

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

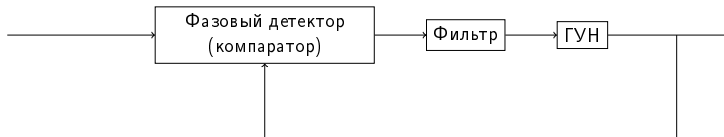
Миронов Алексей Владиславович

Санкт-Петербургский государственный университет

Научный руководитель: д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

19 марта 2020 г.

Принцип работы ФАПЧ



Определение

Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система предназначенная для синхронизации частот эталонного и подстраиваемого генераторов

Применение системы ФАПЧ

- 1 Телекоммуникационное оборудование
- 2 Навигационное оборудование (GPS, Глонасс, Галилео)
- 3 Компьютеры (микропроцессоры)
- 4 Военном оборудовании (frequency hopping)

Принцип работы ФАПЧ

Дифференциальные уравнения ФАПЧ

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e))\end{aligned}\tag{1}$$

Определение

Полоса захвата — максимальная разность частот опорного сигнала и ГУН ω_e^{free} , при которой система ФАПЧ глобально асимптотически устойчива.

Определение

Функция

$$W(s) = -c^* (A - sI)^{-1} b + h\tag{2}$$

Называется передаточной функцией системы (1)

Постановка задачи

Для реализации ФАПЧ важно знать диапазон частот, для которых возможна синхронизация.

Оценим полосу захвата систем ФАПЧ с фильтрами

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}$$

$$0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad 0 < \tau_{z1} < 1, \quad 0 < \tau_{z2} < 1$$

Теорема

Положим, что функция $v_e(\theta_e)$ дифференцируема на \mathbb{R} и удовлетворяет

$$\mu_1 \leq \frac{dv_e(\theta_e)}{d\theta_e} \leq \mu_2 \quad (3)$$

Введем в рассмотрение

$$\nu = \int_0^{2\pi} (v_e(\theta_e) - \gamma) d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} |v_e(\theta_e) - \gamma| d\theta_e \right)^{-1} \quad (4)$$

Теорема

Пусть все нули функции $v_e(\theta_e) - \gamma$ изолированы, пара (A, b) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, и \varkappa , такие что имеют место неравенства:

$$\operatorname{Re}(\varkappa K(ix) - \varepsilon(K(ix))^2 - [K(ix) + \mu_1^{-1}ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1}ix]) \geq \delta, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2$$

Теорема

Тогда система

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b(v_e(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= c^*z + h(v_e(\theta_e) - \gamma)\end{aligned}\tag{5}$$

глобально асимптотически устойчива.

Рассмотрим систему ДУ ФАПЧ (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{\text{free}} - K_{\text{vco}}(c^*x + hv_e(\theta_e))\end{aligned}$$

Сделаем преобразования $-K_{\text{vco}}c \rightarrow c$, $-K_{\text{vco}}h \rightarrow h$ и замену

$$z = x + A^{-1}b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{c^*A^{-1}b - h}\tag{6}$$

В результате (1) примет вид (5)

Найти $\varepsilon, \delta, \kappa, \tau$, из условия теоремы, что бы максимизировать ν . Тогда из определения ν

$$\nu = \int_0^{2\pi} (v_e(\theta_e) - \gamma) d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} |v_e(\theta_e) - \gamma| d\theta_e \right)^{-1} \quad (7)$$

и замены

$$z = x + A^{-1}b\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega_e^{free}}{c^*A^{-1}b - h} \quad (8)$$

найдется ω_e^{free} . Из максимальности ν получим максимальный ω_e^{free} , при котором система ДУ ФАПЧ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e)) \end{aligned}$$

глобально ассимптотически устойчива.

$$\text{Фильтр } W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} \quad (9)$$

Подставим (9) в первое условие теоремы. Для максимизации ν положим

$$\kappa = 1, \quad \varepsilon = 1 - \tau - \delta, \quad \tau = \delta\tau_{p1}^2 + \delta\tau_{p2}^2 + \tau_{p1}\tau_{p2} \quad (10)$$

Получим оценку для ν^2

$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (11)$$

$$\text{Фильтр } W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$

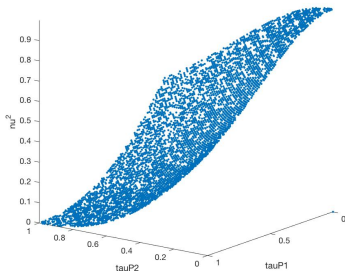


Рис.: Численное решение

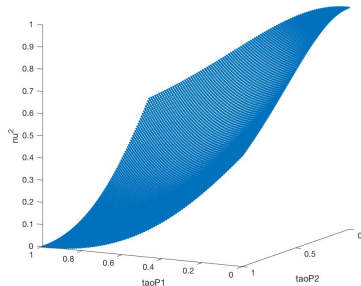


Рис.: Аналитическое решение

Фильтр $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

Оценка параметра ν^2 для фильтра $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$

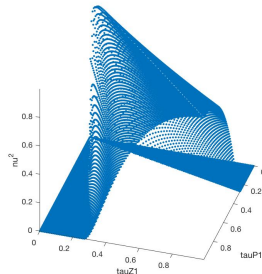
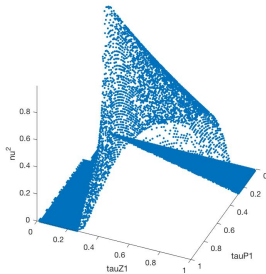


Рис.: 1. Численное приближение в MATLAB 2. Аналитическое решение

Фильтр
$$F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$$

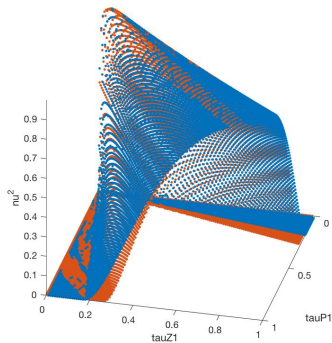


Рис.: График зависимости ν^2 от τ_{p1}, τ_{p2} . Синим цветом представлено точное решение. Оранжевым цветом представлено аналитическое решение.

$$\text{Фильтр } F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$

При рассмотрении фильтра $F(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ получаем следующую оценку параметра ν^2 :

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1) - \alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)]^2}$$

$$\alpha_1 = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1} + \tau_{z2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}}$$

- ❶ Для фильтра

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}$$

была найдена оценка полосы захвата

- ❷ Для фильтра

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}$$

был восстановлен вывод оценки полосы захвата

Спасибо за внимание