Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

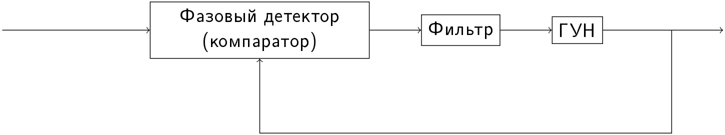
Миронов Алексей Владиславович

Санкт-Петербургский государственный университет

Научный руководитель: д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

4 марта 2020 г.

Принцип работы ФАПЧ



Определение

Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система предназначенная для синхронизации частот эталонного и подстраиваемого генераторов

Применение системы ФАПЧ

1. Телекоммуникационное оборододование
2. Навигационное оборудование (GPS, Глонасс, Галилео)
3. Компьютеры (микропроцессоры)
4. Военном оборудовании (frequency hopping)

Принцип работы ФАПЧ

Дифференциальные уравнения ФАПЧ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\upsilon_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + h\upsilon_e(\theta_e)) \end{aligned} \tag{1}$$

Определение

Полоса захвата — максимальная разность частот опорного сигнала и ГУН ω_e^{free}, при которой система ФАПЧ глобально ассимптотически устойчива.

Определение

Функция

$$W(s) = -c^* (A - sI)^{-1} b + h \tag{2}$$

Назывветея передаточной функцией системы (1)

Постановка задачи

Для реализации ФАПЧ важно знать диапазон частот, для которых возможна синхронизация.

Оценим полосу захвата систем ФАПЧ с фильтрами

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$

$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$$

$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$

$$0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad 0 < \tau_{z1} < 1, \quad 0 < \tau_{z2} < 1$$

Теорема

Положим, что функция $\upsilon_e(\theta_e)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет

$$\mu_1 \leq \frac{d\upsilon_e(\theta_e)}{d\theta_e} \leq \mu_2 \tag{3}$$

Введем в рассмотрение

$$\nu = \int_0^{2\pi} (\upsilon_e(\theta_e) - \gamma) d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} \mid \upsilon_e(\theta_e) - \gamma \mid d\theta_e \right)^{-1} \tag{4}$$

Теорема

Пусть все нули функции $\upsilon_e(\theta_e) - \gamma$ изолированы, пара (A, b) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, и $\varkappa$, такие что имеют место неравенства:

$$Re(\varkappa K(ix) - \varepsilon(K(ix))^2 - [K(ix) + \mu_1^{-1} ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1} ix]) \geq \delta, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2$$

Теорема

Тогда система

$$\dot{z} = Az + b(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)$$
$$\dot{\theta}_e = c^* z + h(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)) \qquad (5)$$

глобально ассимптотически устойчива.

Рассмотрим систему ДУ ФАПЧ (1)

$$\dot{x} = Ax + b\upsilon_e(\theta_e)$$
$$\dot{\theta}_e = \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + h\upsilon_e(\theta_e))$$

Сделаем преобразования $-K_{vco}c \to c$, $-K_{vco}h \to h$ и замену

$$z = x + A^{-1}b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^* A^{-1}b - h} \qquad (6)$$

В результате (1) примет вид (5)

Общая идея

Найти $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, из условия теоремы, что бы максимизировать ν. Тогда из определения ν

$$\nu = \int_0^{2\pi} (\upsilon_e(\theta_e) - \gamma) d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} \mid \upsilon_e(\theta_e) - \gamma \mid d\theta_e \right)^{-1} \tag{7}$$

и замены

$$z = x + A^{-1} b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^* A^{-1} b - h} \tag{8}$$

найдется ω_e^{free}. Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free}, при котором система ДУ ФАПЧ

$$\dot{x} = Ax + b\upsilon_e(\theta_e)$$
$$\dot{\theta}_e = \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + h\upsilon_e(\theta_e))$$

глобально ассимтотически устойчива.

Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)} \tag{9}$$

Подставим (9) в первое условие теоремы. Для максимизации ν положим

$$\varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = \delta\tau_{p1}^2 + \delta\tau_{p2}^2 + \tau_{p1}\tau_{p2} \tag{10}$$

Получим оценку для ν^2

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \tag{11}$$

Фильтр $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

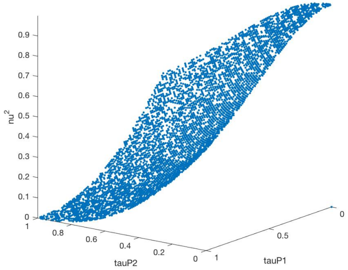


Рис.: Численное решение

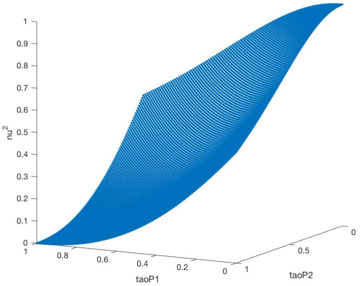
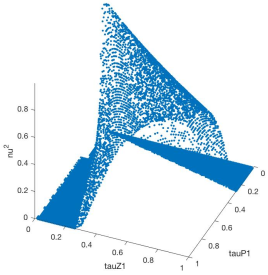


Рис.: Аналитическое решение

Оценка параметра ν^2 для фильтра $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$



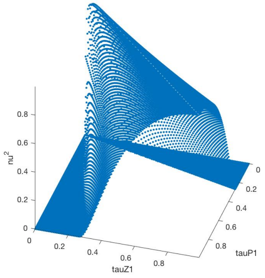


Рис.: 1. Численное приближение в MATLAB 2. Аналитическое решение

Фильтр $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

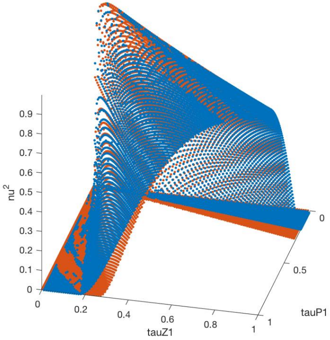


Рис.: График зависимости ν^2 от τ_{p1}, τ_{p2}. Синим цветом представлено точное решение. Оранжевым цветом представлено аналитическое решение.

Фильтр $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

При рассмотрении фильтра $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ получаем следующую оценку параметра ν^2:

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1)-\alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1-\alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2)-2\alpha_2(1-\beta_2)]^2}$$

$$\alpha_1 = \tau_{p1}+\tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1}+\tau_{z2}}{\tau_{p1}+\tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}}$$

Итог

1. Для фильтра
$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$
была найдена оценка полосы захвата
2. Для фильтра
$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$
был восстановлен вывод оценки полосы захвата

Спасибо за внимание