УДК 510

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генераторов. Она появилась в первой половине XX века [5]. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в различном телекоммуникационном оборудовании, навигационных системах и т. д. [1].

На практике часто используют системы ФАПЧ второго порядка. Наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка, отличающиеся хорошим подавлением шума и более низкой стационарной ошибкой [6].

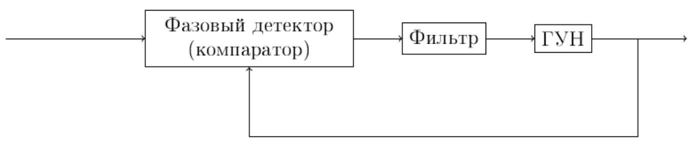

Рис. 1. Схема классической системы ФАПЧ

Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\
\dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + hv_e(\theta_e))
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Где A — постоянная матрица $n \times n$, b и c постоянные n — мерные векторы, h — константа, $x(t)$ — n-мерный вектор состояний системы, ω_{vco}^{free} — частота свободных колебаний ГУН, K_{vco} — коэфициент передачи. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

Миронов Алексей Владиславович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru, тел.: +7(911)146-14-40

Юлдашев Ренат Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: email@email.ru, тел.: +7(000)000-00-00

В системе (1) сделаем преобразования $-K_{vco}c \to c$, $-K_{vco}h \to h$ и замену

$$z = x + A^{-1}b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^* A^{-1} b - h} \tag{2}$$

Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= c^* z + h(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)) \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим систему(3), предполагая, что функция $\upsilon_e(\theta_e)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям

$$\mu_1 \leqslant \frac{d\upsilon_e(\theta_e)}{d\theta_e} \leqslant \mu_2 \tag{4}$$

Введем в рассмотрение число:

$$\nu = \int_0^{2\pi} (\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)\, d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} \mid \upsilon_e(\theta_e) - \gamma \mid d\theta_e \right)^{-1} \tag{5}$$

Теорема 1 [3]. *Пусть все нули функции $\upsilon_e(\theta_e) - \gamma$ изолированы, пара (A, b) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geqslant 0$, и $\varkappa$, такие что имеют место неравенства:*

$$\operatorname{Re}\Big(\varkappa K(ix) - \varepsilon\,[K(ix)]^2 - \big[K(ix) + \mu_1^{-1} ix\big]^* \tau \big[K(ix) + \mu_2^{-1} ix\big]\Big) \geqslant \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \tag{7}$$

Тогда система (3) глобально ассимптотически устойчива.

2. Инженерное применение. Приведенная теорема не отвечает на вопрос как найти полосу захвата, т. е. максимальную разность частот опорного сигнала и ГУН ω_e^{free}, при котором система (1) глобально ассимптотически устойчива. Этот вопрос является важным для инженеров при физической реализации ФАПЧ. Для ответа рассмотрим некоторые фильтры 2 порядка. Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие условию теоремы так, что бы максимизировать ν. При характеристике фазового детектора $\upsilon(\theta_e) = sin(\theta_e)$, ν выражается следующим образом

$$| \nu |= \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}} \tag{8}$$

Из (8) и второго уравнения (2) можно однозначно найти ω_e^{free}. Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free}, при котором система (1) глобально ассимтотически устойчива.

3. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию:

$$\begin{aligned} &W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)} = \frac{1}{1+as+bs^2} \\ &a = \tau_{p1}+\tau_{p2}, \quad b = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + ab^{-1}s + b^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, b) вполне управляема. Подставим (9) в (6) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену $t = s^2$. Для максимизации ν положим $\varkappa = 1$ и $\varepsilon = 1 - \tau - \delta$, тогда (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &\widehat{A}t^2 + \widehat{B}t + \widehat{C} \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ &\widehat{A} = \tau b^2, \quad \widehat{B} = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2, \quad \widehat{C} = -b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \end{aligned} \tag{10}$$

Потребуем $\widehat{A} \geqslant 0$ и $\widehat{C} \geqslant 0$, тогда $\widehat{B} \geqslant 0$.

Максимизируем ν, при условии $\widehat{C} \geqslant 0$. Рассмотри границу допустимой области, т. е. $\widehat{C} = 0$. Из второго условия теоремы и $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$ получаем

$$\nu^2 < \frac{(b-1)^2}{a^2-2b+1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2}-1)^2}{\tau_{p1}^2+\tau_{p2}^2+1} \tag{11}$$

4. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2}$. Рассмотрим передаточную функцию

$$W(x) = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2} \tag{12}$$

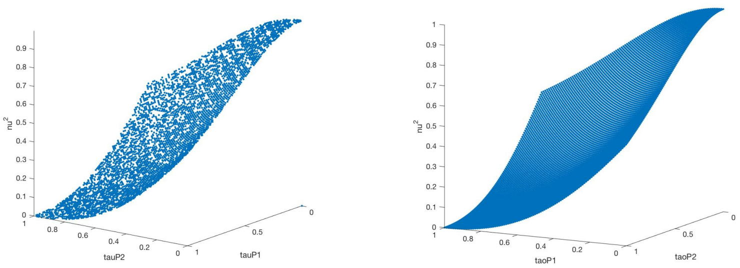

Рис. 2. Численное и аналитическое решения для фильтра (9)

Где α_1, α_2, β_1, β_2 вещественные положительные числа. Предположим

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \tag{13}$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + \alpha_1 \alpha_2^{-1} s + \alpha_2^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, b) вполне управляема. Подставим (12) в (6) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации ν положим $\tau = 0$, $\varkappa = 1$ и $\varepsilon = 1 - \delta$. Тогда (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &\widehat{A}t + \widehat{B} \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ &\widehat{A} = \alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta \\ &\widehat{B} = \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \end{aligned} \tag{14}$$

Выполнение (13) влечет $\widehat{A} > 0$. Максимизируем ν на границе области (14), т. е. $\widehat{B} = 0$.

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)}{\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)} \tag{15}$$

Потребуем $\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1)}$. Это условие гарантирует положительность (15). Из второго условия теоремы и (15)

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1) - \alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)]^2} \tag{16}$$

Эта оценка была получена в [2], однако вывод был пропущен.

5. Заключение. В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат будет интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 195–207.

2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.

3. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Изд-во Невский диалект, 2014. P. 195–207.

4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Solution of the Gardner problem on the lock-in range of phase-locked loop // ArXiv e-prints. 2017. 1705.05013. P. 289–298.

5. Appleton E. E. Automatic synchronization of triode oscillators // Proc. Camb. Phil. Soc. 1923. Vol. 21, No 3. P. 231.

6. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vols. 255-260. P. 1.