

УДК 517.977.5

Миронов А. В., Юлдашев Р. В., Юлдашев М. В.,
Кузнецов Н. В.

Оценка полосы захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

1. Введение. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) — система с обратной связью, подстраивающая частоту сигнала генератора, управляемого напряжением (ГУН) под частоту опорного сигнала. В настоящее время системы ФАПЧ применяются в телекоммуникационном оборудовании [1], навигационных системах [2] и др. Основными параметрами ФАПЧ являются полосы удержания, захвата и захвата без проскальзывания [3]. В данной работе исследуются оценки полосы захвата для некоторых систем ФАПЧ третьего порядка, которые отличаются хорошим подавлением шума и низкой стационарной ошибкой, по сравнению с системами ФАПЧ второго порядка [4].

2. Математическая модель ФАПЧ. Хорошо известна система дифференциальных уравнений, описывающих ФАПЧ [5], рис. 1,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(\sin(\theta_e) - \gamma), \\ \dot{\theta}_e &= -K_{vco}C^T x - K_{vco}D(\sin(\theta_e) - \gamma),\end{aligned}\tag{1}$$

где A — постоянная $(n \times n)$ -матрица, B и C — постоянные n -мерные векторы, D — константа, $x(t)$ — n -мерный вектор состояний системы, $W(s) = C^T(A - sI)^{-1}B - D$ — передаточная функция фильтра.

Миронов Алексей Владиславович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexmir2015@yandex.ru, тел.: +7(812)321-31-33

Юлдашев Ренат Владимирович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: renatvv@pm.me, тел.: +7(812)321-31-33

Юлдашев Марат Владимирович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: maratvv@gmail.com, тел.: +7(812)321-31-33

Кузнецов Николай Владимирович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nkuznetsov239@gmail.com, тел.: +7(812)321-31-33

Работа выполнена в рамках проекта Ведущих научных школ НШ-2624.2020.1

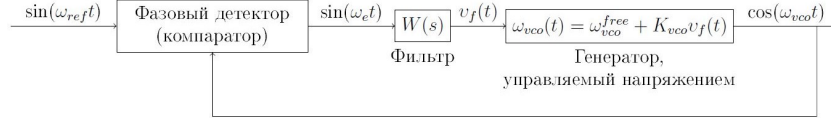


Рис. 1. Схема классической системы ФАПЧ, где ω_{ref} — частота опорного сигнала, ω_{vco} — частота сигнала ГУН, $v_f(t)$ — выходной сигнал фильтра, ω_{vco}^{free} — частота свободных колебаний ГУН, $\omega_e = \omega_{ref} - \omega_{vco}$

Здесь будем рассматривать фильтры третьего порядка со следующими передаточными функциями

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1,$$

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2},$$

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \quad 0 < \alpha_2.$$

Коэффициент передачи ГУН равен K_{vco} , величина γ определяется следующим образом

$$\gamma = \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}(D - C^T A^{-1} B)},$$

где $\omega_e^{free} = \omega_{ref} - \omega_{free}$ — разность частоты опорного сигнала и частоты свободных колебаний ГУН. При этом предполагается, что эталонный генератор работает на постоянной частоте.

3. Оценка области захвата. Введем определение полосы захвата согласно [5].

Определение 1. Полоса захвата — максимальная разность по модулю частот опорного сигнала и ГУН $|\omega_p|$ такая, что система (1) глобально асимптотически устойчива для всех $0 < |\omega_e^{free}| < |\omega_p|$.

Определение 2. Система (1) называется глобально асимптотически устойчивой, если любое решение $x(t, x_0)$ стремится к некоторому состоянию равновесия при $t \rightarrow +\infty$.

Введем в рассмотрение число

$$|\nu| = \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin(\gamma) + \sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Следующая теорема дает условие глобальной асимптотической устойчивости (1).

Теорема 1 [6]. Пусть все нули функции $\sin(\theta_e) - \gamma$ изолированы, пара (A, B) вполне управляема, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существуют числа $\varepsilon > 0, \delta > 0, \tau \geq 0$, и \varkappa , такие что имеют место неравенства:

$$\operatorname{Re} \left(\varkappa W(ix) - \varepsilon [W(ix)]^2 - \tau [\overline{W(ix)} + ix] [W(ix) + ix] \right) \geq \delta, \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2. \quad (3)$$

Тогда система (1) глобально асимптотически устойчива.

Теорема 1 может быть использована для получения аналитических оценок полосы захвата. Для этого необходимо выбрать $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$, удовлетворяющие (2) так, чтобы максимизировать ν . Из максимальной ν получим максимальный ω_e^{free} , при котором система (1) глобально асимптотически устойчива.

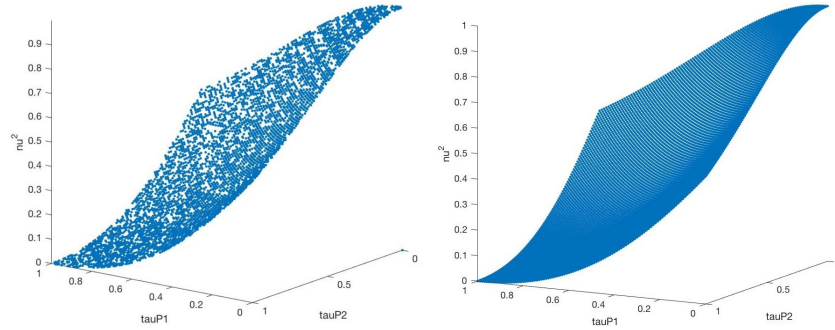


Рис. 2. Слева — численная оценка ν^2 в MATLAB с помощью функции `fmincon`; справа — график ν^2 , полученный из (3) при выполнении (2).

Применение теоремы 1 к фильтру с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}s)(1 + \tau_{p2}s)}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1,$$

приводит к оценке, изображенной на рис. 2

Применение теоремы 1 к фильтру с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{(1 + \tau_{z1}s)^2}{(1 + \tau_{p1}s)^2}, \quad 0 < \tau_{p1} < 1, \quad 0 < \tau_{p2} < 1, \quad \tau_{p1} \neq \tau_{p2},$$

приводит к оценке, изображенной на рис. 3

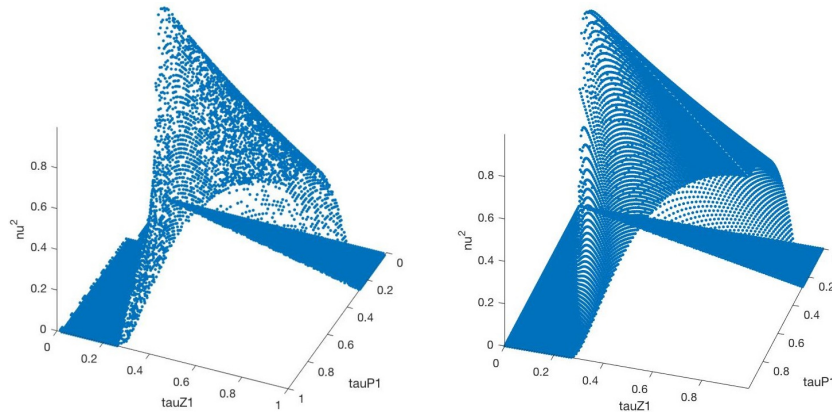


Рис. 3. Слева — численная оценка ν^2 в MATLAB с помощью функции fmincon; справа — график ν^2 , полученный из (3) при выполнении (2).

Применение теоремы 1 к фильтру с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1s + \alpha_2\beta_2s^2}{1 + \alpha_1s + \alpha_2s^2}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1, \quad 0 < \alpha_1, \quad 0 < \alpha_2,$$

приводит к оценке, изображенной на рис. 4

4. Заключение. В настоящее время системы фазовой автоподстройки частоты и их модификации применяются в различных устройствах, где требуется синхронизация частот. Полученный результат может быть интересен инженерам при проектировании и реализации систем ФАПЧ третьего порядка.

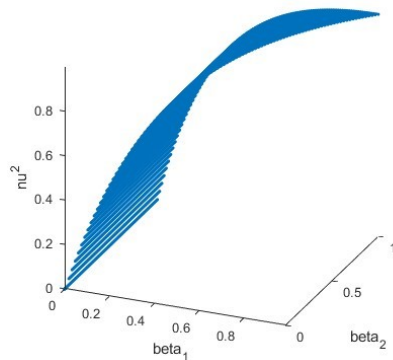


Рис. 4. График ν^2 , полученный из (3) при выполнении (2), при $\alpha_1 = 300$, $\alpha_2 = 30$.

Литература

1. Best R. E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications. New York: McGraw-Hill Education, 2007. 421 p.
2. Rao R. B., Kunysz W., Fante R., McDonald K. GPS/GNSS Antennas. Boston: Artech House, 2013. 420 p.
3. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Изд-во «Связь», 1972. 447 с.
4. Feng L., Wu C., Jin B., Wu Z. A Passive Third-order Cascade PLL Filter // Trans Tech Publications. 2011. Vol. 255–260. P. 2262–2266.
5. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, No 10. P. 2454–2464.
6. Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B. Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1992. 242 p.