

УДК 510

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. В повседневной жизни мы пользуемся компьютерами, телевизорами, GPS и другими устройствами, для эффективной работы которых необходима синхронизация частот сигналов. Для решения этой задачи в первой половине XX века была изобретена система фазовой автоподстройки частоты [5] (ФАПЧ) — система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генераторов. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в различных телекоммуникационном оборудовании, навигационных системах и др.

На практике часто рассматривают системы ФАПЧ второго порядка. Однако одним из недостатков таких систем является, недостаточное подавление высокочастотного шума, который может существенно повлиять на функционирование системы, поэтому наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка. Преимуществами ФАПЧ третьего порядка является хорошее подавление шума и более низкая стационарная ошибка [6].

Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e))\end{aligned}\tag{1}$$

Где A — постоянная матрица $n \times n$, b и c постоянные n — мерные векторы, h — константа, $x(t)$ — n -мерный вектор состояний системы, ω_{vco}^{free} — частота свободных колебаний ГУН, K_{vco} — коэффициент передачи. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

Миронов Алексей Владиславович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru, тел.: +7(911)146-14-40

Юлдашев Ренат Владимирович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: email@email.ru, тел.: +7(000)000-00-00

В системе (1) сделаем следующие преобразования $-K_{vco}c \rightarrow c$, $-K_{vco}h \rightarrow h$ и замену

$$z = x + A^{-1}b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^*A^{-1}b - h} \quad (2)$$

Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b(v_e(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= c^*z + h(v_e(\theta_e) - \gamma) \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим систему (3), предполагая, что функция $v_e(\theta_e)$ дифференцируема на \mathbb{R} и удовлетворяет условиям

$$\mu_1 \leq \frac{dv_e(\theta_e)}{d\theta_e} \leq \mu_2 \quad (4)$$

Введем в рассмотрение число:

$$\nu = \int_0^{2\pi} (v_e(\theta_e) - \gamma) d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} |v_e(\theta_e) - \gamma| d\theta_e \right)^{-1} \quad (5)$$

Теорема 1 [3]. Пусть все нули функции $v_e(\theta_e) - \gamma$ изолированы, пара (A, b) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, и \varkappa , такие что имеют место неравенства:

$$\operatorname{Re} \left(\varkappa K(ix) - \varepsilon [K(ix)]^2 - [K(ix) + \mu_1^{-1}ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1}ix] \right) \geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \quad (7)$$

Тогда система (3) глобально асимптотически устойчива.

2. Инженерное применение. Приведенная теорема не отвечает на вопрос как найти полосу захвата, т. е. максимальный интервал $\omega_e^{free} \in [0, \omega_{pull-in}]$, при котором система (1) глобально асимптотически устойчива. Этот вопрос является важным для инженеров при физической реализации ФАПЧ. Для ответа рассмотрим некоторые фильтры 2 порядка. Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие условию теоремы так, что бы максимизировать ν . При характеристике фазового детектора $v(\theta_e) = \sin(\theta_e)$, ν выражается следующим образом

$$|\nu| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (8)$$

Из (8) и второго уравнения (2) можно однозначно найти ω_e^{free} . Из максимальнойности ν получим максимальный ω_e^{free} , при котором система (1) глобально асимптотически устойчива.

3. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром
 $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} = \frac{1}{1 + as + bs^2} \quad (9)$$

$$a = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad b = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + ab^{-1}s + b^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, b) вполне управляема. Для максимизации ν подставим (9) в (6) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену переменной $t = s^2$. В результате преобразований получим

$$\tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\kappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + \kappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (10)$$

Заметим, что $\varepsilon \leq \kappa - \tau - \delta$ является необходимым условием для (10). Положим $\varepsilon = \kappa - \tau - \delta$. Не умаляя общности, можем считать $\kappa = 1$, тогда первое условие теоремы принимает вид

$$At^2 + Bt + C \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (11)$$

$$A = \tau b^2, \quad B = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2, \quad C = -b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b$$

Для того, что бы выполнялось (11) необходимо потребовать $A \geq 0$ и $C \geq 0$, тогда $B \geq 0$. В этом случае уравнение $At^2 + Bt + C = 0$ не имеет положительных корней, т.е. выполняется (11). Будем искать максимум следующей функции

$$\nu^2 < 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \quad (12)$$

Получили задачу на условный экстремум, т.е. найти максимум (12), при условии $C \geq 0$. Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Однако точки падения ранга противоречат условию теоремы. Рассмотрим границу допустимой области, т.е. $C = 0$, выразим τ через δ и подставим в (12)

$$\nu^2 < 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \quad (13)$$

Максимум (13) достигается при $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$ и равен

$$\nu^2 < \frac{(b-1)^2}{a^2-2b+1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2}-1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (14)$$

4. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром
 $\frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию

$$W(x) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)} = \frac{1+\alpha_1\beta_1s+\alpha_2\beta_2s^2}{1+\alpha_1s+\alpha_2s^2} \quad (15)$$

$$\alpha_1 = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1} + \tau_{z2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}}$$

$$0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad 0 < \tau_{z1} < 1, \quad 0 < \tau_{z2} < 1$$

Предположим

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \quad (16)$$

Поскольку $\det(sI - A) = s^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}s + \alpha_2^{-1}$, матрица A — устойчива. Очевидно, что пара (A, b) вполне управляема. Для максимизации ν подставим (15) в (6) и перенесем все в левую часть неравенства. Положим $\tau = 0$, и не умаляя общности можем считать $\varkappa = 1$. В результате преобразований, первое условие теоремы (6) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} & (-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + \\ & + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + \\ & + 1 - \varepsilon - \delta \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что $\varepsilon \leq 1 - \delta$ является необходимым условием для (17). Для максимизации $4\varepsilon\delta$ положим $\varepsilon = 1 - \delta$. Тогда (6) принимает вид

$$\begin{aligned} At + B & \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ A & = \alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta \\ B & = \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \end{aligned} \quad (18)$$

Выполнение (16) влечет $A > 0$. Так как максимальное значение достигается в точках падения ранга или на границе положим $B = 0$. Тогда из $B = 0$ получаем

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)}{\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)} \quad (19)$$

Для того что бы $\delta > 0$ потребуем

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (20)$$

Это условие гарантирует положительность числителя и знаменателя (19). В результате преобразований получили оценку для ν^2

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2} \quad (21)$$

Эта оценка была получена в [2], однако вывод был пропущен.

5. Заключение. В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат будет интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 195–207.
2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.
3. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Изд-во Невский диалект, 2014. P. 195–207.
4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Solution of the Gardner problem on the lock-in range of phase-locked loop // ArXiv e-prints. 2017. 1705.05013. P. 289–298.
5. Appleton E. E. Automatic synchronization of triode oscillators // Proc. Camb. Phil. Soc. 1923. Vol. 21, No 3. P. 231.
6. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vols. 255-260. P. 1.