

А. А. Кочеев, В. Г. Сербо

Механика и теория относительности

Учебное пособие



Москва ♦ Ижевск

2012

УДК 530.12(075.8)

ББК 22.313я73

К755

Интернет-магазин

MAFFES

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Кочеев А. А., Сербо В. Г.

Механика и теория относительности: Учеб. пособие. — М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2012. — 165 с.

Учебное пособие “Механика и теория относительности” составлено на основе курса лекций, читаемых авторами на факультете информационных технологий Новосибирского государственного университета. Главная цель учебного пособия — дать в краткой и доступной форме изложение основных законов как нерелятивистской, так и релятивистской механики. Обсуждаются основы нерелятивистской и релятивистской кинематики и динамики, проблемы линейных колебаний, движение в центральном поле и движение твердого тела.

Учебное пособие предназначено для студентов университетов, педагогических и технических вузов.

ISBN ???-?-????-???-?

ББК 22.313я73

© А. А. Кочеев, В. Г. Сербо, 2012

© НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2012

<http://shop.rcd.ru><http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	5
ВВЕДЕНИЕ	7
ГЛАВА I. КИНЕМАТИКА	13
§ 1. Координаты и скорость материальной точки	13
§ 2. Ускорение	21
§ 3. Инерциальные системы отсчёта. Принцип относительности	26
§ 4. Нерелятивистская кинематика. Преобразования Галилея	28
§ 5. Основы релятивистской кинематики	33
§ 6. Преобразования Лоренца. Преобразования скорости	37
§ 7. Интервал и собственное время; 4-векторы	41
ГЛАВА II. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ	45
§ 8. Законы динамики Ньютона	45
§ 9. Импульс	53
§ 10. Сила как мера скорости изменения импульса	56
§ 11. Работа. Мощность. Кинетическая энергия. Связь работы силы с изменением кинетической энергии	58
§ 12. Потенциальные силы. Потенциальная энергия	60
§ 13. Закон сохранения энергии	64
§ 14. Распады и соударения в нерелятивистской механике	67
§ 15. Понятие о фундаментальных силах. Гравитационное, электрослабое и сильное взаимодействия	69
ГЛАВА III. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА	79
§ 16. Релятивистские энергия и импульс	79
§ 17. Фотон. Эффект Допплера	85
§ 18. Распады и соударения в релятивистской механике. Понятие о методе встречных пучков	88
§ 19. Дефект масс. Реакции деления и синтеза атомных ядер	94

ГЛАВА IV. КОЛЕБАНИЯ	103
§ 20. Одномерное движение в потенциальном поле. Период колебаний	103
§ 21. Линейный осциллятор	106
§ 22. Затухающие колебания	114
§ 23. Вынужденные колебания, резонанс	117
ГЛАВА V. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ	121
§ 24. Момент импульса	121
§ 25. Движение в центральном поле	127
§ 26. Задача Кеплера	129
ГЛАВА VI. ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА. СТАТИКА	135
§ 27. Поступательное и вращательное движение твёрдого тела	135
§ 28. Импульс и кинетическая энергия твёрдого тела. Момент инерции	137
§ 29. Момент импульса твёрдого тела	141
§ 30. Уравнения движения твёрдого тела	142
§ 31. Свободное движение шарового и симметрического волчков . .	146
§ 32. Элементы статики твёрдого тела	151
ГЛАВА VII. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ	157

Предисловие

Данное пособие соответствует программе одноименного курса, читаемого нами на факультете информационных технологий (ФИТ) Новосибирского государственного университета с момента его основания. При создании этого курса важную роль сыграл наш многолетний опыт чтения подобного курса на отделении информатики физического факультета НГУ. Главная цель курса — дать в краткой и доступной форме изложение основных законов как нерелятивистской, так и релятивистской механики. У нас было также желание познакомить студентов ФИТ с языком и образом мыслей физиков, поскольку в будущей профессии нашим слушателям почти наверняка придётся часто иметь дело с физиками — экспериментаторами и теоретиками.

Отметим особенности этого курса.

1. Курс читается во втором семестре, что позволяет сразу же использовать довольно высокую математическую подготовку студентов.

2. В текст книги включено большинство задач, которые были апробированы на семинарах. Часть из них заимствована из известных книг: *Бельченко Ю. И., Гилёв Е. А., Силагадзе З. К.* Механика частиц и тел в задачах. Новосибирск: НГУ, 2006; *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике. М.: Наука, 1979.

3. Содержание пособия несколько (но не слишком!) расширенно по сравнению с тем, что читалось на лекциях.

Нумерация формул содержит две цифры, например (3.7) означает формулу (7) из § 3. Ссылки на формулы из данного параграфа даются в сокращённом виде без указания номера параграфа.

Два заключительных замечания. Первое: мы хотели бы рекомендовать для дополнительного чтения такие прекрасные книги по механике и теории относительности, как “Фейнмановские лекции по физике” Фейнмана, Лейтона, Сэндса и “Общий курс физики” Сивухина. Второе: предупредить заранее, что эти книги представляют собой достаточно объёмные сочинения и могут оказаться не простым чтением для студентов первого курса.

ВВЕДЕНИЕ

Слово “физика” (греч. *φυσική*) означает “природа”. Изучение природы не только удовлетворяет одну из самых прогрессивных страстей человека — любознательность, но и оказывается чрезвычайно полезно для развития техники и улучшения условий жизни людей при разумном использовании достижений науки. При изучении окружающего мира выявляются связи между порой очень различными явлениями. Иногда эти связи описывают узкий круг явлений в ограниченной области, так появляются полезные, но второстепенные законы природы. Очень важным является установление *основных* законов и принципов, которые позволяют объяснять множество наблюдаемых явлений, предсказывать протекание их в различных условиях, а также предсказывать новые явления.

Сами основные законы и принципы не могут быть доказаны логически. Их обоснованность подтверждается опытом, а сами законы появляются как обобщение опытных фактов. Но самые совершенные опыты никогда не охватывают всего разнообразия условий, в которых протекают реальные явления, а измерения всегда можно провести только с конечной точностью. Опираясь на опыт, улучшая методы измерений, человек создает и непрерывно совершенствует модель окружающего мира. Наблюдение — размышление — гипотеза — опыт, иногда несколько таких циклов, затем — теория; так развивается научное знание об окружающем нас мире.

Физика изучает наиболее общие (фундаментальные) законы природы и потому является главной наукой о природе.

Но физика не многим отличалась бы от зоологии или ботаники, если бы свои результаты не представляла в виде количественных соотношений между физическими величинами. Именно момент, когда Галилей, пользуясь своим пульсом для измерения времени, нашел количественную связь между пройденным путем и временем при равноускоренном движении, можно считать появлением физики в современном смысле этого слова.

Устанавливаемые в физике основные законы природы образуют фундамент для всех остальных естественных наук. Знание этих законов чрезвычайно важно и для развития техники, так как позволяет устанавливать ограничения и пределы тех или иных технических устройств и нередко помогает находить принципиально новые подходы и возможности для решения различных технических и производственных задач. Много интересного о связи физики с другими науками и техникой можно прочесть в книге “Фейнмановские лекции по физике” (вып. 1).

Механика изучает законы движения тел. Движение тел неразрывно связано с одними из основных, фундаментальных понятий физики, которыми являются *пространство и время*. Интуитивно понятные каждому, они не поддаются чёткому определению, но необходимы для описания движения. Изменения понятий пространства и времени при движении с большими скоростями (сравнимыми со скоростью света) дают удивительные результаты, трудно воспринимаемые на основе повседневного опыта. Однако в настоящее время эти изменения настолько хорошо изучены и подтверждены инженерной практикой, что вполне естественно соответствующую теорию — специальную теорию относительности — включить в курс классической механики.

Чтобы определить положение точки на прямой, достаточно поместить на ней начало отсчёта и выбрать масштаб. Это даст координату точки. Для определения положения на плоскости достаточно использовать две взаимно перпендикулярные прямые. Тогда две координаты зададут однозначно положение точки на плоскости. Для однозначного задания положения точки в пространстве необходимы три координаты. Число координат, необходимых для определения положения точки, называют размерностью пространства. Классическая физика оперирует трёхмерным пространством, причём опытные данные свидетельствуют о том, что в больших масштабах наше пространство евклидово (это означает, в частности, что сумма углов треугольника в таком пространстве равна 180°). Для описания изменения положения тела в пространстве необходимо время, характеризующее скорость этого изменения. Поэтому при изучении механики понадобятся часы, вернее система часов, позволяющая в любой точке пространства определять время событий.

Таким образом для описания движения тела необходима система координат с заданной единицей длины и система синхронизированных часов с заданной единицей времени. В физике этот комплекс называют

системой отсчёта. При изучении законов механики понадобится ещё одна единица — единица массы, измеряющая инертность тела. В Международной системе единиц СИ (SI — *Sisteme Internetalional*) тремя основными единицами измерения механических величин являются следующие единицы: метр (м), килограмм (кг) и секунда (с)¹.

Уже при изготовлении эталона метра, определенного во времена Французской революции в 1791 г. как $1/40\,000\,000$ часть парижского меридиана, выяснилась ошибка в определении длины меридиана, а также было показано, что размеры Земли не самая удобная основа для единицы длины. Не лучше ситуация и с эталоном времени. Исторически для людей естественными эталонами времени были времена периодического движения Земли и Луны. Однако есть много факторов, влияющих на нерегулярность движения Земли, например замедление скорости вращения Земли вокруг своей оси за счет приливов.

Естественными требованиями к эталонам длины и времени являются их высокая точность, воспроизводимость и доступность. Развитие оптики, квантовой и лазерной физики позволило использовать излучения атомов в качестве эталонов. Эти эталоны не сгорают и не теряются, атомы одного и того же изотопа одинаковы, неразличимы.

В настоящее время принято следующее определение секунды: *одна секунда — это 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходам между двумя определёнными уровнями изотопа атома цезия с атомной массой 133*.

Современное определение метра таково: *один метр — это расстояние, проходимое светом в вакууме за $1/299\,792\,458$ секунды*. Как видим, для единицы времени и длины используется фактически единый эталон — цезиевые часы. Эта возможность основана на том опытном факте, что *скорость света в вакууме представляет собой универсальную постоянную c*. Эта постоянная, согласно предыдущим определениям, равна

$$c = 299\,792\,458 \text{ м/с точно.}$$

¹При изучении других разделов физики потребуется ещё три единицы измерения: единица силы электрического тока — ампер (А), единица термодинамической температуры — градус Кельвина (К) и единица силы света — кандела (кд). Эти единицы являются основными в системе единиц СИ. Кроме шести основных, в СИ вводится две дополнительные единицы: плоского угла — радиан и телесного угла — стерадиан. Все остальные единицы измерения физических величин в СИ являются производными от этих основных. Например, единица электрического заряда — кулон (Кл) определяется как заряд, протекающий за одну секунду при силе тока в один ампер: $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$.

Определение килограмма всё ещё основано на макроскопическом прототипе — платино-иридиевой гире, хранящейся в Международном бюро мер и весов в Севре (Франция).

Приведем примеры характерных времён, расстояний и масс².

Время

От Большого Взрыва	13,7	млрд лет
Возраст Земли	$4 \div 5$	млрд лет
Один год	$\approx \pi \cdot 10^7$	с
Один удар сердца	~ 1	с
Характерное атомное время	10^{-17}	с
Характерное ядерное время	10^{-23}	с

Расстояние

Видимая часть Вселенной	$\sim 10^{26}$	м
Расстояние до ближайшей звезды	$4 \cdot 10^{16}$	м
Радиус орбиты Земли	150	млн км
Радиус Солнца	0,7	млн км
Радиус Земли	6 400	км
Длина волны видимого света	$\sim 10^{-7}$	м
Размер атома	$\sim 10^{-10}$	м
Размер протона	$\sim 10^{-15}$	м

Масса

Земли	$6 \cdot 10^{24}$	кг
Луны	$7,3 \cdot 10^{22}$	кг
Молекулы ДНК	$\sim 10^{-22}$	кг
Атома водорода	$1,7 \cdot 10^{-27}$	кг
Электрона	$0,9 \cdot 10^{-30}$	кг

²В приводимой ниже таблице и далее будут употребляться следующие обозначения:

\approx — знак приближённого равенства;

\sim — знак порядка величины;

\propto — знак пропорциональности.

Опишем кратко область применимости той механики, о которой будет рассказано в этом курсе. Мы будем изучать *классическую*, т. е. некантовую механику. Квантовая механика является более общей теорией, её основные уравнения и само описание движения частиц принципиально отличается от того, что есть в классической механике. Однако квантовая механика не отменяет классическую в области применимости последней. Классическая механика — это такой раздел механики, в котором при движении тел произведение характерных масс m , расстояний r и скоростей v велико по сравнению с квантовой постоянной Планка

$$\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

т. е. величина $mrv \gg \hbar$. При этом мы будем различать *нерелятивистскую* классическую механику, рассматривающую движения тел со скоростями много меньше скорости света, т. е. при $v \ll c$, и *релятивистскую* классическую механику, рассматривающую движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, т. е. при $v \sim c$. Наконец, излагаемая в этом курсе классическая механика оказывается неприменимой также и в области сильных гравитационных полей, например вблизи очень массивных звёзд и ядер галактик. Физические явления в этих областях, а также развитие Вселенной в целом (космология) рассматриваются в общей теории относительности.

ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА

§ 1. Координаты и скорость материальной точки

Мы уже упоминали во введении, что для описания движения тела необходима система координат с заданной единицей длины и система синхронизированных часов с заданной единицей времени, т. е. система отсчёта.

1.1. Координаты

Материальная точка или частица — тело, размерами которого можно пренебречь в данных условиях движения. Например, вполне допустимо рассматривать Землю как материальную точку при изучении движения Земли вокруг Солнца, поскольку отношение радиуса Земли к расстоянию от Земли до Солнца — малая величина порядка 10^{-5} , но такое приближение будет уже неправильным при описании приливов на Земле. Положение частицы в данной системе отсчёта полностью задается радиус-вектором¹ \mathbf{r} в данный момент времени t . С течением времени конец вектора $\mathbf{r}(t)$ движется по кривой, которая называется *траекторией* частицы.

Для определения пространственного положения частицы вводят систему координат, наиболее употребительными системами координат в физике являются декартова, полярная и сферическая.

Декартова система координат образуется тремя пересекающимися под прямым углом прямыми, называемыми координатными осями и обычно обозначаемыми как x , y , z (рис. 1). Отметим, что обычно в физике используется *правовинтовая* система декартовых координат, у которой при повороте по наименьшему углу оси x до совмещения её с осью y направление движения правого винта даст направление оси z . Радиус-вектор частицы \mathbf{r}

¹В учебной литературе векторы, как правило, обозначаются буквами со стрелкой над ними. Например, радиус-вектор обозначается так: \vec{r} . В научной литературе векторы, как правило, обозначаются буквами, набранными жирным шрифтом: \mathbf{r} , а длины векторов обозначаются буквами, набранными обычным шрифтом: $|\mathbf{r}| \equiv r$. В данном пособии мы будем следовать научной традиции.

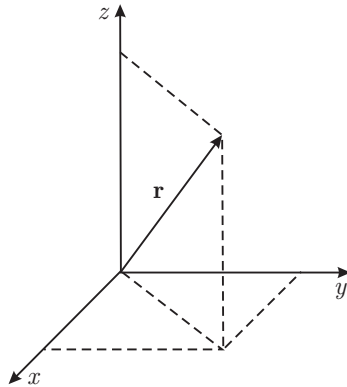


Рис. 1. Декартова система координат

и элементарное перемещение $d\mathbf{r}$ выражаются через декартовы координаты (x, y, z) соотношениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz,$$

в которых \mathbf{e}_i — единичные векторы вдоль соответствующих осей.

Полярная система координат на плоскости задаётся расстоянием r от начала координат до частицы и азимутальным углом φ между некоторым выделенным направлением (его обычно принимают за ось x) и радиус-вектором частицы (рис. 2). Отметим, что азимутальный угол отсчитывается от оси x против часовой стрелки и изменяется в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

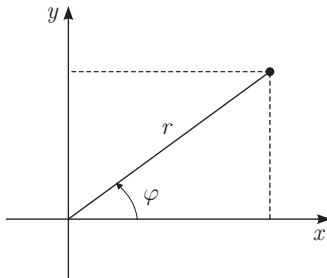


Рис. 2. Полярная система координат

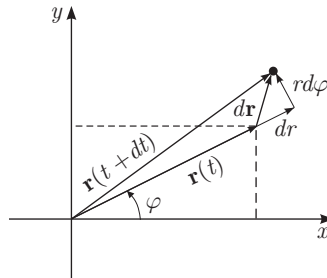


Рис. 3. Элементарное перемещение в полярной системе координат

Обозначим через \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_φ единичные векторы вдоль радиус-вектора и в перпендикулярном ему направлении, тогда (см. рис. 3)

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\varphi r d\varphi. \quad (1.1)$$

При движении частицы на плоскости её траектория может быть задана в виде уравнения $y(x)$ для декартовых координат или в виде уравнения $r(\varphi)$ для полярных координат.

Сферическая система координат задаётся расстоянием r от начала координат до частицы, полярным углом θ между осью z и радиус-вектором частицы и азимутальным углом φ между осью x и проекцией радиус-вектора на плоскость xy (рис. 4). Отметим, что полярный угол отсчитывается

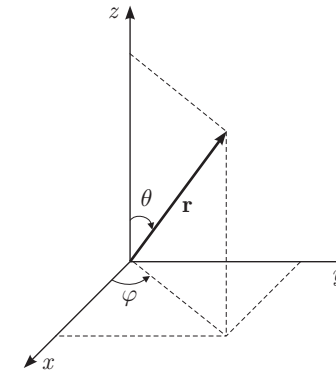


Рис. 4. Сферическая система координат

от оси z и изменяется в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$. Если начало системы координат поместить в центре глобуса заданного радиуса r с северным полюсом, лежащим на оси z , то полярный угол отсчитывается вдоль меридиана к югу, а азимутальный угол — вдоль широты к востоку. Обозначим через \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ единичные векторы вдоль радиус-вектора, вдоль меридиана и вдоль широты, тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\varphi r \sin \theta d\varphi.$$

1.2. Скорость

Скорость $\mathbf{v}(t)$ характеризует быстроту изменения радиус-вектора и определяется как производная радиус-вектора по времени:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

В физике употребительна восходящая к Ньютону традиция обозначать производную по времени точкой над соответствующей переменной, т. е. обозначать скорость так:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}(t).$$

С течением времени конец вектора $\mathbf{v}(t)$ движется по кривой, которая называется *годографом скорости*.

Зная явное выражение для элементарного перемещения $d\mathbf{r}$, можно найти компоненты скорости в декартовых координатах:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Единичные векторы \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z взаимно ортогональны²,

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = x, y, z,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Поэтому квадрат скорости \mathbf{v}^2 равен сумме квадратов соответствующих компонент скорости:

$$\mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Приведём также аналогичные формулы для полярных координат (см. рис. 3)

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}; \quad \mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$$

и для сферических координат

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta; \quad \mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta.$$

²Напомним, что скалярное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначается как $\mathbf{a}\mathbf{b}$ или (\mathbf{a}, \mathbf{b}) и равно произведению длин векторов на косинус угла α между ними: $\mathbf{a}\mathbf{b} = ab \cos \alpha$, в частности $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x = 1$, $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y = 0$ и т. д. С учётом этого скалярное произведение векторов можно выразить через их декартовы компоненты: $\mathbf{a}\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

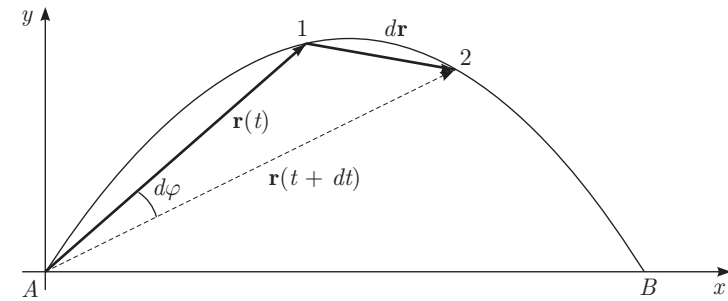


Рис. 5. Траектория тела, брошенного под углом к горизонту

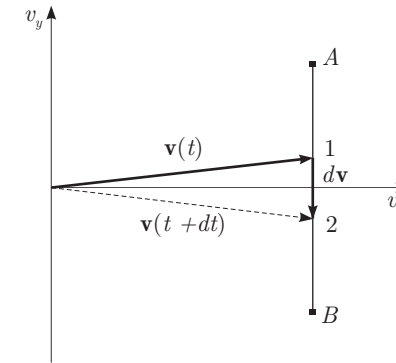


Рис. 6. Отрезок AB — годограф скорости тела, брошенного под углом к горизонту

Элементарное перемещение $d\mathbf{r}$ направлено параллельно касательной к траектории в точке $\mathbf{r}(t)$, поэтому вектор скорости $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ также параллелен касательной к траектории частицы. Аналогично, элементарное приращение скорости $d\mathbf{v}$ направлено параллельно касательной к годографу скорости в точке $\mathbf{v}(t)$, поэтому вектор $d\mathbf{v}/dt$ также параллелен касательной к годографу скорости.

Рассмотрим простой пример движения частицы на плоскости xy , заданного уравнениями³

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

³Из школьного курса физики хорошо известно, что этот пример соответствует движению тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, при этом ось x направлена горизонтально, а ось y — по вертикали вверх.

Эти уравнения задают траекторию частицы в неявном виде, явное выражение для траектории можно получить, если найти t из первого уравнения и подставить во второе:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Отсюда видно, что конец радиус-вектора движется по параболе (рис. 5). Скорость частицы равна

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt,$$

т. е. годограф скорости — прямая, параллельная оси v_y (рис. 6).

1.3. Продольная и поперечная составляющие скорости

Радиус-вектор частицы $\mathbf{r}(t)$ может изменяться как по длине, так и по направлению. Мы увидим, что быстрота этих изменений определяется двумя разными составляющими скорости: продольной (вдоль радиус-вектора \mathbf{r}) и поперечной (ортогональной к радиус-вектору). Разберём более подробно вопрос о составляющих вектора скорости. Для этого рассмотрим вначале специальный случай, когда радиус-вектор частицы $\mathbf{r}(t)$ изменяется только по направлению. Это значит, что частица вращается (не обязательно равномерно!) по окружности.

Пусть частица движется по окружности радиуса R (рис. 7). Центр полярной системы координат поместим в центре окружности, тогда

$$x(t) = R \cos \varphi(t), \quad y(t) = R \sin \varphi(t), \quad |\mathbf{r}(t)| = R.$$

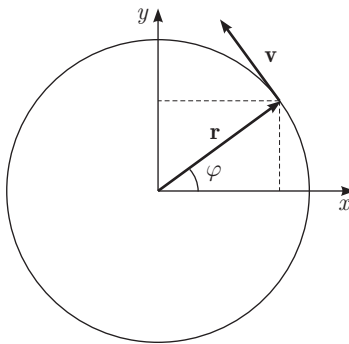


Рис. 7. Движение частицы по окружности радиуса R

Радиус-вектор

$$\mathbf{r} = R(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

и скорость

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = R\dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

взаимно ортогональны

$$\mathbf{r}\mathbf{v} = xv_x + yv_y = 0.$$

Величина вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R |\dot{\varphi}|$$

зависит от угловой скорости частицы $\dot{\varphi}(t)$. Представим радиус-вектор \mathbf{r} в виде

$$\mathbf{r}(t) = R\mathbf{e}_r(t), \quad \mathbf{e}_r \parallel \mathbf{r},$$

где $\mathbf{e}_r(t)$ — единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{r} . Тогда скорость точки, движущейся по окружности, определится производной по времени от вектора $\mathbf{e}_r(t)$, которая ортогональна вектору \mathbf{r} ,

$$\mathbf{v} = R\dot{\mathbf{e}}_r, \quad \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi), \quad \dot{\mathbf{e}}_r \perp \mathbf{r}.$$

В общем случае радиус-вектор

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t) \quad (1.2)$$

может изменяться как по направлению (за счёт изменения вектора $\mathbf{e}_r(t)$), так и по величине (за счёт изменения функции $r(t)$). Поэтому вектор скорости

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r \quad (1.3)$$

удобно разложить на две составляющие: \mathbf{v}_t — вдоль радиус-вектора и \mathbf{v}_n — в поперечном к нему направлении:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_t = \dot{r}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{v}_n = r\dot{\mathbf{e}}_r, \quad \mathbf{v}_t \parallel \pm \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_n \perp \mathbf{r}.$$

В полярной системе координат эти формулы прямо следуют из выражения для $d\mathbf{r}$ в формуле (1).

Отсюда видно, что продольная (иначе *тангенциальная*) составляющая \mathbf{v}_t “заведует” изменением длины радиус-вектора, а поперечная (иначе *нормальная*) составляющая \mathbf{v}_n “заведует” поворотом радиус-вектора. Поясним это следующим образом. Пусть за время dt частица переместится на

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt = \dot{r}dt\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r dt.$$

Изменение длины радиус-вектора за малое время dt , равное $dr = \dot{r}dt$, определяется продольной составляющей скорости:

$$dr = \dot{r}dt = v_t dt, \quad v_t \equiv \mathbf{v} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{dr}{dt}.$$

С другой стороны, за это время радиус-вектор повернется на малый угол

$$d\varphi = \frac{v_n dt}{r},$$

так что угловая скорость вращения радиус-вектора

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_n}{r}$$

зависит от поперечной составляющей скорости.

Задачи

1.1. Определить угол α между двумя радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , которые заданы своими сферическими координатами: $\mathbf{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (r_2, \theta_2, \varphi_2)$.

1.2. Смышлённый студент находится на берегу Обского моря в точке A (рис. 8). В море в точке B тонет девушка. Расстояние $AC = \frac{1}{2}CB = l$. Студент бежит в 5 раз быстрее, чем плавает. На каком расстоянии $x = DC$ студент должен броситься в воду, чтобы время движения от точки A до точки B было наименьшим?

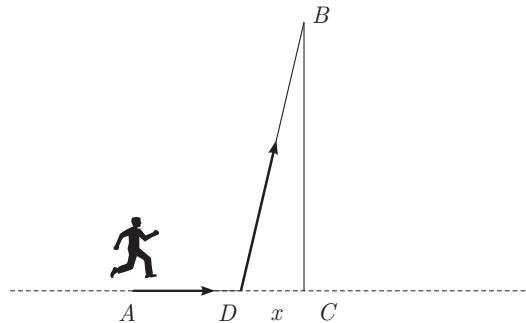


Рис. 8. К задаче 1.2

1.3. Два корабля отплыли одновременно из пунктов A и B с декартовыми координатами $\mathbf{a} = (30; 0)$ км и $\mathbf{b} = (0; 30)$ км соответственно. Считая скорости кораблей постоянными $\mathbf{v}_1 = (-20; 0)$ км/ч и $\mathbf{v}_2 = (20; -30)$ км/ч, найти расстояние их наименьшего сближения.

1.4. Два шара бросают из одной точки над поверхностью Земли в противоположные стороны в горизонтальном направлении со скоростями $v_1 = 2,5$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Через какое время t векторы скоростей шаров окажутся перпендикулярными друг другу при свободном падении в поле тяжести (ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с²). Чему в этот момент будут равны расстояние между шарами и их скорости?

§ 2. Ускорение

Подобно тому как быстрота изменения радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ характеризуется его производной по времени $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, так и быстрота изменения скорости со временем может быть охарактеризована производной скорости по времени. Эта величина называется *ускорением*

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

Ускорение является второй производной от \mathbf{r} , что обозначают двумя точками над радиус-вектором:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Мы знаем, что вектор скорости $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ параллелен касательной к траектории частицы. Аналогично, вектор ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ параллелен касательной к годографу скорости, но может быть направлен произвольно по отношению к траектории частицы (см. рис. 5, 6).

Если ускорение постоянно $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} = \text{const}$, то $d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt$ и

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a} dt = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t,$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2.$$

При свободном падении вблизи поверхности Земли ускорение $\mathbf{a}(t) \approx \text{const} = \mathbf{g}$, где $g \approx 9,8$ м/с².

2.1. Ускорение при движении по окружности

Скорость частицы $\mathbf{v}(t)$ может изменяться как по величине, так и по направлению. В полной аналогии с рассмотренным выше изменением радиус-вектора (см. формулы (1.2)–(1.3)), можем представить скорость в форме

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_v(t), \quad (1.4)$$

где \mathbf{e}_v — единичный вектор, направленный по скорости. Тогда ускорение примет вид, аналогичный (1.3),

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{e}_v + v \dot{\mathbf{e}}_v. \quad (1.5)$$

Иными словами, быстрота изменений вектора скорости определяется двумя разными составляющими ускорения: $\mathbf{a}_t = \dot{v} \mathbf{e}_v$ — продольной (вдоль вектора \mathbf{v}) и $\mathbf{a}_n = v \dot{\mathbf{e}}_v$ — поперечной (ортогональной к вектору скорости), причём $a_t = dv/dt$ определяет скорость изменения длины вектора $\mathbf{v}(t)$, в то время как a_n определяет скорость поворота вектора $\mathbf{v}(t)$.

Разберём этот вопрос более подробно. Для этого вернёмся к движению частицы по окружности (см. рис. 7). В этом случае ускорение

$$\mathbf{a} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y) = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) - R\dot{\varphi}^2(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

можно представить в виде суммы двух векторов $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$. Первый из них

$$\mathbf{a}_t = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \mathbf{v}, \quad a_t = R\ddot{\varphi} = \frac{dv}{dt}$$

направлен вдоль вектора \mathbf{v} при $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi} > 0$ или против вектора \mathbf{v} при $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi} < 0$ и называется *тангенциальным ускорением*. Второй

$$\mathbf{a}_n = -R\dot{\varphi}^2(\cos \varphi, \sin \varphi) = -\dot{\varphi}^2 \mathbf{r}, \quad a_n = R\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{R}$$

направлен противоположно радиус-вектору, т.е. к оси вращения, и потому ортогонален вектору скорости, $\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v} = 0$. Его называют *нормальным* или *центростремительным ускорением*. Можно сказать, что поворот вектора скорости определяется вектором \mathbf{a}_n , в то время как изменение величины вектора скорости зависит от \mathbf{a}_t . При $\mathbf{a}_t = 0$ угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ отсутствует, $\ddot{\varphi} = 0$, и вектор \mathbf{v} вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$, оставаясь неизменным по величине $v = R |\dot{\varphi}| = \text{const}$.

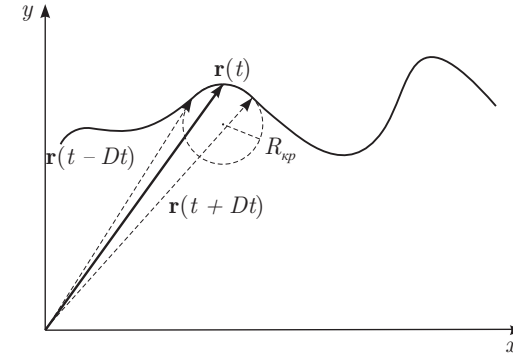


Рис. 9. Общий случай криволинейного движения

2.2. Общий случай движения по криволинейной траектории

В общем случае разложим вектор ускорения \mathbf{a} на составляющую \mathbf{a}_t вдоль вектора скорости \mathbf{v} и составляющую \mathbf{a}_n в поперечном к вектору скорости направлении

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{a}_t \parallel \pm \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_n \perp \mathbf{v}.$$

Повторяя предыдущие выкладки для вектора скорости, получаем, что тангенциальное ускорение \mathbf{a}_t “заведует” изменением величины вектора скорости \mathbf{v}

$$dv = a_t dt, \quad a_t \equiv \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{dv}{dt},$$

а нормальное или центростремительное ускорение \mathbf{a}_n “заведует” поворотом вектора \mathbf{v} на малый угол

$$\frac{a_n dt}{v}.$$

В общем случае можно провести окружность через три близких точки траектории $\mathbf{r}(t - \Delta t)$, $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. При малых Δt движение частицы по гладкой траектории будет мало отличаться от движения по указанной окружности (рис. 9). Радиус построенной при $\Delta t \rightarrow 0$ окружности $R_{\text{кр}}(t)$ называется *радиусом кривизны траектории* в рассматриваемой точке $\mathbf{r}(t)$. Его можно найти по формуле

$$R_{\text{кр}}(t) = \frac{v^2}{a_n}, \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v}.$$

Если частица движется в плоскости xy , то легко проверить, что

$$a_n = \frac{|a_x v_y - a_y v_x|}{v} = \frac{|v_x^3|}{v} y''(x),$$

откуда получаем удобную формулу для радиуса кривизны траектории частицы, если уравнение траектории задано в форме $y(x)$:

$$R_{\text{кр}}(x) = \frac{\{1 + [y'(x)]^2\}^{3/2}}{|y''(x)|}.$$

Здесь $y'(x) = dy/dx$ и $y''(x) = d^2y/dx^2$.

Задачи

2.1. Частица двигалась вдоль прямой с постоянным ускорением a_x и без начальной скорости в течение времени τ , после чего стала двигаться с ускорением $-a_x$. Через какое время после смены знака ускорения частица вернётся в первоначальное положение?

2.2. Частица движется в плоскости xy по закону: $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - \beta t)$, где α и β — положительные постоянные. Найти: уравнение траектории $y(x)$; скорость и ускорение частицы; момент времени t_1 , в который вектор скорости составляет угол $\pi/4$ с вектором ускорения.

2.3. Утка летела по горизонтальной прямой с постоянной скоростью u . В неё бросил камень неопытный “охотник”, причём бросок был сделан без упреждения, т. е. в момент броска скорость камня v была направлена как раз на утку под углом α к горизонту (рис. 10). На какой высоте летела утка, если камень все-таки попал в неё?

2.4. Частица движется в плоскости xy по траектории, определяемой уравнениями $x = a \sin \omega t$, $y = a(1 - \cos \omega t)$. Найти путь, проходимый частицей за время t , и угол между векторами скорости и ускорения.

2.5. По стенке дома затаскивают бревно длиной l , так что его верхний конец движется с постоянной скоростью v по вертикали, а нижний передвигается по земле (рис. 11). Найти угловую скорость и угловое ускорение точек бревна в момент времени t .

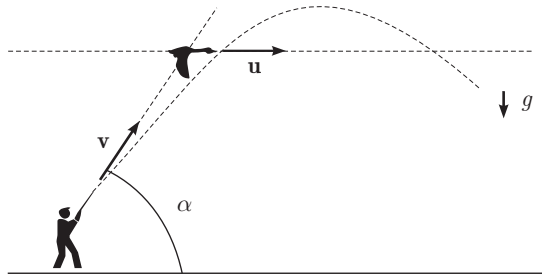


Рис. 10. К задаче 2.3

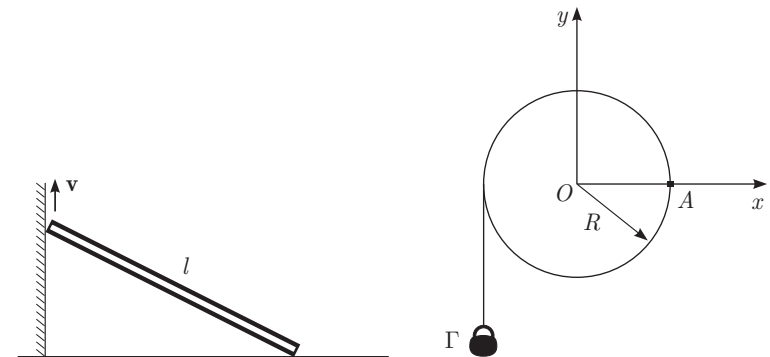


Рис. 11. К задаче 2.5

Рис. 12. К задаче 2.6

2.6. Грузик Γ подвешен на нити, намотанной на невесомую катушку радиуса R с закреплённой осью вращения O (рис. 12). В начальный момент грузик отпускают без начальной скорости. Найти зависимость от времени скорости $v(t)$, продольной $a_t(t)$ и поперечной $a_n(t)$ составляющих ускорения, а также полного ускорения $a(t)$ точки A на ободе катушки.

2.7. Камень брошен с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории на начальном участке и в верхней части траектории. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2.8. Цилиндр радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Траектория, которую описывает точка A на ободе цилиндра, представляет собой циклоиду. Найти радиус кривизны траектории в точке, расположенной на расстоянии $2R$ от плоскости, по которой катится цилиндр. Тот же вопрос для точки траектории, расположенной на расстоянии R от плоскости, по которой катится цилиндр.

2.9. Гладкая проволока изогнута в форме эллипса, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

По эллипсу с постоянной по величине скоростью v движется бусинка. Найти максимальное и минимальное ускорение бусинки.

§ 3. Инерциальные системы отсчёта. Принцип относительности

В механике принимаются, как обобщение опытных фактов, следующие свойства пространства и времени: *пространство однородно* (т. е. все точки пространства равноправны) и *изотропно* (т. е. все направления в пространстве равноправны), а *время однородно*. В таком пространстве движение, как и покой, всегда относительны. Тела отсчёта (и связанные с ними часы), по отношению к которым рассматривается движение, образуют *систему отсчёта*.

Среди всевозможных систем отсчёта особое значение имеют инерциальные системы отсчёта, определяемые следующим образом. Сначала введём понятие свободного тела. *Свободным* называется тело, настолько удаленное от других тел, что их влиянием на движение данного тела можно пренебречь. Система отсчёта, связанная с набором покоящихся друг относительно друга свободных тел, называется *инерциальной*.

Инерциальные системы являются выделенными из всех возможных систем отсчёта. Галилеем был осознан следующий фундаментальный факт: два механических опыта, поставленных одинаковым образом в двух разных инерциальных системах отсчёта, дают один и тот же результат. Это утверждение, распространённое на любые физические опыты, составляет содержание *принципа относительности* (Галилей, Пуанкаре, Эйнштейн): **все инерциальные системы равноправны в том смысле, что законы физики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта**. Это означает, что все законы физики должны быть *ковариантны* относительно перехода от одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта⁴. Обобщением опытных фактов является **закон инерции Галилея**: свободное тело в любой инерциальной системе отсчёта движется равномерно и прямолинейно.

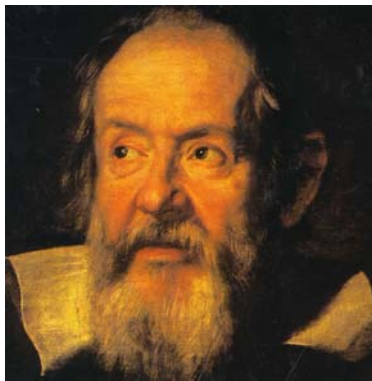


Рис. 13. Галилео Галилей (1564–1642)

⁴Ковариантность какой-либо величины означает неизменность *вида (формы)* этой величины по отношению к некоторым преобразованиям. *Инвариантность* какой-либо величины означает неизменность *значения* этой величины по отношению к некоторым преобразованиям.

Постулат о существовании инерциальных систем отсчёта иногда называют первым законом Ньютона.

Утверждение о том, что законы механики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта S к другой инерциальной системе отсчёта S' , содержит по существу следующий ряд утверждений.

1. Законы механики не изменяются при сдвиге системы отсчёта на произвольный вектор (a, b, c) , т. е. при преобразованиях вида (рис. 14)

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c, \quad t' = t.$$

Это утверждение является следствием предположения об однородности пространства, т. е. об отсутствии каких-либо выделенных в пространстве точек.

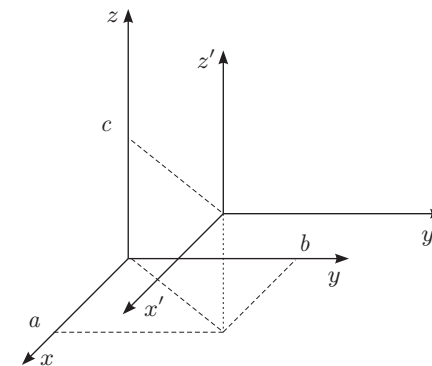


Рис. 14. Сдвиг системы координат

2. Законы механики не изменяются при повороте системы отсчёта относительно произвольной оси, например, при повороте вокруг оси z на угол φ (рис. 15):

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = y' \cos \varphi + x' \sin \varphi, \quad z = z', \quad t' = t.$$

Это утверждение является следствием предположения об изотропии пространства, т. е. об отсутствии каких-либо выделенных в нём направлений.

3. Законы механики не изменяются при сдвиге по оси времени, т. е. при преобразованиях вида

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \tau.$$

Это следствие предположения об однородности времени, т. е. об отсутствии чем-либо выделенных моментов времени.

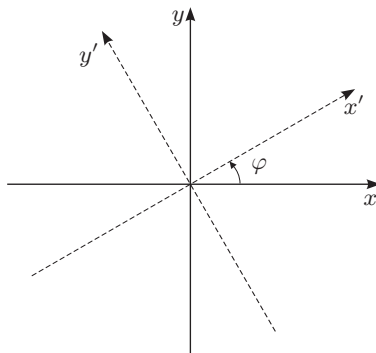


Рис. 15. Поворот системы координат

4. Законы механики не изменяются при преобразованиях, соответствующих равномерному поступательному (без вращения) движению системы отсчёта S' относительно инерциальной системы отсчёта S с некоторой постоянной скоростью $\mathbf{V} = \text{const}$.

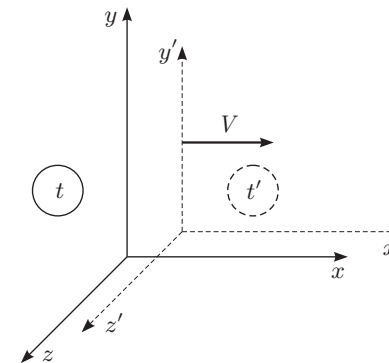
Эти свойства пространства и времени можно использовать для того, чтобы две произвольные инерциальные системы привести к стандартному виду, который мы и будем использовать в дальнейшем. Для этого сделаем соответствующий сдвиг и поворот в пространстве и сдвиг по оси времени так, чтобы в этих двух системах в начальный момент времени $t = t' = 0$ начала отсчёта и направления осей совпадали и оси x и x' были параллельны постоянному вектору скорости \mathbf{V} (рис. 16).

Конкретный вид законов преобразования координат и времени существенно различается в нерелятивистской механике (преобразования Галилея) и в релятивистской механике (преобразования Лоренца), что связано с различием в основных положениях (постулатах) этих двух теорий.

§ 4. Нерелятивистская кинематика.

Преобразования Галилея

Фактически нерелятивистские формулы преобразования координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t$ и скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ известны из школьного курса физики и кажутся вполне очевидными. В то же время соответствующие релятивистские формулы выглядят странными и непонятными. Чтобы проще проследить истоки различия этих формул, полезно проанализировать, из каких предположений появляются “понятные и очевидные” нерелятивистские формулы. Такой анализ на первый взгляд кажется совершенно излишним, “буквоедским”, однако он поможет осознать, в каком пункте проходит водораздел между преобразованиями Галилея и Лоренца.

Рис. 16. Инерциальные системы отсчёта $S(t, x, y, z)$ и $S'(t', x', y', z')$

В нерелятивистской механике предполагаются справедливыми следующие обобщения опытных данных, полученные при скоростях $v \ll c$:

1. *Выполняется принцип относительности.*
2. *Ход часов не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта, т. е.*

$$t = t'.$$

3. *Продольные размеры тел не изменяются* (как показано ниже, дополнительный постулат о неизменности поперечного размера тела не нужен). В формализованном виде это утверждение выглядит следующим образом. Определим сначала понятие размера тела. Для неподвижного (в S' -системе) тела расстояние между двумя его точками $l'_{12} = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|$ может быть измерено простым сравнением этого расстояния с эталоном, причём координаты концов \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 могут быть измерены в один и тот же или разные моменты времени (ведь тело покоится в S' -системе). Для движущегося (в S -системе) тела естественно определить его размер через расстояние l_{12} между теми же двумя его точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , взятыми в один и тот же (в S -системе) момент времени t , т. е. $l_{12} = |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|$. Таким образом, данный постулат утверждает следующее: если две точки с продольными координатами x'_1 и x'_2 неподвижны в системе S' , то в системе S , в которой эти точки движутся, продольное расстояние

$$x_1(t) - x_2(t) = x'_1 - x'_2.$$

Утверждения 1–3 можно было бы назвать постулатами Галилея. Первые следствия из этих постулатов:

1. События, одновременные в одной инерциальной системе отсчёта, автоматически оказываются одновременными и в любых других инерциальных системах отсчёта (ведь $t = t'$!), так что *в нерелятивистской механике одновременность является абсолютным понятием. Это утверждение кажется настолько самоочевидным, что его нарушение в релятивистской области оказалось наиболее болезненно воспринимаемым фактом новой теории.*

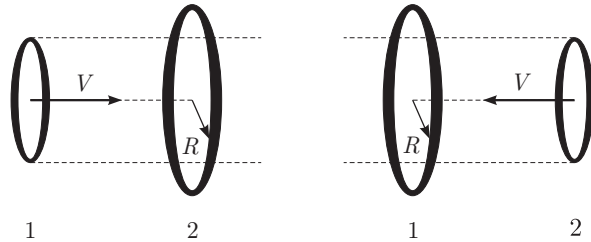


Рис. 17. Относительное движение двух колец

2. *Поперечные размеры движущегося тела не изменяются*, что прямо следует из принципа относительности и изотропии пространства. Рассмотрим относительное движение двух одинаковых колец в системе покоя одного или другого кольца (рис. 17). Центры колец расположены на одной оси (оси x), плоскости колец перпендикулярны этой оси.

Сначала проведём рассмотрение в системе отсчёта, в которой второе кольцо (его радиус равен R) покоится, а первое движется со скоростью V вдоль оси x . В плоскости кольца все направления равноправны, поэтому у первого кольца может измениться только его радиус. Предположим, что радиус движущегося кольца меньше R , тогда первое кольцо пройдёт внутри второго.

Затем проведём рассмотрение в системе отсчёта, в которой первое кольцо (его радиус равен R) покоится, тогда второе движется со скоростью V против оси x . Согласно нашему предположению, радиус движущегося кольца (на этот раз второго) меньше R . Это означает, что в данном случае второе кольцо пройдёт внутри первого. Однако это противоречит принципу относительности, согласно которому результат не должен зависеть от выбранной системы отсчёта. Отсюда следует, что наше исходное предположение о том, что радиус движущегося кольца меньше R , ошибочно.

Точно такими же рассуждениями можно показать, что радиус движущегося кольца не может быть больше R . В итоге мы приходим к выводу, что поперечные размеры движущегося тела не изменяются. А поэтому не изменяются и поперечные координаты:

$$y = y', \quad z = z'.$$

3. *Продольные координаты изменяются на величину Vt пройденного системой S' пути* (см. рис.16):

$$x = x' + Vt.$$

Отсюда с учётом закона преобразования времени $t = t'$ получаем

$$x = x' + Vt'.$$

Таким образом, *преобразования Галилея* имеют вид

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t'. \quad (4.1a)$$

Обратные преобразования Галилея получаются отсюда заменами

$$\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}', \quad t \leftrightarrow t', \quad \mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V} \quad (4.2)$$

и имеют вид

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad \text{или} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \quad t' = t. \quad (4.1b)$$

Определив скорость частицы в системе S соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

а в системе S' соотношением

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

получим из преобразований Галилея для координат и времени (1) *нерелятивистский закон преобразования скоростей*:

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \quad (4.3a)$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (4.3b)$$

Аналогично для ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ в S -системе и ускорения $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt'$ в S' -системе из (1), (3) получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}', \quad (4.4)$$

т. е. в нерелятивистской механике ускорение частицы одинаково в любой инерциальной системе отсчёта.

Напомним также, что размеры тела и время t являются инвариантами преобразований Галилея.

Задачи

4.1. Сквозь рой пчёл (толщина роя h , концентрация n), двигающихся со скоростью \mathbf{u} , пролетает ядро, имеющее скорость \mathbf{v} , причём скорости роя и ядра взаимно ортогональны, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ (рис. 18). Предполагая, что скорости роя и ядра не изменяются, найти количество пчёл, которых коснётся ядро. Радиус ядра R .

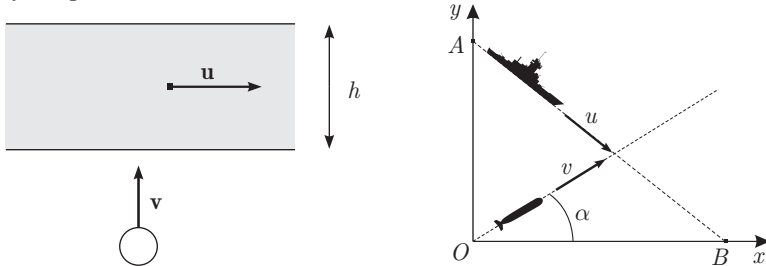


Рис. 18. К задаче 4.1

Рис. 19. К задаче 4.2

4.2. По кораблю, движущемуся из пункта A с координатами $(0; 5)$ км в пункт B с координатами $(5; 0)$ км со скоростью $u = 50$ км/ч, выпущена торпеда, её скорость $v = 200$ км/ч (рис. 19). Старт ракеты из начала координат и корабля из точки A происходит одновременно. Под каким углом α должна быть выпущена торпеда, чтобы она попала в корабль? Через какое время t торпеда поразит цель?

4.3. Футболист находится на расстоянии $l = 20$ м от прямолинейной траектории мяча. Скорость мяча $u = 10$ м/с, а скорость футболиста $v = 8$ м/с. При каких начальных положениях мяча футболист сможет догнать его?

4.4. Какова будет продолжительность полёта самолёта из Москвы в Петербург и обратно, происходящего по прямой, если в течение всего полёта ветер дует со скоростью u под углом α к линии полёта. Скорость самолёта относительно воздуха v , расстояние от Москвы до Петербурга L .

§ 5. Основы релятивистской кинематики

Существует множество экспериментальных данных, которые показывают, что в релятивистской области преобразования Галилея неверны. Например, одна и та же движущаяся и находящаяся в покое нестабильная частица имеет разное время жизни; скорость света, испущенного звездой по и против движения Земли, оказывается одной и той же; ни на одном ускорителе не удалось разогнать частицы до скоростей, превышающих скорость света в вакууме c , и т. д.



Рис. 20. Альберт Эйнштейн (1879–1955)

5.1. Постулаты Эйнштейна и первые следствия из них

Совокупность отмеченных фактов (и многих других!) можно объяснить, если принять следующие постулаты (А. Эйнштейн, 1905)⁵:

1. Принцип относительности справедлив не только для механических (как это было у Галилея), но и для любых других (в частности, электромагнитных) физических явлений.

2. Существует предельная скорость движения частиц и распространения взаимодействий; естественно, она должна быть одной и той же в различных инерциальных системах отсчёта; эта предельная скорость совпадает со скоростью света в пустоте c .

⁵Движение тел в области больших скоростей описывается специальной теорией относительности, созданной Эйнштейном в 1905 г. в работе “К электродинамике движущихся тел”. Для Эйнштейна отправной точкой для построения новой теории была проблема несогласованности уравнений механики и уравнений электродинамики. Дело в том, что уравнения механики (уравнения Ньютона) ковариантны относительно преобразований Галилея, а в случае уравнений электродинамики (уравнений Максвелла) ковариантность относительно преобразований Галилея нарушается. Нарушение ковариантности означает изменение вида уравнений при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую, а это соответствовало бы возможности выявить “абсолютное” движение и “абсолютную” систему отсчёта, что противоречит принципу относительности. Различные попытки “подправить” уравнения Максвелла так, чтобы они были ковариантны относительно преобразований Галилея, приводили к следствиям, отвергаемым экспериментом.

Лоренц предложил преобразования, названные впоследствии его именем, которые не изменяли уравнения Максвелла при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую. В работах Пуанкаре подчёркивалась необходимость распространить принцип относительности и на электромагнитные явления. Но только Эйнштейн показал, что преобразования Лоренца являются не просто удобным математическим приёмом, а имеют глубокий физический смысл и соответствуют новой картине мира при больших скоростях.

Первые следствия из этих постулатов:

1. Относительность одновременности. Если в нерелятивистской механике события, одновременные в одной инерциальной системе отсчёта, автоматически оказывались одновременными и в любых других инерциальных системах отсчёта, то теперь *одновременность становится относительным понятием*.

Пример: два световых сигнала, пришедших из середины релятивистского поезда к его концам A и B (рис. 21). В системе S' (поезд) эти события одновременны,

$$t'_A = t'_B = \frac{l'/2}{c},$$

где l' — длина поезда в его системе покоя. В системе S (перрон) свет, согласно второму постулату, движется по и против движения поезда с одной и той же скоростью c , поэтому он сперва достигает движущегося навстречу со скоростью V хвостового вагона B , а только потом убегающего головного вагона A , таким образом,

$$t_A = \frac{l/2}{c - V} > t_B = \frac{l/2}{c + V},$$

где l — длина поезда в системе S .

2. Поперечные размеры движущегося тела не изменяются. Это утверждение основано только на принципе относительности и изотропии пространства и потому справедливо и в релятивистской механике. Отсюда (как и в нерелятивистском случае) следует закон преобразования поперечных координат:

$$y = y', \quad z = z'.$$

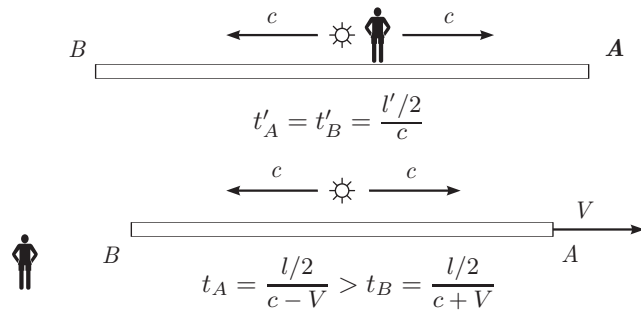


Рис. 21. Релятивистский поезд

5.2. Замедление хода движущихся часов

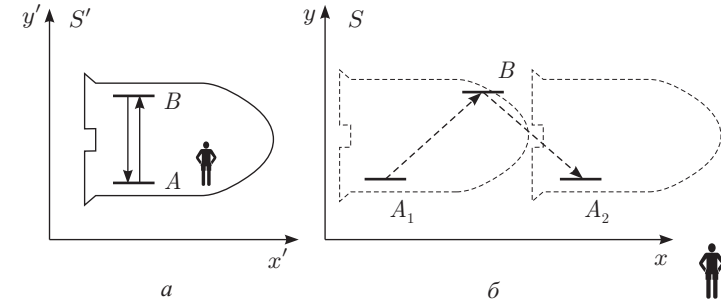


Рис. 22. Движение луча света между: a — неподвижными (в S' -системе) и b — движущимися (в S -системе) зеркалами, расположенными вдоль оси y'

Рассмотрим распространение светового сигнала между двумя неподвижными в S' -системе зеркалами, расположенными вдоль оси y' , плоскости которых ортогональны этой оси. Пусть в S' -системе распространение этого сигнала из точки A в точку B и обратно вдоль оси y' происходит за время $\Delta t'$, т. е. $y'_B - y'_A = \frac{1}{2} c \Delta t'$ (рис. 22, a).

В системе S этот же сигнал проходит путь из точки A_1 в точку B и обратно в точку A_2 (см. рис. 22, b) за время Δt , причём согласно теореме Пифагора

$$\left(\frac{1}{2} c \Delta t\right)^2 = (y_B - y_A)^2 + \left(\frac{1}{2} V \Delta t\right)^2.$$

Так как $y_B - y_A = y'_B - y'_A$, то

$$\left(\frac{1}{2} c \Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2} c \Delta t'\right)^2 + \left(\frac{1}{2} V \Delta t\right)^2,$$

отсюда следует, что

$$\Delta t' = \sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot \Delta t, \quad (5.1)$$

т. е. $\Delta t' < \Delta t$ — движущиеся часы идут медленнее покоящихся

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

раз.

Подчеркнем, что в S' -системе события, о которых идет речь, происходят в одной и той же точке A , а в системе S — в разных точках A_1 и A_2 .

5.3. Сокращение продольных размеров движущегося предмета

Рассмотрим тот же опыт, но с зеркалами, расположенными вдоль оси x' , плоскости которых ортогональны этой оси (рис. 23). В S' -системе $c\Delta t' = 2l'$, где $l' = x'_B - x'_A$ — длина стержня, на концах которого установлены неподвижные в этой системе зеркала. В S -системе

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2,$$

где

$$c\Delta t_{1,2} = l \pm V\Delta t_{1,2}.$$

Здесь l — длина движущегося стержня с зеркалами. Отсюда

$$\Delta t = \frac{l}{c - V} + \frac{l}{c + V} = \frac{2l}{c [1 - (V/c)^2]}$$

и с учетом (1) получим

$$l = \sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot l', \quad (5.2)$$

т. е. $l < l'$ — продольные размеры движущегося тела сокращаются в $\gamma(V)$ раз.

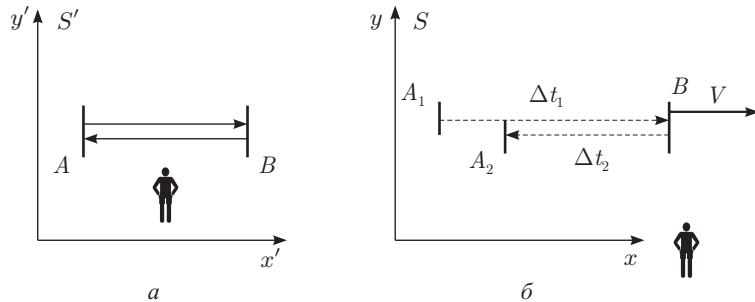


Рис. 23. Движение луча света между: *а* — неподвижными (в S' -системе) и *б* — движущимися (в S -системе) зеркалами, расположенными вдоль оси x'

Подчеркнем, что $l' = x'_B - x'_A$, где координаты концов стержня x'_A и x'_B могут быть измерены в один и тот же или разные моменты времени (ведь стержень покоится в S' -системе), а $l = x_B - x_A$, где координаты концов движущегося стержня x_A и x_B непременно должны быть измерены в один и тот же (в системе S) момент времени (см. § 4).

§ 6. Преобразования Лоренца. Релятивистские преобразования скорости

Пусть некоторому событию в S' -системе соответствуют координаты x', y', z' и время t' , а в системе S — координаты x, y, z и время t . Поперечные размеры и координаты не изменяются: $y' = y, z' = z$.

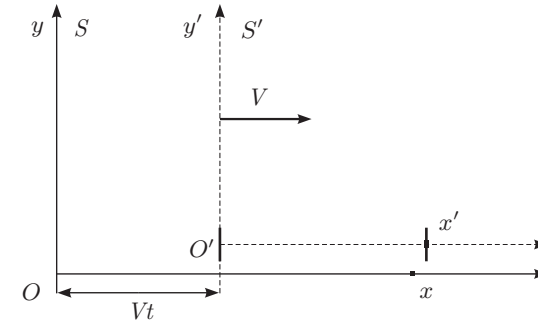


Рис. 24. К выводу преобразований Лоренца

Продольная координата x складывается из расстояния Vt до начала отсчёта O' системы S' и сокращенной длины движущегося отрезка $O'x'$ (рис. 24):

$$x = Vt + \sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot x',$$

откуда находим

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (6.1)$$

Обратное преобразование получается отсюда простыми заменами $x \leftrightarrow x', t \rightarrow t', V \rightarrow -V$ (см. (4.2)) и имеет вид

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Подставив это выражение в (1), найдём

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Обратное преобразование:

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

В итоге получаем прямые и обратные преобразования Лоренца:

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right), \quad (6.2a)$$

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \quad (6.2b)$$

Здесь

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

— так называемый *лоренц-фактор*. В нерелятивистском пределе при $V \ll c$ лоренц-фактор равен 1, а преобразования Лоренца (2) совпадают с преобразованиями Галилея (4.1).

Формулы (2) выписаны для частного выбора оси x вдоль направления скорости \mathbf{V} . Нетрудно получить аналогичные формулы при произвольном угле между осью x и скоростью \mathbf{V} . Для этого достаточно представить вектор \mathbf{r} в виде двух составляющих: \mathbf{r}_{\parallel} — вдоль вектора скорости \mathbf{V} и \mathbf{r}_{\perp} — в поперечном направлении:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}, \quad \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{V} \frac{(\mathbf{V}\mathbf{r})}{V^2}, \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel},$$

а затем переписать (2a) в виде

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \gamma\left(\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{V}t'\right), \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}'_{\perp}, \quad t = \gamma\left(t' + \frac{(\mathbf{V}\mathbf{r}')}{c^2}\right). \quad (6.2c)$$

Из равенств (2a) находим (здесь $\gamma = \gamma(V)$)

$$dx = \gamma(dx' + Vdt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)$$

и закон преобразования компонент скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ в системе S через компоненты скорости $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$ в S' -системе:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y/\gamma}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z/\gamma}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (6.3)$$

Обратное преобразование получается отсюда известной заменой $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$, $V \rightarrow -V$ и имеет вид

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y/\gamma}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z/\gamma}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \quad (6.4)$$

В предельном случае $V \ll c$ отсюда получаются формулы нерелятивистского преобразования скорости (4.3). Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда скорость $\mathbf{v}' = (c, 0, 0)$, что соответствует распространению света вдоль оси x' . Для этого случая из (3) мы найдём (при произвольном значении V), что скорость $\mathbf{v} = (c, 0, 0)$ в полном согласии со вторым постулатом Эйнштейна. Используя формулы (2c), нетрудно получить закон преобразования скоростей для произвольной ориентации вектора \mathbf{V} относительно оси x .

Взяв производную по времени от левой и правой частей уравнения (3), легко убедиться, что ускорение релятивистской частицы различно в разных инерциальных системах отсчёта (в отличие от нерелятивистского предела, в котором ускорение частицы имеет одно и то же значение в различных инерциальных системах отсчёта — см. (4.4)).

Задачи

6.1. В центре релятивистского поезда, движущегося со скоростью V относительно перрона, вспыхивает лампочка (см. рис. 21). Через какое время свет дойдет до концов A и B в системе поезда и в системе перрона? Длина поезда в его собственной системе отсчёта равна l_0 .

6.2. На концах того же релятивистского поезда одновременно в S' -системе (поезд) вспыхивают лампочки. Найти время сигналов от них, зарегистрированное одним наблюдателем в S -системе (перрон).

6.3. Что увидят различные наблюдатели релятивистского поезда, если взглянут (одновременно по своим часам) на часы, находящиеся напротив них на перроне? Предполагается, что пассажир, находящийся в середине поезда, увидел, что часы на перроне показывают то же время, что и его собственные часы.

И наоборот, что увидят различные наблюдатели, стоящие вдоль перрона, если взглянут (одновременно по своим часам) на часы, находящиеся напротив них в проходящем релятивистском поезде? Предполагается, что наблюдатель, находящийся напротив середины поезда, увидел, что часы на поезде показывают то же время, что и его собственные часы.

6.4. На концах движущегося со скоростью V релятивистского поезда установлены два мощных лазера, направленных к поверхности Земли. Вспышка этих лазеров оставляет на перроне два чётких следа. Найти расстояние между этими следами, если вспышки произошли одновременно в системе поезда (в системе перрона). Длина поезда в его системе покоя равна l_0 .

6.5. Длина стороны равностороннего треугольника в его собственной системе отсчёта S' равна a_0 . В системе S треугольник движется с релятивистской скоростью V вдоль одной из сторон. Найти периметр этого треугольника в системе S .

6.6. Родившийся в атмосфере Земли на высоте $h = 20$ км, мюон успевает до своего распада долететь до поверхности Земли, хотя его собственное время жизни τ таково, что величина $c\tau = 660$ м. Найти относительное отличие скорости мюона v от скорости света, т. е. величину $(c - v)/c$.

6.7. Зрители Земли являются свидетелями редкого зрелища: релятивистский неопознанный летающий объект (НЛО) пролетает сквозь движущийся навстречу релятивистский поезд. Предполагая, что скорости НЛО v и поезда V не изменяются в процессе пролёта, найти, за какое время t (в системе Земли) НЛО пролетит сквозь поезд? Длина поезда в его собственной системе равна l_0 .

6.8. Мимо маяра пролетает прямоугольная панель со скоростью V ,

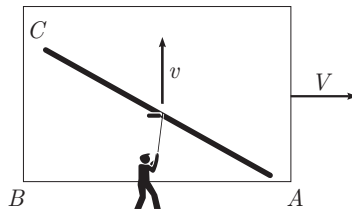


Рис. 25. К задаче 6.8

направление которой параллельно нижней кромке панели AB (рис. 25). Маяр двигает кистью со скоростью v в направлении, перпендикулярном направлению движения панели. Результатом работы маяра является линия AC на панели. Найти угол $\angle BAC$ для случая, когда:

- $v = V = 1$ м/с;
- $v = V = 0,8c$.

6.9. С Земли наблюдают за полётом двух ракет, скорости которых $v_1 = v_2 = 0,8c$, а угол между ними $\alpha = 60^\circ$. Найти скорость второй ракеты с точки зрения пилота первой ракеты.

§ 7. Интервал и собственное время; 4-векторы

Рассмотрим два события, одно из которых произошло в момент времени t_1 в точке с координатами \mathbf{r}_1 , а второе произошло в момент времени t_2 в точке с координатами \mathbf{r}_2 . В релятивистской механике расстояние между двумя пространственными точками $l_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, вообще говоря, изменяется при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую. При таком переходе изменяются также и разница $t_1 - t_2$ между двумя временными точками. Оказывается, однако, что существует комбинация из $t_1 - t_2$ и l_{12} , которая остается неизменной при преобразованиях Лоренца. Такой величиной является интервал. *Интервалом* s_{12} между двумя событиями (t_1, \mathbf{r}_1) и (t_2, \mathbf{r}_2) называется величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}. \quad (7.1)$$

Заметим, что квадрат интервала s_{12}^2 может быть и положительным, и отрицательным, соответственно, сам интервал s_{12} может быть вещественным или мнимым. Проверьте прямой подстановкой, что величина s_{12}^2 инвариантна относительно поворотов осей координат и преобразований Лоренца.

Два события, для которых $s_{12}^2 > 0$, называются *временнподобными*. Для этих событий найдется такая инерциальная система отсчёта S' , в которой они происходят в одной пространственной точке, но нет такой системы отсчёта S' , в которой бы они происходили одновременно (ибо если $t'_1 = t'_2$, то $s_{12}^2 = -(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)^2 < 0$). Более того, если второе событие произошло позже первого, $t_2 > t_1$, то это неравенство будет справедливо и в любой другой инерциальной системе отсчёта S' . Действительно, из неравенства $s_{12}^2 > 0$ следует неравенство $c(t_2 - t_1) > |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, а в системе S' получим

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma(V) \left[c(t_2 - t_1) - \frac{V}{c}(x_2 - x_1) \right] > 0.$$

Таким образом, если два события *временнподобны*, то одно из них является *абсолютно будущим* по отношению к другому.

Аналогично, два события, для которых $s_{12}^2 < 0$, называются *пространственнподобными*. Для этих событий найдется такая инерциальная система отсчёта S' , в которой они происходят одновременно, но нет такой системы отсчёта S' , в которой бы они происходили в одной пространственной точке. Таким образом, если два события *пространственнподобны*, то они являются *абсолютно удаленными*.

Наконец, два события называются *светоподобными*, если $s_{12}^2 = 0$.

Пусть двумя событиями, о которых шла речь, являются положение материальной точки в два близких момента времени (t, \mathbf{r}) и $(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$, при этом, конечно, $c dt > |d\mathbf{r}|$. Соответствующий времениподобный интервал

$$ds = \sqrt{(c dt)^2 - (d\mathbf{r})^2}.$$

Назовем *собственным временем* τ величину, элемент которой $d\tau$ определяется соотношением

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - (d\mathbf{r}/cdt)^2} \cdot dt = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \cdot dt. \quad (7.2)$$

Ясно, что $d\tau$ совпадает с обычным временем dt в системе отсчёта, в которой частица покоится (при $\mathbf{v} = 0$). С другой стороны, собственное время $d\tau$ удобно тем, что является инвариантом преобразований Лоренца.

В дальнейшем удобно от переменной t перейти к переменной $x_0 = ct$, тогда преобразования Лоренца примут более симметричный вид:

$$x_0 = \gamma \left(x'_0 + \frac{V}{c} x' \right), \quad x = \gamma \left(x'_0 + \frac{V}{c} x'_0 \right), \quad y = y', \quad z = z'. \quad (7.3)$$

Четырёхмерное множество пространственных координат и моментов времени называется *четырёхмерным пространством-временем*. Точка в этом пространстве задается *4-радиус-вектором*

$$x_\mu = (x_0, x, y, z) = (x_0, \mathbf{r}),$$

а “расстояние” между двумя точками — интервалом s_{12} . В отличие от привычного евклидова пространства, квадрат “длины” 4-радиус-вектора определяется соотношением

$$x_\mu^2 \equiv x_0^2 - \mathbf{r}^2$$

и является инвариантом преобразований Лоренца. Кроме этого 4-радиус-вектора, в дальнейшем мы будем рассматривать и другие 4-векторы. Набор величин

$$A_\mu = (A_0, A_x, A_y, A_z) = (A_0, \mathbf{A})$$

называется *4-вектором*, если при вращениях и преобразованиях Лоренца величины A_μ преобразуются так же, как и компоненты x_μ , т. е. при преобразованиях Лоренца

$$A_0 = \gamma \left(A'_0 + \frac{V}{c} A'_x \right), \quad A_x = \gamma \left(A'_x + \frac{V}{c} A'_0 \right), \\ A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z. \quad (7.4)$$

Квадрат “длины” 4-вектора строится аналогично квадрату 4-радиус-вектора

$$A_\mu^2 \equiv A_0^2 - \mathbf{A}^2 \quad (7.5)$$

и является инвариантом преобразований Лоренца. Аналогично, величина

$$A_\mu B_\mu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (7.6)$$

может быть названа скалярным произведением 4-векторов A_μ и B_μ , эта величина также является инвариантом преобразований Лоренца.

Приведем пример. Так как x_μ и dx_μ являются 4-векторами, а $d\tau$ — инвариант преобразований Лоренца, то отношение

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \quad (7.7a)$$

является 4-вектором. Величина u_μ называется *4-скоростью*, с учетом (2) компоненты u_μ имеют вид

$$u_\mu = (u_0, \mathbf{u}), \quad u_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}; \quad (7.7b)$$

4-скорость окажется полезной для определения 4-импульса частицы в релятивистской динамике. Квадрат 4-скорости является инвариантом преобразований Лоренца и равен

$$u_\mu^2 = u_0^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{c^2}{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - \frac{\mathbf{v}^2}{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = c^2. \quad (7.8)$$

Задачи

7.1. Нестабильная частица распадается в состоянии покоя за время $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ с. Двигаясь с большой скоростью, эта частица пролетела от места образования до места распада расстояние $l = 36$ км. За какое время t она пролетела этот путь?

7.2. На экране осциллографа луч движется от левого конца экрана к правому со скоростью $v = 0,1$ с. Пусть начало движения происходит в момент времени t_1 в точке с координатами \mathbf{r}_1 , а конец движения — в момент времени t_2 в точке с координатами \mathbf{r}_2 . Есть ли такая инерциальная система отсчёта S' , в которой эти события одновременны (одноместны)?

ГЛАВА II

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 8. Законы динамики Ньютона

Всюду ниже рассматривается движение тел в инерциальной системе отсчёта. В такой системе свободная частица движется с постоянной скоростью: $\mathbf{v} = \text{const}$. А если $\mathbf{v} \neq \text{const}$, то частица не является свободной, она испытывает воздействие других тел. *Степень воздействия других тел на данное называется силой*. Мы обсудим два возможных способа количественного определения этого понятия, первый (в этом разделе) — более простой и потому удобный для начального изложения, второй — более абстрактный, но и более глубокий, будет рассмотрен в § 10.

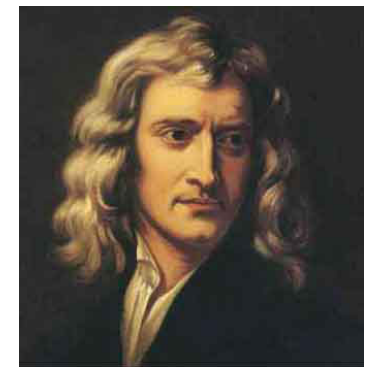


Рис. 26. Исаак Ньютон (1643–1727)

8.1. Определение силы

Степень воздействия различных тел на данное можно определить, сравнивая её со степенью воздействия некоторой эталонной силы. В качестве такого эталона силы можно выбрать, например, пружинку, растянутую на определённую длину. Степень воздействия такой пружинкой назовем эталоном силы F_0 . Указав еще и направление воздействия, получим вектор эталонной силы \mathbf{F}_0 . Если на тело в одном и том же направлении действует n таких пружин, то такое воздействие отвечает силе $n\mathbf{F}_0$. Имея набор всевозможных пружин и выбирая их таким образом, чтобы при действии их в одном направлении результат совпадал с действием эталонной пружинки, мы сможем определить дробные части от \mathbf{F}_0 . В итоге мы получаем возможность измерять произвольную силу через эталонную. Таково определение силы в рамках первого способа.

8.2. Второй закон Ньютона. Масса

Сравнивая воздействие различных по величине и направлению сил \mathbf{F}_i на одну и ту же частицу, найдём, что эти силы приводят частицу к движению с разными ускорениями \mathbf{a}_i , причём векторы ускорений \mathbf{a}_i имеют то же направление, что и векторы сил \mathbf{F}_i , а отношение длин этих векторов $|\mathbf{F}_i|/|\mathbf{a}_i|$ имеет одно и то же значение, не зависящее от номера i , иными словами,

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{a}. \quad (8.1)$$

Утверждение о том, что **ускорение, с которым движется частица, пропорционально действующей на неё силе, составляет содержание второго закона Ньютона**. Отсюда следует, что отношение

$$\frac{|\mathbf{F}|}{|\mathbf{a}|}$$

не зависит ни от силы, ни от ускорения или скорости частицы и потому является характерной для данной частицы константой, называемой *массой*. Естественно, что значение этой константы должно быть одним и тем же в различных инерциальных системах отсчёта. При таком определении масса выступает как *мера инерции*, т.е. мера способности тела противиться попыткам изменить его состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Обозначив эту константу через m , можем вместо (1) записать $\mathbf{F} = k m \mathbf{a}$, где коэффициент k зависит от соглашения относительно выбора единиц измерения массы и силы. В СИ этот коэффициент равен 1, так что соотношение (1) в СИ принимает форму

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \ddot{\mathbf{r}}. \quad (8.2)$$

То обстоятельство, что сила оказалась пропорциональна именно второй производной по времени от \mathbf{r} , есть экспериментальный факт. С логической точки зрения, могли бы быть и другие соотношения между силой и кинематическими характеристиками движения, например:

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + c_1 \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3},$$

где c_1 — некоторая константа. Такую гипотетическую “причинную или несимметричную механику” пытался развивать (правда, без успеха) известный астроном Козырев.

8.3. Третий закон Ньютона

Обобщением экспериментальных данных является и **третий закон Ньютона: при взаимодействии двух частиц i и k имеет место равенство сил действия и противодействия**

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}. \quad (8.3)$$

Здесь \mathbf{F}_{ik} — сила, с которой на частицу i действует частица k .

Кроме того, справедлив также **закон независимости действия сил: сила \mathbf{F}_{ik} , с которой частица k действует на частицу i , не зависит от присутствия других частиц**. В нерелятивистской механике эта сила зависит только от расстояния $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ между частицами. Если взаимодействующие тела не являются точечными, то силу их взаимодействия можно найти, разбив каждое тело на малые (почти точечные) участки и используя закон независимости действия сил для этих малых участков.

8.4. Уравнения Ньютона и принцип относительности

Рассмотрим систему из N частиц, которые взаимодействуют только друг с другом, такую систему частиц называют *замкнутой*. Для неё справедливы уравнения движения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k); \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (8.4)$$

Эти уравнения удовлетворяют принципу относительности — они ковариантны относительно преобразований Галилея. Действительно, при переходе в другую инерциальную систему отсчёта ускорения и расстояния между частицами не изменяются

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}'_i, \quad \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k = (\mathbf{r}'_i + \mathbf{V}t) - (\mathbf{r}'_k + \mathbf{V}t) = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k,$$

поэтому из (4) следуют уравнения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k), \quad (8.5)$$

т.е. в новой системе отсчёта уравнения движения (5) в новых переменных имеют точно такой же вид, как и старые уравнения движения (4) в старых переменных.

8.5. Область применимости законов Ньютона

Область применимости обсуждаемых здесь законов динамики охватывает всю нерелятивистскую классическую механику. При переходе в релятивистскую область приходится учитывать наличие полей и запаздывание взаимодействия. Тот факт, что в механике Ньютона силы взаимодействия между частицами зависят лишь от их взаимного расстояния, означает, что любое смещение одной частицы мгновенно изменяет силу её воздействия на другую частицу. Это необходимо предполагает бесконечно большую скорость распространения взаимодействий. В релятивистской механике, напротив, стопроцентно учитывается тот факт, что в природе нет взаимодействий, распространяющихся со скоростью больше скорости света в пустоте. Поэтому уравнения Ньютона непременно должны быть модифицированы в области больших скоростей.

С другой стороны, в квантовой механике понятие траектории частицы теряет свой точный смысл. Описание движения частиц приобретает вероятностный характер. Кроме того, в квантовой механике возможны так называемые обменные взаимодействия, не сводящиеся к простым парным силам между частицами.

8.6. Понятие об алгоритме численного решения уравнений движения

В этом разделе мы коротко обсудим, как можно численно решать уравнения Ньютона с помощью электронных вычислительных машин (ЭВМ). Развитие вычислительной техники неразрывно связано с её использованием в сложных технических расчетах и научных исследованиях. За точку отсчёта эры ЭВМ принято считать созданную в Пенсильванском университете в 1945 г. электронную вычислительную машину ENIAC; её параметры: общий вес 30 т, 18 тыс. электронных ламп, 5 тыс. операций в секунду. Не случайно её первым применением был атомный проект США. Первой ЭВМ, установленной в НГУ, была машина М 220, она занимала все левое крыло второго этажа главного корпуса. Одним из самых значимых её применений было моделирование физических, химических и экономических процессов в учебных целях. Хотя современные ЭВМ по всем параметрам многократно превосходят своих предшественниц, а успехи вычислительной математики впечатляющие, основные принципы решения дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ остались прежними.

Рассмотрим следующую модельную задачу: рассчитать движение снаряда массы m , вылетевшего под углом α к горизонту, если на снаряд помимо силы тяжести mg действует сила трения, пропорциональная скорости снаряда: $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -k\mathbf{v}$ (здесь k — положительная константа, характеризующая интенсивность трения). Предполагается, что заданы определённые начальные значения координат \mathbf{r}_0 и скорости \mathbf{v}_0 . Наша модельная задача является в определённом смысле очень простой. Действительно, уравнение движения для нашего случая имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k\mathbf{v} + m\mathbf{g} \quad (8.6)$$

и является уравнением первого порядка относительно переменной $\mathbf{v}(t)$, т. е. более простым, чем типичное уравнение Ньютона — уравнение второго порядка относительно переменной $\mathbf{r}(t)$. Уравнение (6) имеет точное аналитическое решение

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-kt/m} + \frac{m\mathbf{g}}{k} (1 - e^{-kt/m}), \quad (8.7)$$

в чём можно убедиться прямой подстановкой выражения (7) в уравнение (6).

Но на этом простом примере удобно обсудить основные идеи того, как можно численно решить уравнение Ньютона в более сложных случаях. Выберем начало декартовой системы координат в начале траектории, ось x направим по горизонтали, а ось y — по вертикали вверх в плоскости векторов \mathbf{g} и \mathbf{v}_0 . Движение снаряда будет происходить в плоскости xy с начальными данными $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ и $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$.

Запишем уравнения движения снаряда, введя упрощённые обозначения $v_x = U$, $v_y = V$:

$$m \frac{dU}{dt} = -kU, \quad m \frac{dV}{dt} = -kV - mg. \quad (8.8)$$

Численное решение этого уравнения предполагает замену непрерывной задачи дискретной, или, как говорят, требует дискретизации задачи. Для этого разобьём период времени T , на котором мы хотим иметь решение, на N отрезков размером $\tau = T/N$. Такое разбиение называется *сеткой*. В каждой i -й точке этой сетки определим дискретные сеточные функции U_i , V_i . Будем предполагать, что U и V — гладкие функции, т. е. в любой точке можно найти их производные по времени. Теперь заменим производ-

ные в уравнениях (8) их конечными разностями:

$$\frac{dU}{dt} \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{\tau}, \quad \frac{dV}{dt} \approx \frac{V_{i+1} - V_i}{\tau}.$$

т. е. аппроксимируем производные их линейными приближениями. Такая аппроксимация тем точнее, чем меньше шаг сетки τ . В результате, заменив в исходных уравнениях производные на их конечные разности, мы получим такие дискретные (или *разностные*) уравнения:

$$m \frac{U_{i+1} - U_i}{\tau} = -kU_i, \quad m \frac{V_{i+1} - V_i}{\tau} = -kV_i - mg. \quad (8.9)$$

Эти уравнения можно представить в виде алгоритма расчета скорости на следующем $(i+1)$ -м шаге, если известно значение скорости на предыдущем i -м шаге:

$$U_{i+1} = U_i - \frac{\tau k}{m} U_i, \quad V_{i+1} = V_i - \frac{\tau k}{m} V_i - \tau g. \quad (8.10)$$

На нулевом шаге мы используем начальные значения скоростей $U_0 = v_0 \cos \alpha$ и $V_0 = v_0 \sin \alpha$, затем расчёт по формулам (10) определит скорости во всех оставшихся точках разностной сетки. Зная скорости $U(t) = dx/dt$ и $V(t) = dy/dt$, далее можно рассчитать зависимость координат x и y от времени, т. е. найти траекторию снаряда.

Естественно, возникает вопрос о точности полученного решения. В общем случае погрешности, связанные с заменой производных на конечные приращения, могут нарастать с каждым шагом, особенно если шаг сетки очень большой. Предложенная схема, наверное, самая простая, но не самая эффективная. Результат численного расчёта может сильно отличаться от точного (7), если шаг сетки выбран недостаточно малым. В этом случае говорят о неустойчивости разностной схемы. Для выбранной схемы расчётов, называемой *явной схемой*, нужно взять такое число точек сетки N , чтобы её шаг удовлетворял условию:

$$\frac{\tau k}{m} \ll 1. \quad (8.11)$$

Уменьшая шаг сетки, мы увеличиваем точность численного расчета. Однако вряд ли стоит загружать ЭВМ перемалыванием чисел, если очередное уменьшение шага уточняет результат, но превышает необходимую нам точность, или даёт точность, превышающую ту, с которой мы знаем константы g , m и k , входящие в уравнение.

Для решения таких задач придумано много хороших устойчивых и более точных схем. Наша схема аппроксимирует точное решение с ошибкой пропорциональной первой степени параметра τ . Про такую схему говорят, что она *первого порядка аппроксимации*. А вот, к примеру, такая схема

$$U_{i+1} = U_i - \frac{\tau k}{m} \frac{U_i + U_{i+1}}{2}, \quad V_{i+1} = V_i - \frac{\tau k}{m} \frac{V_i + V_{i+1}}{2} - \tau g \quad (8.12)$$

называется *неявной схемой*, поскольку $(i+1)$ -е значение входит в правую часть схемы. Алгоритм определения U_{i+1} и V_{i+1} через их значения на предыдущем шаге очевиден и отличается от (10). Эта схема имеет второй порядок аппроксимации, её ошибка аппроксимации пропорциональна τ^2 — квадрату шага сетки. В настоящее время существует множество пакетов, реализующих решение математических задач на персональных компьютерах. Некоторые из таких пакетов дают решение и в аналитической форме, если оно существует. Наиболее распространенными являются *Mathematica*, *MatLab*, *MathCad*, *Maple*. Здесь полезно заметить, что их эффективное применение не освобождает студента от необходимости знать основы вычислительной математики (хотя бы для того, чтобы выбирать ту или иную схему расчёта с ясным пониманием её сильных и слабых сторон).

Задачи

8.1. На гладком горизонтальном столе находятся два тела, соединённых нитью. Третье тело подвешено на нити через гладкий блок (рис. 27). Найти ускорение тел и натяжения нитей, если массы тел равны $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг и $m_3 = 3$ кг, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

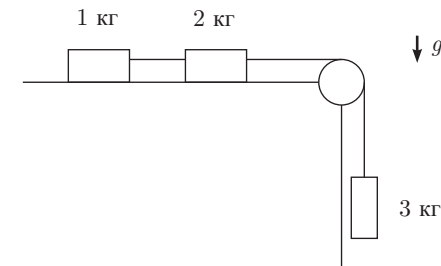


Рис. 27. К задаче 8.1

8.2. Система трёх тел, изображенная на рис. 28, находится на гладком горизонтальном столе. Постоянная сила F приложена по направлению нити к одному из тел массы m . Найти ускорение тел системы. Массой лёгкого блока пренебречь.

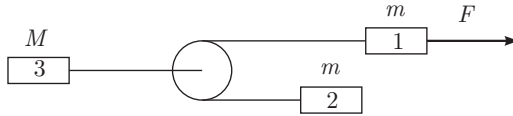


Рис. 28. К задаче 8.2

8.3. На небольшую шайбу массы m , лежащую на гладком горизонтальном столе, в момент времени $t_0 = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $F = \beta t$, где β — постоянная. Направление этой силы всё время составляет угол α с горизонтом (рис. 29). Найти:

- скорость шайбы в момент отрыва от стола;
- путь, пройденный шайбой к этому моменту.

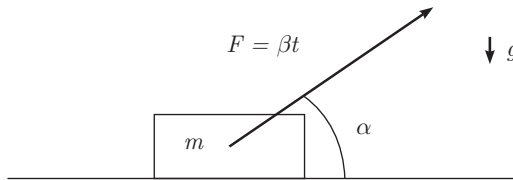


Рис. 29. К задаче 8.3

8.4. Шарик падает без начальной скорости в некоторой сплошной среде, в которой сила сопротивления пропорциональна скорости шарика $F_{\text{сопр}} = -kv$. Найти зависимость от времени скорости шарика, ускорения и пройденного пути. Рассмотреть подробнее предельные случаи, когда время t мало или велико по сравнению с характерным временем $\tau = m/k$.

8.5. В условиях предыдущей задачи рассмотреть такой вариант: шарик брошенный вертикально вверх со скоростью v_1 , вернулся в начальную точку со скоростью v_2 . Найти время t его движения.

§ 9. Импульс

Величину

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$$

называют *импульсом* i -й частицы. Покажем, что у замкнутой системы частиц полный импульс сохраняется.

9.1. Закон сохранения импульса у замкнутой системы тел

Полная сила \mathbf{F} , действующая на замкнутую систему частиц, может быть выражена через силы взаимодействия пар частиц:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_i \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}.$$

Перепишем это выражение в симметричном виде

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \sum_{i,k; i \neq k} (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki})$$

и используя третий закон Ньютона (8.3), найдём, что полная сила равна нулю:

$$\mathbf{F} = 0.$$

Это же соотношение можно переписать в виде (см. (8.4))

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = 0,$$

откуда следует **закон сохранения полного импульса замкнутой системы частиц**:

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{const.} \quad (9.1)$$

Если система частиц не является замкнутой и на неё действует внешняя сила

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = \sum_i \mathbf{F}_{i \text{ внеш}},$$

то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}}, \quad (9.2a)$$

т. е. **скорость изменения полного импульса системы частиц равна сумме внешних сил, действующих на эти частицы.**

9.2. Центр масс

Определим радиус-вектор \mathbf{R} центра масс (иначе центра инерции) произвольной системы частиц соотношением

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad M = \sum_i m_i, \quad (9.3a)$$

тогда скорость движения центра масс

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (9.3b)$$

Если система частиц замкнута, то её полный импульс \mathbf{P} и, следовательно, скорость центра масс \mathbf{V} сохраняются. Если система частиц не является замкнутой, то скорость движения центра масс изменяется согласно (2a)

$$M\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}}. \quad (9.2b)$$

Соотношения (2)–(3) позволяют рассматривать поступательное движение системы частиц как движение одной частицы с массой $M = \sum_i m_i$ и скоростью \mathbf{V} . Это означает, что в нерелятивистской механике справедлив закон аддитивности масс — масса сложного тела равна сумме масс его частей. Заметим, что это утверждение является прямым следствием законов Ньютона. В релятивистской механике уравнения Ньютона неприменимы и, как будет показано, закон аддитивности масс отсутствует.

9.3. Задача двух тел

Рассмотрим замкнутую систему тел, состоящую из двух частиц, сила взаимодействия которых зависит лишь от взаимного расстояния между частицами (так называемая задача двух тел):

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Уравнения движения

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (9.4)$$

можно существенно упростить, если ввести вместо переменных \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 новые переменные — радиус-вектор центра масс

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

и радиус-вектор относительного расстояния

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

В этих переменных уравнения (4) разделяются:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (9.5)$$

Величину

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (9.6)$$

называют *приведённой массой*. Отметим, что при $m_2 \gg m_1$ приведённая масса почти совпадает с массой лёгкой частицы, $m \approx m_1$.

Таким образом, задача двух тел сводится к равномерному и прямолинейному движению центра масс системы

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t$$

и к движению одной частицы с приведённой массой m под действием силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Задачи

9.1. Артиллеристы стреляют из пушки так, чтобы ядро массы m попало в неприятельский лагерь. На вылетевшее из пушки ядро садится верхом барон Мюнхгаузен, масса которого $5m$. Из-за этого ядро не долетает до цели. Считая посадку барона на ядро абсолютно неупругим ударом, найти, какую часть пути до неприятельского лагеря ему придётся пройти пешком?

9.2. Взяв за конец нить из плоского клубка на столе, начинают поднимать её с постоянной скоростью v по вертикали вверх. Линейная плотность нити ρ . Найти зависимость силы, приложенной к концу нити, от высоты h поднятой части нити. Ускорение свободного падения равно g .

9.3. Платформа массы m_0 начинает двигаться вправо под действием постоянной горизонтальной силы F (рис. 30). Из неподвижного бункера на неё высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ кг/с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки.

9.4. Номерок для гардероба выполнен из однородной тонкой пластины в форме диска радиуса a , в котором вырезано отверстие в форме круга радиуса $a/2$, центр которого находится на расстоянии $a/2$ от края номерка (рис. 31). Найти координаты центра масс номерка.

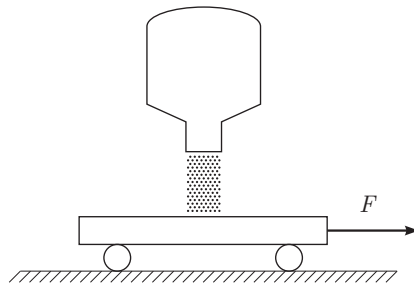


Рис. 30. К задаче 9.3

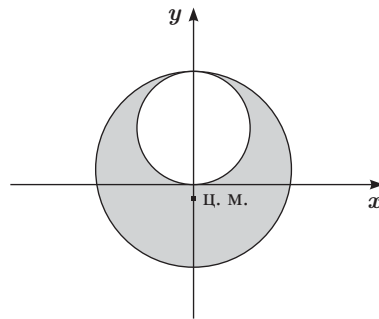


Рис. 31. К задаче 9.4

§ 10. Сила как мера скорости изменения импульса

Помимо того подхода к законам динамики, который изложен в § 8 и 9, определенные преимущества может представлять альтернативный подход, основанный на законе сохранения импульса. При этом первичным считается следующее обобщение опытных данных: *каждой частице можно приписать определенную константу m_i , называемую массой, так что для замкнутой системы частиц*

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{const.}$$

Величину m_i можно определить, исследуя взаимодействие i -й частицы с частицей, масса которой m_0 принята за эталонную. Пусть в некоторый момент времени скорости частиц равны \mathbf{v}_i и \mathbf{v}_0 , а через некоторое время

эти же скорости оказались равными \mathbf{v}'_i и \mathbf{v}'_0 . Тогда из закона сохранения импульса следует равенство

$$m_i \mathbf{v}_i + m_0 \mathbf{v}_0 = m_i \mathbf{v}'_i + m_0 \mathbf{v}'_0,$$

позволяющее определить массу i -й частицы:

$$m_i = m_0 \frac{|\mathbf{v}'_0 - \mathbf{v}_0|}{|\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i|}.$$

В этом подходе сила \mathbf{F}_i , действующая на i -ю частицу, *определяется* как производная по времени от импульса частицы:

$$\mathbf{F}_i \equiv \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (10.1)$$

Содержательным утверждением про так определенную силу является следующее обобщение опытных данных: функция \mathbf{F}_i зависит лишь от координат (и, быть может, скоростей) взаимодействующих частиц, т. е.

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots). \quad (10.2)$$

Несмотря на кажущуюся простоту, это утверждение является достаточно сильным. Именно оно позволяет рассматривать (2) как уравнение движения. Соотношения (1)–(2) эквивалентны второму закону Ньютона. Из них следует, что для нахождения движения системы частиц достаточно знать силы $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и начальное состояние системы частиц, т. е. начальные значения координат и скоростей частиц.

Рассмотрим замкнутую систему из двух взаимодействующих частиц. Для неё из сохранения импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}$ следует

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{F}_{21},$$

т. е. третий закон Ньютона.

§ 11. Работа. Мощность. Кинетическая энергия. Связь работы силы с изменением кинетической энергии

Рассмотрим частицу, перемещающуюся под действием силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ из точки 1 в точку 2 вдоль некоторого пути l , элемент которого — вектор $d\mathbf{l}$ (рис. 32).

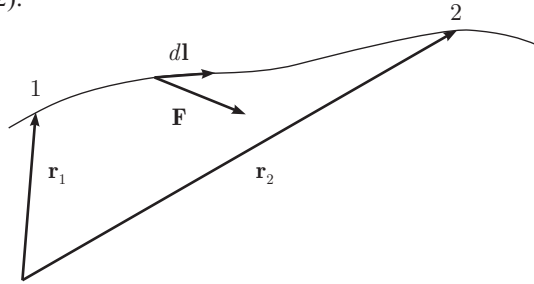


Рис. 32. Траектория частицы, движущейся из точки 1 в точку 2

Элементарной работой силы \mathbf{F} называется скалярное произведение силы на вектор перемещения $d\mathbf{l}$:

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{l}.$$

Пусть α — угол между векторами силы и перемещения, тогда

$$\mathbf{F}d\mathbf{l} = F \cos \alpha dl = F_l dl,$$

где $F_l = F \cos \alpha$ — проекция вектора силы на направление вектора $d\mathbf{l}$.

Работой силы \mathbf{F} на пути l из точки 1 в точку 2 называется величина

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{l} = \int_1^2 F_l dl. \quad (11.1)$$

При заданной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ работа A_{12} зависит, вообще говоря, не только от координат точек 1 и 2, но и от вида пути l .

Мощность определяется работой силы в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v}.$$

Назовем кинетической энергией частицы величину

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2.$$

Так как

$$\mathbf{F}d\mathbf{l} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{l} = m d\mathbf{v} \frac{d\mathbf{l}}{dt} = m \mathbf{v} d\mathbf{v} = d \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) = dK,$$

то, интегрируя это соотношение, получаем

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{l} = \int_1^2 dK = K_2 - K_1, \quad (11.2)$$

т. е. изменение кинетической энергии частицы равно работе действующей на частицу силы:

$$\frac{m \mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m \mathbf{v}_1^2}{2} = A_{12}. \quad (11.3)$$

Это соотношение весьма полезно, так как связывает локальные характеристики частицы (скорости в конце и начале траектории) с интегральной характеристикой (работой силы на данном пути).

В Международной системе единиц СИ работа и кинетическая энергия измеряется в джоулях (1 Дж = 1 Н · м), а мощность — в ваттах (1 Вт = 1 Дж/с).

Задачи

11.1. Тело массы m очень медленно втащили на горку, действуя с некоторой переменной по величине силой. Эта сила в каждой точке направлена по касательной к траектории (рис. 33 — примерно так действует маленький человек, который неторопливо втаскивает санки на горку). Найти работу этой силы, если высота горки h , длина основания a и коэффициент трения μ .

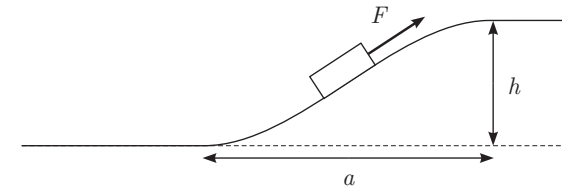


Рис. 33. К задаче 11.1

11.2. Шарик падает без начальной скорости в поле тяжести. Предполагая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шарика, $F_{\text{сопр}} = -\alpha v^2$, найти зависимость скорости от величины пройденного пути.

§ 12. Потенциальные силы. Потенциальная энергия

Если во всем пространстве задана скалярная функция $f(\mathbf{r})$ или векторная функция $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, то говорят о *скалярном или векторном поле*. Примеры — скалярное поле температур газа $T(\mathbf{r})$, векторное поле скоростей жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и т. д. В данном случае поле — чисто математическое понятие.

12.1. Определения

Пусть задано поле силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Если работа этой силы по *любому замкнутому* пути равна нулю, то такая сила называется *потенциальной (или консервативной)*. Для полей таких сил работа

$$\int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l}$$

не зависит от вида пути (докажите!), а зависит лишь от координат точки 1 и точки 2. Поэтому для них можно ввести понятие *потенциальной энергии* точки 2 по сравнению с потенциальной энергией точки 1, определив

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = - \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{l}. \quad (12.1)$$

Отсюда

$$dU = -\mathbf{F} d\mathbf{l}, \quad F_l = -\frac{\partial U}{\partial l},$$

в частности,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Три последних соотношения можно записать в компактном виде

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (12.2)$$

введя векторный дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Из определения вытекает, что $U(\mathbf{r})$ и $U(\mathbf{r}) + \text{const}$ соответствуют одному и тому же полю сил, поэтому эти два вида потенциальной энергии физически эквивалентны.

Рассмотрим несколько содержательных примеров.

В качестве первого примера рассмотрим силу трения. Эта сила обычно направлена противоположно скорости, поэтому её работа по любому замкнутому контуру отрицательна:

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{F} \mathbf{v} dt < 0.$$

Это означает, что сила трения не является потенциальной.

12.2. Поле одномерной силы

В качестве второго примера рассмотрим поле одномерной силы вида

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (f(x), 0, 0). \quad (12.3)$$

Пусть имеется некоторый замкнутый контур l . Проведем две плоскости, ортогональные оси x и пересекающие её в точках x и $x + dx$ соответствен-

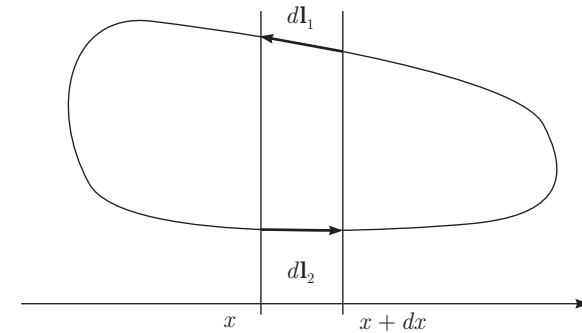


Рис. 34. Работа одномерной силы вдоль замкнутого пути

но (рис. 34). Пусть эти плоскости выделяют на нашем контуре два участка dl_1 и dl_2 . Суммарная работа силы (3) на этих двух участках равна нулю:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1) dl_1 + \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) dl_2 = 0,$$

так как

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1) dl_1 = f(x) dx,$$

а

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2) dl_2 = -f(x) dx.$$

Отсюда следует, что и полная работа силы (3) на всём замкнутом контуре также равна нулю

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = 0.$$

Рассуждения такого рода легко повторить и для произвольного замкнутого контура, в котором две указанные плоскости выделяют не два, а произвольное (но обязательно чётное!) число участков типа $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$. В итоге мы докажем, что данное поле сил является потенциальным.

Таковыми являются, например, поле тяжести вблизи поверхности Земли, где (при выборе оси x вдоль вертикали вверх)

$$f(x) = -mg, \quad U(x) - U(a) = mg(x - a),$$

и поле сил одномерного линейного осциллятора, у которого

$$f(x) = -kx, \quad U(x) - U(a) = \frac{1}{2}k(x^2 - a^2).$$

Обычно выбирают $a = 0$ и $U(a) = 0$.

12.3. Центральное поле

В *центральной поле* сила $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ направлена по или против радиус-вектора

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \parallel \pm \mathbf{r},$$

поэтому векторная функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где скалярная функция $f(r)$ зависит только от модуля радиус-вектора $r \equiv |\mathbf{r}|$. Так как $\mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = f(r) dr$, то для любого замкнутого контура можно повторить предыдущее доказательство с единственным изменением — заменой двух плоскостей, пересекающих ось x в точках x и $x + dx$, на две сферы с радиусами r и $r + dr$. В этом случае имеем (рис. 35)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{l}_1 + \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{l}_2 = f(r)dr - f(r)dr = 0,$$

откуда следует, что

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = 0,$$

т. е. центральное поле является потенциальным.

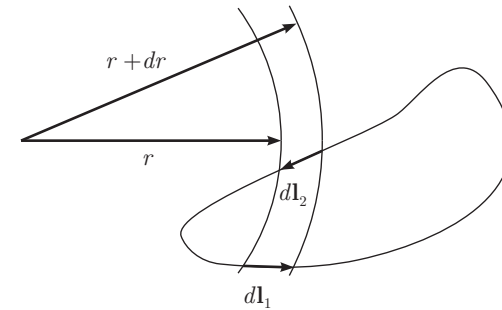


Рис. 35. Работа центральной силы вдоль замкнутого пути

Кулоновское поле

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{a}) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{a};$$

обычно выбирают $a = \infty$ и $U(\mathbf{a}) = 0$.

Изотропный гармонический осциллятор

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}, \quad U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2 - \frac{1}{2}k\mathbf{a}^2;$$

обычно выбирают $a = 0$ и $U(\mathbf{a}) = 0$.

Задачи

12.1. Являются ли потенциальными поля сил:

а) $\mathbf{F}(x, y) = (\alpha y, 0);$

б) $\mathbf{F}(x, y) = (\alpha x, \beta y).$

12.2. Найти потенциальную энергию для полей сил:

а) $\mathbf{F}(x, y) = (\alpha/x^2, 0);$

б) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^2 + b^2}.$

12.3. Найти силу $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, соответствующую потенциальной энергии

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}.$$

Дать графики зависимости от r потенциальной энергии $U(r)$ и радиальной составляющей силы $F_r(r)$.

12.4. Какое натяжение F должен выдерживать приводной ремень генератора мощностью $N = 1$ кВт, у которого радиус шкива $r = 0,1$ м, а число оборотов $n = 10^3$ об/мин?

§ 13. Закон сохранения энергии

Если частица движется под действием произвольной силы, то изменение её кинетической энергии равно работе этой силы (11.3):

$$K_2 - K_1 = A_{12}.$$

Если же эта сила является потенциальной, то дополнительно её работа может быть выражена через изменение потенциальной энергии частицы (12.1):

$$K_2 - K_1 = A_{12} = -(U_2 - U_1).$$

Из последнего соотношения видно, что в этом случае *полная энергия* частицы

$$E = K + U$$

сохраняется:

$$E_2 = K_2 + U_2 = K_1 + U_1 = E_1.$$

Рассмотрим теперь замкнутую систему из N частиц, взаимодействующих друг с другом через потенциальные силы

$$\mathbf{F}_{ik} = -\frac{\partial U_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Энергия этой системы

$$E = K + U, \quad K = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2, \quad U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i,k; i < k} U_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \quad (13.1)$$

сохраняется, так как с учетом (8.4)

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \left(\frac{dK}{d\mathbf{v}_i} \dot{\mathbf{v}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \sum_i \mathbf{v}_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i) = 0.$$

Рассмотрим теперь некоторую подсистему из s частиц, которая входит в обсуждаемую систему, т.е. $s < N$. Потенциальная энергия этой подсистемы U_s зависит уже не только от взаимных расстояний между частицами этой подсистемы $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ (при $i \leq s$ и $k \leq s$), но и от взаимных расстояний между частицами подсистемы и остальными частицами замкнутой системы: $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ (при $i \leq s$, но $k > s$). Рассмотрим случай, когда остальные частицы играют роль внешних условий, в которых происходит движение рассматриваемой подсистемы, т.е. когда величины \mathbf{r}_k при $k > s$ являются известными заданными функциями времени $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t)$, $k = s+1, \dots, N$. Тогда потенциальная энергия U_s представляет собой функцию координат частиц подсистемы и времени:

$$U_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s, t) = \sum_{i < k; i, k=1}^s U_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) + \sum_{i=1}^s \sum_{k=s+1}^N U_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k(t)).$$

При движении частиц подсистемы её энергия $E_s = K_s + U_s$, $K_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{v}_i^2$, вообще говоря, не сохраняется, так как

$$\frac{dE_s}{dt} = \sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i) + \frac{\partial U_s}{\partial t} = \frac{\partial U_s}{\partial t}. \quad (13.2)$$

И только в том случае, если $\partial U_s / \partial t = 0$, т.е. если внешние условия стационарны, энергия E_s сохраняется.

Задачи

13.1. Санки массы m скатываются с горки и, пройдя по горизонтальной поверхности путь a , останавливаются. Найти работу сил трения на всём пути, если горка представляет собой наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, а коэффициент трения всюду равен μ .

13.2. Ко дну цилиндрической гильзы массы M , находящейся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен пружинка жесткости k , выступающая на расстояние x_0 от края гильзы (рис. 36). Шарик массы m налетает на пружинку. Найти минимальную скорость шарика, необходимую для того, чтобы правый край шарика долетел до отверстия гильзы.

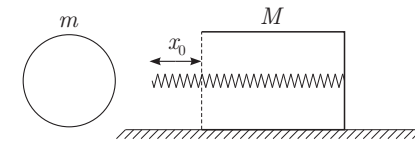


Рис. 36. К задаче 13.2

13.3. Небольшое тело начинает соскальзывать с вершины закреплённой полусферы радиуса R (рис. 37). Найти высоту h , на которой тело оторвётся от полусферы.

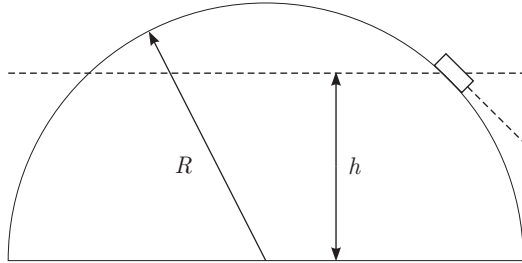


Рис. 37. К задаче 13.3

13.4. На длинную гладкую спицу надеты две бусинки массы m и M . В начальный момент лёгкая бусинка имеет скорость v_0 и налетает на покоившуюся тяжёлую бусинку (рис. 38). После упругого соударения лёгкая бусинка движется в обратном направлении и упруго отражается от стенки на левом краю спицы. После серии таких соударений наступит момент, когда скорость лёгкой бусинки станет почти равна скорости тяжелой бусинки.

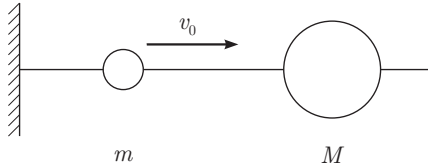


Рис. 38. К задаче 13.4

Студент A предлагает определить эти конечные скорости v , используя закон сохранения импульса, т. е. предполагая равенство $mv_0 = (m + M)v$. Отсюда он нашёл значение скорости $v = mv_0/(m + M)$.

Студент B предлагает определить скорость v , используя закон сохранения энергии, т. е. предполагая равенство

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m + M)v^2.$$

Отсюда он нашёл значение $v = \sqrt{m/(m + M)} v_0$.

Попробуйте решить этот спор.

§ 14. Распады и соударения в нерелятивистской механике

При переходе из одной инерциальной системы отсчёта S в другую инерциальную систему отсчёта S' потенциальная энергия, зависящая от взаимных расстояний, не изменяется, а кинетическая энергия изменяется:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V})^2 = K' + \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \mathbf{P}' \mathbf{V},$$

где

$$K' = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i)^2, \quad \mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i, \quad M = \sum_i m_i.$$

Если система S' есть система центра масс, то $\mathbf{P}' = 0$ и

$$K = K_{\text{ц}} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{\text{ц}}^2, \quad E = E_{\text{ц}} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{\text{ц}}^2. \quad (14.1)$$

Согласно этому уравнению, сложное тело, состоящее из взаимодействующих материальных точек, имеет наименьшую энергию в системе центра масс. Эту энергию называют *внутренней энергией* тела:

$$E_{\text{вн}} = E_{\text{ц}}.$$

При распаде покоившегося сложного тела на несколько более простых тел справедливы законы сохранения

$$E_{\text{вн}} = \sum_i \left(E_{\text{вн}i} + \frac{1}{2} M_i \mathbf{V}_i^2 \right), \quad \sum_i M_i \mathbf{V}_i = 0, \quad (14.2)$$

так что распад возможен лишь при

$$E_{\text{вн}} > \sum_i E_{\text{вн}i}. \quad (14.3)$$

Такие столкновения, при которых тела после некоторого сближения расходятся без изменения своего внутреннего состояния (а значит, и внутренней энергии), называются *упругими столкновениями*. Рассмотрим упругие соударения двух частиц и будем отмечать штрихом значения импульсов частиц после соударения. Для таких соударений выполняются законы сохранения полного импульса и полной кинетической энергии. В системе центра масс эти законы сохранения имеют вид

$$\mathbf{p}_{1\text{ц}} + \mathbf{p}_{2\text{ц}} = 0 = \mathbf{p}'_{1\text{ц}} + \mathbf{p}'_{2\text{ц}}, \quad \frac{\mathbf{p}_{1\text{ц}}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{2\text{ц}}^2}{2m_2} = \frac{(\mathbf{p}'_{1\text{ц}})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{p}'_{2\text{ц}})^2}{2m_2},$$

откуда следуют соотношения:

$$\mathbf{p}_{1ц} = -\mathbf{p}_{2ц}, \quad \mathbf{p}'_{1ц} = -\mathbf{p}'_{2ц}, \quad |\mathbf{p}_{1ц}| = |\mathbf{p}_{2ц}| = |\mathbf{p}'_{1ц}| = |\mathbf{p}'_{2ц}|. \quad (14.4)$$

В лабораторной системе (в которой вторая частица до соударения покоится) закон сохранения полного импульса гласит

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2.$$

Так как центр масс движется в лабораторной системе со скоростью

$$\mathbf{V}_ц = \frac{\mathbf{p}_1}{m_1 + m_2},$$

то связь импульсов в лабораторной системы с импульсами в системе центра масс такова:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{1ц} + m_1 \mathbf{V}_ц; \quad \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_{1ц} + m_1 \mathbf{V}_ц; \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_{2ц} + m_2 \mathbf{V}_ц. \quad (14.5)$$

Рассмотрите подробнее случай одинаковых масс $m_1 = m_2$, а также случаи $m_1 \ll m_2$ и $m_1 \gg m_2$.

При **абсолютно неупругом ударе**, при котором две частицы превращаются в одну, выполняется закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}',$$

но начальная кинетическая энергия

$$K = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2}$$

не равна конечной кинетической энергии

$$K' = \frac{(\mathbf{p}')^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

При фиксированной начальной кинетической энергии K потеря кинетической энергии в результате соударения $K - K'$ максимальна, когда $K' = 0$, т. е. когда соударение происходит в системе центра инерции (нерелятивистский аналог преимущества встречных пучков).

Задачи

14.1. Шар массы m_1 , имеющий скорость v , налетает на неподвижный шар массы m_2 . Найти скорости v_1 и v_2 шаров после центрального упругого удара. Рассмотреть подробнее случаи $m_1 = m_2$, $m_1 \gg m_2$ и $m_1 \ll m_2$.

14.2. Лёгкий шарик массы m расположен на небольшом расстоянии над тяжёлым шаром массы $M \gg m$ так, что их центры находятся на одной вертикали на расстоянии h от пола (рис. 39). В начальный момент тела отпускают без начальной скорости. Ударяясь о пол, тяжёлый шар отскакивает и упруго сталкивается с лёгким шариком. На какую высоту поднимется лёгкий шарик?

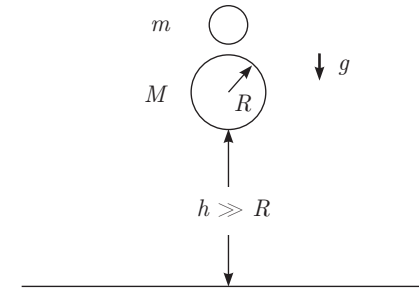


Рис. 39. К задаче 14.2

14.3. Шар массы M налетает на неподвижный шар массы $m < M$. Найти максимальный угол отклонения налетающего шара после нецентрального упругого удара.

§ 15. Понятие о фундаментальных силах.

Гравитационное, электрослабое и сильное взаимодействия

Все изучаемые в классической механике силы сводятся к фундаментальным силам гравитационного и электромагнитного взаимодействия. В ядерной физике в области малых расстояний $\lesssim 10^{-15}$ м существенную роль играют сильное и слабое взаимодействия.

15.1. Электромагнитное взаимодействие. Закон Кулона

Электромагнитное взаимодействие ответственно за строение атомов и молекул, за упругие силы, силы трения и реакции опор.

Важной, первичной характеристикой элементарных частиц является их электрический заряд q или его отсутствие. Между одинаковыми заряженными частицами возникает отталкивание. Между частицами разных типов могут быть силы либо притяжения, либо отталкивания. Так как электрон и протон (первые открытые элементарные частицы) притягиваются друг к другу, то условно заряду электрона приписывается знак “минус”, а заряду протона знак “плюс”. Абсолютные величины этих зарядов оказались одинаковы:

$$q_p = -q_e = e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

где e — так называемый *элементарный заряд*. В обычном веществе заряд $q = (Z_p - Z_e)e$, где Z_p и Z_e — число протонов и электронов в данном веществе. Для точечных зарядов величиною q_1 и q_2 при $v_i \ll c$ справедлив **закон Кулона** (1785 г.):

$$\mathbf{F}_{21} = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (15.1)$$

где $k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$. Кулоновской силе соответствует потенциальная энергия взаимодействия двух частиц (см. §12.3)

$$U_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (15.2)$$

Знак заряда и его величину у других элементарных частиц теперь можно установить, наблюдая их взаимодействие с частицами, заряд которых известен. Удивительной особенностью заряда является то, что у всех заряженных элементарных частиц (а значит, и у всех заряженных тел) он оказался по абсолютной величине целым кратным от элементарного заряда e . Величина заряда не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта. Одним из фундаментальных законов природы является **закон сохранения заряда**: у замкнутой системы тел

$$\sum_i q_i = \text{const.}$$

Одна из наиболее точных проверок этого закона — по стабильности электрона. Дело в том, что распад электрона на более легкие нейтральные частицы, например, нейтрино и фотоны, не противоречит фундаментальным законам сохранения энергии и импульса (и момента импульса — см. далее), но тем не менее не происходит, так как нарушает закон сохранения заряда. Из экспериментов установлено, что время жизни электрона $\tau_e > 4,6 \cdot 10^{26}$ лет.

Если заряженные тела не являются точечными, то силу их взаимодействия можно найти, разбив каждое тело на малые (почти точечные) участки и применив формулу (1) для взаимодействия этих малых участков. Пусть, например, взаимодействуют два протяженных тела с зарядами q и q' . Первое тело разобьём на малые участки с зарядами q_i , радиус-векторы которых \mathbf{r}_i , а второе — на малые участки с зарядами q'_j и радиус-векторами \mathbf{r}'_j . Тогда сила взаимодействия этих тел

$$\mathbf{F}_{21} = \sum_{ij} k q_i q'_j \frac{\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3}, \quad \mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}'_j - \mathbf{r}_i. \quad (15.3)$$

Пользуясь этим методом, можно показать, что равномерно заряженные сферы и шары взаимодействуют так, как будто их заряды сосредоточены в их центрах. В то же время взаимодействие равномерно заряженных колец или дисков зависит не только от расстояния между их центрами, но и от их взаимной ориентации.

Область применимости закона Кулона простирается от самых больших до малых расстояний $\sim \hbar/(m_e c) \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{ м}$, где возникают квантовые поправки $\sim ke^2/(\hbar c) \approx 1/137$.

В релятивистской области сила взаимодействия между зарядами уже не описывается законом Кулона. Становится необходимым учитывать запаздывание взаимодействия и излучение ускоренно движущихся зарядов. Последовательное описание электромагнитного взаимодействия при учёте теории относительности и квантовой механики даёт квантовая электродинамика, созданной в основном в 1949 г. (Р. Фейнман, Ю. Швингер, С. Томонага, Ф. Дайсон). В квантовой электродинамике электромагнитное поле рассматривается как набор квантов поля фотонов, а заряженные частицы, например электроны и их античастицы позитроны, — как кванты электронно-позитронного поля. Взаимодействие электронов друг с другом или с позитронами происходит в результате обмена фотонами между ними. Разработанный на основе таких представлений математический аппарат квантовой электродинамики позволяет проводить расчёты электромагнитных процессов с высочайшей точностью. Целый ряд предсказаний квантовой электродинамики проверялся, в частности, в опытах на встречных электрон-позитронных пучках.

15.2. Гравитационное взаимодействие. Закон всемирного тяготения**Закон всемирного тяготения**

Гравитационное взаимодействие всегда соответствует притяжению частиц. Наблюдая падения шаров различной массы, Галилей установил, что **ускорение падающего тела не зависит от его массы m** , поэтому $F_{\text{грав}} \propto m$, следовательно, для двух взаимодействующих тел необходимо

$$F_{21} \propto m_1 m_2.$$

Из предположения, что

$$F_{\text{грав}} \propto \frac{1}{r^2},$$

Ньютон смог вывести законы Кеплера для движения планет (см. § 26). Таким образом, для точечных масс m_1 и m_2 при $v_i \ll c$ справедлив **закон всемирного тяготения** (И. Ньютон, 1687):

$$\mathbf{F}_{21} = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (15.5)$$

где G — гравитационная постоянная. Этот закон отличается от закона Кулона (1) заменой $k q_1 q_2 \rightarrow -G m_1 m_2$, так что можно считать, что роль “гравитационных зарядов” играют массы взаимодействующих тел. Существенная разница состоит в том, что электрические заряды могут притягиваться или отталкиваться, в то время как гравитационные силы всегда являются силами притяжения.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух частиц равна

$$U_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (15.6)$$

Ньютон доказал, что однородные сферы и шары взаимодействуют так, как будто их массы сосредоточены в их центрах.

Опыт Кавендиша

В 1798 г. Г. Кавендиш, используя установку с крутильными весами, определил значение гравитационной постоянной

$$G \approx 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$$

В атомных явлениях гравитационные силы не играют никакой роли. Сравним, например, гравитационные и электрические силы в атоме водорода:

$$\frac{F_{\text{грав}}}{F_{\text{элект}}} = \frac{G m_e m_p}{k e^2} \sim 10^{-39} \quad (15.7)$$

(масса электрона $m_e \approx 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг, у протона $m_p \approx 2000 m_e$). Силы тяготения между обычными макроскопическими телами также малы. Так, два небольших тела с массами ~ 1 кг на расстоянии ~ 1 м притягиваются друг к другу с силами $\sim 10^{-10}$ Н. Роль гравитационных сил возрастает при переходе к объектам большего масштаба. Что касается астрономических тел, то силы гравитации играют в их движении определяющую роль. Электростатические силы в таких масштабах, как правило, ничтожны, так как эти тела в целом практически электронейтральны. Вся небесная механика основана на законе всемирного тяготения.

Опыт Кавендиша иногда называют “взвешиванием” Земли, так как он позволил определить массу Земли. Действительно, тело массы m на поверхности Земли притягивается с силой

$$mg = G \frac{m m_3}{R_3^2},$$

где $R_3 \approx 6400$ км — радиус Земли. Отсюда

$$m_3 = \frac{g R_3^2}{G} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}. \quad (15.8)$$

Аналогично, зная ускорение Земли в её годовом движении вокруг Солнца $a = \omega^2 R = (2\pi/T)^2 R$, можно определить массу Солнца $m_C = a R^2 / G$ (здесь $T = 1$ год и $R \approx 150$ млн км — период обращения и радиус орбиты Земли).

Первая и вторая космические скорости

Для вращения спутника по круговой орбите вблизи поверхности Земли необходимо придать ему *первую космическую скорость* v_1 , определяемую из требования, чтобы произведение массы тела m на его центростремительное ускорение $a_n = v_1^2 / R_3$ равнялось силе гравитационного притяжения:

$$m \frac{v_1^2}{R_3} = G \frac{m m_3}{R_3^2} = mg,$$

откуда получаем

$$v_1 = \sqrt{gR_3} \approx 8 \text{ км/с.} \quad (15.9)$$

Для удаления тела с поверхности Земли на бесконечность необходимо придать ему *вторую космическую скорость* v_2 , определяемую из равенства энергий тела вблизи поверхности Земли ($v_{\text{нач}} = v_2$)

$$E_{\text{нач}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mm_3}{R_3}$$

и на бесконечности ($v_{\text{кон}} = 0$)

$$E_{\text{кон}} = \frac{1}{2}mv_{\text{кон}}^2 = 0.$$

Таким образом,

$$v_2 = \sqrt{2}v_1 \approx 11 \text{ км/с.} \quad (15.10)$$

Понятие об общей теории относительности и Большом взрыве

Тот факт, что сила гравитационного притяжения пропорциональна массе тела, был установлен Галилеем в достаточно грубых опытах. Более точные опыты показали, что это утверждение выполняется с очень высокой точностью. Фундаментальное значение этого факта было осознано Эйнштейном и положено в основу созданной им в 1915 г. релятивистской теории тяготения. Эйнштейн назвал её *общей теорией относительности*. В основе современных моделей образования и развития Вселенной лежит нестационарное решение уравнений общей теории относительности, найденное А. Фридманом в 1922 г. Оно, в частности, допускало существование расширяющейся с течением времени Вселенной, что было подтверждено астрономическими наблюдениями (Э. Хаббл, 1929). Эти наблюдения установили, что видимая Вселенная расширяется и галактики удаляются друг от друга. Используя известные физические законы, можно “прокрутить пленку назад” и представить, что происходило в исходный момент, миллиарды лет назад.

Дальнейшая разработка этой идеи привела к гипотезе Большого взрыва (Г. Гамов, 1946), согласно которой Вселенная образовалась примерно 14 млрд лет тому назад из сгустка вещества очень малого размера. Этот сгусток имел огромную плотность, температуру и давление. Стремительно расширяясь, сгусток остывал, давление в нём падало. Такая картина развития Вселенной подтверждается двумя важными фактами.

1. Наличие микроволнового фонового излучения, приходящего на Землю почти изотропно со всех сторон (так называемое *реликтовое излучение*).

В 1965 г. американские физики А. Пензиас и Р. Вилсон обнаружили, что Вселенная наполнена электромагнитным излучением в микроволновом диапазоне частот, максимум интенсивности приходится на длины волн около 1 мм. Последующие измерения показали, что это характерное излучение, свойственное объектам с температурой около -270°C (или 3 К), т. е. всего на три градуса выше абсолютного нуля. По сути, Пензиас и Уилсон определили температуру Вселенной после того, как она остывала на протяжении примерно 14 млрд лет.

2. Высокая распространенность гелия во Вселенной, соответствующая примерно четвертой части всех атомных ядер по массе.

Ранняя Вселенная в первые микросекунды после Большого взрыва была очень горячей, её температура составляла триллионы градусов. С момента Большого взрыва должно было пройти около трех минут, прежде чем Вселенная остыла настолько, чтобы элементарные частицы начали образовывать устойчивые ядра легких элементов. Однако это первичное образование ядер (так называемый *нуклеосинтез*) на ранней стадии расширения Вселенной продолжался очень недолго. Вскоре после первых трех минут частицы разлетелись так далеко друг от друга, что столкновения между ними стали крайне редкими. В этот краткий период первичного нуклеосинтеза в результате соударений протонов и нейтронов и образовались дейтерий (тяжелый изотоп водорода с одним протоном и одним нейтроном в ядре), гелий-3 (два протона и нейтрон), гелий-4 (два протона и два нейтрона) и в незначительном количестве литий-7 (три протона и четыре нейтрона). Все более тяжелые элементы образовались позже, уже при формировании и эволюции звезд. Теория Большого взрыва позволяет определить температуру ранней Вселенной и частоту соударений частиц в ней. Как следствие, мы можем рассчитать соотношение числа различных ядер легких элементов на первичной стадии развития Вселенной. Сравнив эти прогнозы с реально наблюдаемым соотношением легких элементов (с поправкой на их образование в звездах), мы обнаруживаем впечатляющее соответствие между теорией и наблюдениями.

15.3. Понятие о сильном и слабом взаимодействиях

Известно, что в природе существуют стабильные ядра атомов, имеющие малый размер порядка $10^{-15} \div 10^{-14}$ м и состоящие из протонов p и нейтронов n . Чтобы удерживать протоны и нейтроны в ядре, должно существовать другое, помимо электромагнитного, взаимодействие этих час-

тиц. Такое *сильное (или ядерное) взаимодействие* соответствует силам малого радиуса и большой интенсивности. При сближении ядерных частиц на малые расстояния оно вступает в игру и приводит к интенсивному образованию новых ядер или частиц. При соударении ядерных частиц высокой энергии может происходить множественное образование частиц. Например, при центральном соударении ядер золота, разогнанных до высокой энергии на ускорителе RHIC (Брукхэвен, США), образуется несколько тысяч вторичных частиц.

В ядерной физике кроме сильного взаимодействия существует также *слабое взаимодействие*, ответственное за распад многих долгоживущих частиц и за реакции с участием таких частиц, как нейтрино ν , которые не участвуют в электромагнитном и сильном взаимодействиях. Один из первых исследованных процессов, обязанных слабому взаимодействию, был распад нейтрона. Было обнаружено, что свободный (вне ядра) нейтрон за время примерно 900 с распадается на протон, электрон и нейтрино (точнее, антинейтрино $\bar{\nu}$):

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}.$$

В лабораторных условиях нейтрино высоких энергий получают в основном за счёт распада на лету высокоэнергичных пи-мезонов π на мюоны μ и нейтрино:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}.$$

Полученные таким образом пучки нейтрино можно использовать для изучения взаимодействия нейтрино с другими частицами. Например, при соударении нейтрино высокой энергии с протоном образуется мюон и некоторое число вторичных частиц (в основном, пи-мезонов):

$$\bar{\nu} + p \rightarrow \mu^+ + \text{вторичные частицы}. \quad (15.11)$$

Основными характеристиками взаимодействия являются радиус действия сил и их интенсивность. На качественном уровне все взаимодействия описываются потенциальной энергией вида

$$U(r) = \frac{Q^2}{r} e^{-r/R}, \quad (15.12)$$

где величина Q означает соответствующий заряд, а R — *эффективный радиус действия сил*. Принято характеризовать силу взаимодействия безразмерной *константой взаимодействия*:

$$\alpha_{\text{взаим}} = \frac{Q^2}{\hbar c}. \quad (15.13)$$

Сравнивая формулу (12) с аналогичным выражением (2) для электромагнитного взаимодействия электронов или протонов, находим, что Q^2 в этом случае совпадает с величиной ke^2 , $R_{\text{элект}}$ обращается в бесконечность, а константа взаимодействия совпадает с постоянной α (4):

$$R_{\text{элект}} = \infty, \quad \alpha_{\text{элект}} = \frac{ke^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (15.14)$$

Аналогично, для гравитационного взаимодействия находим, сравнивая (12) с таким же выражением (6) для гравитационного взаимодействия двух протонов, что

$$R_{\text{грав}} = \infty, \quad \alpha_{\text{грав}} = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \approx 10^{-38}. \quad (15.15)$$

Для сильного взаимодействия эффективный радиус действия сил мал, а константа взаимодействия почти в 100 раз больше электромагнитной:

$$R_{\text{сил}} \approx 10^{-15} \text{ м}, \quad \alpha_{\text{сил}} \approx 100 \alpha_{\text{элект}} \approx 1. \quad (15.16)$$

Современная теория сильных взаимодействий называется *квантовой хромодинамикой*, а сами сильновзаимодействующие частицы называются *адронами*. Большинство адронов представляет собой нестабильные частицы, их число составляет несколько сотен, и каждый год, как правило, происходит открытие нескольких новых адронов. В квантовой хромодинамике все адроны представляют собой связанные состояния более фундаментальных частиц — *кварков*, которых насчитывается всего шесть. Кварки взаимодействуют друг с другом в результате обмена *глюонами*. В отличие от адронов, кварки и глюоны обладают специфической характеристикой, которая была условно названа *цветом*, вот почему в названии теории сильного взаимодействия присутствует слово хромо- (или цвето-) динамика.

Наконец, слабое взаимодействие обладает ещё более малым радиусом взаимодействия, а его константа взаимодействия меньше, чем у электромагнитного, но больше, чем у гравитационного взаимодействия:

$$R_{\text{слаб}} \approx 10^{-18} \text{ м}, \quad \alpha_{\text{слаб}} \approx 10^{-6}. \quad (15.17)$$

Теория, описывающая слабые взаимодействия, была создана сравнительно недавно. Слабое взаимодействие возникает в результате обмена особыми

частицами — W и Z бозонами. Фактически в этой теории был реализован единый подход к описанию как слабых так и электромагнитных явлений, т. е. была создана *объединённая теория электромагнитных и слабых взаимодействий* (С. Вайнбер, А. Салам, Ш. Глэшоу, 1967). Новые частицы, W и Z бозоны, введённые в этой теории, вскоре были открыты экспериментально.

Объединённая теория электромагнитных и слабых взаимодействий и квантовая хромодинамика образуют так называемую *Стандартную модель* взаимодействия элементарных частиц, которая хорошо описывает громадную совокупность экспериментальных фактов. В то же время существует некоторое количество важных фактов, которые заставляют думать, что вскоре мы сумеем указать достаточно определённо область применимости Стандартной модели и увидеть её расширение.

ГЛАВА III

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

§ 16. Релятивистские энергия и импульс

Нерелятивистский импульс $m\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ не является компонентой какого-либо 4-вектора, поэтому закон сохранения полного нерелятивистского импульса у замкнутой системы тел не имеет ковариантного вида, т. е. может нарушаться при лоренцевых переходах к другим инерциальным системам отсчёта. Естественное релятивистское обобщение импульса состоит в замене скорости \mathbf{v} в нерелятивистском выражении $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ на 4-скорость u_μ , определённую формулой (7.7):

$$m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow p_\mu = mu_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad (16.1a)$$

где

$$p_\mu = (p_0, \mathbf{p}), \quad p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (16.1b)$$

16.1. Определения и свойства 4-импульса

Четыре компоненты p_μ образуют *4-вектор энергии-импульса* (или *4-импульс*). Его нулевая компонента, домноженная на c ,

$$\varepsilon = cp_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (16.2a)$$

называется *релятивистской энергией свободной частицы*, а предел ε при $v \rightarrow 0$, т. е.

$$\varepsilon_0 = mc^2, \quad (16.2b)$$

называется *энергией покоя*. Согласно (1b) и (2a) скорость частицы связана с её энергией и импульсом соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon} c^2. \quad (16.3)$$

Все имеющиеся экспериментальные данные подтверждают, что при соударениях и распадах имеет место **закон сохранения полной релятивистской энергии и полного релятивистского импульса замкнутой системы частиц**. В результате реакции число частиц N может измениться, но суммарная релятивистская энергия частиц до соударения или распада обязательно равна суммарной релятивистской энергии новых частиц после соударения или распада; то же самое выполняется и для суммарного релятивистского импульса:

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{N'} \varepsilon'_j, \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^{N'} \mathbf{p}'_j. \quad (16.4)$$

Эти законы сохранения можно представить в компактном виде, используя 4-векторы энергии-импульса:

$$\sum_{i=1}^N (p_\mu)_i = \sum_{j=1}^{N'} (p'_\mu)_j, \quad \mu = 0, x, y, z. \quad (16.5)$$

Так как величины ε/c и \mathbf{p} — компоненты 4-импульса p_μ , то их закон преобразования уже известен (см. (7.4)):

$$\varepsilon = \gamma (\varepsilon' + V p'_x), \quad p_x = \gamma \left(p'_x + \frac{V}{c^2} \varepsilon' \right), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad (16.6a)$$

где лоренц-фактор

$$\gamma \equiv \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\varepsilon' = \gamma (\varepsilon - V p_x), \quad p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{V}{c^2} \varepsilon \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \quad (16.6b)$$

Квадрат 4-вектора p_μ равен (ср. (7.8))

$$p_\mu^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = \left(\frac{\varepsilon}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (16.7)$$

и является инвариантом преобразований Лоренца. Отсюда видно, что релятивистские энергия и импульс связаны соотношением

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (16.8)$$

Введём также *релятивистскую кинетическую энергию*, равную разности релятивистской энергии и энергии покоя:

$$K = \varepsilon - mc^2. \quad (16.9)$$

Зависимость релятивистской кинетической энергии и релятивистского импульса от скорости показана на рис. 40 сплошными линиями, для срав-

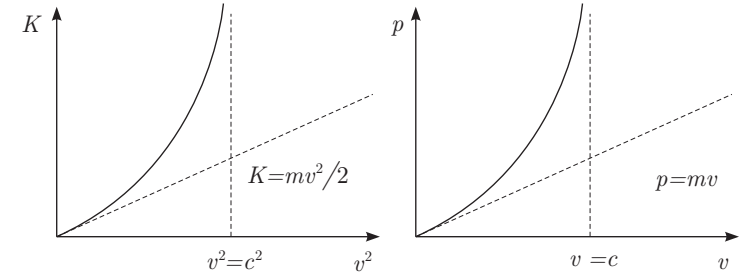


Рис. 40. Графики функций $K(v^2)$ и $p(v)$

нения на этом же рисунке пунктирными линиями показаны эти же величины, вычисленные согласно нерелятивистским формулам. Видно, что резкое различие между релятивистскими и нерелятивистскими зависимостями наступает в районе скоростей, сравнимых со скоростью света. Действительно, в нерелятивистском пределе

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad K = \frac{1}{2}mv^2, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad \text{при} \quad v \ll c, \quad (16.10)$$

а при $v \rightarrow c$ релятивистские энергия и импульс стремятся к бесконечности:

$$\varepsilon \approx K \approx c|\mathbf{p}| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad v \rightarrow c. \quad (16.11)$$

В дальнейшем окажется удобным использовать лоренц-фактор частицы $\gamma(v)$ и переписать (1), (2) в виде

$$\varepsilon = \gamma(v) mc^2, \quad \mathbf{p} = \gamma(v) m\mathbf{v}, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (16.12)$$

16.2. Пример

Законы сохранения (4) позволяют проводить анализ столкновений и распадов примерно так же, как это делалось в нерелятивистской механике (более подробно эти вопросы разбираются в § 18). При этом возникает, однако, несколько важных отличий. Проясим их на простейшем примере: сталкивается частица с массой m_1 , скоростью \mathbf{v}_1 и неподвижная частица с массой m_2 , в результате реакции образуется неизвестная частица X . Как найти массу этой частицы M и её скорость \mathbf{V} ?

В нерелятивистской механике ответ хорошо известен: есть закон сохранения массы, поэтому

$$M = m_1 + m_2, \quad (16.13)$$

а скорость можно найти из закона сохранения нерелятивистского импульса $m_1 \mathbf{v}_1 = M \mathbf{V}$, откуда получаем

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1}{m_1 + m_2}. \quad (16.14)$$

В релятивистской механике законы сохранения релятивистских энергии и импульса имеют вид

$$\gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2 = \gamma M c^2, \quad \gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1 + 0 = \gamma M \mathbf{V}, \quad (16.15)$$

где $\gamma_1 = \gamma(v_1)$ и $\gamma = \gamma(V)$. Решая совместно эти уравнения, найдём массу частицы X

$$M = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2m_1 m_2 (\gamma_1 - 1)} \quad (16.16)$$

и её скорость

$$\mathbf{V} = \frac{\gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1}{\gamma_1 m_1 + m_2}. \quad (16.17)$$

В нерелятивистском пределе (при $\gamma_1 \rightarrow 1$) соотношения (16)–(17) переходят в нерелятивистские формулы (13)–(14). В общем же случае возникают следующие принципиальные отличия. **В релятивистской механике нет закона сохранения массы**, в обсуждаемой реакции масса образовавшейся частицы (16) оказывается больше суммы масс исходных частиц:

$$M > m_1 + m_2. \quad (16.18)$$

Например, в реакции образования нейтрального пи-мезона π^0 при соударении электрона и позитрона

$$e^- + e^+ \rightarrow \pi^0$$

масса образовавшейся частицы почти в 150 раз больше суммы масс исходных частиц.

Кроме того, в релятивистской теории необходимо учитывать, что энергией и импульсом обладают не только обычные частицы с отличной от нуля массой, но и электромагнитное поле. Учёт этого обстоятельства может привести к изменению привычных нерелятивистских представлений. Так, в рассматриваемом случае скорость движения центра инерции (центра масс) сталкивающихся частиц в нерелятивистской механике определяется известной формулой (9.3) и для нашего случая равна

$$\mathbf{V}_{\text{ци}} = \frac{\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1(t) + m_2 \mathbf{v}_2(t)}{m_1 + m_2}, \quad (16.19)$$

где $\mathbf{v}_1(t)$ и $\mathbf{v}_2(t)$ скорости первой и второй сталкивающихся частиц в любой момент времени до соударения. Из закона сохранения импульса следует, что скорость $\mathbf{V}_{\text{ци}}$ постоянна и совпадает со скоростью образовавшейся частицы (14).

В релятивистской механике скорость движения центра инерции сталкивающихся частиц (см. уравнение (3))

$$V_{\text{ци}}(t) = \frac{\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)}{(\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t))/c^2} = \frac{\gamma_1(t)m_1 \mathbf{v}_1(t) + \gamma_2(t)m_2 \mathbf{v}_2(t)}{\gamma_1(t)m_1 + \gamma_2(t)m_2}, \quad (16.20)$$

где

$$\gamma_i(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - [v_i(t)/c]^2}},$$

зависит, вообще говоря, от времени и оказывается постоянной и совпадающей со скоростью движения образовавшейся частицы (17), только если можно пренебречь импульсом и энергией поля, создаваемого сталкивающимися частицами.

16.3. Релятивистская сила

Силу в релятивистской механике естественно вводить на основе закона сохранения релятивистского импульса, т. е. используя подход, развитый в § 10. В этом случае *релятивистская сила*

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \mathbf{a} + m\gamma^3 \frac{(\mathbf{a}\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (16.21)$$

оказывается зависящей не только от ускорения \mathbf{a} , но и от скорости \mathbf{v} . В частности, если скорость и ускорения параллельны, то сила

$$\mathbf{F} = m\gamma^3 \mathbf{a} \text{ при } \mathbf{v} \parallel \mathbf{a},$$

а если скорость и ускорения взаимно перпендикулярны, то сила

$$\mathbf{F} = m\gamma \mathbf{a} \text{ при } \mathbf{v} \perp \mathbf{a}.$$

Работа силы определяется так же, как и в ньютоновской механике (см. § 11). Соотношения, аналогичные (11.2), имеют вид

$$\mathbf{F} d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} d\mathbf{l} = \mathbf{v} d\mathbf{p} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}} d\mathbf{p} = d\varepsilon. \quad (16.22)$$

Интегрируя это равенство, получаем связь между работой релятивистской силы и изменением релятивистской кинетической энергии:

$$A_{12} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = K_2 - K_1, \quad (16.23)$$

аналогичную уже установленной в нерелятивистской механике.

Задачи

16.1. Найти скорость частицы, при которой её релятивистский импульс в 2 раза превышает значение импульса, вычисленного по нерелятивистской формуле.

16.2. Две частицы, имеющие массы m_1 и m_2 и летящие навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 , слипаются в одну частицу. Найти массу и скорость образовавшейся частицы.

16.3. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой m от $v_1 = 0,6$ с до $v_2 = 0,8$ с? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по нерелятивистской формуле.

16.4. Частица массы m в момент времени $t = 0$ начинает двигаться под действием постоянной силы $\mathbf{F} = \text{const}$. Найти зависимость от времени релятивистского импульса частицы \mathbf{p} и её скорости \mathbf{v} , а также величины пройденного ею пути l . Рассмотреть подробнее времена малые и большие по сравнению с характерным временем $\tau = mc/F$.

§ 17. Фотон. Эффект Доплера

В механике Ньютона нет частиц с массой, равной нулю, ибо для них равны нулю кинетическая энергия $K = mv^2/2$ и импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Напротив, в релятивистской механике энергия и импульс таких частиц могут быть отличны от нуля. Из формулы (16.8) при $m = 0$ найдём связь энергии и импульса для этого случая:

$$\varepsilon = |\mathbf{p}| c, \quad (17.1)$$

а из соотношения (16.3) получим, что скорость таких частиц непременно равна скорости света c . Заметим дополнительно, что исходные соотношения (16.1)–(16.2) совместимы в пределе $v \rightarrow c$, $m \rightarrow 0$.

Такой частицей с $m = 0$ и $v = c$ является фотон γ — квант электромагнитного поля. Плоская электромагнитная волна частоты ω может рассматриваться как поток фотонов — частиц с энергией

$$\varepsilon = \hbar\omega \quad (17.2)$$

и импульсом

$$|\mathbf{p}| = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}, \quad (17.3)$$

направление которого совпадает с направлением распространения волны.

Если в системе S' испускается фотон с энергией ε' под углом φ' к оси x' , т. е.

$$\mathbf{p}' = \frac{\varepsilon'}{c} (\cos \varphi', \sin \varphi', 0),$$

то в системе S его энергия равна

$$\varepsilon = \gamma (\varepsilon' + V p'_x) = \gamma \varepsilon' \cdot \left(1 + \frac{V}{c} \cos \varphi' \right). \quad (17.4)$$

Отсюда получаем формулу *эффекта Доплера* для частоты

$$\omega = \omega' \cdot \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (17.5)$$

В частности, если источник излучения, расположенный в системе S' , приближается к наблюдателю в системе S (при этом угол $\varphi' = 0$), то

$$\omega = \omega' \cdot \frac{1 + (V/c)}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \omega' \cdot \sqrt{\frac{1 + (V/c)}{1 - (V/c)}}, \quad (17.6a)$$

т. е. $\omega > \omega'$. Такой эффект увеличения частоты называется *фиолетовым смещением*. При небольших скоростях приближения источника излучения $V \ll c$, имеем отсюда простое соотношение

$$\omega = \left(1 + \frac{V}{c}\right) \omega'. \quad (17.6b)$$

Если же источник излучения удаляется от наблюдателя (при этом угол $\varphi' = \pi$), то

$$\omega = \omega' \cdot \frac{1 - (V/c)}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \omega' \cdot \sqrt{\frac{1 - (V/c)}{1 + (V/c)}}, \quad (17.7a)$$

т. е. $\omega < \omega'$. Такой эффект уменьшения частоты называется *красным смещением*. При $V \ll c$ получаем для красного смещения формулу

$$\omega = \left(1 - \frac{V}{c}\right) \omega'. \quad (17.7b)$$

Эффект Допплера находит многочисленные применения. Приведём два характерных примера.

При сравнении частоты излучения определённого атома в лабораторных условиях с частотой такого излучения в спектре звезды можно определить скорость движения этой звезды (а также относительные скорости двойных звёзд — см. задачу 17.3). Выяснилось, что ближайшие к нам звёзды имеют различные скорости, их излучение показывает как красное, так и фиолетовое смещение. Но излучение далеких собраний звёзд — галактик — соответствует красному смещению. Более ТОГО, было обнаружено,

что чем дальше расположена галактика, тем больше у неё величина красного смещения. Соответствующая зависимость имеет вид (так называемый *закон Хаббла*)

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega} = \frac{H}{c} r, \quad (17.8)$$

где ω' — частота излучения галактики, ω — частота, принимаемая земными наблюдателями, r — расстояние до наблюдаемой галактики и H — постоянная Хаббла. Формула (8) при $V \ll c$ может быть переписана в виде $V = H r$, а так как постоянная H не зависит от направления, то имеет место прямая пропорциональность между вектором скорости звезды и её радиус-вектором:

$$\mathbf{V} = H \mathbf{r}. \quad (17.9)$$

Такой характер разбегания далёких объектов соответствует сценарию, в котором Вселенная расширяется после Большого взрыва.

Формулы эффекта Допплера справедливы, конечно, для любой электромагнитной волны, в частности и для радиоволн. Зная частоту посланного радаром сигнала и измеряя частоту отражённого самолётом или автомобилем сигнала, можно определить скорость движения данного самолёта или автомобиля.

Задачи

17.1. Доказать, что излучение или поглощение фотона свободным электроном (т. е. реакция $e \rightarrow e + \gamma$) невозможно. Возможна ли однофотонная аннигиляция электрона и позитрона, т. е. реакция $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$?

17.2. С какой скоростью должна была бы двигаться автомашина, чтобы красный свет светофора ($\lambda = 0,7$ мкм) превратился в зелёный ($\lambda' = 0,55$ мкм)?

17.3. Эффект Допплера позволил исследовать двойные звёзды столь удалённые, что разрешение их с помощью телескопа оказалось невозможным. Спектральные линии таких звёзд периодически становятся двойными, из чего можно предположить, что источником являются две звёзды, вращающиеся вокруг их центра масс. Считая массы обеих звёзд одинаковыми $m_1 = m_2$, найти расстояние $2r$ между ними и их массы, если максимальное расщепление спектральных линий равно $(\Delta\lambda/\lambda)_{\max} = 1,2 \cdot 10^{-4}$, причём оно возникает через каждые $\tau = 30$ дней.

§ 18. Распады и соударения в релятивистской механике.

Понятие о методе встречных пучков

В этом параграфе мы рассмотрим несколько задач, для решения которых достаточно законов сохранения 4-вектора энергии-импульса.

18.1. Определение массы распавшейся частицы

Массы многих нестабильных частиц определяются в результате исследования продуктов их распада. Так, например, масса π^0 мезона может быть определена по его распаду на два фотона: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Один из наиболее точных способов определения массы Z бозона — по его распаду на электрон и позитрон: $Z \rightarrow e^+ + e^-$. Рассмотрим, как может быть определена масса нестабильной частицы по измеренным 4-импульсам $(\varepsilon_j/c, \mathbf{p}_j)$, $j = 1, \dots, N$ продуктов распада. Используя закон сохранения 4-импульса, находим энергию

$$\varepsilon = \sum_j \varepsilon_j$$

и импульс

$$\mathbf{p} = \sum_j \mathbf{p}_j$$

нестабильной частицы. После этого масса M нестабильной частицы определяется из известного соотношения (16.7):

$$M^2 c^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \left(\sum_j \frac{\varepsilon_j}{c} \right)^2 - \left(\sum_j \mathbf{p}_j \right)^2. \quad (18.1)$$

18.2. Определение пороговой энергии неупругой реакции

Антипротон \bar{p} был открыт в реакции

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (18.2)$$

на ускорителе в Беркли (США), который назывался космотрон (Чемберлен, Сегре, Виганд, Ипсилантис, 1955; эта работа была удостоена Нобелевской премии). В этом ускорителе протоны разгонялись до кинетической энергии $K_{\max} = 6,3$ ГэВ и затем соударялись с неподвижными протонами¹. Определим минимальную (иначе — пороговую) энергию налетающего

¹В ядерной физике энергия, как правило, измеряется в электрон-вольтах (эВ). По определению 1 эВ есть энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов 1 В, отсюда $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Укажем также, что $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$, $1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$, а энергии покоя электрона, протона и пи-мезона равны: $m_e c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$, $m_p c^2 = 0,94 \text{ ГэВ}$ и $m_\pi c^2 = 140 \text{ МэВ}$.

протона, при которой становится возможной реакция (2). Обозначим через $p_{1\mu}$ и $p_{2\mu}$ 4-векторы энергии-импульса налетающего и покоившегося протона, соответствующие величины для образовавшихся частиц будем отмечать штрихом $p'_{j\mu}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Закон сохранения 4-вектора энергии-импульса для данной реакции можно записать в виде

$$p_\mu = p'_\mu,$$

где

$$p_\mu = (p_1 + p_2)_\mu, \quad p'_\mu = (p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4)_\mu.$$

Рассмотрение удобно начать в системе центра инерции сталкивающихся протонов, в которой суммарный импульс начальных (и конечных) частиц равен нулю $\mathbf{p}_\Pi = \mathbf{p}'_\Pi = 0$. В этой системе минимальная энергия сталкивающихся протонов отвечает случаю образования четырёх частиц в покое, а так как масса антипротона равна массе протона, то полная энергия покоя четырёх одинаковых по массе частиц равна $\varepsilon'_\Pi = 4m_p c^2$. Таким образом, квадрат 4-вектора p'_μ равен

$$(p')_\mu^2 = (\varepsilon'_\Pi/c)^2 - (\mathbf{p}'_\Pi)^2 = 16m_p^2 c^2. \quad (18.3)$$

Систему отсчёта, связанную с ускорителем, будем называть лабораторной, в ней второй протон покоится, поэтому

$$p_\mu = ((\varepsilon_{1\text{Л}} + m_p c^2)/c, \mathbf{p}_{1\text{Л}}). \quad (18.4)$$

Вычисляя квадрат 4-вектора p_μ в лабораторной системе, получаем (с учётом соотношения $\varepsilon_{1\text{Л}}^2 - \mathbf{p}_{1\text{Л}}^2 c^2 = m_p^2 c^4$):

$$p_\mu^2 = 2m_p^2 c^2 + 2\varepsilon_{1\text{Л}} m_p. \quad (18.5)$$

Так как p_μ^2 является инвариантом и равен инварианту $(p')_\mu^2$, то мы немедленно получаем $\varepsilon_{1\text{Л}} = 7m_p c^2$. Отсюда минимальная кинетическая энергия в лабораторной системе отсчёта равна

$$K_{\min \text{ Л}} = \varepsilon_{1\text{Л}} - m_p c^2 = 6 m_p c^2 = 5,6 \text{ ГэВ}, \quad (18.6)$$

т. е. заметно меньше энергии $K_{\max} = 6,3$ ГэВ, до которой могли быть ускорены протоны на космотроне.

18.3. Эффект Комптона

Рассмотрим упругие соударения на примере *эффекта Комптона* — рассеяния фотона на электроне:

$$\gamma + e \rightarrow \gamma + e. \quad (18.7)$$

Из закона сохранения 4-импульса $(p_\gamma + p_e)_\mu = (p'_\gamma + p'_e)_\mu$ получим инвариантное соотношение

$$(p'_e)_\mu^2 = (p_\gamma + p_e - p'_\gamma)_\mu^2$$

или

$$(p'_\gamma)_\mu (p_\gamma + p_e)_\mu = (p_\gamma)_\mu (p_e)_\mu. \quad (18.8)$$

Если известны энергии и импульсы начальных частиц, то из этого уравнения можно найти энергию конечного фотона в зависимости от его угла вылета. Покажем это для двух различных начальных условий.

Опыты А. Комптона (1923–1924). В этих опытах рентгеновские лучи с частотой ω и длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ рассеивались на атомах. Регистрировались рассеянные рентгеновские лучи с уменьшенной частотой ω' и увеличенной длиной волны $\lambda' = 2\pi c/\omega'$, причём эти изменения были тем больше, чем больше был угол рассеяния θ . Естественное объяснение этих опытов таково: рентгеновские лучи есть набор частиц-фотонов, которые испытывают рассеяние на атомарных электронах, причём последние в данных условиях могут рассматриваться как почти свободные (энергия связи электронов в атоме много меньше энергии налетающих фотонов). Иными словами, Комpton наблюдал реакцию (7), в которой

$$(p_\gamma)_\mu = \frac{\hbar\omega}{c} (1, 1, 0, 0), \quad (p'_\gamma)_\mu = \frac{\hbar\omega'}{c} (1, \cos\theta, \sin\theta, 0),$$

$$(p_e)_\mu = (m_e c, 0, 0, 0).$$

Подставляя эти значения в уравнение (8), получаем соотношение

$$\hbar\omega' (m_e c^2 + \hbar\omega - \hbar\omega \cos\theta) = \hbar\omega m_e c^2,$$

из которого легко найти изменение длины волны рассеянных под углом θ рентгеновских лучей:

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_e \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}, \quad (18.9)$$

хорошо описывающее экспериментальные данные. Отметим, что уменьшение энергии рассеянного фотона — естественное следствие того, что часть энергии начального фотона передаётся прежде покоившемуся электрону.

Соударение ультрарелятивистского электрона и лазерного фотона. В настоящее время работает целый ряд установок, в которых пучок электронов высокой энергии $\varepsilon_e \gg m_e c^2$ сталкивается с летящим навстречу сгустком лазерных фотонов, энергия которых мала $\varepsilon_\gamma \sim 1$ эВ. Эти установки служат для получения фотонов высокой энергии, так как конечный фотон рассеивается в основном назад, т.е. почти вдоль направления начального электрона, и отбирает у начального электрона значительную долю его энергии. При такой постановке эксперимента 4-импульсы частиц имеют вид

$$(p_e)_\mu = \left(\frac{\varepsilon_e}{c}, |\mathbf{p}_e|, 0, 0 \right), \quad (p_\gamma)_\mu = \frac{\varepsilon_\gamma}{c} (1, -1, 0, 0),$$

$$(p'_\gamma)_\mu = \frac{\varepsilon'_\gamma}{c} (1, 1, 0, 0).$$

Подставляя эти значения в уравнение (8), находим энергию конечного фотона:

$$\varepsilon'_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma (\varepsilon_e + c |\mathbf{p}_e|)}{2\varepsilon_\gamma + \varepsilon_e - c |\mathbf{p}_e|}.$$

Для ультрарелятивистского электрона

$$\varepsilon_e + c |\mathbf{p}_e| \approx 2\varepsilon_e, \quad \varepsilon_e - c |\mathbf{p}_e| \approx \frac{m_e^2 c^4}{2\varepsilon_e},$$

поэтому в итоге имеем

$$\varepsilon'_\gamma \approx \frac{x}{x+1} \varepsilon_e, \quad x = \frac{4\varepsilon_\gamma \varepsilon_e}{m_e^2 c^4}. \quad (18.10)$$

Приведём два характерных примера.

В опытах ИЯФ им. Будкера (Новосибирск, 1997) электроны ускорителя ВЭПП-4М с энергией $\varepsilon_e = 5$ ГэВ сталкивались с лазерными фотонами с энергией $\varepsilon_\gamma = 1,2$ эВ (инфракрасный лазер на неодимовом стекле). В этом случае легко рассчитать, используя формулу (10), что $x = 0,092$ и что энергия конечного фотона равна $\varepsilon'_\gamma = 0,42$ ГэВ, т.е. увеличилась в 350 млн раз. Фотоны таких энергий необходимы для исследования структуры ядра и элементарных частиц. Укажем для сравнения, что в обычных рентгеновских установках получают фотоны с энергией всего 10–100 кэВ.

В опытах на ускорителе SLAC (Стэнфорд, 1996) электроны с энергией $\varepsilon_e = 46$ ГэВ сталкивались с лазерными фотонами с энергией $\varepsilon_\gamma = 1,2$ эВ. В этом случае $x = 0,85$ и рассеянный фотон имел энергию $\varepsilon'_\gamma = 21$ ГэВ, т.е. отбирал у начального электрона почти половину его энергии.

18.4. Встречные пучки

Большинство сведений об элементарных частицах и их взаимодействиях получено из опытов на ускорителях. В обычных ускорителях пучок заряженных частиц, разогнанных электромагнитными полями установки, соударяется с неподвижной мишенью. При этом энергия начальной частицы $\varepsilon_{1л}$ расходуется не только на образование конечных частиц (что, как правило, и представляет основной интерес в такого рода опытах), но и на придание конечным частицам суммарного импульса, равного импульсу начальной частицы $\mathbf{p}_{1л}$. Это означает, что только часть первоначальной энергии расходуется “для пользы дела”.

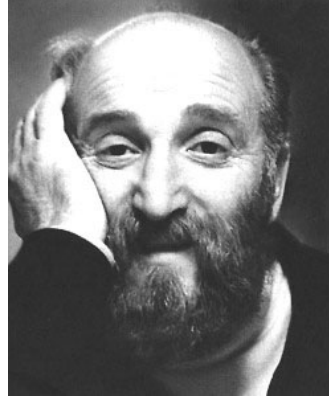


Рис. 41. Герш Будкер (1918–1977)

Таких недостатков лишены ускорители со встречными пучками, в которых суммарный импульс сталкивающихся частиц равен нулю, $\mathbf{p}_ц = \mathbf{p}_{1ц} + \mathbf{p}_{2ц} = 0$. В этом случае вся первоначальная энергия “идёт в дело”. Первые ускорители со встречными пучками были созданы в 1965 г. под руководством Г. Будкера в СССР (ИЯФ, Новосибирск) и Б. Рихтера в США. Основная трудность в их создании заключалась в том, чтобы научиться получать и удерживать на орбите в течение длительного времени достаточно плотные встречные пучки. При соударении пучков малой концентрации интересные акты столкновений будут происходить редко и работа ускорителя будет малоэффективной. Для иллюстрации приведём параметры работающего ускорителя со встречными электрон-позитронными пучками ВЭПП-4М: в вакуумной трубе ускорителя длиной 366 м летают во встречных направлениях электронный и позитронный сгустки, содержащие примерно одинаковое число частиц $1,5 \cdot 10^{11}$. Сами сгустки в области встречи напоминают тонкую длинную ленточку: длина сгустка 5 см, поперечный горизонтальный размер 1 мм, поперечный вертикальный размер 1/30 мм. Примерно миллион раз в секунду эти сгустки сталкиваются в месте встречи внутри детектора, результаты таких встреч регистрируются многочисленными приборами и записываются (после предварительного отбора) на магнитную ленту или диски. Обработка полученной информации ведется в автоматическом режиме. Интересно отметить, что Интернет был первоначально создан физиками как раз для обмена информацией, полученной на ускорителях.

Как связаны между собой энергии в лабораторной системе отсчёта (в которой работают традиционные ускорители) и в системе центра инерции (в которой работают большинство ускорителей со встречными пучками)? Инвариант $(p_1 + p_2)_\mu^2$ в лабораторной системе зависит от энергии налетающей частицы $\varepsilon_{1л}$ и масс соударяющихся частиц (ср. (5)):

$$(p_1 + p_2)_\mu^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2\varepsilon_{1л} m_2, \quad (18.11a)$$

а в системе центра инерции тот же инвариант равен

$$(p_1 + p_2)_\mu^2 = (\varepsilon_{1ц} + \varepsilon_{2ц})^2 / c^2. \quad (18.11b)$$

Приравнявая эти два выражения, находим

$$\varepsilon_{л} = \frac{\varepsilon_{ц}^2 + (m_2^2 - m_1^2)c^4}{2m_2 c^2}, \quad \varepsilon_{л} = \varepsilon_{1л} + m_2 c^2, \quad \varepsilon_{ц} = \varepsilon_{1ц} + \varepsilon_{2ц}. \quad (18.12)$$

Проиллюстрируем эти формулы следующим примером. Рассмотрим реакцию образования ρ -мезона $e^+ + e^- \rightarrow \rho$, которая была одной из первых исследована на ускорителе ВЭПП-2. На встречных пучках ρ -мезон рождается в покое, поэтому энергия $\varepsilon_{ц} = m_\rho c^2 = 0,776$ ГэВ. Для того чтобы ρ -мезон образовался в соударении позитрона с неподвижным электроном (лабораторная система), нужно согласно (12) разогнать позитрон до энергии почти в 800 раз большей:

$$\varepsilon_{1л} = \varepsilon_{л} - m_e c^2 = \frac{\varepsilon_{ц}^2}{2m_e c^2} - m_e c^2 = \frac{m_\rho^2 c^2}{2m_e} - m_e c^2 \approx 590 \text{ ГэВ}.$$

Заметим, что ускоритель ВЭПП-2 начал работать примерно тридцать лет тому назад, а ускорителей с энергией позитрона 590 ГэВ нет до сих пор.

Задачи

18.1. Некая частица X^0 распадается на лету на два γ -кванта (рис. 42), вылетающих симметрично под углами $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$ к направлению движения частицы X^0 с одинаковыми энергиями $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,7$ ГэВ. Найти по этим данным массу частицы X^0 .

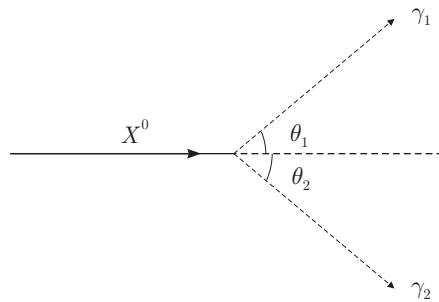


Рис. 42. К задаче 18.1

18.2. В результате столкновения двух частиц, имеющих массы m_1 и m_2 и скорости \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , образовалась частица массы M . Найти скорость и кинетическую энергию образовавшейся частицы.

18.3. π^0 -мезон распадается на лету на два γ -кванта. Найти энергию π^0 -мезона, если счётчик, расположенный под углом $\theta = 60^\circ$ к направлению движения π^0 -мезона, зарегистрировал γ -квант с энергией 14 МэВ. Масса π^0 -мезона $m = 140 \text{ МэВ}/c^2$.

18.4. На ускорителе КЕКВ (Япония) реализован вариант несимметричных встречных e^+e^- пучков, в котором электроны разгоняются до энергии $\varepsilon_- = 8 \text{ ГэВ}$, а позитроны — до энергии $\varepsilon_+ = 3,5 \text{ ГэВ}$. Найти массу частицы X , образовавшейся в результате реакции $e^+ + e^- \rightarrow X$.

§ 19. Дефект масс. Реакции деления и синтеза атомных ядер

Потребление энергии в мире стремительно растёт, увеличиваясь ежегодно примерно на 2,3 %. Это означает удвоение потребляемой энергии каждые 30 лет. Запасы органического топлива (нефти, газа, каменного угля) весьма ограничены, поэтому так важны поиски альтернативных источников энергии. В этом разделе мы обсудим коротко принципиальные проблемы энергетики человечества. Основой для такого обсуждения являются фундаментальные законы физики, в частности закон сохранения релятивистской энергии и указанная в § 16 связь энергии покоя частицы ε_0 с её массой m :

$$\varepsilon_0 = mc^2. \quad (19.1)$$

19.1. Дефект масс, энергия связи и энерговыделение реакции

Пусть составное тело массы m распадается из состояния покоя на N тел, в этом случае закон сохранения релятивистской энергии гласит:

$$\varepsilon_0 = mc^2 = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j = \sum_{j=1}^N (m_j c^2 + K_j),$$

где m_j и K_j — масса и релятивистская кинетическая энергия одного из продуктов распада. Так как $K_j \geq 0$, то распад возможен, если только $m > \sum_j m_j$.

Величина

$$\Delta m = \sum_{j=1}^N m_j - m$$

называется *дефектом масс*. Таким образом, распад возможен, только если дефект масс отрицателен. В этом случае суммарная кинетическая энергия продуктов распада, т.е. *энерговыделение реакции* Q , прямо связано с дефектом масс:

$$Q = \sum_{j=1}^N K_j = -\Delta m \cdot c^2.$$

При $\Delta m > 0$ распад невозможен, а величина $\Delta m \cdot c^2$ есть *энергия связи*, равная минимальной работе, которую надо затратить, чтобы “расташить” тело на N составных частей

$$\varepsilon_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2.$$

Таким образом, дефект масс — это очень удобная количественная характеристика тех процессов, которые призваны снабжать нас энергией.

Фактически мы располагаем тремя принципиальными путями промышленного получения энергии. Первый путь — использование энергии сгорания органического топлива. Элементарный процесс в этом случае — химическая реакция, связанная с перестройкой электронных оболочек атомов и молекул. При этом используется кинетическая энергия вновь образованных в результате реакции атомов или молекул. За перестройку электронных оболочек отвечают силы электромагнитного взаимодействия.

Второй путь — использование ядерной энергии. Элементарный процесс в этом случае — распад тяжёлых атомных ядер на более лёгкие и использование кинетической энергии продуктов распада.

Третий путь — использование термоядерной энергии. Элементарный процесс в этом случае — слияние лёгких атомных ядер в более тяжёлые и использование кинетической энергии получившихся продуктов синтеза.

Распад и синтез ядер в двух последних случаях происходит в основном за счёт сильного взаимодействия, хотя электрическое отталкивание протонов играет определённую роль в уменьшении энергии связи и влияет на условия протекания ядерных реакций.

Рассмотрим подробнее эти три возможности и оценим соответствующие дефекты масс и возможное энерговыделение.

19.2. Энергия химических реакций

Энергией химических реакций пользовались ещё наши пещерные предки, получая её путём сжигания дров. Не углубляясь в детали, можно моделировать этот процесс химической реакцией соединения углерода (основной компонент дров) с кислородом воздуха $C + O_2 = CO_2$. Для этой реакции необходимо на каждый моль углерода иметь один моль молекулярного кислорода (напомним, что один моль это примерно $6 \cdot 10^{23}$ атомов или молекул). Если взять один моль C (т. е. 12 г углерода) и один моль O_2 (т. е. 32 г кислорода), получится один моль углекислого газа, углерод полностью сгорит. Казалось бы, что в итоге мы должны получить 44 г углекислого газа — так гласит нерелятивистский закон сохранения массы, установленный ещё во времена Ломоносова и Лавуазье. Однако в этом случае дефект масс был бы равен нулю и энерговыделение такой реакции тоже было бы нулевым. Тогда откуда возникнет тепло, т. е. увеличение кинетической энергии хаотического движения молекул? Энергия выделится только в том случае, если масса конечных молекул углекислого газа будет меньше суммарной массы начальных атомов углерода и молекул кислорода. Если бы во времена Лавуазье можно было измерять массу с очень высокой точностью, он обязательно заметил бы уменьшение суммарной массы в результате реакции. Оценим дефект масс при химических реакциях. В нашем случае известно, что энергия, выделяющаяся в результате сгорания одного моля углерода, равна $Q = 4 \cdot 10^5$ Дж, соответственно абсолютная величина дефекта массы для одного моля углекислого газа составит

$$\Delta m = \frac{Q}{c^2} = 4,4 \cdot 10^{-12} \text{ кг},$$

а его относительная величина меньше одной десятиллионной доли процента:

$$\frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-9} = 10^{-7} \text{ \%}.$$

Такие изменения и в наше время не удаётся измерить прямыми методами. Если пересчитать энергетический выход на одну молекулу углекислого газа, он составит около 4 эВ. Характерные значения энергии химической связи лежат в интервале 0,1–5 эВ. Отметим ещё одну особенность получения энергии путем сжигания: чтобы реакция пошла, дрова необходимо поджечь, т. е. нагреть до температуры 400–450 °С.

19.3. Ядерная энергия — энергия реакций деления тяжёлых ядер

Атомные ядра состоят из протонов p и нейтронов n , для совместного наименования протонов и нейтронов используют термин *нуклоны*. Обозначим через Z число протонов и через N число нейтронов, тогда полное число нуклонов в ядре равно $A = Z + N$. Пусть m_A — масса ядра с числом нуклонов A , тогда дефект масс для такого ядра равен

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_A.$$

Для большинства ядер относительная величина дефекта масс составляет десятые доли процента, что в миллионы раз превышает его значение для химических реакций. Большие дефекты масс при ядерных превращениях и определяют высокую эффективность ядерной и термоядерной энергетики. Просто для получения той же самой энергии ядерных или термоядерных “дров” требуется в миллионы раз меньше, чем обычных дров. Изменения в атомных ядрах происходят с участием могучих ядерных сил и сопровождаются несравнимо большим выделением энергии, чем дают химические процессы, в которых действуют не очень мощные (в сравнении с ядерными) электромагнитные силы. Энергии связи нуклонов в ядре в миллионы раз больше энергии химической связи.

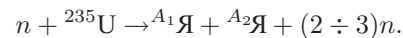
Таким образом, одно из главных достоинств ядерной энергетики состоит в том, что каждый участвующий в деле атом выдает в миллионы раз больше энергии, чем при химических реакциях. Второе достоинство состоит в том, что запасы ядерного топлива достаточно велики, а для ядерного синтеза (где энергию получают в основном из изотопов водорода, которые можно извлекать из обычной воды) они практически безграничны.

Здесь необходимо сделать важное замечание. Энергия связи на один нуклон

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta mc^2}{A}$$

имеет максимум $\approx 8,8$ МэВ для ядер железа (при $A \approx 56$). Энергия ϵ_1 становится меньше как для более тяжёлых элементов, так и для более лёгких. Это означает, что энергия будет выделяться как при делении более тяжёлых ядер, так и при синтезе ядер из более лёгких.

Технически более простым оказалось реализовать деление урановых и трансурановых элементов. В качестве ядерного топлива чаще всего используется ^{235}U , ядро которого после захвата теплового нейтрона делится на два новых ядра и, кроме того, испускается несколько быстрых нейтронов:



Наиболее вероятны осколки деления, у которых $A_1 = 95$ и $A_2 = 138$, они, как правило, радиоактивны. Энерговыделение этой реакции Q составляет примерно 200 МэВ, а относительный дефект масс равен

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{Q}{(m_U + m_n)c^2} \approx 0,1 \, \%.$$

Чтобы реакция деления продолжалась, необходимо замедлить быстрые нейтроны, с которыми ядро ^{235}U практически не реагирует, до меньших энергий, но при этом уметь регулировать концентрацию тепловых нейтронов так, чтобы управляемый процесс деления не перешёл в атомный взрыв. Сложнейшие системы автоматики следят за этим процессом, а Чернобыльская катастрофа стала возможной не из-за отказа автоматики, а из-за её отключения по халатности и низкой квалификации персонала. Не меньшей проблемой является подготовка топливных элементов, требующая самых высоких технологий, кроме этого, необходимо безопасным путем забирать энергию в активной зоне и передавать её турбогенераторным установкам.

К сожалению, первое практическое использование ядерной энергии произошло в форме атомной бомбардировки городов Хиросимы и Нагасаки в августе 1945 г. Испытание первой советской атомной бомбы состоялось в августе 1949 г.

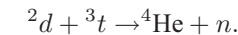
В настоящее время в мире уже работает более 400 АЭС, их общая мощность составляет около 5 % мировой энергетики. В отдельных странах этот процент выше: во Франции — 75 %, в Японии — 35, в США — 20, в России — 17. Разведанных запасов урана, даже с учетом роста потребления электроэнергии, по оценкам хватит на сотни лет. Основные проблемы

связаны с надёжностью и безопасностью работы АЭС (что ещё раз подтвердила авария на японской атомной станции Фокусима), со сложностью утилизации долгоживущих радиоактивных отходов и возможностью получения на АЭС оружейного плутония и урана в государствах с непредсказуемой политикой.

19.4. Термоядерная энергия — энергия реакций синтеза лёгких ядер

В этом плане более привлекательным представляется термоядерный синтез с его практически неисчерпаемым источником топлива и отсутствием долгоживущих радиоактивных отходов. Наиболее простыми могут стать реакции синтеза ядра гелия из водорода и его изотопов дейтерия D (его ядро d состоит из протона и нейтрона) и трития T (его ядро t состоит из протона и двух нейтронов). Именно такие реакции проходят в звёздах, в том числе в нашем Солнце, от стабильности работы этого термоядерного реактора зависит все живое на Земле. Неуправляемые реакции синтеза впервые реализованы человечеством более полувека назад, в так называемых водородных бомбах.

Для управляемого синтеза одной из наиболее перспективных является реакция образования ядра гелия при соударении ядра дейтерия и трития с вылетом быстрого нейтрона:



Энерговыделение этой реакции Q составляет примерно 18 МэВ, а относительный дефект масс равен

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{Q}{(m_d + m_t)c^2} \approx 0,4 \, \%.$$

Проблема получения ядерного топлива для такой реакции, т. е. выделение дейтерия и трития в промышленных масштабах в настоящее время может считаться решённой (хотя 1 кг тяжелой воды D_2O по цене соизмерим с ценой кг золота). Но на пути промышленной реализации управляемого термоядерного синтеза существует целый ряд проблем, из которых основными являются следующие три.

1. Для разжигания этого топлива требуются температуры в сотни миллионов градусов, чтобы заряженные ядра дейтерия и трития преодолели силы кулоновского отталкивания и сблизилась на необходимое для начала реакции расстояние.

2. Плотность ядер дейтерия и трития в зоне реакции должна быть достаточно велика, чтобы была достаточно высокой вероятность их столкновения.

3. Зона реакции заполнена высокотемпературной плазмой (смесью из ядер и электронов), эта плазма должна удерживаться в пространстве, не касаясь стенок реактора.

Первая и вторая проблемы решены в водородной бомбе, в которой первичный атомный взрыв используется для нагревания и сжатия исходных продуктов синтеза, а далее идёт неуправляемая термоядерная реакция с выделением огромной энергии.

Одним из простых на первый взгляд способов решения проблем казалось использование плазменных образований, разогреваемых электрическим током и поддерживаемых в пространстве системой электромагнитных полей. Стремление получить высокотемпературную плазму натолкнулось сразу на несколько очень сложных задач. Во-первых, надлежало её нагреть до многих миллионов градусов. Во-вторых, чтобы сохранить высокую температуру плазмы, нужно изолировать её от стенок реактора, создать своего рода плазменное облако. В-третьих, это облако необходимо сделать абсолютно устойчивым, чтобы оно висело в пространстве, не смещаясь и ни к чему не прикасаясь. Наиболее перспективными оказались установки, получившие название ТОКАМАК — сокращение от полного названия *Тороидальная Камера с Магнитной Катушкой*. В плазменном сгустке создавали электрический ток, с помощью внешнего магнитного поля определенной конфигурации удерживали плазменное облако в центре камеры, не позволяя ему соприкоснуться со стенками. Сама камера была выполнена в форме тора, с тем чтобы токи текли внутри этого “бублика”.

Очень скоро выяснилось, что сгусток нагретой водородной плазмы, подвешенный в магнитном поле, оказался неустойчивым. Он довольно быстро, за тысячные доли секунды, распадался и вываливался на стенки камеры. Постепенно возникло понимание природы этих неустойчивостей, а затем появлялись практические рекомендации по повышению устойчивости плазмы. Например, использовать для дополнительного нагрева мощное излучение высокой частоты. Кроме того, стало ясно, что время устойчивого удержания плазмы возрастает с увеличением размеров установки. Крупнейшая отечественная машина ТОКАМАК-15 уже имела тороидальную вакуумную камеру с внешним диаметром “бублика” более 5 м. Крупные исследовательские токамаки были построены в России, Японии, США, Франции, Англии. А несколько лет назад специалисты пришли к выводу, что оставшиеся нерешённые проблемы нужно исследовать на установке, максимально приближенной к реальному энергетическому термоядерному реактору, и только объединенными интеллектуальными и экономическими усилиями их можно, наконец, решить.

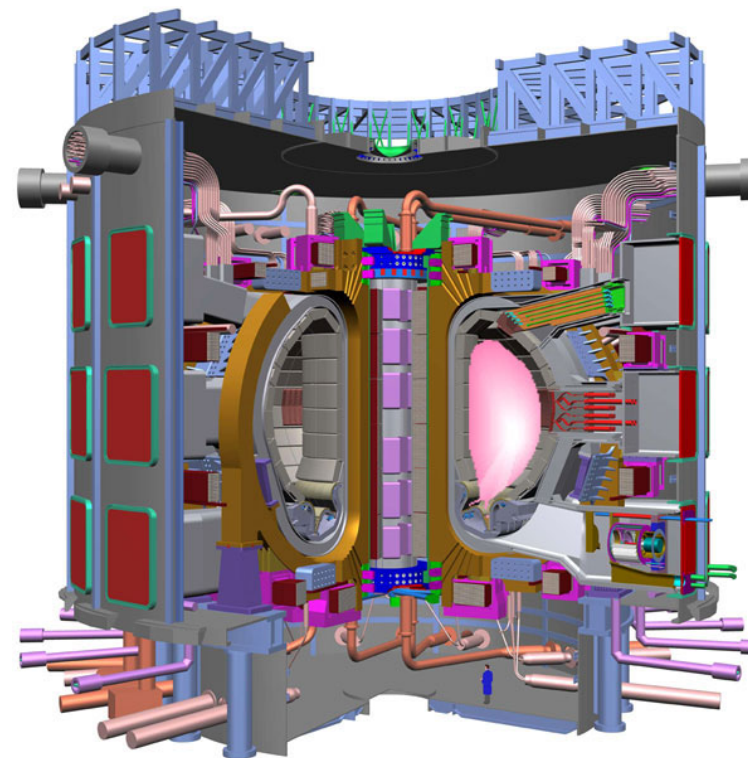


Рис. 43. Схема реактора ИТЭР (для сравнения в нижнем правом углу показана фигура человека)

Это понимание и привело к работам по созданию международного исследовательского реактора ИТЭР. В 2006 г. достигнуты договорённости о его совместном строительстве во Франции. Даже несколько цифр, взятых из технического проекта установки, позволяют представить себе эту огромную и сложную машину (рис. 43): высота вакуумной камеры 15 м (пятиэтажный дом), а внешний диаметр — более 12 м. Само же здание, где разместится реактор со всеми вспомогательными системами, имеет кубическую форму и поднимется над Землёй как минимум на 20 этажей.

ГЛАВА IV

КОЛЕБАНИЯ

§ 20. Одномерное движение в потенциальном поле. Период колебаний

Рассмотрим движение частицы массы m вдоль оси x в потенциальном поле $U(x)$. В математике хорошо известно, что уравнение движения (уравнение Ньютона)

$$m\ddot{x} = F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (20.1)$$

с заданными начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ имеет единственное решение $x(t)$. С другой стороны, при движении в таком поле сохраняется энергия

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) = \text{const.} \quad (20.2)$$

Энергия представляет собой пример *интеграла движения*, т. е. функции координат и скоростей, которая сохраняется при движении системы. Для одномерного движения наличие такого интеграла движения даёт возможность вместо уравнения второго порядка (1) использовать уравнение первого порядка (2) и найти закон движения $x(t)$ в форме определённого интеграла.

Действительно, по начальным данным находим константу

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0),$$

после чего в уравнении первого порядка, полученного из (2),

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]} \quad (\text{для } \dot{x} \gtrless 0) \quad (20.3)$$

переменные x и t разделяются

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (20.4a)$$

и ответ имеет вид

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + t_0. \quad (20.4b)$$

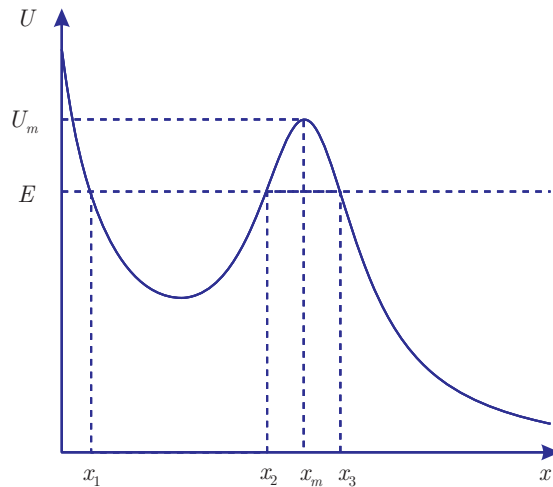


Рис. 44. Границы движения в потенциальном поле

Поскольку кинетическая энергия $K = E - U(x)$ положительна, то движение возможно лишь в области значений x , в которой $E > U(x)$. Точки x_i , в которых $U(x_i) = E$, определяют границы области движения частицы (рис. 44). В этих точках кинетическая энергия равна нулю, $K = E - U(x_i) = 0$ и скорость $v_i = 0$, но ускорение $a_i = -U'(x_i)/m$ может быть отлично от нуля. Рассмотрим пример потенциальной энергии с локальным максимумом U_m (см. рис. 44). В таком поле при энергии $E < U_m$ движение возможно лишь в двух областях: при $x_1 \leq x \leq x_2$ и при $x \geq x_3$.

Рассмотрим подробнее движение частицы вблизи точки x_2 . Вблизи этой точки потенциальная энергия возрастает с ростом x , поэтому производная $U'(x_2) > 0$, а ускорение $a_2 = -U'(x_2)/m < 0$. Это означает, что, приближаясь к точке остановки x_2 , частица движется приблизительно равнозамедленно, останавливается, а затем начинает приблизительно равноускоренное движение в обратном направлении. Иными словами, точка x_2 является точкой поворота.

Те же рассуждения справедливы и для точек x_1 и x_3 . В итоге, в области $x > x_3$ частица уходит на бесконечность, её движение *инфинитно*. В области $x_1 \leq x \leq x_2$ частица совершает колебания (движение *финитное*) с периодом

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (20.5)$$

В общем случае *колебаниями* называются такие движения, которые точно или почти точно повторяются. Колебания встречаются во всех областях физики, примерами являются: колебания маятника; колебания давления воздуха — звук; колебания электрического и магнитного поля — радио, свет; колебания атомов в молекулах; колебания протонов и нейтронов в ядре и т. д. Помимо периода колебаний, полезно ввести также *циклическую частоту* колебаний ν — число колебаний в единицу времени, которая связана с периодом колебаний соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (20.6)$$

Единицей измерения частоты является *герц*, 1 Гц соответствует одному колебанию в секунду.

Задачи

20.1. Найти закон движения $x(t)$ частицы массы m в потенциальном поле $U(x) = -\alpha x^4$, если энергия частицы равна нулю. В начальный момент частица находилась в точке $x(0) = a$. Рассмотреть два варианта движения, соответствующих положительной и отрицательной начальной скорости.

20.2. Найти зависимость периода колебания $T(E)$ частицы массы m в поле $U(x) = \beta x^4$ от энергии частицы E .

§ 21. Линейный осциллятор

Среди всевозможных колебаний очень важными являются так называемые линейные колебания, возникающие почти всегда, когда приходится рассматривать движение частицы в потенциальном поле вблизи минимума потенциальной энергии. Они оказываются выделены не только простотой решения, но и тем фактом, что многие более сложные колебания могут быть представлены как относительно простая сумма линейных колебаний.

21.1. Малые колебания вблизи минимума потенциальной энергии

Пусть потенциальная энергия $U(x)$ имеет локальный минимум в некоторой точке x_{\min} . Эта точка является точкой устойчивого равновесия, так как при малых отклонениях от точки x_{\min} возникают силы, стремящиеся вернуть частицу в положение равновесия. Сместим начало отсчёта координат в точку x_{\min} и разложим потенциальную энергию в ряд по малым отклонениям x от начала координат:

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \frac{1}{3!}U'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}U''''(0)x^4 + \dots \quad (21.1)$$

Константа $U(0)$ несущественна и её можно опустить, выбрав начало отсчёта потенциальной энергии от $U(0)$. Первая производная обращается в нуль в точке минимума $U'(0) = 0$. Если вторая производная обращается в нуль $U''(0) = 0$, то непременно и третья производная $U'''(0) = 0$, и тогда разложение $U(x)$ начинается с членов, пропорциональных x^4 . Соответственно сила $F_x \propto x^3$ является нелинейной функцией x и колебания в этом случае называются *нелинейными*. Но если $U''(0) \neq 0$, то непременно $U''(0) > 0$, обозначим

$$U''(0) = k > 0. \quad (21.2)$$

Итак, для малых отклонений x от положения равновесия потенциальная энергия в достаточно общих предположениях есть

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (21.3)$$

а полная энергия

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (21.4)$$

Действующая сила

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

является *линейной* функцией смещения, а колебания называются *линейными* или *гармоническими*. Коэффициент k называется *жесткостью*. В этом случае уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} > 0 \quad (21.5)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (21.6)$$

Систему, подчиняющуюся такому уравнению, называют *линейным* или *гармоническим осциллятором*.

Решение уравнения (5) легко найти, используя подход, развитый в предыдущем параграфе. Для этого по начальным данным вычислим энергию

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2,$$

затем границы области колебаний частицы

$$-a \leq x \leq a$$

найдем из условия

$$U(\pm a) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 = E, \quad (21.7)$$

что даёт значение

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}. \quad (21.8)$$

Подставив найденное значение энергии в уравнение (20.4b), выразим t через x :

$$t(x) = \frac{\pm 1}{\omega} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega} \left(\mp \arccos \frac{x}{a} - \varphi \right),$$

$$\varphi = \mp \arccos \frac{x_0}{a}.$$

Отсюда найдём зависимость

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi). \quad (21.9)$$

Учтём теперь начальные условия:

$$x(0) = x_0 = a \cos \varphi, \quad \dot{x}(0) = v_0 = -a\omega \sin \varphi, \quad (21.10)$$

окончательный ответ имеет вид

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (21.11)$$

Для линейного осциллятора принята следующая терминология: a — амплитуда колебаний; $\omega t + \varphi$ — фаза колебаний; φ — начальная фаза колебаний; ω — круговая частота колебаний. Зависимость амплитуды колебаний от начальных условий даётся формулой (8), начальная фаза также определяется начальными условиями:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (21.12)$$

Круговая частота ω (её часто называют просто частотой) связана с периодом T и циклической частотой ν соотношениями:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (21.13)$$

Замечательной особенностью линейного осциллятора является тот факт, что его *период колебания не зависит от амплитуды (или от энергии) колебаний* и определяется только жесткостью k и массой m .

Потенциальная $U = kx^2/2$ и кинетическая $K = m\dot{x}^2/2$ энергии линейного осциллятора колеблются с течением времени

$$U = \frac{1}{4}m\omega^2 a^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)], \quad (21.14)$$

$$K = \frac{1}{4}m\omega^2 a^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)],$$

а полная энергия $E = K + U = m\omega^2 a^2/2$ сохраняется.

21.2. Обобщение

Легко обобщить полученные результаты на случай, когда потенциальная энергия зависит от какой-либо обобщенной координаты q , не обязательно имеющей размерность длины, $U = U(q)$, а кинетическая энергия зависит от q и \dot{q} и имеет вид

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}f(q)\dot{q}^2. \quad (21.15)$$

Пусть q_0 есть точка, в которой потенциальная энергия имеет локальный минимум. Введем отклонение от положения равновесия $x = q - q_0$ и разложим потенциальную энергию в ряд по степеням x (см. (1)). Тогда в достаточно общих предположениях

$$U(q) = \frac{1}{2}k_{\text{эф}}x^2 + \dots, \quad (21.16a)$$

где эффективная жесткость

$$k_{\text{эф}} = \frac{d^2U(q_0)}{dq^2}. \quad (21.16b)$$

Разлагая далее $f(q)$ в ряд по степеням x и учитывая, что $\dot{q} = \dot{x}$, получаем

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_{\text{эф}}\dot{x}^2 + \dots, \quad (21.17a)$$

где эффективная масса

$$m_{\text{эф}} = f(q_0). \quad (21.17b)$$

В итоге для малых колебаний полная энергия имеет вид

$$E = \frac{1}{2}m_{\text{эф}}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_{\text{эф}}x^2, \quad (21.18)$$

который отличается от найденного выше лишь заменой массы $m \rightarrow m_{\text{эф}}$ и жесткости $k \rightarrow k_{\text{эф}}$. Полная энергия не зависит от времени, поэтому, дифференцируя это уравнение по t , находим уравнение движения, аналогичное (5):

$$m_{\text{эф}}\ddot{x} = -k_{\text{эф}}x$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}}. \quad (21.19)$$

Его решение имеет вид (9), (11).

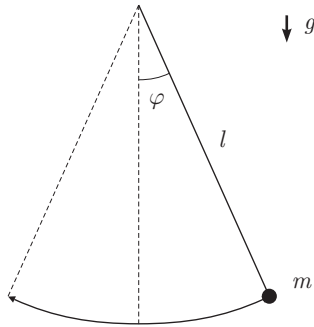


Рис. 45. Математический маятник

Пример: малые колебания математического маятника

Пусть частица массы m колеблется в вертикальной плоскости на невесомом стержне длины l в поле тяжести с ускорением g (рис. 45). В качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол φ , отсчитываемый от положения равновесия, тогда

$$K = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2, \quad U = mgl(1 - \cos \varphi).$$

Разложим потенциальную энергию в ряд по φ :

$$U = mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}mgl\varphi^2 + \dots$$

Таким образом, эффективные масса и жесткость равны

$$m_{\text{эф}} = ml^2, \quad k_{\text{эф}} = mgl,$$

а период малых колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{\text{эф}}}{k_{\text{эф}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (21.20)$$

не зависит от амплитуды колебаний¹. При учёте следующих членов разложения потенциальной энергии по φ :

$$U = mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}mgl\varphi^2 - \frac{1}{24}mgl\varphi^4 + \dots$$

колебания становятся нелинейными, а период колебаний начинает зависеть от амплитуды колебаний (попробуйте найти эту зависимость, используя уравнение (20.4b)).

21.3. Математическое отступление

Приведём также другой способ решения уравнения (5), который легко обобщается на более сложные случаи. Рассмотрим *линейное однородное дифференциальное уравнение*

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (21.21)$$

с постоянными коэффициентами a_n . Для таких уравнений справедлив *принцип суперпозиции*: если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются решениями уравнения, то их линейная комбинация

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \quad (21.22)$$

с произвольными коэффициентами $C_{1,2}$ также является решением данного уравнения. Для нахождения решения уравнения (21) в математике используется следующий стандартный прием: ищем решение этого уравнения в виде

$$x(t) = \text{Re} \{e^{\gamma t}\}, \quad (21.23)$$

который удобен тем, что производные от этого выражения отличаются от исходного только постоянным множителем

$$\frac{dx}{dt} = \text{Re} \{\gamma e^{\gamma t}\}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n} = \text{Re} \{\gamma^n e^{\gamma t}\}. \quad (21.24)$$

¹Впервые это установил, по-видимому, Галилей, сравнивая колебания люстры в соборе с биениями своего пульса.

Подставив (23)–(24) в уравнение (21), найдём, что (23) удовлетворяет дифференциальному уравнению (21), если выполняется алгебраическое уравнение для параметра γ :

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_1 \gamma + a_0 = 0. \quad (21.25)$$

Это уравнение называется *характеристическим*. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — корни этого уравнения. Тогда общее решение уравнения (21) имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \{ C_j e^{\gamma_j t} \}. \quad (21.26)$$

Для линейного осциллятора (5) характеристическое уравнение таково: $\gamma^2 + \omega^2 = 0$, его корни $\gamma_{1,2} = \pm i\omega$, поэтому

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \} = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (21.27)$$

что, конечно, совпадает с (9), (11).

Если правая часть линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами отлична от нуля и равна некоторой функции $F(t)$:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F(t), \quad (21.28)$$

то такое уравнение называется *неоднородным*. Его решение представляет собой сумму двух слагаемых — описанного выше общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_{\text{однор.}}(t) + x_{\text{частное реш.}}(t). \quad (21.29)$$

Задачи

21.1. Найти частоты малых колебаний систем, изображённых на рис. 46.

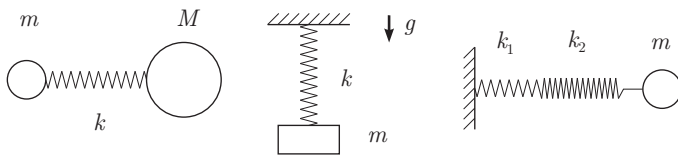


Рис. 46. К задаче 21.1

21.2. Частота малых колебаний молекулы водорода H_2 равна ω_0 . Какова частота малых колебаний молекулы дейтерия D_2 и молекулы HD ?

21.3. Найти частоту малых колебаний маятника, представляющего собой невесомый стержень, на нижнем конце которого на расстоянии a от оси вращения O закреплен груз массы M , а на верхнем конце на расстоянии b от оси вращения закреплен легкий грузик массы m (рис. 47).

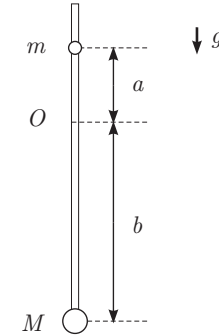


Рис. 47. К задаче 21.3

21.4. Бусинка скользит по гладкой проволоке, имеющей форму эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

малая полуось b которого горизонтальна, а большая полуось a направлена по вертикали. Ускорение силы тяжести равно $\mathbf{g} = (0, -g)$. Найти частоту малых колебаний бусинки.

21.5. Тело массы m упало с высоты h на чашку пружинных весов (рис. 48). Массы чашки и пружины пренебрежимо малы, жесткость пружины k . Прилипнув к чашке, тело начинает совершать гармонические колебания в вертикальном направлении. Найти амплитуду этих колебаний.

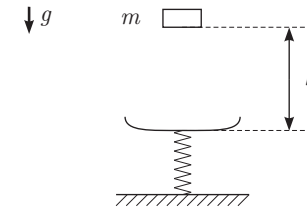


Рис. 48. К задаче 21.5

21.6. Частица массы m движется в плоскости xy под действием силы $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$. Найти траекторию частицы, если известны её начальные координаты $\mathbf{r}(0) = (r_0, 0)$ и скорость $\mathbf{v}(0) = (0, v_0)$.

21.7. Представим себе, что между Москвой и Петербургом прорыли прямолинейный тоннель. Считая Землю однородным шаром, найти время, за которое гладкий шарик, помещённый в этот тоннель и имеющий нулевую начальную скорость $v_0 = 0$, пройдёт путь от Москвы до Петербурга. Сопротивление воздуха и вращение Земли не учитывать.

§ 22. Затухающие колебания

В макроскопических системах всегда есть трение. Оно может качественно изменить колебания. Характер сил трения различается при скольжении соприкасающихся твёрдых тел и при движении твёрдого тела в жидкости или газе. В данном и следующем параграфах мы рассмотрим только этот последний случай.

Рассмотрим влияние трения на свободные колебания одномерного гармонического осциллятора, описываемого координатой x . Из опыта известно, что сила трения направлена в сторону, противоположную скорости движения \dot{x} , и, при малом абсолютном значении скорости, пропорциональна ей. Это позволяет записать силу трения в виде

$$F_{\text{тр}x} = -\alpha\dot{x},$$

где α — положительная константа, характеризующая интенсивность трения. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx. \quad (22.1)$$

Разделим его на m и введём обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m}. \quad (22.2)$$

Здесь ω_0 — частота свободных колебаний в отсутствие трения, а величина λ называется *коэффициентом затухания*. Уравнение свободных колебаний запишется в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (22.3)$$

Полагая $x = \text{Re}\{e^{\gamma t}\}$, получаем для γ квадратное характеристическое уравнение

$$\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0,$$

решения которого суть

$$\gamma_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (22.4)$$

Общее решение есть линейная суперпозиция двух решений:

$$x(t) = \text{Re}\{C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}\}.$$

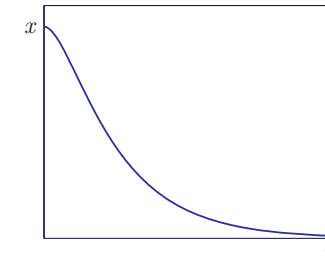


Рис. 49. Аperiодическое движение при $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) = 0$

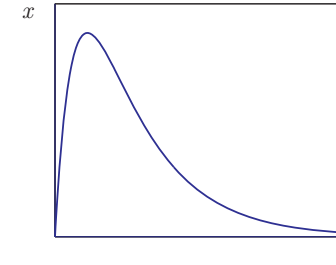
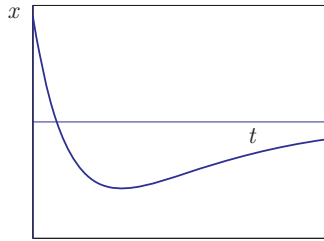


Рис. 50. Аperiодическое движение при $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) > 0$

При сильном трении ($\lambda > \omega_0$) оба характеристических показателя отрицательны. Такое движение называется *аperiодическим затуханием*. Для случая, когда начальное смещение отлично от нуля, а начальная скорость равна нулю, аperiодическое решение $x(t)$, убывая без колебаний, стремится к нулю (рис. 49). На рис. 50 представлено решение, когда начальное смещение равно нулю, а начальная скорость отлична от нуля. В этом случае происходит одно неполное колебание с дальнейшим приближением к нулю. В общем случае, когда отличны от нуля и начальное смещение, и начальная скорость, может произойти одно колебание (рис. 51).

Рис. 51. Апериодическое движение при $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) < 0$

При более слабом трении ($\lambda < \omega_0$) два решения характеристического уравнения комплексно сопряжены:

$$\gamma_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (22.5)$$

и решение уравнения движения имеет вид

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \varphi), \quad (22.6)$$

где a и φ — вещественные постоянные. Такое движение представляет собой *затухающие колебания* (рис. 52). Характерное время затухания колебаний

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

(его иногда называют *временем жизни* осциллятора).

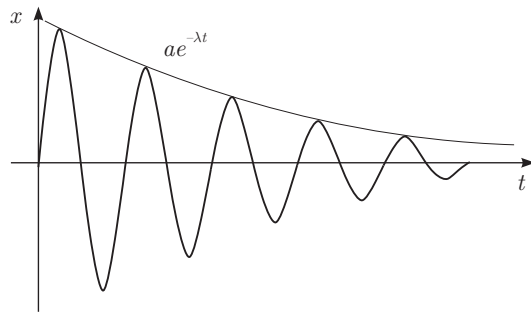


Рис. 52. Затухающие колебания

В важном предельном случае $\lambda \ll \omega_0$ величина $ae^{-\lambda t}$ почти не изменяется за время одного колебания, поэтому её условно можно назвать амплитудой колебания. Средние за период одного колебания квадраты координаты и скорости можно вычислять, считая множитель $e^{-\lambda t}$ постоянным. Эти средние квадраты пропорциональны $e^{-2\lambda t}$, поэтому энергия колебаний убывает по такому же закону:

$$E(t) = E_0 e^{-2\lambda t}.$$

Задача

22.1. Осциллятор с трением покоился в положении равновесия. Найти координату осциллятора $x(t)$, если в начальный момент времени ему сообщили скорость v_0 . Частота свободных колебаний в отсутствие трения ω_0 и коэффициент затухания λ осциллятора считаются известными.

§ 23. Вынужденные колебания, резонанс

Рассмотрим движение осциллятора с трением под действием внешней гармонической силы $F(t) = f \cos(\omega t + \varphi)$. Уравнение движения запишется в виде (ср. (17.3))

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\omega t + \varphi). \quad (23.1)$$

Решение этого неоднородного линейного уравнения представляет собой сумму двух слагаемых (21.13) — описанного выше свободного движения и вынужденного колебания. Свободное движение представляет собой затухающие колебания, поэтому через большой промежуток времени останется только *установившееся колебание*, совпадающее с вынужденным колебанием.

Вынужденное колебание естественно искать в виде гармонического колебания той же частоты ω , что у внешней силы, но с возможным сдвигом фазы δ :

$$x(t) = b \cos(\omega t + \varphi + \delta). \quad (23.2)$$

Как и в случае свободных колебаний, удобно использовать комплексную форму для переменной $x(t)$. Для этого запишем

$$\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{e^{i(\omega t + \varphi)}\}.$$

Отыскивая решение в виде

$$x(t) = \operatorname{Re}\{Be^{i(\omega t + \varphi)}\},$$

находим комплексную амплитуду

$$B = be^{i\delta} = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)}.$$

Перепишав это выражение

$$B = be^{i\delta} = \frac{f}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2},$$

видим, что мнимая часть B всегда отрицательна, а действительная часть при возрастании ω от нуля до бесконечности меняет знак с положительного на отрицательный при $\omega = \omega_0$; значит, аргумент δ изменяется в интервале $0 > \delta > -\pi$. Для вещественной амплитуды b и аргумента δ имеем

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \quad \operatorname{ctg} \delta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\lambda\omega}. \quad (23.3)$$

Графики функций b и δ в зависимости от частоты вынуждающей силы ω представлены на рис. 53. Видно, что при малом трении амплитуда b резко возрастает при определенной частоте внешней силы — наступает *резонанс*.

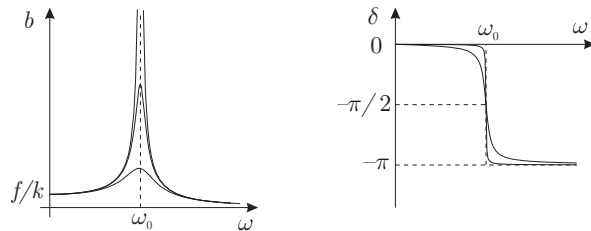


Рис. 53. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний b и фазы δ от частоты вынуждающей силы ω для различных значений коэффициента затухания λ (меньшим значениям λ соответствуют более высоко расположенные кривые на графике $b(\omega)$)

Легко найти, что при заданной амплитуде силы f амплитуда вынужденных колебаний b максимальна на частоте $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$. Рассмотрим окрестность резонанса в практически наиболее интересном случае слабого трения $\lambda \ll \omega_0$. Обозначая $\epsilon = \omega - \omega_0$ и заменяя приближенно

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0\epsilon, \quad 2i\lambda\omega \approx 2i\lambda\omega_0,$$

получаем

$$b \approx \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \operatorname{ctg} \delta \approx \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad \epsilon = \omega - \omega_0.$$

Максимальная амплитуда вынужденных колебаний обратно пропорциональна λ :

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}.$$

Квадрат амплитуды колебаний, пропорциональный энергии колебаний, уменьшается в 2 раза по сравнению с максимальным значением при $\epsilon = \pm\lambda$. Изменение фазы δ также происходит, в основном, в этом же интервале частот. Таким образом, характерная ширина области резонанса по частоте ω равна λ .

Учитывая, что свободные колебания в осцилляторе с трением затухают, видим, что со временем остаются только вынужденные колебания вида (2). Так как фаза δ отрицательна, аргумент косинуса этого решения $\omega t + \varphi + \delta$ имеет значение, которое аргумент косинуса вынуждающей силы $\omega t + \varphi$ имел в более ранний момент времени. Таким образом, *вынужденное колебание отстает по фазе от вынуждающей силы*.

Задача

23.1. Шарик массы m , подвешенный на невесомой пружинке жесткости k , может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания λ . Под действием внешней вертикальной силы $F(t) = F_0 \cos \omega t$ шарик совершает установившиеся гармонические колебания. Найти среднюю за период колебаний мощность

$$\langle N \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \dot{x}(t) dt$$

силы $F(t)$ и частоту ω силы $F(t)$, при которой $\langle N \rangle$ максимальна.

ГЛАВА V

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ

§ 24. Момент импульса

Как показано в § 9 и 13, для замкнутой системы частиц справедливы фундаментальные законы сохранения энергии и импульса. Оказывается, у замкнутой системы частиц существует ещё один фундаментальный закон — закон сохранения момента импульса.

24.1. Векторное произведение векторов

Для определения момента импульса нам понадобится понятие векторного произведения векторов. *Векторное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}* обозначается как $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ или как $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и представляет собой вектор, направленный

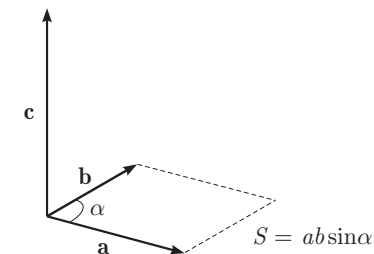


Рис. 54. Векторное произведение векторов

перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} (рис. 54), длина которого равна произведению длин векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и синуса угла α между ними:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b}, \quad c = ab \sin \alpha. \quad (24.1)$$

Отсюда видно, что векторное произведение по модулю равно площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} . Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} параллельны или антипараллельны, то их векторное произведение равно нулю:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0, \text{ если } \mathbf{a} \parallel (\pm \mathbf{b}).$$

На линии, перпендикулярной плоскости векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , направление вектора \mathbf{c} выбирается так, чтобы векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} образовывали правовинтовую тройку векторов, подобную тройке единичных векторов \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z , направленных вдоль декартовых осей xyz .

Для нахождения декартовых компонент векторного произведения полезно указать отличные от нуля векторные произведения единичных векторов:

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y,$$

после чего легко найти:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_x &= a_y b_z - a_z b_y, \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_y = a_z b_x - a_x b_z, \\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \quad (24.2)$$

В компактном виде эти соотношения можно представить как определитель:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Из этого выражения видно, что скалярное произведение вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и вектора \mathbf{c} можно представить как определитель, построенный из компонент всех трёх векторов:

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Как известно, при циклической замене строк в определителе его величина не изменяется, поэтому имеют место равенства:

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = ([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a}) = ([\mathbf{c}, \mathbf{a}], \mathbf{b}). \quad (24.3)$$

Пусть $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{g}(t)$ — зависящие от времени векторы. Из формул (2) следует, что

$$\frac{d[\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)]}{dt} = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \times \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt}. \quad (24.4)$$

24.2. Момент силы. Момент импульса и его сохранение для движения частицы в центральном поле

Пусть сила \mathbf{F} приложена в точке \mathbf{r} . Определим *момент силы* \mathbf{K} равенством

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (24.5)$$

модуль вектора момента силы

$$K = rF \sin \alpha,$$

где α — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{F} . Если ввести *плечо силы* $r_\perp = r \sin \alpha$, то

$$K = r_\perp F.$$

Определим *момент импульса* \mathbf{M} частицы, находящейся в точке \mathbf{r} и имеющей импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, равенством

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (24.6)$$

Между силой и моментом силы (так же как между импульсом и моментом импульса) имеется определённое сходство. Мы знаем, что для отдельной частицы изменение импульса определяется действующей на частицу силой:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (24.7)$$

Аналогично, для отдельной частицы изменение момента импульса определяется моментом силы, так как

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{K}. \quad (24.8)$$

С другой стороны, имеется и существенное отличие. В данной инерциальной системе отсчёта импульс и сила не зависят от конкретного выбора начала отсчёта этой системы, при смещении начала отсчёта, т. е. при преобразовании вида

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c, \quad (24.9)$$

ни импульс, ни сила не изменяются. В то же время момент силы и момент импульса прямо связаны с выбором начала отсчёта и изменяются при преобразовании (9).

Импульс и момент импульса предоставляют нам важные сведения о траектории частицы. Поскольку скорость частицы $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$, то направление импульса совпадает с направлением касательной к траектории частицы. Постоянство импульса означает, что траектория частицы является прямой линией. Направление момента импульса $\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ортогонально радиус-вектору \mathbf{r} и скорости частицы \mathbf{v} . Постоянство момента импульса означает, что траектория частицы является плоской кривой.

Если действующая на частицу сила является центральной, т.е. сила $\mathbf{F} \parallel (\pm \mathbf{r})$, то импульс изменяется согласно уравнению (7), траектория частицы не является, вообще говоря, прямой линией. Напротив, момент импульса в этом случае сохраняется, так как момент центральной силы равен нулю: $\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Таким образом, **при движении частицы под действием центральной силы момент импульса частицы сохраняется, а траектория частицы в этом случае является плоской кривой.**

24.3. Секториальная скорость

Закону сохранения момента импульса можно придать наглядный геометрический смысл, используя понятие секториальной скорости. Пусть за время dt частица сместится из точки \mathbf{r} на расстояние $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ (рис. 55). Так как модуль векторного произведения $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ равен площади параллелограмма со сторонами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, то длина вектора

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}, d\mathbf{r}]$$

равна площади сектора, образованного векторами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, т.е. площади, “заметённой” радиус-вектором частицы за время dt . Векторную величину $d\mathbf{S}/dt$ называют *секториальной скоростью*, она равна

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]}{dt} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}, \mathbf{v}]. \quad (24.10)$$

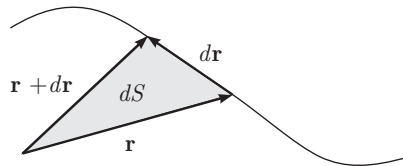


Рис. 55. К определению секториальной скорости

Направление вектора секториальной скорости задает плоскость орбиты, а длина — площадь, заметаемую радиус-вектором частицы в единицу времени. Секториальная скорость связана с моментом импульса соотношением

$$\mathbf{M} = 2m \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad (24.11)$$

поэтому сохранение момента импульса означает, что **секториальная скорость в центральном поле является постоянной величиной.**

24.4. Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы тел

Покажем, что у замкнутой системы частиц полный момент импульса сохраняется. Производная по времени от полного момента импульса системы равна сумме отдельных моментов сил, действующих на данную частицу со стороны всех остальных частиц замкнутой системы:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (24.12)$$

где

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}.$$

В сумме (12) обязательно встретятся пары слагаемых вида

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki}. \quad (24.13)$$

Используя третий закон Ньютона $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, можем переписать (13) в виде

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{ik}.$$

Правая часть этого выражения равна нулю, так как в механике (см. § 10)

$$\mathbf{F}_{ik} \parallel \pm (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k).$$

В итоге вся сумма (12) окажется равной нулю, что и соответствует сохранению полного момента импульса рассматриваемой замкнутой системы частиц.

Если система частиц не является замкнутой, то

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}_{\text{внеш}}.$$

Задачи

24.1. Найти векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, если:

а) $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$;

б) $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ и $\mathbf{b} = (2, 0, 0)$;

в) $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ и $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$.

24.2. Студент проходит со скоростью $v = 1$ м/с вдоль стены на расстоянии $a = 3$ м от неё. Приняв идеализированную модель студента в виде материальной точки массы $m = 50$ кг, найти момент импульса этой точки относительно системы координат, начало которой помещено в одном из углов комнаты, ось z направлена по вертикали, а оси x и y горизонтальны и параллельны двум соседним стенам комнаты.

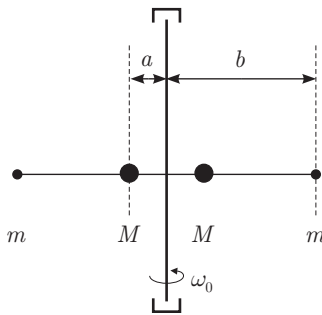


Рис. 56. К задаче 24.3

24.3. Упрощённую модель балерины можно представить в виде невесомой перекладины, к которой прикреплены симметричные грузики массы M и m , расположенные на расстоянии a и b от вертикальной оси вращения (рис. 56). Пусть в начальный момент наша балерина вращается с угловой скоростью ω_0 . Какой станет угловая скорость вращения балерины ω , если расстояние грузиков массы m уменьшится за счёт внутренних сил балерины до значения a ? Найти отношение ω/ω_0 , если $M = 3m$ и $b = 4a$.

§ 25. Движение в центральном поле

Для изучения движения частицы в центральном поле удобно воспользоваться законами сохранения энергии E и момента импульса \mathbf{M} :

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(r) = \text{const}; \quad (25.1)$$

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}. \quad (25.2)$$

Из уравнения (2) следует, что орбита находится в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору \mathbf{M} , пусть это будет xy -плоскость. Вводя полярные координаты r и φ в этой плоскости (см. § 1), получаем

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2 + U(r); \quad (25.3)$$

$$\mathbf{M} = (0, 0, M), \quad M = mr^2\dot{\varphi}. \quad (25.4)$$

Используя (4), исключим $\dot{\varphi}$ из (3), тогда

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{эф}}(r), \quad U_{\text{эф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (25.5)$$

Таким образом, радиальное движение сведено к одномерному движению в эффективном поле $U_{\text{эф}}(r)$, содержащем, помимо потенциальной энергии $U(r)$, дополнительное слагаемое $M^2/(2mr^2)$.

Рассмотрим более детально траекторию частицы. Вид траектории, т. е. зависимость $r(\varphi)$ (или $\varphi(r)$), можно найти из (4) и (5). Действительно, из (5) находим

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{эф}}(r)]} \quad \text{для } \dot{r} \geq 0 \quad (25.6)$$

или

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}}, \quad (25.7)$$

откуда и получаем зависимость $t(r)$ (ср. (20.4)):

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} + t_0. \quad (25.8)$$

Переписав (4) в форме

$$dt = \frac{mr^2}{M} d\varphi, \quad (25.9)$$

исключим dt из (7) и найдём уравнение траектории:

$$\varphi = \pm \frac{M}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} + \varphi_0. \quad (25.10)$$

Задачи

25.1. Найти, при каких прицельных параметрах ρ метеорит, имеющий на бесконечности скорость v_0 , упадёт на Солнце (рис. 57). Солнце считать однородным шаром радиуса R и массы m_C , влиянием планет пренебречь.

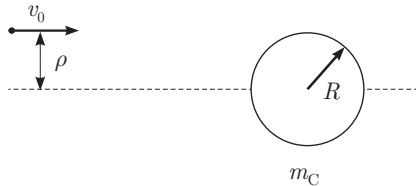


Рис. 57. К задаче 25.1

25.2. Определить наименьшее расстояние, на которое приблизится частица массы m с зарядом q , налетающая из бесконечности со скоростью v_0 и прицельным параметром ρ на другую такую же частицу, первоначально покоившуюся. Учесть только электрическое отталкивание частиц и пренебречь их гравитационным притяжением.

§ 26. Задача Кеплера

Рассмотрим движение частицы массы m в кулоновском поле притяжения

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha = G m_C m$ для движения Земли в гравитационном поле Солнца массы m_C или $\alpha = ke^2$ для движения электрона в электрическом поле протона (атом водорода).

26.1. Траектории

Эффективная потенциальная энергия для данного поля

$$U_{\text{эф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

изображена на рис. 58. Из него видно, что: если $E_1 \geq 0$, то частица, прихо-

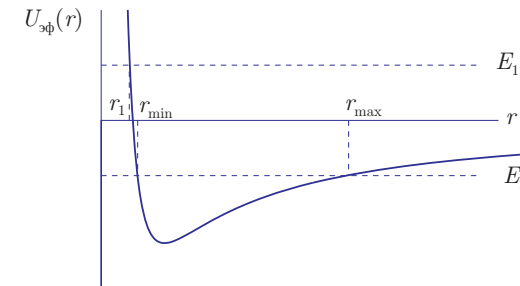


Рис. 58. Эффективная потенциальная энергия $U_{\text{эф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$

дящая из бесконечности, будет отражена потенциальным барьером $U_{\text{эф}}(r)$ в точке r_1 и снова уйдёт на бесконечность (инфинитное движение):

$$r \geq r_1 \quad \text{при} \quad E_1 \geq 0;$$

если $E_2 < 0$, то частица испытывает радиальные колебания в области (финитное движение)

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \quad \text{при} \quad E_2 < 0.$$

Уравнение траектории имеет вид (25.10)

$$\varphi = \pm \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const.}$$

Если ввести так называемый *параметр орбиты*

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}$$

и новую безразмерную переменную

$$u = \frac{p}{r},$$

то получим

$$\varphi = \mp \int \frac{du}{\sqrt{e^2 - (u-1)^2}} + \text{const},$$

где величина

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

называется *эксцентриситетом* орбиты.

Интегрирование выполняется элементарно:

$$\varphi = \pm \arccos \frac{u-1}{e} + \text{const}$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \text{const})}.$$

Мы видим, что $r = r_{\min}$ при $\varphi = \text{const}$. Выбирая $\text{const} = 0$, имеем $r = r_{\min}$ при $\varphi = 0$ (для движения планеты эта точка называется *перигелием*). В результате получаем уравнение траектории в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

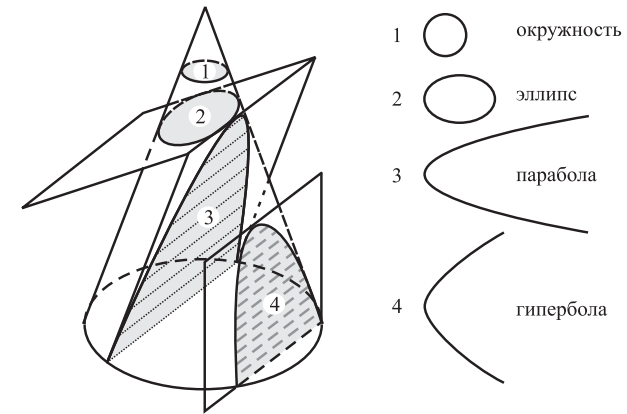


Рис. 59. Конические сечения

Это известные кривые, соответствующие коническим сечениям. Напомним, что коническими сечениями называются кривые, по которым поверхность прямого круглого конуса пересекается с плоскостью. Если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, то сечение будет гиперболой, параболой или эллипсом (в частном случае — окружностью) в зависимости от того, параллельна ли секущая плоскость двум, одной или не параллельна ни одной образующей конуса (рис. 59). Для нашего случая получаем, что траектория есть:

- окружность для $e = 0$ (при $E = -m\alpha^2/(2M^2)$);
- эллипс для $e < 1$ (при $E < 0$);
- парабола для $e = 1$ (при $E = 0$);
- гипербола для $e > 1$ (при $E > 0$).

Отметим, наконец, что параметр p равен значению радиуса при $\varphi = \pi/2$:

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} = r \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right).$$

26.2. Законы Кеплера

Рассмотрим более подробно важный случай $E < 0$. В этом случае траектория — эллипс с центром C , фокусом O , большой полуосью $a = CA = (1/2) DA$, малой полуосью $b = CB$ и параметром траектории $p = OP$ (рис. 60). Тот факт, что планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых расположено Солнце, составляет содержание *первого закона Кеплера*.

Поскольку рассматриваемое поле является центральным, для него справедлив закон сохранения секториальной скорости, который можно сформулировать в таком виде: за равные промежутки времени радиус-вектор планеты заметает одинаковые площади (*второй закон Кеплера*).

Большая полуось a зависит только от энергии, но не от момента импульса:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (OA + DO) = \frac{1}{2} (r_{\min} + r_{\max}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}. \end{aligned}$$

Далее нетрудно показать, что $CO = ae$, $OB = a$ и потому

$$b = CB = \sqrt{(OB)^2 - (CO)^2} = \sqrt{1 - e^2} a,$$

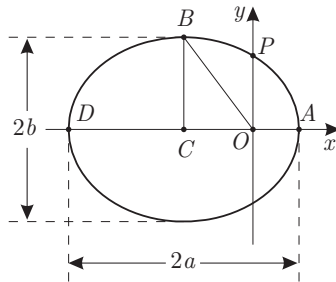


Рис. 60. Элементы эллиптической траектории



Рис. 61. Иоганн Кеплер (1571–1630)

откуда следует, что малая полуось b зависит не только от энергии, но и от момента импульса:

$$b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Наконец, выпишем полезные соотношения:

$$r_{\min} = (1 - e) a, \quad r_{\max} = (1 + e) a, \quad p = (1 - e^2) a.$$

Период обращения можно найти, используя постоянство секториальной скорости. Полная площадь S , заметённая радиус-вектором планеты за один оборот, равна произведению постоянной секториальной скорости dS/dt на время одного оборота T :

$$S = \frac{dS}{dt} \cdot T = \frac{M}{2m} T.$$

С другой стороны, эта же величина есть площадь эллипса с полуосями a и b , т. е. $S = \pi ab$, поэтому период обращения

$$T = 2\pi \frac{abm}{M} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}.$$

Отсюда получим, что отношение

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{Gm_C}$$

является одним и тем же для всех планет солнечной системы. Отсюда следует *третий закон Кеплера*: для всех планет отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси траектории оказывается одинаковым.

Задача

26.1. В спутник, вращающийся по круговой орбите, радиус которой вдвое больше радиуса Земли, попадает метеорит той же массы и застревает в нём. В момент удара скорость метеорита антипараллельна скорости спутника и вдвое меньше её по величине. Упадёт ли образовавшаяся система на Землю?

ГЛАВА VI

ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА. СТАТИКА

В этой главе под *твёрдым телом* мы будем подразумевать *совокупность материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения*. Это означает, что мы пренебрегаем всеми видами деформации твёрдого тела. Во многих случаях такое пренебрежение вполне разумно. Однако такое приближение возможно лишь в нерелятивистской механике, ибо абсолютно твёрдое тело противоречит теории относительности, потому, например, что с его помощью можно было бы передавать сигналы с произвольной скоростью.

§ 27. Поступательное и вращательное движение твёрдого тела

Положение твёрдого тела в некоторой инерциальной системе координат XYZ можно задать следующим образом. Пусть к этому телу “прибита” система координат $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ с началом в точке O (рис. 62), мы будем называть эту систему координат *подвижной*. Тогда шесть величин — три координаты радиус-вектора \mathbf{R} точки O в инерциальной системе XYZ и три угла, которые задают ориентацию осей подвижной системы xuz относительно осей XYZ , — полностью определяют положение твёрдого тела.

Пусть твёрдое тело состоит из N материальных точек и пусть m_a и \mathbf{r}_a — масса и радиус-вектор a -й точки в системе координат xuz . Для любой точки $a = 1, 2, \dots, N$ ее радиус-вектор в инерциальной системе равен

$$\mathbf{R} + \mathbf{r}_a.$$

Подчеркнем важный для дальнейшего факт, что *проекции x_a, y_a, z_a вектора \mathbf{r}_a на оси xuz подвижной системы координат не изменяются при движении твёрдого тела, хотя сам вектор \mathbf{r}_a может изменять свое направление (но не длину!)*.

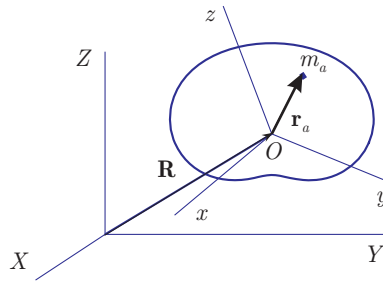


Рис. 62. Инерциальная система координат XYZ и подвижная система координат xyz , “прибитая” к твёрдому телу

Произвольное движение твёрдого тела можно представить как совокупность двух простых движений — поступательного и вращательного. При *поступательном* движении изменяется вектор \mathbf{R} , а вектор \mathbf{r}_a не изменяет своего направления, так что любая линия, соединяющая две произвольные материальные точки данного твёрдого тела, остается параллельной самой себе при таком движении. В этом случае скорость \mathbf{v}_a любой материальной точки твёрдого тела совпадает со скоростью движения точки O , т. е.

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{V}. \quad (27.1)$$

При чисто *вращательном* движении, напротив, положение точки O не изменяется, а твёрдое тело вращается с угловой скоростью Ω вокруг направления, задаваемого единичным вектором \mathbf{n} . Удобно ввести вектор угловой скорости

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cdot \mathbf{n}.$$

Конечно, этот вектор зависит от времени $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t)$, поскольку как величина угловой скорости, так и направление вращения могут изменяться с течением времени. При вращательном движении твёрдого тела составляющие его материальные точки вращаются с угловой скоростью Ω в плоскостях, перпендикулярных направлению \mathbf{n} . В этом случае a -я материальная точка вращается по окружности радиуса

$$\rho_a = r_a \sin \alpha_a, \quad (27.2)$$

где α_a — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{r}_a , со скоростью

$$v_a = \Omega \rho_a. \quad (27.3)$$

За время dt частица переместится на расстояние $|d\mathbf{r}_a| = v_a dt = \Omega r_a \sin \alpha_a dt$ в направлении, задаваемом вектором $[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]$. Поэтому

$$d\mathbf{r}_a = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a] dt \quad (27.4a)$$

и скорость a -й материальной точки можно записать в виде векторного произведения

$$\mathbf{v}_a = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]. \quad (27.4b)$$

В случае, когда твёрдое тело движется произвольно, скорость a -й материальной точки складывается из скоростей поступательного (1) и вращательного (4b) движений и оказывается равной

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]. \quad (27.5)$$

Начало подвижной системы координат xyz , т. е. точка O , может быть выбрана совершенно произвольно, в том числе и вне самого твёрдого тела. Легко обнаружить, однако, что *угловая скорость Ω не зависит от выбора точки O* . Это очевидно уже из того факта, что полный оборот происходит за одно и то же время при любом выборе точки O . Если можно найти такую точку O , чтобы её скорость \mathbf{V} в данный момент времени была равна нулю, то в этом случае существует возможность представить движение твёрдого тела как чистое вращение. Соответствующую ось вращения, проходящую через точку O , называют *мгновенной осью вращения*. Приведём пример. Когда колесо катится по плоскости без проскальзывания, точка соприкосновения колеса с плоскостью имеет нулевую скорость. Если выбрать эту точку в качестве точки O , то всё движение колеса можно представить как чистое вращение вокруг этой точки. Конечно, в следующий момент времени точка соприкосновения с плоскостью будет отвечать другому месту на колесе, так что мгновенная ось вращения в разные моменты времени проходит через различные точки колеса и плоскости.

§ 28. Импульс и кинетическая энергия твёрдого тела. Момент инерции

Импульс твёрдого тела равен сумме импульсов материальных точек данного тела:

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a. \quad (28.1a)$$

Подставив (27.5) и введя обозначения массы всего твёрдого тела и радиус-вектора его центра масс

$$m = \sum_a m_a, \quad \mathbf{r}_c = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{m}, \quad (28.2)$$

найдем

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} + m[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_\text{ц}]. \quad (28.1b)$$

Если начало отсчёта “подвижной” системы координат xyz поместить в центр масс твёрдого тела, так что $\mathbf{r}_\text{ц} = 0$, то

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V}_\text{ц}, \quad (28.3)$$

т. е. импульс твёрдого тела окажется равен импульсу материальной точки с массой m и скоростью, равной скорости движения центра масс $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\text{ц}$.

Кинетическая энергия твёрдого тела равна сумме кинетических энергий материальных точек данного тела:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a^2. \quad (28.4a)$$

Подставив (27.5) и используя обозначения (2), найдём

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2 + m \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{r}_\text{ц} \times \mathbf{V}). \quad (28.4b)$$

Если начало отсчёта системы координат xyz поместить в центр масс твёрдого тела, то

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_\text{ц}^2 + K_\text{ц}, \quad K_\text{ц} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2, \quad (28.5)$$

т. е. кинетическая энергия твёрдого тела окажется равной сумме кинетической энергии материальной точки (с массой m и скоростью $\mathbf{V}_\text{ц}$) и кинетической энергии вращения твёрдого тела (напомним, что аналогичный результат для произвольной системы материальных точек мы уже получили в § 14).

Рассмотрим более подробно случай, когда точка O покоится, так что вся кинетическая энергия твёрдого тела является энергией вращения

$$K_\text{вращ} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2. \quad (28.6)$$

Пусть твёрдое тело вращается с угловой скоростью Ω вокруг направления, задаваемого единичным вектором \mathbf{n} , в этом случае a -я материальная точка

вращается по окружности радиуса ρ_a со скоростью $v_a = \Omega \rho_a$ (см. (27.2), (27.3)). Поэтому кинетическая энергия такого вращения равна

$$K_\text{вращ} = \frac{1}{2} I_\mathbf{n} \Omega^2, \quad (28.7)$$

где введено обозначение

$$I_\mathbf{n} = \sum_a m_a \rho_a^2 \quad (28.8)$$

для момента инерции твёрдого тела относительно оси \mathbf{n} . В частности, моменты инерции относительно осей подвижной системы координат xyz равны

$$I_1 \equiv I_x = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2), \quad I_2 \equiv I_y = \sum_a m_a (x_a^2 + z_a^2), \quad (28.9)$$

$$I_3 \equiv I_z = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2).$$

Отсюда следует, что сумма двух разных моментов инерции I_i всегда больше или равна любому моменту инерции. Так,

$$I_1 + I_2 = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2 + 2z_a^2) \geq \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) = I_3. \quad (28.10)$$

Из этого же соотношения видно, что для плоского твёрдого тела, расположенного в плоскости xy (в этом случае все координаты $z_a = 0$), имеет место равенство

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (28.11)$$

Рассмотрим случай, когда начало O системы координат xyz помещено в центр масс твёрдого тела, а начало другой системы координат $x'y'z'$ — точка O' — смещено на некоторое расстояние. Напомним, что вектор угловой скорости и его направление \mathbf{n} не зависят от выбора начала подвижной системы координат. При первом выборе кинетическая энергия вращения равна

$$K_\text{ц} = \frac{1}{2} I_\mathbf{n}^\text{ц} \Omega^2,$$

а при втором выборе —

$$K = \frac{1}{2} I_\mathbf{n}' \Omega^2.$$

Эту формулу можно переписать также в виде (5):

$$\frac{1}{2} I'_n \Omega^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_c^2 + \frac{1}{2} I_n^c \Omega^2.$$

Учитывая, что скорость движения центра масс в $x'y'z'$ системе координат равна $V_c = B\Omega$, где B — расстояние между осями вращения, проходящими через точки O и O' , найдём

$$\frac{1}{2} m \mathbf{V}_c^2 = \frac{1}{2} m B^2 \Omega^2.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получаем соотношение (которое иногда называется *теоремой Гюйгенса–Штейнера*)

$$I'_n = I_n^c + mB^2. \quad (28.12)$$

Из этой формулы видно, что момент инерции имеет наименьшее значение в системе центра масс твёрдого тела.

Пример 1. Однородное кольцо массы m и радиуса R . Выберем начало системы координат xyz в центре кольца, плоскость xy совместим с плоскостью кольца. При вычислении I_3 учтем, что расстояние ρ_a от любой точки кольца до оси вращения — оси z — равно R , поэтому $I_3 = mR^2$. В силу симметрии моменты инерции I_1 и I_2 совпадают и (с учетом (11)) равны $I_1 = I_2 = I_3/2$. Таким образом, для кольца

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} mR^2, \quad I_3 = mR^2. \quad (28.13)$$

Пример 2. Однородный диск массы m и радиуса R . Такой диск удобно рассматривать как совокупность тонких колец радиуса r и толщиной dr , масса такого кольца

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr.$$

Отсюда

$$I_3 = \int_0^m r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2, \\ I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{4} mR^2. \quad (28.14)$$

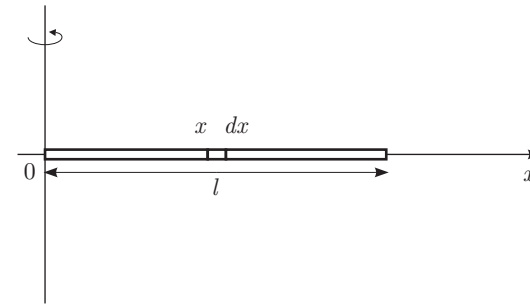


Рис. 63. К расчёту момента инерции стержня

Пример 3. Тонкий однородный стержень AB массы m и длины l . Выберем начало системы координат xyz в точке A , ось x совместим со стержнем (рис. 63). Элемент стержня длиной dx , расположенный в точке x , имеет массу $dm = (m/l) dx$, поэтому

$$I_2 = I_3 = \int_0^m x^2 dm = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} ml^2, \quad I_1 = 0. \quad (28.15)$$

Задачи

28.1. Найти моменты инерции I_1, I_2, I_3 однородной сферы радиуса R и массы m относительно системы координат xyz с центром в центре сферы.

28.2. Найти моменты инерции I_1, I_2, I_3 однородного шара массы m и радиуса R относительно системы координат xyz с центром в центре шара.

28.3. По наклонной плоскости скатывается без проскальзывания тонкостенный цилиндр радиуса R . Какую скорость будет иметь центр цилиндра, скатившегося без начальной скорости с высоты h ? Решите такую же задачу для сплошного цилиндра.

§ 29. Момент импульса твёрдого тела

Момент импульса твёрдого тела равен сумме моментов импульса материальных точек данного тела:

$$\mathbf{M} = \sum_{a=1}^N m_a [\mathbf{R} + \mathbf{r}_a, \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] = \quad (29.1) \\ = m[\mathbf{R}, \mathbf{V}] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] + m[\mathbf{r}_c, \mathbf{V}] + m[\mathbf{R}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_c]].$$

Если начало отсчёта системы координат xyz поместить в центр масс твёрдого тела, то

$$\mathbf{M} = m[\mathbf{R}, \mathbf{V}_\Pi] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]], \quad (29.2)$$

т. е. момент импульса твёрдого тела окажется равен сумме момента импульса материальной точки с массой m , радиус-вектором \mathbf{R} и скоростью, равной скорости движения центра масс, и момента импульса, соответствующего вращению твёрдого тела относительно точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

Рассмотрим более подробно случай, когда точка O покоится, так что

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]]. \quad (29.3)$$

Пусть для определенности ось вращения \mathbf{n} совпадает с осью Z , тогда a -я материальная точка вращается по окружности радиуса ρ_a (27.2) в плоскости, параллельной плоскости XY , со скоростью $v_a = \Omega \rho_a$, лежащей в той же плоскости и перпендикулярной радиусу вращения. В этом случае компонента момента импульса

$$M_Z = \sum_a m_a \rho_a v_a = I_Z \Omega, \quad (29.4)$$

где I_Z — момент инерции твёрдого тела (28.7) относительно оси Z .

Используя (3) легко показать (с учетом (28.6)), что

$$\frac{1}{2} \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2 = K_{\text{вращ}}. \quad (29.5)$$

Так как кинетическая энергия $K_{\text{вращ}}$ положительна, то угол между векторами \mathbf{M} и $\boldsymbol{\Omega}$ всегда меньше 90° .

§ 30. Уравнения движения твёрдого тела

Начнём с уравнения для импульса твёрдого тела, стартуя от известного закона Ньютона для движения a -й материальной точки под действием силы \mathbf{f}_a :

$$\frac{d(m_a \mathbf{v}_a)}{dt} = \mathbf{f}_a.$$

Суммируя это уравнение по всем материальным точкам твёрдого тела, получаем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (30.1)$$

где \mathbf{P} — импульс твёрдого тела, определенный формулами (28.1)–(28.3), а

$$\mathbf{F} = \sum_a \mathbf{f}_a$$

— полная действующая на тело сила. Так как внутренние силы, действующие между материальными точками твёрдого тела, согласно третьему закону Ньютона взаимно скомпенсированы, то фактически сила \mathbf{F} есть полная внешняя сила, действующая на твёрдое тело. Если начало отсчёта подвижной системы координат xyz поместить в центр масс твёрдого тела (см. (28.3)), то $\mathbf{P} = m \mathbf{V}_\Pi$.

Аналогично может быть получено уравнение для момента импульса твёрдого тела:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \quad (30.2)$$

где \mathbf{M} — момент импульса твёрдого тела, определенный формулами (29.1)–(29.3), а

$$\mathbf{K} = \sum_a [\mathbf{r}_a, \mathbf{f}_a]$$

— полный действующий на тело момент сил (а так как внутренние моменты сил взаимно скомпенсированы, то фактически \mathbf{K} есть полный момент внешних сил, действующих на твёрдое тело). При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси, например оси Z , компонента момента $M_Z = I_Z \Omega$ и уравнение (2) принимают вид

$$\frac{d(I_Z \Omega)}{dt} = K_Z. \quad (30.3)$$

Во многих случаях жизненный опыт правильно подсказывает нам, как будет изменяться движение невращающегося твёрдого тела при воздействии на него той или иной силой. Иными словами, мы довольно часто можем правильно угадать решение уравнения (1). Несколько иная ситуация имеет место по отношению к уравнению (2). При внешнем сходстве его с уравнением (1) мы нередко сталкиваемся с фактами совершенно неожиданного поведения вращающегося твёрдого тела при воздействии на него некоторого момента сил. Особенно часто это случается у так называемых

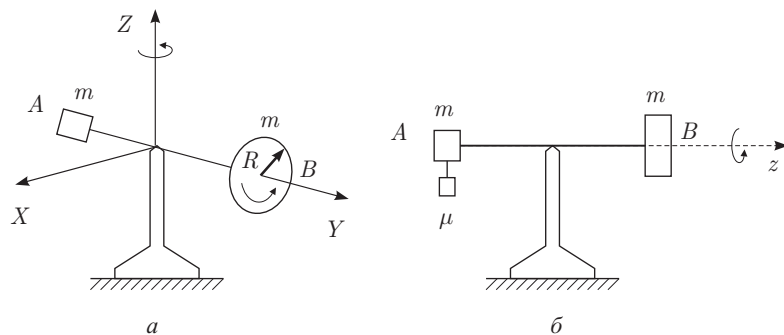


Рис. 64. Простая модель гироскопа

гироскопов — быстро вращающихся тел, ось вращения которых может изменять своё направление. Рассмотрим следующий простой гироскоп. Его основной элемент — лёгкий стержень AB , на конце A которого закреплён небольшой грузик m , а на конце B — диск такой же массы и радиуса R , способный вращаться вокруг линии AB (рис. 64, a). Если “прибить” систему отсчёта xyz к середине стержня и направить ось z к диску, то момент инерции $I_3 = mR^2$, а радиус-векторы точек A и B связаны соотношением $\mathbf{r}_A = -\mathbf{r}_B$.

Этот стержень помещают на подставку, на которой он может вращаться вокруг вертикальной или горизонтальной осей, проходящих через центр стержня (рис. 64, b). На этих своеобразных весах устанавливается равновесие (стержень принимает горизонтальное положение) независимо от того, вращается диск на конце B или нет. Оси системы отсчёта XYZ связаны с закреплённой подставкой, причём ось Z направлена по вертикали, а оси X и Y — в горизонтальной плоскости. Будем считать, что в начальный момент стержень располагается вдоль оси Y .

Добавим теперь к грузику на конце A небольшой перегрузок массы μ (его радиус-вектор равен \mathbf{r}_A). Если диск не вращается, то (в полном согласии с нашими ожиданиями) равновесие нарушится и конец A опустится. Если же диск вращается с большой угловой скоростью Ω вокруг направления AB , то при добавлении перегрузки произойдёт нечто неожиданное: равновесие не нарушится и конец A не опустится. Вместо этого стержень, не изменяя своего горизонтального положения, начинает вращаться вокруг вертикального направления с небольшой угловой скоростью ω . Такое движение стержня называют *прецессией*. Попробуем разобраться, почему это происходит, и найдём величину скорости прецессии ω .

При добавлении небольшого перегрузка на стержень начинает действовать небольшой момент сил

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}_A, \mu \mathbf{g}]. \quad (30.4)$$

Этот момент сил направлен вдоль оси X и стремится развернуть стержень вокруг этой оси. Это и происходит в случае, когда диск не вращается. У прежде неподвижного стержня через время dt появляется в согласии с уравнением (2) момент импульса $d\mathbf{M} = \mathbf{K}dt$ и равновесие нарушается.

При очень быстром вращении диска момент импульса стержня \mathbf{M} практически совпадает по направлению с направлением оси z (от центра стержня к диску, иными словами вектор \mathbf{M} параллелен вектору $\mathbf{r}_B = -\mathbf{r}_A$), а по величине со значением $I_3\Omega$, поэтому

$$\mathbf{r}_A = -\frac{\mathbf{M}}{I_3\Omega} r_A. \quad (30.5)$$

Подставляя (4) и (5) в уравнение (2), получаем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \left[\frac{\mu r_A}{I_3\Omega} \mathbf{g}, \mathbf{M} \right]. \quad (30.6)$$

Это означает, что у стержня, имеющего вначале момент импульса, направленный по оси Y , через время dt появляется приращение момента импульса

$$d\mathbf{M} = \left[\frac{\mu r_A}{I_3\Omega} \mathbf{g}, \mathbf{M} \right] dt, \quad (30.7)$$

направленное по оси X . Но если изменение вектора ортогонально ему самому, то это означает, что вектор просто повернулся (ср. обсуждение перед уравнением (27.4a)), а угловая скорость такого поворота — скорость прецессии — равна

$$\omega = \frac{\mu g r_A}{I_3\Omega} \quad (30.8)$$

и направлена по вектору \mathbf{g} .

Приведём характерные значения для демонстрационного прибора (см. рис. 64): масса грузика $m \sim 0,1$ кг, масса перегрузка $\mu \sim 0,01$ кг, расстояние от центра стержня до его конца $r_A \sim 0,25$ м, радиус диска $R \sim 0,05$ м, диск делает примерно 10 тыс. оборотов в минуту, что соответствует угловой скорости $\Omega \sim 10^3$ 1/с. Используя формулу (8), нетрудно оценить угловую скорость прецессии ω или время одного оборота стержня:

$$T_{\text{пр}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{mR^2\Omega}{\mu g r_A} \sim 1 \text{ мин.}$$

Задача

30.1. Тонкая нить намотана на катушку, которая представляет собой однородную трубочку радиуса R и массы m с тремя спицами (рис. 65).

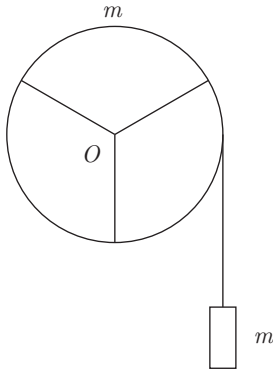


Рис. 65. К задаче 30.1

Каждая спица — тонкий однородный стержень массы m . Катушка может вращаться вокруг закреплённой оси O . К свободному концу нити подвешена гирька массы m , которую отпускают без начальной скорости. Найти ускорение и скорость гирьки через время t , а также пройденный ею путь. Ускорение свободного падения равно g .

§ 31. Свободное движение шарового и симметрического волчков

Твёрдое тело, обладающее сферической симметрией, будем называть *шаровым волчком*. Твёрдое тело, обладающее симметрией вращения относительно некоторой оси (*оси симметрии*), будем называть *симметрическим волчком*.

При свободном движении твёрдого тела внешняя сила и момент силы равны нулю $\mathbf{F} = \mathbf{K} = 0$, и потому импульс и момент импульса твёрдого тела сохраняются, а центр масс движется с постоянной скоростью. Выберем инерциальную систему, в которой центр масс покоится, и поместим начало отсчёта инерциальной системы XYZ и подвижной системы $x y z$ в центр масс твёрдого тела.

У шарового волчка моменты инерции $I_1 = I_2 = I_3$, поэтому

$$\mathbf{M} = I_1 \boldsymbol{\Omega}. \quad (31.1)$$

Отсюда видно, что при свободном движении шарового волчка сохраняется не только момент импульса \mathbf{M} , но и сонаправленный с ним вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$.

Законов сохранения импульса и момента импульса достаточно и для определения свободного движения симметрического волчка, хотя его движение и выглядит заметно сложнее, поскольку в этом случае вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, вообще говоря, не сохраняется и не совпадает по направлению с вектором постоянного момента импульса \mathbf{M} . Из этого общего утверждения есть два важных исключения. Покажем, что векторы $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{M} оказываются параллельны, если угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ параллельна или перпендикулярна оси симметрии волчка.

1. Пусть угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ параллельна оси симметрии волчка. Рассмотрим a -ю материальную точку волчка, её момент импульса равен

$$\mathbf{M}_a = m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a.$$

У симметрического волчка каждой материальной точке a можно сопоставить симметричную материальную точку \bar{a} , полученную при повороте вокруг оси симметрии на 180° . В рассматриваемом случае для этих двух симметричных точек выполняются следующие соотношения (рис. 66):

$$\mathbf{v}_{\bar{a}} = -\mathbf{v}_a \perp \boldsymbol{\Omega}, \quad (31.2a)$$

а разность $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{\bar{a}}$ ортогональна оси симметрии, поэтому

$$(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{\bar{a}}) \times \mathbf{v}_a \parallel \boldsymbol{\Omega}. \quad (31.3a)$$

Используя эти соотношения, для суммы моментов импульса двух симметричных материальных точек получаем

$$\mathbf{M}_a + \mathbf{M}_{\bar{a}} = m_a (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{\bar{a}}) \times \mathbf{v}_a, \quad (31.4a)$$

что с учетом (3a) и доказывает тот факт, что в рассматриваемом случае суммарный момент импульса волчка \mathbf{M} параллелен угловой скорости:

$$\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\Omega}, \text{ если } \boldsymbol{\Omega} \parallel \text{оси симметрии.} \quad (31.5a)$$

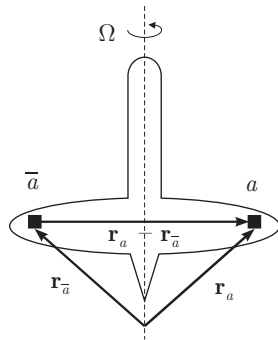


Рис. 66. Вращение симметрического волчка вокруг оси симметрии

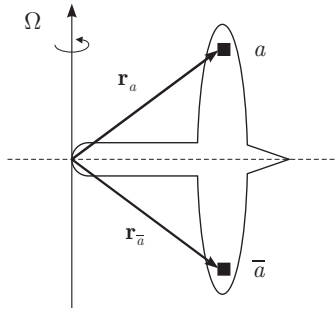


Рис. 67. Вращение симметрического волчка вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии

2. Пусть теперь угловая скорость Ω перпендикулярна оси симметрии волчка. Учитывая, как и выше, a -ю и \bar{a} -ю симметричные точки, получаем другие соотношения (рис. 67):

$$\mathbf{v}_{\bar{a}} = \mathbf{v}_a \perp \Omega, \quad (31.2b)$$

а сумма $\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_{\bar{a}}$ направлена по оси симметрии, поэтому

$$(\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_{\bar{a}}) \times \mathbf{v}_a \parallel \Omega. \quad (31.3b)$$

Используя эти соотношения, для суммы моментов импульса двух симметричных материальных точек получаем

$$\mathbf{M}_a + \mathbf{M}_{\bar{a}} = m_a (\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_{\bar{a}}) \times \mathbf{v}_a, \quad (31.4b)$$

что с учетом (3b) и доказывает тот факт, что в рассматриваемом случае суммарный момент импульса волчка \mathbf{M} параллелен угловой скорости:

$$\mathbf{M} \parallel \Omega, \text{ если } \Omega \perp \text{ оси симметрии.} \quad (31.5b)$$

Разложим угловую скорость Ω на составляющие Ω_{\parallel} и Ω_{\perp} , параллельные и перпендикулярные оси симметрии волчка. Сделаем то же самое и для момента импульса волчка \mathbf{M} , тогда из доказанных свойств получим соотношения

$$\mathbf{M}_{\parallel} = I_{\parallel} \Omega_{\parallel}, \quad \mathbf{M}_{\perp} = I_{\perp} \Omega_{\perp},$$

I_{\parallel} и I_{\perp} — соответствующие моменты инерции. В векторной форме эти уравнения можно представить в виде

$$\Omega = \Omega_{\parallel} + \Omega_{\perp} = \frac{\mathbf{M}_{\parallel}}{I_{\parallel}} + \frac{\mathbf{M}_{\perp}}{I_{\perp}}.$$

Если ввести единичный вектор \mathbf{e}_{\parallel} вдоль оси симметрии волчка, то эту формулу можно представить в виде

$$\Omega = \left(\frac{M_{\parallel}}{I_{\parallel}} - \frac{M_{\perp}}{I_{\perp}} \right) \mathbf{e}_{\parallel} + \frac{\mathbf{M}}{I_{\perp}}. \quad (31.6)$$

Эта формула очень удобна для анализа движения волчка. Из неё следует, что три вектора \mathbf{M} , Ω и \mathbf{e}_{\parallel} всегда лежат в одной плоскости.

При свободном движении полный момент импульса волчка $\mathbf{M} = I_{\parallel} \Omega_{\parallel} + I_{\perp} \Omega_{\perp}$ и его кинетическая энергия K сохраняются. Используя для K выражение (29.5), т. е. $K = \mathbf{M}\Omega/2$, получаем

$$\mathbf{M}^2 = I_{\parallel}^2 \Omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}^2 \Omega_{\perp}^2 = \text{const}; \quad (31.7)$$

$$2K = \mathbf{M}\Omega = I_{\parallel} \Omega_{\parallel}^2 + I_{\perp} \Omega_{\perp}^2 = \text{const}. \quad (31.8)$$

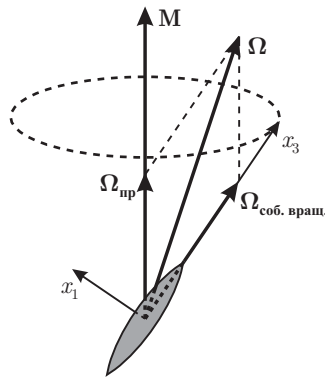


Рис. 68. Свободное движение симметрического волчка

Соотношения (7) и (8) могут выполняться одновременно, только если модули векторов Ω_{\parallel} и Ω_{\perp} сохраняются. Это означает, что три вектора \mathbf{M} , Ω и \mathbf{e}_{\parallel} не только всегда лежат в одной плоскости, но и сохраняют в этой плоскости неизменным взаимное расположение и свои длины. Отсюда следует, что в рассматриваемой инерциальной системе координат (в которой момент импульса неподвижен) векторы Ω и \mathbf{e}_{\parallel} лежат в одной плоскости и вращаются по коническим поверхностям вокруг направления момента импульса (рис. 68) с одной и той же угловой скоростью. Такое движение волчка называется *регулярной прецессией*, а его угловая скорость — *скорость прецессии* $\Omega_{\text{пр}}$ — может быть найдена из следующих соображений.

Формула (6) представляет собой разложение (по правилу параллелограмма) вектора угловой скорости волчка по двум направлениям: вдоль вращающейся оси симметрии и вдоль неподвижного момента импульса. Первое слагаемое, направленное вдоль оси симметрии, не влияет на движение этой оси. Поэтому именно второе слагаемое \mathbf{M}/I_{\perp} “заведует” движением оси симметрии волчка, т. е.

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{M}{I_{\perp}}. \quad (31.9)$$

Первое же слагаемое определяет вращение волчка вокруг вращающейся оси симметрии, называемое *собственным вращением* волчка:

$$\Omega_{\text{соб. вращ.}} = \left(\frac{M_{\parallel}}{I_{\parallel}} - \frac{M_{\parallel}}{I_{\perp}} \right) \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (31.10)$$

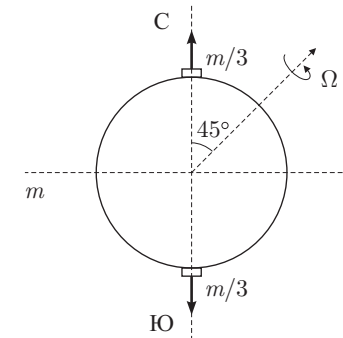


Рис. 69. К задаче 31.1

Задача

31.1. Глобус представляет собой однородную сферу радиуса R и массы m , на полюсах которой прикреплены маленькие указатели, каждый из них имеет массу $m/3$ (рис. 69). В начальный момент глобус привели во вращение так, что его угловая скорость Ω расположена в плоскости новосибирского меридиана и направлена под углом $\theta = 45^\circ$ к линии Север-Юг. Описать свободное движение глобуса, в частности, найти, в каком положении окажется Новосибирск в момент, когда северный полюс вновь вернётся в прежнее положение.

§ 32. Элементы статики твёрдого тела

Статика изучает условия равновесия тел и потому имеет важное значение при анализе устойчивости и прочности зданий, машин и механизмов. Статика позволяет ответить и на некоторые вопросы, касающиеся движения тел: находить необходимые условия движения грузов под действием рычага, при использовании гидравлических и винтовых домкратов и т. д. Основные уравнения статики можно получить из общих уравнений движения твёрдого тела (30.1)–(30.2):

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K},$$

при учете того, что в статическом случае полный импульс тела \mathbf{P} и полный момент импульса \mathbf{M} равны нулю. Это приводит к уравнениям статики:

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{K} = 0, \quad (32.1)$$

т. е. **статическое равновесие требует равенства нулю суммы внешних сил и суммы моментов внешних сил, действующих на твёрдое тело.**

Рассмотрим применение этих условий на простом примере рычага Архимеда (рис. 70). Невесомый горизонтальный стержень AB имеет опору

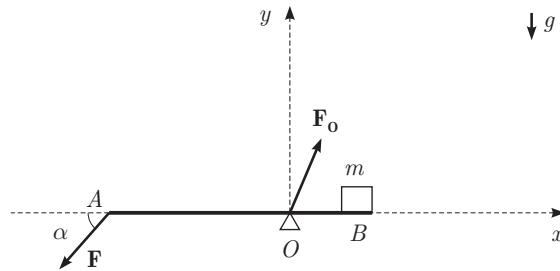


Рис. 70. Рычаг Архимеда

в точке O . На правом конце стержня находится груз массы m , на левом конце приложена сила \mathbf{F} , направленная под углом α к стержню и расположенная в вертикальной плоскости. Условия равновесия требуют, чтобы полная сумма приложенных сил равнялась нулю:

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_O = 0,$$

где \mathbf{F}_O — сила, действующая на рычаг со стороны опоры. Пусть xy — вертикальная плоскость, в которой расположены действующие силы, начало системы координат поместим в точку опоры O , расстояние $AO = a$ и расстояние $OB = b$. В этом случае момент силы \mathbf{F}_O окажется равным нулю, а у оставшихся сил только z -компоненты моментов сил отличны от нуля, причём z -компонента момента силы \mathbf{F} положительна и равна $aF \sin \alpha$ (она соответствует вращению рычага против часовой стрелки), а z -компонента момента силы тяжести отрицательна и равна $(-bmg)$ (она соответствует вращению рычага по часовой стрелке). Поэтому условие равновесия имеет вид

$$K_z = aF \sin \alpha - bmg = 0$$

или

$$F = \frac{b}{a \sin \alpha} mg. \quad (32.2)$$

Если правое плечо рычага b много меньше левого плеча $a \sin \alpha$, то значительный груз можно удерживать (и поднимать!) с помощью относительно небольшой силы F .

Очень часто исследование устойчивости тела можно провести, анализируя изменение потенциальной энергии тела при малых отклонениях от положения равновесия. Устойчивому равновесию тела соответствует минимум потенциальной энергии, поскольку в этом случае при отклонении от такого положения возникают силы, возвращающие тело в положение равновесия (см. такой анализ на примере линейного осциллятора в § 21.1).

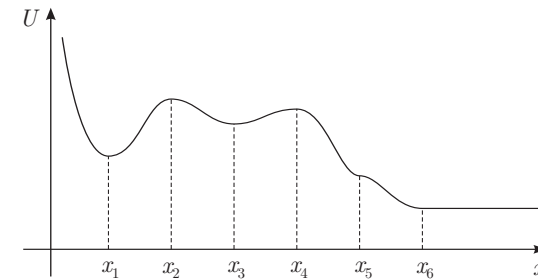


Рис. 71. К анализу положений равновесия

На рис. 71 положениям устойчивого равновесия соответствуют точки x_1 и x_3 — точки локального минимума потенциальной энергии. Точки x_2 и x_4 соответствуют локальным максимумам, в этих точках любое отклонение от положения равновесия будет вызывать силу, увеличивающую это отклонение, что отвечает *неустойчивому равновесию*. Точка перегиба потенциальной энергии x_5 также нужно считать неустойчивой, и, наконец, смещения в области $x > x_6$ не вызывают изменений потенциальной энергии — это область *безразличного равновесия*.

Нередко (но не всегда!) сумму сил и сумму моментов сил, действующих на твёрдое тело, можно заменить одной силой, приложенной в определённой точке. Такую силу называют *равнодействующей*. Рассмотрим, к примеру, твёрдое тело в поле тяжести. В этом случае суммарная сила тяжести и суммарный момент сил тяжести равны

$$\mathbf{F} = \sum_a m_a \mathbf{g}, \quad \mathbf{K} = \sum_a \mathbf{r}_a \times (m_a \mathbf{g}).$$

Введя обозначения массы всего твёрдого тела m и радиус-вектора $\mathbf{r}_ц$ его центра масс (28.2), можем представить эти соотношения в виде

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{r}_ц \times \mathbf{F},$$

из которого следует, что в этом случае равнодействующая сила равна весу тела, а точкой её приложения является центр масс (именно поэтому центр масс нередко называют *центром тяжести*).

Рассмотрим такой пример. Однородная горизонтальная балка AB массы m опирается своими концами на две опоры (рис. 72). Груз весом P

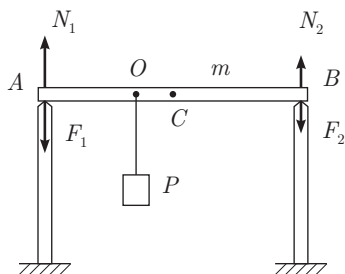


Рис. 72. Балка с грузом на опорах

висит в точке O балки. Найти $F_{1,2}$ — силы давления на опоры. На балку действуют силы реакции опоры $N_{1,2} = -F_{1,2}$, результирующая сила тяжести балки mg , приложенной в центре балки C , и вес груза. Поскольку при равновесии сумма сил давления должна быть равна весу балки и груза, а суммарный момент сил реакции опоры и силы тяжести балки относительно точки подвеса груза должен быть равен нулю, то мы имеем два уравнения:

$$F_1 + F_2 = mg + P, \quad F_2 \cdot OB - F_1 \cdot AO - mg \cdot OC = 0,$$

которые и решают задачу.

Нередко при анализе действия сложных подъемных механизмов бывает проще не рассматривать баланс сил и моментов сил, а воспользоваться законом сохранения энергии и приравнять работу сил при подъеме изменению потенциальной энергии поднимаемого тела. Рассчитаем, например, какую силу F необходимо приложить к рукоятке винтового домкрата, чтобы начать поднимать груз массой m ? Пусть шаг винта домкрата равен h , а длина рукоятки равна L , тогда при одном обороте рукоятки мы совершаем работу $A = F2\pi L$, которая пойдёт только на увеличение потенциальной энергии груза $\Delta U = mgh$, если можно пренебречь трением. Из равенства $A = \Delta U$ получаем искомую силу:

$$F = \frac{h}{2\pi L} mg.$$

Если обеспечить малость отношения h/L , то усилий среднего человека вполне хватит для подъёма 10-тонного грузовика.

Задачи

32.1. У гладкой вертикальной стены под углом α к полу приставили лестницу (рис. 73). При каком коэффициенте трения лестницы с полом μ она будет стоять?

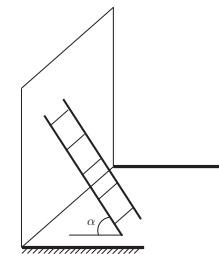


Рис. 73. К задаче 32.1

32.2. Однородная балка постоянного сечения, весом P опирается своими концами на два столба, оказывая на каждый столб давление, равное $P/2$. Найти давление балки на уцелевший столб сразу после мгновенного разрушения одного из столбов (рис. 74).

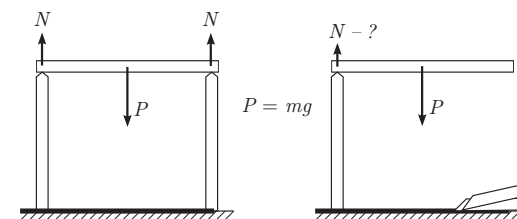


Рис. 74. К задаче 32.2

ГЛАВА VII

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Укажем, что в приближенных вычислениях, как правило, оставлялись лишь две значащие цифры.

1.1. $\cos \alpha = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \cos \theta_2.$

1.2. $x = \frac{l}{\sqrt{6}} = 0,41 l.$

1.3. $r_{\min} = 6 \text{ км}.$

1.4. $t = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} = 0,32 \text{ с};$

$$|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)| = (v_1 + v_2) \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} = 2,1 \text{ м};$$

$$|\dot{\mathbf{r}}_1(t)| = v_1 \sqrt{1 + (v_2/v_1)} = 4,0 \text{ м/с};$$

$$|\dot{\mathbf{r}}_2(t)| = v_2 \sqrt{1 + (v_1/v_2)} = 5,1 \text{ м/с}.$$

2.1. $t = (1 + \sqrt{2}) \tau.$

2.2. $y(x) = x \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} x \right);$

$$\mathbf{v} = (\alpha; \alpha - 2\alpha\beta t);$$

$$\mathbf{a} = (0; -2\alpha\beta);$$

$$t_1 = 1/\beta.$$

2.3. $h = \frac{2u}{g} (v \cos \alpha - u) \operatorname{tg}^2 \alpha$ при $v \cos \alpha > u.$

2.4. $l(t) = a\omega t$; $\mathbf{v} \mathbf{a} = 0$, т. е. вектор скорости всегда ортогонален вектору ускорения.

2.5. $\dot{\varphi} = \frac{v}{\sqrt{l^2 - v^2 t^2}};$

$$\ddot{\varphi} = \frac{v^3 t}{\sqrt{(l^2 - v^2 t^2)^3}}.$$

$$\begin{aligned}
 2.6. \quad & l(t) = \frac{1}{2}gt^2; \\
 & v(t) = gt; \\
 & a_t(t) = g; \\
 & a_n(t) = \frac{g^2 t^2}{R}; \\
 & a(t) = g \sqrt{1 + \frac{g^2 t^4}{R^2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.7. \quad & R_{\text{кр}}(0) = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} = 80 \text{ м}; \\
 & R_{\text{кр}}(v_0 \sin \alpha / g) = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{g} = 10 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

$$2.8. \quad 4R; \quad 2\sqrt{2} R.$$

$$2.9. \quad a_{\text{max}} = \frac{a}{b^2} v^2; \quad a_{\text{min}} = \frac{b}{a^2} v^2.$$

$$4.1. \quad N = \pi n R^2 h \frac{\sqrt{v^2 + u^2}}{v}.$$

$$4.2. \quad \cos \alpha = \frac{u}{\sqrt{2}v}, \quad \alpha = 80^\circ; \quad t = 78 \text{ с}.$$

$$4.3. \quad x > \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{v} l = 15 \text{ м}.$$

$$4.4. \quad t = \frac{2L\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2 \alpha}}{v^2 - u^2}.$$

$$6.1. \quad \text{В системе поезда } t'_A = t'_B = \frac{l_0}{2c}; \text{ в системе перрона}$$

$$t_A = \frac{l_0}{2c} \sqrt{\frac{1 + (V/c)}{1 - (V/c)}}, \quad t_B = \frac{l_0}{2c} \sqrt{\frac{1 - (V/c)}{1 + (V/c)}}.$$

$$6.2. \quad t_A = \frac{l_0}{2c} \sqrt{\frac{1 + (V/c)}{1 - (V/c)}}, \quad t_B = \frac{l_0}{2c} \sqrt{\frac{1 - (V/c)}{1 + (V/c)}}.$$

6.3. Для наблюдателей в поезде ($t'_n = 0$, $x'_n = na$, где a — расстояние между наблюдателями в поезде) часы на перроне показывают время $t_n = -n\gamma \frac{Va}{c^2}$. Для наблюдателей на перроне ($t_n = 0$, $x_n = nb$, где b — расстояние между наблюдателями на перроне) часы в поезде показывают время $t'_n = +n\gamma \frac{vb}{c^2}$. Здесь $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$.

6.4. Если вспышки произошли одновременно в системе поезда, то на перроне расстояние между следами равно γl_0 ; если же вспышки произошли одновременно в системе перрона, то на перроне расстояние между следами равно l_0/γ . Здесь $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$.

$$6.5. \quad a_0 \left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \sqrt{4 - \frac{V^2}{c^2}} \right).$$

$$6.6. \quad \frac{c-v}{c} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \approx \frac{\varepsilon}{2} = 5,4 \cdot 10^{-4}, \text{ где } \varepsilon = \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2.$$

$$6.7. \quad t = \frac{l_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}}{V + v}.$$

$$6.8. \quad \text{а) } \angle BAC = 45^\circ; \\ \text{б) } \operatorname{tg}(\angle BAC) = 0,6, \quad \angle BAC = 31^\circ.$$

$$6.9. \quad v'_2 = 0,85 c.$$

$$7.1. \quad t = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \tau \approx \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ с, где } \varepsilon = \frac{c\tau}{l} = \frac{1}{60}.$$

7.2. Так как

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) > 0,$$

то найдётся такая инерциальная система S' , в которой эти события одновременны. Действительно, в системе S' , двигающейся со скоростью V , равной скорости луча $V = v = 0,1 c$ на экране, оба события произойдут в одном и том же месте.

$$\begin{aligned}
 8.1. \quad & a = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 5 \text{ м/с}; \quad T_1 = m_1 a = 5 \text{ Н}; \\
 & T_2 = (m_1 + m_2) a = 15 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

$$8.2. a_1 = \frac{M+4m}{M+2m} \frac{F}{2m}; \quad a_2 = -\frac{M}{M+2m} \frac{F}{2m}; \quad a_3 = \frac{F}{M+2m}.$$

$$8.3. \text{ а) } v = \frac{mg^2 \cos \alpha}{2\beta \sin \alpha};$$

$$\text{ б) } l = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6\beta^2 \sin^3 \alpha}.$$

$$8.4. v(t) = g\tau (1 - e^{-t/\tau});$$

$$a(t) = ge^{-t/\tau};$$

$$l(t) = g\tau [t - \tau (1 - e^{-t/\tau})].$$

$$8.5. t = \tau \ln \frac{g\tau + v_1}{g\tau - v_2}.$$

9.1. Мюнхгаузену придётся пройти пешком $(35/36) \cdot 100 \% = 97 \%$ пути.

9.2. $F(h) = \rho gh + \rho v^2$. Работа этой силы

$$A = \int_0^h F(x) dx = mg \frac{h}{2} + mv^2$$

превосходит энергию, приобретённую нитью

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + mg \frac{h}{2},$$

на величину $A - E = mv^2/2$, эта часть работы постепенно переходит в тепло (здесь $m = \rho h$ — масса поднятой нити).

$$9.3. v(t) = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}; \quad a(t) = \frac{Fm_0}{(m_0 + \mu t)^2};$$

$$9.4. R_x = 0; \quad R_y = -a/6.$$

$$11.1. A = mgh + \mu mga.$$

$$11.2. v(x) = \left[\frac{mg}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha x/m}) \right]^{1/2}.$$

12.1.

а) Нет, так как, например, работа этой силы не равна нулю на замкнутом контуре, представляющем собой квадрат, в котором две соседние стороны расположены вдоль осей x и y .

б) Да, так как представляет собой сумму сил

$$\mathbf{F}(x, y) = (\alpha x, 0) + (0, \beta y),$$

каждая из которых является потенциальной силой.

12.2.

а) $U(x) = \frac{\alpha}{x}$ при выборе $U(\infty) = 0$.

б) $U(r) = \alpha \ln \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{b}$ при выборе $U(0) = 0$.

$$12.3. \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3} \right) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

$$12.4. F = \frac{N}{2\pi r n} = 95 \text{ Н.}$$

$$13.1. A_{\text{тр}} = -\frac{\mu m g a}{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha} \text{ при условии } \mu \operatorname{ctg} \alpha < 1.$$

$$13.2. v_{\min} = \sqrt{\frac{mMk}{M+m}} x_0.$$

$$13.3. h = 2R/3.$$

13.4. Прав студент В. Закон сохранения импульса для системы двух бусинок не выполняется, так как часть импульса передаётся стенке при ударе бусинки об неё.

$$14.1. v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v.$$

$$14.2. h' = 9h.$$

$$14.3. \sin \theta_{\text{лmax}} = m/M.$$

$$16.1. v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0,87 c.$$

$$16.2. M = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2m_1m_2[\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_1\gamma_2v_1v_2/c^2) - 1]},$$

$$V = \frac{m_1\gamma_1v_1 - m_2\gamma_2v_2}{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2}.$$

$$16.3. A = \frac{5}{12} mc^2 = 0,42 mc^2.$$

$$16.4. \mathbf{p} = \mathbf{F}t; \quad \mathbf{v} = \frac{c}{\sqrt{1 + (\tau/t)^2}} \frac{\mathbf{F}}{F};$$

$$l = c\tau \left(\sqrt{1 + (\tau/t)^2} - 1 \right).$$

17.1. Рассмотрим реакцию излучения $e \rightarrow e + \gamma$ в системе покоя начального электрона. Такая реакция невозможна, поскольку законы сохранения энергии

$$m_e c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + (\mathbf{p}'_e)^2 c^2} + |\mathbf{p}'_\gamma| c$$

и импульса

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}'_e + \mathbf{p}'_\gamma$$

не могут быть выполнены одновременно. По аналогичным соображениям невозможна и реакция аннигиляции $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$.

$$17.2. v = \frac{c}{1 + (\lambda'/\lambda)^2} = 0,62c = 1,9 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

$$17.3. 2r = \frac{c\tau}{\pi} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)_{\max} = 3,0 \cdot 10^7 \text{ км};$$

$$m_1 = m_2 = \frac{c^3 \tau}{2\pi G} \left(\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)_{\max} \right)^3 = 2,9 \cdot 10^{29} \text{ кг}.$$

$$18.1. m_X = \sqrt{2} \varepsilon_1 / c^2 = 0,99 \text{ ГэВ}/c^2.$$

$$18.2. \mathbf{V} = \frac{m_1\gamma_1\mathbf{v}_1 + m_2\gamma_2\mathbf{v}_2}{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2};$$

$$K = (m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2)c^2 - Mc^2.$$

$$18.3. \varepsilon_\pi = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{4N^2}} \right) Nmc^2 \approx Nmc^2 = 1,4 \text{ ГэВ},$$

где $N = \frac{mc^2}{2\varepsilon_\gamma} = 5$.

$$18.4. m_X \approx 2\sqrt{\varepsilon_- \varepsilon_+} / c^2 = 10,6 \text{ ГэВ}/c^2.$$

$$20.1. x(t) = \frac{a}{1 \mp \sqrt{2\alpha/m} t} \text{ для случая, когда частица удаляется (приближается) к началу координат.}$$

$$20.2. T = A \frac{m^{1/2}}{\beta^{1/4} E^{1/4}}, \text{ где } A = 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = 3,7.$$

21.1.

$$a) \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m};$$

$$б) \omega = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$в) \omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

$$21.2. \omega_{D_2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}; \quad \omega_{HD} = \sqrt{\frac{3}{4}} \omega_0.$$

$$21.3. \omega = \sqrt{g \frac{Mb - ma}{Mb^2 + ma^2}}.$$

$$21.4. \omega = \sqrt{g \frac{b}{a^2}}.$$

$$21.5. a = \sqrt{\left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mgh}{k}}.$$

21.6. Траектория частицы представляет собой эллипс

$$\left(\frac{x}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{y}{v_0/\omega} \right)^2 = 1,$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$.

$$21.7. \pi\sqrt{R/g} = 42 \text{ мин, где } R = 6400 \text{ км — радиус Земли.}$$

$$22.1. x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} e^{-\lambda t} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right).$$

23.1. Средняя мощность

$$\langle N \rangle = \frac{\lambda F_0^2}{m} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

максимальное значение этой величины равно $F_0^2/(4m\lambda^2)$ при $\omega = \omega_0$.

24.1.

а) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, 1);$

б) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, -2);$

в) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-1, 1, 0).$

24.2. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$, $\mathbf{r}_0 = (0, a, 0)$, $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, $\mathbf{M} = (0, 0, mav) = (0, 0, 150) \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$

24.3. $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{Ma^2 + mb^2}{(M+m)a^2} = \frac{19}{4} = 4,75.$

25.1. Падение метеорита на Солнце происходит при $\rho < \rho_{\max} = R \sqrt{1 + \frac{2Gm_{\text{С}}}{Rv_0^2}}.$

25.2. $r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + a^2} + a$, где $a = \frac{2kq^2}{mv_0^2}.$

26.1. Упадёт, так как минимальный радиус орбиты при движении в поле точечной массы, равной массе Земли, составляет $2/31$ радиуса Земли.

28.1. $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3}mR^2.$

28.2. $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}mR^2.$

28.3. Для тонкостенного цилиндра $v = \sqrt{gh}$, для сплошного цилиндра $v = \sqrt{4gh/3}.$

30.1. $a(t) = g/3$; $v(t) = gt/3$; $l(t) = gt^2/6.$

31.1. Движение глобуса соответствует регулярной прецессии, постоянный вектор момента импульса направлен под углом $\arctg 2 = 63^\circ$ к начальному положению линии Север-Юг, $\Omega_{\text{пр}} = \sqrt{5/8}\Omega = 0,79\Omega$, $\Omega_{\text{соб. вр.}} = \Omega/(\sqrt{8}) = 0,35\Omega$. В момент, когда северный полюс вернётся в прежнее положение, новосибирский меридиан повернется на угол $360^\circ/\sqrt{5} = 160^\circ.$

32.1. $\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$

32.2. $P/4.$

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru**Внимание:** дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:**http://shop.rcd.ru**

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414,
тел.: (499) 135-54-37, (495) 641-69-38

2. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)

3. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,
Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Кочеев Андрей Андреевич,**Сербо Валерий Георгиевич**

МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Учебное пособие

*Дизайнер ?**Технический редактор А. В. Ширококов**Компьютерный набор и верстка П. И. Несмелов**Корректор ?*Подписано в печать 27.01.2012. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Печать офсетная. Усл. печ. л. ????. Уч. изд. л. ????.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная № 1. Заказ № 11-29.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500-295