

Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

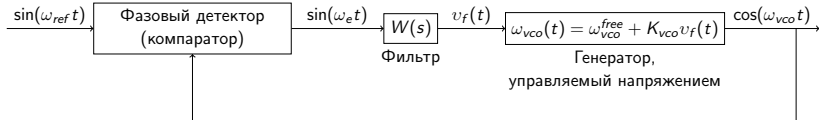
Миронов Алексей Владиславович

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

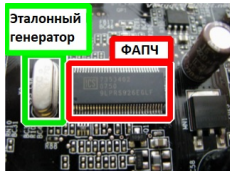
Научный руководитель: д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

5 апреля 2020 г.

Принцип работы ФАПЧ



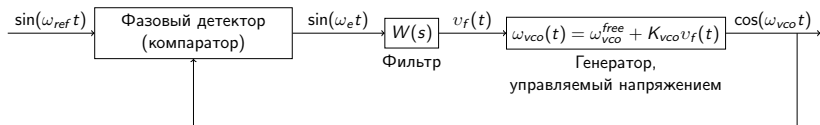
Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, подстраивающая частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала.



Применение системы ФАПЧ:

- 1 Телекоммуникационное оборудование
- 2 Навигационное оборудование (GPS, Глонасс, Галилео)
- 3 Компьютеры (микропроцессоры)

Математическая модель ФАПЧ



Дифференциальные уравнения ФАПЧ

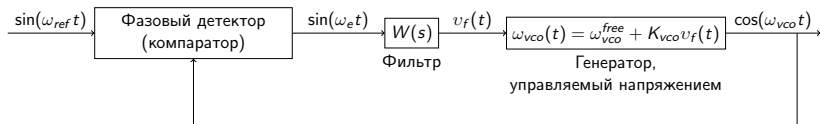
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma), \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco} C^T x - K_{vco} D(\sin(\theta_e) - \gamma),\end{aligned}\quad (1)$$

A — постоянная матрица $n \times n$, B и C постоянные n — мерные векторы, D — константа, $x(t)$ — n -мерный вектор состояний системы, K_{vco} — коэффициент передачи.

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} (D - C^T A^{-1} B)}, \quad (2)$$

где $\omega_e^{free} = \omega_{ref} - \omega_{vco}^{free}$ — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН.

Постановка задачи



Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН $|\omega_p|$ такая, что система (1) глобально асимптотически устойчива для всех $0 \leq |\omega_e^{free}| < |\omega_p|$.

Задача: оценить полосы захвата для передаточных функций фильтров:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}$$

$$0 < \tau_{pi} < 1, \quad 0 < \tau_{zi} < 1, \quad i = 1, 2, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{z1}$$

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2$$

Теорема

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma), \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco} C^T x - K_{vco} D(\sin(\theta_e) - \gamma)\end{aligned}\tag{3}$$

Введем обозначение

$$|\nu| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1 - \gamma^2}}\tag{4}$$

Теорема (Леонов Г. А., Райтман Ф., Смирнова В. Б., 1992 г., Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems)

Пара (A, B) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geq 0$, и κ , такие что имеют место неравенства:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left(\kappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - \tau [W(ix) - ix]^T [W(ix) + ix] \right) &\geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ 4\varepsilon\delta &> (\kappa\nu)^2\end{aligned}$$

Тогда система (3) глобально асимптотически устойчива.

Передаточная функция $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

Условия теоремы:

$$\operatorname{Re} \left(\kappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - \tau [W(ix) - ix]^T [W(ix) + ix] \right) \geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$4\varepsilon\delta > (\kappa\nu)^2$$

Для передаточной функции фильтра:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1 \quad (5)$$

оценка ν будет наибольшей при следующих значениях параметров:

$$\kappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = \tau_{p1}\tau_{p2} + \delta(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2), \quad \delta = \frac{1 - \tau_{p1}\tau_{p2}}{2(\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1)}$$

Получим оценку для ν^2 :

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (6)$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$

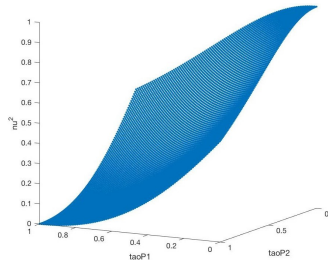
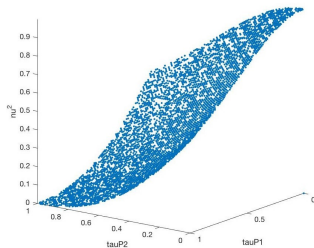


Рис.: Слева численная оценка ν^2 в MATLAB с помощью функции `fmincon`. Справа график ν^2 , построенный по (7)

Оценка для ν^2 :

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (7)$$

Из следующих соотношений получим оценку полосы захвата:

$$|\nu| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \gamma K_{vco} (D - C^T A^{-1} B) = \omega_e^{free} \quad (8)$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

Условия теоремы:

$$\operatorname{Re} \left(\kappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - \tau [W(ix) - ix]^T [W(ix) + ix] \right) \geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$4\varepsilon\delta > (\kappa\nu)^2$$

Для передаточной функции фильтра:

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2} \quad (9)$$

положим $\kappa = 1$, $\tau = 0$. Оценка ν будет наибольшей, если параметры ε , δ лежат на одной из граней многоугольника, ограниченного $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ и

$$\varepsilon(\delta) = z^2 - z^4\delta, \quad \varepsilon(\delta) = q - z^2\delta, \quad \varepsilon(\delta) = 1 - \delta,$$

где $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}$, $q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$. Тогда ν^2 не превзойдет одного из следующих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1 + z^2}, \quad \frac{4(1 - q)(q - z^2)}{1 - z^2}, \quad \frac{z^2 - q}{z^2 - 1} - \left(\frac{z^2 - q}{z^2 - 1} \right)^2 \quad (10)$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

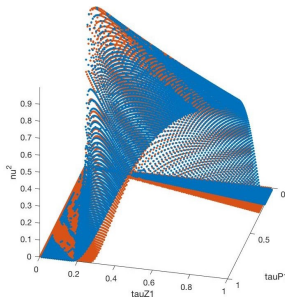


Рис.: Синим цветом представлена численная оценка ν^2 согласно 1 и 2 условиям теоремы в MATLAB с помощью функции `fmincon`. Красным цветом представлен график ν^2 , построенный по (11), как максимум по всем граням многоугольника

ν^2 не превосходит одного из следующих соотношений:

$$\frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^2-1} - \left(\frac{z^2-q}{z^2-1} \right)^2 \quad (11)$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{1+\alpha_1\beta_1s+\alpha_2\beta_2s^2}{1+\alpha_1s+\alpha_2s^2}$

Условия теоремы:

$$\operatorname{Re} \left(\kappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - \tau [W(ix) - ix]^T [W(ix) + ix] \right) \geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$4\varepsilon\delta > (\kappa\nu)^2$$

Для передаточной функции фильтра:

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \quad (12)$$

оценка ν будет наибольшей при следующих значениях параметров:

$$\tau = 0, \quad \kappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \quad (13)$$

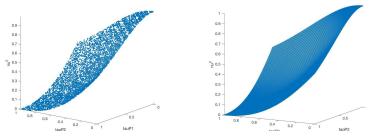
Чтобы гарантировать положительность δ потребуем:

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (14)$$

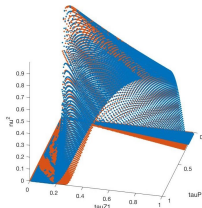
Тогда получим оценку:

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2}$$

- 1 Для передаточной функции $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ была найдена оценка полосы захвата



- 2 Для передаточной функции $W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$ была найдена оценка полосы захвата



- 3 Для передаточной функции $W(s) = \frac{1+\alpha_1\beta_1s+\alpha_2\beta_2s^2}{1+\alpha_1s+\alpha_2s^2}$ был восстановлен вывод оценки полосы захвата

Спасибо за внимание