

Санкт-Петербургский государственный университет

Отделение прикладной математики и информатики  
Кафедра прикладной кибернетики

Миронов Алексей Владиславович

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
д. т.н., профессор Юлдашев Р. В.

# Содержание

1	Введение	3
2	Теорема	3
3	Теорема Декарта	4
4	Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$	4
4.1	Оценка максимума $\nu$ константой . . . . .	5
4.2	Точная оценка максимума $\nu$ . . . . .	5
5	Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$	6
5.1	$\tau = 0$ . . . . .	6
5.2	$\tau > 0$ . . . . .	8

# 1 Введение

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e))\end{aligned}\tag{1}$$

Найдем стационарные точки системы (1)

$$\begin{aligned}x &= -A^{-1}bv_e(\theta_e) \\ v_e(\theta_e) &= \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}\end{aligned}\tag{2}$$

Возьмем  $\theta_e = \theta_s$ , для которых выполняется (2). Сделаем замену:

$$\begin{aligned}z &= x + A^{-1}bv_e(\theta_s) \\ \sigma &= \theta_e\end{aligned}\tag{3}$$

После замены система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}) \\ \dot{\sigma} &= -K_{vco}(c^*z + h(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}))\end{aligned}\tag{4}$$

# 2 Теорема

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= C^*z + Rf(\sigma)\end{aligned}\tag{5}$$

Here A, B, C, and R are constant matrices of dimensions  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $n \times m$ , and  $n \times n$ , respectively, whereas the components  $\phi_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , of the vector-valued function  $f(\sigma)$  are scalar differen-tiable functions  $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$ , where  $\psi_k$  is the k-th component of the vector  $\psi$ .

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function  $\chi(p)$  can be written in the form (5) with  $m = 1$  by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions  $\phi_k(\sigma_k)$  satisfy the following conditions:  $\phi_k(\sigma_k) \equiv 0$

$$\begin{aligned}\mu_{1k} &\leq \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}, \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \\ \phi_k(\sigma_k + \Delta_k) &= \phi_k(\sigma_k), \forall \sigma_k \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{6}$$

Here the  $\Delta_k$  are positive numbers. Sometimes, in the study of the specific pendulum-like systems, only one of the inequalities

$$\mu_{1k} \leq \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \text{ or } \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}\tag{7}$$

is known, so we will assume the number  $\mu_{1k}$  to be either finite negative or  $-\inf$ , and the number  $\mu_{2k}$  to be either finite positive or  $\inf$ . When  $\mu_{1k} = -\inf$  or  $\mu_{2k} = \inf$ , we will use the notation  $\mu_{1k}^{-1} = 0$  or  $\mu_{2k}^{-1} = 0$ , respectively.

Let us introduce the numbers:

$$\nu_k = \int_0^{\Delta_k} \phi_k(\sigma) d\sigma \left( \int_0^{\Delta_k} |\phi_k(\sigma)| d\sigma \right)^{-1}\tag{8}$$

the transfer matrix of system (5) from its “input”  $f$  to its “output”  $(-d\sigma/dt)$

$$K(p) = C * (A - pI)^{-1}B - R \quad (9)$$

and the diagonal  $m \times m$  matrices:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \text{diag}[\mu_{11}, \dots, \mu_{1m}], \mu_2 = \text{diag}[\mu_{21}, \dots, \mu_{2m}], \\ \nu &= \text{diag}[\nu_1, \dots, \nu_m] \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 1. Suppose that the stationary set  $\Lambda$  of system (5) consists of isolated points, the pair  $(A, B)$  is controllable, the matrix  $A$  is Hurwitz, and there exist diagonal  $m \times m$  matrices  $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$ , and  $\varkappa$  such that the following inequalities are valid:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1}ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1}ix]) &\geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4\varepsilon\delta &> (\varkappa\nu)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Then system (5) is gradient-like.

Очевидно, что систему (1) можно привести к системе (5) положив:

$$\begin{aligned} A &= A \\ B &= b \\ C &= -K_{vco}C^* \\ R &= -K_{vco}h \\ f(\sigma) &= v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} \end{aligned} \quad (12)$$

Положим далее:

$$\begin{aligned} v_e(\sigma) &= \sin(\sigma) \\ \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} &= \gamma \end{aligned} \quad (13)$$

### 3 Теорема Декарта

Теорема 2. Если у полинома записанного в стандартной форме все коэффициенты действительные и все его корни также заведомо действительные, то число его положительных корней, если учитывать их кратности, равно числу перемен знаков в ряде его коэффициентов. Если же он имеет и комплексные корни, то это число равно или на четное число меньше числа знакоперемен.

### 4 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} = \frac{1}{1 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})x + \tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \quad (14)$$

Введем обозначения:  $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$ ,  $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$

Рассмотрим первое условие теоремы 1

$$\text{Re}(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^* \tau [K(ix) + ix]) \geq \delta \quad (15)$$

Подставим (14) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) &\geq 0 \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Из второго условия теоремы 1 получаем:

$$\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \quad (17)$$

Для оценки полосы захвата системы (1) будем искать максимум  $\nu$ .

## 4.1 Оценка максимума $\nu$ константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (16) нужно потребовать  $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \varkappa &\geq \varepsilon + \tau + \delta \\ \varkappa^2 &\geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ 2 - \left(\frac{2\varepsilon^2}{\varkappa^2} + \frac{2\delta^2}{\varkappa^2} + \frac{2\tau^2}{\varkappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\varkappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\varkappa^2}\right) &\geq \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} \\ 2 &> \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \quad (18)$$

## 4.2 Точная оценка максимума $\nu$

2. Так как  $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$ , то  $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$ . Для максимизации функции  $\frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$  возьмем  $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} \tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) &\geq 0 \\ t &> 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \tau b^2 \\ B &= \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2 \\ C &= -\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что для того, чтобы выполнялось (19) необходимо потребовать  $A \geq 0$  и  $C \geq 0$ , тогда  $B \geq 0$ . Тогда по теореме Декарта уравнение  $At^2 + Bt + C = 0$  не имеет положительных корней, т.е. выполняется (19). Не умаляя общности, можем положить  $\varkappa = 1$  и будем искать максимум следующей функции:

$$f(\delta) = 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \quad (21)$$

Получили задачу на условный экстремум, т.е. найти максимум (21), при условии  $C \geq 0$ . Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Вычислим градиент (21):

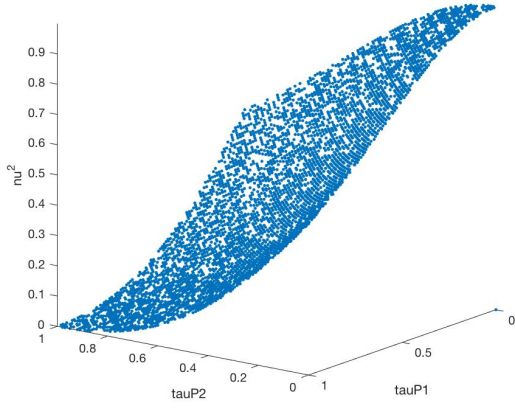
$$(4 - 4\tau - 8\delta, 4\delta) \quad (22)$$

Получаем точку понижения ранга:  $\delta = 0, \tau = 1$ . Это противоречит условию теоремы  $\delta > 0$ . Рассмотрим  $C = 0$ , выразим  $\tau$  и подставим в (21):

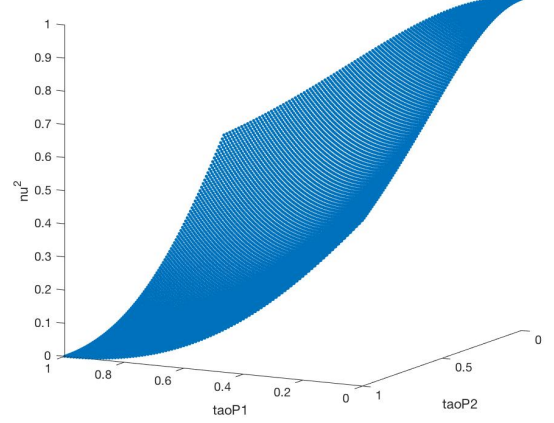
$$f(\delta) = 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \quad (23)$$

Максимум (23) достигается при  $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$  и равен

$$\frac{(b-1)^2}{a^2-2b+1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2}-1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} > \nu^2 \quad (24)$$



(a) Численное приближение в MATLAB



(b) Вычисленный по (24)

Рис. 1: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$

## 5 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)^2}{(1 + \tau_{p1}x)^2} \quad (25)$$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} & \tau_{p1}^4 \tau t^3 + (-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 \tau + 2\tau_{p1}^2 \tau - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa) t^2 + \\ & + (\tau - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \tau + 4\tau_{z1} b \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ & t = x^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что при  $\tau_{z1} \neq \tau_{p1}$  функция  $\chi(x) = p^{-1}K(x)$  не приводима. Тогда по теореме пара  $(A, B)$  управляема.

### 5.1 $\tau = 0$

Положим в (26)  $\tau = 0$ , тогда первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$(\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta) t^2 + (4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\varkappa - \varepsilon - \delta) \geq 0 \quad (27)$$

$$t = x^2 \geq 0$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} A &= \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta \\ B &= 4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta \\ C &= \varkappa - \varepsilon - \delta \end{aligned} \quad (28)$$

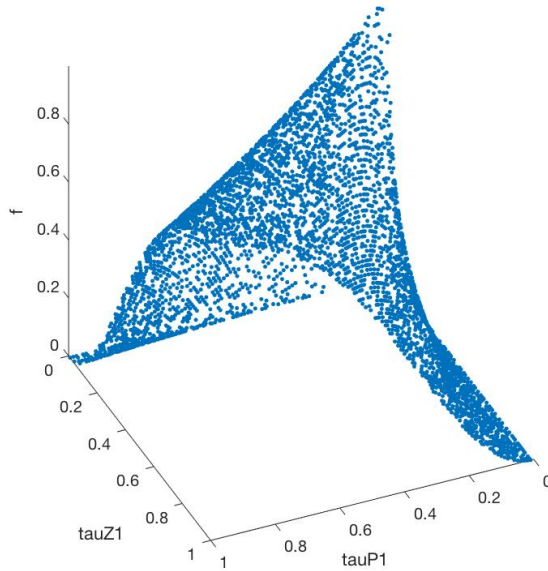
Для того, что бы выполнялось (27) нужно потребовать:  $A \geq 0$  и  $C \geq 0$ , тогда при  $B \geq 0$ , по теореме Декарта уравнение не имеет положительных корней, т.е. выполняется (27). Не умаляя общности можем считать  $\varkappa = 1$ . Получили задачу нахождения условного экстремума при условии:

$$\begin{aligned}\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta &\geq 0 \\ 4\tau_{z1} \tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2 \delta &\geq 0 \\ 1 - \varepsilon - \delta &\geq 0\end{aligned}\tag{29}$$

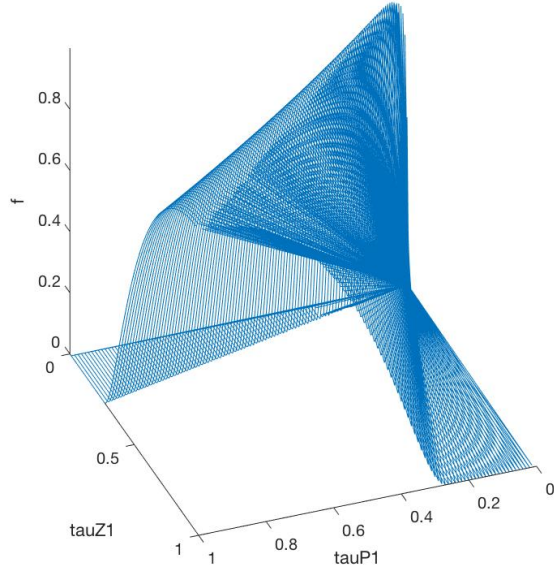
Максимум может достигаться на границе, или в точках понижения ранга. Представим  $\varepsilon$  как  $\varepsilon(\delta)$  и рассмотрим функцию  $\varepsilon\delta$  на границе области (29)

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^4}{\tau_{z1}^4} \delta &= \varepsilon \\ 2\frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}} - \frac{1}{2} - \frac{\tau_{p1}^2}{2\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2} \delta &= \varepsilon \\ \varepsilon &= 1 - \delta\end{aligned}\tag{30}$$

Для этого найдем пересечения прямых (30): Максимум функции  $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$  представлен на графике.



Если  $a > 0, c > 0$ , тогда при  $b < 0$ , уравнение может иметь 2 положительных корня. Дополнительно потребуем, что бы дискриминант уравнения  $at^2 + bt + c = 0$  был не положительным. В этом случае получаем нелинейную оптимизационную задачу с нелинейными ограничениями, максимум функции  $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{\varkappa^2}$  представлен на графике.



## 5.2 $\tau > 0$

Предположим в (26)  $\tau > 0$  и разделим на  $\tau_{p1}^4 \tau$ . Не умаляя общности, можем считать  $\tau = 1$ , тогда (26) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 t^3 + at^2 + bt + c &\geq 0 \\
 A &= \frac{1}{\tau_{p1}^4} (-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 + 2\tau_{p1}^2 - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa) \\
 B &= \frac{1}{\tau_{p1}^4} (1 - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 + 4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) \\
 C &= \frac{1}{\tau_{p1}^4} (\varkappa - \varepsilon - 1 - \delta) \\
 t = x^2 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

Заметим, что по теореме Декарта:  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$