УДК 510

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. В повседневной жизни мы пользумся компьютерами, телевизорами, GPS и другими устройствами, для эффективной работы которых необходима синхронизация частот сигналов. Для решения это задачи в первой половине XX века была изобретена система фазовой автоподстройки частоты [5] (ФАПЧ) — система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генераторов. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в различных телекоммуникационном оборудовании, навигационных системах и др.

На практике часто рассматривают системы ФАПЧ второго порядка. Однако одиним из недостатков таких систем является, недостаточное подавление высокочастотного шума, который может существенно повлиять на функционирование системы, поэтому наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка. Преимуществами ФАПЧ третьего порядка является хорошее подавление шума и более низкая стационарная ошибка [6].

Хорошо изветна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + hv_e(\theta_e)) \end{aligned} \tag{1}$$

Где A — постоянная матрица $n \times n$, b и c постоянные n — мерные векторы, h — константа, $x(t)$ — n-мерный вектор состояний системы, ω_{vco}^{free} — частота свободных колебаний ГУН, K_{vco} — коэфициент передачи. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

Миронов Алексей Владиславович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru, тел.: +7(911)146-14-40

Юлдашев Ренат Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: email@email.ru, тел.: +7(000)000-00-00

В системе (1) сделаем следующие преобразования $-K_{vco}c \to c$, $-K_{vco}h \to h$ и замену

$$z = x + A^{-1}b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^* A^{-1}b - h} \tag{2}$$

Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= c^* z + h(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)) \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим систему(3), предполагая, что функция $\upsilon_e(\theta_e)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям

$$\mu_1 \leqslant \frac{d\upsilon_e(\theta_e)}{d\theta_e} \leqslant \mu_2 \tag{4}$$

Введем в рассмотрение число:

$$\nu = \int_0^{2\pi} (\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)\, d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} \mid \upsilon_e(\theta_e) - \gamma \mid d\theta_e \right)^{-1} \tag{5}$$

Теорема 1 [3]. *Пусть все нули функции $\upsilon_e(\theta_e) - \gamma$ изолированы, пара (A, b) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geqslant 0$, и $\varkappa$, такие что имеют место неравенства:*

$$\operatorname{Re}\Big(\varkappa K(ix) - \varepsilon\,[K(ix)]^2 - \left[K(ix) + \mu_1^{-1} ix\right]^* \tau \left[K(ix) + \mu_2^{-1} ix\right]\Big) \geqslant \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \tag{7}$$

Тогда система (3) глобально ассимптотически устойчива.

2. Инженерное применение. Приведенная теорема не отвечает на вопрос как найти полосу захвата, т. е. максимальный интервал $\omega_e^{free} \in [0, \omega_{pull-in}]$, при котором система (1) глобально ассимптотически устойчива. Этот вопрос является важным для инженеров при физической реализации ФАПЧ. Для ответа рассмотрим некоторые фильтры 2 порядка. Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие условию теоремы так, что бы максимизировать ν. При характеристике фазового детектора $\upsilon(\theta_e) = sin(\theta_e)$, ν выражается следующим образом

$$\mid \nu \mid = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1 - \gamma^2}} \tag{8}$$

Из (9) и второго уравнения (2) можно однозначно найти ω_e^{free}. Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free}, при котором система (1) глобально ассимтотически устойчива.

3. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)} = \frac{1}{1+as+bs^2}$$
$$a = \tau_{p1}+\tau_{p2}, \quad b = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \tag{9}$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + ab^{-1}s + b^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, b) вполне управляема. Для максимизации ν подставим (10) в (6) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену переменной $t = s^2$. В результате преобразований получим

$$\begin{aligned} &\tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + \\ &+ \varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что $\varepsilon \leqslant \varkappa - \tau - \delta$ является необходимым условием для (11). Положим $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$. Не умаляя общности, можем считать $\varkappa = 1$, тогда первое условие теоремы принимает вид

$$\begin{aligned} &At^2 + Bt + C \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ &A = \tau b^2, \quad B = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2, \quad C = -b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \end{aligned} \tag{11}$$

Для того, что бы выполнялось (12) необходимо потребовать $A \geqslant 0$ и $C \geqslant 0$, тогда $B \geqslant 0$. В этом случае уравнение $At^2 + Bt + C = 0$ не имеет положительных корней, т. е. выполняется (12). Будем искать максимум следующей функции

$$\nu^2 < 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \tag{12}$$

Получили задачу на условный экстремум, т. е. найти максимум (13), при условии $C \geqslant 0$. Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Однако точки падения ранга противоречат условию теоремы. Рассмотри границу допустимой области, т. е. $C = 0$, выразим τ через δ и подставим в (13)

$$\nu^2 < 4\delta(1-b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \tag{13}$$

Максимум (14) достигается при $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$ и равен

$$\nu^2 < \frac{(b-1)^2}{a^2-2b+1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2}-1)^2}{\tau_{p1}^2+\tau_{p2}^2+1} \tag{14}$$

4. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию

$$\begin{aligned} &W(x) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)} = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2} \\ &\alpha_1 = \tau_{p1}+\tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1}+\tau_{z2}}{\tau_{p1}+\tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}} \\ &0<\tau_{p1}<1, \quad 0<\tau_{p2}<1, \quad 0<\tau_{z1}<1, \quad 0<\tau_{z2}<1 \end{aligned} \tag{15}$$

Предположим

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \tag{16}$$

Поскольку $\det(sI-A) = s^2+\alpha_1\alpha_2^{-1}s+\alpha_2^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A,b) вполне управляема. Для максимизации ν подставим (16) в (6) и перенесем все в левую часть неравенства. Положим $\tau = 0$, и не умаляя общности можем считать $\varkappa = 1$. В результате преобразований первое условие теоремы **??** принимает следующий вид

$$\begin{aligned} &(-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_2-\delta\alpha_2^2)t^2+ \\ &+(-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2+\alpha_1^2\beta_1-\delta\alpha_1^2-\alpha_2+2\alpha_2\delta-\alpha_2\beta_2+2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t+ \\ &+1-\varepsilon-\delta \geqslant 0, \quad \forall t\in\mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{17}$$

Заметим, что $\varepsilon \leqslant 1-\delta$ является необходимым условием для (18). Для максимизации $4\varepsilon\delta$ положим $\varepsilon = 1-\delta$. Тогда (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &At+B \geqslant 0, \quad \forall t\in\mathbb{R}_+ \\ &A = \alpha_2^2\beta_2-\alpha_2^2\delta-\alpha_2^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_2^2\delta \\ &B = \alpha_2\beta_2-\alpha_2+2\alpha_2\delta+\alpha_1^2\beta_1-\alpha_1^2\delta-\alpha_1^2\beta_1^2+\alpha_1^2\beta_1^2\delta-2\alpha_2\beta_2\delta \end{aligned} \tag{18}$$

Выполнение (17) влечет $A>0$. Так как максимальное значение достигается в точках падения ранга или на границе положим $B=0$. Тогда из $B=0$ получаем

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1-\alpha_2(1-\beta_2)}{\alpha_1^2(1-\beta_1^2)-2\alpha_2(1-\beta_2)} \tag{19}$$

Для того что бы $\delta > 0$ потребуем

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1)} \tag{20}$$

Это условие гарантирует положительность числителя и знаменателя (20). В результате преобразований получили оценку для ν^2

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1)-\alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1-\alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2)-2\alpha_2(1-\beta_2)]^2} \tag{21}$$

Эта оценка была получена в [2], однако вывод был пропущен.

5. Заключение. В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный будет интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 195–207.

2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.

3. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Изд-во Невский диалект, 2014. P. 195–207.

4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Solution of the Gardner problem on the lock-in range of phase-locked loop // ArXiv e-prints. 2017. 1705.05013. P. 289–298.

5. Appleton E. E. Automatic synchronization of triode oscillators // Proc. Camb. Phil. Soc. 1923. Vol. 21, No 3. P. 231.

6. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vols. 255-260. P. 1.