УДК 517.977.5

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, которая подстраивает частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала. Она появилась в первой половине XX века [5]. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в различном телекоммуникационном оборудовании, навигационных системах и т. д. [1].

На практике часто используют системы ФАПЧ второго порядка. Наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка, отличающиеся хорошим подавлением шума и более низкой стационарной ошибкой [6].

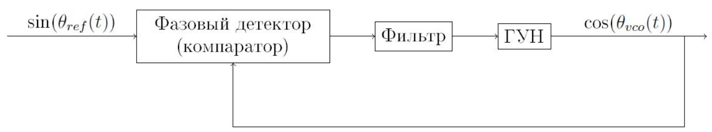

Рис. 1. Схема классической системы ФАПЧ, где $\sin(\theta_{ref}(t))$ — опорный сигнал с фазой $\theta_{ref}(t)$, $\cos(\theta_{vco}(t))$ — сигнал ГУН с фазой $\theta_{vco}(t)$

Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco}C^{\intercal}x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma)) \end{aligned} \tag{1}$$

Где A — постоянная матрица $n \times n$, B и C постоянные n — мерные векторы, D — константа, $x(t)$ — n-мерный вектор состояний системы,

Миронов Алексей Владиславович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru

Юлдашев Ренат Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: renatyv@pm.me

K_{vco} — коэфициент передачи, γ определяется следующим образом

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}\,(D - C^{\intercal} A^{-1} B)} \tag{2}$$

ω_e^{free} — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте. Введем в рассмотрение число:

$$\mid \nu \mid = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}} \tag{3}$$

Теорема 1 [3]. *Пусть все нули функции* $\sin(\theta_e) - \gamma$ *изолированы, пара* (A, B) *вполне управляема, все собственные значения матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части и существуют числа* $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geqslant 0$, *и* $\varkappa$, *такие что имеют место неравенства:*

$$\operatorname{Re}\Big(\varkappa W(ix) - \varepsilon\,[W(ix)]^2 - [W(ix) - ix]^{\intercal}\,\tau\,[W(ix) + ix]\Big) \geqslant \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \tag{5}$$

Тогда система (1) *глобально ассимптотически устойчива.*

Приведенная теорема не отвечает на вопрос как найти полосу захвата, т. е. максимальную разность частот опорного сигнала и ГУН ω_e^{free}, при котором система (1) глобально ассимптотически устойчива. Этот вопрос является важным для инженеров при физической реализации ФАПЧ. Для ответа рассмотрим некоторые фильтры 2 порядка. Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие условию теоремы так, что бы максимизировать ν. Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free}, при котором система (1) глобально ассимтотически устойчива.

2. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \tag{6}$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + (\tau_{p1}^{-1} + \tau_{p2}^{-1})s + \tau_{p1}^{-1}\tau_{p2}^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, B) вполне управляема. Подставим

(6) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации ν положим

$$\varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = \tau_{p1}\tau_{p2} + \delta(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2), \quad \delta = \frac{1 - \tau_{p1}\tau_{p2}}{2(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1)}$$

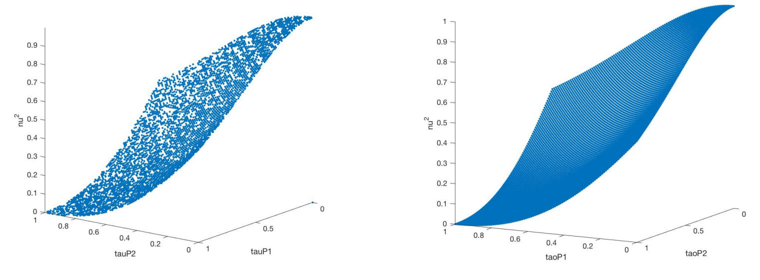

Рис. 2. Численная оптимизация ν^2 в MATLAB с помощью функции fmincon и график ν^2 построенный по (7)

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \tag{7}$$

3. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$. Рассмотрим передаточную функцию

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2} \tag{8}$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + 2\tau_{p1}^{-1}s + \tau_{p1}^{-2}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, B) вполне управляема. Подставим (8) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации ν положим $\varkappa = 1$, $\tau = 0$

$$\varepsilon = \begin{cases} z^2 - z^4\delta, & \delta \in [\delta_1, \delta_2] \\ q - z^2\delta, & \delta \in (\delta_2, \delta_3] \\ 1 - \delta, & \delta \in (\delta_3, \delta_4] \end{cases}$$

где $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}$, $q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$, δ_i, $i = \overline{1,4}$ — точки разбивающие $[0,1]$ на непересекающиеся полуинтервалы, в зависимости от z. Положим δ равным одним из $\frac{1}{1+z^2}$, $\frac{1-q}{1-z^2}$, $\frac{z^2-q}{z^4-z^2}$, $\frac{q}{2z^2}$, $\frac{1}{2z^2}$, $\frac{1}{2}$ в зависимости от z. Тогда $4\varepsilon\delta$ пределяется одним из следущих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^4-z^2}\left(z^2 - \frac{z^2(z^2-q)}{z^2-1}\right) \quad (9)$$

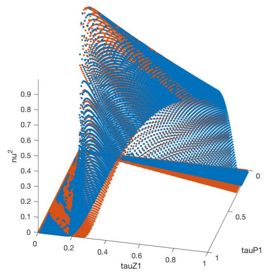

Рис. 3. Численная оптимизация ν^2 в MATLAB с помощью функции fmincon и график ν^2 построенный по (9)

4. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2}$. Рассмотрим передаточную функцию

$$W(x) = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2} \quad (10)$$

Где α_1, α_2, β_1, β_2 вещественные положительные числа. Предположим

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \quad (11)$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}s + \alpha_2^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, B) вполне управляема. Подставим (10) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации ν положим

$$\tau = 0, \quad \varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)}{\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)}$$

Потребуем

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1)} \tag{12}$$

Это условие гарантирует положительность числителя и знаменателя δ.

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1)-\alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1-\alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2)-2\alpha_2(1-\beta_2)]^2} \tag{13}$$

Эта оценка была получена в [2], однако вывод был пропущен.

5. Заключение. В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат будет интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 115–116.
2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.
3. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Изд-во Невский диалект, 2014. P. 58–66.
4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLLCircuits: Rigorous Mathematical Definitions andLimitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2455.
5. Appleton E. E. Automatic synchronization of triode oscillators // Proc. Camb. Phil. Soc. 1923. Vol. 21, No 3. P. 231.
6. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vols. 255-260. P. 2262.