УДК 517.977.5

Миронов А. В., Юлдашев Р. В., Юлдашев М. В., Кузнецов Н. В.

Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, подстраивающая частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в телекоммуникационном оборудовании [1], навигационных системах [2] и др. Основными параметрами ФАПЧ являются полосы удержания, захвата и захвата без проскальзывания [3]. В данной работе исследуются оценки полосы захвата для некоторых систем ФАПЧ третьего порядка, которые отличаются хорошим подавлением шума и низкой стационарной ошибкой, по сравнению с системами ФАПЧ второго порядка [4].

2. Математическая модель ФАПЧ. Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [5], рис. 1,

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma),\\
&\dot{\theta}_e = -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma)),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где A — постоянная $(n \times n)$-матрица, B и C — постоянные n-мерные векторы, D — константа, $x(t)$ — n-мерный вектор состояний системы, $W(s) = C^T\,(A - sI)^{-1}\,B - D$ — передаточная функция фильтра.

Миронов Алексей Владиславович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru, тел.:+7(812)321-31-33

Юлдашев Ренат Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: renatyv@pm.me, тел.:+7(812)321-31-33

Юлдашев Марат Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: maratyv@gmail.com, тел.:+7(812)321-31-33

Кузнецов Николай Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nkuznetsov239@gmail.com, тел.:+7(812)321-31-33

Работа выполнена в рамках проекта Ведущих научных школ НШ-2624.2020.1

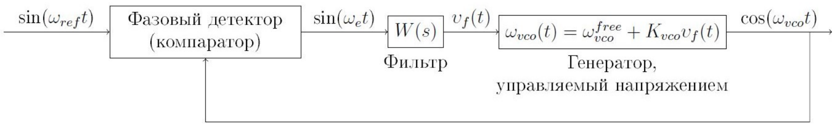

Рис. 1. Схема классической системы ФАПЧ, где ω_{ref} — частота опорного сигнала, ω_{vco} — частота сигнала ГУН, $v_f(t)$ — выходной сигнал фильтра, ω_{vco}^{free} — частота свободных колебаний ГУН, $\omega_e = \omega_{ref} - \omega_{vco}$

Здесь будем рассматривать фильтры третьего порядка со следующими передточными функциями

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1,$$

$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2},$$

$$W(s) = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s + \alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s + \alpha_2 s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \quad 0 < \alpha_2.$$

Коэффициент передачи ГУН равен K_{vco}, величина γ определяется следующим образом

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}\,(D - C^T A^{-1} B)},$$

где $\omega_e^{free} = \omega_{ref} - \omega_{free}$ — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

3. Оценка области захвата. Введем определение полосы захвата согласно [5].

Определение 1. Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН $|\omega_p|$ такая, что система (1) глобально асимптотически устойчива для всех $0 < |\omega_e^{free}| < |\omega_p|$.

Определение 2. Система (1) называется глобально асимптотически устойчивой, если любое решение $x(t, x_0)$ стремится к некоторому состоянию равновесия при $t \to +\infty$.

Введем в рассмотрение число

$$| \nu |= \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Следующая теорема дает условие глобальной асимптотической устойчивости (1).

Теорема 1 [6]. *Пусть все нули функции* $\sin(\theta_e) - \gamma$ *изолированы, пара* (A, B) *вполне управляема, все собственные значения матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части и существуют числа* $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geqslant 0$, *и* $\varkappa$, *такие что имеют место неравенства:*

$$\operatorname{Re}\left(\varkappa W(ix) - \varepsilon\left[W(ix)\right]^2 - \tau\left[\overline{W(ix)} + ix\right]\left[W(ix) + ix\right]\right) \geqslant \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2. \tag{3}$$

Тогда система (1) *глобально асимптотически устойчива.*

Теорема 1 может быть использована для получения аналитических оценок полосы захвата. Для этого необходимо выбрать $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие (2) так, чтобы максимизировать ν. Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free}, при котором система (1) глобально асимптотически устойчива.

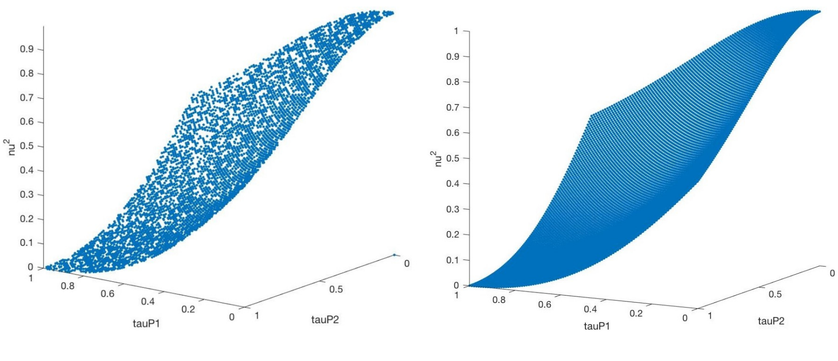

Рис. 2. Слева — численная оценка ν^2 в MATLAB с помощью функции fmincon; справа — график ν^2, полученный из (3) при выполнении (2).

Применение теоремы 1 к фильтру с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1,$$

приводит к оценке, изображенной на рис. 2

Применение теоремы 1 к фильтру с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2},$$

приводит к оценке, изображенной на рис. 3

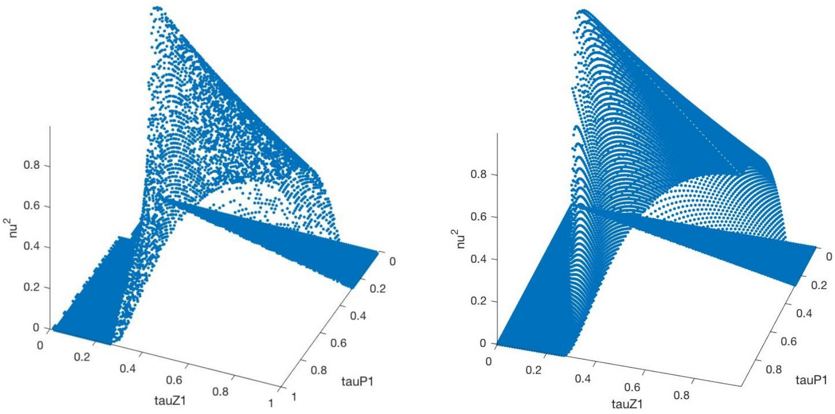

Рис. 3. Слева — численная оценка ν^2 в MATLAB с помощью функции fmincon; справа — график ν^2, полученный из (3) при выполнении (2).

4. Заключение. В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются в различных устройствах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат может быть интересен инженерам при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications. New York: McGraw-Hill Education, 2007. 421 p.

2. Rao R. B., Kunysz W., Fante R., McDonald K. GPS/GNSS Antennas. Boston: Artech House, 2013. 420 p.

3. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Изд-во «Связь», 1972. 447 с.

4. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vol. 255–260. P. 2262–2266.

5. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2454–2464.

6. Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B. Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1992. 242 p.