1 Введение

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\upsilon_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + h\upsilon_e(\theta_e)) \end{aligned} \tag{1}$$

Найдем стационарные точки системы 4

$$\begin{aligned} x &= -A^{-1}b\upsilon_e(\theta_e) \\ \upsilon_e(\theta_e) &= \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} \end{aligned} \tag{2}$$

Возьмем $\theta_e = \theta_s$, для которых выполняется 2. Сделаем замену:

$$\begin{aligned} z &= x + A^{-1}b\upsilon_e(\theta_s) \\ \sigma &= \theta_e - \theta_s \end{aligned} \tag{3}$$

После замены система 4 принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b(\upsilon_e(\sigma + \theta_s) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}) \\ \dot{\sigma} &= -K_{vco}(c^*z + h(\upsilon_e(\sigma + \theta_s) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)})) \end{aligned} \tag{4}$$

2 Теорема

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= C^*z + Rf(\sigma) \end{aligned} \tag{5}$$

Here A, B, C, and R are constant matrices of dimensions n $\times$ n, n $\times$ m, n $\times$ m, and n $\times$ n, respectively, whereas the components ϕ_k, $1 \le k \le m$, of the vector-valued function $f(\sigma)$ are scalar differen-tiable functions $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$, where ψ_k is the k-th component of the vector ψ.

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function $\varkappa(p)$ can be written in the form 5 with m = 1 by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions $\phi_k(\sigma_k)$ satisfy the followingconditions: $\phi_k(\sigma_k) \equiv 0$

Теорема 1. *Suppose that the stationary set Λ of system 5 consists of isolated points, the pair (A, B) is controllable, the matrix A is Hurwitz, and there exist diagonal m $\times$ m matrices $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \ge 0$, and $\varkappa$ such that the following inequalities are valid:*

$$\begin{aligned} &Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^*\varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1}ix]^*\tau[K(ix) + \mu_2^{-1}ix]) \ge \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ &4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Then system 5 is gradient-like.

Очевидно, что систему 4 можно привести к системе 5 положив:

$$\begin{aligned} &A = A \\ &B = b \\ &C = -K_{vco}c^* \\ &R = -K_{vco}h \\ &f(\sigma) = \upsilon_e(\sigma + \theta_s) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} \end{aligned} \tag{7}$$

3 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)} = \frac{1}{1+(\tau_{p1}+\tau_{p2})x+\tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \tag{8}$$

Введем обозначения: $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$, $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$
Рассмотрим первое условие теоремы:

$$Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^*\varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^*\tau[K(ix) + ix]) \geq \delta \tag{9}$$

Подставим, рассматриваемую передаточную функцию в условие теоремы. В результате первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tau b^2t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ &t \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Второе условие теоремы имеет вид:

$$\begin{aligned} &4\varepsilon\delta > \nu^2\varkappa^2 \\ &\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Будем искать максимум $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$

3.1 Оценка максимума ν константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось 12 нужно $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$

$$\begin{aligned} &\varkappa \geq \varepsilon + \tau + \delta \\ &\varkappa^2 \geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ &2 - (\frac{2\varepsilon^2}{\varkappa^2} + \frac{2\delta^2}{\varkappa^2} + \frac{2\tau^2}{\varkappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\varkappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\varkappa^2}) \geq \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} \\ &2 > \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \tag{12}$$

3.2 Точная оценка максимума ν

2. Так как $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, то $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$. Для максимизации функции $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ возьмем $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$
Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} &\tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \geq 0 \\ &t > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

И будем искать максимум следующей функции:

$$\begin{aligned} &f(z) = 4z - 4z_1 z - 4z^2 \\ &z_1 = \frac{\tau}{\varkappa}, z = \frac{\delta}{\varkappa} \end{aligned} \tag{14}$$

Будем рассматривать $f(z)$, как функцию от z с параметром z_1. Очевидно, что максимум этой функции достигается при $z_{max} = \frac{1-z_1}{2}$ и $f(z_{max}) = (1 - z_1)^2$

Рассмотрим дискриминант уравнения 13:

$$D = (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)^2 - 4\tau b^2(\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \tag{15}$$

Разделим на $\varkappa^2 > 0$, тогда 15 примет вид:

$$\frac{D}{\varkappa^2} = z_1^2(-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2) - z_1(\frac{b^4}{2} + 2b^3 - a^2b^2 + 4b^2) + \frac{b^4}{4} \tag{16}$$

Не умаляя общности положим далее $\varkappa = 1$ Множество допустимых значений z_1 состоит из тех z_1 для которых: $D < 0$ или $D \geq 0$ и $x_2 \leq 0$, где x_2 наибольший корень уравнения 13.
Рассмотрим дискриминант уравнения $D = 0$:

$$D_1 = (\frac{b^4}{2} + 2b^3 - a^2b^2 + 4b^2)^2 - b^4(-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2) \tag{17}$$

3.2.1 Первый случай

$D_1 < 0$ и $(-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2) > 0$, тогда $D \geq 0$, значит

$$M = \max_{-(\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2) + \sqrt{D(z_1)} \leq 0} |1 - z_1| = \max_{-(\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2) + \sqrt{D(z_1)} = 0} |1 - z_1| \tag{18}$$

$f_{max} = (1 - M)^2$

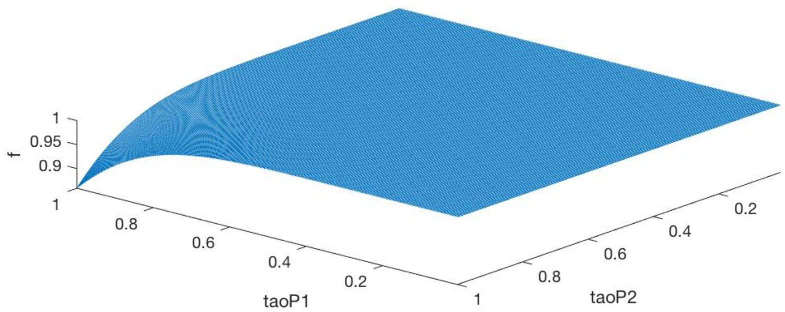
3.2.2 Второй случай

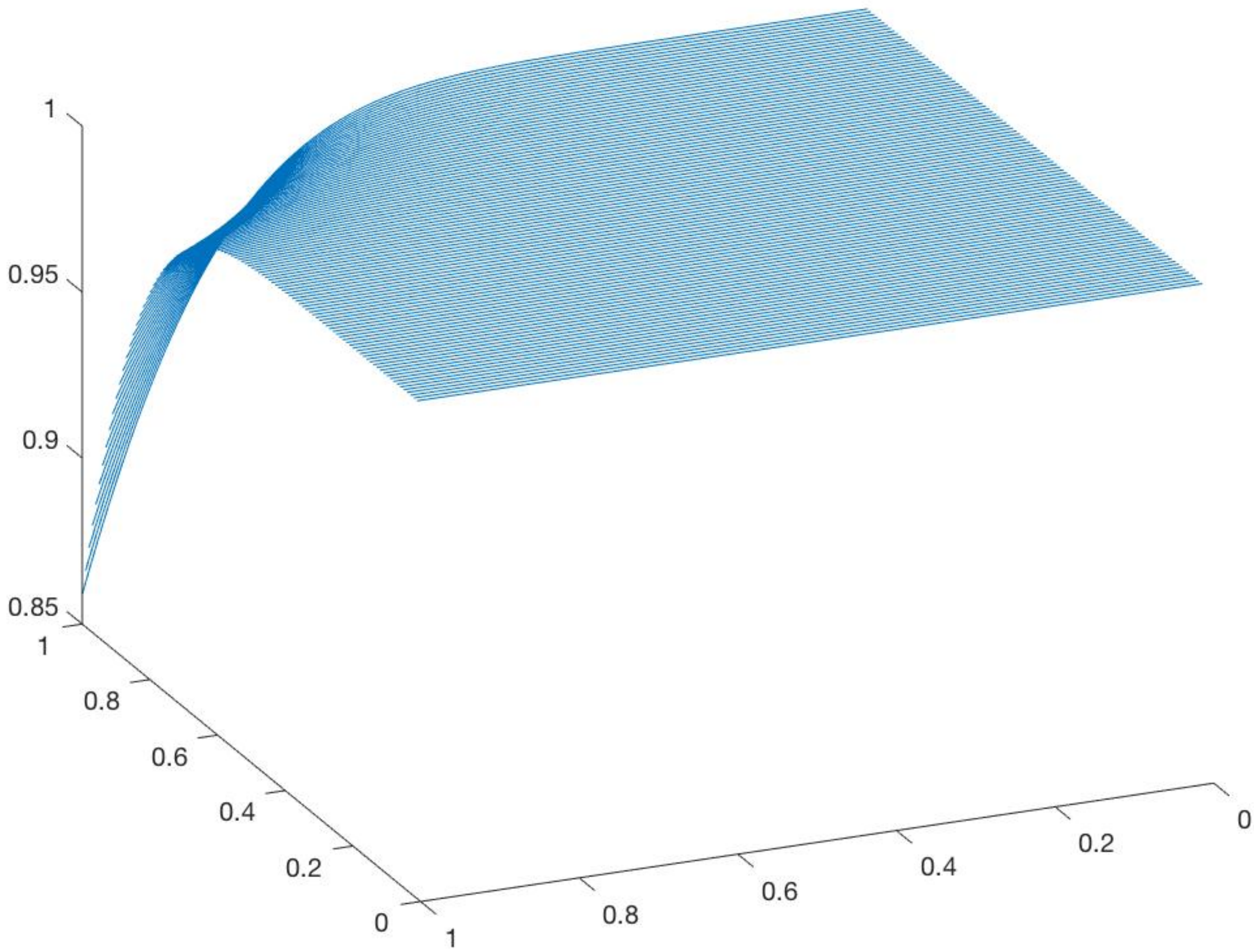
$D_1 \geq 0$ и $(-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2) > 0$

Корни уравнения $D = 0$ будут $d_{1,2} = \frac{(\frac{b^4}{2} + 2b^3 - a^2b^2 + 4b^2) \pm \sqrt{D_1}}{2(-4b^2 - 2a^2b^2 + 4b^3 + (a^2 - 2b + \frac{b^2}{2})^2)}$

При $z_1 \in [d_1, d_2]$ $D \leq 0$, значит $M_1 = \max\limits_{z_1 \in [d_1, d_2]} |1 - z_1|$
При $z_1 \in (-\inf, d_1) \cup (d_2, +\inf)$ $D \geq 0$, значит $M_2 = \max\limits_{-(\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2) + \sqrt{D(z_1)} \leq 0} |1 - z_1|$

$M = max\{M_1, M_2\}$
$f_{max} = (1 - M)^2$





1
0.95
0.9
0.85
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0