Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

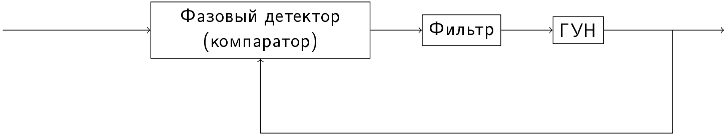
Миронов Алексей Владиславович

Санкт-Петербургский государственный университет

Научный руководитель: д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

3 марта 2020 г.

Принцип работы ФАПЧ



Определение

Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система предназначенная для синхронизации частот эталонного и подстраиваемого генераторов

Применение системы ФАПЧ

1. Телекоммуникационное оборудование
2. Навигационное оборудование (GPS, Глонасс, Галилео)
3. Компьютеры (микропроцессоры)
4. Военном оборудовании (frequency hopping)

Принцип работы ФАПЧ

Дифференциальные уравнения ФАПЧ

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + b\upsilon_e(\theta_e) \\
\dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + h\upsilon_e(\theta_e))
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Определение

Полоса захвата — максимальная разность частот опорного сигнала и ГУН ω_e^{free}, при которой система ФАПЧ глобально ассимптотически устойчива.

Постановка задачи

Для реализации ФАПЧ важно знать диапазон частот, для которых возможна синхронизация.

Оценим полосу захвата систем ФАПЧ с фильтрами

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$

$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$$

$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$

$$0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad 0 < \tau_{z1} < 1, \quad 0 < \tau_{z2} < 1$$

Постановка задачи

Рассмотрим систему (1)

$$\dot{x} = Ax + b\upsilon_e(\theta_e)$$
$$\dot{\theta}_e = \omega_e^{free} - K_{vco}(c^* x + h\upsilon_e(\theta_e))$$

Сделаем преобразования $-K_{vco}c \to c$, $-K_{vco}h \to h$ и замену

$$z = x + A^{-1}b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^* A^{-1} b - h} \tag{2}$$

В результате (1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= c^* z + h(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)) \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $\upsilon_e(\theta_e)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет $\mu_1 \le \frac{d\upsilon_e(\theta_e)}{d\theta_e} \le \mu_2$. Введем в рассмотрение число

$$\nu = \int_0^{2\pi} (\upsilon_e(\theta_e) - \gamma) d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} \mid \upsilon_e(\theta_e) - \gamma \mid d\theta_e \right)^{-1} \tag{4}$$

Постановка задачи

$$\dot{z} = Az + b(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)$$
$$\dot{\theta_e} = c^* z + h(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)) \qquad (5)$$

Теорема

Пусть все нули функции $\upsilon_e(\theta_e) - \gamma$ *изолированы, пара* (A, b) *вполне управляема, все собственные значения матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части и существуют числа* $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$*, и* $\varkappa$*, такие что имеют место неравенства:*

$$Re(\varkappa K(ix) - \varepsilon(K(ix))^2 - [K(ix) + \mu_1^{-1} ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1} ix]) \geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (6)$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \qquad (7)$$

Тогда система (5) глобально ассимптотически устойчива.

Общая идея оценки полосы захвата

Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие условию теоремы так, что бы максимизировать ν. При характеристике компаратора $\upsilon(\theta_e) = sin(\theta_e)$, ν выражается следующим образом

$$\mid \nu \mid = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}} \tag{8}$$

Из (8) и

$$z = x + A^{-1}b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^* A^{-1} b - h} \tag{9}$$

можно однозначно найти ω_e^{free}. Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free}, при котором система

$$\dot{x} = Ax + b\upsilon_e(\theta_e), \quad \dot{\theta}_e = \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + h\upsilon_e(\theta_e))$$

глобально ассимтотически устойчива.

Фильтр $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)} = \frac{1}{1+as+bs^2} \qquad (10)$$

$$a = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad b = \tau_{p1}\tau_{p2}$$

Подставим (10) в первое условие теоремы. Можем считать $\varkappa = 1$. Положим $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$.

$$\begin{aligned} &At^2 + Bt + C \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ &A = \tau b^2, \quad B = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2, \quad C = -b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \end{aligned} \qquad (11)$$

Будем искать максимум следующей функции:

$$\nu^2 < 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \qquad (12)$$

Из $C = 0$, выразим τ и подставим в (13) тогда максимум достигается при

$$\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)} \qquad (13)$$

Фильтр $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

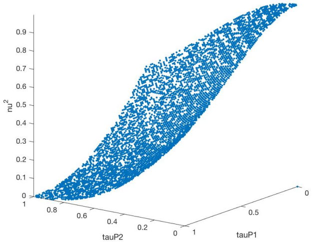


Рис.: Численное решение

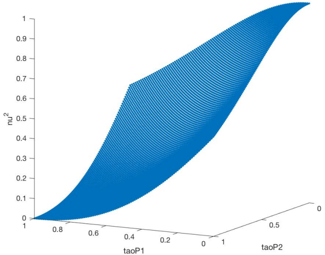


Рис.: Аналитическое решение

$$\nu^2 < \frac{(b-1)^2}{a^2 - 2b + 1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \qquad (14)$$

Фильтр $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

Оценка параметра ν^2 для фильтра $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

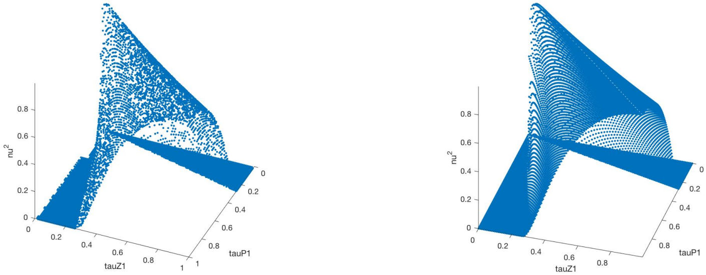


Рис.: 1. Численное приближение в MATLAB 2. Аналитическое решение

Фильтр $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

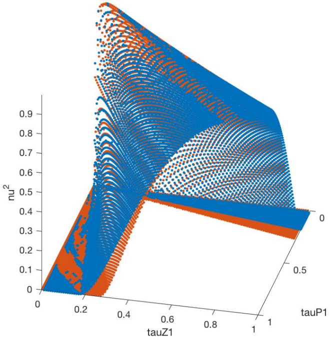


Рис.: График зависимости ν^2 от τ_{p1}, τ_{p2}. Синим цветом представлено точное решение. Оранжевым цветом представлено аналитическое решение.

Фильтр $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

При рассмотрении фильтра $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ получаем следующую оценку параметра ν^2:

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1)-\alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1-\alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2)-2\alpha_2(1-\beta_2)]^2}$$

$$\alpha_1 = \tau_{p1}+\tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1}+\tau_{z2}}{\tau_{p1}+\tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}}$$

Спасибо за внимание