

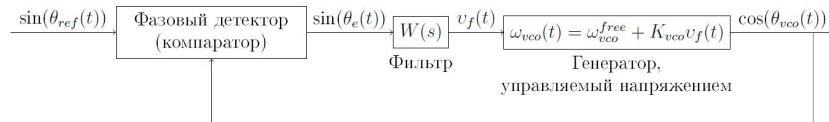
УДК 517.977.5

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

## Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

**1. Введение.** Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, которая подстраивает частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в телекоммуникационном оборудовании[1], навигационных системах[6] и д. р. На практике часто используют системы ФАПЧ второго и третьего порядка. Системы ФАПЧ третьего порядка, отличаются хорошим подавлением шума и более низкой стационарной ошибкой[5]. Основными параметрами ФАПЧ являются удержание, захват и захват без проскальзывания. В данной работе будут получены оценки полосы захвата для некоторых фильтров 2 порядка.

### 2. Математическая модель ФАПЧ.



**Рис. 1.** Схема классической системы ФАПЧ, где  $\theta_{ref}(t)$  — фаза опорного сигнала,  $\theta_{vco}(t)$  — фаза сигнала ГУН,  $v_f(t)$  — выходной сигнал фильтра,  $\omega_{vco}^{free}$  — частота свободных колебаний ГУН,  $\theta_e(t) = \theta_{ref}(t) - \theta_{vco}(t)$

Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma)\end{aligned}\tag{1}$$

Миронов Алексей Владиславович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru

Юлдашев Ренат Владимирович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: renatyv@pm.me

Где  $A$  — постоянная матрица  $n \times n$ ,  $B$  и  $C$  постоянные  $n$  — мерные векторы,  $D$  — константа,  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояний системы,  $K_{vco}$  — коэффициент передачи,  $\gamma$  определяется следующим образом

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}(D - C^T A^{-1} B)} \quad (2)$$

$\omega_e^{free}$  — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

**3. Оценка области захвата.** Введем определение полосы захвата.

**Определение 1.** Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН  $|\omega_e^{free}|$ , при котором система (1) глобально асимптотически устойчива.

Введем в рассмотрение число:

$$|\nu| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (3)$$

**Теорема 1** [3]. Пусть все нули функции  $\sin(\theta_e) - \gamma$  изолированы, пара  $(A, B)$  вполне управляема, все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части и существуют числа  $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$ , и  $\varkappa$ , такие что имеют место неравенства:

$$\operatorname{Re} \left( \varkappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - [W(ix) - ix]^T \tau [W(ix) + ix] \right) \geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \quad (5)$$

Тогда система (1) глобально асимптотически устойчива.

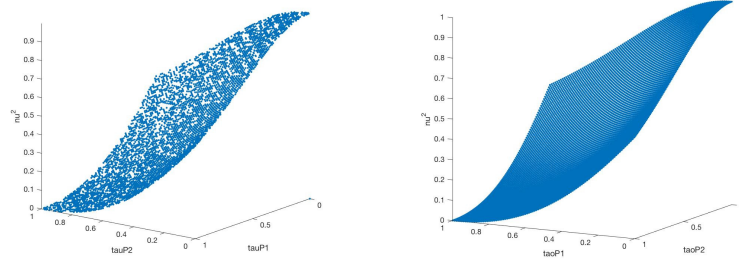
Найдем  $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$ , удовлетворяющие условию теоремы так, что бы максимизировать  $\nu$ . Из максимальной  $\nu$  получим максимальный  $\omega_e^{free}$ , при котором система (1) глобально асимптотически устойчива.

**3.1. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ . Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \quad (6)$$

Рассмотрим управляемую реализацию пары  $(A, B)$ . Подставим (6) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации  $\nu$  положим

$$\varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = \tau_{p1}\tau_{p2} + \delta(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2), \quad \delta = \frac{1 - \tau_{p1}\tau_{p2}}{2(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1)}$$



**Рис. 2.** Численная оценка  $\nu^2$  в MATLAB с помощью функции `fmincon` и график  $\nu^2$  построенный по (7)

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (7)$$

**3.2. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  $\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$ . Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

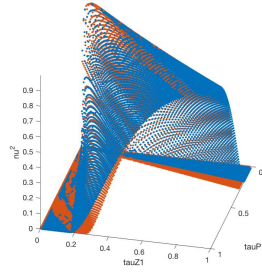
$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2} \quad (8)$$

Рассмотрим управляемую реализацию пары  $(A, B)$ . Подставим (8) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации  $\nu$  положим  $\varkappa = 1$ ,  $\tau = 0$ . Рассмотрим прямые

$$\varepsilon(\delta) = z^2 - z^4\delta, \quad \varepsilon(\delta) = q - z^2\delta, \quad \varepsilon(\delta) = 1 - \delta \quad (9)$$

где  $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}$ ,  $q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$ . (9) вместе с прямыми  $\delta = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  образуют выпуклый многоугольник. В зависимости от многоугольника положим  $\delta$  равным одним из  $\frac{1}{1+z^2}$ ,  $\frac{1-q}{1-z^2}$ ,  $\frac{z^2-q}{z^4-z^2}$ ,  $\frac{q}{2z^2}$ ,  $\frac{1}{2z^2}$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\varepsilon$  из (9). Тогда  $4\varepsilon\delta$  пределяется одним из следующих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^2-1} - \left( \frac{z^2-q}{z^2-1} \right)^2 \quad (10)$$



**Рис. 3.** Численная оценка  $\nu^2$  в MATLAB с помощью функции `fmincon` и график  $\nu^2$  построенный по (10)

**3.3. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  $\frac{1+\alpha_1\beta_1s+\alpha_2\beta_2s^2}{1+\alpha_1s+\alpha_2s^2}$ . Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \quad (11)$$

Рассмотрим управляемую реализацию пары  $(A, B)$ . Подставим (11) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации  $\nu$  положим

$$\tau = 0, \quad \varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)}$$

Потребуем

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (12)$$

(12) гарантирует положительность числителя и знаменателя  $\delta$ . Тогда получим оценку

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2} \quad (13)$$

Эта оценка была получена в [2], однако вывод был пропущен.

**4. Заключение.** В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат будет интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

## Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 115–116.
2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.
3. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Изд-во Невский диалект, 2014. P. 58–66.
4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2455.
5. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vol. 255-260. P. 2262.
6. Curran J. T., Lachapelle G., Murphy C. C. Digital GNSS PLL Design Conditioned on Thermal and Oscillator Phase Noise // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2012. Vol. 48, No 1. P. 180.