УДК 517.977.5

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, подстраивающая частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в телекоммуникационном оборудовании [1], навигационных системах [7] и д. р. Основными параметрами ФАПЧ являются полосы удержания, захвата и захвата без проскальзывания [6]. В данной работе получены оценки полосы захвата для некоторых систем ФАПЧ 3 порядка, которые отличаются хорошим подавлением шума и низкой стационарной ошибкой, по сравнению с системами ФАПЧ 2 порядка [5].

2. Математическая модель ФАПЧ.

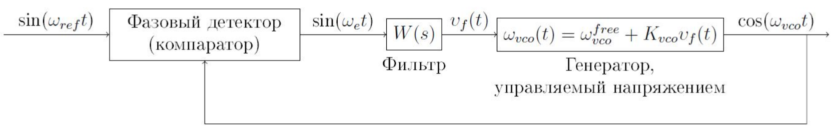

Рис. 1. Схема классической системы ФАПЧ, где ω_{ref} — частота опорного сигнала, ω_{vco} — частота сигнала ГУН, $v_f(t)$ — выходной сигнал фильтра, ω_{vco}^{free} — частота свободных колебаний ГУН, $\omega_e = \omega_{ref} - \omega_{vco}$

Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [4], рис. 1

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma), \\ &\dot{\theta}_e = -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma)), \end{aligned} \tag{1}$$

Миронов Алексей Владиславович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru

Юлдашев Ренат Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: renatyv@pm.me

где A — постоянная матрица $n \times n$, B и C постоянные n — мерные векторы, D — константа, $x(t)$ — n-мерный вектор состояний системы. $W(s) = C^T \left(A - sI\right)^{-1} B - D$ — передаточная функция фильтра. K_{vco} — коэфициент передачи, γ определяется следующим образом

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}\left(D - C^T A^{-1} B\right)}, \tag{2}$$

где $\omega_e^{free} = \omega_{ref} - \omega_{free}$ — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

3. Оценка области захвата. Введем определение полосы захвата согласно [4].

Определение 1. Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН $|\omega_p|$ такая, что система (1) глобально асимптотически устойчива для всех $0 < |\omega_e^{free}| < |\omega_p|$.

Определение 2. Система (1) называется глобально асимптотически устойчивой,если любое решение $x(t, x_0)$ стремится к некоторому состоянию равновесия при $t \to +\infty$.

Введем в рассмотрение число:

$$\mid \nu \mid = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}} \tag{3}$$

Следующая теорема дает условие глобальной асимптотической устойчивости (1).

Теорема 1 [3]. *Пусть все нули функции* $\sin(\theta_e) - \gamma$ *изолированы, пара* (A, B) *вполне управляема, все собственные значения матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части и существуют числа* $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geqslant 0$, *и* $\varkappa$, *такие что имеют место неравенства:*

$$\mathrm{Re}\left(\varkappa W(ix) - \varepsilon \left[W(ix)\right]^2 - \left[W(ix) - ix\right]^T \tau \left[W(ix) + ix\right]\right) \geqslant \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \tag{5}$$

Тогда система (1) *глобально асимптотически устойчива.*

Далее будем выбирать $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие (4) так, что бы максимизировать ν. Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free}, при котором система (1) глобально асимтотически устойчива.

3.1. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \tag{6}$$

Подставим (6) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Тогда оценка ν будет наибольшей при следующих значениях параметров

$$\varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = \tau_{p1}\tau_{p2} + \delta(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2), \quad \delta = \frac{1-\tau_{p1}\tau_{p2}}{2(\tau_{p1}^2+\tau_{p2}^2+1)}$$

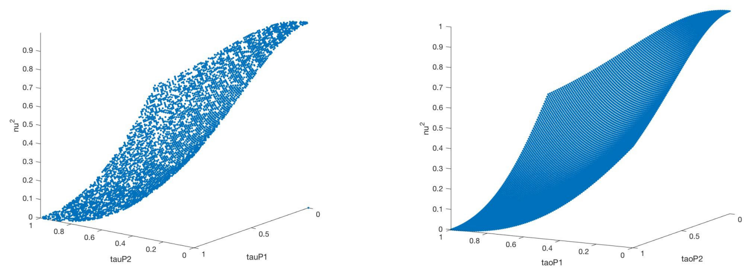

Рис. 2. Слева численная оценка ν^2 в MATLAB с помощью функции fmincon. Справа график ν^2, построенный по (7)

Таким образом, получим следующую оценку:

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2}-1)^2}{\tau_{p1}^2+\tau_{p2}^2+1} \tag{7}$$

3.2. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$. Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2} \tag{8}$$

Подставим (8) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Положим $\varkappa = 1$, $\tau = 0$. Оценка ν будет наибольшей если параметры ε, δ лежат на одной из граней выпуклого многоугольника, ограниченного прямыми $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ и

$$\varepsilon(\delta) = z^2 - z^4\delta, \quad \varepsilon(\delta) = q - z^2\delta, \quad \varepsilon(\delta) = 1 - \delta, \tag{9}$$

где $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}$, $q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$. Тогда $4\varepsilon\delta$ пределяется одним из следующих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^2-1} - \left(\frac{z^2-q}{z^2-1}\right)^2 \tag{10}$$

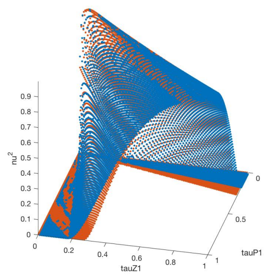

Рис. 3. Синим цветом представлена численная оценка ν^2 согласно (4), (5) в MATLAB с помощью функции fmincon. Красным цветом представлен график ν^2 построенный по (10), как максимум по всем граням многоугольника

3.3. Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2}$. Оценим полосу захвата ФАПЧ для фильтра с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1 s + \alpha_2\beta_2 s^2}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1,\alpha_2 \tag{11}$$

Подставим (11) в (4) и перенесем все в левую часть неравенства. Для максимизации оценки ν положим

$$\tau = 0, \quad \varkappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)}{\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)} \tag{12}$$

Чтобы гарантировать положительность δ потребуем

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1)} \tag{13}$$

Тогда, подставив (12) в (4) и применив (5), получим оценку

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1)-\alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1-\alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2)-2\alpha_2(1-\beta_2)]^2} \tag{14}$$

Эта оценка совпадает с оценкой, полученной в [2].

4. Заключение. В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются во многих системах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат может быть интересен инженерам и может использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / McGraw-Hill Education, 2007. P. 115–116.

2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.

3. Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B. Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems / ed. by H. Kurke. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1992. P. 72–75.

4. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2455.

5. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vol. 255-260. P. 2262.

6. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты / М.: Изд-во Связь, 1972. P. 15–19.

7. Rao R. B., Kunysz W., Fante R., McDonald K., GPS/GNSS Antennas / Artech House, 2013. P. 50–51.