Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

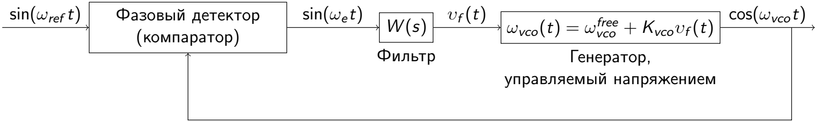
Миронов Алексей Владиславович

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

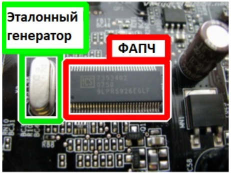
Научный руководитель: д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.
Рецензент: Благов М. В.

05 июня 2020 г.

Принцип работы ФАПЧ



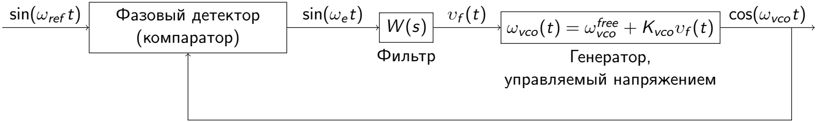
Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, подстраивающая частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала.



Применение системы ФАПЧ:

1. Телекоммуникационное обородование
2. Навигационное оборудование (GPS, Глонасс, Галилео)
3. Компьютеры (микропроцессоры)

Математическая модель ФАПЧ



Дифференциальные уравнения ФАПЧ

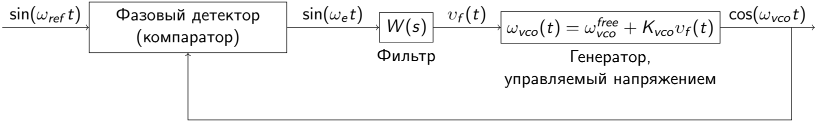
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma), \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma)), \end{aligned} \tag{1}$$

A — постоянная матрица $n \times n$, B и C постоянные n — мерные векторы, D — константа, $x(t)$ — n-мерный вектор состояний системы, K_{vco} — коэффициент передачи.

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}\left(D - C^T A^{-1} B\right)}, \tag{2}$$

где $\omega_e^{free} = \omega_{ref} - \omega_{vco}^{free}$ — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН.

Постановка задачи



Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН $|\omega_p|$ такая, что система (1) глобально асимптотически устойчива для всех $0 \leqslant |\omega_e^{free}| < |\omega_p|$.
Задача: оценить полосы захвата для передаточных функций фильтров:

$$W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}, \quad W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$$

$$0 < \tau_{pi} < 1, \quad 0 < \tau_{zi} < 1, \quad i = 1, 2, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{z1}$$

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1 s + \alpha_2\beta_2 s^2}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2$$

Теорема

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma),\\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma))\end{aligned} \tag{3}$$

Введем обозначение

$$\mid \nu \mid = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}} \tag{4}$$

Теорема (Леонов Г. А., Райтман Ф., Смирнова В. Б., 1992 г., Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems)

Пара (A, B) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geqslant 0$, и $\varkappa$, такие что имеют место неравенства:

$$\operatorname{Re}\left(\varkappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - \tau \left[\overline{W(ix)} + ix\right] [W(ix) + ix]\right) \geqslant \delta, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2$$

Тогда система (3) глобально асимптотически устойчива.

Метод решения

Условия теоремы:

$$\mathrm{Re}\left(\varkappa W(ix) - \varepsilon\,[W(ix)]^2 - \tau\left[\overline{W(ix)} + ix\right][W(ix) + ix]\right) \geqslant \delta,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

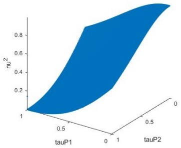
$$4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2$$

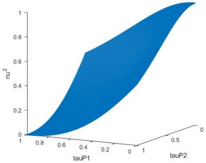
Для получения оценок полосы захвата необходимо выбрать $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие первому условию теоремы так, чтобы максимизировать ν. Из следующих соотношений получим максимальный ω_e^{free}, при котором система глобально асимптотически устойчива:

$$|\,\nu\,| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma\arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \gamma K_{vco}\left(D - C^T A^{-1} B\right) = \omega_e^{free} \qquad (5)$$

Полученные результаты

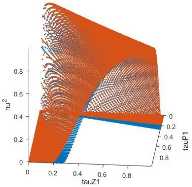
1. Для передаточной функции $W(s) = \frac{1}{(1+\tau_{p1}s)(1+\tau_{p2}s)}$ была найдена оценка полосы захвата





$$\nu^2 < \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1}$$

2. Для передаточной функции $W(s) = \frac{(1+\tau_{z1}s)^2}{(1+\tau_{p1}s)^2}$ была найдена оценка полосы захвата



$$\nu^2 < \frac{q^2}{z^2}, \quad 1, \quad \frac{4z^2}{1+z^2}, \quad \frac{4(1-q)(q-z^2)}{1-z^2}, \quad \frac{z^2-q}{z^2-1} - \left(\frac{z^2-q}{z^2-1}\right)^2$$

Полученные результаты

3. Для передаточной функции $W(s) = \frac{1+\alpha_1\beta_1 s+\alpha_2\beta_2 s^2}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2}$ был восстановлен вывод оценки полосы захвата

$$\nu^2 < 4\frac{[\alpha_1^2(1-\beta_1)-\alpha_2(1-\beta_2)][\alpha_1^2(1-\beta_1)\beta_1-\alpha_2(1-\beta_2)]}{[\alpha_1^2(1-\beta_1^2)-2\alpha_2(1-\beta_2)]^2}$$

Спасибо за внимание