

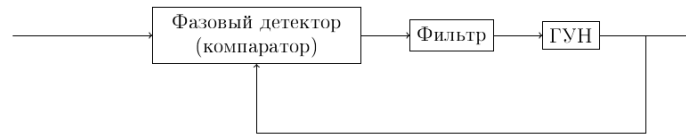
УДК 517.977.5

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

### Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

**1. Введение.** Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, которая подстраивает частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала. Она появилась в первой половине XX века [5]. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в различном телекоммуникационном оборудовании, навигационных системах и т. д. [1].

На практике часто используют системы ФАПЧ второго порядка. Наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка, отличающиеся хорошим подавлением шума и более низкой стационарной ошибкой [6].



**Рис. 1.** Схема классической системы ФАПЧ, где  $\sin(\theta_{ref}(t))$  — опорный сигнал с фазой  $\theta_{ref}(t)$ ,  $\cos(\theta_{vco}(t))$  — сигнал ГУН с фазой  $\theta_{vco}(t)$

Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco} C^T x - K_{vco} D(\sin(\theta_e) - \gamma)\end{aligned}\tag{1}$$

Где  $A$  — постоянная матрица  $n \times n$ ,  $B$  и  $C$  постоянные  $n$  — мерные векторы,  $D$  — константа,  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояний системы,

---

*Миронов Алексей Владиславович* — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru

*Юлдашев Ренат Владимирович* — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: renatyv@pm.me

$K_{vco}$  — коэффициент передачи,  $\gamma$  определяется следующим образом

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}(D - C^T A^{-1} B)} \quad (2)$$

$\omega_e^{free}$  — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте. Введем в рассмотрение число:

$$|\nu| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (3)$$

**Теорема 1** [3]. Пусть все нули функции  $\sin(\theta_e) - \gamma$  изолированы, пара  $(A, B)$  вполне управляема, все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части и существуют числа  $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$ , и  $\varkappa$ , такие что имеют место неравенства:

$$\operatorname{Re} \left( \varkappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - [W(ix) - ix]^T \tau [W(ix) + ix] \right) \geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \quad (5)$$

Тогда система (1) глобально асимптотически устойчива.

Приведенная теорема не отвечает на вопрос как найти полосу захвата, т. е. максимальную разность частот опорного сигнала и ГУН  $\omega_e^{free}$ , при котором система (1) глобально асимптотически устойчива. Этот вопрос является важным для инженеров при физической реализации ФАПЧ. Для ответа рассмотрим некоторые фильтры 2 порядка. Найдем  $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$ , удовлетворяющие условию теоремы так, что бы максимизировать  $\nu$ . Из максимальной  $\nu$  получим максимальный  $\omega_e^{free}$ , при котором система (1) глобально асимптотически устойчива.

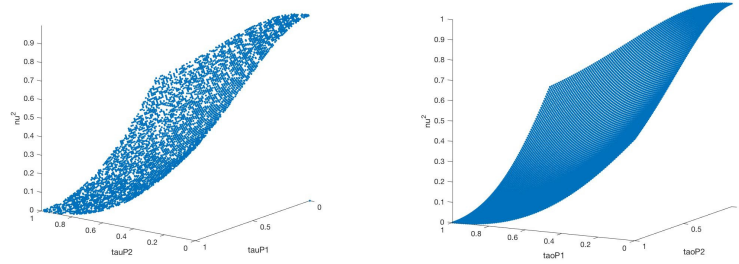
**2. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  
 $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ . Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \quad (6)$$

Поскольку  $\det(sI - A) = s^2 + (\tau_{p1}^{-1} + \tau_{p2}^{-1})s + \tau_{p1}^{-1}\tau_{p2}^{-1}$ , матрица  $A$  — устойчива. Очевидно, что пара  $(A, B)$  вполне управляема. Подставим

(6) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации  $\nu$  положим

$$\varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = \tau_{p1}\tau_{p2} + \delta(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2), \quad \delta = \frac{1 - \tau_{p1}\tau_{p2}}{2(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1)}$$



**Рис. 2.** Численная оптимизация  $\nu^2$  в МАТЛАВ с помощью функции `fmincon` и график  $\nu^2$  построенный по (7)

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (7)$$

**3. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  
 $\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$ . Рассмотрим передаточную функцию

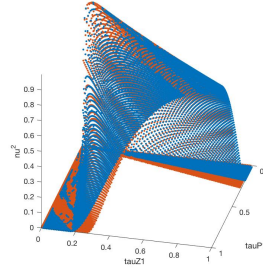
$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2} \quad (8)$$

Поскольку  $\det(sI - A) = s^2 + 2\tau_{p1}^{-1}s + \tau_{p1}^{-2}$ , матрица  $A$  — устойчива. Очевидно, что пара  $(A, B)$  вполне управляема. Подставим (8) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации  $\nu$  положим  $\varkappa = 1$ ,  $\tau = 0$

$$\varepsilon = \begin{cases} z^2 - z^4\delta, & \delta \in [\delta_1, \delta_2] \\ q - z^2\delta, & \delta \in (\delta_2, \delta_3] \\ 1 - \delta, & \delta \in (\delta_3, \delta_4] \end{cases}$$

где  $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}$ ,  $q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$ ,  $\delta_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  — точки разбивающие  $[0, 1]$  на непересекающиеся полуинтервалы, в зависимости от  $z$ . Положим  $\delta$  равным одним из  $\frac{1}{1+z^2}$ ,  $\frac{1-q}{1-z^2}$ ,  $\frac{z^2-q}{z^4-z^2}$ ,  $\frac{q}{2z^2}$ ,  $\frac{1}{2z^2}$ ,  $\frac{1}{2}$  в зависимости от  $z$ . Тогда  $4\varepsilon\delta$  определяется одним из следующих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^4-z^2} \left( z^2 - \frac{z^2(z^2-q)}{z^2-1} \right) \quad (9)$$



**Рис. 3.** Численная оптимизация  $\nu^2$  в MATLAB с помощью функции fmincon и график  $\nu^2$  построенный по (9)

**4. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром**  
 $\frac{1+\alpha_1\beta_1s+\alpha_2\beta_2s^2}{1+\alpha_1s+\alpha_2s^2}$ . Рассмотрим передаточную функцию

$$W(x) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2} \quad (10)$$

Где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  вещественные положительные числа. Предположим

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \quad (11)$$

Поскольку  $\det(sI - A) = s^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}s + \alpha_2^{-1}$ , матрица  $A$  — устойчива. Очевидно, что пара  $(A, B)$  вполне управляема. Подставим (10) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации  $\nu$  положим

$$\tau = 0, \quad \varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)}$$

Потребуем

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (12)$$

Это условие гарантирует положительность числителя и знаменателя  $\delta$ .

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2} \quad (13)$$

Эта оценка была получена в [2], однако вывод был пропущен.

**5. Заключение.** В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат будет интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

## Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 115–116.
2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.
3. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Изд-во Невский диалект, 2014. P. 58–66.
4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2455.
5. Appleton E. E. Automatic synchronization of triode oscillators // Proc. Camb. Phil. Soc. 1923. Vol. 21, No 3. P. 231.
6. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vols. 255-260. P. 2262.