

Санкт-Петербургский государственный университет

Отделение прикладной математики и информатики  
Кафедра прикладной кибернетики

Миронов Алексей Владиславович

Оценка области захвата для систем ФАПЧ 3 порядка

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
д.ф.-м. н., профессор Юлдашев Р. В.

Рецензент:  
Благов М. В.

Санкт-Петербург  
2019

# Содержание

1	Введение	3
2	Теоретический аспект	5
3	Постановка задачи	6
4	Теорема	7
5	Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$	9
5.1	Оценка максимума $\nu$ константой . . . . .	9
5.2	Точная оценка максимума $\nu$ . . . . .	9
6	Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$	11
6.1	$\tau = 0$ . . . . .	11
6.2	$\tau > 0$ . . . . .	13
7	Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$	14

# 1 Введение

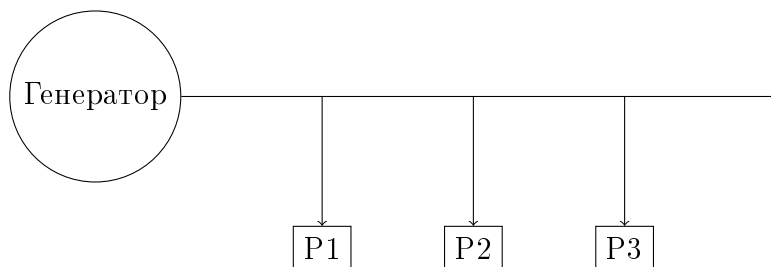
Современный мир невозможно представить без огромного количества сигналов, передающихся беспроводным способом или по электрическим схемам. При этом часто возникает необходимость синхронной передачи сигналов, т.е. фазовой синхронизации сигналов. Фазовая синхронизация играет важную роль в различных системах. Электрический ток в энергосетях вырабатывается синхронными генераторами, действие которых так же основано на принципе фазовой синхронизации. В США и России GSM связь работает на разных частотах, поэтому мобильным телефонам, требуется синхронизация частот приемника и передатчика, это позволит пользоваться одним телефоном и в России, и в США.

Фазовая синхронизация часто требуется в телекоммуникационных системах. Например в обычных телекоммуникационных системах используется одна несущая частота, которая является постоянной. Например радио или TV передатчики. Многие люди даже знают частоту своей любимой радиостанции. Однако для военных нужд использование одной несущей частоты несет определенные риски, связанные с тем, что постоянную частоту легко заглушить. Для решения этой проблемы военными был разработан метод скачкообразного изменения частоты сигнала. Для этого выбирается  $N$  различных частот, которые чередуются с некоторым интервалом. Для приемника сигнала это означает, что он должен уметь подстраиваться под несущую частоту очень быстро, например за 100 микросекунд, т.е. возникает необходимость в фазовой синхронизации частоты трансмиттера и ресивера.

Синхронизация частот требуется, не только в телекоммуникационных системах, но и в компьютерах. С развитием микропроцессоров, когда тактовая частота достигла 50 МГц, появилась необходимость устранять расфазировку между внешними и внутренними тактами (Clock skew), вызванную задержкой драйвера встроенного тактового генератора. Поскольку размер микропроцессора увеличился до 1 миллиона транзисторов и кроме того, возросла нагрузка на генератор тактов. Все это привело к тому, что задержка тактового генератора может составлять более 2 наносекунд [3]. Эта задержка вызывает большое время удержания для входных/выходных сигналов и является ограничением на проектирование систем на высоких тактовых частотах.

Для решения проблемы расфазировки в первой половине XX века была изобретена система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) – система с обратной связью, используемая для синхронизации сигналов эталонного и подстраиваемого генератора, простейшем виде состоящая из фазового детектора (компаратора), фильтра нижних частот и генератора, управляемого напряжением. Сразу после появления системы ФАПЧ начали применяться в радио и телевидении [1]. Инженерная практика применения и теория систем ФАПЧ начали интенсивно развиваться во второй половине XX века [2]. Сразу после реализации систем фазовой автоподстройки частоты в виде одной микросхемы, системы ФАПЧ стали широко применяться в современных телекоммуникационных системах и компьютерах. В настоящее время микросхемы, использующие системы фазовой автоподстройки используются в различных электро-механических приборах, энергетических генераторах, системах передачи данных и навигационных системах (GPS, ГЛОНАСС и Галилео).

Рассмотрим несколько параллельно работающих процессоров, имеющих общую шину и генератор передающий тактовые импульсы. При реализации алгоритмов, выполняющих одновременно некоторую последовательность операций. Эти операции должны начинаться сразу после прихода тактового импульса. Однако из-за разной длины пути от генератора до процессоров возникает рассогласованность работы процессоров. Для устранения расфазировки в работе процессоров существует несколько подходов. Первый подход реализуется при помощи программного обеспечения и еще один подход устранения расфазировки является введение специальной системы тактовых генераторов, управляемых устройствами фазовой синхронизации.

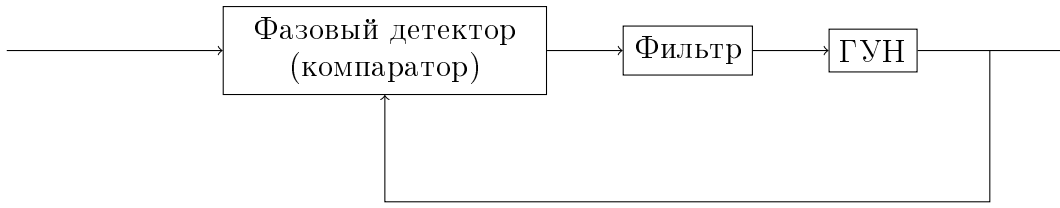


Одной из особенностей функционирования систем ФАПЧ является нелинейность фазы построиваемого генератора в переходном режиме. При постоянной частоте эталонного генератора система ФАПЧ позволяет получить различные степени синхронизации. Например, система ФАПЧ второго порядка, теоретически позволяет получить полную синхронизацию сигналов, т.е. сигнал с той же частотой и постоянную разность фаз[1].

Один из недостатков систем фазовой автоподстройки частоты второго порядка является, недостаточное подавление высокочастотного шума. Еще одним недостатком является резкое ухудшение синхронизации частот при изменении коэффициента передачи. Именно поэтому наряду с системами ФАПЧ второго порядка исследуются системы третьего порядка. Одним из основных преимуществ ФАПЧ третьего порядка является хорошее подавление шума и более низкая стационарная ошибка, по сравнению с системами ФАПЧ второго порядка[4]. В различных телекоммуникационных системах точность синхронизации является одним из важнейших параметров, поскольку именно от точности подстройки зависит производительность системы [1], [2].

Тенденция современного мира - увеличивать производительность и точность различных систем в том числе и компьютеров. Современные компьютеры имеют огромные мощности и высокую производительность, которая достигалась десятилетиями. Центральным элементом компьютера является процессор. Как было сказано ранее, системы ФАПЧ в микропроцессорах направлены на корректировку тактовых импульсов. Именно поэтому так важно увеличивать точность синхронизации. Однако с увеличением точности синхронизации возрастает и сложность реализации таких систем. Помимо сложности физической реализации, значительно увеличивается сложность анализа систем фазовой автоподстройки частоты высокого порядка.

## 2 Теоретический аспект



Рассмотрим master-slave синхронизацию колебаний на примере классической системы фазовой автоподстройки частоты. На приведенной схеме кольца ФАПЧ изображены операции классической системы ФАПЧ.

Сигнал эталонного генератора подается на вход кольца ФАПЧ. Фазовый детектор (компаратор) принимает сигнал от эталонного и подстраиваемого генераторов, в результате воздействия компаратора на выходе появляется сигнал

$$\phi(\theta(t) - \eta(t))$$

Где  $\eta(t)$  - фаза подстраиваемого генератора,  $\theta(t)$  - фаза эталонного генератора,  $\phi(\sigma)$  - характеристика фазового детектора, являющаяся  $2\pi$  периодической функцией. Часто используют следующие характеристики фазового детектора:  $\alpha \sin(\sigma)$  и

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \sigma \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ -\sigma & \sigma \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

В настоящее время инженерами реализованы различные фазовые детекторы в виде микросхем, которые применяются в классических системах ФАПЧ и их модификациях.

Сигнал компаратора  $\xi = \phi(\theta(t) - \eta(t))$  поступает на вход фильтра нижних частот. Фильтр нижних частот является линейным оператором, входной  $\xi(t)$  и выходной  $\psi(t)$  сигналы которого могут быть связаны уравнениями. Например, для систем с непрерывным временем, вход и выход фильтра связаны соотношением

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + b\xi(t) \\ \psi &= c^*x + \rho\xi(t) \end{aligned}$$

Где  $A$  - постоянная матрица  $n \times n$ ,  $b$  и  $c$  постоянные  $n$ -мерные векторы,  $\rho$  - константа,  $x(t)$  -  $n$ -мерный вектор состояний системы. Так же можно рассматривать уравнения фильтров для систем с дискретным временем. Существуют различные реализации аналоговых (непрерывных) фильтров в виде RL-цепей, RLC-цепей и др., а для цифровых (дискретных) - на цифровых элементах.

### 3 Постановка задачи

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv_e(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{free} - K_{vco}(c^*x + hv_e(\theta_e))\end{aligned}\tag{1}$$

Найдем стационарные точки системы (1)

$$\begin{aligned}x &= -A^{-1}bv_e(\theta_e) \\ v_e(\theta_e) &= \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}\end{aligned}\tag{2}$$

Возьмем  $\theta_e = \theta_s$ , для которых выполняется (2). Сделаем замену:

$$\begin{aligned}z &= x + A^{-1}bv_e(\theta_s) \\ \sigma &= \theta_e\end{aligned}\tag{3}$$

После замены система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}) \\ \dot{\sigma} &= -K_{vco}(c^*z + h(v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)}))\end{aligned}\tag{4}$$

## 4 Теорема

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= C^*z + Rf(\sigma)\end{aligned}\quad (5)$$

Here  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , and  $R$  are constant matrices of dimensions  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $n \times m$ , and  $n \times n$ , respectively, whereas the components  $\phi_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , of the vector-valued function  $f(\sigma)$  are scalar differentiable functions  $\phi_k = \phi_k(\sigma_k)$ , where  $\psi_k$  is the  $k$ -th component of the vector  $\psi$ .

Recall that any pendulum-like system with a single scalar non-linearity and an irreducible transfer function  $\chi(p)$  can be written in the form (5) with  $m = 1$  by a nonsingular linear transformation of phase coordinates. Further we assume that the functions  $\phi_k(\sigma_k)$  satisfy the following conditions:  $\phi_k(\sigma_k) \equiv 0$

$$\begin{aligned}\mu_{1k} &\leq \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k}, \forall \sigma_k \in \mathbb{R} \\ \phi_k(\sigma_k + \Delta_k) &= \phi_k(\sigma_k), \forall \sigma_k \in \mathbb{R}\end{aligned}\quad (6)$$

Here the  $\Delta_k$  are positive numbers. Sometimes, in the study of the specific pendulum-like systems, only one of the inequalities

$$\mu_{1k} \leq \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \text{ or } \frac{d\phi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \leq \mu_{2k} \quad (7)$$

is known, so we will assume the number  $\mu_{1k}$  to be either finite negative or  $-\inf$ , and the number  $\mu_{2k}$  to be either finite positive or  $\inf$ . When  $\mu_{1k} = -\inf$  or  $\mu_{2k} = \inf$ , we will use the notation  $\mu_{1k}^{-1} = 0$  or  $\mu_{2k}^{-1} = 0$ , respectively.

Let us introduce the numbers:

$$\nu_k = \int_0^{\Delta_k} \phi_k(\sigma) d\sigma \left( \int_0^{\Delta_k} |\phi_k(\sigma)| d\sigma \right)^{-1} \quad (8)$$

the transfer matrix of system (5) from its “input”  $f$  to its “output”  $(-d\sigma/dt)$

$$K(p) = C * (A - pI)^{-1} B - R \quad (9)$$

and the diagonal  $m \times m$  matrices:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \text{diag}[\mu_{11}, \dots, \mu_{1m}], \mu_2 = \text{diag}[\mu_{21}, \dots, \mu_{2m}], \\ \nu &= \text{diag}[\nu_1, \dots, \nu_m]\end{aligned}\quad (10)$$

Теорема 1. Suppose that the stationary set  $\Lambda$  of system (5) consists of isolated points, the pair  $(A, B)$  is controllable, the matrix  $A$  is Hurwitz, and there exist diagonal  $m \times m$  matrices  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\tau \geq 0$ , and  $\varkappa$  such that the following inequalities are valid:

$$\begin{aligned}Re(\varkappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) + \mu_1^{-1} ix]^* \tau [K(ix) + \mu_2^{-1} ix]) &\geq \delta, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4\varepsilon\delta &> (\varkappa\nu)^2\end{aligned}\quad (11)$$

Then system (5) is gradient-like.

Очевидно, что систему (1) можно привести к системе (5) положив:

$$\begin{aligned}A &= A \\ B &= b \\ C &= -K_{vco} C^* \\ R &= -K_{vco} h \\ f(\sigma) &= v_e(\sigma) - \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco} H(0)}\end{aligned}\quad (12)$$

Положим далее:

$$\begin{aligned} v_e(\sigma) &= \sin(\sigma) \\ \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}H(0)} &= \gamma \end{aligned} \tag{13}$$



## 5 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{1}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{1}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} = \frac{1}{1 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})x + \tau_{p1}\tau_{p2}x^2} \quad (14)$$

Введем обозначения:  $a = \tau_{p1} + \tau_{p2}$ ,  $b = \tau_{p1}\tau_{p2}$

Рассмотрим первое условие теоремы 1

$$Re(\kappa K(ix) - K(ix)^* \varepsilon K(ix) - [K(ix) - ix]^* \tau [K(ix) + ix]) \geq \delta \quad (15)$$

Подставим (14) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau b^2 t^3 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t^2 + (-\kappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b)t + (\kappa - \varepsilon - \tau - \delta) &\geq 0 \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Из второго условия теоремы 1 получаем:

$$\frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2} > \nu^2 \quad (17)$$

Для оценки полосы захвата системы (1) будем искать максимум  $\nu$ .

### 5.1 Оценка максимума $\nu$ константой

Очевидно, что для того чтобы выполнялось (16) нужно потребовать  $\kappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \kappa &\geq \varepsilon + \tau + \delta \\ \kappa^2 &\geq \varepsilon^2 + \tau^2 + \delta^2 + 2\varepsilon\tau + 2\varepsilon\delta + 2\tau\delta \\ 2 - \left(\frac{2\varepsilon^2}{\kappa^2} + \frac{2\delta^2}{\kappa^2} + \frac{2\tau^2}{\kappa^2} + \frac{4\varepsilon\tau}{\kappa^2} + \frac{4\tau\delta}{\kappa^2}\right) &\geq \frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2} \\ 2 &> \frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2} > \nu^2 \end{aligned} \quad (18)$$

### 5.2 Точная оценка максимума $\nu$

2. Так как  $\kappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0$ , то  $\varepsilon \leq \kappa - \tau - \delta$ . Для максимизации функции  $\frac{4\varepsilon\delta}{\kappa^2}$  возьмем  $\varepsilon = \kappa - \tau - \delta$

Тогда первое условие теоремы принимает вид:

$$\begin{aligned} \tau b^2 t^2 + (\tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2)t + (-\kappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b) &\geq 0 \\ t &> 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \tau b^2 \\ B &= \tau a^2 - 2\tau b - \delta b^2 \\ C &= -\kappa b + \tau - \delta a^2 + 2\delta b \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что для того, что бы выполнялось (19) необходимо потребовать  $A \geq 0$  и  $C \geq 0$ , тогда  $B \geq 0$ . Тогда по теореме Декарта уравнение  $At^2 + Bt + C = 0$  не имеет положительных

корней, т.е. выполняется (19). Не умаляя общности, можем положить  $\varkappa = 1$  и будем искать максимум следующей функции:

$$f(\delta) = 4\delta - 4\tau\delta - 4\delta^2 \quad (21)$$

Получили задачу на условный экстремум, т.е. найти максимум (21), при условии  $C \geq 0$ . Заметим, что максимальное значение достигается на границе или в точках понижения ранга. Вычислим градиент (21):

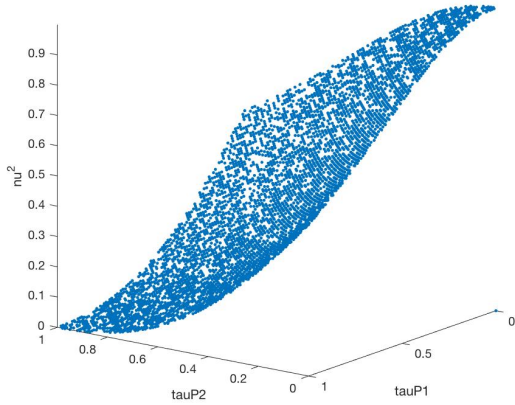
$$(4 - 4\tau - 8\delta, 4\delta) \quad (22)$$

Получаем точку понижения ранга:  $\delta = 0, \tau = 1$ . Это противоречит условию теоремы  $\delta > 0$ . Рассмотрим  $C = 0$ , выразим  $\tau$  и подставим в (21):

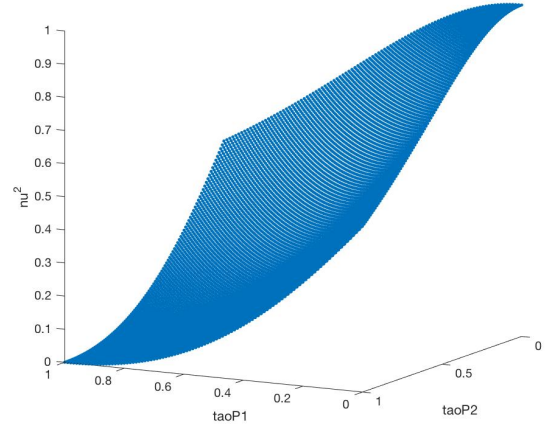
$$f(\delta) = 4\delta(1 - b) - 4\delta^2(a^2 - 2b + 1) \quad (23)$$

Максимум (23) достигается при  $\delta = \frac{1-b}{2(a^2-2b+1)}$  и равен

$$\frac{(b-1)^2}{a^2 - 2b + 1} = \frac{(\tau_{p1}\tau_{p2} - 1)^2}{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 1} > \nu^2 \quad (24)$$



(a) Численное приближение в MATLAB



(b) Вычисленный по (24)

Рис. 1: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$

## 6 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)^2}{(1+\tau_{p1}x)^2}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)^2}{(1 + \tau_{p1}x)^2} \quad (25)$$

Предположим, что нелинейность  $f(\sigma) = \phi(\sigma)$  имеет изолированные нули и удовлетворяет ??????. Неравенство  $\tau_{z1} \neq \tau_{p1}$  гарантирует, что функция  $\chi(p) = x^{-1}K(x)$  не приводима. Тогда по теореме ??? пара  $(A, B)$  управляема. Заметим

$$\det(xI - A) = x^2 + 2\tau_{z1}^{-1}x + \tau_{z1}^{-2} \quad (26)$$

матрица  $A$  - матрица Гурвица. Найдем  $\varepsilon, \delta, \varkappa, \tau$  так, что бы максимизировать  $\nu$ . Для этого подставим (25) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \tau_{p1}^4 \tau t^3 + (-\tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{z1}^4 \tau + 2\tau_{p1}^2 \tau - \tau_{p1}^4 \delta + \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa) t^2 + \\ & + (\tau - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \tau + 4\tau_{z1} b \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\varkappa - \varepsilon - \tau - \delta) \geq 0 \\ & t = x^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

### 6.1 $\tau = 0$

Положим в (27)  $\tau = 0$ , тогда первое условие теоремы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta) t^2 + (4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta) t + (\varkappa - \varepsilon - \delta) \geq 0 \\ & t = x^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} A &= \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 \varkappa - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta \\ B &= 4\tau_{z1} \tau_{p1} \varkappa - \tau_{z1}^2 \varkappa - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 \varkappa - 2\tau_{p1}^2 \delta \\ C &= \varkappa - \varepsilon - \delta \end{aligned} \quad (29)$$

Для того, что бы выполнялось (28) нужно потребовать:  $A \geq 0$  и  $C \geq 0$ , тогда при  $B \geq 0$ , тогда уравнение не имеет положительных корней, т.е. выполняется (28). Не умаляя общности можем считать  $\varkappa = 1$ . Получили задачу нахождения условного экстремума при условии:

$$\begin{aligned} & \tau_{z1}^2 \tau_{p1}^2 - \tau_{z1}^4 \varepsilon - \tau_{p1}^4 \delta \geq 0 \\ & 4\tau_{z1} \tau_{p1} - \tau_{z1}^2 - 2\tau_{z1}^2 \varepsilon - \tau_{p1}^2 - 2\tau_{p1}^2 \delta \geq 0 \\ & 1 - \varepsilon - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Максимум может достигаться на границе, или в точках понижения ранга. Представим  $\varepsilon$  как  $\varepsilon(\delta)$  и рассмотрим функцию  $\varepsilon\delta$  на границе области (30)

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^4}{\tau_{z1}^4} \delta = \varepsilon \\ & 2\frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}} - \frac{1}{2} - \frac{\tau_{p1}^2}{2\tau_{z1}^2} - \frac{\tau_{p1}^2}{\tau_{z1}^2} \delta = \varepsilon \\ & \varepsilon = 1 - \delta \end{aligned} \quad (31)$$

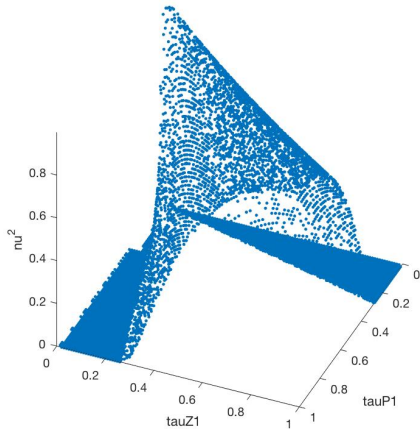
Для этого найдем пересечения прямых (31):

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{1}{1+z^2}, \varepsilon = \frac{z^2}{1+z^2} \\
 \delta &= \frac{1-q}{1-z^2}, \varepsilon = \frac{q-z^2}{1-z^2} \\
 \delta &= \frac{z^2-q}{z^4-z^2}, \varepsilon = z^2 - \frac{z^4(z^2-q)}{z^4-z^2} \\
 z &= \frac{\tau_{p1}}{\tau_{z1}} \\
 q &= 2z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2
 \end{aligned} \tag{32}$$

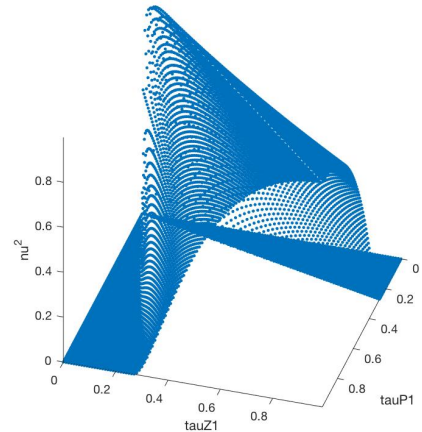
Оценки максимума на границе (31):

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{1}{2}, \varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon\delta = \frac{1}{4} \\
 \delta &= \frac{1}{2z^2}, \varepsilon = \frac{z^2}{2}, \varepsilon\delta = \frac{1}{4} \\
 \delta &= \frac{q}{2z^2}, \varepsilon = \frac{q}{2}, \varepsilon\delta = \frac{q^2}{4z^2}
 \end{aligned} \tag{33}$$

Максимум функции  $\nu^2 = \frac{4\varepsilon\delta}{z^2}$  представлен на графике.



(а) Численное приближение в МАТЛАВ



(б) Вычисленный график

Рис. 2: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$

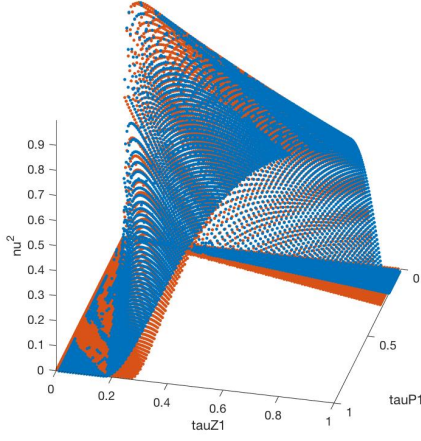


Рис. 3: График зависимости  $\nu^2$  от  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$ . Синим цветом представлено точное решение, а оранжевым цветом представлено вычисленное решение параметра  $\nu^2$

При  $B < 0$  уравнение может иметь 2 корня. В этой ситуации потребуем отрицательность дискриминанта:

$$\begin{aligned}
 & -4\tau_{z1}^4\varepsilon\delta + 8\tau_{z1}^4\varepsilon + \tau_{z1}^4 - 16\tau_{z1}^3\tau_{p1}\varepsilon - 8\tau_{z1}^3\tau_{p1} + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varepsilon\delta + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\varepsilon + 8\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\delta + \\
 & + 14\tau_{z1}^2\tau_{p1}^2 - 16\tau_{z1}\tau_{p1}^3\delta - 8\tau_{z1}\tau_{p1}^3 - 4\tau_{p1}^4\varepsilon\delta + 8\tau_{p1}^4\delta + \tau_{p1}^4 \leq 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$4(\tau_{z1}^2 - \tau_{p1}^2)^2(2\varepsilon\tau_{z1}^2 - \varepsilon\delta + 2\delta\tau_{p1}^2) + (\tau_{z1} - \tau_{p1})^2(\tau_{z1}^2 - 6\tau_{z1}\tau_{p1} + \tau_{p1}^2) \leq 0 \tag{35}$$

$$4(\tau_{z1} + \tau_{p1})^2(2\varepsilon\tau_{z1}^2 - \varepsilon\delta + 2\delta\tau_{p1}^2) + (\tau_{z1}^2 - 6\tau_{z1}\tau_{p1} + \tau_{p1}^2) \leq 0 \tag{36}$$

## 6.2 $\tau > 0$

Предположим в (27)  $\tau > 0$  и разделим на  $\tau_{p1}^4\tau$ . Не умаляя общности, можем считать  $\tau = 1$ , тогда (27) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & t^3 + at^2 + bt + c \geq 0 \\
 & A = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(-\tau_{z1}^4\varepsilon - \tau_{z1}^4 + 2\tau_{p1}^2 - \tau_{p1}^4\delta + \tau_{z1}^2\tau_{p1}^2\kappa) \\
 & B = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(1 - \tau_{z1}^2\kappa - 2\tau_{z1}^2\varepsilon - \tau_{p1}^2\kappa - 2\tau_{z1}^2 + 4\tau_{z1}\tau_{p1}\kappa - 2\tau_{p1}^2\delta) \\
 & C = \frac{1}{\tau_{p1}^4}(\kappa - \varepsilon - 1 - \delta) \\
 & t = x^2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

## 7 Оценка области захвата для систем ФАПЧ с фильтром $\frac{(1+\tau_{z1}x)(1+\tau_{z2}x)}{(1+\tau_{p1}x)(1+\tau_{p2}x)}$

Рассмотрим передаточную функцию:

$$K(x) = \frac{(1 + \tau_{z1}x)(1 + \tau_{z2}x)}{(1 + \tau_{p1}x)(1 + \tau_{p2}x)} \quad (38)$$

Представим (38) в виде:

$$K(x) = \frac{1 + \alpha_1\beta_1x + \alpha_2\beta_2x^2}{1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2} \quad (39)$$

$$\alpha_1 = \tau_{p1} + \tau_{p2}, \quad \alpha_2 = \tau_{p1}\tau_{p2}, \quad \beta_1 = \frac{\tau_{z1} + \tau_{z2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \beta_2 = \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}}{\tau_{p1}\tau_{p2}}$$

Предположим:

$$\beta_1 < \beta_2 < 1 \quad (40)$$

Предположим, что нелинейность  $f(\sigma) = \phi(\sigma)$  имеет изолированные нули и удовлетворяет ??????. Неравенство (40) гарантирует, что функция  $\chi(p) = x^{-1}K(x)$  не приводима. Тогда по теореме ???? пара  $(A, B)$  управляема. Заметим

$$\det(xI - A) = x^2 + \alpha_1\alpha_2^{-1}x + \alpha_2^{-1} \quad (41)$$

матрица  $A$  - матрица Гурвица. Найдем  $\varepsilon, \delta, \kappa, \tau$  так, что бы максимизировать  $\nu$ . Для этого подставим (39) в условие теоремы 1 и перенесем все в левую часть неравенства. В результате преобразований первое условие теоремы 1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \alpha_2^2\tau t^3 + (\alpha_1^2\tau - 2\alpha_2\tau - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2\varepsilon - \alpha_2^2\beta_2^2\tau + \alpha_2^2\beta_2\kappa)t^2 + \\ & + (\tau - \alpha_2\kappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2\varepsilon - \alpha_1^2\beta_1^2\tau - \alpha_2\beta_2\kappa + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon + 2\alpha_2\beta_2\tau + \alpha_1^2\beta_1\kappa)t + \\ & + \kappa - \varepsilon - \tau - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Положим  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned} & (-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \kappa\alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \kappa\alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2\kappa + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2\kappa + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + \\ & + \kappa - \varepsilon - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Не умаляя общности можем считать  $\kappa = 1$ :

$$\begin{aligned} & (-\varepsilon\alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2 - \delta\alpha_2^2)t^2 + (-\varepsilon\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1 - \delta\alpha_1^2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta - \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2\varepsilon)t + \\ & + 1 - \varepsilon - \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Заметим, что  $\varepsilon \leq 1 - \delta$ . Для максимизации  $\varepsilon\delta$  положим  $\varepsilon = 1 - \delta$ .

$$(\alpha_2^2\beta_2 - \alpha_2^2\delta - \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2\delta)t + \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0 \quad (45)$$

Нужно потребовать что бы выполнялось следующее условие

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0 \quad (46)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2(\beta_1 - \delta - \beta_1^2 + \beta_1^2\delta) - 2\alpha_2\beta_2\delta \geq 0 \\ & \alpha_1^2 \geq \frac{\alpha_2(1 - \beta_2) - 2\alpha_2\delta(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1) - \delta + \beta_1^2\delta} > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2) - 2\alpha_2\delta(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \end{aligned} \quad (47)$$

Получили

$$\alpha_1^2 > \frac{\alpha_2(1 - \beta_2)}{\beta_1(1 - \beta_1)} \quad (48)$$

Так как максимальное значение достигается на границе положим

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_2 + 2\alpha_2\delta + \alpha_1^2\beta_1 - \alpha_1^2\delta - \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\delta - 2\alpha_2\beta_2\delta = 0 \quad (49)$$

Тогда

$$\delta = \frac{\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)}{\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)} \quad (50)$$

Получили, что

$$\nu^2 < 4 \frac{[\alpha_1^2(1 - \beta_1) - \alpha_2(1 - \beta_2)][\alpha_1^2(1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2(1 - \beta_2)]}{[\alpha_1^2(1 - \beta_1^2) - 2\alpha_2(1 - \beta_2)]^2} \quad (51)$$

## Список литературы

- [1] Ms. Ujwala A. Belorkar and Dr. S.A.Ladhake ,Dssign of loe power phase Locked Loop (PLL) using 45NM VLSI TECHNOLOGY,International journal of VLSI design & Communication Systems ( LSICS ), Vol.1, No.2, June 2010
- [2] Gursharan Reehal, A Digital Frequency Synthesizer Using Phase Locked Loop Technique” 1998
- [3] KengL.WongIanA.Young,JeffreyK.Greason. Applclockgenerator with 5 to 110 mhz of lock range for microprocessors. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 27, 1992.
- [4] Lin Feng, Chu Wu, Bo Jin, Zhen Yu Wu. A Passive Third-Order Cascade PLL Filter