УДК 510

Миронов А. В., Юлдашев Р. В.

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. В повседневной жизни мы пользумся компьютерами, телевизорами, GPS и другими устройствами, для эффективной работы которых необходима синхронизация частот сигналов. Для решения это задачи в первой половине XX века была изобретена система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) – система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генераторов. В настоящее время системы ФАПЧ и их модификации применяются в различных телекоммуникационном оборудовании, системах передачи данных и навигационных системах (GPS, ГЛОНАСС и Галилео).

На практике часто рассматривают системы ФАПЧ второго порядка. Однако одним из недостатков таких систем является, недостаточное подавление высокочастотного шума, который может существенно повлиять на функционирование системы в целом. Именно поэтому наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка. Основными преимуществами ФАПЧ третьего порядка является хорошее подавление шума и более низкая стационарная ошибка [**?**].

Хорошо изветна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ []

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e)) \end{aligned} \tag{1}$$

Где A - постоянная матрица $n \times n$, b и c постоянные n-мерные векторы, h - константа, $x(t)$ - n-мерный вектор состояний системы, ω_{vco}^{free} - частота свободных колебаний ГУН, K_{vco} - коэфициент передачи. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

Миронов Алексей Владиславович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru, тел.: +7(911)146-14-40

Юлдашев Ренат Владимирович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: email@email.ru, тел.: +7(000)000-00-00

В системе (1) сделаем следующие преобразования $-K_{vco}c \to c$, $-K_{vco}h \to h$ и замену

$$\begin{aligned} z &= x + A^{-1}b\gamma \\ \gamma &= \frac{\omega_e^{free}}{c^*A^{-1}b - h} \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma) \\ \dot{\theta}_e &= c^*z + h(\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)) \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим систему(3), предполагая, что функция $\upsilon_e(\theta_e)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям

$$\mu_1 \le \frac{d\upsilon_e(\theta_e)}{d\theta_e} \le \mu_2 \tag{4}$$

Будем считать в (4) μ_1 - либо некоторое отрицательное число, либо $-\infty$, а μ_2 - либо некоторое положительное число, либо $+\infty$. В случае если $\mu_1 = -\infty$, примем обозначение $\mu_1^{-1} = 0$. Аналогично, если $\mu_2 = +\infty$, то - $\mu_2^{-1} = 0$.

Введем в рассмотрение число:

$$\nu = \int_0^{2\pi} (\upsilon_e(\theta_e) - \gamma)\, d\theta_e \left(\int_0^{2\pi} \mid \upsilon_e(\theta_e) - \gamma \mid d\theta_e \right)^{-1} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть все нули функции $\upsilon_e(\theta_e) - \gamma$ изолированы, пара (A, b) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные частии существуют числа $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \ge 0$, и $\varkappa$, такие что имеют место неравенства:*

$$\mathrm{Re}\left(\varkappa K(ix) - \varepsilon\left[K(ix)\right]^2 - \left[K(ix) + \mu_1^{-1}ix\right]^* \tau \left[K(ix) + \mu_2^{-1}ix\right] \right) \ge \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2 \tag{7}$$

Тогда система (3) глобально ассимптотически устойчива.

2. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} = \frac{1}{1 + as + bs^2} \tag{8}$$

Введем обозначения: $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$, $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$
Рассмотрим первое условие теоремы . Подставим (8) в (6) и перенесем все в левую часть неравенства. Сделаем замену переменной $t = s^2$. В результате преобразований получим

$$\tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\varkappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{9}$$

Для оценки полосы захвата системы (1) будем искать максимум ν. Так как $\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$, то $\varepsilon \leq \varkappa - \tau - \delta$. Возьмем $\varepsilon = \varkappa - \tau - \delta$. Не умаляя общности, можем положить $\varkappa = 1$, тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} &At^2 + Bt + C \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ &A = \tau b^2, \quad B = \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2, \quad C = -b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что для того, что бы выполнялось (10) необходимо потребовать $A \geq 0$ и $C \geq 0$, тогда $B \geq 0$. В этом случае уравнение $At^2 + Bt + C = 0$ не имеет положительных корней, т.е. выполняется (10). Будем искать максимум следующей функции:

$$\nu^2 < 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \tag{11}$$

Получили задачу на условный экстремум, т.е найти максимум (11), при условии $C \geq 0$. Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Однако точки падения ранга противоречат условию теоремы. Рассмотри границу допустимой области, т.е. $C = 0$, выразим τ через δ и подставим в (11):

$$\nu^2 < 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \tag{12}$$

Максимум (12) достигается при $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$ и равен

$$\nu^2 < \frac{(b-1)^2}{a^2 - 2b + 1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} \tag{13}$$

3. Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}s)(1+\tau_{z2}s)}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$. Рассмотрим передаточную функцию:

$$\begin{aligned} &W(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)(1 + \tau_{z2}s)}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)} = \frac{1 + \alpha_1\beta_1 s + \alpha_2\beta_2 s^2}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2} \\ &\alpha_1 = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1} + \tau_{z2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}} \end{aligned} \tag{14}$$

Предположим:

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \tag{15}$$

Пусть нелинейность $f(\theta_e) = \upsilon_e(\theta_e) - \gamma$ имеет изолированные нули и удовлетворяет ???????. Неравенство (15) гарантирует, что функция $\chi(p) = x^{-1}W(x)$ не приводима. Тогда по теореме ???? пара (A, b) управляема. Заметим

$$\det(xI - A) = x^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}x + \alpha_2^{-1} \tag{16}$$

матрица A - устойчива. Найдем $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$ так, что бы максимизировать ν. Для этого подставим (14) в (6) и перенесем все в левую часть неравенства. Положим $\tau = 0$, и не умаляя общности можем считать $\varkappa = 1$. В результате преобразований первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$(-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + \\ + 1 - \varepsilon - \delta \geq 0 \tag{17}$$

Заметим, что $\varepsilon \leq 1 - \delta$. Для максимизации $4\varepsilon\delta$ положим $\varepsilon = 1 - \delta$. Тогда (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &At + B \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ &A = \alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta \\ &B = \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \end{aligned} \tag{18}$$

Выполнение (15) влечет $A > 0$. Так как максимальное значение достигается в точках падения ранга или на границе положим $B = 0$. Тогда из $B = 0$ получаем

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)}{\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)} \tag{19}$$

Для того что бы $\delta > 0$ потребуем

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1-\beta_2)}{\beta_1(1-\beta_1)} \tag{20}$$

Это условие гарантирует положительность числителя и знаменателя (19). В результате преобразований получили оценку для ν^2

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1) - \alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2) - 2\alpha_2(1-\beta_2)]^2} \tag{21}$$

4. Заключение.