1 Введение

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + hv_e(\theta_e)) \end{aligned} \tag{1}$$

Найдем стационарные точки системы (1)

$$\begin{aligned} x &= -A^{-1} b v_e(\theta_e) \\ v_e(\theta_e) &= \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)} \end{aligned} \tag{2}$$

Возьмем $\theta_e = \theta_s$, для которых выполняется (2). Сделаем замену:

$$\begin{aligned} z &= x + A^{-1} b v_e(\theta_s) \\ \sigma &= \theta_e \end{aligned} \tag{3}$$

После замены система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)}) \\ \dot{\sigma} &= -K_{vco}(c^* z + h(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)})) \end{aligned} \tag{4}$$

2 Теорема

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= C^* z + Rf(\sigma) \end{aligned} \tag{5}$$

Here A, B, C, and R are constant matrices of dimensions n × n, n × m, n × m, and n × n, respectively, whereas the components ϕ_k, $1 \leq k \leq m$, of the vector-valued function $f(\sigma)$ are scalar differen-tiable functions $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$, where ψ_k is the k-th component of the vector ψ.

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function $\varkappa(p)$ can be written in the form (5) with m = 1 by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions $\phi_k(\sigma_k)$ satisfy the followingconditions: $\phi_k(\sigma_k) \equiv 0$

$$\begin{aligned} \mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}, \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \\ \varphi_k(\sigma_k + \Delta_k) = \varphi_k(\sigma_k), \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{6}$$

Here the Δ_k are positive numbers. Sometimes, in the study of the specific pendulum-like systems, only one of the inequalities

$$\mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} or \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k} \tag{7}$$

is known, so we will assume the number mu_{1k} to be either finite negative or $-\inf$, and the number μ_{2k} to be either finite positive or inf. When $\mu_{1k} = -\inf$ or $\mu_{2k} = \inf$, we will use the notation $\mu_{1k}^{-1} = 0$ or $\mu_{2k}^{-1} = 0$, respectively.

Let us introduce the numbers:

$$\nu_k = \int_0^{\Delta_k} \varphi_k(\sigma) d\sigma (\int_0^{\Delta_k} \mid \varphi_k(\sigma) \mid d\sigma)^{-1} \tag{8}$$

the transfer matrix of system (5) from its "input" f to its "output" $(-d\sigma/dt)$

$$K(p) = C * (A - pI)^{-1} B - R \tag{9}$$

and the diagonal m $\times$ m matrices:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = diag[\mu_{11}, ..., \mu_{1m}], \mu_2 = diag[\mu_{21}, ..., \mu_{2m}], \\ &\nu = diag[\nu_{,1} ..., \nu_m] \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1. *Suppose that the stationary set* Λ *of system* (5) *consists of isolated points, the pair (A, B) is controllable, the matrix A is Hurwitz, and there exist diagonal* $m \times m$ *matrices* $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, *and* $\varkappa$ *such that the following inequalities are valid:*

$$\begin{aligned} &Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1} ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1} ix]) \geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ &4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Then system (5) *is gradient-like.*

Очевидно, что систему (1) можно привести к системе (5) положив:

$$\begin{aligned} &A = A \\ &B = b \\ &C = -K_{vco} c^* \\ &R = -K_{vco} h \\ &f(\sigma) = v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)} \end{aligned} \tag{12}$$

Положим далее:

$$\begin{aligned} &v_e(\sigma) = sin(\sigma) \\ &\frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)} = \gamma \end{aligned} \tag{13}$$

3 Теорема Декарта

Теорема 2. *Если многочлена записанного в стандартной форме действительные и все его корни также заведомо действительные, то число его положительных корней, если учитывать их кратности, равно числу перемен знаков в ряде его коэффициентов. Если же оно имеет и комплексные корни, то число это равно или на некоторое четное число меньше числа этих перемен знаков.*

4 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)} = \frac{1}{1+(\tau_{p1}+\tau_{p2})x+\tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \tag{14}$$

Введем обозначения: $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$, $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$
Рассмотрим первое условие теоремы:

$$Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^* \tau [K(ix) + ix]) \geq \delta \tag{15}$$

Подставим, рассматриваемую передаточную функцию в условие теоремы. В результате первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ &t \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Второе условие теоремы имеет вид:

$$\begin{aligned} &4\varepsilon\delta > \nu^2\varkappa^2 \\ &\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Будем искать максимум $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$

4.1 Оценка максимума ν константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (16) нужно $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$

$$\begin{aligned} &\varkappa \geq \varepsilon + \tau + \delta \\ &\varkappa^2 \geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ &2 - \left(\frac{2\varepsilon^2}{\varkappa^2} + \frac{2\delta^2}{\varkappa^2} + \frac{2\tau^2}{\varkappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\varkappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\varkappa^2}\right) \geq \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} \\ &2 > \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \tag{18}$$

4.2 Точная оценка максимума ν

2. Так как $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, то $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$. Для максимизации функции $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ возьмем $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$
Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} &\tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \geq 0 \\ &t > 0 \end{aligned} \tag{19}$$

И будем искать максимум следующей функции:

$$\begin{aligned} &f(z) = 4z - 4z_1 z - 4z^2 \\ &z_1 = \frac{\tau}{\varkappa}, z = \frac{\delta}{\varkappa} \end{aligned} \tag{20}$$

Будем рассматривать $f(z)$, как функцию от z с параметром z_1. Очевидно, что максимум этой функции достигается при $z_{max} = \frac{1-z_1}{2}$ и $f(z_{max}) = (1-z_1)^2$

Рассмотрим дискриминант уравнения (19):

$$D = (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)^2 - 4\tau b^2(-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \tag{21}$$

Не умаляя общности, положим далее $\varkappa = 1$, тогда (21) примет вид:

$$D = z_1^2 \frac{1}{4}(b^4 + 8b^3 - 4a^2b^2 - 16a^2 b + 4a^4) + z_1 \frac{1}{4}(-2b^4 + 8b^3 + 4a^2b^2) + \frac{b^4}{4} \tag{22}$$

Множество допустимых значений z_1 состоит из тех z_1 для которых: $D \leq 0$ или $D \geq 0$ и $x_2 \leq 0$, где x_2 наибольший корень уравнения (19). Обозначим:

$$\begin{aligned} &A = \frac{1}{4}(b^4 + 8b^3 - 4a^2b^2 - 16a^2 b + 4a^4) \\ &B = \frac{1}{4}(-2b^4 + 8b^3 + 4a^2b^2) \\ &C = \frac{b^4}{4} \end{aligned} \tag{23}$$

4.2.1 $A = 0$

При $b^4 + 8b^3 - 4a^2b^2 - 16a^2b + 4a^4 = 0$ (22) принимает вид:

$$D = z_1 B + C \tag{24}$$

Предположим, $B \neq 0$, тогда очевидно, что корень уравнения $D = 0$ будет:

$$d = -\frac{1}{B} \tag{25}$$

При $B > 0$: $z_1 \in (0, d]$ $D \leq 0$, а при $z_1 \in [d, 1)$ $D \geq 0$
При $B < 0$: $z_1 \in [d, 1)$ $D \geq 0$, а при $z_1 \in [d, 1)$ $D \leq 0$
При $B = 0$: $z_1 \in (0, 1)$ $D \geq 0$

4.2.2 $A \neq 0$

Рассмотрим дискриминант уравнения $D = 0$:

$$D_1 = B^2 - 4AC \tag{26}$$

Заметим, что для исследуемых τ_{p1} и τ_{p2} $D_1 \geq 0$, тогда корни уравнения $D = 0$ имеют следующий вид:

$$d_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D_1}}{2A} \tag{27}$$

Не умаляя общности, будем считать: $0 < d_1 \leq d_2 < 1$.
$A > 0$: Тогда при $z_1 \in (0, d_1] \cup [d_2, 1)$ $D \leq 0$, а при $z_1 \in [d_1, d_2]$ $D \geq 0$
$A < 0$: Тогда при $z_1 \in (0, d_1] \cup [d_2, 1)$ $D \geq 0$, а при $z_1 \in [d_1, d_2]$ $D \leq 0$

4.2.3 Максимизация в зависимости от знака дискриминанта

Рассмотрим, например, случай $A > 0$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Как было показано выше, при $z_1 \in (0, d_1] \cup [d_2, 1)$ $D \leq 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} &M_1 = \max_{-(z_1a^2-2z_1b-\frac{1-z_1}{2}b^2)+\sqrt{D(z_1)}\leq 0} |1 - z_1| = \max_{-(z_1a^2-2z_1b-\frac{1-z_1}{2}b^2)+\sqrt{D(z_1)}=0} |1 - z_1| \\ &z_1 \in (0, d_1] \cup [d_2, 1) \end{aligned} \tag{28}$$

А при $z_1 \in [d_1, d_2]$ $D \geq 0$. Тогда почаем:

$$\begin{aligned} &M_2 = \max_{z_1 \in [d_1, d_2]} |1 - z_1| = max\{|1 - d_1|, |1 - d_2|\} \\ &z_1 \in [d_1, d_2] \end{aligned} \tag{29}$$

Мы максимизировали функцию при отрицательном и неотрицательном дискриминанте. Положим максимум $M = \max\{M_1, M_2\}$.

5 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)^2}{(1 + \tau_{p1}x)^2} \tag{30}$$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} &\tau_{p1}^4\tau t^3 + (-\tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{z1}^4\tau + 2\tau_{p1}^2\tau - \tau_{p1}^4\delta + \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa)t^2 + \\ &+ (\tau - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\tau + 4\tau_{z1}b\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ &t = x^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Заметим, что при $\tau_{z1} \neq \tau_{p1}$ функция $\chi(x) = p^{-1}K(x)$ не приводима. Тогда по теореме пара (A, B) управляема.

5.1 $\tau = 0$

Положим в (31) $\tau = 0$, тогда первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&(\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta)t^2 + (4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta)t + (\varkappa - \varepsilon - \delta) \geq 0 \\
&t = x^2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Будем искать максимум $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$. Обозначим:

$$
\begin{aligned}
&a = \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{p1}^4\delta \\
&b = 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta \\
&c = \varkappa - \varepsilon - \delta
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Для того, что бы выполнялось (32) нужно потребовать: $a > 0, c > 0$, тогда $b > 0$. По теореме Декарта уравнение не имеет положительных корней, т.е. выполняется (32).

5.1.1 $\tau_{p1} > \tau_{z1}$

Если предположить, что $\tau_{p1} > \tau_{z1}$, тогда из того, что $a > 0, c > 0$ следует, что $\delta < \varepsilon$. Положив $\delta = \varepsilon$. Разделим на $\varepsilon > 0$ и не умаляя общности положим $\varepsilon = 1$ получим:

$$
\begin{aligned}
&a = \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4 - \tau_{p1}^4 \\
&b = 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2 - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2 \\
&c = \varkappa - 2
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$\lim_{\varkappa \to 2+} \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} = 1$$

5.1.2 $\tau_{p1} < \tau_{z1}$

Аналогично предыдущему случаю, предположим, что $\tau_{p1} < \tau_{z1}$, тогда из того, что $a > 0, c > 0$ следует, что $\delta > \varepsilon$. Положив $\varepsilon = \delta$. Разделим на $\delta > 0$ и не умаляя общности положим $\delta = 1$ получим:

$$
\begin{aligned}
&a = \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa - \tau_{z1}^4 - \tau_{p1}^4 \\
&b = 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2 - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{p1}^2 \\
&c = \varkappa - 2
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$\lim_{\varkappa \to 2+} \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} = 1$$

5.2 $\tau > 0$

Предположим в (31) $\tau > 0$ и разделим на $\tau_{p1}^4\tau$. Не умаляя общности, можем считать $\tau = 1$, тогда (31) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&t^3 + at^2 + bt + c \geq 0 \\
&a = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(-\tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{z1}^4 + 2\tau_{p1}^2 - \tau_{p1}^4\delta + \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varkappa) \\
&b = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(1 - \tau_{z1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\varkappa - 2\tau_{z1}^2 + 4\tau_{z1}\tau_{p1}\varkappa - 2\tau_{p1}^2\delta) \\
&c = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(\varkappa - \varepsilon - 1 - \delta) \\
&t = x^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{36}$$

Заметим, что по теореме Декарта: $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$