

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет  
Кафедра прикладной кибернетики

Миронов Алексей Владиславович

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

Рецензент:  
Благов М. В.

Санкт-Петербург  
2020

Saint Petersburg State University

Faculty of Mathematics and Mechanics  
The chair of applied cybernetics

Mironov Alexey Vladislavovich

Analytical estimates of the pull-in range for third-order PLLs

Final qualifying work

Scientific supervisor:  
assistant professor Yuldashev R. V.

Reviewer:  
Blagov M. V.

Saint-Petersburg  
2020

# Содержание

1	Введение	4
1.1	Примеры расфазировки . . . . .	4
1.2	Применение ФАПЧ . . . . .	4
2	Математическая модель ФАПЧ	6
3	Постановка задачи	8
4	Оценка полосы захвата	9
4.1	Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром	
	$\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ . . . . .	9
4.1.1	Оценка максимума $\nu$ константой . . . . .	9
4.1.2	Точная оценка максимума $\nu$ . . . . .	9
4.2	Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром	
	$\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$ . . . . .	11
4.3	Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром	
	$\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$ . . . . .	13
5	Заключение	15

# 1 Введение

Современный мир невозможно представить без огромного количества сигналов, передающихся беспроводным способом или по электрическим схемам. Они опутывают различные сферы жизни человека. На работе, дома, в повседневной жизни, мы постоянно используем телевизоры, компьютеры, автомобили и другие устройства, передающие сигналы. С момента, когда человек научился передавать сигналы беспроводным путем, количество передаваемой информации многократно увеличилось. При этом возникла необходимость в синхронной передаче сигналов. Для в том числе фазовой синхронизации сигналов, которая играет важную роль в различных системах. Электрический ток в энергосетях вырабатывается синхронными генераторами, действие которых основано на принципе фазовой синхронизации [10]. В США и России GSM связь работает на разных частотах, поэтому мобильным телефонам, требуется синхронизация частот приемника и передатчика, это позволяет туристам пользоваться одним телефоном и в России, и в США.

## 1.1 Примеры расфазировки

В телекоммуникационных системах часто возникает необходимость в фазовой синхронизации частот. Например, в гражданских системах телекоммуникации, таких как радио или телевидение, используется одна несущая частота, которая является постоянной. Многие люди даже знают частоту вещания своей любимой радиостанции. Однако для военных нужд использование одной несущей частоты несет определенные риски, связанные с тем, что постоянную частоту легко заглушить. Для решения этой проблемы военными был разработан метод скачкообразного изменения частоты сигнала [11]. Для этого выбирается  $N$  различных частот, которые чередуются с некоторым интервалом. Для приемника сигнала это означает, что он должен уметь подстраиваться под несущую частоту очень быстро, например за 100 микросекунд, т.е. возникает необходимость в фазовой синхронизации частоты трансмиттера и ресивера.

Синхронизация частот требуется, не только в телекоммуникационных системах, но и в компьютерах. С развитием микропроцессоров, когда тактовая частота достигла 50 МГц, появилась необходимость устранять расфазировку между внешними и внутренними тактами (Clock skew), вызванную задержкой драйвера встроенного тактового генератора. Поскольку размер микропроцессора увеличился до 1 миллиона транзисторов и кроме того, возросла нагрузка на генератор тактов. Все это привело к тому, что задержка тактового генератора может составлять более 2 наносекунд [2]. Эта задержка вызывает большое время удержания для входных/выходных сигналов и является ограничением на проектирование систем на высоких тактовых частотах.

## 1.2 Применение ФАПЧ

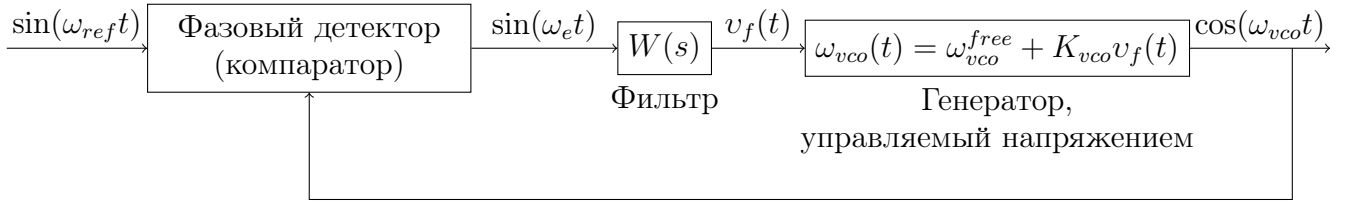
Для решения проблемы расфазировки в первой половине XX века была изобретена система фазовой автоподстройки частоты [12] (ФАПЧ) — система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генератора, в простейшем виде состоящая из фазового детектора (компаратора), фильтра нижних частот и генератора, управляемого напряжением. Сразу после появления системы ФАПЧ начали применяться в радио и телевидении [13]. Инженерная практика применения и теория систем ФАПЧ начали интенсивно развиваться во второй половине XX века [15]. Сразу после реализации систем фазовой автоподстройки частоты в виде одной микросхемы, системы ФАПЧ стали широко применяться в современных телекоммуникационных системах. В настоящее время микросхемы, использующие системы фазовой автоподстройки используются в различных электро-механических приборах, энергетических генераторах, системах передачи данных [14] и навигационных системах [9] (GPS, ГЛОНАСС и Галилео).

Особенностью функционирования систем ФАПЧ является нелинейность фазы построиваемого генератора в переходном режиме. При постоянной частоте эталонного генератора система ФАПЧ позволяет получить различные степени синхронизации. Например, система ФАПЧ второго порядка, теоретически позволяет получить полную синхронизацию сигналов, т.е. сигнал с той же частотой и постоянную разность фаз]]. Одним из недостатков систем ФАПЧ второго порядка является, недостаточное подавление высокочастотного шума, который может существенно повлиять на функционирование системы в целом. Еще одним недостатком является резкое ухудшение синхронизации частот при изменении коэффициента передачи. Именно поэтому наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка. Основными преимуществами ФАПЧ третьего порядка является хорошее подавление шума и более низкая стационарная ошибка, по сравнению с системами ФАПЧ второго порядка [7]. В различных телекоммуникационных системах точность синхронизации является одним из важнейших параметров, поскольку именно от точности подстройки зависит производительность системы [1].

Тенденция современного мира - увеличивать производительность и точность различных систем в том числе и компьютеров. Современные компьютеры имеют огромные мощности и высокую производительность, которая достигалась десятилетиями. Центральным элементом компьютера является процессор. Как было сказано ранее, системы ФАПЧ в микропроцессорах направлены на корректировку тактовых импульсов. Именно поэтому так важно увеличивать точность синхронизации. Однако с увеличением точности синхронизации возрастает и сложность реализации таких систем. Помимо сложности физической реализации, значительно увеличивается сложность анализа систем фазовой автоподстройки частоты высокого порядка.

## 2 Математическая модель ФАПЧ

Рассмотрим master-slave синхронизацию колебаний на примере классической системы фазовой автоподстройки частоты. На приведенной схеме кольца ФАПЧ изображены операции классической системы ФАПЧ.



Опорный сигнал подается на вход кольца ФАПЧ. Фазовый детектор (компаратор) принимает опорный сигнал и сигнал генератора, управляемого напряжением, в результате воздействия компаратора на выходе появляется сигнал:

$$v_e(\theta_{ref}(t) - \theta_{vco}(t)),$$

где  $\theta_{vco}(t)$  — фаза подстраиваемого генератора,  $\theta_{ref}(t)$  — фаза эталонного генератора,  $v_e(\theta_e(t))$  — характеристика фазового детектора, являющаяся  $2\pi$  периодической функцией. Функцию

$$\theta_e(t) = \theta_{ref}(t) - \theta_{vco}(t)$$

называют фазовой ошибкой. На практике часто используют следующие характеристики фазового детектора:  $\alpha \sin(\sigma)$  и

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & \sigma \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ -\sigma, & \sigma \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

В настоящее время инженерами реализованы различные фазовые детекторы в виде микросхем, которые применяются в классических системах ФАПЧ и их модификациях.

Сигнал, полученный на выходе компаратора  $v_e(\theta_e(t))$  поступает на вход фильтра нижних частот. Связь входного  $v_e(\theta_e(t))$  и выходного  $v_f(t)$  сигналов фильтра нижних частот может быть описана уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e(t)) \\ v_f(t) &= c^T x + hv_e(\theta_e(t)), \end{aligned}$$

где  $A$  — постоянная матрица  $n \times n$ ,  $b$  и  $c$  постоянные  $n$ -мерные векторы,  $h$  — константа,  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояний системы. Для практических применений инженерами были физически реализованы аналоговые(непрерывные) фильтры в виде RL-цепей, RLC-цепей и др., а цифровые(дискретные) фильтры нижних частот реализуются на цифровых элементах.

Выходной сигнал фильтра нижних частот поступает на вход генератора, управляемого напряжением. Происходит подстройка частоты ГУН:

$$\dot{\theta}_{vco}(t) = \omega_{vco}(t) = \omega_{vco}^{free} + K_{vco}v_f(t),$$

где  $\omega_{vco}^{free}$  — частота свободных колебаний ГУН,  $K_{vco}$  — коэффициент передачи. При этом полагаем, что эталонный генератор работает на постоянной частоте:

$$\dot{\theta}_{ref}(t) = \omega_{ref}(t) \equiv \omega_{ref}$$

Разность между частотой эталонного генератора и частотой свободных колебаний ГУН обозначим:

$$\omega_e^{free} \equiv \omega_{ref} - \omega_{vco}^{free}$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e))\end{aligned}\tag{1}$$

В системе (1) сделаем следующие преобразования  $-K_{vco}c- > c$ ,  $-K_{vco}h- > h$ . Тогда система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - c^T x + hv_e(\theta_e)\end{aligned}\tag{2}$$

В системе (2) сделаем замену:

$$\begin{aligned}z &= x + A^{-1}b\gamma \\ \gamma &= \frac{\omega_e^{free}}{c^*A^{-1}b - h}\end{aligned}\tag{3}$$

В результате преобразований получим систему:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b(v_e(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= c^*z + h(v_e(\theta_e) - \gamma)\end{aligned}\tag{4}$$

### 3 Постановка задачи

Системы фазовой автоподстройки частоты широко распространены в современных устройствах, таких как компьютеры, приемники и др. Для физической реализации таких систем инженерам необходимо проводить анализ их устойчивости. Исследования локальной устойчивости ФАПЧ обычно проводится с использованием хорошо известных инженерам критериев Эрмита-Михайлова, Рауса-Гурвица, Харитонова и др. Однако для инженеров также важно определять полосу захвата, которая определяется областью параметров, обеспечивающей глобальную устойчивость системы.

Введем определение полосы захвата согласно [1].

**Определение 1.** Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН  $|\omega_p|$  такая, что система (4) глобально асимптотически устойчива для всех  $\omega_e^{free} \in (0, |\omega_p|)$ .

Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) широко распространены в современных устройствах для работы которых необходима синхронизация сигналов (генераторы частот в компьютерах, GPS и др). Для физической реализации таких систем инженерам необходимо проводить анализ их устойчивости. Исследования локальной устойчивости ФАПЧ обычно проводится с использованием хорошо известных инженерам критериев Эрмита-Михайлова, Рауса-Гурвица, Харитонова и др. Однако, для инженеров также важно определять полосу захвата, которая определяется областью параметров, обеспечивающей глобальную устойчивость системы. Опираясь на частотный критерий глобальной устойчивости предложенный Г. А. Леоновым аналитически в работе получены оценки полосы захвата для некоторых систем третьего порядка. Аналитические результаты подтверждены численно. Полученный результат может быть интересен инженерам при проектировании систем синхронизации.

Рассмотрим систему (4), предполагая, что функция  $v_e(\theta_e)$  дифференцируема на  $\mathbb{R}$  и удовлетворяет условиям

$$\mu_1 \leq \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_2 \quad (5)$$

В некоторых расчетах устойчивости иногда удобно учитывать только одно из неравенств (5):  $\mu_1 \leq \varphi'(\sigma)$  или  $\mu_2 \geq \varphi'(\sigma)$  будем считать в (5)  $\mu_1$  - либо некоторое отрицательное число, либо  $-\infty$ , а  $\mu_2$  - либо некоторое положительное число, либо  $+\infty$ . В случае если  $\mu_1 = 0$ , примем обозначение  $\mu_1^{-1} = 0$ . Аналогично, если  $\mu_2 = 0$ , то  $-\mu_2^{-1} = 0$ .

Введем в рассмотрение число:

$$\nu = \int_0^{2\pi} (\varphi(\sigma) - \gamma) d\sigma \left( \int_0^{2\pi} |\varphi(\sigma) - \gamma| d\sigma \right)^{-1} \quad (6)$$

Напомним, что комплекснозначная функция

$$K(s) = -c^*(A - sI)^{-1}b + h \quad (7)$$

называется передаточной функцией системы (4).

**Теорема 1.** Пусть все нули функции  $\varphi(\sigma) - \gamma$  изолированы, пара  $(A, b)$  вполне управляема, все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части и существуют числа  $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$ , и  $\varkappa$ , такие что имеют место неравенства:

$$Re(\varkappa K(ix) - \varepsilon(K(ix))^2 - [K(ix) + \mu_1^{-1}ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1}ix]) \geq \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (8)$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \quad (9)$$

Тогда система (4) глобально асимптотически устойчива.



## 4 Оценка полосы захвата

### 4.1 Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром

$$\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$$

Оценим полосу захвата для систем ФАПЧ с фильтром, определяемым передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} = \frac{1}{1 + as + bs^2}, \quad 0 < \tau_{p1}, \tau_{p2} < 1 \quad (10)$$

Введем обозначения:  $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$ ,  $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$ . Рассмотрим первое условие теоремы 1. Подставим (10) в (8) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену переменной  $t = s^2$ . Не умаляя общности, можем положить  $\varkappa = 1$ . В результате преобразований (8) принимает вид:

$$\tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (1 - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (11)$$

#### 4.1.1 Оценка максимума $\nu$ константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (8) нужно потребовать  $1 - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$ , тогда

$$\begin{aligned} 1 &\geq \varepsilon + \tau + \delta \\ 1 &\geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ 2 - (2\varepsilon^2 + 2\delta^2 + 2\tau^2 + 4\varepsilon\tau + 4\tau\delta) &\geq 4\varepsilon\delta \\ 2 &> 4\varepsilon\delta > \nu^2 \end{aligned} \quad (12)$$

#### 4.1.2 Точная оценка максимума $\nu$

Неравенство  $1 - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$  является необходимым условием справедливости (11). Для максимизации  $\nu$  положим  $\varepsilon = 1 - \tau - \delta$ . Тогда (11) принимает вид:

$$\tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{A} = \tau b^2, \quad \tilde{B} = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2, \quad \tilde{C} = -b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \quad (14)$$

Заметим, что для того, что бы выполнялось (13) необходимо потребовать  $\tilde{A} \geq 0$  и  $\tilde{C} \geq 0$ , откуда следует  $\tilde{B} \geq 0$ . Подставим  $\varepsilon = 1 - \tau - \delta$ ,  $\varkappa = 1$  в (9) и выразим  $\nu^2$ , тогда (9) принимает вид:

$$\nu^2 < 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \quad (15)$$

Максимизируем (15), при условии  $\tilde{C} \geq 0$ . Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Вычислим градиент (15):

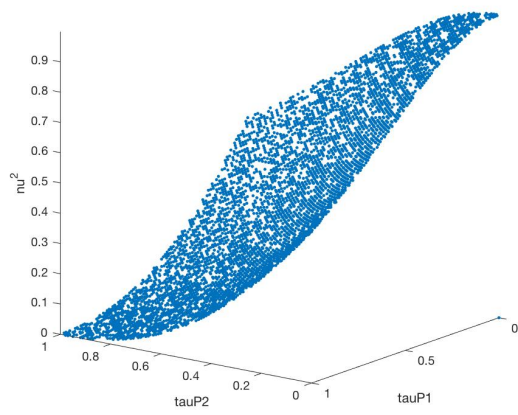
$$(4 - 4\tau - 8\delta, 4\delta) \quad (16)$$

Точка понижения ранга:  $\delta = 0, \tau = 1$ . Это противоречит условию теоремы  $\delta > 0$ . Рассмотрим границу допустимой области  $\tilde{C} = 0$ , выразим  $\tau$  и подставим в (15):

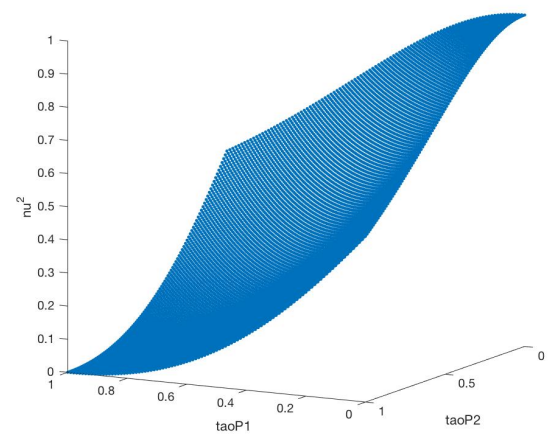
$$\nu^2 < 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \quad (17)$$

Максимум (17) достигается при  $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$  и равен:

$$\nu^2 < \frac{(b-1)^2}{a^2 - 2b + 1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \quad (18)$$



(a) Численная оценка  $\nu^2$  в MATLAB с помощью функции `fmincon`.



(b) График  $\nu^2$ , построенный по (18)

Рис. 1: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$

## 4.2 Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром

$$\frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$$

Оценим полосу захвата для систем ФАПЧ с фильтром, определяемым передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1}, \tau_{z1} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{z1} \quad (19)$$

Будем рассматривать управляемую реализацию системы (4). Заметим

$$\det(sI - A) = s^2 + 2\tau_{z1}^{-1}s + \tau_{z1}^{-2} \quad (20)$$

матрица  $A$  - устойчива. Найдем  $\varepsilon, \delta, \kappa, \tau$  так, что бы максимизировать  $\nu$ . Для этого подставим (19) в первое условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену  $t = s^2$ . В результате преобразований (8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tau_{p1}^4 \tau t^3 + (-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 \tau + 2\tau_{p1}^2 \tau - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \kappa) t^2 + (\tau - \tau_{z1}^2 \kappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \kappa - 2\tau_{z1}^2 \tau + \\ &+ 4\tau_{z1} b \kappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\kappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (21)$$

Положим в (21)  $\tau = 0$ . Не умаляя общности можем считать  $\kappa = 1$ . Тогда (21) принимает вид:

$$\begin{aligned} &(\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta) t^2 + (4\tau_{z1} \tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + \\ &+ (1 - \varepsilon - \delta) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (22)$$

Для того, что бы выполнялось (22) потребуем:

$$\begin{aligned} &\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta \geq 0 \\ &4\tau_{z1} \tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2 \delta \geq 0 \\ &1 - \varepsilon - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Оценка  $\nu$  будет наибольшей, если параметры  $\varepsilon, \delta$  лежат на границе допустимой области (23) и  $\delta > 0, \varepsilon > 0$ . Граница допустимой области является выпуклым многоугольником, ограниченным прямыми  $\delta = 0, \varepsilon = 0$  и

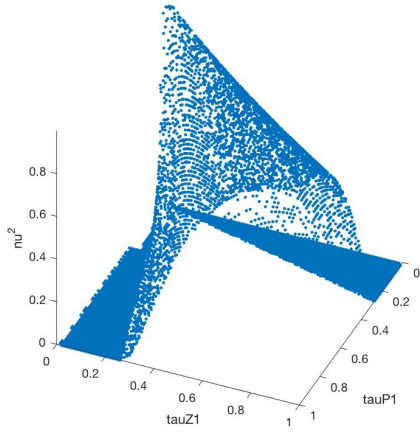
$$\varepsilon(\delta) = z^2 - z^4 \delta, \quad \varepsilon(\delta) = q - z^2 \delta, \quad \varepsilon(\delta) = 1 - \delta, \quad (24)$$

где  $z = \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}}, q = 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$ . Найдем точки пересечения прямых (24):

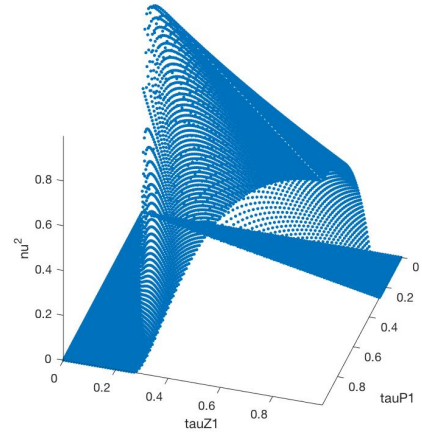
$$\begin{aligned} &\delta = \frac{1}{1 + z^2}, \quad \varepsilon = \frac{z^2}{1 + z^2} \\ &\delta = \frac{1 - q}{1 - z^2}, \quad \varepsilon = \frac{q - z^2}{1 - z^2} \\ &\delta = \frac{z^2 - q}{z^4 - z^2}, \quad \varepsilon = z^2 - \frac{z^2(z^2 - q)}{z^2 - 1} \end{aligned} \quad (25)$$

Положим  $4\varepsilon\delta$  как максимум по всем граням многоугольника. Тогда  $4\varepsilon\delta$  определяется одним из следующих соотношений, в зависимости от того, где достигается максимум: на грани или вершинах многоугольника.

$$\begin{aligned} &\delta = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad 4\varepsilon\delta = 1 \\ &\delta = \frac{1}{2z^2}, \quad \varepsilon = \frac{z^2}{2}, \quad 4\varepsilon\delta = 1 \\ &\delta = \frac{q}{2z^2}, \quad \varepsilon = \frac{q}{2}, \quad 4\varepsilon\delta = \frac{q^2}{z^2} \end{aligned} \quad (26)$$



(a) Численное приближение в MATLAB



(b) Вычисленный график

Рис. 2: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$

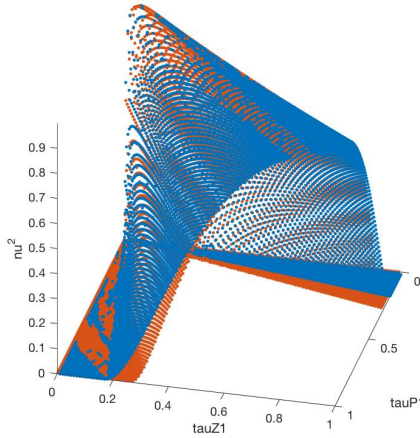


Рис. 3: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$ . Синим цветом представлена численная оценка  $\nu^2$  согласно (8), (9) в MATLAB с помощью функции `fmincon`. Красным цветом представлен график  $\nu^2$ , построенный по (?), как максимум по всем граням многоугольника

### 4.3 Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ с фильтром

$$\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$$

Оценим полосу захвата для систем ФАПЧ с фильтром, определяемым передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{pi}, \tau_{zj} < 1, \quad \tau_{pi} \neq \tau_{zj}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2 \quad (27)$$

Введем обозначения:

$$\alpha_1 = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1} + \tau_{z2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}} \quad (28)$$

Тогда (27) принимает вид:

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2} \quad (29)$$

Предположим:

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \quad (30)$$

Будем рассматривать управляемую реализацию системы (4). Заметим

$$\det(sI - A) = s^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}s + \alpha_2^{-1} \quad (31)$$

Матрица  $A$  устойчива. Найдем  $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$  так, что бы максимизировать  $\nu$ . Для этого подставим (29) в (8) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену переменной  $t = x^2$ . В результате преобразований (8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \alpha_2^2\tau t^3 + (\alpha_1^2\tau - 2\alpha_2\tau - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2\varepsilon - \alpha_2^2\beta_2^2\tau + \alpha_2^2\beta_2\varkappa)t^2 + \\ & + (\tau - \alpha_2\varkappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2\varepsilon - \alpha_1^2\beta_1^2\tau - \alpha_2\beta_2\varkappa + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon + 2\alpha_2\beta_2\tau + \alpha_1^2\beta_1\varkappa)t + \\ & + \varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (32)$$

Положим  $\tau = 0$ . Не умаляя общности можем считать  $\varkappa = 1$ . Тогда (32) принимает вид:

$$\begin{aligned} & (-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + \\ & + 1 - \varepsilon - \delta \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (33)$$

Заметим, что  $\varepsilon \leq 1 - \delta$  является необходимым условием справедливости (33). Для максимизации  $4\varepsilon\delta$  положим  $\varepsilon = 1 - \delta$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} & (\alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta)t + \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \\ & \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что условия (30) и  $1 - \delta > 0$  гарантируют положительность старшего коэффициента (34):

$$\begin{aligned} & \alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta = \alpha_2^2(1 - \beta_2)(-\delta(1 + \beta_2) + \beta_2) > 0 \\ & 1 > \frac{\beta_2}{1 + \beta_2} > \delta \end{aligned} \quad (35)$$

Неотрицательность свободного коэффициента (34) является необходимым условием положительности (34). Так как максимальное значение достигается на границе допустимой области положим:

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta = 0 \quad (36)$$

Тогда из (36) выразим  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \quad (37)$$

Для того что бы  $\delta > 0$  потребуем положительность числителя (37), что равносильно следующему условию:

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (38)$$

Покажем, что это условие гарантирует положительность знаменателя  $\delta$ :

$$\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2) > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1}(1 + \beta_1) - 2\alpha_2(1 - \beta_2) = \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)(1 - \beta_1)}{\beta_1} > 0 \quad (39)$$

Получили, что

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2} \quad (40)$$

## 5 Заключение

В рамках данной работы были рассмотрены три передаточные функции фильтра:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} \quad (41)$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2} \quad (42)$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} \quad (43)$$

Для (41), (42) были получены аналитические оценки полосы захвата, которые были подтверждены численно. Полоса захвата систем ФАПЧ с фильтром, определяемым передаточной функцией (43) исследовалась ранее Леоновым Г. А. Для нее был восстановлен вывод.

В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты используются в различных устройствах. Аналитические оценки, полученные в данной работе, могут быть интересны инженерам и могут использоваться при проектировании и реализации систем ФАПЧ 3 порядка.

## Список литературы

- [1] Ujwala A. Belorkar, Ladhake S. A. Design of Low Power Phase Locked Loop (PLL) Using 45NM VLSI Technology // International journal of VLSI design & Communication Systems (LSICS). 2010. Vol. 1, No. 2. P. 1-3.
- [2] Young I. A., Greason J. K., Wong K. L. A PLL clock generator with 5 to 110 MHz of lock range for microprocessors // IEEE Journal of Solid-State Circuits. 1992. Vol. 27, No. 11. P. 1599-1607
- [3] Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications / New York: McGraw-Hill Education, 2007. P. 115–116.
- [4] Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops : stability and oscillations / Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2014. P. 112–113.
- [5] Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B. Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems / ed. by H. Kurke. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1992. P. 72–75.
- [6] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2455.
- [7] Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vol. 255-260. P. 2262.
- [8] Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты / М.: Изд-во Связь, 1972. P. 15–19.
- [9] Rao R. B., Kunysz W., Fante R., McDonald K., GPS/GNSS Antennas / Boston: Artech House, 2013. P. 50–51.
- [10] Ilie C., Mihaiescu M., Chirita I., Gutu M., Popa M., Tanase N. Synchronous Electric Generator With Double Excitation // 11th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE). 2019. P. 1–4.
- [11] Ghulam H. R. A mathematical model and simulation of frequency hopping interferences to FM systems // Mathematical and Computer Modelling. 1988. Vol. 11, No 10. P. 988.
- [12] Appleton E. V. The Automatic Synchronization of Triode Oscillators // Proc. Camb. Phil. Soc. 1923. Vol. 21, P. 231.
- [13] Blagov M. V., Kuznetsova O. A., Kudryashova E. V., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N., Mokaev R. N., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-in, Pull-in and Lock-in Ranges for Phase-locked Loop with Tangential Characteristic of the Phase Detector // Procedia Computer Science. 2019. Vol. 150, P. 558.
- [14] Ashari Z., Nordin A. N Theoretical Modeling and Simulation of Phase-Locked Loop (PLL) for Clock Data Recovery (CDR) // IIUM Engineering Journal. 2011. Vol. 12, No. 5. P. 105.
- [15] Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / СПб.: Невский Диалект, 2002. С. 7-20.