УДК 510

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генераторов. Она появилась в первой половине XX века [5]. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в различном телекоммуникационном оборудовании, навигационных системах и т. д. [1].

На практике часто используют системы ФАПЧ второго порядка. Наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка, отличающиеся хорошим подавлением шума и более низкой стационарной ошибкой [6].

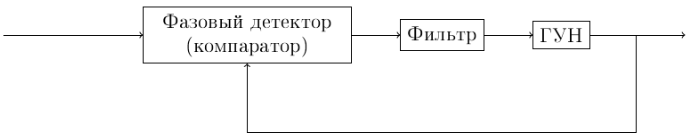

Рис. 1. Схема классической системы ФАПЧ

Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4]

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma)\\
&\dot{\theta}_e = -K_{vco}C^{\mathsf{T}}x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma))
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Где A — постоянная матрица $n \times n$, B и C постоянные n — мерные векторы, D — константа, $x(t)$ — n-мерный вектор состояний системы, ω_e^{free} — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН, K_{vco} — коэфициент передачи и γ определяется

Миронов Алексей Владиславович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru

Юлдашев Ренат Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: renatyv@pm.me

следующим образом

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}\,(D - C^{\intercal} A^{-1} B)} \tag{2}$$

При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте. Введем в рассмотрение число:

$$\mid \nu \mid = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}} \tag{3}$$

Теорема 1 [3]. *Пусть все нули функции* $\sin(\theta_e) - \gamma$ *изолированы, пара* (A, B) *вполне управляема, все собственные значения матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части и существуют числа* $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geqslant 0$, *и* $\varkappa$, *такие что имеют место неравенства:*

$$\operatorname{Re}\Big(\varkappa W(ix) - \varepsilon\,[W(ix)]^2 - [W(ix) - ix]^{\intercal}\,\tau\,[W(ix) + ix]\Big) \geqslant \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \tag{5}$$

Тогда система (1) *глобально ассимптотически устойчива.*

Приведенная теорема не отвечает на вопрос как найти полосу захвата, т. е. максимальную разность частот опорного сигнала и ГУН ω_e^{free}, при котором система (1) глобально ассимптотически устойчива. Этот вопрос является важным для инженеров при физической реализации ФАПЧ. Для ответа рассмотрим некоторые фильтры 2 порядка. Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие условию теоремы так, что бы максимизировать ν. Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free}, при котором система (1) глобально ассимтотически устойчива.

2. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \tag{6}$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + ab^{-1}s + b^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, b) вполне управляема. Подставим (6) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации ν положим

$$\varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = , \quad \delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)} \tag{7}$$

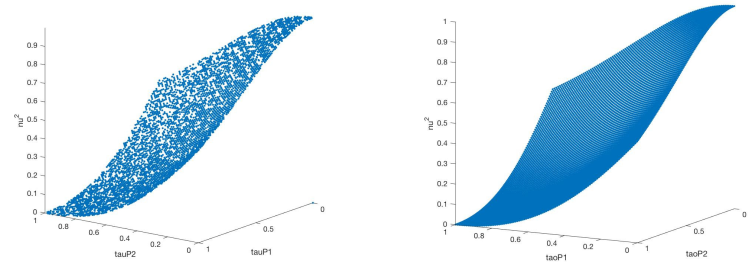

Рис. 2. Численное и аналитическое решения для фильтра (6)

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2}-1)^2}{\tau_{p1}^2+\tau_{p2}^2+1} \tag{8}$$

3. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2}$. Рассмотрим передаточную функцию

$$W(x) = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2} \tag{9}$$

Где α_1, α_2, β_1, β_2 вещественные положительные числа. Предположим

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \tag{10}$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}s + \alpha_2^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, b) вполне управляема. Подставим (9) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации ν положим

$$\tau = 0, \quad \varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)}{\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)} \tag{11}$$

Потребуем

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1)} \tag{12}$$

Это условие гарантирует положительность числителя и знаменателя δ.

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1) - \alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)]^2} \tag{13}$$

Эта оценка была получена в [2], однако вывод был пропущен.

4. Заключение. В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат будет интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 195–207.

2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.

3. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Изд-во Невский диалект, 2014. P. 195–207.

4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Solution of the Gardner problem on the lock-in range of phase-locked loop // ArXiv e-prints. 2017. 1705.05013. P. 289–298.

5. Appleton E. E. Automatic synchronization of triode oscillators // Proc. Camb. Phil. Soc. 1923. Vol. 21, No 3. P. 231.

6. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vols. 255-260. P. 1.