдена оценка полосы захвата



3. Для передаточной функции $W(s) = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2}$ был восстановлен вывод оценки полосы захвата

Спасибо за внимание