Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

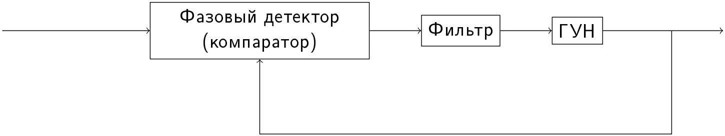
Миронов Алексей Владиславович

Санкт-Петербургский государственный университет

Научный руководитель: д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

2 марта 2020 г.

Принцип работы ФАПЧ

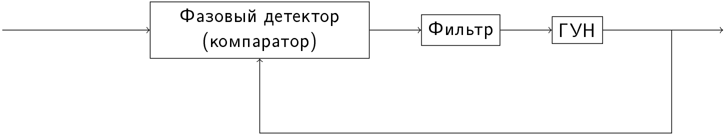


В результате воздействия компаратора появляется сигнал

$$v_e(\theta_{ref}(t) - \theta_{vco}(t)) \tag{1}$$

Где $\theta_{vco}(t)$ - фаза подстраиваемого генератора, $\theta_{ref}(t)$ - фаза эталонного генератора, $v_e(\theta_e(t))$ - 2π периодическая функция

Принцип работы ФАПЧ

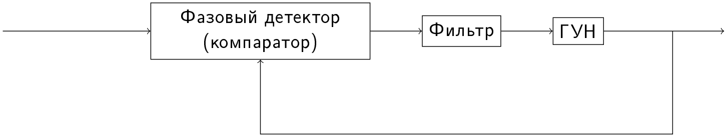


Связь входного $\upsilon_e(\theta_e(t))$ и выходного $\upsilon_f(t)$ сигналов фильтра нижних частот может быть описана уранениями

$$\dot{x} = Ax + b\upsilon_e(\theta_e(t)), \quad \upsilon_f(t) = c^*x + h\upsilon_e(\theta_e(t))$$

Где A - постоянная матрица $n \times n$, b и c постоянные n-мерные векторы, h - константа, $x(t)$ - n-мерный вектор состояний системы.

Принцип работы ФАПЧ



Подстройка частоты ГУН

$$\dot{\theta}_{vco}(t) = \omega_{vco}(t) = \omega_{vco}^{free} + K_{vco}v_f(t) \tag{2}$$

Где ω_{vco}^{free} - частота свободных колебаний ГУН, K_{vco} - коэфициент передачи.
Если эталонный генератор работает на постоянной частоте

$$\dot{\theta}_{ref}(t) = \omega_{ref}(t) \equiv \omega_{ref} \tag{3}$$

Разность частот эталонного генератора и частотой свободных колебаний ГУН

$$\omega_e^{free} \equiv \omega_{ref} - \omega_{vco}^{free} \tag{4}$$

Принцип работы ФАПЧ

Система дифференциальных уравнений описывающих работу ФАПЧ

$$\dot{x} = Ax + b\upsilon_e(\theta_e), \quad \dot{\theta}_e = \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + h\upsilon_e(\theta_e)) \tag{5}$$

В системе (5) сделаем следующие преобразования $-K_{vco} c \to c$, $-K_{vco} h \to h$ и замену

$$z = x + A^{-1} b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^* A^{-1} b - h} \tag{6}$$

В результате (5) примет вид

$$\dot{z} = Az + b(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma), \quad \dot{\theta}_e = c^* z + h(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)) \tag{7}$$

Теорема

Рассмотрим систему (7)

$$\dot{z} = Az + b(\varphi_e(\theta_e) - \gamma), \quad \dot{\theta}_e = c^* z + h(\varphi_e(\theta_e) - \gamma)) \tag{8}$$

Пусть $\varphi_e(\theta_e)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям

$$\mu_1 \leq \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_2 \tag{9}$$

Введем в рассмотрение число:

$$\nu = \int_0^{2\pi} (\varphi(\sigma) - \gamma) d\sigma \left(\int_0^{2\pi} \mid \varphi(\sigma) - \gamma \mid d\sigma \right)^{-1} \tag{10}$$

Теорема

Theorem

Пусть все нули функции $\varphi(\sigma)-\gamma$ *изолированы, пара* (A,b) *вполне управляема, все собственные значения матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части и существуют числа* $\varepsilon>0, \delta>0, \tau\geq 0$, *и* $\varkappa$, *такие что имеют место неравенства:*

$$Re(\varkappa K(ix)-\varepsilon(K(ix))^2-[K(ix)+\mu_1^{-1}ix]^*\tau[K(ix)+\mu_2^{-1}ix])\geq\delta, \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{11}$$

$$4\varepsilon\delta>(\varkappa\nu)^2 \tag{12}$$

Тогда система (7) глобально ассимптотически устойчива.

Постановка задачи

Оценить полосу захвата для систем, описывающихся следующими передаточными функциями:

$$F(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}$$

$$F(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}$$

$$F(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}$$

Оценка параметра ν^2 для фильтра $F(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

$$\frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} > \nu^2$$

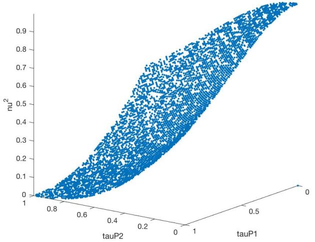


Рис.: First image

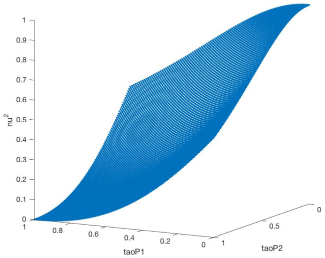
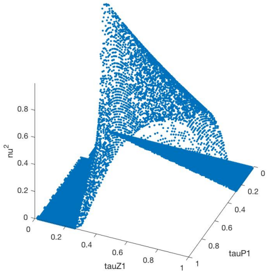


Рис.: Second image

Оценка параметра ν^2 для фильтра $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$



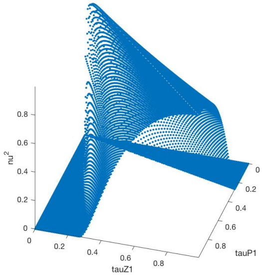


Рис.: 1. Численное приближение в MATLAB 2. Аналитическое решение

Фильтр $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

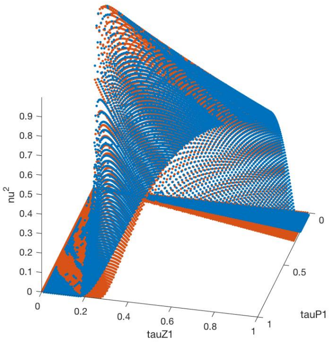


Рис.: График зависимости ν^2 от τ_{p1}, τ_{p2}. Синим цветом представлено точное решение. Оранжевым цветом представлено аналитическое решение.

Фильтр $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

При рассмотрении фильтра $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ получаем следующую оценку параметра ν^2:

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1)-\alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1-\alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2)-2\alpha_2(1-\beta_2)]^2}$$

$$\alpha_1 = \tau_{p1}+\tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1}+\tau_{z2}}{\tau_{p1}+\tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}}$$

Спасибо за внимание