

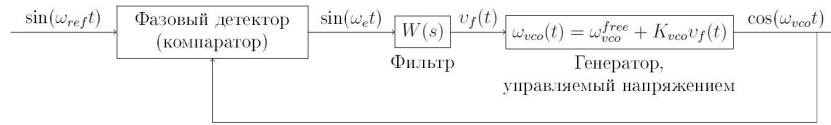
УДК 517.977.5

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

### Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

**1. Введение.** Система фазовой автоподстройки частоты — система с обратной связью, подстраивающая частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в телекоммуникационном оборудовании [1], навигационных системах [7] и д. р. Основными параметрами ФАПЧ являются полосы удержания, захвата и захвата без проскальзывания [6]. В данной работе получены оценки полосы захвата для некоторых систем ФАПЧ 3 порядка, которые отличаются хорошим подавлением шума и низкой стационарной ошибкой, по сравнению с системами ФАПЧ 2 порядка [5].

**2. Математическая модель ФАПЧ.** Хорошо известна систе-



**Рис. 1.** Схема классической системы ФАПЧ, где  $\omega_{ref}$  — частота опорного сигнала,  $\omega_{vco}$  — частота сигнала ГУН,  $v_f(t)$  — выходной сигнал фильтра,  $\omega_{vco}^{free}$  — частота свободных колебаний ГУН,  $\omega_e = \omega_{ref} - \omega_{vco}$

ма дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4], рис. 1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma), \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma),\end{aligned}\tag{1}$$

---

Миронов Алексей Владиславович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru

Юлдашев Ренат Владимирович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: renatyv@pm.me

где  $A$  — постоянная матрица  $n \times n$ ,  $B$  и  $C$  постоянные  $n$  — мерные векторы,  $D$  — константа,  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояний системы.  $W(s) = C^T (A - sI)^{-1} B - D$  — передаточная функция фильтра.  $K_{vco}$  — коэффициент передачи,  $\gamma$  определяется следующим образом

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} (D - C^T A^{-1} B)}, \quad (2)$$

где  $\omega_e^{free} = \omega_{ref} - \omega_{free}$  — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

**3. Оценка области захвата.** Введем определение полосы захвата согласно [4].

**Определение 1.** Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН  $|\omega_p|$  такая, что система (1) глобально асимптотически устойчива для всех  $0 < |\omega_e^{free}| < |\omega_p|$ .

**Определение 2.** Система (1) называется глобально асимптотически устойчивой, если любое решение  $x(t, x_0)$  стремится к некоторому состоянию равновесия при  $t \rightarrow +\infty$ .

Введем в рассмотрение число:

$$|\nu| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (3)$$

Следующая теорема дает условие глобальной асимптотической устойчивости (1).

**Теорема 1** [3]. Пусть все нули функции  $\sin(\theta_e) - \gamma$  изолированы, пара  $(A, B)$  вполне управляема, все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части и существуют числа  $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$ , и  $\varkappa$ , такие что имеют место неравенства:

$$\operatorname{Re} \left( \varkappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - \tau [W(ix) - ix]^T [W(ix) + ix] \right) \geq \delta, \quad (4)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon \delta > (\varkappa \nu)^2 \quad (5)$$

Тогда система (1) глобально асимптотически устойчива.

Далее будем выбирать  $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$ , удовлетворяющие (4) так, чтобы максимизировать  $\nu$ . Из максимальной  $\nu$  получим максимальный  $\omega_e^{free}$ , при котором система (1) глобально асимптотически устойчива.

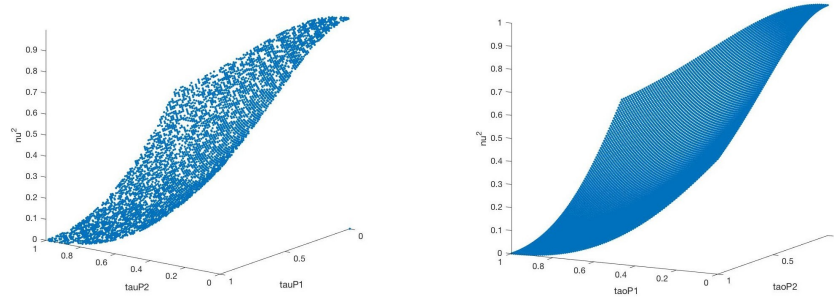
**3.1. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ . Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \quad (6)$$

Подставим (6) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Тогда оценка  $\nu$  будет наибольшей при следующих значениях параметров:

$$\varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = \tau_{p1}\tau_{p2} + \delta(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2), \quad \delta = \frac{1 - \tau_{p1}\tau_{p2}}{2(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1)}$$

Таким образом, получим следующую оценку:



**Рис. 2.** Слева численная оценка  $\nu^2$  в MATLAB с помощью функции `fmincon`. Справа график  $\nu^2$ , построенный по (7)

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (7)$$

**3.2. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  $\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$ . Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

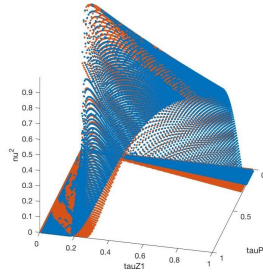
$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2} \quad (8)$$

Подставим (8) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Положим  $\varkappa = 1$ ,  $\tau = 0$ . Оценка  $\nu$  будет наибольшей, если параметры  $\varepsilon$ ,  $\delta$  лежат на одной из граней выпуклого многоугольника, ограниченного прямыми  $\delta = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  и

$$\varepsilon(\delta) = z^2 - z^4\delta, \quad \varepsilon(\delta) = q - z^2\delta, \quad \varepsilon(\delta) = 1 - \delta,$$

где  $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}$ ,  $q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$ . Тогда  $4\varepsilon\delta$  определяется одним из следующих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^2-1} - \left(\frac{z^2-q}{z^2-1}\right)^2 \quad (9)$$



**Рис. 3.** Синим цветом представлена численная оценка  $\nu^2$  согласно (4), (5) в MATLAB с помощью функции `fmincon`. Красным цветом представлен график  $\nu^2$ , построенный по (9), как максимум по всем граням многоугольника

**3.3. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  $\frac{1+\alpha_1\beta_1s+\alpha_2\beta_2s^2}{1+\alpha_1s+\alpha_2s^2}$ . Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \quad (10)$$

Подставим (10) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации оценки  $\nu$  положим:

$$\tau = 0, \quad \varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \quad (11)$$

Чтобы гарантировать положительность  $\delta$  потребуем:

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (12)$$

Тогда, подставив (11) в (4) и применив (5), получим оценку:

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2} \quad (13)$$

Эта оценка совпадает с оценкой, полученной в [2].

**4. Заключение.** В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат может быть интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

## Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 115–116.
2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.
3. Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B. Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems / ed. by H. Kurke. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1992. P. 72–75.
4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2455.
5. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vol. 255-260. P. 2262.
6. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты / М.: Изд-во Связь, 1972. P. 15–19.
7. Rao R. B., Kunysz W., Fante R., McDonald K., GPS/GNSS Antennas / Artech House, 2013. P. 50–51.