

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Нелинейная динамика, информатика и управление

Миронов Алексей Владиславович

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

Рецензент:  
Благов М. В.

Санкт-Петербург  
2020

Saint Petersburg State University  
Applied Mathematics and Computer Science  
The chair of applied cybernetics

Mironov Alexey Vladislavovich

Analytical estimates of the pull-in range for third-order PLLs

Final qualifying work

Scientific supervisor:  
assistant professor Yuldashev R. V.

Reviewer:  
Blagov M. V.

Saint-Petersburg  
2020

# Содержание

<b>1. Введение . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1. Примеры расфазировки . . . . .	3
1.2. Применение ФАПЧ . . . . .	4
<b>2. Математическая модель ФАПЧ . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>3. Постановка задачи . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>4. Оценка полосы захвата . . . . .</b>	<b>11</b>
4.1. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ . . . . .	11
4.1.1 Оценка максимума $\nu$ константой . . . . .	11
4.1.2 Точная оценка максимума $\nu$ . . . . .	12
4.2. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$ . . . . .	14
4.3. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$ . . . . .	16
<b>5. Заключение . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>Листинги . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>27</b>

# 1. Введение

Современный мир невозможно представить без огромного количества сигналов, передающихся беспроводным способом или по электрическим схемам. При этом возникла необходимость в фазовой синхронизации сигналов, которая играет важную роль в различных системах. Электрический ток в энергосетях вырабатывается синхронными генераторами, действие которых основано на принципе фазовой синхронизации [10]. В США и России GSM связь работает на разных частотах, поэтому мобильным телефонам, требуется синхронизация частот приемника и передатчика, это позволяет туристам пользоваться одним телефоном и в России, и в США.

## 1.1 Примеры расфазировки

В телекоммуникационных системах часто возникает необходимость в фазовой синхронизации частот. Например, в гражданских системах телекоммуникации, таких как радио или телевидение, используется одна несущая частота, которая является постоянной. Многие люди даже знают частоту вещания своей любимой радиостанции. Однако для военных нужд использование одной несущей частоты несет определенные риски, связанные с тем, что постоянную частоту легко заглушить. Для решения этой проблемы военными был разработан метод скачкообразного изменения частоты сигнала [11]. Для этого выбирается  $N$  различных частот, которые чередуются с некоторым интервалом. Для приемника сигнала это означает, что он должен уметь подстраиваться под несущую частоту очень быстро, например за 100 микросекунд, т.е. возникает необходимость в фазовой синхронизации частоты трансмиттера и ресивера.

Синхронизация частот требуется, не только в телекоммуникационных системах, но и в компьютерах. С развитием микропроцессоров, когда тактовая частота достигла 50МГц, появилась необходимость устранять расфазировку между внешними и внутренними тактами (Clock skew), вызванную задержкой драйвера встроенного тактового генератора. Поскольку размер микропроцессора увеличился до 1 миллиона транзисторов и кроме того, возросла нагрузка на генератор тактов. Все это привело к тому, что

задержка тактового генератора может составлять более 2 наносекунд [2]. Эта задержка вызывает большое время удержания для входных/выходных сигналов и является ограничением на проектирование систем на высоких тактовых частотах.

## 1.2 Применение ФАПЧ

Для решения проблемы расфазировки в первой половине XX века была изобретена система фазовой автоподстройки частоты [12] (ФАПЧ) — система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генератора, в простейшем виде состоящая из фазового детектора (компаратора), фильтра нижних частот и генератора, управляемого напряжением. Сразу после появления системы ФАПЧ начали применяться в радио и телевидении [13]. Инженерная практика применения и теория систем ФАПЧ начали интенсивно развиваться во второй половине XX века [15]. Сразу после реализации систем фазовой автоподстройки частоты в виде одной микросхемы, системы ФАПЧ стали широко применяться в современных телекоммуникационных системах. В настоящее время микросхемы, использующие системы фазовой автоподстройки используются в различных электро-механических приборах [3], энергетических генераторах, системах передачи данных [14] и навигационных системах [9] (GPS, ГЛОНАСС и Галилео).

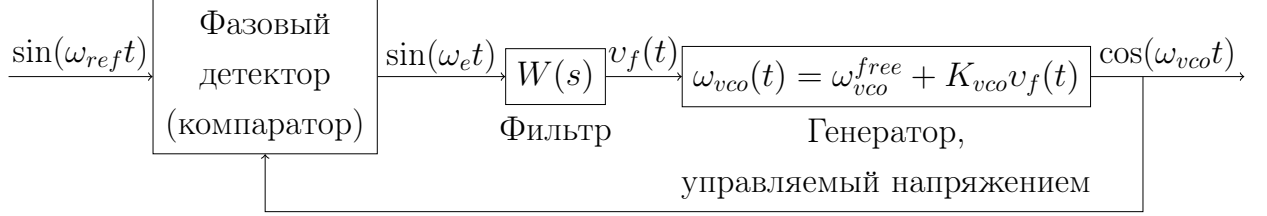
Особенностью функционирования систем ФАПЧ является нелинейность фазы подстраиваемого генератора в переходном режиме [16]. При постоянной частоте эталонного генератора система ФАПЧ позволяет получить различные степени синхронизации. Например, система ФАПЧ второго порядка, теоретически позволяет получить полную синхронизацию сигналов, т.е. сигнал с той же частотой и постоянную разность фаз. Одним из недостатков систем ФАПЧ второго порядка является, недостаточное подавление высокочастотного шума, который может существенно повлиять на функционирование системы в целом. Еще одним недостатком является резкое ухудшение синхронизации частот при изменении коэффициент передачи. Именно поэтому наряду с системами ФАПЧ второго порядка ис-

следуются системы третьего порядка. Основными преимуществами ФАПЧ третьего порядка является хорошее подавление шума и более низкая стационарная ошибка, по сравнению с системами ФАПЧ второго порядка [7]. В различных телекоммуникационных системах точность синхронизации является одним из важнейших параметров, поскольку именно от точности подстройки зависит производительность системы [1]. Однако с увеличением точности синхронизации возрастает сложность реализации и анализа систем фазовой автоподстройки частоты.

Основными параметрами ФАПЧ являются полосы удержания, захвата и захвата без проскальзывания [8]. В данной работе получены оценки полосы захвата для некоторых систем фазовой автоподстройки частоты третьего порядка. Такие системы исследовались в [6], для них были получены численные оценки полосы захвата. Так же оценки полосы захвата для систем ФАПЧ третьего порядка были представлены в [4]. Однако в данной работе получены аналитические оценки полосы захвата, которые были подтверждены численно. Так же восстановлен вывод для оценки, полученной в [4].

## 2. Математическая модель ФАПЧ

Рассмотрим master-slave синхронизацию колебаний на примере классической системы фазовой автоподстройки частоты.



**Рис. 1:** Схема классической системы ФАПЧ, где  $\omega_{ref}$  — частота опорного сигнала,  $\omega_{vco}$  — частота сигнала ГУН,  $v_f(t)$  — выходной сигнал фильтра,  $\omega_{vco}^{free}$  — частота свободных колебаний ГУН,  $\omega_e = \omega_{ref} - \omega_{vco}$

Опорный сигнал подается на вход кольца ФАПЧ. Фазовый детектор (компаратор) принимает опорный сигнал и сигнал генератора, управляемого напряжением, в результате воздействия компаратора на выходе появляется сигнал:

$$v_e(\theta_{ref}(t) - \theta_{vco}(t)),$$

где  $\theta_{vco}(t)$  — фаза подстраиваемого генератора,  $\theta_{ref}(t)$  — фаза эталонного генератора,  $v_e(\theta_e(t))$  — характеристика фазового детектора, являющаяся  $2\pi$  периодической функцией. Функцию

$$\theta_e(t) = \theta_{ref}(t) - \theta_{vco}(t) \quad (1)$$

называют фазовой ошибкой. На практике часто используют следующие характеристики фазового детектора:  $\alpha \sin(\sigma)$  и

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & \sigma \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ -\sigma, & \sigma \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

В настоящее время инженерами реализованы различные фазовые детекторы в виде микросхем, которые применяются в классических системах ФАПЧ и их модификациях.

Сигнал, полученный на выходе компаратора  $v_e(\theta_e(t))$  поступает на

вход фильтра нижних частот. Связь входного  $v_e(\theta_e(t))$  и выходного  $v_f(t)$  сигналов фильтра нижних частот может быть описана уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bv_e(\theta_e(t)) \\ v_f(t) &= C^T x + Dv_e(\theta_e(t)),\end{aligned}\tag{2}$$

где  $A$  — постоянная матрица  $n \times n$ ,  $B$  и  $C$  постоянные  $n$ -мерные векторы,  $D$  — константа,  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояний системы. Для практических применений инженерами были физически реализованы аналоговые(непрерывные) фильтры в виде RL-цепей, RLC-цепей и др., а цифровые(дискретные) фильтры нижних частот реализуются на цифровых элементах.

Выходной сигнал фильтра нижних частот поступает на вход генератора, управляемого напряжением. Происходит подстройка частоты ГУН:

$$\dot{\theta}_{vco}(t) = \omega_{vco}(t) = \omega_{vco}^{free} + K_{vco}v_f(t),\tag{3}$$

где  $\omega_{vco}^{free}$  — частота свободных колебаний ГУН,  $K_{vco}$  — коэффициент передачи. При этом полагаем, что эталонный генератор работает на постоянной частоте:

$$\dot{\theta}_{ref}(t) = \omega_{ref}(t) \equiv \omega_{ref}\tag{4}$$

Разность между частотой эталонного генератора и частотой свободных колебаний ГУН обозначим:

$$\omega_e^{free} \equiv \omega_{ref} - \omega_{vco}^{free}\tag{5}$$

Из (1) и (2)-(5) получим систему дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(C^T x + Dv_e(\theta_e))\end{aligned}\tag{6}$$

В системе (6) сделаем преобразования  $-K_{vco}C \rightarrow C$ ,  $-K_{vco}D \rightarrow D$ . Тогда



система (6) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - C^T x + Dv_e(\theta_e)\end{aligned}\tag{7}$$

В системе (7) сделаем замену:

$$\begin{aligned}z &= x + A^{-1}B\gamma \\ \gamma &= \frac{\omega_e^{free}}{C^T A^{-1}B - D}\end{aligned}\tag{8}$$

В результате преобразований получим систему:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B(v_e(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= C^T z + D(v_e(\theta_e) - \gamma)\end{aligned}\tag{9}$$

В данной работе будем рассматривать систему ФАПЧ с характеристикой фазового детектора  $v_e(\theta_e) = \sin(\theta_e)$ . Тогда система (9) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B(\sin(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= C^T z + D(\sin(\theta_e) - \gamma)\end{aligned}\tag{10}$$

Введем определение полосы захвата согласно [6].

**Определение 1 .** Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН  $|\omega_p|$  такая, что система (10) глобально асимптотически устойчива для всех  $\omega_e^{free} \in (0, |\omega_p|)$ .

**Определение 2 .** Система (10) называется глобально асимптотически устойчивой, если любое решение  $x(t, x_0)$  стремится к некоторому состоянию равновесия при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Определение 3 .** Комплекснозначная функция

$$W(s) = C^T (A - sI)^{-1} B - D\tag{11}$$

называется передаточной функцией фильтра.

Введем в рассмотрение число:

$$|\nu| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}} \quad (12)$$

Следующая теорема дает условие глобальной асимптотической устойчивости (10).

**Теорема 1** [5]. Пусть все нули функции  $\sin(\theta_e) - \gamma$  изолированы, пара  $(A, B)$  вполне управляема, все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части и существуют числа  $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$ , и  $\varkappa$ , такие что имеют место неравенства:

$$\operatorname{Re} \left( \varkappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - \tau [W(ix) - ix]^T [W(ix) + ix] \right) \geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (13)$$

$$\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \quad (14)$$

Тогда система (10) глобально асимптотически устойчива.

### 3. Постановка задачи

Системы фазовой автоподстройки частоты широко распространены в современных устройствах, таких как компьютеры, приемники и др. Для физической реализации таких систем инженерам необходимо проводить анализ их устойчивости. Исследования локальной устойчивости ФАПЧ обычно проводится с использованием хорошо известных инженерам критериев Эрмита-Михайлова, Рауса-Гурвица, Харитонова и др. Однако для инженеров также важно определять полосу захвата, которая определяется областью параметров, обеспечивающей глобальную устойчивость системы. Опираясь на частотный критерий глобальной устойчивости предложенный Г. А. Леоновым получим оценки полосы захвата для систем фазовой автоподстройки частоты со следующими передаточными функциями фильтра:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} \quad (15)$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2} \quad (16)$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} \quad (17)$$

$$0 < \tau_{pi}, \tau_{zj} < 1, \quad \tau_{pi} \neq \tau_{zj}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2 \quad (18)$$

Для оценки полосы захвата будем выбирать  $\varepsilon, \delta, \kappa, \tau$ , удовлетворяющие (13) и (14) так, чтобы максимизировать  $\nu$ . Из максимальности  $\nu$  получим максимальный  $\omega_e^{free}$ , при котором система (10) глобально асимптотически устойчива.

## 4. Оценка полосы захвата

### 4.1 Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

Оценим полосу захвата для систем ФАПЧ с фильтром, определяемым передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} = \frac{1}{1 + as + bs^2}, \quad 0 < \tau_{p1}, \tau_{p2} < 1, \quad (19)$$

где  $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$ ,  $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$ . Будем рассматривать управляемую реализацию системы (10). Заметим

$$\det(sI - A) = s^2 + ab^{-1}s + b^{-1} \quad (20)$$

матрица  $A$  - устойчива. Рассмотрим первое условие теоремы 1. Подставим (19) в (13) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену переменной  $t = s^2$ . Не умаляя общности, можем положить  $\varkappa = 1$ . В результате преобразований (13) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + \\ & + (1 - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4.1.1 Оценка максимума $\nu$ константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (13) нужно потребовать неотрицательность свободного коэффициента  $1 - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$ , тогда

$$\varepsilon + \tau + \delta \leq 1 \quad (22)$$

$$\varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \leq 1 \quad (23)$$

$$4\varepsilon\delta \leq 2 - (2\varepsilon^2 + 2\delta^2 + 2\tau^2 + 4\varepsilon\tau + 4\tau\delta) \quad (24)$$

Из (24) и (14) получаем оценку для  $\nu^2$ :

$$\nu^2 < 4\varepsilon\delta < 2 \quad (25)$$

#### 4.1.2 Точная оценка максимума $\nu$

Неравенство  $1 - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$  является необходимым условием справедливости (21). Для максимизации  $\nu$  положим  $\varepsilon = 1 - \tau - \delta$ . Тогда (21) принимает вид:

$$\tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (26)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{A} = \tau b^2, \quad \tilde{B} = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2, \quad \tilde{C} = -b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \quad (27)$$

Заметим, что для того, что бы выполнялось (26) необходимо потребовать  $\tilde{A} \geq 0$  и  $\tilde{C} \geq 0$ , откуда следует  $\tilde{B} \geq 0$ . Подставим  $\varepsilon = 1 - \tau - \delta$ ,  $\varkappa = 1$  в (14) и выразим  $\nu^2$ , тогда (14) принимает вид:

$$\nu^2 < 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \quad (28)$$

Максимизируем (28), при условии  $\tilde{C} \geq 0$ . Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Вычислим градиент (28):

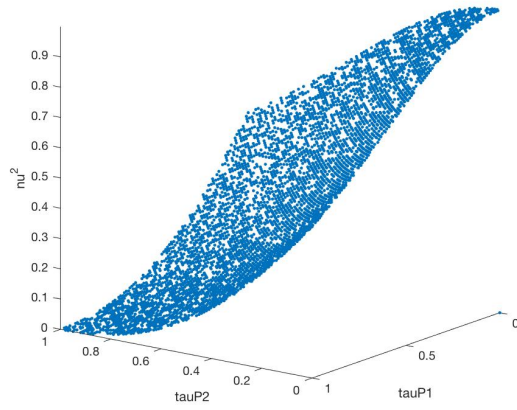
$$(4 - 4\tau - 8\delta, 4\delta) \quad (29)$$

Точка понижения ранга:  $\delta = 0, \tau = 1$ . Это противоречит условию теоремы  $\delta > 0$ . Рассмотрим границу допустимой области  $\tilde{C} = 0$ , выразим  $\tau$  и подставим в (28):

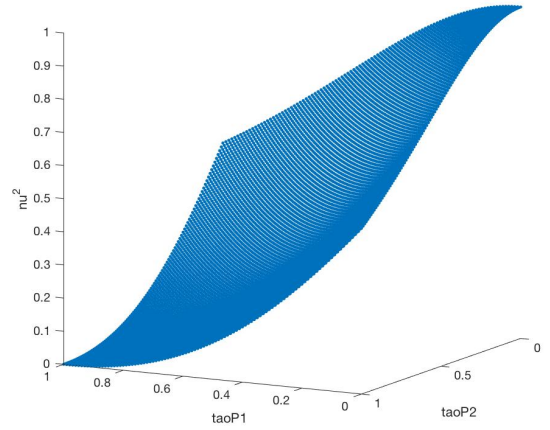
$$\nu^2 < 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \quad (30)$$

Максимум (30) достигается при  $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$  и равен:

$$\nu^2 < \frac{(b-1)^2}{a^2 - 2b + 1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (31)$$



(a) Численная оценка  $\nu^2$  в MATLAB с помощью функции `fmincon`.



(b) График  $\nu^2$ , построенный по (31)

**Рис. 2:** График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{P1}, \tau_{P2}$

## 4.2 Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

Оценим полосу захвата для систем ФАПЧ с фильтром, определяемым передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1}, \tau_{z1} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{z1} \quad (32)$$

Будем рассматривать управляемую реализацию системы (10). Заметим

$$\det(sI - A) = s^2 + 2\tau_{z1}^{-1}s + \tau_{z1}^{-2} \quad (33)$$

матрица  $A$  - устойчива. Найдём  $\varepsilon, \delta, \kappa, \tau$  так, что бы максимизировать  $\nu$ . Для этого подставим (32) в (13) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену  $t = s^2$ . В результате преобразований (13) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \tau_{p1}^4 \tau t^3 + (-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 \tau + 2\tau_{p1}^2 \tau - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \kappa) t^2 + \\ & + (\tau - \tau_{z1}^2 \kappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \kappa - 2\tau_{z1}^2 \tau + 4\tau_{z1} b \kappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + \\ & + (\kappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (34)$$

Положим в (34)  $\tau = 0$ . Не умаляя общности можем считать  $\kappa = 1$ . Тогда (34) принимает вид:

$$\begin{aligned} & (\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta) t^2 + (4\tau_{z1} \tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + \\ & + (1 - \varepsilon - \delta) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (35)$$

Для того, что бы выполнялось (35) потребуем положительность коэффициентов при  $t$ ,  $t^2$  и положительность свободного коэффициента:

$$\begin{aligned} & \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta \geq 0 \\ & 4\tau_{z1} \tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2 \delta \geq 0 \\ & 1 - \varepsilon - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Оценка  $\nu$  будет наибольшей, если параметры  $\varepsilon, \delta$  лежат на границе допустимой области (36) и  $\delta > 0, \varepsilon > 0$ . Граница допустимой области является выпуклым многоугольником, ограниченным прямыми  $\delta = 0, \varepsilon = 0$  и

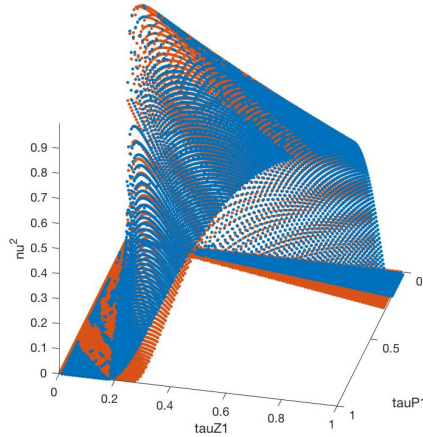
$$\varepsilon(\delta) = z^2 - z^4\delta, \quad \varepsilon(\delta) = q - z^2\delta, \quad \varepsilon(\delta) = 1 - \delta, \quad (37)$$

где  $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}, q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$ . Найдём точки пересечения прямых (37):

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{1 + z^2}, & \varepsilon &= \frac{z^2}{1 + z^2} \\ \delta &= \frac{1 - q}{1 - z^2}, & \varepsilon &= \frac{q - z^2}{1 - z^2} \\ \delta &= \frac{z^2 - q}{z^4 - z^2}, & \varepsilon &= z^2 - \frac{z^2(z^2 - q)}{z^2 - 1} \end{aligned} \quad (38)$$

Положим  $4\varepsilon\delta$  как максимум по всем граням многоугольника. Тогда  $4\varepsilon\delta$  определяется одним из следующих соотношений, в зависимости от того, где достигается максимум: на грани или вершинах многоугольника:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1 + z^2}, \quad \frac{4(1 - q)(q - z^2)}{1 - z^2}, \quad \frac{z^2 - q}{z^2 - 1} - \left( \frac{z^2 - q}{z^2 - 1} \right)^2 \quad (39)$$



**Рис. 3:** График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$ . Синим цветом представлена численная оценка  $\nu^2$  согласно (13), (14) в MATLAB с помощью функции `fmincon`. Красным цветом представлен график  $\nu^2$ , построенный по (39), как максимум по всем граням многоугольника



### 4.3 Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Оценим полосу захвата для систем ФАПЧ с фильтром, определяемым передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{pi}, \tau_{zj} < 1, \quad \tau_{pi} \neq \tau_{zj}, \quad i, j = 1, 2 \quad (40)$$

Введем обозначения:

$$\alpha_1 = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1} + \tau_{z2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}} \quad (41)$$

Тогда (40) принимает вид:

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2} \quad (42)$$

Положим:

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \quad (43)$$

Будем рассматривать управляемую реализацию системы (10). Заметим

$$\det(sI - A) = s^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}s + \alpha_2^{-1} \quad (44)$$

матрица  $A$  устойчива. Найдем  $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$  так, что бы максимизировать  $\nu$ . Для этого подставим (42) в (13) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену переменной  $t = s^2$ . В результате преобразований (13) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \alpha_2^2\tau t^3 + (\alpha_1^2\tau - 2\alpha_2\tau - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2\varepsilon - \alpha_2^2\beta_2^2\tau + \alpha_2^2\beta_2\varkappa)t^2 + \\ & + (\tau - \alpha_2\varkappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2\varepsilon - \alpha_1^2\beta_1^2\tau - \alpha_2\beta_2\varkappa + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon + \\ & + 2\alpha_2\beta_2\tau + \alpha_1^2\beta_1\varkappa)t + \varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (45)$$

Положим  $\tau = 0$ . Не умаляя общности можем считать  $\varkappa = 1$ . Тогда (45) принимает вид:

$$(-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + 1 - \varepsilon - \delta \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (46)$$

Заметим, что  $\varepsilon \leq 1 - \delta$  является необходимым условием справедливости (46). Для максимизации  $\nu$  положим  $\varepsilon = 1 - \delta$ , тогда:

$$(\alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta)t + \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (47)$$

Необходимым и достаточным условием справедливости (47) является неотрицательность коэффициента при  $t$  и свободного коэффициента:

$$\begin{aligned} \alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta &\geq 0 \\ \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta &\geq 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Из (48) выразим  $\delta$ :

$$\delta \leq \frac{\beta_2}{1 + \beta_2} \quad (49)$$

$$\delta \leq \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \quad (50)$$

Потребуем положительность числителя (50), что равносильно следующему условию:

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (51)$$

Покажем, что это условие гарантирует положительность знаменателя (50):

$$\begin{aligned} \alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2) &> \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1}(1 + \beta_1) - 2\alpha_2(1 - \beta_2) = \\ &= \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)(1 - \beta_1)}{\beta_1} > 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Покажем, что условие (50) и (51) влечет выполнение (49). Из условия (51) следует, что функция (50) как функция от  $\beta_1$  строго возрастает, на допустимой области параметров, тогда:

$$\frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} < \frac{\alpha_1^2\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_1^2(1 + \beta_2) - 2\alpha_2} < \frac{\beta_2}{1 + \beta_2} \quad (53)$$

Так как максимальное значение  $\nu$  достигается на границе допустимой области. Положим:

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \quad (54)$$

В результате вычислений получили, что максимальное значение  $\nu$  будет при следующем наборе параметров:

$$\tau = 0, \quad \varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \quad (55)$$

Тогда, подставив (55) в (13) и применив (14), получим оценку:

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2} \quad (56)$$

## 5. Заключение

В рамках данной работы были рассмотрены три передатонные функции фильтра:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} \quad (57)$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2} \quad (58)$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} \quad (59)$$

$$0 < \tau_{pi}, \tau_{zj} < 1, \quad \tau_{pi} \neq \tau_{zj}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2 \quad (60)$$

Для (57), (58) были получены аналитические оценки полосы захвата, которые были подтверждены численно. Полоса захвата систем ФАПЧ с фильтром, определяемым передаточной функцией (59) исследовалась ранее Леоновым Г. А. Для нее был восстановлен вывод.

В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты используются в различных устройствах. Аналитические оценки, полученные в данной работе, могут быть интересны инженерам и могут использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ 3 порядка.

## Листинги

```
1 function filter1_exact()
2
3 [taoP1,taoP2] = meshgrid(0:0.01:1,0:0.01:1);
4 grid = [taoP1(:) taoP2(:)];
5
6 a = grid(:, 1)+grid(:, 2);
7 b = grid(:, 1).*grid(:, 2);
8
9 %x(1) = tau, x(2) = delta, x(3) = kappa
10 M = [];
11 A = [];
12 B = [];
13 fun = @(x)-(4*(x(3)-x(1)-x(2))*x(2)/(x(3))^2);
14 x0 = [0.05, 0.5, 1];
15 lb = [0.00000001,0.0001, 0.00001];
16 ub = [10000,10000,10000];
17 for i=1:length(a)
18     ai = a(i);
19     bi = b(i);
20     options = optimoptions('fmincon','Display','off','
        Algorithm','sqp');
21     M1 = fmincon(fun,x0,[],[],[],[],lb,ub,@discriminant,
        options);
22     if((-M1(3)*bi+M1(1)-M1(2)*ai^2 + 2*M1(2)*bi) > 0
        && (M1(1)*ai^2-2*M1(1)*bi - M1(2)*bi^2) > 0 &&
        M1(1) > 0)
23         M(i) = -fun(M1);
24         A(i) = grid(i, 1);
25         B(i) = grid(i, 2);
26         disp(i/length(a));
27     end
```

```

28 end
29
30 plot3(A, B, M, '.');
31 axis equal
32 xlabel('tauP1')
33 ylabel('tauP2')
34 zlabel('nu^2')
35
36 %a > 0, b > 0, c > 0
37 function [c,ceq] = discriminant(x)
38 c(1) = -(-x(3)*bi+x(1)-x(2)*ai^2 + 2*x(2)*bi);
39 c(2) = -(x(1)*ai^2-2*x(1)*bi - x(2)*bi^2);
40 c(3) = -bi^2*x(1);
41 c(4) = -(x(3)-x(2)-x(1));
42 ceq = [];
43 end
44 end

1 function filter1_analytic()
2
3 [taoP1,taoP2] = meshgrid(0:0.01:1,0:0.01:1);
4 grid = [taoP1(:) taoP2(:)];
5
6 a = grid(:, 1)+grid(:, 2);
7 b = grid(:, 1).*grid(:, 2);
8
9 M = (b - 1).^2./(a.^2 - 2.*b + 1);
10
11 plot3(grid(:, 1), grid(:, 2), M, '.');
12 axis equal
13 xlabel('taoP1')
14 ylabel('taoP2')
15 zlabel('nu^2')

```

```

16 end

1 function [M, A, B] = filter2_exact()
2
3 %For tau = 0
4 [taoP1,taoP2] = meshgrid(0:0.01:1,0:0.01:1);
5 grid = [taoP1(:) taoP2(:)];
6
7 a = grid(:, 1);
8 b = grid(:, 2);
9
10 M = [];
11 A = [];
12 B = [];
13 fun = @(x)-(4*x(1)*x(2)/(x(3))^2);
14 x0 = [0.5, 0.05, 1];
15 lb = [0.00000001,0.0001, 000001];
16 ub = [10000,10000,10000];
17 options = optimoptions('fmincon','Display','off','
    Algorithm','sqp');
18
19 for i=1:length(a)
20     ai = a(i);
21     bi = b(i);
22
23     if(ai ~= bi)
24         M1 = fmincon(fun,x0,[],[],[],[],lb,ub,@con,
            options);
25         if((-ai^4*M1(1)- bi^4*M1(2)+ ai^2*bi^2*M1(3)) > 0
            && (ai^2*M1(3)+ 2*ai^2*M1(1)+ bi^2*M1(3)+ 2*
            bi^2*M1(2)- 4*ai*bi*M1(3)) > 0 && (-M1(1) + M1
            (3) - M1(2)) > 0 && M1(1) > 0&& M1(2) > 0&& M1
            (3) > 0)

```

```

26         M(i) = -fun(M1);
27         A(i) = ai;
28         B(i) = bi;
29         disp(i*100/length(a));
30     end
31 end
32 end
33
34 plot3(A, B, M, '.');
35 axis equal
36 xlabel('tauP1')
37 ylabel('tauZ1')
38 zlabel('nu^2')
39
40 %a > 0, c > 0, b > 0
41 function [c,ceq] = con(x)
42 c(1) = -(-ai^4*x(1)- bi^4*x(2)+ ai^2*bi^2*x(3));
43 c(2) = -(-ai^2*x(3)- 2*ai^2*x(1)- bi^2*x(3)- 2*bi^2*x(2)+
44         4*ai*bi*x(3));
45 c(3) = -(-x(1) + x(3) - x(2));
46 c(4) = -x(1);
47 c(5) = -x(2);
48 c(6) = -x(3);
49 ceq = [];
50 end
51
52 function [M, A, B] = filter2_analytic()
53
54 %For tau = 0, a > 0, c > 0, b > 0
55 [taoP1,taoZ1] = meshgrid(0.0001:0.01:1,0.0001:0.01:1);
56 grid = [taoP1(:) taoZ1(:)];
57
58

```



```

7  a = grid (: , 1);
8  b = grid (: , 2);

9
10 A1 = [];
11 B1 = [];
12 M1 = [];

13
14 for i=1:length(a)
15     if(a(i) > b(i))
16         tmp = 4*maximize(a(i) , b(i));
17         A1(i) = a(i);
18         B1(i) = b(i);
19         M1(i) = tmp;
20     end
21 end

22
23 %Symmetry with respect to a line x=y
24 A = [A1, B1];
25 B = [B1, A1];
26 M = [M1, M1];

27
28 plot3(A, B, M, ' . ');
29 axis equal
30 xlabel('tauP1')
31 ylabel('tauZ1')
32 zlabel('nu^2')
33 end

1  function [M] = maximize(taoP1 , taoP2)
2
3  %For tau = 0, a > 0, c > 0, b > 0
4  z = taoP1/taoP2;
5  q = 2*z - 1/2 - z^2/2;

```

```

6  x12 = 1/(1+z^2);
7  y12 = z^2/(1+z^2);
8
9  x13 = (1-q)/(1-z^2);
10 y13 = (q-z^2)/(1-z^2);
11
12 x23 = (z^2-q)/(z^4-z^2);
13 y23 = z^2 - z^4*(z^2-q)/(z^4-z^2);
14
15 y2 = 1/z^2;
16 y3 = q/z^2;
17
18 f1 = @(x) x*(1-x);
19 f2 = @(x) x*(z^2-z^4*x);
20 f3 = @(x) x*(q-z^2*x);
21
22 M = 0;
23 if q > 0
24 if q < 1
25     if (0-y3)^2 + (q-0)^2 < (0-x23)^2 + (q-y23)^2
26         M = f3(fminbnd(@(x) -f3(x), 0, y3));
27     else
28         M = max([f3(fminbnd(@(x) -f3(x), 0, x13)), f2(
                fminbnd(@(x) -f2(x), x13, y2))]);
29     end
30 else
31     if (0-x12)^2 + (1-y12)^2 < (0-x13)^2 + (1-y13)^2
32         M = max([f1(fminbnd(@(x) -f1(x), 0, x12)), f2(
                fminbnd(@(x) -f2(x), x12, y2))]);
33     else
34         if (x13-x23)^2 + (y13-y23)^2 < (x13-y3)^2 + (y13)
            ^2
35         M = max([f1(fminbnd(@(x) -f1(x), 0, x13)), f3

```

```

        (fminbnd(@(x) -f3(x), x13, x23)), f2(
        fminbnd(@(x) -f2(x), x23, y2))]);
36     else
37         M = max([f1(fminbnd(@(x) -f1(x), 0, x13)), f3
        (fminbnd(@(x) -f3(x), x13, y3))]);
38     end
39 end
40 end
41 end

```

## Список литературы

- [1] Ujwala A. Belorkar, Ladhake S. A. Design of Low Power Phase Locked Loop (PLL) Using 45NM VLSI Technology // International journal of VLSI design & Communication Systems (LSICS). 2010. Vol. 1, No. 2. P. 1-3.
- [2] Young I. A., Greason J. K., Wong K. L. A PLL clock generator with 5 to 110 MHz of lock range for microprocessors // IEEE Journal of Solid-State Circuits. 1992. Vol. 27, No. 11. P. 1599-1607
- [3] Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / New York: McGraw-Hill Education, 2007. P. 109–114.
- [4] Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.
- [5] Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B. Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems / ed. by H. Kurke. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1992. P. 72–75.
- [6] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2454-2461.
- [7] Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vol. 255-260. P. 2262.
- [8] Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты / М.: Изд-во Связь, 1972. P. 15–19.
- [9] Rao R. B., Kunysz W., Fante R., McDonald K., GPS/GNSS Antennas / Boston: Artech House, 2013. P. 50–51.

- [10] Ilie C., Mihaiescu M., Chirita I., Gutu M., Popa M., Tanase N. Synchronous Electric Generator With Double Excitation // 11th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE). 2019. P. 1–4.
- [11] Ghulam H. R. A mathematical model and simulation of frequency hopping interferences to FM systems // Mathematical and Computer Modelling. 1988. Vol. 11, No 10. P. 988.
- [12] Appleton E. V. The Automatic Synchronization of Triode Oscillators // Proc. Camb. Phil. Soc. 1923. Vol. 21, P. 231.
- [13] Blagov M. V., Kuznetsova O. A., Kudryashova E. V., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N., Mokaev R. N., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-in, Pull-in and Lock-in Ranges for Phase-locked Loop with Tangential Characteristic of the Phase Detector // Procedia Computer Science. 2019. Vol. 150, P. 558.
- [14] Ashari Z., Nordin A. N Theoretical Modeling and Simulation of Phase-Locked Loop (PLL) for Clock Data Recovery (CDR) // IIUM Engineering Journal. 2011. Vol. 12, No. 5. P. 105.
- [15] Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Невский Диалект, 2002. С. 7-20.
- [16] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Neittaanmäki P., Seledzhi S. M., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Nonlinear Analysis of Phase-Locked Loop // IFAC Proceedings Volumes. 2010. Vol. 43, No. 11. P. 34.