

1 Введение

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e))\end{aligned}\tag{1}$$

Найдем стационарные точки системы (1)

$$\begin{aligned}x &= -A^{-1}bv_e(\theta_e) \\ v_e(\theta_e) &= \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}\end{aligned}\tag{2}$$

Возьмем $\theta_e = \theta_s$, для которых выполняется (2). Сделаем замену:

$$\begin{aligned}z &= x + A^{-1}bv_e(\theta_s) \\ \sigma &= \theta_e\end{aligned}\tag{3}$$

После замены система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}) \\ \dot{\sigma} &= -K_{vco}(c^*z + h(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}))\end{aligned}\tag{4}$$

2 Теорема

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= C^*z + Rf(\sigma)\end{aligned}\tag{5}$$

Here A, B, C, and R are constant matrices of dimensions $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$, and $n \times n$, respectively, whereas the components ϕ_k , $1 \leq k \leq m$, of the vector-valued function $f(\sigma)$ are scalar differentiable functions $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$, where ψ_k is the k-th component of the vector ψ .

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function $\kappa(p)$ can be written in the form (5) with $m = 1$ by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions $\phi_k(\sigma_k)$ satisfy the following conditions: $\phi_k(\sigma_k) \equiv 0$

$$\begin{aligned}\mu_{1k} &\leq \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}, \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \\ \phi_k(\sigma_k + \Delta_k) &= \phi_k(\sigma_k), \forall \sigma_k \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{6}$$

Here the Δ_k are positive numbers. Sometimes, in the study of the specific pendulum-like systems, only one of the inequalities

$$\mu_{1k} \leq \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \text{ or } \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k} \quad (7)$$

is known, so we will assume the number μ_{1k} to be either finite negative or $-\inf$, and the number μ_{2k} to be either finite positive or \inf . When $\mu_{1k} = -\inf$ or $\mu_{2k} = \inf$, we will use the notation $\mu_{1k}^{-1} = 0$ or $\mu_{2k}^{-1} = 0$, respectively.

Let us introduce the numbers:

$$\nu_k = \int_0^{\Delta_k} \varphi_k(\sigma) d\sigma \left(\int_0^{\Delta_k} |\varphi_k(\sigma)| d\sigma \right)^{-1} \quad (8)$$

the transfer matrix of system (5) from its “input” f to its “output” $(-d\sigma/dt)$

$$K(p) = C * (A - pI)^{-1} B - R \quad (9)$$

and the diagonal $m \times m$ matrices:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \text{diag}[\mu_{11}, \dots, \mu_{1m}], \mu_2 = \text{diag}[\mu_{21}, \dots, \mu_{2m}], \\ \nu &= \text{diag}[\nu_1, \dots, \nu_m] \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 1. Suppose that the stationary set Λ of system (5) consists of isolated points, the pair (A, B) is controllable, the matrix A is Hurwitz, and there exist diagonal $m \times m$ matrices $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, and \varkappa such that the following inequalities are valid:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1} ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1} ix]) &\geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4\varepsilon\delta &> (\varkappa\nu)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Then system (5) is gradient-like.

Очевидно, что систему (1) можно привести к системе (5) положив:

$$\begin{aligned} A &= A \\ B &= b \\ C &= -K_{vco} c^* \\ R &= -K_{vco} h \\ f(\sigma) &= v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{vco} H(0)} \end{aligned} \quad (12)$$

Положим далее:

$$\begin{aligned} v_e(\sigma) &= \sin(\sigma) \\ \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{vco} H(0)} &= \gamma \end{aligned} \quad (13)$$

3 Теорема Декарта

Теорема 2. Если многочлен записанного в стандартной форме действительные и все его корни также заведомо действительные, то число его положительных корней, если учитывать их кратности, равно числу перемен знаков в ряде его коэффициентов. Если же оно имеет и комплексные корни, то число это равно или на некоторое четное число меньше числа этих перемен знаков.

4 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} = \frac{1}{1 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})x + \tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \quad (14)$$

Введем обозначения: $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$, $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$

Рассмотрим первое условие теоремы:

$$Re(\kappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^* \tau [K(ix) + ix]) \geq \delta \quad (15)$$

Подставим, рассматриваемую передаточную функцию в условие теоремы. В результате первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2) t^2 + (-\kappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) t + (\kappa - \varepsilon - \tau - \delta) &\geq 0 \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Второе условие теоремы имеет вид:

$$\begin{aligned} 4\varepsilon\delta &> \nu^2 \kappa^2 \\ \frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2} &> \nu^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Будем искать максимум $\frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2}$

4.1 Оценка максимума ν константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (16) нужно $\kappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$

$$\begin{aligned} \kappa &\geq \varepsilon + \tau + \delta \\ \kappa^2 &\geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ 2 - \left(\frac{2\varepsilon^2}{\kappa^2} + \frac{2\delta^2}{\kappa^2} + \frac{2\tau^2}{\kappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\kappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\kappa^2} \right) &\geq \frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2} \\ 2 &> \frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \quad (18)$$

4.2 Точная оценка максимума ν

2. Так как $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, то $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$. Для максимизации функции $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$ возьмем $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} \tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) &\geq 0 \\ t &> 0 \end{aligned} \quad (19)$$

И будем искать максимум следующей функции:

$$\begin{aligned} f(z) &= 4z - 4z_1 z - 4z^2 \\ z_1 &= \frac{\tau}{\varkappa}, z = \frac{\delta}{\varkappa} \end{aligned} \quad (20)$$

Будем рассматривать $f(z)$, как функцию от z с параметром z_1 . Очевидно, что максимум этой функции достигается при $z_{max} = \frac{1-z_1}{2}$ и $f(z_{max}) = (1 - z_1)^2$

Рассмотрим дискриминант уравнения (19):

$$D = (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)^2 - 4\tau b^2(-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \quad (21)$$

Не умаляя общности, положим далее $\varkappa = 1$, тогда (21) примет вид:

$$D = z_1^2 \frac{1}{4}(b^4 + 8b^3 - 4a^2 b^2 - 16a^2 b + 4a^4) + z_1 \frac{1}{4}(-2b^4 + 8b^3 + 4a^2 b^2) + \frac{b^4}{4} \quad (22)$$

Множество допустимых значений z_1 состоит из тех z_1 для которых: $D \leq 0$ или $D \geq 0$ и $x_2 \leq 0$, где x_2 наибольший корень уравнения (19). Обозначим:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}(b^4 + 8b^3 - 4a^2 b^2 - 16a^2 b + 4a^4) \\ B &= \frac{1}{4}(-2b^4 + 8b^3 + 4a^2 b^2) \\ C &= \frac{b^4}{4} \end{aligned} \quad (23)$$

4.2.1 $A = 0$

При $b^4 + 8b^3 - 4a^2 b^2 - 16a^2 b + 4a^4 = 0$ (22) принимает вид:

$$D = z_1 B + C \quad (24)$$

Предположим, $B \neq 0$, тогда очевидно, что корень уравнения $D = 0$ будет:

$$d = -\frac{1}{B} \quad (25)$$

При $B > 0$: $z_1 \in (0, d]$ $D \leq 0$, а при $z_1 \in [d, 1)$ $D \geq 0$

При $B < 0$: $z_1 \in [d, 1)$ $D \geq 0$, а при $z_1 \in (0, d]$ $D \leq 0$

При $B = 0$: $z_1 \in (0, 1)$ $D \geq 0$

4.2.2 $A \neq 0$

Рассмотрим дискриминант уравнения $D = 0$:

$$D_1 = B^2 - 4AC \quad (26)$$

Заметим, что для исследуемых τ_{p1} и τ_{p2} $D_1 \geq 0$, тогда корни уравнения $D = 0$ имеют следующий вид:

$$d_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D_1}}{2A} \quad (27)$$

Не умаляя общности, будем считать: $0 < d_1 \leq d_2 < 1$.

$A > 0$: Тогда при $z_1 \in (0, d_1] \cup [d_2, 1)$ $D \leq 0$, а при $z_1 \in [d_1, d_2]$ $D \geq 0$

$A < 0$: Тогда при $z_1 \in (0, d_1] \cup [d_2, 1)$ $D \geq 0$, а при $z_1 \in [d_1, d_2]$ $D \leq 0$

4.2.3 Максимизация в зависимости от знака дискриминанта

Рассмотрим, например, случай $A > 0$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Как было показано выше, при $z_1 \in (0, d_1] \cup [d_2, 1)$ $D \leq 0$. Тогда имеем:

$$M_1 = \max_{\substack{-(z_1 a^2 - 2z_1 b - \frac{1-z_1}{2} b^2) + \sqrt{D(z_1)} \leq 0 \\ z_1 \in (0, d_1] \cup [d_2, 1)}} |1 - z_1| = \max_{\substack{-(z_1 a^2 - 2z_1 b - \frac{1-z_1}{2} b^2) + \sqrt{D(z_1)} = 0}} |1 - z_1| \quad (28)$$

А при $z_1 \in [d_1, d_2]$ $D \geq 0$. Тогда почтем:

$$M_2 = \max_{z_1 \in [d_1, d_2]} |1 - z_1| = \max\{|1 - d_1|, |1 - d_2|\} \quad (29)$$

Мы максимизировали функцию при отрицательном и неотрицательном дискриминанте. Положим максимум $M = \max\{M_1, M_2\}$.

5 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)^2}{(1 + \tau_{p1}x)^2} \quad (30)$$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} & \tau_{p1}^4 \tau t^3 + (-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 \tau + 2\tau_{p1}^2 \tau - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa) t^2 + \\ & + (\tau - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \tau + 4\tau_{z1} b \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ & t = x^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что при $\tau_{z1} \neq \tau_{p1}$ функция $\chi(x) = p^{-1}K(x)$ не приводима. Тогда по теореме пара (A, B) управляема.

5.1 $\tau = 0$

Положим в (31) $\tau = 0$, тогда первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$(\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta) t^2 + (4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\varkappa - \varepsilon - \delta) \geq 0$$

$$t = x^2 \geq 0 \quad (32)$$

Будем искать максимум $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$. Обозначим:

$$\begin{aligned} a &= \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta \\ b &= 4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta \\ c &= \varkappa - \varepsilon - \delta \end{aligned} \quad (33)$$

Для того, что бы выполнялось (32) нужно потребовать: $a > 0, c > 0$, тогда $b > 0$. По теореме Декарта уравнение не имеет положительных корней, т.е. выполняется (32).

5.1.1 $\tau_{p1} > \tau_{z1}$

Если предположить, что $\tau_{p1} > \tau_{z1}$, тогда из того, что $a > 0, c > 0$ следует, что $\delta < \varepsilon$. Положив $\delta = \varepsilon$. Разделим на $\varepsilon > 0$ и не умаляя общности положим $\varepsilon = 1$ получим:

$$\begin{aligned} a &= \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa - \tau_{z1}^4 - \tau_{p1}^4 \\ b &= 4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \\ c &= \varkappa - 2 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\lim_{\varkappa \rightarrow 2+} \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} = 1$$

5.1.2 $\tau_{p1} < \tau_{z1}$

Аналогично предыдущему случаю, предположим, что $\tau_{p1} < \tau_{z1}$, тогда из того, что $a > 0, c > 0$ следует, что $\delta > \varepsilon$. Положив $\varepsilon = \delta$. Разделим на $\delta > 0$ и не умаляя общности положим $\delta = 1$ получим:

$$\begin{aligned} a &= \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa - \tau_{z1}^4 - \tau_{p1}^4 \\ b &= 4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \\ c &= \varkappa - 2 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\lim_{\varkappa \rightarrow 2+} \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} = 1$$

5.2 $\tau > 0$

Предположим в (31) $\tau > 0$ и разделим на $\tau_{p1}^4 \tau$. Не умаляя общности, можем считать $\tau = 1$, тогда (31) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 t^3 + at^2 + bt + c &\geq 0 \\
 a &= \frac{1}{\tau_{p1}^4} (-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 + 2\tau_{p1}^2 - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa) \\
 b &= \frac{1}{\tau_{p1}^4} (1 - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 + 4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) \\
 c &= \frac{1}{\tau_{p1}^4} (\varkappa - \varepsilon - 1 - \delta) \\
 t &= x^2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{36}$$

Заметим, что по теореме Декарта: $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$