

Санкт-Петербургский государственный университет

Отделение прикладной математики и информатики  
Кафедра прикладной кибернетики

Миронов Алексей Владиславович

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
д. т.н., профессор Юлдашев Р. В.

# Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Теорема	4
4	Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$	5
4.1	Оценка максимума $\nu$ константой . . . . .	6
4.2	Точная оценка максимума $\nu$ . . . . .	6
5	Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$	7
5.1	$\tau = 0$ . . . . .	7
5.2	$\tau > 0$ . . . . .	10
6	Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$	10

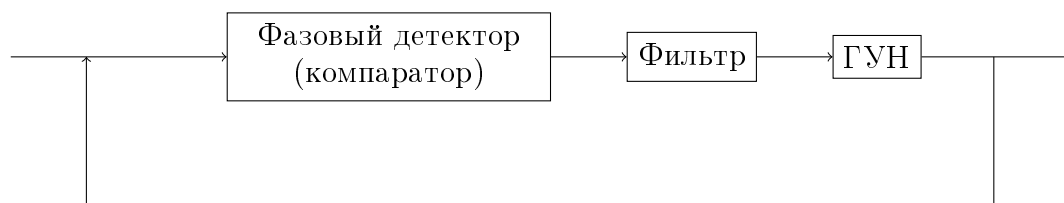
# 1 Введение

В повседневной жизни мы часто встречаемся с проявлением эффекта фазовой синхронизации. Например, электрический ток в энергосетях вырабатывается синхронными генераторами, действие которых основано на принципе фазовой синхронизации. Еще одним примером проявления эффекта фазовой синхронизации является совпадение частот Луны вокруг своей оси и вокруг Земли.

Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) – это система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генератора.

Системы фазовой автоподстройки частоты были изобретены в первой половине XX века и использовались в радио и телевидении [1]. Инженерная практика применения и теория систем ФАПЧ начали интенсивно развиваться во второй половине XX века [2]. Сразу после реализации систем фазовой автоподстройки частоты в виде одной микросхемы, системы ФАПЧ стали широко применяться в современных телекоммуникационных системах и компьютерах. В настоящее время микросхемы, использующие системы фазовой автоподстройки используются в различных электро-механических приборах, энергетических генераторах, системах передачи данных и навигационных системах (GPS, ГЛОНАСС и Галилео).

Одной из особенностей функционирования систем ФАПЧ является нелинейность фазы подстраиваемого генератора в переходном режиме. При постоянной частоте эталонного генератора система ФАПЧ позволяет получить различные степени синхронизации. Например, система ФАПЧ второго порядка, теоретически позволяет получить полную синхронизацию сигналов, т.е. сигнал с той же частотой и постоянную разность фаз. Наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка. Одним из преимуществ ФАПЧ третьего порядка является хорошее подавление шума и более низкая стационарная ошибка, по сравнению с системами ФАПЧ второго порядка.



Рассмотрим master-slave синхронизацию колебаний на примере классической системы фазовой автоподстройки частоты. На приведенной схеме кольца ФАПЧ изображены операции классической системы ФАПЧ. Входной сигнал эталонного генератора подается на вход кольца ФАПЧ

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e))\end{aligned}\tag{1}$$

Найдем стационарные точки системы (1)

$$\begin{aligned}x &= -A^{-1}bv_e(\theta_e) \\ v_e(\theta_e) &= \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}\end{aligned}\tag{2}$$

Возьмем  $\theta_e = \theta_s$ , для которых выполняется (2). Сделаем замену:

$$\begin{aligned}z &= x + A^{-1}bv_e(\theta_s) \\ \sigma &= \theta_e\end{aligned}\tag{3}$$

После замены система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}) \\ \dot{\sigma} &= -K_{vco}(c^*z + h(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}))\end{aligned}\tag{4}$$

## 3 Теорема

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= C^*z + Rf(\sigma)\end{aligned}\tag{5}$$

Here A, B, C, and R are constant matrices of dimensions  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $n \times m$ , and  $n \times n$ , respectively, whereas the components  $\phi_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , of the vector-valued function  $f(\sigma)$  are scalar differen-tiable functions  $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$ , where  $\psi_k$  is the k-th component of the vector  $\psi$ .

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function  $\chi(p)$  can be written in the form (5) with  $m = 1$  by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions  $\phi_k(\sigma_k)$  satisfy the following conditions:  $\phi_k(\sigma_k) \equiv 0$

$$\begin{aligned}\mu_{1k} &\leq \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}, \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \\ \phi_k(\sigma_k + \Delta_k) &= \phi_k(\sigma_k), \forall \sigma_k \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{6}$$

Here the  $\Delta_k$  are positive numbers. Sometimes, in the study of the specific pendulum-like systems, only one of the inequalities

$$\mu_{1k} \leq \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \text{ or } \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}\tag{7}$$

is known, so we will assume the number  $\mu_{1k}$  to be either finite negative or  $-\inf$ , and the number  $\mu_{2k}$  to be either finite positive or  $\inf$ . When  $\mu_{1k} = -\inf$  or  $\mu_{2k} = \inf$ , we will use the notation  $\mu_{1k}^{-1} = 0$  or  $\mu_{2k}^{-1} = 0$ , respectively.

Let us introduce the numbers:

$$\nu_k = \int_0^{\Delta_k} \phi_k(\sigma) d\sigma \left( \int_0^{\Delta_k} |\phi_k(\sigma)| d\sigma \right)^{-1}\tag{8}$$

the transfer matrix of system (5) from its “input”  $f$  to its “output”  $(-d\sigma/dt)$

$$K(p) = C * (A - pI)^{-1}B - R \quad (9)$$

and the diagonal  $m \times m$  matrices:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \text{diag}[\mu_{11}, \dots, \mu_{1m}], \mu_2 = \text{diag}[\mu_{21}, \dots, \mu_{2m}], \\ \nu &= \text{diag}[\nu_1, \dots, \nu_m] \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 1. Suppose that the stationary set  $\Lambda$  of system (5) consists of isolated points, the pair  $(A, B)$  is controllable, the matrix  $A$  is Hurwitz, and there exist diagonal  $m \times m$  matrices  $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$ , and  $\varkappa$  such that the following inequalities are valid:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1}ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1}ix]) &\geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4\varepsilon\delta &> (\varkappa\nu)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Then system (5) is gradient-like.

Очевидно, что систему (1) можно привести к системе (5) положив:

$$\begin{aligned} A &= A \\ B &= b \\ C &= -K_{vco}C^* \\ R &= -K_{vco}h \\ f(\sigma) &= v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} \end{aligned} \quad (12)$$

Положим далее:

$$\begin{aligned} v_e(\sigma) &= \sin(\sigma) \\ \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} &= \gamma \end{aligned} \quad (13)$$

## 4 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} = \frac{1}{1 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})x + \tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \quad (14)$$

Введем обозначения:  $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$ ,  $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$

Рассмотрим первое условие теоремы 1

$$\text{Re}(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^* \tau [K(ix) + ix]) \geq \delta \quad (15)$$

Подставим (14) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) &\geq 0 \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Из второго условия теоремы 1 получаем:

$$\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \quad (17)$$

Для оценки полосы захвата системы (1) будем искать максимум  $\nu$ .

## 4.1 Оценка максимума $\nu$ константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (16) нужно потребовать  $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$ , тогда

$$\begin{aligned}\varkappa &\geq \varepsilon + \tau + \delta \\ \varkappa^2 &\geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ 2 - \left(\frac{2\varepsilon^2}{\varkappa^2} + \frac{2\delta^2}{\varkappa^2} + \frac{2\tau^2}{\varkappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\varkappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\varkappa^2}\right) &\geq \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} \\ 2 &> \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2\end{aligned}\tag{18}$$

## 4.2 Точная оценка максимума $\nu$

2. Так как  $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$ , то  $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$ . Для максимизации функции  $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$  возьмем  $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned}\tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) &\geq 0 \\ t &> 0\end{aligned}\tag{19}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}A &= \tau b^2 \\ B &= \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2 \\ C &= -\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b\end{aligned}\tag{20}$$

Заметим, что для того, что бы выполнялось (19) необходимо потребовать  $A \geq 0$  и  $C \geq 0$ , тогда  $B \geq 0$ . Тогда по теореме Декарта уравнение  $At^2 + Bt + C = 0$  не имеет положительных корней, т.е. выполняется (19). Не умаляя общности, можем положить  $\varkappa = 1$  и будем искать максимум следующей функции:

$$f(\delta) = 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2\tag{21}$$

Получили задачу на условный экстремум, т.е найти максимум (21), при условии  $C \geq 0$ . Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Вычислим градиент (21):

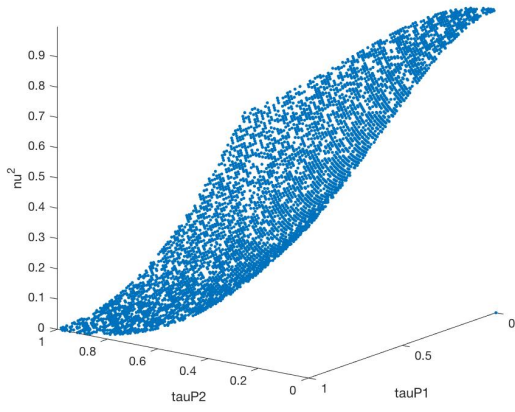
$$(4 - 4\tau - 8\delta, 4\delta)\tag{22}$$

Получаем точку понижения ранга:  $\delta = 0, \tau = 1$ . Это противоречит условию теоремы  $\delta > 0$ . Рассмотрим  $C = 0$ , выразим  $\tau$  и подставим в (21):

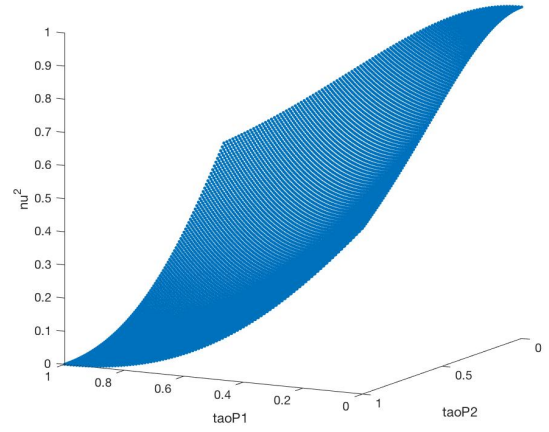
$$f(\delta) = 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1)\tag{23}$$

Максимум (23) достигается при  $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$  и равен

$$\frac{(b-1)^2}{a^2 - 2b + 1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} > \nu^2\tag{24}$$



(a) Численное приближение в MATLAB



(b) Вычисленный по (24)

Рис. 1: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$

## 5 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)^2}{(1 + \tau_{p1}x)^2} \quad (25)$$

Предположим, что нелинейность  $f(\sigma) = \phi(\sigma)$  имеет изолированные нули и удовлетворяет ??????. Неравенство  $\tau_{z1} \neq \tau_{p1}$  гарантирует, что функция  $\chi(p) = x^{-1}K(x)$  не приводима. Тогда по теореме ???? пара  $(A, B)$  управляема. Заметим

$$\det(xI - A) = x^2 + 2\tau_{z1}^{-1}x + \tau_{z1}^{-2} \quad (26)$$

матрица  $A$  - матрица Гурвица. Найдем  $\varepsilon, \delta, \kappa, \tau$  так, что бы максимизировать  $\nu$ . Для этого подставим (25) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \tau_{p1}^4 \tau t^3 + (-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 \tau + 2\tau_{p1}^2 \tau - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \kappa) t^2 + \\ & + (\tau - \tau_{z1}^2 \kappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \kappa - 2\tau_{z1}^2 \tau + 4\tau_{z1} b \kappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\kappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ & t = x^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

### 5.1 $\tau = 0$

Положим в (27)  $\tau = 0$ , тогда первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \kappa - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta) t^2 + (4\tau_{z1} \tau_{p1} \kappa - \tau_{z1}^2 \kappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \kappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\kappa - \varepsilon - \delta) \geq 0 \\ & t = x^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} A &= \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \kappa - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta \\ B &= 4\tau_{z1} \tau_{p1} \kappa - \tau_{z1}^2 \kappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \kappa - 2\tau_{p1}^2 \delta \\ C &= \kappa - \varepsilon - \delta \end{aligned} \quad (29)$$

Для того, что бы выполнялось (28) нужно потребовать:  $A \geq 0$  и  $C \geq 0$ , тогда при  $B \geq 0$ , тогда уравнение не имеет положительных корней, т.е. выполняется (28). Не умаляя общности можем считать  $\varkappa = 1$ . Получили задачу нахождения условного экстремума при условии:

$$\begin{aligned}\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta &\geq 0 \\ 4\tau_{z1} \tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2 \delta &\geq 0 \\ 1 - \varepsilon - \delta &\geq 0\end{aligned}\tag{30}$$

Максимум может достигаться на границе, или в точках понижения ранга. Представим  $\varepsilon$  как  $\varepsilon(\delta)$  и рассмотрим функцию  $\varepsilon\delta$  на границе области (30)

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^4}{\tau_{z1}^4} \delta &= \varepsilon \\ 2\frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}} - \frac{1}{2} - \frac{\tau_{p1}^2}{2\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2} \delta &= \varepsilon \\ \varepsilon &= 1 - \delta\end{aligned}\tag{31}$$

Для этого найдем пересечения прямых (31):

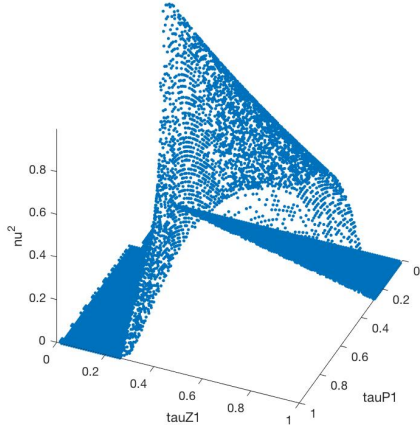
$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{1+z^2}, \varepsilon = \frac{z^2}{1+z^2} \\ \delta &= \frac{1-q}{1-z^2}, \varepsilon = \frac{q-z^2}{1-z^2} \\ \delta &= \frac{z^2-q}{z^4-z^2}, \varepsilon = z^2 - \frac{z^4(z^2-q)}{z^4-z^2} \\ z &= \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}} \\ q &= 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2\end{aligned}\tag{32}$$

Оценки максимума на границе (31):

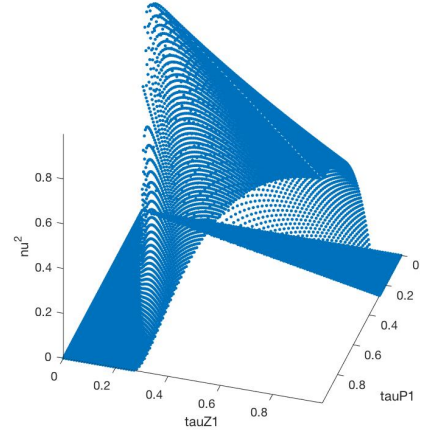
$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{2}, \varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon\delta = \frac{1}{4} \\ \delta &= \frac{1}{2z^2}, \varepsilon = \frac{z^2}{2}, \varepsilon\delta = \frac{1}{4} \\ \delta &= \frac{q}{2z^2}, \varepsilon = \frac{q}{2}, \varepsilon\delta = \frac{q^2}{4z^2}\end{aligned}\tag{33}$$

Максимум функции  $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$  представлен на графике.





(a) Численное приближение в MATLAB



(b) Вычисленный график

Рис. 2: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$

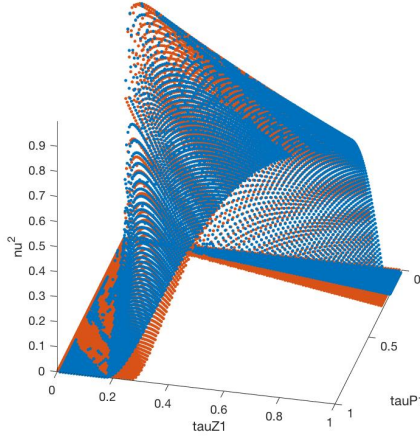


Рис. 3: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$ . Синим цветом представлено точное решение, а оранжевым цветом представлено вычисленное решение параметра  $\nu^2$

При  $B < 0$  уравнение может иметь 2 корня. В этой ситуации потребуем отрицательность дискриминанта:

$$\begin{aligned}
 & -4\tau_{z1}^4\varepsilon\delta + 8\tau_{z1}^4\varepsilon + \tau_{z1}^4 - 16\tau_{z1}^3\tau_{p1}\varepsilon - 8\tau_{z1}^3\tau_{p1} + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varepsilon\delta + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varepsilon + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\delta + \\
 & + 14\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2 - 16\tau_{z1}\tau_{p1}^3\delta - 8\tau_{z1}\tau_{p1}^3 - 4\tau_{p1}^4\varepsilon\delta + 8\tau_{p1}^4\delta + \tau_{p1}^4 \leq 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$4(\tau_{z1}^2 - \tau_{p1}^2)^2(2\varepsilon\tau_{z1}^2 - \varepsilon\delta + 2\delta\tau_{p1}^2) + (\tau_{z1} - \tau_{p1})^2(\tau_{z1}^2 - 6\tau_{z1}\tau_{p1} + \tau_{p1}^2) \leq 0 \tag{35}$$

$$4(\tau_{z1} + \tau_{p1})^2(2\varepsilon\tau_{z1}^2 - \varepsilon\delta + 2\delta\tau_{p1}^2) + (\tau_{z1}^2 - 6\tau_{z1}\tau_{p1} + \tau_{p1}^2) \leq 0 \tag{36}$$

## 5.2 $\tau > 0$

Предположим в (27)  $\tau > 0$  и разделим на  $\tau_{p1}^4\tau$ . Не умаляя общности, можем считать  $\tau = 1$ , тогда (27) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} t^3 + at^2 + bt + c &\geq 0 \\ A &= \frac{1}{\tau_{p1}^4}(-\tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{z1}^4 + 2\tau_{p1}^2 - \tau_{p1}^4\delta + \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\kappa) \\ B &= \frac{1}{\tau_{p1}^4}(1 - \tau_{z1}^2\kappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\kappa - 2\tau_{z1}^2 + 4\tau_{z1}\tau_{p1}\kappa - 2\tau_{p1}^2\delta) \\ C &= \frac{1}{\tau_{p1}^4}(\kappa - \varepsilon - 1 - \delta) \\ t &= x^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

## 6 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)(1 + \tau_{z2}x)}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} \quad (38)$$

Представим (38) в виде:

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1 + \alpha_1\beta_1x + \alpha_2\beta_2x^2}{1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2} \\ \alpha_1 &= \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1} + \tau_{z2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}} \end{aligned} \quad (39)$$

Предположим:

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \quad (40)$$

Предположим, что нелинейность  $f(\sigma) = \phi(\sigma)$  имеет изолированные нули и удовлетворяет ??????. Неравенство (40) гарантирует, что функция  $\chi(p) = x^{-1}K(x)$  не приводима. Тогда по теореме ???? пара  $(A, B)$  управляема. Заметим

$$\det(xI - A) = x^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}x + \alpha_2^{-1} \quad (41)$$

матрица  $A$  - матрица Гурвица. Найдем  $\varepsilon, \delta, \kappa, \tau$  так, что бы максимизировать  $\nu$ . Для этого подставим (39) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\alpha_2^2\tau t^3 + (\alpha_1^2\tau - 2\alpha_2\tau - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2\varepsilon - \alpha_2^2\beta_2^2\tau + \alpha_2^2\beta_2\kappa)t^2 + \\ &+ (\tau - \alpha_2\kappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2\varepsilon - \alpha_1^2\beta_1^2\tau - \alpha_2\beta_2\kappa + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon + 2\alpha_2\beta_2\tau + \alpha_1^2\beta_1\kappa)t + \\ &+ \kappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Положим  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned} &(-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \kappa\alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \kappa\alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2\kappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2\kappa + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + \\ &+ \kappa - \varepsilon - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Не умаляя общности можем считать  $\kappa = 1$ :

$$\begin{aligned} &(-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + \\ &+ 1 - \varepsilon - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Заметим, что  $\varepsilon \leq 1 - \delta$ . Для максимизации  $\varepsilon\delta$  положим  $\varepsilon = 1 - \delta$ .

$$(\alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta)t + \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0 \quad (45)$$

Нужно потребовать что бы выполнялось следующее условие

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0 \quad (46)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2(\beta_1 - \delta - \beta_1^2 + \beta_1^2\delta) - 2\alpha_2\beta_2\delta &\geq 0 \\ \alpha_1^2 &\geq \frac{\alpha_2(1 - \beta_2) - 2\alpha_2\delta(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1) - \delta + \beta_1^2\delta} > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2) - 2\alpha_2\delta(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \end{aligned} \quad (47)$$

Получили

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (48)$$

Так как максимальное значение достигается на границе положим

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta = 0 \quad (49)$$

Тогда

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \quad (50)$$

Получили, что

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2} \quad (51)$$