Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Новосибирский национальный
исследовательский государственный университет»

Пальчунов Дмитрий Евгеньевич

Математическая логика и теория алгоритмов

Часть вторая

Разработка выполнена в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ

2013 г.

Содержание

§12. Гомоморфизмы и конгруэнции

В этом параграфе мы детально изучим гомоморфизмы, эпиморфизмы и конгруэнции. Далее, в следующем параграфе, нашей целью будет описать строение произвольного гомоморфизма. Эта задача особенно актуальна для приложений математической логики в информационных технологиях, поскольку любая модель по существу является частным случаем гомоморфизма.

Напомним, что если задана некоторая сигнатура σ, то через $K(\sigma)$ мы обозначаем класс моделей сигнатуры σ.

Определение 12.1. Пусть задана некоторая сигнатура σ. Рассмотрим две модели $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$.

Отображение $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется ***гомоморфизмом***, алгебраических систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, если для любых сигнатурных символов $P^n, f^n, c \in \sigma$ и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняются следующие условия:

а) $\mathfrak{A} \vDash P(a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash P(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$ (сохранение истинности предикатов);

б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$ (сохранение значений функций);

в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ (сохранение значений констант).

Определение 12.2. Отображение $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется ***эпиморфизмом***, если h – гомоморфизм и h – отображение «на» (сюрьекция).

Определение 12.3. Отображение $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется ***строгим гомоморфизмом***, если h – гомоморфизм, и помимо истинности предикатов, сохраняется их ложность, т.е. для любого $P^n \in \sigma$ и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполнено:

$$\mathfrak{A} \vDash P\,(a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash P(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))\,.$$

Определение 12.4. Отображение $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется ***сильным гомоморфизмом***, если

а) h – гомоморфизм, и

б) для любого $P^n \in \sigma$ и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ если $\mathfrak{B} \vDash P\big(h(a_1), \dots, h(a_n)\big)$, то найдутся элементы $c_1, \dots, c_n \in |\mathfrak{A}|$ такие, что

$$h(a_1) = h(c_1), \dots, h(a_n) = h(c_n) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \vDash P\,(c_1, \dots, c_n).$$

Определение 12.5. Отображение $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется ***изоморфизмом***, если:

1. h – взаимно-однозначное отображение (биекция).
2. для любых сигнатурных символов $P^n, f^n, c \in \sigma$ и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняются следующие условия:

   а) $\mathfrak{A} \vDash P\,(a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash P(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$;

   б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}\,(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$;

   в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Определение 12.6. Отображение $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется ***изоморфным вложением***, если:

1. h – разнозначное отображение (инъекция).

2. для любых сигнатурных символов $P^n, f^n, c \in \sigma$ и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняются следующие условия:

а) $\mathfrak{A} \vDash P\,(a_1, a_2, \dots, a_n) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B} \vDash P(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$;

б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2\,, \dots, a_n)) \;=\; f^{\mathfrak{B}}\,(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$;

в) $h(c^{\mathfrak{A}}) \;=\; c^{\mathfrak{B}}$.

то есть, для изоморфного вложения выполнены все условия изоморфизма, но h не взаимно-однозначное, а только разнозначное отображение.

Замечание 12.7.

1. Отображение h является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда h – гомоморфизм и $|\mathfrak{A}| = h(|\mathfrak{B}|)$.

2. Отображение h является строгим гомоморфизмом тогда и только тогда, когда h – гомоморфизм и для любого $P^n \in \sigma$ и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполнено:

$$\mathfrak{A} \vDash \neg P\,(a_1, a_2, \dots, a_n) \;\Rightarrow\; \mathfrak{B} \vDash \neg P\,(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)).$$

3. Отображение h является изоморфным вложением тогда и только тогда, когда h – строгий гомоморфизм и h – разнозначное отображение.

4. Отображение h является изоморфизмом тогда и только тогда, когда h – эпиморфизм и h – изоморфное вложение.

Доказательство: упражнение.

§13. Подмодели. Основная теорема о гомоморфизмах.

Теорема о существовании наименьшей подмодели

Определение 13.1. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$. Будем говорить, что модель $\mathfrak{A}$ является ***подмоделью*** модели $\mathfrak{B}$ (обозначение $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$), если выполняются следующие условия:

1. $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$.
2. Для любого предикатного символа $P \in \sigma$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеет место $\mathfrak{A} \vDash P(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash P(a_1, \dots, a_n)$.
3. Для любого функционального символа $f \in \sigma$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеет место $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$.
4. Для любой константы $c \in \sigma$ имеет место $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Замечание 13.2. Если $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, то отображение $id_{\mathfrak{A}}\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ является изоморфным вложением.

Доказательство: упражнение.

Определение 13.3. Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $A \subseteq |\mathfrak{B}|$. Будем говорить, что множество A ***замкнуто*** относительно операций в модели $\mathfrak{B}$, если:

1. Для любого функционального символа $f \in \sigma$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеем $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in A$.
2. Для любой константы $c \in \sigma$ имеем $c^{\mathfrak{B}} \in A$.
3.

Предложение 13.4. Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma), A \subseteq |\mathfrak{B}|$. Множество A определяет подмодель модели $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда A замкнуто относительно операций в модели $\mathfrak{B}$.

Доказательство.

(⇒) Пусть существует модель $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ такая, что $|\mathfrak{A}| = A$. Тогда для любого функционального символа $f \in \sigma$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеет место $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \in |\mathfrak{A}|$. Следовательно,

$f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \in |\mathfrak{A}| = A$.

Аналогично, для любой константы $c \in \sigma$ имеет место $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$. Следовательно, $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}| = A$.

(⇐) Пусть множество A замкнуто относительно операций в модели $\mathfrak{B}$. Определим модель $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ с $|\mathfrak{A}| = A$ следующим образом. Для сигнатурных символов $P^n, f^n, c \in \sigma$ и элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ положим:

a. $\mathfrak{A} \vDash P(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash P(a_1, \dots, a_n)$;
b. $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \leftrightharpoons f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$;
c. $c^{\mathfrak{A}} \leftrightharpoons c^{\mathfrak{B}}$.

Очевидно, что тогда $\mathfrak{A}$ – модель и $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$.

Предложение 13.4 доказано.

Стало быть, замкнутости подмножества относительно операций необходимо и достаточно для построения подмодели.

Предложение 13.5. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$– гомоморфизм. Тогда множество $C \leftrightharpoons h(A) = \{h(a) \mid a \in |\mathfrak{A}|\}$ замкнуто относительно операций в модели $\mathfrak{B}$, т.е. определяет подмодель $\mathfrak{C} = \langle C, \sigma \rangle \leq \mathfrak{B}$.

Доказательство. Очевидно, что $C \subseteq |\mathfrak{B}|$. Покажем замкнутость C относительно операций и констант.

Для любого функционального символа $f \in \sigma$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеем $f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) = h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) \in C$.

Для любой константы $c \in \sigma$ имеем $c^{\mathfrak{B}} = h(c^{\mathfrak{A}}) \in C$.

Таким образом, C замкнуто относительно операций и констант, а значит, образует модель $\mathfrak{C} = \langle C, \sigma \rangle$, являющуюся подмоделью модели $\mathfrak{B}$.

Предложение 13.5 доказано.

Предложение 13.6. Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и $H \leftrightharpoons \{ \mathfrak{A} \in K(\sigma) \mid \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\}$ – множество подмоделей модели $\mathfrak{B}$. Тогда множество $C = \bigcap_{\mathfrak{A} \in H} |\mathfrak{A}|$ замкнуто относительно операций в модели $\mathfrak{B}$, т.е. существует подмодель $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$ такая, что $| \mathfrak{C} | = \bigcap_{\mathfrak{A} \in H} |\mathfrak{A}|$.

Доказательство. Покажем замкнутость множества C относительно операций и констант.

1. Так как каждая модель $\mathfrak{A} \in H$ является подмоделью модели $\mathfrak{B}$, то для любого функционального символа $f \in \sigma$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |C|$ имеем $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$. Следовательно, $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in C$.

2. Аналогично, для любой константы $c \in \sigma$ имеем $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$. Следовательно, $c^{\mathfrak{B}} \in C$.

Предложение 13.6 доказано.

Теорема 13.7. Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и $X \subseteq |\mathfrak{B}|$. Тогда существует наименьшая по включению подмодель $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ такая, что $X \subseteq |\mathfrak{C}|$ (обозначим эту подмодель $\mathfrak{C} = sub_{\mathfrak{B}}(X)$) .

Доказательство. Рассмотрим множество

$$H \leftrightharpoons \{ \mathfrak{A} \in K(\sigma) | \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ и } X \subseteq |\mathfrak{A}|\}.$$

Пусть $C = \bigcap_{\mathfrak{A} \in H} |\mathfrak{A}|$. По Предложению 13.6, множество C замкнуто относительно операций и констант в модели $\mathfrak{B}$, т.е. образует модель $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$. Модель $\mathfrak{C}$ будет наименьшей, т.к. ее основное множество является пересечением всех основных множеств подмоделей модели $\mathfrak{B}$.

Теорема о подмодели, порождённой множеством термов

Теорема 13.8. Если $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $X \subseteq |\mathfrak{B}|$, $X \neq \emptyset$ или сигнатура σ содержит хотя бы одну константу, и $\mathfrak{C} = sub_{\mathfrak{B}}(X)$, то

$$|\mathfrak{C}| = \{t(a_1, \dots, a_n) \mid t - \text{терм сигнатуры } \sigma \text{ и } a_1, \dots, a_n \in X\}.$$

Доказательство. Пусть $T \leftrightharpoons \{t(a_1, \dots, a_n) \mid t - \text{терм сигнатуры } \sigma \text{ и } a_1, \dots, a_n \in X\}$.

1) Покажем, что $|\mathfrak{C}| \subseteq T$. Для этого достаточно показать замкнутость T относительно операций и констант. Пусть $t_1(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k(a_1, \dots, a_n) \in T$. Тогда для любого функционального символа $f \in \sigma$ имеем $f(t_1(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k(a_1, \dots, a_n)) \in T$. Аналогично, для любой константы с $\in \sigma$, c является термом из σ. Следовательно $c \in T$.

2)

3) Покажем, что $T \subseteq |\mathfrak{C}|$. Будем доказывать индукцией по построению терма.

a. Пусть $t = x$. Тогда для любой модели $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ имеем $t^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{A}}$.
b. Пусть $t = c \in T$. Следовательно $t^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{C}} \in |\mathfrak{C}|$.

c. Пусть $t = f(t_1, \dots, t_n)$. По индукционному предположению имеем $t_i^{\mathfrak{B}} = t_i^{\mathfrak{C}}$ для любого $i = 1, \dots, n$. Следовательно, получим $f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}, \dots, t_n^{\mathfrak{B}}) = f^{\mathfrak{C}}(t_1^{\mathfrak{C}}, \dots, t_n^{\mathfrak{C}}) \in |\mathfrak{C}|$.

Стало быть,

$|\mathfrak{C}| = T \leftrightharpoons \{t(a_1, \dots, a_n) \mid t$ −терм сигнатуры σ и $a_1, \dots, a_n \in X\}$.

Теорема 13.8 доказана.

Следствие 13.9.

1. Если $X = \emptyset$ и существует константа $c \in \sigma$, то
$|\mathfrak{C}| = \{t^{\mathfrak{B}} \mid t - \text{замкнутый терм}\}$.

2. Если $X = \emptyset$ и не существует константы $c \in \sigma$, то наименьшей подмодели может не существовать.

Доказательство: упражнение.

Сохранение истинности формул на подмоделях

Предложение 13.10. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и $t(x_1, \dots, x_n) \in T(\sigma)$. Тогда $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по длине терма.

1. Если $t(x) = x$, то $t^{\mathfrak{A}}(a) = a$, $t^{\mathfrak{B}}(a) = a$. Следовательно
$t^{\mathfrak{A}}(a) = t^{\mathfrak{B}}(a)$. Если $t = c$, то по определению подмодели $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

2. Пусть $t = f(t_1(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k(a_1, \dots, a_n))$. По предположению индукции $t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_i^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$ для $i \in \{1, \dots, k\}$. Тогда, по определению подмодели:

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\right) =$$
$$= f^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)\right) =$$
$$= f^{\mathfrak{B}}\left(t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)\right) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n).$$

Предложение 13.10 доказано.

Теорема 13.11. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ и $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ – бескванторная формула. Тогда

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Теорема доказывается индукцией по построению формул.

Базис индукции. Для атомарных формул имеем:

1. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n))$.

По Предложению 13.10 получаем $t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$ и $t_2^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$. Тогда

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff$$
$$\iff t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

2. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = P(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_k(x_1, \dots, x_n))$. В силу того, что $t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_i^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$ при $i \in \{1, \dots, k\}$), выполнено:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{A} \models P\left(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\right) \iff$$

$$\iff \mathfrak{A} \models P\left(t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)\right) \iff$$

$$\iff \mathfrak{B} \models P(t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) .$$

Индукционный переход. По индукционному предположению имеем:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ и}$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \,.$$

Покажем справедливость индукционного перехода.

1. **Пусть $\boldsymbol{\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2)}$.** Тогда

$$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \& \varphi_2)(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ и } \mathfrak{A} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ и } \mathfrak{B} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \& \varphi_2)(a_1, \dots, a_n).$$

2.

3. **Пусть $\boldsymbol{\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)}$.** Тогда

$$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1\,(a_1, \dots, a_n) \text{ или } \mathfrak{A} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ или } \mathfrak{B} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)(a_1, \dots, a_n).$$

4. **Пусть $\boldsymbol{\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)}$.** Тогда

$$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \to \varphi_2)(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \text{если } \mathfrak{A} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n), \text{то } \mathfrak{A} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{если } \mathfrak{B} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n), \text{ то } \mathfrak{B} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \to \varphi_2)(a_1, \dots, a_n).$$

5. **Пусть $\boldsymbol{\varphi = \neg\varphi_1}$.** Тогда

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi_1(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \varphi_1\,(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi_1.$$

Теорема 13.11 доказана.

Теорема 13.12. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ и $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ – бескванторная формула. Тогда:

1. $\mathfrak{A} \models \exists x_1 \dots \exists x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists x_1 \dots \exists x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n)$.
2. $\mathfrak{B} \models \forall x_1 \dots \forall x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство.

1. $\mathfrak{A} \vDash \exists x_1 \dots \exists x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \exists\, a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \exists\, a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{B}| : \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \vDash \exists x_1 \dots \exists x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n)$.
2. $\mathfrak{B} \vDash \forall x_1 \dots \forall x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \forall\, a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{B}| : \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{A} \vDash \forall x_1 \dots \forall x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 13.12 доказана.

Конгруэнции. Теорема о факторизации.

Определение 13.13. Рассмотрим модель $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$. Отношение эквивалентности $\sim$ называется ***конгруэнцией*** на модели $\mathfrak{A}$, если для любого функционального символа $f^n \in \sigma$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие:

$$(a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n) \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n).$$

Определение 13.13. Пусть $\sim$ конгруэнция, обозначим $a/_\sim = [a] = \{b \mid a \sim b\}$. Определим ***фактор-модель*** $\mathfrak{A}/_\sim = \langle |\mathfrak{A}|/_\sim, \sigma \rangle$ при помощи следующих условий:

a. $\mathfrak{A}/_\sim \vDash P([a_1], \dots, [a_n]) \iff$
$$\iff \exists b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|,\ a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n, \mathfrak{A} \vDash P(b_1, \dots, b_n).$$

b. $f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)]$.

c. $c^{\mathfrak{A}/_\sim} = [c^{\mathfrak{A}}]$.

Предложение 13.14. Данное определение фактор-модели корректно.

Доказательство. Пусть символ $f^n \in \sigma$, элементы $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|$ и выполнено $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$. Для доказательства корректности определения фактор-модели необходимо показать, что тогда $f([a_1], \dots, [a_n]) = f([b_1], \dots, [b_n])$.

По определению конгруэнции выполнено $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$. Поэтому $[f(a_1, \dots, a_n)] = [f(b_1, \dots, b_n)]$. Следовательно,

$$f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)] = [f(b_1, \dots, b_n)] = f([b_1], \dots, [b_n]).$$

Предложение 13.14 доказано.

Замечание 13.15. Конгруэнция – это в точности такая эквивалентность на данной алгебраической системе, по которой можно корректно проводить операцию факторизации.

Теорема 13.16 Отображение $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|/_{\sim}$ такое, что $h(a) = [a]$, является сильным эпиморфизмом.

Доказательство. Докажем сначала, что h – гомоморфизм. Пусть $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда

а) $\mathfrak{A} \vDash P(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{A}/_{\sim} \vDash P([a_1], \dots, [a_n]) \Rightarrow \mathfrak{A}/_{\sim} \vDash P(h(a_1), \dots, h(a_n))$.

б) $h(f(a_1, \dots, a_n)) = [f(a_1, \dots, a_n)] = f([a_1], \dots, [a_n]) = f(h(a_1), \dots, h(a_n))$.

в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = [c^{\mathfrak{A}}] = c^{\mathfrak{A}/_{\sim}}$.

Гомоморфизм h является эпиморфизмом, так как для любого $[a] \in \mathfrak{A}/_{\sim}$ имеет место $h(a) = [a]$.

Покажем, что отображение h является сильным гомоморфизмом. Пусть $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда

$$\mathfrak{A}/_\sim \vDash P\,(h(a_1), \dots, h(a_n)) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}/_\sim \vDash P\,([a_1], \dots, [a_n]) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{найдутся}\;\; b_1, \dots, b_n: \;\; a_i \sim b_i\;(i = 1, \dots, n) \;\text{ и }\; \mathfrak{A} \vDash P(b_1, \dots, b_n) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{найдутся элементы}\;\; b_1, \dots, b_n \;\text{ такие, что}:$$

$$h(a_i) = h(b_i) \;\text{ при }\; i = (1, \dots, n), \qquad \text{и выполнено}\;\; \mathfrak{A} \vDash P\,(b_1, \dots, b_n).$$

Теорема 13.16 доказана.

Предложение 13.17. Пусть отображение $h: A \to B$ является гомоморфизмом, тогда следующее отношение на множестве A:

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; h(a) = h(b).$$

является конгруэнцией (элементы a и b множества A являются эквивалентными, если они отображаются в один элемент множества B).

Доказательство: упражнение.

Теорема о сильных эпиморфизмах. Основная теорема о гомоморфизмах.

Теорема 13.18. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и отображение $h: A \to B$ – сильный эпиморфизм. Для элементов $a, b \in |\mathfrak{A}|$ положим $a \sim b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$. Тогда $\mathfrak{A}/_\sim \cong \mathfrak{B}$. А именно, отображение $g: \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{B}$, определённое следующим образом: $g([a]) = h(a)$, осуществляет изоморфизм моделей $\mathfrak{A}/_\sim$ и $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $g([a]) \leftrightharpoons h(a)$,

1) *Докажем, что* g – *отображение*. Пусть для элементов $a, b \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие $[a] = [b]$. Тогда $a \sim b$. Следовательно $h(a) = h(b)$. А значит, $g([a]) = g([b])$.

2) *Докажем взаимную однозначность отображения* g.

a) Покажем, что g является отображением «на». Пусть $b \in |\mathfrak{B}|$. Тогда, так как h –эпиморфизм, найдется элемент $a \in |\mathfrak{A}|$ такой, что $h(a) = b$. Следовательно, $g([a]) = h(a) = b$.

b) Покажем, что g является разнозначным отображением. Пусть $g([a]) = g([b])$. Тогда $h(a) = g([a]) = g([b]) = h(b)$. Следовательно, $a \sim b$. А значит, $[a] = [b]$.

3)

4)

3) *Покажем, что* g *– изоморфизм*.

Для сигнатурных символов $P, f, c \in \sigma$ и элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеем:

a) $\mathfrak{A}/_\sim \vDash P([a_1], \dots, [a_n]) \Rightarrow \exists b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|$: $b_i \sim a_i$ и $\mathfrak{A} \vDash P(b_1 \dots b_n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathfrak{B} \vDash P(h(b_1), \dots, h(b_n)) \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash P(g([a_1]), \dots, g([a_n])), \text{ так как}$$

$$b_i \sim a_i \Rightarrow h(b_i) = h(a_i) = g([a_i]).$$

Далее, $\mathfrak{B} \vDash P\big(g([a_1]), \dots, g([a_n])\big) \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash P\big(h(a_i), \dots, h(a_n)\big) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists b_1 \dots b_n \in |\mathfrak{A}|:\ a_i \sim b_i \text{ и } \mathfrak{A} \vDash P(b_1, \dots, b_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists b_1 \dots b_n \in |\mathfrak{A}|:\ a_i \sim b_i \text{ и } \mathfrak{A}/_\sim \vDash P([b_1], \dots, [b_n]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A}/_\sim \vDash P([a_1], \dots, [a_n]).$$

b) $g(f([a_1], \dots, [a_n])) = g([f(a_1, \dots, a_n)]) = h\big(f(a_1, \dots, a_n)\big) =$

$= f(h(a_1), \dots, h(a_n)) = f\big(g([a_1]), \dots, g([a_n])\big).$

c) $g\big(c^{\mathfrak{A}/\sim}\big) = g\big(\big[c^{\mathfrak{A}}\big]\big) = h\big(c^{\mathfrak{A}}\big) = c^{\mathfrak{B}}.$

Далее мы будем рассматривать только алгебраические системы, сигнатура которых не содержит предикатных символов. Для таких алгебраических систем мы докажем основную теорему о гомоморфизмах.

Замечание 13.19. Любой гомоморфизм является композицией эпиморфизма и изоморфного вложения.

Доказательство. Пусть $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ – гомоморфизм. Нужно показать, что существует такая модель $\mathfrak{C}$, что можно построить эпиморфизм $g: \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ и изоморфное вложение $id_C: \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ такие, что $h = g \circ id_C$.

Возьмём $\mathfrak{C} \leftrightharpoons h(\mathfrak{A})$. Тогда $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$. Определим $g: A \to C$: для любого $a \in \mathfrak{A}$ положим $g(a) \leftrightharpoons h(a)$. Очевидно, что тогда $g: \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ – эпиморфизм.

Так как для любого $a \in \mathfrak{A}$ мы имеем $h(a) = g(a) = id_C\big(g(a)\big)$, то $h = g \circ id_C$, где $id_C: \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ – тождественное изоморфное вложение.

Замечание 13.19 доказано.

Теорема 13.20 (Основная теорема о гомоморфизмах. Любой гомоморфизм является композицией факторизации и изоморфного вложения.

А именно, пусть $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ – гомоморфизм. Тогда $h = q \circ id_C$, где $\mathfrak{C} \leftrightharpoons h(\mathfrak{A})$, $q: \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ – эпиморфизм и $id_C: \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ – изоморфное вложение.

Определим конгруэнцию на множестве A: положим

$$a \sim b \Leftrightarrow h(a) = h(b).$$

Рассмотрим отображение $g: \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{C}$, определённое следующим образом: $g([a]) = q(a)$. По теореме 13.18 это отображение $g: \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{C}$ осуществляет изоморфизм моделей $\mathfrak{A}/_\sim$ и $\mathfrak{C}$.

Обозначим через u факторизацию модели $\mathfrak{A}$. А именно, $u: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_\sim$, причём для любого элемента $a \in |\mathfrak{A}|$ выполнено $u(a) = [a]$.

Обозначим $v = g \circ id_C$. Отображение v является композицией изоморфизма g и тождественного изоморфного вложения id_C. Несложно доказать, что тогда отображение v само является изоморфным вложением модели $\mathfrak{A}/_\sim$ в модель $\mathfrak{B}$.

Имеем цепочку отображений $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$, осуществляемую следующим образом: $u: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_\sim$, $g: \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{C}$ и $id_C: \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$.

Здесь $u: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_\sim$ – факторизация модели $\mathfrak{A}$, $g: \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{C}$ – изоморфизм, а $id_C: \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ – изоморфное вложение подмодели $\mathfrak{C}$ в модель $\mathfrak{B}$. Очевидно, что $h = u \circ g \circ id_C$. Стало быть, поскольку выполнено $v = g \circ id_C$, имеем $h = u \circ v$, где u – факторизация модели $\mathfrak{A}$, а v – изоморфное вложение.

Теорема 13.20 доказана.

§14. Секвенциальное исчисление предикатов

В этом параграфе мы продолжаем изучение логики предикатов первого порядка. Ранее мы подробно изучили *семантику* логики предикатов: истинность формул на модели, тождественную истинность формул и предложений. Здесь мы будем изучать синтаксис логики предикатов: логический вывод, доказуемость секвенций, понятие доказуемости формул. В дальнейшем, в следующем параграфе, нашей целью будет показать совпадение синтаксиса и семантики логики предикатов; мы докажем, что формула является доказуемой тогда и только тогда, когда она является тождественно истинной.

Как и ранее, в исчислении высказываний, основным объектом, с которым мы будем иметь дело в рассматриваемом здесь исчислении предикатов, будут не формулы, а секвенции. Это делается для удобства и простоты доказательства многих утверждений. Позже мы рассмотрим исчисление предикатов, в котором основным рассмотрения будут формулы – исчисление предикатов гильбертовского типа.

Итак, определим исчисление секвенций для логики предикатов. Это будет сделано таким же образом, как ранее мы определяли секвенциальное исчисление высказываний. Мы определяем аксиомы, истинность которых не вызывает сомнения, и правила вывода, позволяющие из тождественно истинных секвенций выводить новые секвенции, также тождественно истинные. Цель построения исчисление секвенций для логики предикатов – осуществить процесс вывода всех тождественно истинных секвенций.

Определение 14.1 (секвенциальное исчисление предикатов).

а)

Аксиомы:

1. $\varphi \vdash \varphi$;
2. $\vdash \forall x\ (x = x)$;
3. $\vdash \forall x \forall y\ \big((x = y) \to (y = x)\big)$;
4. $\vdash \forall x \forall y \forall z\ \Big(\big((x = y) \& (y = z)\big) \to (x = z)\Big)$;
5. $\vdash (t_1 = q_1), \dots, (t_n = q_n), \varphi(t_1, \dots, t_n) \vdash\ \varphi(q_1, \dots, q_n)$.

Заметим, что исчисление секвенций мы определяем *для логики предикатов с равенством*. Исчисление секвенций *для логики предикатов без равенства* получается из исчисления секвенций для логики предикатов с равенством очень просто: удалением аксиом 2-4, содержащих символ равенства.

б) Правила вывода:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \ \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}$
2. $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$
3. $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$
4. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$
5. $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$
6. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \xi\ ;\ \Gamma, \psi \vdash \xi;\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$
7. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$
8. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi,\ \ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$ (modus ponens)
9. $\dfrac{\Gamma,\ \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$
10. $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi;\ \ \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash}$

11. $\frac{\Gamma,\ \varphi,\ \psi,\ \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma,\ \psi,\ \varphi,\ \Gamma_1 \vdash \xi}$
12. $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$
13. $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}$, где $x \notin FV(\Gamma)$;
14. $\frac{\Gamma,\ \varphi(t) \vdash \psi}{\Gamma,\ \forall x \varphi(x) \vdash \psi}$
15. $\frac{\Gamma \vdash \varphi(t)}{\Gamma \vdash \exists x \varphi(x)}$
16. $\frac{\Gamma,\ \varphi \vdash \psi}{\Gamma,\ \exists x \varphi \vdash \psi}$, г
17. де $x \notin F$
18. $V(\Gamma \cup \{\psi\})$.

Заметим, что сейчас мы определили исчисление секвенций *для логики предикатов с равенством*. Исчисление секвенций *для логики предикатов без равенства* получается из исчисления секвенций для логики предикатов с равенством очень просто: удалением аксиом 2-4, содержащих символ равенства.

Определение 14.2. Последовательность секвенций $S_1, \dots, S_n$ называется доказательством, если каждая секвенция S_i – либо аксиома, либо получена из предыдущих однократным применением некоторого правила вывода.

Определение 14.3. Секвенция S называется доказуемой, если существует доказательство $S_1, \dots, S_n$, заканчивающееся на эту секвенцию (то есть, $S_n = S$).

Замечание 14.4.

а) Если последовательность секвенций $S_1, \dots, S_n$ является доказательством, то для любого $k \leq n$ последовательность секвенций $S_1, \dots, S_k$ также является доказательством.

б) Если последовательность секвенций $S_1, \dots, S_n$ является доказательством, то для любого $k \leq n$ секвенция S_k является доказуемой.

Доказательство – упражнение.

Кроме представления доказательства секвенций в виде последовательности, часто удобно пользоваться другим представлением доказательства секвенций: в виде дерева.

Следующее определение является *индуктивным*, оно описывает процесс построения деревьев секвенций. Одновременно с определением деревьев секвенций, определим два важных, понятия связанных с деревом секвенций: множество вершин дерева и высоту дерева.

Определение 14.5 (дерево секвенций).

Определим по индукции следующие понятия: дерево секвенций D, высоту дерева секвенций $h(D)$ и множество вершин дерева секвенций $V(D)$.

1) Каждая секвенция S является деревом; единственной вершиной этого дерева является секвенция S, а высота этого дерева равна 1.

2) Если $D_1, \dots, D_k -$ деревья секвенций, а S – секвенция, то следующая конструкция: $\frac{(D_1, \dots, D_k)}{S}$ является деревом секвенций. Высота $h(D)$ этого дерева секвенций D на единицу больше наибольшей из высот деревьев $D_1, \dots, D_k$, то есть $h(D) = (\max h(D_i) + 1)$. Множество вершин дерева секвенций D равно объединению множеств вершин деревьев секвенций $D_1, \dots, D_k$, то есть $V(D) = \bigcup_{i \leq k} V(D_i)$.

3) Других деревьев секвенций нет.

Определение 14.6. Дерево секвенций называется деревом вывода, если все его вершины являются аксиомами, а переходы происходят по правилам вывода.

Предложение 14.7. Секвенция S доказуема, тогда и только тогда, когда существует дерево вывода $D = \frac{D_1,\dots,D_k}{S}$, заканчивающееся на эту секвенцию.

Доказательство упражнение.

Определение 14.8. Дерево секвенций $\frac{S_1,\dots,S_n}{S}$ высоты 2 называется ***производным правилом вывода***, если существует дерево секвенции $D = \frac{\dots\dots}{S}$, заканчивающееся на эту секвенцию, у которого все переходы являются

правилами вывода, а каждая вершина дерева секвенций D является либо аксиомой, либо одной из секвенций $S_1, \dots, S_n$.

Определение 14.9. Дерево секвенций $\frac{S_1,\dots,S_n}{S}$ высоты 2 называется ***допустимым правилом вывода***, если при добавлении его в качестве правила вывода, количество доказуемых секвенций не увеличивается.

Замечание 14.10. Любое производное правило вывода является допустимым.

Доказательство. Кратко поясним идею доказательства. Допустим, секвенция получена с применением производного правила вывода. Это означает, что имеется дерево секвенций, в котором все вершины являются аксиомами, а каждый переход является либо правилом вывода, либо данным производным правилом вывода. Нам нужно достроить это дерево секвенций: вместо переходов, являющихся данным производным правилом вывода, нужно подставить соответствующие деревья секвенций из определения производного правила вывода.

Полное доказательство Замечания оставляем в качестве упражнения.

Замечание 14.10 доказано.

Предложение 14.11.

а) Если секвенция логики предикатов получена из доказуемой секвенции логики высказываний подстановкой формул логики предикатов вместо пропозициональных переменных, то эта секвенция доказуема в секвенциональном исчислении предикатов.

б) Правила вывода допустимые (производные) в секвенциональном исчислении высказываний являются допустимыми (производными) и в секвенциональном исчислении предикатов.

Доказательство.

а) Пусть секвенция логики предикатов S' получена из доказуемой секвенции логики высказываний S подстановкой формул логики предикатов вместо пропозициональных переменных Рассмотрим в секвенциональном исчислении высказываний дерево вывода D, заканчивающееся на секвенцию S. Заменим в дереве вывода D пропозициональные переменные на формулы. Тогда аксиомы секвенционального исчисления высказываний перейдут в аксиомы секвенционального исчисления предикатов, а правила вывода секвенционального исчисления высказываний перейдут переходят в правила вывода секвенционального исчисления предикатов. Таким образом, мы получим в секвенциональном исчислении предикатов дерево вывода D', заканчивающееся на секвенцию S'. Стало быть, секвенция S доказуема в секвенциональном исчислении предикатов.

б) Упражнение.

Предложение 14.11 доказано.

Предложение 14.12. Следующие правила вывода являются допустимыми в секвенциональном исчислении предикатов:

1. $\frac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \& \xi) \vdash (\psi \& \xi)}$;
2. $\frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \& \varphi) \vdash (\xi \& \psi)}$;
3. $\frac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \vee \xi) \vdash (\psi \vee \xi)}$;
4. $\frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \vee \varphi) \vdash (\xi \vee \psi)}$;
5. $\frac{\varphi \vdash \psi}{(\psi \to \xi) \vdash (\varphi \to \xi)}$;
6. $\frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \to \varphi) \vdash (\xi \to \psi)}$;
7. $\frac{\varphi \vdash \psi}{\neg \psi \vdash \neg \varphi}$;
8. $\frac{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)}{\Gamma \vdash \varphi(x)}$;
9. $\frac{\varphi \vdash \psi}{\forall x\, \varphi \vdash \forall x\, \psi}$;

10. $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\ \varphi \vdash \exists x\ \psi}$.

Доказательство: упражнение.

Определение 14.13. Формулы φ и ψ называются равносильными (обозначается $\varphi \equiv \psi$), если секвенции $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ являются доказуемыми.

Следствие 14.14. Пусть $\varphi_1 \equiv \varphi$ и формула ψ_1 получена из формулы ψ заменой одного вхождения подформулы φ формулы ψ на формулу φ_1. Тогда $\psi \equiv \psi_1$.

Доказательство. 1) Если формула φ не входит в формулу ψ, то $\psi \equiv \psi_1$.

2) Пусть формула φ входит в формулу ψ. Тогда длина $ln(\varphi) \leq ln(\psi)$. Далее будем доказывать Следствие 14.14 индукцией по длине $ln(\psi)$ формулы ψ.

а) Базис индукции. Пусть $n = ln(\varphi) = ln(\psi)$. Тогда $\varphi = \psi$. Следовательно, $\varphi_1 = \psi_1$. А значит $\psi = \varphi \equiv \varphi_1 = \psi_1$, т.е. $\psi \equiv \psi_1$.

б) Пусть для любой формулы, длина которой меньше n, утверждение Следствия 14.13 верно. Докажем, что для формулы ψ длины $ln(\psi) = n$ утверждение Следствия 14.14 также верно.

Пусть $\psi = (\psi' \& \psi'')$. Тогда $\psi_1 = [\psi']^{\varphi}_{\varphi_1} \& \psi''$ или $\psi_1 = \psi' \& [\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1}$. По индукционному предположению $\psi' \equiv [\psi']^{\varphi}_{\varphi_1}$ и $\psi'' \equiv [\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1}$. Следовательно, по Предложению 14.10 имеем

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi' \equiv [\psi']^{\varphi}_{\varphi_1}}{\psi' \vdash [\psi']^{\varphi}_{\varphi_1}}}{\psi' \& \psi'' \vdash [\psi']^{\varphi}_{\varphi_1} \& \psi''} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi' \equiv [\psi']^{\varphi}_{\varphi_1}}{[\psi']^{\varphi}_{\varphi_1} \vdash \psi'}}{[\psi']^{\varphi}_{\varphi_1} \& \psi'' \vdash \psi' \& \psi''}}{\psi' \& \psi'' \equiv [\psi']^{\varphi}_{\varphi_1} \& \psi''}$$

Или, соответственно,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi'' \equiv [\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1}}{\psi'' \vdash [\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1}}}{\psi' \& \psi'' \vdash \psi' \& [\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1}} \quad \dfrac{\dfrac{\psi'' \equiv [\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1}}{[\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1} \vdash \psi''}}{\psi' \& [\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1} \vdash \psi' \& \psi''}}{\psi' \& \psi'' \equiv \psi' \& [\psi'']^{\varphi}_{\varphi_1}}$$

Таким образом, получаем, что $\psi \equiv \psi_1$.

Аналогично доказываем для случая, когда $\psi = (\psi' \vee \psi'')$, $\psi = (\psi' \to \psi'')$, $\psi = \neg\psi'$, $\psi = \forall x \psi'$ и $\psi = \exists x\, \psi'$.

Следствие 14.14 доказано.

Определение 14.15. (семантика секвенций логики предикатов).

1. Секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ называется ***тождественно истинной***, если для любой модели $\mathfrak{A} \in K\big(\sigma(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi\})\big)$ и для любого означивания $\gamma\colon FV(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi\}) \to |\mathfrak{A}|$ имеет место следующее утверждение:

$$(\mathfrak{A} \vDash \varphi_1[\gamma], \dots, \mathfrak{A} \vDash \varphi_n[\gamma]) \;\Rightarrow\; \mathfrak{A} \vDash \psi[\gamma].$$

2. Секвенция $\vdash \psi$ называется ***тождественно истинной***, если для любой модели $\mathfrak{A} \in K\big(\sigma(\{\psi\})\big)$ и для любого означивания $\gamma\colon FV(\{\,\psi\}) \to |\mathfrak{A}|$ имеет место следующее утверждение: $\mathfrak{A} \vDash \psi[\gamma]$.

3. Секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ называется ***тождественно истинной***, если для любой модели $\mathfrak{A} \in K\big(\sigma(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})\big)$ и для любого означивания $\gamma\colon FV(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \to |\mathfrak{A}|$ найдется такой номер $i \in \{1, \dots, n\}$, что $\mathfrak{A} \nvDash \varphi_i[\gamma]$.

Замечание 14.16.

а) Секвенция $\vdash \psi$ является тождественно истинной тогда и только тогда, когда формула ψ является тождественно истинной.

б) Секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ является тождественно истинной тогда и только тогда, когда формула $\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n$ является тождественно ложной.

Доказательство: упражнение.

Теорема 14.17 (о корректности секвенциального исчисления предикатов). Если секвенция доказуема, то она тождественно истинна.

Доказательство.

Сначала сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 14.18.

а) Аксиомы секвенциального исчисления предикатов являются тождественно истинными.

б) Правила вывода секвенциального исчисления предикатов сохраняют тождественную истинность секвенций: для любого правила вывода $\frac{S_1, \dots, S_l}{S}$ (где $l \leq 3$) если секвенции $S_1, \dots, S_l$ являются тождественно истинными, то секвенция S также является тождественно истинной.

Доказательство: упражнение.

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть секвенция S доказуема. Тогда существует доказательство $S_1, \dots, S_n = S$.

Будем доказывать индукцией по длине доказательства n:

Базис индукции: $n = 1$. В этом случае секвенция S является аксиомой. Поэтому, по Лемме 14.18 (а), секвенция S является тождественно истинной.

Допустим, что для любого $k < n$ утверждение теоремы является верным. Докажем это утверждение для секвенции S, длина доказательства $S_1, \ldots, S_n$ которой равно n.

Из того, что $S_1, \ldots, S_n = S$ является доказательством, по определению доказательства имеем: для секвенции $S_n = S$ существуют такие доказуемые секвенции $S_{k_1}, \ldots, S_{k_l}$ (где $k_1, \ldots, k_l < n$), что дерево $\frac{S_{k_1}, \ldots, S_{k_l}}{S}$ является правилом вывода. По индукционному предположению получаем, что секвенции $S_{k_1}, \ldots, S_{k_l}$ являются тождественно истинными, так как длина доказательства каждой из них равна k_i, которое меньше n. Поэтому, применяя Лемму 14.18 (б), получаем, что секвенция S также является тождественно истинной.

Теорема 14.17 доказана.

Предложение 14.19. Пусть $x \notin FV(\xi)$. Тогда имеют место следующие эквивалентности:

1. $\forall x \xi \equiv \xi$;
2. $\exists x \xi \equiv \xi$;
3. $\forall x \forall y \varphi(x, y) \equiv \forall y \forall x \varphi(x, y)$;
4. $\exists x \exists y \varphi(x, y) \equiv \exists y \exists x \varphi(x, y)$;
5. $\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg \varphi(x)$;
6. $\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$;
7. $\forall x \varphi(x) \,\&\, \forall x \psi(x) \equiv \forall x\big(\varphi(x) \,\&\, \psi(x)\big)$;
8. $(\exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x)) \equiv \exists x\big(\varphi(x) \vee \psi(x)\big)$;
9. $(\forall x \varphi(x) \,\&\, \xi) \equiv \forall x(\varphi(x) \,\&\, \xi)$;
10. $(\exists x \varphi(x) \,\&\, \xi) \equiv \exists x(\varphi(x) \,\&\, \xi)$;
11. $(\forall x \varphi(x) \vee \xi) \equiv \forall x(\varphi(x) \vee \xi)$;
12. $(\exists x \varphi(x) \vee \xi) \equiv \exists x(\varphi(x) \vee \xi)$;

13. $(\xi \,\&\, \forall x\varphi(x)) \equiv \forall x(\xi \,\&\, \varphi(x))$;

14. $(\xi \,\&\, \exists x\varphi(x)) \equiv \exists x(\xi \,\&\, \varphi(x))$;

15. $(\xi \vee \forall x\varphi(x)) \equiv \forall x(\xi \vee \varphi(x))$;

16. $(\xi \vee \exists x\varphi(x)) \equiv \exists x(\xi \vee \varphi(x))$;

17. $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$, если не возникает коллизии переменных;

18. $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$, если не возникает коллизии переменных.

Доказательство: упражнение.

Определение 14.20. Говорят, что формула φ находится в ***предваренной нормальной форме***, если она имеет вид

$$Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi(x_1, \dots, x_n),$$

где Q_i являются кванторами, то есть $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, а $\psi -$ бескванторная формула.

Теорема 14.21. Для любой формулы φ существует равносильная ей формула $\psi \equiv \varphi$, находящаяся в предваренной нормальной форме.

Доказательство.

Алгоритм построения предваренной нормальной формы.

1. Избавляемся от импликаций.
2. С помощью тождеств (5) и(6) Предложения 14.19 вносим отрицания под знаки кванторов.
3. С помощью тождеств (17) и (18) Предложения 14.19 переобозначаем переменные так, чтобы:
   a. разные кванторы действовали по разным переменным;
   b. связанные переменные не имели свободных вхождений.

4. С помощью тождеств (9-16) Предложения 14.19 выносим кванторы наружу.

В результате мы получим формулу ψ, находящуюся в предваренной нормальной форме. В силу Теоремы о замене, полученная формула ψ будет эквивалентна исходной, то есть $\psi \equiv \varphi$.

Теорема 14.21 доказана.

§15. Теорема о существовании модели

Основная цель этого параграфа – показать совпадение синтаксиса и семантики логики предикатов. Здесь мы докажем, что формула является доказуемой тогда и только тогда, когда она является тождественно истинной.

Определение 15.1. Пусть σ – сигнатура, $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ и $\varphi \in F(\sigma)$. Введём следующие обозначения:

1. $\Gamma \vdash \varphi$, если $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ такие, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ доказуема;
2. $\Gamma \vdash$, если $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ такие, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ доказуема. В этом случае будем говорить, что множество Γ является ***противоречивым***.
3. $\Gamma \nvdash$, если Γ не является противоречивым**.** В этом случае будем говорить, что множество Γ ***непротиворечиво***.
4. Множество Γ называется теорией (в сигнатуре σ), если $\Gamma \subseteq S(\sigma)$ и $\forall \varphi \in S(\sigma)$ $(\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma)$, то есть множество Γ является дедуктивно замкнутым.
5. Множество Γ называется полным (в сигнатуре σ), если $\Gamma \subseteq S(\sigma)$ и $\forall \varphi \in S(\sigma)$ выполнено ($\neg\varphi \in \Gamma$ или $\varphi \in \Gamma$).

Замечание 15.2. Пусть T – теория и $\sigma = \sigma(T)$. Тогда

1. Для любого предложения $\varphi \in S(\sigma)$ выполнено $\varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \varphi$.
2. Если $\sigma \subseteq \sigma_1$ и $\sigma_1 \neq \sigma_1$, то T не является теорией сигнатуры σ_1.

Доказательство:

1. $\Rightarrow$) Пусть $\varphi \in T$. Секвенция $\varphi \vdash \varphi$ доказуема. Следовательно, выполнено $T \vdash \varphi$.

$\Leftarrow$) Пусть $T \vdash \varphi$. Так как T – теория, то выполнено $\varphi \in T$.

2. Пусть $\sigma \subseteq \sigma_1$ и $\sigma \neq \sigma_1$. Тогда найдется сигнатурный символ $q \in \sigma_1 \backslash \sigma$. Рассмотрим следующие случаи:

а) Пусть q – константа. Тогда секвенция $\vdash q = q -$ доказуема. Следовательно, Т $\vdash q = q$. Но, с другой стороны, $q = q \notin$ Т, поскольку символ q не входим в сигнатуру множества предложений Т. Таким образом, множество предложений Т не является теорией в сигнатуре σ_1.

б) Пусть q – функциональный символ. Рассмотрим предложение $\varphi = \forall x\ (q(\overline{x}) = q(\overline{x}))$. Очевидно, что $\vdash \varphi$, но $\varphi \notin$ Т, поскольку символ q не входим в сигнатуру множества предложений Т. Следовательно, множество предложений Т не является теорией в сигнатуре σ_1.

в) Пусть q – предикатный символ. Рассмотрим предложение $\varphi = \exists x q(\overline{x})$. Очевидно, что с одной стороны, $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$, следовательно, Т $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$. Но, с другой стороны, $\varphi \notin$ Т, поскольку символ q не входим в сигнатуру множества предложений Т. Следовательно, множество предложений Т не является теорией в сигнатуре σ_1.

Замечание 15.2. доказано.

Определение 15.3. Элементарной теорией $Th(\mathfrak{A})$ модели $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$ называется множество всех предложений сигнатуры σ, истинных на модели $\mathfrak{A}$, т.е. $Th(\mathfrak{A}) = \{ \varphi \in S(\sigma) | \ \mathfrak{A} \vDash \varphi \}$.

Определение 15.4. Модели $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ называются элементарно эквивалентными (обозначается $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) , если их элементарные теории совпадают, т.е. $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$.

Замечание 15.5. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$. Элементарная теория модели $\mathfrak{A}$ является полной непротиворечивой теорией в сигнатуре σ.

Доказательство.

а) Докажем, что $Th(\mathfrak{A})$ является теорией сигнатуры σ. Пусть $\varphi \in S(\sigma)$. Тогда если $Th(\mathfrak{A}) \vdash \varphi$, то найдутся такие $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Th(\mathfrak{A})$, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ доказуема. Следовательно, по теореме корректности, секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ является тождественно истинной. И, поскольку $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Th(\mathfrak{A})$, выполнено $\mathfrak{A} \vDash \varphi_1, \dots, \mathfrak{A} \vDash \varphi_n$. Следовательно $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Значит, выполнено $\varphi \in Th(\mathfrak{A})$.

б) Покажем, что теория $Th(\mathfrak{A})$ непротиворечива. Пусть теория $Th(\mathfrak{A})$ противоречива, т.е. $Th(\mathfrak{A}) \vdash$. Тогда найдутся такие предложения $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Th(\mathfrak{A})$, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ доказуема. Следовательно, секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ тождественно истинна. Значит, найдется такое $i \in \{1, \dots, n\}$, что $\mathfrak{A} \nvDash \varphi_i$. Но, с другой стороны, так как $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Th(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A} \vDash \varphi_1, \dots, \mathfrak{A} \vDash \varphi_n$. Таким образом, мы пришли к противоречию, предположив, что теория $Th(\mathfrak{A})$ противоречива. Следовательно, теория $Th(\mathfrak{A})$ непротиворечива.

в) Докажем, что теория $Th(\mathfrak{A})$ полна. Рассмотрим $\varphi \in S(\sigma)$ такое, что $\varphi \notin Th(\mathfrak{A})$. Следовательно, $\mathfrak{A} \nvDash \varphi$. Тогда, по определению истинности формулы на модели, получим $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi$. Следовательно $\neg\varphi \in Th(\mathfrak{A})$. И, стало быть, теория $Th(\mathfrak{A})$ полна.

Замечание 15.5 доказано.

Замечание 15.6. Пусть $\mathrm{T} \subseteq S(\sigma)$ – теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

а) Теория T противоречива.

б) Для любого $\varphi \in S(\sigma)$ выполнено $\varphi \in \mathrm{T}$.

в) Найдется предложение $\varphi \in S(\sigma)$ такое, что $\varphi \in \mathrm{T}$ и $\neg\varphi \in \mathrm{T}$.

Доказательство.

(а⇒б) Пусть теория T противоречива. Тогда найдутся такие $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in T$, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ доказуема. Следовательно, для любого $\varphi \in S(\sigma)$ имеем

$$\cfrac{\cfrac{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash}{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\varphi \vdash}}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi}$$

Так как $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in T$, выполнено $T \vdash \varphi$. Следовательно, в силу того, что T – теория, имеем $\varphi \in$ T.

(б⇒в) Так как $\varphi \in S(\sigma)$ и $\neg\varphi \in S(\sigma)$, то $\varphi, \neg\varphi \in T$.

(в⇒а) Пусть предложение $\varphi \in S(\sigma)$ таково, что $\varphi, \neg\varphi \in T$. Тогда

$$\frac{\varphi \vdash \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\varphi, \neg\varphi \vdash}$$

Следовательно, секвенция $\varphi, \neg\varphi \vdash$ доказуема. И, стало быть, теория T протеворечива.

Замечание 15.6 доказано.

Следствие 15.7. Пусть T – теория сигнатуры σ. Тогда T противоречива тогда и только тогда, когда $T = S(\sigma)$.

Доказательство: упражнение.

Предложение 15.8. Непротиворечивое, полное множество предложений является теорией, т.е.

$$(T \subseteq S(\sigma),\ T \nvdash \text{ и } T - \text{полно}) \Rightarrow T - \text{теория}.$$

Доказательство. Будем доказывать от противного. Допустим, что T – не теория, значит, найдется такое предложение $\varphi \in S(\sigma)$, что $T \vdash \varphi$ и $\varphi \notin T$. Тогда $\neg\varphi \in T$. Следовательно, найдутся $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in T$ такие, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ доказуема. Тогда

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi; \quad \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \ \neg\varphi \vdash}$$

Таким образом, секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\varphi \vdash$ доказуема. Следовательно, множество предложений T противоречиво. Получаем противоречие с условием Предложения.

Предложение 15.8 доказано.

Следующие три утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем, мы сформулируем без доказательства.

Теорема 15.9. Рассмотрим множества A и B. Пусть B – бесконечное множество и $\|A\| < \|B\|$. Тогда $\|A \cup B\| = \|B\|$.

Теорема 15.10. Пусть A – бесконечное множество, рассмотрим множество конечных слов $A^* = \{ \langle a_1, \ \dots, a_n \rangle \mid n \in N, \ a_1, \dots, a_n \in A \}$. Тогда $\|A^*\| = \|A\|$.

Теорема 15.11. Рассмотрим произвольное множество A. Для него существует кардинал α такой, что $\|\alpha\| = \|A\|$.

Теорема 15.12. Для любых множеств A и B либо $\|A\| \leq \|B\|$, либо $\|\mathrm{B}\| \leq \|A\|$.

Доказательство. Рассмотрим множества A и В. По Теореме 15.11 существуют кардиналы α и β такие, что $\|\alpha\| = \|A\|$ и $\|\beta\| = \|B\|$. Поскольку α

и β – кардиналы, выполнено $\alpha \leq \beta$ или $\beta \leq \alpha$. Следовательно, $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ или $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$. Таким образом, выполнено $\|A\| \leq \|B\|$ или $\|B\| \leq \|A\|$.

Теорема 15.12 доказана.

Следствие 15.13. Если α – бесконечный кардинал, то α – предельный ординал.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть $\alpha -$ бесконечный кардинал и непредельный ординал, т.е. $\alpha = \beta + 1$. Значит, α – бесконечный ординал, следовательно, и β – бесконечный ординал; кроме того, $\alpha = \beta \cup \{ \beta \}$. Тогда, по Теореме 15.9, получим $\|\alpha\| = \|\beta\|$, откуда, по определению кардиналов, следует, что α не является кардиналом. Мы пришли к противоречию, предположив, что $\alpha -$ непредельный ординал. Стало быть, α – предельный ординал.

Следствие 15.13 доказано.

Определение 15.14. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$. Пусть X – множество переменных. Отображение $\gamma: X \to |\mathfrak{A}|$ называется означиванием (интерпретацией) переменных X на модели $\mathfrak{A}$. Пусть $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, обозначим $FV(\Gamma) = \{ x \mid \exists \varphi \in \Gamma \text{ такое, что } x \in FV(\varphi) \}$. Пусть $FV(\Gamma) \subseteq X$. Говорят, что множество формул Γ ***истинно на модели*** $\mathfrak{A}$ ***при означивании переменных*** γ и пишут: $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$, если $\forall \varphi \in \Gamma$ выполнено $\mathfrak{A} \vDash \varphi [\gamma]$. Говорят, что множество формул Γ ***выполнимо на модели*** $\mathfrak{A}$, если $\exists \gamma : X \to |\mathfrak{A}|$ такое, что $FV(\Gamma) \subseteq X$ и $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$. Говорят, что множество формул Γ ***выполнимо*** (или ***имеет модель***), если оно выполнимо на некоторой модели.

Теорема 15.15. (О существовании модели) Любое непротиворечивое множество формул имеет модель (т. е., является выполнимым). Иными словами, для любого $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ такого, что $\Gamma \nvdash$, выполнено:

$$\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) \ \text{ и } \ \exists \gamma: FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}| \ \text{ такие, что } \ \mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma].$$

Доказательство. Рассмотрим множество предложений $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ такое, что $\Gamma \nvdash$ и $X = FV(\Gamma)$. Перейдём от формул к предложениям.

Пусть D – множество констант такое, что $D \cap \sigma = \emptyset$ и $\|D\| = \|X\|$. Тогда существует взаимно-однозначное отображение $\gamma: X \to D$. Обозначим

$$\Gamma' = \Gamma[\gamma] = \{\, \varphi(d_1, \dots, d_n) \mid \varphi \in \Gamma,\ FV(\varphi) = \{\, x_1, \dots, x_n\},\ \gamma(x_i) = d_i \in D\}.$$

Лемма 15.16. Множество предложений Γ' непротиворечиво.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Допустим, что Γ' противоречиво. Тогда найдутся такие предложения $\varphi_1', \dots, \varphi_n' \in \Gamma'$, что секвенция $\varphi_1', \dots, \varphi_n' \vdash$ доказуема.

Значит, существует дерево вывода $D' = \frac{\dots}{\varphi_1', \dots, \varphi_n' \vdash}$, заканчивающееся на эту секвенцию.

Построим дерево вывода $[D']^{\varphi'}_{\gamma^{-1}(\varphi')}$, полученное заменой всех формул φ', входящих в дерево D', на формулы $\gamma^{-1}(\varphi')$. А именно, $[D']^{\varphi'}_{\gamma^{-1}(\varphi')} = D_0 = \frac{\dots}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash}$.

Дерево D_0 является деревом вывода, так как аксиомы переходят в аксиомы и правила вывода переходят в правила вывода. Более того, формулы $\varphi_i = [\varphi_i']^{c}_{\gamma^{-1}(c) = x_k}$, причём $\varphi_i \in F(\sigma)$. Так как $\varphi_i' \in \Gamma'$, то $\varphi_i \in \Gamma$. Следовательно, секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ доказуема. А значит, множество формул Γ

противоречиво, что противоречит условию Теоремы. Таким образом, получили, что множество предложений Γ' непротиворечиво.

Лемма 15.16 доказана.

Рассмотрим кардинал $\delta = \max(\omega, \|\sigma\|, \|X\|)$ – он определён в силу линейной упорядоченности мощностей. Выберем множество констант C такое, чтобы $\|C\| = \delta$ и $C \cap (\sigma \cup D) = \emptyset$.

Введем обозначение $\sigma' = \sigma \cup C \cup D$.

Тогда множество предложений

$S(\sigma') \subseteq \{\sigma' \cup \{x_i \mid i \in n\} \cup \{(,),",",\&,\cup,\neg,\rightarrow,\exists,\forall\}\}^*$,

где, как и ранее, $\{\sigma' \cup \{x_i \mid i \in n\} \cup \{(,),",",\&,\cup,\neg,\rightarrow,\exists,\forall\}\}^*$ – множество конечных слов алфавита $\{\sigma' \cup \{x_i \mid i \in n\} \cup \{(,),",",\&,\cup,\neg,\rightarrow,\exists,\forall\}\}$.

Так как $\|\sigma'\| = \max(\|\sigma\|, \|D\|, \|C\|) = \delta$, то $\|S(\sigma')\| = \delta$.

Кроме того, δ – кардинал. Следовательно, δ – предельный ординал, т.е., $\delta = \{\alpha \mid \alpha < \delta\}$ и $\|\delta\| = \|F(\sigma')\|$.

Исходя из определения ординалов очевидно, что

$\|S(\sigma')\| = \|\delta\| = \|\{\alpha \mid \alpha < \delta\}\|$.

Поэтому мы можем занумеровать множество $S(\sigma')$ следующим образом: $S(\sigma') = \{\varphi_\alpha \mid \alpha < \delta\}$.

Далее опишем конструкцию полной теории T' сигнатуры σ', на которой основывается доказательство теоремы.

Теорию $\mathrm{T}' \subseteq S(\sigma')$ строим при помощи трансфинитной индукции:

Шаг 0: $\mathrm{T}_0 = \Gamma'$, $\mathrm{T}_0 \nvdash$.

Шаг β: $0 < \beta \leq \delta$

<u>*Случай 1*</u>: β – непредельный ординал, т.е. $\beta = \alpha + 1$. Так как $\beta \leq \delta$ и β – непредельный ординал, а кардинал δ – предельный ординал, то $\beta < \delta$ и $\alpha < \delta$. Считаем, что T_α построена. Рассмотрим φ_α.

<u>*Случай 1.1*</u>. Пусть $\mathrm{T}_\alpha \cup \{ \varphi_\alpha \} \nvdash$ и $\varphi_\alpha \neq \exists x\, \psi(x)$. Тогда положим

$$\mathrm{T}_\beta = \mathrm{T}_{\alpha+1} = \mathrm{T}_\alpha \cup \{ \varphi_\alpha \}.$$

<u>*Случай 1.2*</u>. Пусть $\mathrm{T}_\alpha \cup \{ \varphi_\alpha \} \nvdash$ и $\varphi_\alpha = \exists x\, \psi_\alpha(x)$. Так как $\alpha < \delta$ и δ – кардинал, имеем $\|\alpha\| < \|\delta\|$. Стало быть, если α – бесконечный ординал, то $\|\mathrm{C} \cap \sigma(\mathrm{T}_\alpha)\| \leq \alpha$, поскольку на каждом шаге мы добавляем не более, чем конечное число констант; поэтому $\|\mathrm{C} \cap \sigma(\mathrm{T}_\alpha)\| < \delta$. Если же α – конечный ординал, то, поскольку на каждом шаге мы добавляем не более, чем конечное число констант, множество $\mathrm{C} \cap \sigma(\mathrm{T}_\alpha)$ конечно. Поэтому $\|\mathrm{C} \cap \sigma(\mathrm{T}_\alpha)\| < \delta$ – бесконечного кардинала. Следовательно, во всех случаях имеем $\|\mathrm{C} \cap \sigma(\mathrm{T}_\alpha)\| < \delta$, но, по построению, $\|C\| = \delta$. Значит, $\|\mathrm{C} \setminus \sigma(\mathrm{T}_\alpha)\| = \delta$ и, в силе этого, множество $\mathrm{C} \setminus \sigma(\mathrm{T}_\alpha)$ непусто: $\mathrm{C} \setminus \sigma(\mathrm{T}_\alpha) \neq \emptyset$. Таким образом, существует некоторая константа $c_\alpha \in \mathrm{C} \setminus \sigma(\mathrm{T}_\alpha)$.

Положим $\mathrm{T}_\beta = \mathrm{T}_{\alpha+1} = \mathrm{T}_\alpha \cup \{ \varphi_\alpha, \psi_\alpha(c_\alpha)\}$.

<u>*Случай 1.3*</u>. Пусть $\mathrm{T}_\alpha \cup \{ \varphi_\alpha\} \vdash$.

Тогда положим $\mathrm{T}_\beta = \mathrm{T}_{\alpha+1} = \mathrm{T}_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$.

<u>*Случай 2*</u>: β –предельный ординал.

В этом случае положим $\mathrm{T}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathrm{T}_\alpha$.

Будем продолжать процесс трансфинитной индукцией по всем ординалам $\beta < \delta$.

После завершения процесса положим $\mathrm{T}' = \mathrm{T}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathrm{T}_\alpha$.

Мы описали конструкцию множества предложений T' сигнатуры σ'; далее мы докажем, что T' является полной теорией сигнатуры σ'. На множестве предложений T' далее основывается доказательство теоремы о существовании модели.

Лемма 15.17. Пусть $\Delta \subseteq F(\sigma_0)$, $\varphi \in F(\sigma_0)$, $x \notin FV(\Delta)$, $c \in \sigma(\varphi)$ и $c \notin \sigma(\Delta)$. Тогда если секвенция $\Delta, \varphi \vdash$ доказуема, то секвенция $\Delta, [\varphi]_x^c \vdash$ также доказуема.

Доказательство. Пусть секвенция $\Delta, \varphi \vdash$ доказуема. Тогда существует дерево вывода

$$D = \frac{\cdots}{\Delta, \varphi \vdash}$$

В таком случае дерево секвенций

$$[D]_x^c = \frac{\cdots}{\Delta, [\varphi]_x^c \vdash}$$

также является деревом вывода: при замене в дереве вывода D константы c на переменную x, аксиомы перейдут в аксиомы, а правила вывода перейдут в правила вывода.

Лемма 15.17 доказана.

Лемма 15.18 (Хенкина).

а. T' — непротиворечиво;

б. T' – полно;

в. T' – теория;

г. $(\varphi \& \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T'$ и $\psi \in T'$;

д. $(\varphi \vee \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T'$ или $\psi \in T'$;

е. $\neg\varphi \in T' \Leftrightarrow \varphi \notin T'$;

ж. $(\varphi \to \psi) \in T' \Leftrightarrow$ если $\varphi \in T'$, то $\psi \in T'$;

з. $\exists x\, \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \exists c \in C\colon \psi(c) \in T' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists$ замкнутый терм $t \in T(\sigma')$: $FV(t) = \emptyset$ и $\psi(t) \in T'$;

и. $\forall x\, \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \forall c \in C\colon \psi(c) \in T' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall$ замкнутого терма $t \in T(\sigma')$: если $FV(t) = \emptyset$, то $\psi(t) \in T'$.

Доказательство. а) Докажем, что $T' \nvdash$. Будем доказывать трансфинитной индукцией по построению T'.

Шаг 0. $T_0 \nvdash$

Шаг β. Предположим, что для любого $\alpha < \beta$ выполнено $T_\alpha \nvdash$. Покажем, что $T_\beta \nvdash$.

Случай 1. Пусть $\beta = \alpha + 1$.

Случай 1.1. $T_\beta = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$; $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$. Тогда $T_\beta \nvdash$.

Случай 1.2. $T_\beta = T_{\alpha+1} = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c_\alpha)\}$.

Будем доказывать от противного. Допустим, что $T_\beta \vdash$. Тогда найдутся $\xi_1, \dots, \xi_n \in T_\alpha$ такие, что секвенция $\xi_1, \dots, \xi_n, \varphi_\alpha, \psi_\alpha(c_\alpha) \vdash$ доказуема. А так как $c_\alpha \notin \sigma(T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\})$, получим

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists x\,\psi_\alpha(x),\psi_\alpha(y)\vdash}{\xi_1,\dots,\xi_n,\psi_\alpha(y)\vdash\neg\exists x\,\psi_\alpha(x)}}{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists x\,\psi_\alpha(x)\vdash\neg\exists x\,\psi_\alpha(x)} \qquad \dfrac{\exists x\,\psi_\alpha(x)\vdash\exists x\,\psi_\alpha(x)}{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists x\,\psi_\alpha(x)\vdash\exists x\,\psi_\alpha(x)}}{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists x\,\psi_\alpha(x)\vdash}$$

Следовательно $\mathrm{T}_\alpha,\exists x\,\psi_\alpha(x)\vdash$. Тогда получим $\mathrm{T}_\alpha\cup\{\exists x\,\psi_\alpha(x)\}$ – противоречиво, что противоречит условию. Таким образом $\mathrm{T}_\beta\nvdash$.

Случай 1.3. $\mathrm{T}_\beta=\mathrm{T}_\alpha\cup\{\neg\varphi_\alpha\}$. Допусти, что $\mathrm{T}_\beta\vdash$. Тогда $\mathrm{T}_\alpha\cup\{\neg\varphi_\alpha\}\vdash$. По условию также имеем $\mathrm{T}_\alpha\cup\{\varphi_\alpha\}\vdash$. Следовательно, найдутся $\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_k\in\mathrm{T}_\alpha$ такие, что секвенции $\xi_1,\dots,\xi_n,\varphi_\alpha\vdash$ и $\xi_{n+1},\dots,\xi_k,\neg\varphi_\alpha\vdash$ – доказуемы. Построим дерево вывода

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi_1,\dots,\xi_n,\varphi_\alpha\vdash}{\xi_1,\dots,\xi_n\vdash\neg\varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k\vdash\neg\varphi_\alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\xi_{n+1},\dots,\xi_k,\neg\varphi_\alpha\vdash}{\xi_{n+1},\dots,\xi_k\vdash\neg\neg\varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k,\vdash\neg\neg\varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k\vdash}$$

Следовательно $\mathrm{T}_\alpha\vdash$, что противоречит индукционному предположению. Таким образом, $\mathrm{T}_\beta\nvdash$.

Случай 2. β – предельный ординал и $\mathrm{T}_\beta=\bigcup_{\alpha<\beta}\mathrm{T}_\alpha$. Тогда найдутся $\xi_1,\dots,\xi_n\in\mathrm{T}_\beta$ такие, что секвенция $\xi_1,\dots,\xi_n\vdash$ – доказуема. Следовательно существуют $\alpha_1,\dots,\alpha_n<\beta$ такие, что $\xi_1\in\mathrm{T}_{\alpha_1},\ \dots,\xi_n\in\mathrm{T}_{\alpha_n}$. Пусть $\alpha=\max\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, тогда $\alpha<\beta$. Так как для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ выполнено $\alpha_i\le\alpha$, то $\mathrm{T}_{\alpha_i}\subseteq\mathrm{T}_\alpha$. А значит все $\xi_1,\dots,\xi_n\in\mathrm{T}_\alpha$. Таким образом, мы получили, что $\mathrm{T}_\alpha\vdash$, что противоречит индукционному предположению. Следовательно, $\mathrm{T}_\beta\nvdash$.

Итак, мы доказали, что для любого $\beta \leq \delta$ выполнено $T_\beta \nvdash$. Следовательно $T_\delta \nvdash$, а значит и $T' \nvdash$.

б) Докажем, что T' полно.

$\varphi \in S(\sigma') \Rightarrow \exists \alpha < \delta: \varphi = \varphi_\alpha \Rightarrow \varphi_\alpha \in T_{\alpha+1}$ или $\neg\varphi_\alpha \in T_{\alpha+1}$.

$$T_{\alpha+1} \subseteq T_\delta = T' \Rightarrow \varphi_\alpha \in T' \text{или } \neg\varphi_\alpha \in T'.$$

в) Так как множество предложений T' полно и непротиворечиво, то T' – теория.

г) ($\Rightarrow$) Пусть $(\varphi \& \psi) \in T'$. Тогда

$$\frac{(\varphi \& \psi) \vdash (\varphi \& \psi)}{(\varphi \& \psi) \vdash \varphi} \text{ и } \frac{(\varphi \& \psi) \vdash (\varphi \& \psi)}{(\varphi \& \psi) \vdash \psi}$$

Таким образом имеем $T' \vdash \varphi$ и $T' \vdash \psi$. Следовательно $\varphi, \psi \in T'$.

($\Leftarrow$) Пусть $\varphi, \psi \in T'$. Тогда

$$\frac{\varphi \vdash \psi;\ \psi \vdash \varphi}{\varphi, \psi \vdash (\varphi \& \psi)}$$

Следовательно$T' \vdash (\varphi \& \psi)$. А значит и $(\varphi \& \psi) \in T'$.

д) ($\Rightarrow$) Пусть $(\varphi \vee \psi) \in T'$. Допустим, что $\varphi \notin T'$ и $\psi \notin T'$. Тогда $\neg\varphi, \neg\psi \in T'$. Построим дерево вывода

$$\frac{\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg\varphi \& \neg\psi \qquad \neg\varphi \& \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)}$$

Следовательно $T' \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$. А значит $\neg(\varphi \vee \psi) \in T'$, что не может быть, так как T' непротиворечиво. Следовательно $\varphi \in T'$ или $\psi \in T'$.

($\Leftarrow$) Пусть $\varphi \in T'$ или $\psi \in T'$. Секвенции $\varphi \vdash (\varphi \vee \psi)$ и $\psi \vdash (\varphi \vee \psi)$ доказуемы, следовательно, $T' \vdash (\varphi \vee \psi)$. А значит $(\varphi \vee \psi) \in T'$.

е) ($\Rightarrow$) Пусть $\neg\varphi \in T'$. Тогда, в силу непротиворечивости T', имеем $\varphi \notin T'$.

($\Leftarrow$) Пусть $\varphi \notin T'$. Тогда, в силу полноты T' имеем $\neg\varphi \in T'$.

ж) ($\Rightarrow$) Пусть $(\varphi \rightarrow \psi) \in T'$ и $\varphi \in T'$. Тогда

$$\frac{\varphi \vdash \varphi; \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash}{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi) \vdash \psi}$$

Следовательно $T' \vdash \psi$. А значит, $\psi \in T'$.

($\Leftarrow$) Будем доказывать от противного. Допустим, что $(\varphi \rightarrow \psi) \notin T'$. Тогда $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in T'$. Так как $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi \& \neg\psi)$, то $T' \vdash \varphi \& \neg\psi$. Следовательно $T' \vdash \varphi$ и $T' \vdash \neg\psi$. А значит $\varphi \in T'$ и $\neg\psi \in T'$. Поскольку $\varphi \in T'$, по условию получаем, что $\psi \in T'$. Таким образом, $\psi \in T'$ и $\neg\psi \in T'$, то есть T' противоречиво. А это противоречит п. а.

з) (1→ 2) Пусть $\exists x\, \psi(x) \in T'$. Тогда найдется такое α, что $\varphi_\alpha = \exists x\, \psi(x)$. Так как $T', \varphi_\alpha \nvdash$, то $T_\alpha, \varphi_\alpha \nvdash$. Следовательно, $T_{\alpha+1} = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c_\alpha)\}$, где $c_\alpha \in C$. А значит $\psi_\alpha(c_\alpha) \in T'$.

(2→ 3) Пусть существует такое $c \in C$, что $\psi(c) \in T'$. Положим $t = c$. Тогда получим $t \in T(\sigma')$, $FV(t) = \emptyset, \psi(t) \in T'$.

($\mathbf{3} \to \mathbf{1}$) Пусть существует такой терм $t \in T(\sigma')$, что $FV(t) = \emptyset$ и $\psi(t) \in \mathrm{T}'$.

$$\frac{\psi(t) \vdash [\psi(x)]_t^x}{\psi(\mathrm{t}) \vdash \exists \mathrm{x}\, \psi(\mathrm{x})}$$

Следовательно, $\mathrm{T}' \vdash \exists x\, \psi(x)$. А значит, $\exists x\, \psi(x) \in \mathrm{T}'$.

и) ($\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{2}$) $\forall x\, \psi(x) \in \mathrm{T}' \Leftrightarrow \neg\exists x\, \neg\psi(x) \in \mathrm{T}' \Leftrightarrow \exists x\, \neg\psi(x) \notin \mathrm{T}' \Leftrightarrow \neg\exists c \in C{:}\, \neg\psi(c) \in \mathrm{T}' \Leftrightarrow \forall c \in C{:}\, \neg\psi(c) \notin \mathrm{T}' \Leftrightarrow \forall c \in C{:}\, \psi(c) \in \mathrm{T}'$.

($\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{3}$) $\forall x\, \psi(x) \in \mathrm{T}' \Leftrightarrow \neg\exists x\, \neg\psi(x) \in \mathrm{T}' \Leftrightarrow \exists x\, \neg\psi(x) \notin \mathrm{T}' \Leftrightarrow \neg\exists\, t \in T(\sigma'){:}\, FV(t) = \emptyset,\ \neg\psi(t) \in \mathrm{T}' \Leftrightarrow \forall t \in T(\sigma')$ если $FV(t) = \emptyset,$ то $\neg\psi(t) \notin \mathrm{T}' \Leftrightarrow$ $\forall t \in T(\sigma')$ если $FV(t) = \emptyset,$ то $\psi(t) \in \mathrm{T}'$.

Лемма 15.18 доказана.

Сначала докажем теорему для случая ***исчисления предикатов без равенства***. Это означает, что символа равенства нет в определении формул; также в исчислении предикатов отсутствуют аксиомы 2-5.

Определение 15.19. Определим модель $\mathfrak{A}' = \langle A;\, \sigma' \rangle$ следующим образом.

1) Для модели $\mathfrak{A}'$ её основное множество $A = \{\, t \in T(\sigma') \mid FV(t) = \emptyset\}$. Заметим, что $C \subseteq A,$ поэтому множество $A \neq \emptyset$.

2) Определим означивание сигнатурных символов на модели $\mathfrak{A}'$:

а) Для любого предикатного символа $P^n \in \sigma'$ и для любых термов $t_1, \dots, t_n \in A$ полагаем $\mathfrak{A}' \vDash P(t_1, \dots, t_n)$, если $P(t_1, \dots, t_n) \in T'$.

б) Для любого функционального символа $f^n \in \sigma'$ и для любых термов

$t_1, \dots, t_n \in A$ полагаем $f^{\mathfrak{A}'}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n) \in A$; заметим, что здесь выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ рассматривается как замкнутый терм.

в) Для любой константы $c \in \sigma'$ полагаем $c^{\mathfrak{A}'} = c$; заметим, что здесь константу c мы также рассматриваем как замкнутый терм.

Далее нашей целью будет доказать, что $\mathfrak{A}' \vDash T'$.

Лемма 15.20. Пусть $t \in T(\sigma')$, $FV(t) = \emptyset$. Тогда $t^{\mathfrak{A}'} = t$.

Доказательство: Индукцией по построению термов.

1) Пусть $t = c \in \sigma'$. Тогда $t^{\mathfrak{A}'} = c^{\mathfrak{A}'} = c$.
2) Пусть $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

Тогда $t^{\mathfrak{A}'} = f^{\mathfrak{A}'}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n) = t$.

Лемма 15.20 доказана.

Лемма 15.21. Пусть $\mathfrak{A}' \in K(\sigma_0)$, $t(x_1, \dots, x_n) \in T(\sigma_0)$, $q_1, \dots, q_n \in T(\sigma_0)$. Тогда $\big(t(q_1, \dots, q_n)\big)^{\mathfrak{A}'} = t^{\mathfrak{A}'}(q_1, \dots, q_n)$.

Доказательство: упражнение – индукцией по построению термов.

Следствие 15.22. Пусть $t(q_1, \dots, q_n) \in T(\sigma')$, $q_1, \dots, q_n \in T(\sigma')$, $\forall i \quad FV(q_i) = \emptyset$. Тогда $t^{\mathfrak{A}'}(q_1, \dots, q_n) = t(q_1, \dots, q_n) \subseteq T'$.

Доказательство: упражнение.

Лемма 15.23. Для любого предложения $\varphi \in S(\sigma')$ имеет место

$\mathfrak{A} \vDash \varphi \iff \varphi \in T'$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по построению предложения φ.

1. Пусть $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$, $t_i \in T(\sigma')$, $FV(t_i) = \emptyset$.

   Тогда $\mathfrak{A}' \vDash \varphi \iff P(t_1, \dots, t_n) \in T'$.

2. Пусть $\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2)$. Тогда $\mathfrak{A}' \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash (\varphi_1 \& \varphi_2) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1$ и $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \in T'$и $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{T}'$.
3. Пусть $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Тогда $\mathfrak{A}' \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1$ или $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \in T'$ или $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{T}'$.
4. Пусть $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$. Тогда $\mathfrak{A}' \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash (\varphi_1 \to \varphi_2) \Leftrightarrow$ если $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_1$, то $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_2 \Leftrightarrow$ если $\varphi_1 \in T'$, то $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{T}'$.
5. Случай $\varphi = \neg\varphi$ – упражнение.
6. Пусть $\varphi = \exists x\, \psi(x)$. Тогда $\mathfrak{A}' \vDash \exists x\, \psi(x) \Leftrightarrow \exists a \in \mathfrak{A}' : \mathfrak{A}' \vDash \psi(a) \Leftrightarrow \exists\, t \in T(\sigma')$: $FV(t) = \emptyset$, $\mathfrak{A}' \vDash \psi(t) \Leftrightarrow \exists\, t \in T'$: $FV(t) = \emptyset$, $\psi(t) \in T' \Leftrightarrow$ $\exists x\, \psi(x) \in T'$.
7. Пусть $\varphi = \forall x\, \psi(x)$. Тогда $\mathfrak{A}' \vDash \forall x\, \psi(x) \Leftrightarrow \forall a \in \mathfrak{A}' : \mathfrak{A}' \vDash \psi(a) \Leftrightarrow \forall\, t \in T(\sigma')$ если $FV(t) = \emptyset$, то $\mathfrak{A}' \vDash \psi(t) \Leftrightarrow \forall\, t \in T'$ если $FV(t) = \emptyset$, то $\psi(t) \in T' \Leftrightarrow \forall x\, \psi(x) \in T'$.

Лемма 15.23 доказана.

Следствие 15.24. $\mathfrak{A}' \vDash T'$.

Доказательство. Так как $\Gamma' = T_0 \subseteq T'$, то $\mathfrak{A}' \vDash \Gamma'$. Имеем:

$$\Gamma' = \Gamma[\gamma] = [\Gamma]_{\gamma(x)}^{x \in FV(\Gamma)},$$

где $\gamma: FV(\Gamma) \to D \subseteq \sigma'$, $\gamma -$ взаимно-однозначное.

Поскольку $D \subseteq A$, $\gamma: FV(\Gamma) \to A$.

Для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$ имеем $\mathfrak{A}' \vDash \varphi\big(\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_n)\big)$ и $\varphi\big(\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_n)\big) = \varphi(d_1, \dots, d_n)$, где $d_i \in A$. Положим $\mathfrak{A} \leftrightharpoons \mathfrak{A}' \restriction \sigma$, тогда $\mathfrak{A} = \langle A;\, \sigma \rangle$. Стало быть, для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$ имеем $\mathfrak{A} \vDash \varphi(d_1, \dots, d_n)$, где $d_i = \gamma(x_i) \in A$.

Это означает, что множество формул Γ выполнимо на модели $\mathfrak{A}$. Иными словами, на модели $\mathfrak{A}$ истинно множество формул Γ при означивании $\gamma: FV(\Gamma) \to A$ его свободных переменных.

Теперь докажем теорему для случая ***исчисления предикатов с равенством***.

Это означает, что символ равенства входит в синтаксис формул.

Кроме того, в исчислении предикатов имеются аксиомы равенства:

2. $\vdash \forall x\ (x = x)$;

3. $\vdash \forall x \forall y\ \big((x = y) \to (y = x)\big)$;

4. $\vdash \forall x \forall y \forall z\ \Big(\big((x = y) \& (y = z)\big) \to (x = z)\Big)$;

5. $\vdash (t_1 = q_1), \ldots, (t_n = q_n), \varphi(t_1, \ldots, t_n) \vdash\ \varphi(q_1, \ldots, q_n)$.

Лемма 15.25. Пусть $t \in T(\sigma')$, $FV(t) = \emptyset$. Тогда найдется константа $c \in C$ такая, что $(t = c) \in T'$.

Доказательство: упражнение.

Определение 15.26. Введем отношение эквивалентности на константах из множества C. Пусть $c, e \in C$. Тогда положим $c \sim e\ \Leftrightarrow (c = e) \in T'$.

Лемма 15.27. Отношение ∼ является отношением эквивалентности.

Доказательство: упражнение.

Определение 15.28. Определим модель $\mathfrak{A}' = \langle A;\ \sigma' \rangle$,

где $A = C/_{\sim} = \{[c]_{\sim} \mid c \in C\}$, следующим образом:

3) Для любого предикатного символа $P^n \in \sigma'$ и для любых $c_1, \dots, c_n \in C$ имеет место $\mathfrak{A}' \vDash P([c_1], \dots, [c_n])$, если $P(c_1, \dots, c_n) \in T'$.

4) Для любого функционального символа $f^n \in \sigma'$ и для любых $c_1, \dots, c_n \in C$ имеет место $f^{\mathfrak{A}'}([c_1], \dots, [c_n]) = [d]$, если $(f(c_1, \dots, c_n) = d) \in T'$.

5) Для любых констант $d \in \sigma'$ и $c \in C$ имеет место $d^{\mathfrak{A}'} = [c]$, если $(d = c) \in T'$.

Лемма 15.29. Определение 15.27 корректно.

Доказательство. 1) Пусть $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in C$, $[c_i] = [d_i]$. $P(c_1, \dots, c_n) \in T'$. Покажем, что $P(d_1, \dots, d_n) \in T'$. Для любого $i \in \{1, \dots, . n\}$ имеем $c_i \sim d_i$. Следовательно, $(c_i = d_i) \in T'$ для любого $i \in \{1, \dots, . n\}$. Тогда

$$(c_1 = d_1), \dots, (c_n = d_n), P(c_1, \dots, c_n) \vdash P(d_1, \dots, d_n).$$

А значит, $T' \vdash P(d_1, \dots, d_n)$. Таким образом, получили, что $P(d_1, \dots, d_n) \in T'$.

2) Пусть $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n, \in C$, $[c_i] = [d_i]$, $(f(c_1, \dots, c_n) = c) \in T'$, $(f(d_1, \dots, d_n) = d) \in T'$. Покажем, что $[c] = [d]$. Так как для любого $i \in \{1, \dots, . n\}$ имеем $c_i \sim d_i$, то $(c_i = d_i) \in T$. Следовательно,

$$(c_1 = d_1), \dots, (c_n = d_n) \vdash f(c_1, \dots, c_n) = f(d_1, \dots, d_n).$$

Тогда $T' \vdash f(c_1, \dots, c_n) = f(d_1, \dots, d_n)$.

А значит, $f(c_1, \dots, c_n) = f(d_1, \dots, d_n) \in T'$. От сюда получим:

$$f(d_1, \dots, d_n) = d, f(c_1, \dots, c_n) = f(d_1, \dots, d_n) \vdash f(c_1, \dots, c_n) = d.$$

Тогда $T' \vdash f(c_1, \dots, c_n) = d$. Кроме того, доказуемы секвенции

$$f(d_1, \dots, d_n) = c \;\vdash\; c = f(d_1, \dots, d_n).$$

и

$$c = f(d_1, \dots, d_n), f(c_1, \dots, c_n) = d \;\vdash\; c = d.$$

Таким образом, мы получили, что $T' \vdash\; c = d$, а значит $c = d \in T'$, поэтому $c \sim d$.

3) Пусть $d \in \sigma'$, $c, e \in C$ и $(d = c), (d = e) \in T'$. Тогда $(c = d) \in T'$. Следовательно, $(c = d), (d = e) \vdash (c = e)$. Поэтому $T' \vdash (c = e)$. А значит, $(c = e) \in T'$. Таким образом, мы получили, что $c \sim e$, т.е., $[c] = [e]$.

Лемма 15.29 доказана.

Лемма 15.30. Пусть $t \in T(\sigma')$ и $FV(t) = \emptyset$.

Тогда $t^{\mathfrak{B}'} = [c] \Leftrightarrow (t = c) \in T'$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по построению терма.

1. Пусть $t = d$, где $d \in \sigma'$. Тогда $d^{\mathfrak{A}'} = [c] \Leftrightarrow (d = c) \in T'$.

2. Пусть $t = f(q_1, \dots, q_n)$, где $q_i \in T(\sigma')$ и $FV(g_i) = \emptyset$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, . n\}$ найдется константа $c_i \in C$ такая, что $(q_i = c_i) \in T'$. Следовательно, $q_i^{\mathfrak{A}'} = [c_i]$ для любого $i \in \{1, \dots, . n\}$. Тогда доказуема секвенция

$$(q_1 = c_1), \dots, (q_n = c_n) \vdash f(q_1, \dots, q_n) = f(c_1, \dots, c_n).$$

От сюда следует, что $T' \vdash f(q_1, \dots, q_n) = f(c_1, \dots, c_n)$. А значит, $f(q_1, \dots, q_n) = f(c_1, \dots, c_n) \in T'$, т.е., $\big(t = f(c_1, \dots, c_n)\big) \in T'$.

($\Rightarrow$) Пусть $t^{\mathfrak{A}'} = [c]$.

Имеем $t^{\mathfrak{A}'} = f^{\mathfrak{A}'}\big(q_1^{\mathfrak{A}'}, \dots, q_n^{\mathfrak{A}'}\big) = f^{\mathfrak{A}'}([c_1], \dots, [c_n]) = [c]$ тогда и только тогда, когда $(f(c_1, \dots, c_n) = c) \in T'$. Следовательно, доказуема секвенция

$$(t = f(c_1, \dots, c_n)), (f(c_1, \dots, c_n) = c) \vdash (t = c).$$

От суда получаем, что $T' \vdash (t = c)$, т.е. $(t = c) \in T'$.

($\Leftarrow$) Пусть $(t = c) \in T'$. Тогда доказуема секвенция

$$(t=c),(t=f(c_1,\dots,c_n)\vdash(f(c_1,\dots,\mathrm{c_n})=c).$$

Следовательно, $T'\vdash(f(c_1,\dots,\mathrm{c_n})=c)$, т.е. $(f(c_1,\dots,\mathrm{c_n})=c)\in T'$. Тогда $f^{\mathfrak{A}'}([c_1],\dots,[c_n])=[c]$. И, так как $q_i^{\mathfrak{A}'}=[c_i]$ для любого $i\in\{1,\dots,.n\}$, то $f^{\mathfrak{A}'}\left(q_1^{\mathfrak{A}'},\dots,q_n^{\mathfrak{A}'}\right)=[c]$.

Лемма 15.30 доказана.

Лемма 15.31. Пусть $t,q\in T(\sigma')$ и $FV(t)=FV(q)=\emptyset$.

Тогда $\mathfrak{A}'\vDash(t=q)\Leftrightarrow(t=q)\in T'$.

Доказательство. Существуют константы $c,d\in\sigma'$ такие, что $(t=c),(q=d)\in T'$. Тогда положим $t^{\mathfrak{A}'}\leftrightharpoons[c]$ и $q^{\mathfrak{A}'}\leftrightharpoons[d]$. Отсюда имеем

$$\mathfrak{A}'\vDash(t=q)\Leftrightarrow\left(t^{\mathfrak{A}'}=q^{\mathfrak{A}'}\right)\Leftrightarrow[c]=[d]\Leftrightarrow c\sim d\Leftrightarrow(c=d)\in T'.$$

($\Rightarrow$) Покажем, что $(c=d)\in T'\Rightarrow(t=q)\in T'$. Пусть $(c=d)\in T'$. Тогда из того, что $(c=d),(t=c),(q=d)\vdash(t=q)$ следует, что

$T'\vdash(t=q)$. А значит, $(t=q)\in T'$.

($\Leftarrow$) Пусть $(t=q)\in T'$. Тогда из того, что доказуема секвенция $(t=q),(t=c),(q=d)\vdash(c=d)$ следует, что $T'\vdash(c=d)$. А значит, $(c=d)\in T'$.

Лемма 15.31 доказана.

Лемма 15.32. Пусть $P^n\in\sigma'$, $t_1,\dots,t_n\in T(\sigma')$ и $\forall i\le n$ $FV(t_i)=\emptyset$. Тогда $\mathfrak{A}'\vDash P(t_1,\dots,t_n)\Leftrightarrow P(t_1,\dots,t_n)\in T'$.

Доказательство. Существуют такие константы $c_1,\dots,c_n\in C$, что $(t_1=c_1),\dots,(t_n=c_n)\in T'$. Тогда $t_1^{\mathfrak{A}'}=[c_1],\dots,$ $t_n^{\mathfrak{A}'}=[c_n]$. Следовательно

$$\mathfrak{A}'\vDash P(t_1^{\mathfrak{A}'},\dots,t_n^{\mathfrak{A}'})\Leftrightarrow\mathfrak{A}'\vDash P([c_1],\dots,[c_n])\Leftrightarrow P(c_1,\dots,c_n)\in T'.$$

(**⇒**) Пусть $P(c_1, \dots, c_n) \in T'$. Тогда доказуема секвенция

$$(t_1 = c_1), \dots, (t_n = c_n), P(c_1, \dots, c_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n).$$

А значит, $P(t_1, \dots, t_n) \in T'$.

(⇐) Пусть $P(t_1, \dots, t_n) \in T'$. Тогда доказуема секвенция

$$(t_1 = c_1), \dots, (t_n = c_n), P(t_1, \dots, t_n) \vdash P(c_1, \dots, c_n).$$

А значит, $P(c_1, \dots, c_n) \in T'$.

Лемма 15.32 доказана.

Лемма 15.33. Для любого предложения $\varphi \in S(\sigma')$ имеет место

$$\mathfrak{A}' \vDash \varphi \iff \varphi \in T'.$$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по построению предложения φ.

1. Для $\varphi = (t = q)$ и $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ утверждение доказано (см. Леммы 15.30 и 15.31).
2. Предположим, что для любого предложения, имеющего менее n кванторов и логических связок, утверждение леммы выполняется. Рассмотрим предложение φ, имеющее ровно n кванторов и логических связок.

a. Пусть $\varphi = (\varphi_1 \,\&\, \varphi_2)$. Тогда, по определению истинности предложения на модели,

$$\mathfrak{A}' \vDash (\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1 \text{ и } \mathfrak{A}' \vDash \varphi_2.$$

По индукционному предположению получим:

$$\varphi_1 \in T' \text{ и } \varphi_2 \in T'.$$

Откуда, по лемме Хенкина, следует, что $(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \in T'$.

b. Пусть $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Тогда, по определению истинности предложения на модели,

$$\mathfrak{A}' \vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1 \text{ или } \mathfrak{A}' \vDash \varphi_2.$$

По индукционному предположению получим:

$$\varphi_1 \in T' \text{ или } \varphi_2 \in T'.$$

Откуда, по лемме Хенкина, следует, что $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in T'$.

c. Пусть $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$. Тогда, по определению истинности предложения на модели,

$$\mathfrak{A}' \vDash (\varphi_1 \to \varphi_2) \Leftrightarrow \text{если } \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1, \text{то } \mathfrak{A}' \vDash \varphi_2.$$

По индукционному предположению получим:

$$\text{если } \varphi_1 \in T', \text{то } \varphi_2 \in T'.$$

Откуда, по лемме Хенкина, следует, что $(\varphi_1 \to \varphi_2) \in T'$.

d. Пусть $\varphi = \neg\varphi_1$. Тогда, по определению истинности предложения на модели,

$$\mathfrak{A}' \vDash (\neg\varphi_1) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \nvDash \varphi_1 .$$

По индукционному предположению получим:

$$\varphi_1 \notin T' .$$

Откуда, по лемме Хенкина, следует, что $(\neg\varphi_1) \in T'$.

e. Пусть $\varphi = \exists x \varphi_1(x)$. Имеем:

$$\mathfrak{A}' \vDash \exists x \varphi_1(x) \Leftrightarrow \exists c \in C: \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1([c]) \Leftrightarrow \exists c \in C: \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1\left(c^{\mathfrak{A}'}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists c \in C: \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1(c).$$

Тогда, по индукционному предположению, получим:

$$\exists c \in C: \varphi_1 \in T' .$$

Откуда, по лемме Хенкина, следует, что $\exists x \varphi_1(x) \in T'$.

f. Пусть $\varphi = \forall x \varphi_1(x)$. Имеем:

$$\mathfrak{A}' \vDash \forall x \varphi_1(x) \Leftrightarrow \forall c \in C: \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1([c]) \Leftrightarrow \forall c \in C: \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1\left(c^{\mathfrak{A}'}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall c \in C: \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1(c).$$

Тогда, по индукционному предположению, получим:

$$\forall c \in C: \varphi_1 \in T' .$$

Откуда, по лемме Хенкина, следует, что $\forall x \varphi_1(x) \in T'$.

Лемма 15.33 доказана.

Следствие 15.34. $\mathfrak{A}' \vDash T'$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in T'$. Тогда, по Лемма 15.32, $\mathfrak{A}' \vDash \varphi$. Следовательно, $\mathfrak{A}' \vDash T'$.

Следствие 15.34 доказано.

Перейдём к определению модели для исходного множества предложений Г.

Мы на настоящий момент построили модель $\mathfrak{A}' \in K(\sigma')$ такую, что выполнено $\mathfrak{A}' \vDash T'$.

Имеем: $T_0 \subseteq T'$, $T_0 = \Gamma' = [\Gamma]^{x}_{\gamma(x),\ x \in FV(\Gamma)}$. Поэтому выполнено $\mathfrak{A}' \vDash \Gamma'$.

Рассмотрим означивание $\gamma_0: FV(\Gamma) \to \mathfrak{A}'$, являющееся модификацией означивания γ, определённого на множестве $FV(\Gamma)$. Разница состоит в том, что означивание γ действует во множество констант – сигнатурных символов, а означивание γ_0 действует во множество значений этих констант на модели $\mathfrak{A}'$ – элементов модели $\mathfrak{A}'$; напомним, что значением константы $d \in D$ является класс эквивалентности констант из множества C

По построению, $\gamma(x) \in D$ при $FV(\Gamma)$. Положим $\gamma_0(x) = (\gamma(x))^{\mathfrak{A}'}$ при $FV(\Gamma)$. Это означает, что если $\gamma(x) = d \in D$, то $\gamma_0(x) = d^{\mathfrak{A}'}$.

Выше мы показали, что для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$ если $\gamma(x_i) = d_i$, то $\varphi(d_1, \dots, d_n) \in \Gamma'$, поэтому выполнено $\mathfrak{A}' \vDash \varphi(d_1, \dots, d_n)$; по определению истинности формулы на модели, последнее означает, что $\mathfrak{A}' \vDash$

$\varphi(d_1^{\mathfrak{A}'}, \dots, d_n^{\mathfrak{A}'})$, то есть, $\mathfrak{A}' \vDash \varphi\big(\gamma_0(x_1), .., \gamma_0(x_n)\big)$. Следовательно, любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$ имеем , $\mathfrak{A}' \vDash \varphi\big(\gamma_0(x_1), .., \gamma_0(x_n)\big)$, т.е., $\mathfrak{A}' \vDash \varphi[\gamma_0]$.

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{A}' \vDash \Gamma[\gamma_0]$. Заметим, что $\Gamma \subseteq F(\sigma)$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{A} \leftrightharpoons \mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma$. Очевидно, что тогда $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$.

Это означает, что множество формул Г выполнимо на модели $\mathfrak{A}$. Иными словами, на модели $\mathfrak{A}$ истинно множество формул Г при означивании $\gamma\colon FV(\Gamma) \to A$ его свободных переменных.

Таким образом для всех случаев мы доказали существование модели $\mathfrak{A}$ и означивания $\gamma\colon FV(\Gamma) \to A$, для которых выполнено $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$.

Теорема 15.15. о существовании модели доказана.

Определение 15.35. Рассмотрим множество формул $\Gamma \subseteq F(\sigma)$. Будем говорить, что Г ***совместно***, если найдутся модель $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ и означивание $\gamma\colon FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$.

Множество формул Г называется локально совместным, если для любого конечного подмножества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Γ_0 – совместно.

Теорема 15.36 (Мальцева о компактности). Множество формул совместно тогда и только тогда, когда оно локально совместно.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть Г совместно. Тогда найдутся модель $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ и означивание $\gamma\colon FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$. Пусть $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и Γ_0 конечно. Очевидно, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma_0[\gamma]$. Следовательно Γ_0 совместно. В силу произвольности выбора Γ_0 получаем, что Г локально совместно.

($\Leftarrow$) Пусть Γ локально совместно. Допустим, что Γ не совместно, тогда по Теореме о существовании модели Γ противоречиво. Следовательно, найдутся такие $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ доказуема.

Множество формул $\Gamma_0 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ конечно и $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Следовательно Γ_0 совместно (так как Γ – локально совместно). А, значит, найдутся модель $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и означивание $\gamma: FV(\Gamma_0) \to |\mathfrak{B}|$ такие, что $\mathfrak{B} \vDash \Gamma_0[\gamma]$, т.е. $\mathfrak{B} \vDash \varphi_1[\gamma], \dots, \mathfrak{B} \vDash \varphi_n[\gamma]$. Следовательно, секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ не является тождественно-истинной, а значит и доказуемой. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, Γ совместно.

Теорема 15.36 доказана.

Теорема 15.37 (Геделя о полноте). Любая тождественно-истинная формула доказуема.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Допустим, что φ – тождественно-истинная, но не доказуемая.

Если секвенция $\neg\varphi \vdash$ доказуема, то доказуема и секвенция $\vdash \varphi$. А значит, и формула φ также доказуема. Поэтому мы получаем, что секвенция $\neg\varphi \vdash$ не доказуема. Следовательно, множество $\Gamma = \{\neg\varphi\}$ непротиворечиво. Тогда, по теореме о существовании модели, получим, что найдутся модель $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и означивание $\gamma: FV(\neg\varphi) \to |\mathfrak{B}|$ такие, что $\mathfrak{B} \vDash \neg\varphi[\gamma]$. Следовательно $\mathfrak{B} \nvDash \varphi[\gamma]$. А это означает, что φ не является тождественно истинной. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно φ доказуема.

Теорема 15.37 доказана.

Следствие 15.38. Формула φ доказуема тогда и только тогда, когда она тождественно-истинна.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть φ доказуема. Тогда $\vdash \varphi$ доказуема. Следовательно, по Теореме о корректности, $\vdash \varphi$ – тождественно-истинна. А, значит, φ тождественно-истинна.

($\Leftarrow$) По Теореме Геделя о полноте.

Следствие 15.389 доказано.

Теорема 15.39. Секвенция S доказуема тогда и только тогда, когда она тождественно-истинна.

Доказательство:

($\Rightarrow$) По Теореме о корректности.

($\Leftarrow$) аналогично исчислению высказываний.

Теорема 15.39 доказана.

Теорема 15.40 (Мальцева о расширении). Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$. Тогда если существует бесконечная модель $\mathfrak{B} \in \mathrm{K}(\sigma)$ такая, что $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$, то для любого кардинала α найдется модель $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ такая, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$ и $\|\mathfrak{A}\| \geq \alpha$.

Доказательство. Пусть C – множество констант такое, что $\mathrm{C} \bigcap \sigma = \emptyset$ и $||C|| = \alpha$. Рассмотрим множество предложений $\Gamma' = \{\neg(c = d) |\ c, d \in C \text{ и } c \neq d\}$. Пусть $\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$. Покажем, что Γ'' локально совместно.

Выберем конечное подмножество $\Gamma_0'' \subseteq \Gamma''$. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Gamma_0''$ и $\Gamma_0' = \Gamma' \cap \Gamma_0''$. Тогда $\Gamma_0'' = \Gamma_0 \cup \Gamma_0'$.

Пусть $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C} \bigcap \sigma(\Gamma_0'')$. Очевидно, что C_0 конечно, т.е. $\mathrm{C}_0 = \{d_1, \dots, d_n\}$. Расширим сигнатуру $\sigma' = \sigma \cup C_0$ и построим модель $\mathfrak{B}' =\upharpoonright^{\sigma'} \mathfrak{B}$ такую, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma'$.

По условию теоремы модель $\mathfrak{B}$ бесконечна. Следовательно, найдутся такие элементы $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{B}$, что $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Положим $d_1^{\mathfrak{B}'} = b_1, \dots, d_n^{\mathfrak{B}'} = b_n$. Таким образом, получим, что для любых $i \neq j$ имеет место $d_i^{\mathfrak{B}'} \neq d_j^{\mathfrak{B}'}$. Следовательно $\mathfrak{B}' \vDash \Gamma_0'$.

Так как $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$, то $\mathfrak{B} \vDash \Gamma_0$. Следовательно, $\mathfrak{B}' \vDash \Gamma_0$.

Таким образом получили, что $\mathfrak{B}' \vDash \Gamma_0''$. А значит, Γ_0'' – совместна. В силу произвольности выбора множества Γ_0'' получаем, что Γ'' локально совместно. Следовательно, по Теореме о компактности, Γ'' совместно. Тогда, по Теореме о существовании модели, найдется модель $\mathfrak{A}' \in K(\sigma \cup \mathrm{C})$ такая, что $\mathfrak{A}' \vDash \Gamma''$. Очевидно, что тогда $\mathfrak{A}' \vDash \Gamma$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$.

Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \sigma$. Так как $\{d^{\mathfrak{A}'} \mid d \in C\} \subseteq |\mathfrak{A}|$ и $\left\|\{d^{\mathfrak{A}'} \mid d \in C\}\right\| = \alpha$, то $|\mathfrak{A}|| \geq \alpha$.

Теорема 15.40 доказана.

Следствие 15.41. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ – бесконечная модель, α – кардинал. Тогда существует модель $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ такая, что $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ и $\|\mathfrak{B}\| \geq \alpha$.

Доказательство.

Возьмём $\Gamma = Th(\mathfrak{A})$. Тогда $\mathfrak{A}$ – бесконечная модель и $\mathfrak{A} \vDash Th(\mathfrak{A})$. Значит существует $\mathfrak{B} \vDash Th(\mathfrak{A})$ такая что $\|\mathfrak{B}\| \geq \alpha$. Тогда $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Следствие 15.41 доказано.

Замечание 15.42. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и $\mathfrak{A}$ – конечная. Тогда $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Доказательство: упражнение.

Предложение 15.43. Пусть $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N};\ \leq, +, \bullet, 0, 1 \rangle$. Тогда существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ и найдется элемент $c \in \mathfrak{M}$ такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место $c \geq \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ раз}}$.

Доказательство. Рассмотрим $\Gamma = Th(\mathfrak{N})$ и $\sigma = \sigma(\mathfrak{N}) = \{\leq, +, \bullet, 0, 1\}$. Обогатим сигнатуру одним константным символом: $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим $\varphi_n = (c\ \geq\ \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ раз}})$. Очевидно, что $\varphi_n\ \in\ S(\sigma')$.

Пусть $\Gamma'' = \{\varphi_n \mid n \in N\}$ и $\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma''$. Докажем, что множество предложений Γ' локально совместно. Пусть $\Gamma_0' \subseteq \Gamma'$ конечно, $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Gamma_0'$ и $\Gamma_0'' = \Gamma'' \cap \Gamma_0'$. Тогда $\Gamma_0' = \Gamma_0 \cup \Gamma_0''$.

Так как Γ_0'' конечно, то найдется такое число m, что $m = \max\{n \mid \varphi_n \in \Gamma_0''\}$. Рассмотрим модель $\mathfrak{N}'$ такую, что $\mathfrak{N}' \upharpoonright \sigma = \mathfrak{N}$. Определим $c^{\mathfrak{N}'} = m$. Тогда $\mathfrak{N}' \vDash \Gamma_0''$.

С другой стороны, так как $\mathfrak{N} \vDash \Gamma$, то $\mathfrak{N} \vDash \Gamma_0$. А, значит, $\mathfrak{N}' \vDash \Gamma_0$. Таким образом, получаем, что $\mathfrak{N}' \vDash {\Gamma_0}'$. Следовательно, по Теореме о компактности, получим, что Γ' – совместно.

Тогда, по Теореме о существовании модели, найдется модель $\mathfrak{M}' \in K(\sigma')$ такая, что $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma'$.

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \upharpoonright \sigma$. Очевидно, что $\mathfrak{M} = Th(\mathfrak{N})$. Следовательно, $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

Возьмём c$= c^{\mathfrak{M}'} \in |\mathfrak{M}'| = |\mathfrak{M}|$. Тогда $\mathfrak{M} \vDash c \geq \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ раз}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 15.43 доказано.

Замечание 15.44. $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, поэтому в $\mathfrak{M}$ нет наибольшего элемента, т.е. предложение $\exists y \forall x (x \leq y)$ ложно.

Доказательство: упражнение.

§16. Исчисление предикатов Гильбертовского типа

Определение 16.1. Аксиомы:

1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$;
2. $\left((\varphi \to \psi) \to \left((\varphi \to (\psi \to \xi)) \to (\varphi \to \xi)\right)\right)$;
3. $((\varphi \,\&\, \psi) \to \varphi)$;
4. $((\varphi \,\&\, \psi) \to \psi)$;
5. $\left((\varphi \to \psi) \to \left((\varphi \to \xi) \to (\varphi \to (\psi \,\&\, \xi))\right)\right)$;
6. $(\varphi \to (\varphi \vee \psi))$;
7. $(\psi \to (\varphi \vee \psi))$;
8. $\left((\varphi \to \xi) \to \left((\psi \to \xi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \xi)\right)\right)$;
9. $\left((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)\right)$;
10. $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$;
11. $(\forall x\varphi \to [\varphi]_t^x)$;
12. $([\varphi]_t^x \to \exists x\varphi)$;
13. $(x = x)$;
14. $\left((x = y) \to \left([\varphi]_x^z \to [\varphi]_y^z\right)\right)$.

Правила вывода:

1. $\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$;
2. $\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x\psi}$;
3. $\frac{\psi \to \varphi}{\exists x\psi \to \varphi}$.

Определение 16.2. Последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ называется ***доказательством***, если всякая формула φ_i является либо аксиомой, либо получена из предыдущих по правилу вывода.

Формула φ ***доказуема***, если существует доказательство $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$, заканчивающееся на эту формулу.

Определение 16.3. ***Выводом*** формулы φ из множества формул Γ называется последовательность $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$, где φ_i либо является аксиомой, либо принадлежит Γ, либо получается из предыдущих при помощи однократного применения правила вывода.

Если существует вывод формулы φ из множества формул Γ, то, говорят, что φ ***выводима*** из Γ, и обозначают $\Gamma \rhd \varphi$.

Определение 16.4. Дерево $\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\psi}$ называют допустимым правилом вывода, если оно не увеличивает множество доказуемых формул.

Предложение 16.5. Следующие деревья являются допустимыми правилами вывода:

1. $\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$;
2. $\frac{[\varphi]_t^x}{\exists x \varphi}$;
3. $\frac{[\varphi]_t^x \to \psi}{\forall x \varphi \to \psi}$;
4. $\frac{\psi \to [\varphi]_t^x}{\psi \to \exists x \varphi}$.

Замечание 16.6. Если формула φ доказуема в исчислении высказываний Гильбертовского типа, то формула $[\varphi]^{A_1,\dots,A_n}_{\varphi_1,\dots,\varphi_n}$ доказуема в исчислении предикатов Гильбертовского типа.

Теорема 16.7 (О дедукции).

$\Gamma \cup \{\varphi\} \rhd \psi$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \rhd (\varphi \to \psi)$.

Доказательство: без доказательства.

Следствие 16.8. $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \rhd \psi \Leftrightarrow \rhd \Big(\varphi_1 \to \big(\varphi_2 \to (\dots(\varphi_n \to \psi) \dots)\big)\Big)$.

Теорема 16.8.

a. $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \rhd \psi$ тогда и только тогда, когда секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ доказуема в секвенциональном исчислении предикатов.
b. $\rhd \psi$ тогда и только тогда, когда секвенция $\vdash \psi$ доказуема в секвенциональном исчислении предикатов.

Доказательство: без доказательства.

§17. Теорема о правильной вычислимости и эквивалентности классов вычислимых функций

В этом параграфе мы продолжим изучение вычисляемых функций. Мы покажем, что каждая частично рекурсивная функция является правильно вычислимой на машине Тьюринга, и, наоборот, что каждая функция, правильно вычислимая на машине Тьюринга, является частично рекурсивной.

Предложение 17.1. Следующие функции являются правильно вычислимыми на машине Тьюринга (пвт):

1) $0(\mathrm{x}) = 0$;

2) $S(x) = x + 1$;

3) $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$;

4) А $-$ перенос 0;

5) $\text{Б}^+, \text{Б}^-$ $-$ правый, левый сдвиг;

6) Г $-$ удвоение;

7) R $-$ вычитание единицы;

8) S $-$ прибавление единицы;

9) K_n $-$ копирование;

10) Ц_n $-$ циклический сдвиг;

11) Л $-$ ликвидация.

Доказательство: упражнение.

Предложение 17.2. Пусть функции

$f(x_1, \dots, x_n)$, $g_1(x_1, \dots, x_m), \dots\ g_n(x_1, \dots, x_m)$ являются правильно вычислимыми на машине Тьюринга Тогда их суперпозиция $f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)$ является правильно вычислимой на машине Тьюринга.

Доказательство. Пусть программа F вычисляет функцию f и программы $G_1, \dots, G_n$ вычисляют функции $g_1, \dots, g_n$.

$$q_1 01^{\mathrm{x}_1+1}0 \dots 01^{\mathrm{x}_m+1}0 \overset{K_m}{\Rightarrow} q_1 01^{\mathrm{x}_1+1}0 \dots 01^{\mathrm{x}_m+1}01^{\mathrm{x}_1+1} \dots 01^{\mathrm{x}_m+1}0$$

$$\xRightarrow{(\text{Б}^+)^m G_1} 01^{\mathrm{x}_1+1}0 \dots 01^{\mathrm{x}_m+1}\ q_{i_2}\ 01^{G(x)+1}$$

$$\xRightarrow{(\text{Б}^-)^m (\text{Ц}m+1)^m \text{Б}^2} 01^{G_1(x)+1}\ q_{i_3} 01^{\mathrm{x}_1+1}0 \dots 01^{\mathrm{x}_m+1}0$$

$$\xRightarrow{K_m\ (\text{Б}+)^m (\text{Б}^-)^m (\text{Ц}_{m+1})^m \text{Б}^+} 01^{g_1(x)+1}01^{g_2(x)+1} q_{i_4} 01^{\mathrm{x}_1+1} \dots 01^{\mathrm{x}_m+1}0$$

$$\Rightarrow \cdots \ \Rightarrow q_0 01^{f\left(g_1(T), \dots, g_n(T)\right)+1}0$$

Предложение 17.3. Пусть функция f получена из функций g и h при помощи оператора примитивной рекурсии. Тогда, если g и h являются правильно вычислимыми на машине Тьюринга, то и f является правильно вычислимой на машине Тьюринга.

Доказательство: упражнение.

Предложение 17.4. Пусть $f = \mu g[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$. Тогда если g является правильно вычислимой на машине Тьюринга, то и f является правильно вычислимой на машине Тьюринга.

Доказательство: упражнение.

Теорема 17.5. ЧРФ⊆ПВТ.

Доказательство. Индукцией по построению частично рекурсивных функций при помощи Предложений 17.1 -17.4 показываем, что каждая частично рекурсивная функция является правильно вычислимой на машине Тьюринга.

Теорема 17.5 доказана.

Далее нам потребуется

Теорема 17.6. (основная теорема арифметики)

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists!\, n = q_1^{k_1} \dots q_m^{k_m}, \qquad \text{где числа } q_1 < \dots < q_m - \text{простые и } k_i \neq 0.$$

Доказательство: без доказательства.

Определение 17.7. Номером картежа $(a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{N}$, назовем число

$$\gamma(\, a_1, \dots, a_n) = 2p_1^{a_1+1} \dots\, p_n^{a_n+1},$$

где $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ и т.д.

Определение 17.8. Пусть $B \subseteq \mathbb{N}$. Функция $\chi_B: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ называется характеристической функцией, если

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

Обозначим $\mathrm{A}_1 = \{\gamma(S) |\, S \leq \{0,1\}^*\}$.

Предложение 17.9. χ_{A_1} – примитивно рекурсивная функция (прф).

Доказательство: упражнение.

Предложение 17.10. Следующие функции являются примитивно рекурсивными:

1) $L(n,a)=\begin{cases}\gamma(a\,\alpha), & \alpha\in\{0,1\}^*,\ \gamma(\alpha)=n,\ a\in\{0,1\};\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$

2) $R(n,a)=\begin{cases}\gamma(\alpha\,a\,), & \alpha\epsilon\{0,1\}^*,\ \gamma(\alpha)=n,\ a\,\epsilon\{0,1\};\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$

3) $L(n)=\begin{cases}2, & n=2=\gamma(\emptyset);\\ \gamma(\alpha), & \alpha a\in\{0,1\}^*,\ \gamma(\alpha a)=n;\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$

4) $R(n)=\begin{cases}2, & n=2=\gamma(\emptyset);\\ \gamma(\alpha), & a\alpha\in\{0,1\}^*, \gamma(a\alpha)=n;\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$

5) $x\cdot y=\begin{cases}\gamma(\alpha\beta), & x=\gamma(\alpha),\ y=\gamma(\beta),\ \alpha,\beta\in\{0,1\}^*;\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$

6) $H(x)=\begin{cases}a+1, & x=\gamma(a\alpha),\ a\alpha\epsilon\{0,1\}^*;\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$

7) $K(x)=\begin{cases}a+1, & x=\gamma(\alpha a),\ \alpha a\epsilon\{0,1\}^*;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

Доказательство: упражнение.

Определение 17.11. Номером машинного слова $\alpha q_i j\beta$ называется число

$$\gamma(\alpha q_i j\beta)=2^2\cdot 3^i\cdot 5^j\cdot 7^{\gamma(\alpha)}\cdot 11^{\gamma(\beta)},$$

где $\alpha,\beta\in\{0,1\}^*,\ \ i,j\in\{0,1\}$.

Предложение 17.12. Пусть $A_2=\{\gamma(S)\big)|\,S-$ машинное слово$\}$. Тогда $\chi_{\mathrm{A}_2}-$ примитивно рекурсивная функция.

Доказательство: упражнение.

Определение 17.13. Номером команды K_{ij}: $q_i j\to q_s l\ \Delta$ называется число

$$\gamma\big(K_{ij}\big)=p^{\sigma}_{c(i,j)},$$

где $\sigma = 2^s \cdot 3^l \cdot 5^\zeta$ и $\zeta = \begin{cases} 1, & \Delta = \emptyset \\ 2, & \Delta = R. \\ 3, & \Delta = L \end{cases}$

Определение 17.14. Номером программы на машине Тьюринга П называется число

$$\gamma(\Pi) = 2^3 \cdot 3^n \prod \gamma(K_{ij}),$$

где $K_{ij} \in \Pi$, $n = \max\{\, i \mid q_i$ входит в П$\}$.

Предложение 17.15. Пусть $A_3 = \{\gamma(\Pi) | \Pi - \text{программа}\}$. Тогда χ_{A_3} – примитивно рекурсивная функция.

Доказательство: упражнение.

Определение 17.16. Следующие функции являются ПРФ:

1)

$$t(x,y) = \begin{cases} \gamma(\alpha' q_l a \beta'), & x = \gamma(\Pi), \quad y = \gamma(\alpha q j \beta); \quad \Pi\text{:}\ \alpha q_i j \beta \xrightarrow[1\text{ шаг}]{} \alpha' q_l a \beta'' \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases};$$

2) $T(x,y,z,t) =$

$$= \begin{cases} 1, & x = \gamma(\Pi), \qquad y = \gamma(\alpha q_i j \beta), \qquad \Pi\text{:}\ \alpha q_i j \beta \xrightarrow[\le t\text{ шагов}]{} \alpha' q_0 0 1^{z+1} 0 \beta' \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases};$$

3) $T^n(a, x_1, \dots, x_n, z, t) =$

$$= \begin{cases} 1, & a = \gamma(\Pi), \qquad \Pi\colon\ q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 \xrightarrow[\le t \text{ шагов}]{} \alpha q_0 0 1^{z+1} 0 \beta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Предложение 17.17. Функции t, T, T^n $-$ примитивно рекурсивны.

Доказательство: упражнение.

Теорема 17.18. (о нормальной форме Клине) Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ вычислима на машине Тьюринга. Тогда существует примитивно рекурсивная функция $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ такая, что $f(x_1, \ldots, x_n) = l(\mu y\, [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$.

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ вычислима на машине Тьюринга при помощи программы П. Пусть $a = \gamma(\Pi)$ – номер данной программы.

Определим функцию $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ следующим образом:

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) = |T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y), r(y)) - 1|.$$

Очевидно, что функция $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ является примитивно рекурсивной. Покажем, что $f(x_1, \ldots, x_n) = l(\mu y\, [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$.

Рассмотрим 2 варианта:

1) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ не определена. Тогда для любого $y \in \mathbb{N}$ имеем $T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y), r(y)) \neq 1$. Следовательно, для любого $y \in \mathbb{N}$ имеем $g(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$. А значит функция $l(\mu y\, [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$ не определена.

2) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = z$. Тогда найдется такое $t \in \mathbb{N}$, что П: $q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 \xRightarrow[t \text{ шагов}]{} \alpha q_0 0 1^{z+1} \beta$. Положим $y_0 = c(z, t)$. Тогда $l(y_0) = z$, и $r(y_0) = t$. Следовательно $T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y_0), r(y_0)) = 1$.

Для любого $t_1 \geq t$ определим $y_1 = c(z, t_1)$. Очевидно, что $T^n(a, x_1, \dots, x_n, l(y_1), r(y_1)) = 1$.

Если $t_1 > t$, то $y_1 > y$.

Если для y_1 имеем $T^n(a, x_1, \dots, x_n, l(y_1), r(y_1)) = 1$, то $l(y_1) = z$ и $t_1 = r(y_1) \geq t$. Следовательно, если $y_1 = c(z, t_1)$, то $y_1 \geq y_0$. А значит $\mu y\, [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0] = y_0$. От сюда получаем $l(\mu y\, [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0]) = l(y_0) = z = f(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 17.18 доказана.

Следствие 17.19. ВТ⊆ЧРФ.

Доказательство: упражнение.

Следствие 17.20. Пусть функция f является частично рекурсивной. Тогда найдется такая примитивно рекурсивная функция g, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = l(\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0]).$$

Доказательство: f – частично рекурсивная функция ⇒ функция f является правильно вычислимой на машине Тьюринга ⇒ функция f является вычислимой на машине Тьюринга ⇒ найдется такая примитивно рекурсивная функция g, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = l(\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0]).$$

Следствие 17.20 доказано.

Следствие 17.21 (основная теорема о вычислимых функциях)

$$\text{ЧРФ} = \text{ВТ} = \text{ПВТ}.$$

Доказательство: $\text{ЧРФ} \subseteq \text{ПВТ}$, $\text{ПВТ} \subseteq \text{ВТ}$, $\text{ВТ} \subseteq \text{ЧРФ}$.

Следствие 17.21 доказано.

Следствие 17.22. Любая общерекурсивная функция может быть получена из простейших функций применением оператора суперпозиции, примитивной рекурсии, минимизации, чтобы на каждом шаге получались только общерекурсивные функции.

Доказательство: упражнение.

Следствие 17.23. Класс общерекурсивных функций совпадает с классом всюду определенных функций, вычислимых на машине Тьюринга, который совпадает с классом всюду определенных функций, правильно вычислимых на машине Тьюринга.

Доказательство: упражнение.

Следствие 17.21 позволяет предположить истинность следующего утверждения:

Тезис Черча. Любая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной.

§18 Универсальные вычислимые функции

Определение 18.1. Пусть K – некоторое множество частичных функций вида $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, тогда $f(x_0, \dots, x_n)$ называется универсальной для класса K, если:

а) $f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$ для любого $m \in \mathbb{N}$;

б) Для любой функции $g(x_1, \dots, x_n) \in K$ найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ имеет место $g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$.

Другими словами, функция f является универсальной для класса K, если $K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Замечание 18.2. Класс K имеет универсальную функцию тогда и только тогда, когда он счетен или конечен.

Доказательство: упражнение.

Следствие 18.3. Если класс K континуален, то он не имеет универсальных функций.

Доказательство: упражнение.

Следствие 18.4. Класс всех частичных функций не имеет универсальных функций.

Доказательство: упражнение.

Следствие 18.5. Классы ПРФ, ОРФ, ЧРФ имеют универсальные функции.

Доказательство. $\text{ПРФ} \subseteq \text{ОРФ} \subseteq \text{ЧРФ} = \text{ПВТ}$.

Пусть А – алфавит, на котором записываются программы машин Тьюринга. Тогда любая программа машины Тьюринга

$$\Pi \in \mathrm{A}^* = \{(a_1, \dots, a_m) \mid m \epsilon \mathbb{N}, a_i \in \mathrm{A}\}$$

Множество A^* – счётно, значит счётно и множество всевозможных программ машин Тьюринга. Следовательно, счётен и класс ПВТ.

Поэтому классы ПРФ, ОРФ и ЧРФ счётны.

Следствие 18.5 доказано.

Замечание 18.6. Пусть $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – взаимно-однозначное отображение, а $f(x_0, \dots, x_n)$ – универсальная функция для класса K. Тогда функция $g(x_0, \dots, x_n) = f\big(h(x_0, \dots, x_n)\big)$ также является универсальной для класса K.

Доказательство: упражнение.

Следствие 18.7.

а) Если класс K счетен, то он имеет континуум универсальных функций.

б) Классы ПРФ, ОРФ и ЧРФ имеют континуум универсальных функций.

Доказательство: упражнение.

Теорема 18.8.

а) Не существует примитивно рекурсивной функции, универсальной для класса ПРФ^n;

б) Не существует общерекурсивной функции, универсальной для класса ОРФ^n;

в) Не существует частично рекурсивной функции, универсальной для класса ОРФ^n.

Доказательство.

а) Будем доказывать от противного. Допустим, что существует прф $f(x_0, \dots, x_n)$, являющаяся универсальной для ПРФ^n. Рассмотрим функцию $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_1, \dots, x_n) + 1$. Очевидно, что она является прф. Следовательно, найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что $g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$. Тогда получим

$$f(m, \dots, m) + 1 = g(m, \dots, m) = f(m, \dots, m).$$

Пришли к противоречию.

б) Доказывается аналогично.

в) Будем доказывать от противного. Допустим, что существует чрф $f(x_0, \dots, x_n)$, являющаяся универсальной для ОРФ^n. Рассмотрим функцию $f(m_0,\ x_1, \dots, x_n)$, где $m_0 \in \mathbb{N}$. По определению универсальной функции, она принадлежит классу ОРФ^n. Следовательно, для любых $m_0, m_1, \dots., m_n \in \mathbb{N}$ функция $f(m_0, m_1, \dots, m_n)$ определена. А, значит, $f \in$ ОРФ$^{n+1}$.

Мы пришли к противоречию с тем, что не существует прф, универсальной для класса ПРФ^n.

Теорема 18.8 доказана.

Теорема 18.9. Класс ЧРФ^n имеет универсальную функцию, являющуюся частично рекурсивной функцией.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x_0, \dots, x_n) = l(\mu y\ [\ \left|T^n\left(x_0, \dots, x_n, l(y), r(y)\right) - 1\right| = 0]).$$

Очевидно, что функция f является частично рекурсивной. Покажем, что она является универсальной для ЧРФ^n.

а) Для любого $m \in \mathbb{N}$ функция $f(m, x_1, \dots, x_n)$ является частично рекурсивной. Следовательно, $f(m, x_1, \dots, x_n) \in$ ЧРФ^n.

б) Рассмотрим функцию $g(x_1, \dots, x_n) \in$ ЧРФ^n. По Основной теореме о вычислимых функциях, имеем, что g – правильно вычислима на машине Тьюринга. Тогда существует программа П, вычисляющая функцию g. Пусть $m = \gamma(\text{П})$ – номер данной программы машины Тьюринга. Тогда получим $g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 18.9 доказана.

Определение 18.10.

$$\varphi^2(x_0, x_1) = l\big(\mu y\, \big[\, \big|T^1\big(x_0, x_1, l(y), r(y)\big) - 1\big| = 0\big]\big).$$

Следствие 18.11. Функция $\varphi^2(x_0, x_1) \in$ ЧРФ^2 является универсальной для ЧРФ^1.

Доказательство: упражнение.

Определение 18.12.

$$\varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n) = \varphi^2\big(x_0, c^n(x_1, \dots, x_n)\big).$$

Предложение 18.13. Функция φ^{n+1} является универсальной для ЧРФ^n.

Доказательство.

а) Для любого $m \in \mathbb{N}$ функция $\varphi^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n)$ является ЧРФ, т.е. принадлежит классу ЧРФ^n.

б) Пусть $g(x_1, \dots, x_n) \in$ ЧРФ^n. Рассмотрим функцию

$h(x) = g(c_1^n(x), \dots, c_n^n(x))$. Очевидно, что $h \in$ ЧРФ^1. Следовательно, найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что $h(x) = \varphi^2(m, x)$. Тогда

$$\varphi^{n+1}(n, x_1, \dots, x_n) = \varphi^2\big(m, c(x_1, \dots, x_n)\big) = h\big(c(x_1, \dots, x_n)\big) = g(x_1, \dots, x_n).$$

Предложение 18.13 доказано.

Определение 18.14. Следующие функции называются ***клиниевскими скобками***:

$$[x, y\,] = \varphi^2\big(l(x), c(r(x), y)\big);$$

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \big[[x_1, \dots, x_n], x_{n+1}\big];$$

$$[k]_{21} = c\left(l(k), l\big(r(k)\big)\right);$$

$$[k]_{22} \ = r\big(r(k)\big);$$

$$[k]_{n,1} = [[k]_{21}]_{n-1,1};$$

$$\dots$$

$$[k]_{n,n-1} = [[k]_{21}]_{n-1,n-1};$$

$$[k]_{nn} = [k]_{22}.$$

Предложение 18.15. Функции из Определения 18.14 являются примитивно рекурсивными.

Доказательство: упражнение.

Предложение 18.16.

а) $\big[[x_1, \dots, x_n]\big]_{nl} \ = x_l$;

б) $\big[[k]_{n,1}, \dots, [k]_{n,n}\big] = k$;

в) $[\,]\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ – взаимно-однозначное отображение.

Доказательство: упражнение.

Предложение 18.17.

а) $[c(x_0, x_1), x_2] = c\big(x_0, c(x_1, x_2)\big)$;

б) $c^n(c(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}) = c^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$;

в) $[x_1, \dots, x_n] = \big[[x_1, \dots, x_m], x_{m+1}, \dots, x_n\big]$.

Доказательство.

а) упражнение.

б) упражнение.

в) $[x_1, \dots, x_n] = \big[\,\big[\,[\,[x_1, x_2], x_3]\big], \dots, x_n\big] = \big[[x_1, \dots, x_m], x_{m+1}, \dots, x_n\big]$.

Предложение 18.17 доказано.

Определение 18.18. Следующие функции называются ***клиниевскими универсальными функциями***:

$$K^2(x_0, x_1) = \varphi^2\big(l(x_0), c(r(x_0), x_1)\big);$$

$$K^{n+1}(x_0, \dots, x_n) = K^n([x_0, x_1], \dots, x_n).$$

Предложение 18.19.

$$K^n(c(x_0, x_1), x_2, \dots, x_n) = \varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n).$$

Доказательство: упражнение.

Теорема 18.20. Функция K^{n+1} является универсальной для класса ЧРФ^n.

Доказательство.

а) Так как $K^{n+1} \in \text{ЧРФ}^{n+1}$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ функция $K^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n) \in \text{ЧРФ}^n$.

б) Пусть $g(x_1, \dots, x_n) \in \text{ЧРФ}^n$. Введем фиктивный аргумент и рассмотрим функцию $f(y, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) = 0 \cdot y + g(x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, что $f(y, x_1, \dots, x_n) \in \text{ЧРФ}^{n+1}$. Следовательно, найдется такое число $a \in \mathbb{N}$, что $f(g, x_1, \dots, x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, x_1, \dots, x_n)$. Тогда

$$K^{n+1}(c(a, y), x_1, \dots, x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, x_1, \dots, x_n) = f(y, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n).$$

Следовательно, для любого числа $k \in \mathbb{N}$, положив $m_k = c(a, k)$, получим $K^{n+1}(m_k, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$. И для $m_0 = c(a, 0)$ получим $g(x_1, \dots, x_n) = K^{n+1}(m_0, x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 18.20 доказана.

Следствие 18.21. Любая частично рекурсивная функция имеет бесконечно много клиниевских номеров: для любой функции $g \in \text{ЧРФ}^n$ существует бесконечно много номеров m_k, таких что

$$g(x_1, \dots, x_n) = K^{n+1}(m_k, x_1, \dots, x_n).$$

Доказательство: упражнение.

Теорема 18.22. (s–m–n теорема) Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ найдется примитивно рекурсивная функция $S_m^n(x_0, \dots, x_n)$ такая, что

$$K^{n+m+1}(x_0, \dots, x_{n+m}) = K^{m+1}(S_m^n(x_0, \dots, x_n), x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

Доказательство. Положим $S_m^n(x_0, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n]$. Тогда

$$K^{n+m+1}(x_0, \dots, x_{n+m}) = K^{n+m}([x_0, x_1], \dots, x_{n+m}) =$$

$$= K^{n+m-1}(\,[\,[x_0, x_1], x_2], \dots x_{n+m}\,) = \cdots =$$

$$= K^{m+1}([\dots[x_0, x_1], x_2], \dots, x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) =$$

$$= K^{m+1}([x_0, \dots, x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

Теорема 18.22 доказана.

Теорема 18.23.(О неподвижной точке) Для любой частично рекурсивной функции $h(x_1, \dots x_{n+1})$ существует примитивно рекурсивная функция $g(x_1, \dots x_n)$, такая что

$$K^2(h(x_1, \dots x_n, g(x_1, \dots x_n)), y) = K^2(g(x_1, \dots x_n), y).$$

Доказательство. Так как $K^2(h(x_1, \dots x_n, [z, z, x_1, \dots x_n]), y)$ – частично рекурсивная функция, то существует номер $a \in \mathbb{N}$, такой что

$$K^2(h(x_1, \dots x_n, [z, z, x_1, \dots x_n]), y) = K^{n+3}(a, z, x_1, \dots x_n, y).$$

Тогда функция $g(x_1, \dots x_n) = [a, a, x_1, \dots x_n]$ примитивно рекурсивна.

Имеем:

$$K^2(h(x_1, \dots x_n, [a, a, x_1, \dots x_n]), y) = K^{n+3}(a, a, x_1, \dots x_n, y) =$$

$$= K^2([a, a, x_1, \dots x_n], y) =$$

$$= K^2(g(x_1, \dots x_n), y) = K^2\big(h\big(x_1, \dots x_n, g(x_1, \dots x_n)\big), y\big).$$

Теорема 18.23 доказана.

Определение 18.24. Обозначим $æ(n) = K^2(n, x)$. Функция $æ\colon \mathbb{N} \to$ ЧРФ^1 называется клиниевской нумерацией одноместных частично рекурсивных функций.

Следствие 18.25. Для любой частично рекурсивной функции $h(x_1, \dots x_n)$ существует номер $a \in \mathbb{N}$, такой что $æ(h(a)) = æ(a)$.

Доказательство: упражнение.

Теорема 18.26 (Райса). Пусть множество $A \subseteq \text{ЧРФ}^1$ таково, что $A \neq \emptyset$ и $A \neq \text{ЧРФ}^1$. Тогда множество номеров $B = \{n \mid æ(n) \in A\}$ не рекурсивно, т.е. функция $\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$ не является частично рекурсивной.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Допустим, что $\chi_B(x)$ – частично рекурсивная функция. Так как $A \neq \emptyset$, то $B \neq \emptyset$, и, следовательно, найдется $a \in B$. Так как $A \neq \text{ЧРФ}^1$, то найдётся частично рекурсивная функция $g \notin A$, пусть $g = æ(b)$. Следовательно, нашёлся номер $b \notin B$.

Рассмотрим функцию $f(x) = b\chi_B(x) + a\,\overline{sg}\,(\chi_B(x))$. По Следствию 18.25 теоремы о неподвижной точке найдется такое n, что $æ(n) = æ(f(n))$.

Будет ли функция $æ(n)$ принадлежать множеству A?

1) Если $æ(n) \in A$, то $n \in B$. Следовательно, $f(n) = b \notin B$. Тогда $æ(n) = æ(f(n)) = æ(b) \notin A$ – противоречие.

2) Если $æ(n) \notin A$, то $n \notin B$. Следовательно, $f(n) = a \in B$. Тогда $æ(n) = æ(f(n)) = æ(a) \in A$ – опять получили противоречие.

Отсюда следует, что $\chi_B(x)$ – не является частично рекурсивной функцией, т.е. множество номеров B не рекурсивно.

§19. Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества

Определение 19.1. Множество называется ***разрешимым***, если существует ответ на вопрос: “Является ли данный объект элементом этого множества?” Этот алгоритм, единый для всех объектов данного множества называется разрешающей процедурой.

Множество называется ***перечислимым***, если существует алгоритм перечисления всех его элементов.

Здесь важно отметить следующее:

1. Перечисляются только элементы этого множества.

2. Любой элемент этого множества обязательно будет перечислен.

Определение 19.2 Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется ***рекурсивным*** (***примитивно рекурсивным***), если его характеристическая функция

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

является общерекурсивной функцией (примитивно рекурсивной функцией).

Определение 19.3. Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется ***рекурсивно перечислимым***, если $A = \emptyset$ либо существуют общерекурсивные функции $f_1, \dots, f_k$ такие, что $A = \{(f_1(x), \dots, f_k(x)) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

В частности, если $A \subseteq \mathbb{N}$, то A является рекурсивно перечислимым, если существует общерекурсивная функция $f(x)$ такая, что

$\mathrm{A} = \rho f = \{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$.

Замечание 19.4. Пусть $A \subseteq N^k$. Тогда

$\chi_A(x)$ – ОРФ $\Leftrightarrow \chi_A(x)$ – ЧРФ.

Доказательство: упражнение.

Предложение 19.5. Пусть множества $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$, $C \subseteq \mathbb{N}^l$ – рекурсивны (примитивно рекурсивны). Тогда множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$, $A \times C$ так же рекурсивны (примитивно рекурсивны).

Доказательство. Пусть функции χ_A, χ_B и χ_C являются общерекурсивными (примитивно рекурсивными). Тогда следующие функции так же будут общерекурсивными (примитивно рекурсивными):

1. $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
2. $\chi_{A\cup B}(x) = sg\left(\chi_A(x) + \chi_B(x)\right)$;
3. $\chi_{\bar{A}}(x) = \overline{sg}\,\chi_A(x)$;
4. $\chi_{A\times C}\,(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi C(y)$;
5. $\chi_{A\setminus B}\,(x) = \chi_A(x) \cdot \overline{sg}\left(\chi_B(x)\right)$.

Предложение 19.5 доказано.

Предложение 19.6. $\mathfrak{A} = \langle \{A \subseteq \mathbb{N}^k \,|A - \text{рм}\}; \cup, \cap, -, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$ и

$\mathfrak{A}_0 = \langle \{A \subseteq \mathbb{N}^k \,|A - \text{прм}\}; \cup, \cap, -, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$ – счетные булевы алгебры,

$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \langle \rho(\mathbb{N}), \cup, \cap, \neg, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$.

Доказательство: упражнение.

Замечание 19.7. ПРМ $\subseteq$ РМ.

Доказательство: упражнение.

Предложение 19.8. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$ и $B = \{c^k(x) \mid x \in A\}$. Тогда A – рекурсивное множество (примитивно рекурсивное множество) тогда и только тогда, когда B – рекурсивное множество (примитивно рекурсивное множество).

Доказательство:

(⇒) A – рекурсивное множество (примитивно рекурсивное множество) ⇒ $\chi_A(x)$ – общерекурсивная функция (примитивно рекурсивная функция), и $\chi_B(y)=\chi_A(C^k_1(y),\ldots,C^k_k(y))$ – общерекурсивная функция (примитивно рекурсивная функция).

(⇐) B – рекурсивное множество (примитивно рекурсивное множество) ⇒ $\chi_B(x)$ – общерекурсивная функция (примитивно рекурсивная функция), и $\chi_A(x)=\chi_B(C^k(x))$ – общерекурсивная функция (примитивно рекурсивная функция).

Предложение 19.8 доказано.

Предложение 19.9. Любое рекурсивное множество является рекурсивно перечислимым: РМ ⊆ РПМ, т. е. для любого множества $A \subseteq \mathbb{N}^k$ если A – рекурсивное множество, то A – рекурсивно перечислимое множество.

Доказательство. Пусть A – рекурсивно перечислимое множество. Тогда $\chi_A(x)$ является общерекурсивной функцией.

1) Если $A = \emptyset$, то $A -$ рекурсивно перечислимое множество.

2) Если $A \neq \emptyset$, то, при $k = 1$, найдется элемент $a \in A$. Тогда функция $f(n) = n\chi_A(n) + a\overline{sg}\,\chi_A(n)$ будет перечислять множество A .

Предложение 19.9 доказано.

Теорема 19.10 (Поста). Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Тогда A – рекурсивное множество тогда и только тогда, когда A и $\bar{A}$ – рекурсивно перечислимые множества.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть A – рекурсивное множество, тогда $\bar{A}$ – рекурсивное множество. Следовательно, A и $\bar{A}$ – рекурсивно перечислимые множества.

($\Leftarrow$) Пусть A и $\bar{A}$ – рекурсивно перечислимые множества. Тогда если $A = \emptyset$, то A – рекурсивное множество и $\bar{A} = \mathbb{N}^k$ – рекурсивное множество. Если $A = \mathbb{N}^k$ то A – рекурсивное множество и $\bar{A} = \emptyset$ – рекурсивное множество.

Рассмотрим случай, когда $A \neq \emptyset$ и $\bar{A} \neq \emptyset$. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ и $A, \bar{A}$ – рекурсивно перечислимые множества.

Тогда найдутся такие общерекурсивные функции f и g, что

$$A = \rho f = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad \bar{A} = \rho g = \{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Определим характеристическую функцию для множества A:

$$\chi_A(x) = \overline{sg}|f(\,\mu y[\,|f(y) - x| \cdot |g(y) - x| = 0\,]) - x|.$$

Очевидно, что функция $\chi_A(x)$ является общерекурсивной функцией. Следовательно, множество A рекурсивно.

Теорема 19.10 доказана.

Предложение 19.11. Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$, $C \subseteq \mathbb{N}^l$ – рекурсивно перечислимые множества. Тогда $(A \cup B)$, $(A \cap B)$, $(A \times C)$ – также рекурсивно перечислимые множества.

Доказательство: упражнение.

Теорема 19.12 (Об эквивалентных определениях рекурсивно перечислимого множества). Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) A – рекурсивно перечислимое множество;

2) Существует частично рекурсивная функция f такая, что $A = \rho f$;

3) $A = \emptyset$ либо существует примитивно рекурсивная функция f такая, что $A = \rho f$;

4) Существует примитивно рекурсивное множество $B \subseteq \mathbb{N}^k$ такое, что $A = \{x \mid \exists y \colon (x, y) \in B\}$;

5) Существует рекурсивное множество $B \subseteq \mathbb{N}^k$ такое, что

$A = \{x \mid \exists y \colon (x, y) \in B\}$;

6) Существует частично рекурсивная функция f такая, что

$A = \sigma f = \{x \mid f(x) -$ определена$\}$.

Доказательство.

($\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}$) Пусть $A = \emptyset$, тогда $f(x) = \mu y[S(x) = 0]$. Тогда $A = \rho f = \emptyset$.

Если же $A \neq \emptyset$, то, по определению, найдется такая общерекурсивная функция f, что $A = \rho f$. Из того, что f – общерекурсивная функция следует, что f – частично рекурсивная функция.

($\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3}$) Пусть $A = \rho g$, где g – частично рекурсивная функция. Тогда

$g(z) = l(\mu y[\, h(z, y) = 0\,])$, где $h -$ примитивно рекурсивная функция.

Пусть $x \leftrightharpoons c(y, z)$ и $t(x) \leftrightharpoons \overline{sg} h(r(x), l(x)) \cdot sg(\prod_{i=0}^{l(x) \dot{-} 1} h(r(x), i)$. Очевидно, что $t(x)$ – примитивно рекурсивная функция.

Если $A \neq \emptyset$, то найдется элемент $a \in A$ такой, что функция

$$f(x) = l\left(l\,(x)\right) \cdot t(x) + \ a \cdot \overline{sg}\left(t(x)\right)$$

является примитивно рекурсивной. Докажем, что $A = \rho f$.

а) Пусть $b = f(n)$ покажем, что $b \in A$. Если $t(n) = 0$, то $b = f(n) = a \in A$. Если же $t(n) = 1$, то, при $y \leftrightharpoons l(n)$ и $z = r(n)$, получим, что $y -$ минимальный элемент такой, что $h(z, y) = 0$. Тогда $g(z) = l(y) = l\big(l(n)\big) = f(n) \in A$. Таким образом, получили, что $\rho f \subseteq A$.

б) Пусть $b \in A$. Тогда найдется такой элемент $z \in \mathbb{N}$, что $g(z) = b = l(\mu y[h(z, y) = 0])$. Следовательно, найдется такой элемент y, что для любого $p < y$ имеет место $h(z, p) \neq 0$ и $h(z, y) = 0$. Положим $n \leftrightharpoons c(y, z)$. Тогда $t(n) = 1$. Следовательно, $f(n) = l\big(l(n)\big) = l(y) = b$. Таким образом, получим, что $A \subseteq \rho f$.

($\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{4}$) Если $A = \emptyset$, то берём $\mathrm{B} = \emptyset$, которое, очевидно, является примитвно рекурсивным.

Пусть $A = \rho f$, где $f -$ примитивно рекурсивная функция. Положим $B = \{(x, y) |\, f(y) = x\}$. Очевидно, что характеристическая функция $\chi_B(x, y) = \overline{sg}|f(y) - x|$ является примитивно рекурсивной. Следовательно, множество B примитивно рекурсивно. Тогда получим, что

$$A = \rho f = \{x | \exists y \colon f(y) = x\ \} = \{x | \exists y \colon (x, y) \in B\}.$$

($\mathbf{4} \Rightarrow \mathbf{5}$) Если B – примитивно рекурсивное множество, то, очевидно, B – рекурсивное множество.

($\mathbf{5} \Rightarrow \mathbf{6}$) Пусть $A = \{x | \exists y \colon (x, y) \in B\}$, где B – рекурсивное множество. Тогда характеристическая функция χ_B является общерекурсивной. Тогда функция $f(x, y) = \mu y[\overline{sg}\, \chi_B(x, y) = 0]$ является частично рекурсивной. Не трудно понять, что $A = \sigma f$.

(**6** $\Rightarrow$ **2**) Пусть $A = \sigma g$, где g – частично рекурсивная функция. Положим $f(x) \leftrightharpoons x + O(g(x))$. Тогда

а) Если $x \in A$, то $x \in \sigma g$, т. е. функция g – определена. Следовательно, $f(x)$ – определена и $f(x) = x$. А значит, получим, что $x \in \rho f$.

б) Если $x \notin A$, то $x \notin \sigma g$, т. е. функция g – не определена. Следовательно, $f(x)$ – не определена. А значит $x \notin \rho f$.

Таким образом, получили что $A = \rho f$.

(**3** $\Rightarrow$ **1**) Пусть $A \neq \emptyset$. Тогда найдется такая примитивно рекурсивная функция f, что $A = \rho f$. Следовательно, f является общерекурсивной функцией. А значит A – рекурсивно перечислимое множество.

Теорема 19.12 доказана.

Предложение 19.13. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$ и $B = \{c^k(x_1, \dots, x_k) | x_1, \dots, x_k \in A\}$. Тогда множество A является рекурсивно перечислимым тогда и только тогда, когда множество B – рекурсивно перечислимо.

Доказательство: упражнение.

Следствие 19.14. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Тогда множество A является рекурсивно перечислимым тогда и только тогда, когда существует такая частично рекурсивная функция f, что $A = \delta f$.

Доказательство. Пусть $B = \{c^k(x_1, \dots, x_k) | x_1, \dots, x_k \in A\}$.

($\Rightarrow$) Если A – рекурсивно перечислимое множество, то B – рекурсивно перечислимое множество. Следовательно, существует такая частично рекурсивная функция h, что $B = \delta h$. Положим $f(x) = h(c^k(x_1, \dots, x_k))$. Очевидно, что f – частично рекурсивная функция. Тогда имеем

$$(x_1, \dots, x_k) \in A \Leftrightarrow \mathrm{c}^k(x_1, \dots, x_k) \in B \Leftrightarrow \mathrm{c}^k(x_1, \dots, x_k) \in \delta h \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_k) \in \delta f.$$

Таким образом, получим, что $A = \delta f$.

($\Leftarrow$) Упражнение.

Следствие 19.14 доказано.

Теорема 19.15. Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$, что A – рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $k = 1$, т.е. $A \subseteq \mathbb{N}$.

Положим $A \leftrightharpoons \{c(x, y) \mid K^2(x, y) - \text{определено}\}$. Так как $K^2(x, y)$ – частично рекурсивная функция, то множество A рекурсивно перечислимо.

Будем доказывать от противного. Допустим, что множество A – рекурсивно.

Так как функция $K^2(x, y)$ является универсальной для класса ЧРФ^1, то найдется такой номер $a \in \mathbb{N}$, что $K^2(a, x) = O(x)$. Положим

$$g(x, y) = K^2\Big(\big(x \cdot \chi_A\big(c(x, y)\big) + a \cdot \overline{sg}\, \chi_A\big(c(x, y)\big)\big), y\Big).$$

Покажем, что $g(x, y)$ является общерекурсивной функцией.

1. Пусть $K^2(x, y)$ – определена. Тогда $c(x, y) \in A$. Следовательно, $\chi_A\big(c(x, y)\big) = 1$. А значит $g(x, y) = K^2(x, y)$ – определена.

2. Пусть $K^2(x, y)$ –не определена. Тогда $c(x, y) \notin A$. Следовательно, $\chi_A\big(c(x, y)\big) = 0$. А значит $g(x, y) = K^2(a, y) = O(y) = 0$ – определена.

Покажем, что $g(x, y)$ является универсальной для класса ОРФ^1.

а) Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $g(n, x)$ определена, то $g(n, x) \in$ ОРФ^1.

б) Пусть $h(x) \in$ ОРФ^1. Тогда $h(x)$ является частично рекурсивной функцией. Следовательно, найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, что $h(x) = K^2(n, x)$. А значит для любого $x \in \mathbb{N}$ функция $K^2(n, x)$ определена. Следовательно, для любого $x \in \mathbb{N}$ имеем $K^2(n, x) = g(n, x) = h(x)$.

Таким образом, мы получили, что функция g является универсальной для класса ОРФ^1. Мы пришли к противоречию, так как для класса ОРФ не существует общерекурсивной универсальной функции. Следовательно, множество A не рекурсивно.

Рассмотрим теперь случай, когда $k > 1$.

Пусть $A_k \leftrightharpoons \{(c_1^k(n), \dots, c_k^k(n)) | \, n \in A\}$. Так как A – рекурсивно перечислимо, то и A_k – рекурсивно перечислимо. Так как A – не рекурсивно, то A_k – не рекурсивно.

Теорема 19.15 доказана.

Замечание 19.16. Множество $A = \delta \mathrm{K}^l(x_1, \dots, x_l)$ – рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

Доказательство: упражнение.

Предложение 19.17. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) A – рекурсивно перечислимо;

2) $A = \delta f$, где f – частично рекурсивная функция;

что $A = \{x \,| \exists y \colon (x, y) \in B\}$;

3) Существует примитивно рекурсивное множество $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ такое, что $A = \{x \mid \exists y: (x, y) \in B\}$.

4) Существует рекурсивное множество $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ такое, что $A = \{x \mid \exists y: (x, y) \in B\}$.

Доказательство.

$(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{3})$ Пусть A – рекурсивно перечислимое множество и $C \leftrightharpoons \{c(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in A\}$. Очевидно, что C – рекурсивно перечислимое множество. Следовательно, существует примитивно рекурсивное множество $D \subseteq \mathbb{N}^2$ такое, что $C = \{n \mid \exists y: (n, y) \in D\}$.

Положим $B \leftrightharpoons \{(x_1, \dots, x_n, y) \mid (c^k(x_1, \dots, x_n), y) \in D\}$. Тогда характеристическая функция $\chi_B(x_1, \dots, x_n, y) = \chi_D(c^k(x_1, \dots, x_n), y)$ является примитивно рекурсивной. Следовательно, множество B так же примитивно рекурсивно.

Далее получим

$$(x_1, \dots, x_n) \in A \Leftrightarrow c^k(x_1, \dots, x_n) \in C \Leftrightarrow \exists y: (c^k(x_1, \dots, x_n), y) \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists y: (x_1, \dots, x_n, y) \in B.$$

Таким образом, получаем, что $A = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \exists y: (x_1, \dots, x_n, y) \in B\}$.

$(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{4})$ Очевидно.

$(\mathbf{4} \Rightarrow \mathbf{1})$ Упражнение.

$(\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{2})$ доказано в Следствии 19.14.

Предложение 19.17 доказано.

Множество $G_f = \{(x_1, \dots, x_n, y) | f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ называется ***графиком*** функции f.

Теорема 19.18 (О графике). Функция f является частично рекурсивной тогда и только тогда, когда множество $G_f = \{(x_1, \dots, x_n, y) | f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ является рекурсивно перечислимым.

Доказательство.

(⇒) Пусть функция f является частично рекурсивной. Определим функцию $g(x_1, \dots, x_n, y) = \mu z[f(x_1, \dots, x_n) - y = 0]$. Очевидно, что функция g также является частично рекурсивной. Следовательно, так как $G_f = \delta g$, то множество G_f – рекурсивно перечислимо.

(⇐) Пусть множество G – рекурсивно перечислимо. Следовательно, существует рекурсивное множество A такое, что

$$G = \{(x_1, \dots, x_n, y) | \exists z \colon (x_1, \dots, x_n, y, z) \in A\}.$$

Определим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) \leftrightharpoons l(\mu t[\overline{sg}\, \chi_A (x_1, \dots, x_n, l(t), r(t)) = 0]).$$

Очевидно, что функция f является частично рекурсивной. Покажем, что множество G является графиком функции f, то есть, множество $G = G_f$.

1) Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ – определена. Тогда существует $y \in \mathbb{N}$ такое, что $f(x_1, \dots, x_n) = y$. Следовательно, найдется $z \in \mathbb{N}$ такое, что $(x_1, \dots, x_n, y, z) \in A$.

Пусть $t \leftrightharpoons c(y, z)$. Тогда $\overline{sg}\, \chi_A(x_1, \dots, x_n, l(t), r(t)) = 0$. Следовательно, $(x_1, \dots, x_n, l(t), r(t)) \in A$. Значит, $(x_1, \dots, x_n, l(t)) \in G$ и $(x_1, \dots, x_n, l(t)) \in G_f$, т.к. $f(x) = y = l(t)$.

2) Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ – не определена. Тогда, если существует такое t, что $\overline{sg}\, \chi_A(x_1, \dots, x_n, l(t), r(t)) = 0$, то
$(x_1, \dots, x_n, y, z) \in A$. Значит, $\left(x_1, \dots, x_n, \mathrm{c}(t)\right) \in G_f$, т.е. $f(x_1, \dots, x_n) = c(t)$. А это противоречит тому, что функция f не определена.

Таким образом, функция $l(\mu t[\overline{sg}\, \chi_A\, (x_1, \dots, x_n, l(t), r(t)) = 0])$ так же не определена.

Теорема 19.18 доказана.

Определение 19.19. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Функция

$$\chi_{\mathrm{A}}^*(x) = \begin{cases} 1, & (x_1, \dots, x_n) \in A; \\ \text{не определена}, & (x_1, \dots, x_n) \notin A. \end{cases}$$

называется ***частичной характеристической функцией*** множества A.

Теорема 19.20. Множество A рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда ее частичная характеристическая функция $\chi_{\mathrm{A}}^*(x)$ является частично рекурсивной.

Доказательство.

(⇒) Пусть множество A – рекурсивно перечислимо. Тогда найдется частично рекурсивная функция f такая, что $A = \delta f$. Положим

$h(x) = S(O(f(x)))$.

1) Пусть $x \in A$. Тогда функция $f(x)$ определена. Следовательно, $h(x) = S(O(f(x))) = 1$.

2) Пусть $x \notin A$. Тогда функция $f(x)$ не определена. Следовательно, функция $h(x) = S(O(f(x)))$ также не определена.

Таким образом, получили, что $h(x) = \chi_{\mathrm{A}}^{*}(x)$.

(⇐) Пусть частичная характеристическая функция $\chi_{\mathrm{A}}^{*}(x)$ является частично рекурсивной. Тогда имеем $A = \delta\chi_{A}^{*}$. Следовательно, множество A является рекурсивно перечислимым.

Теорема 19.20 доказана.

Теорема 19.21 (О составном определении). Рассмотрим рекурсивно перечислимые множества $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{N}^k$ такие, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть функция $g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_n(x_1, \dots, x_k)$ являются частично рекурсивными. Тогда следующая функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_k), & \langle x_1, \dots, x_k \rangle \in A_1; \\ \dots & \dots \\ g_n(x_1, \dots, x_k), & \langle x_1, \dots, x_k \rangle \in A_n; \\ \text{не определена}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

также является частично рекурсивной

Доказательство. Так как множества $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{N}^k$ являются рекурсивно перечислимыми, то найдутся такие рекурсивные множества $B_1, \dots, B_n$, что

$A_i = \{x_1, \dots, x_n \mid \exists y \colon (x_1, \dots, x_n, y) \in B_i\}$ для любого $i \in \{1, \dots., n\}$.

<u>*Случай 1*</u>. Пусть все функции $g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_n(x_1, \dots, x_k)$ являются общерекурсивными. Определим функцию

$$h(x_1, \dots, x_n) = \mu y \left[\prod_{i=1}^{n} \overline{sg}\, \chi_{B_i}(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \right].$$

Покажем, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, \dots, x_n) \cdot \chi_{B_i}(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)).$$

1) Пусть существует такое $i \in \{1, \dots, n\}$, что $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in A_i$. Тогда существует такое $y \in \mathbb{N}$, что $\langle x_1, \dots, x_n, y \rangle \in B_i$. Пусть y' – минимальное число, такое что $\langle x_1, \dots, x_n, y' \rangle \in B_i$. Тогда $h(x_1, \dots, x_n) = y'$. Следовательно, $\chi_{B_i}\big(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)\big) = 1$ и $\chi_{B_j}\big(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)\big) = 0$ для любого $j \neq i$. Таким образом, получим, что $f(x_1, \dots, x_n) = g_i(x_1, \dots, x_n)$.

2) Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin A_i$. Тогда для любого $y \in \mathbb{N}$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\chi_{B_i}\big(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)\big) = 0$. Следовательно, для любого $y \in \mathbb{N}$ выполнено $\prod_{i=1}^{n} \overline{sg}\, \chi_{B_i}(x_1, \dots, x_n, y) = 1$. А значит функция $h(x_1, \dots, x_n)$ не определена. И, следовательно, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ также не определена.

Случай 2. Пусть не все функции $g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_n(x_1, \dots, x_k)$ являются общерекурсивными. Допустим, что функции $g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_l(x_1, \dots, x_k)$ определены на некоторых кортежах. Пусть для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$ найдется такой кортеж $\langle a_1^i, \dots, a_n^i \rangle$, что функция $g_i(a_1^i, \dots, a_n^i)$ определена. Определим функцию

$$h(x_1, \dots, x_n) = \mu y \left[\prod_{i=1}^{l} \overline{sg}\, \chi_{B_i}(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \right].$$

Покажем, что

$$f(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{l}\Big[g_i(x_1\cdot\chi_{B_i}(x_1,\dots,x_n,h(x_1,\dots,x_n)+a_1^i\cdot\overline{sg}\,\chi_{B_i}(x_1,\dots,x_n,h(x_1,\dots,x_n),\dots,$$

$$x_n\cdot\chi_{B_i}(x_1,\dots,x_n,h(x_1,\dots,x_n)+a_n^i\cdot\overline{sg}\,\chi_{B_i}(x_1,\dots,x_n,h(x_1,\dots,x_n))$$

$$\cdot\,\chi_{B_i}(x_1,\dots,x_n,h(x_1,\dots,x_n))\Big].$$

1) Пусть существует такое $i\in\{1,\dots,l\}$, что $\langle x_1,\dots,x_n\rangle\in A_i$. Тогда существует такое $y\in\mathbb{N}$, что $\langle x_1,\dots,x_n,y\rangle\in B_i$. Пусть y' - минимальное число, такое что $\langle x_1,\dots,x_n,y'\rangle\in B_i$. Тогда $h(x_1,\dots,x_n)=y'$. Следовательно, $\chi_{B_i}\big(x_1,\dots,x_n,h(x_1,\dots,x_n)\big)=1$ и $\chi_{B_j}\big(x_1,\dots,x_n,h(x_1,\dots,x_n)\big)=0$ для любого $j\neq i$. Таким образом, получим, что $f(x_1,\dots,x_n)=g_i(x_1,\dots,x_n)$.

2) Пусть для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ имеем $\langle x_1,\dots,x_n\rangle\notin A_i$. Тогда для любого $y\in\mathbb{N}$ и для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ имеем $\chi_{B_i}\big(x_1,\dots,x_n,h(x_1,\dots,x_n)\big)=0$. Следовательно, для любого $y\in\mathbb{N}$ выполнено $\prod_{i=1}^{n}\overline{sg}\,\chi_{B_i}(x_1,\dots,x_n,y)=1$. А значит функция $h(x_1,\dots,x_n)$ не определена. И, следовательно, функция $f(x_1,\dots,x_n)$ также не определена.

Теорема 19.21 доказана.

§20. Формальная арифметика Пеано. Неразрешимые проблемы.

Определение 20.1. Сигнатуру $\Sigma_0 = \langle <^2, +^2, *^2, s^1, 0 \rangle$ назовем сигнатурой арифметики Пеано. Введем обозначения:

$T(\Sigma_0)$ – множество термов сигнатуры Σ_0;

$F(\Sigma_0)$ – множество формул сигнатуры Σ_0;

$S(\Sigma_0)$ – множество предложений сигнатуры Σ_0;

$\{v_i | \, i \in \mathbb{N}\}$ – множество переменных.

Определение 20.2. Геделевской нумерацией термов и формул сигнатуры Σ_0 называется:

1. $\gamma(0) = c\,(0, 1)$;
   $\gamma\,(v_i) = c\,(1, i)$;
2. $\gamma\,(s(t)) = c\,(2, \gamma(t))$;
3. $\gamma\,(t + q) = c\,(3, c(\gamma(t), \gamma(q)))$;
4. $\gamma\,(t * q) = c\,(4, c(\gamma(t), \gamma(q)))$;
5. $\gamma\,(t = q) = c\,(5, c(\gamma(t), \gamma(q)))$;
6. $\gamma\,(t < q) = c\,(6, c(\gamma(t), \gamma(q)))$;
7. $\gamma\,(\varphi \,\&\, \psi) = c\,(7, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$;
8. $\gamma\,(\varphi \vee \psi) = c\,(8, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$;
9. $\gamma\,(\varphi \rightarrow \psi) = c\,(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$;
10. $\gamma\,(\neg\varphi) = c\,(10, \gamma(\varphi))$;
11. $\gamma\,(\exists v_i\,\varphi) = c\,(11, c(i, \gamma(\varphi)))$;
12. $\gamma\,(\forall v_i\,\varphi) = c\,\Big(12, c\big(i, \gamma(\varphi)\big)\Big)$.

Утверждение 20.3. Следующие множества являются примитивно рекурсивными:

1. $\gamma(T(\Sigma_0)) = \{\, \gamma(t) \mid t \in T(\Sigma_0)\}$;
2. $\gamma(F(\Sigma_0)) = \{\, \gamma(\varphi) \mid \varphi \ \in F\ (\Sigma_0)\}$;
3. $\gamma(S\ (\Sigma_0)) = \{\, \gamma(\varphi) \mid \varphi \ \in S\ (\Sigma_0)\}$.

Доказательство: упражнение.

Определение 20.4. Пусть $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$. Будем говорить, что X – ***разрешимо***, если множество $\gamma(X) = \{\gamma(x) \mid x \in X\}$ – рекурсивно, и X – ***перечислимо***, если множество $\gamma(X)$ рекурсивно перечислимо.

Утверждение 20.5. $\forall n\ \ \forall a_0, \dots, a_n\ \ \exists x = p_0^{a_0}, \dots, p_n^{a_n}$, при этом $ex(0, x) = a_0, \dots, ex(n, x) = a_n$.

Доказательство: упражнение.

Определение 20.6. $\Pi_{\Sigma_0} = \{\, \varphi \in F(\Sigma_0) \mid \varphi -$ тождественно истинно$\}$.

Предложение 20.7. Π_{Σ_0} – перечислимо.

Доказательство. Определим функцию

$$f(x, n, y) =$$
$$= \begin{cases} y, & \begin{array}{c} ex(n,x) = y \ \text{ и} \\ \gamma^{-1}\big(ex(0,x)\big), \dots, \gamma^{-1}\left(ex(n,x)\right) - \text{последовательность} \\ \text{формул из } F(\Sigma_0), \text{являющаяся доказательством;} \end{array} \\ \gamma(v_0 = v_0), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 20.8. Функция f является общерекурсивной.

Доказательство: упражнение.

Покажем, что $\rho f = \gamma(\Pi_{\Sigma_0})$.

а) Пусть $f(x, n, y) = y$. Тогда, если $y = \gamma(v_0 = v_0)$, то $y \in \gamma(\Pi_{\Sigma_0})$. Если $y \neq \gamma(v_0 = v_0)$, то существуют такие формулы $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in F(\Sigma_0)$, что $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ – доказательство и $\gamma^{-1}(y) = \varphi_n$. Следовательно, формула φ_n доказуема. Значит, φ_n тождественно истинна. Тогда $\varphi \in \Pi_{\Sigma_0}$. Следовательно, $y = \gamma(\varphi) \in \gamma(\Pi_{\Sigma_0})$. Таким образом, мы получили, что $\rho f \subseteq \gamma(\Pi_{\Sigma_0})$.

б) Пусть $\varphi \in \Pi_{\Sigma_0}$. Тогда формула φ является тождественно истинной, а, следовательно, доказуемой. Значит, найдутся такие формулы

$\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi \in F(\Sigma_0)$, что $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ – доказательство. Положим

$x = p_0^{\gamma(\varphi_0)}, \dots, p_n^{\gamma(\varphi_n)}$ и $y = \gamma(\varphi_n)$. Тогда $f(x, n, y) = y = \gamma(\varphi) \in \rho f$. Таким образом, мы получили, что $\gamma\left(\Pi_{\Sigma_0}\right) \subseteq \rho f$.

Предложение 20.7 доказано.

Следствие 20.9. Множество $\{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid \varphi - \text{тождественно истинно}\}$ – перечислимо.

Доказательство: упражнение.

Предложение 20.10.

1. Пусть $A \subseteq F(\Sigma_0)$. Если A – конечно (разрешимо), то множество $A' = \{\varphi \in F(\Sigma_0) \mid A \rhd \varphi\}$ – перечислимо.
2. Пусть $A \subseteq S(\Sigma_0)$. Если A – конечно (разрешимо), то множество $A'' = \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid A \rhd \varphi\}$ – перечислимо.

Доказательство: упражнение.

Теорема 20.11. Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$. Если T – полная, перечислимая теория, то T – разрешима.

Доказательство. Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$ – полная, перечислимая теория. Рассмотрим 2 случая.

1) Пусть T – противоречива. Тогда $T = S(\Sigma_0)$. Следовательно, $\gamma(T) = \gamma\big(S(\Sigma_0)\big)$ является примитивно рекурсивным множеством. Значит, теория T разрешима.

2) Пусть T – непротиворечива. Введем обозначение $M \leftrightharpoons \gamma(T)$. Покажем, что множество M – рекурсивно.

Теория T перечислима, следовательно, множество M – рекурсивно перечислимо. Значит, существует общерекурсивная функция f такая, что $M = \rho f$. Покажем, что тогда

$$\chi_M(x) = \overline{sg}\ \left|f\left(\mu y\left[\chi_{\gamma(S(\Sigma_0))}(x) \cdot |f(y) - x| \cdot |f(y) - c(10, x)| = 0\right]\right) - x\right|.$$

1) Пусть $x \notin \gamma\big(S(\Sigma_0)\big)$. Тогда $\chi_M(x) = 0$. Имеем $\overline{sg}\ |f(0) - x| = 0$, так как $x \notin M$. Следовательно, $f(0) \neq x$.

2) Пусть $x \in \gamma\big(S(\Sigma_0)\big)$. Тогда найдется предложение $\varphi \in S(\Sigma_0)$ такое, что $x = \gamma(\varphi)$. Рассмотрим два случая:

а) Пусть $\varphi \in T$. Тогда $x = \gamma(\varphi) \in M$. Следовательно, найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f(n) = x$.

Так как T непротиворечиво, $\neg\varphi \notin T$. Следовательно, $\gamma(\neg\varphi) = c(10, x) \notin M$. А это означает, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место $f(k) \neq c(10, x)$. Таким образом, существует минимальное k такое, что $f(k) = x$. Следовательно, $\chi_M(x) = 1$.

б) Пусть $\varphi \notin T$. Тогда $x = \gamma(\varphi) \notin M$. Так как T полно, $\neg\varphi \in T$. Следовательно, $\gamma(\neg\varphi) = c(10, x) \in M$. А это означает, что найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что $f(n) = c(10, x)$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место $f(k) \neq x$. То есть существует минимальный элемент k такой, что $f(k) = c(10, x)$. Тогда $\chi_M(x) = 0$ и $\overline{sg}\ |f(k) - x| = 0$.

Стало быть, функция $\chi_M(x)$ является частично рекурсивной и, следовательно, общерекурсивной.

Таким образом, мы доказали, что множество M – рекурсивно, значит теория T разрешима.

Теорема 20.11 доказана.

Определение 20.12. Формальной арифметикой Пеано называется следующая система аксиом A_0:

1. $\forall v_0 \neg(s(v_0) = 0)$;
2. $\forall v_0 \forall v_1\ ((s(v_0) = s(v_1))\ \rightarrow (v_0 = v_1))$;
3. $\forall v_0 (v_0 + 0 = v_0)$;
4. $\forall v_0 \forall v_1 \big(v_0 + s(v_1) = s(v_0 + v_1)\big)$;
5. $\forall v_0 (v_0 * 0 = 0)$;
6. $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 * s(v_1) = (v_0 * v_1) + v_0)$;
7. $\forall v_0 \neg(v_0 < 0)$;
8. $\forall v_0 \forall v_1 ((v_0 < s(v_1))\ \rightarrow\ ((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)))$;
9. $\forall v_0 \forall v_1\ (((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1))\ \rightarrow\ (v_0 < s(v_1)))$;
10. $\forall v_0 \forall v_1 \Big(\neg\,(v_0 = v_1) \rightarrow\ \big((v_0 < v_1) \vee (v_1 < v_0)\big)\Big)$.

Определение 20.13 Введем обозначения:

1. $\underline{0} = 0$;
2. $\underline{1} = s\ (\underline{0})$;
3. $\underline{n+1} = s(\underline{n})$, т. е. $\underline{n} = \underbrace{s(s(\dots s(0)\dots))}_{\text{n раз}}$.

Определение 20.14. Пусть $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Говорят, что f − представима в A_0, если существует формула $\varphi(v_0, \dots, v_n) \in F(\Sigma_0)$ такая, что для любых $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:

1. Если $f(n_0, \dots, n_{k-1}) = n_k$, то $A_0 \vdash \varphi\left(\underline{n_0}, \dots, \underline{n_k}\right)$.

2. Если $f(n_0, \dots, n_{k-1}) \neq n_k$, то $A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_0}, \dots, \underline{n_k})$.

Теорема 20.15. Каждая общерекурсивная функция представима в A_0.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по построению общерекурсивных функций.

1. Простейшие функции:
   a. Функция $O(v_0)$ представима формулой $\varphi(v_0, v_1) \leftrightharpoons (v_1 = 0)$;
   b. Функция $S(v_0)$ представима формулой $\varphi(v_0, v_1) \leftrightharpoons (v_1 = s(v_0))$;
   c. Функция $I_m^n(v_0, \dots, v_{n-1})$ представима формулой $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n) \leftrightharpoons (v_n = v_{m-1})$;
2. Суперпозиция: Рассмотрим функцию

$f(v_0, \dots, v_{n-1}) = h\big(g_1(v_0, \dots, v_{n-1}), \dots, g_k(v_0, \dots, v_{n-1})\big)$. Пусть формулы $\varphi_1(v_0, \dots, v_n), \dots, \varphi_k(v_0, \dots, v_n)$ и $\psi(v_0, \dots, v_k)$ представляют функции $g_1, \dots, g_k$ и h соответственно. Тогда следующая формула представляет функцию $f(v_0, \dots, v_{n-1})$:

$$\xi(v_0, \dots, v_n) \leftrightharpoons \exists v_{N+1} \dots \exists v_{N+k}$$
$$\big(\varphi_1(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{N+1}) \& \dots \& \varphi_k(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{N+k}) \;\&\; \psi(v_{N+1}, \dots, v_{N+k}, v_n)\big),$$

где $N \leftrightharpoons \max\{l \mid v_l$ входит в $\varphi_1 \& \dots \& \varphi_k \& \psi\}$.

3. Примитивная рекурсия: Рассмотрим функцию

$$\begin{cases} f(v_0,\dots,v_{n-1},0) = g(v_0,\dots,v_{n-1}); \\ f(v_0,\dots,v_{n-1},v_{n+1}) = h\big(v_0,\dots,v_{n-1},v_n,f(v_0,\dots,v_n)\big). \end{cases}$$

Пусть формулы $\varphi(v_0,\dots,v_n)$ и $\psi(v_0,\dots,v_{n+2})$ представляют функции g и h соответственно. Пусть $N \leftrightharpoons \max\{l \mid v_l$ входит в $\varphi\&\psi\}$ и

$$v_{N+1} = p_0^{f(v_0,\dots,v_{n-1},0)} \cdot \ldots \cdot p_{v_n}^{f(v_0,\dots,v_{n-1},v_n)}.$$

Тогда следующая формула представляет функцию $f(v_0,\dots,v_n)$:

$$\xi(v_0,\dots,v_{n+1}) \leftrightharpoons$$

$$\leftrightharpoons \exists v_{N+1} \left[\varphi\big(v_0,\dots,v_{n-1},ex(o,v_{N+1})\big) \& \forall v_{N+2} \Big((v_{N+2} < v_n)\right.$$

$$\to \Big(\psi(v_0,\dots,v_{n-1},v_{N+2},ex(v_{N+2},v_{N+1}),ex(v_{N+2}+1,v_{N+1})\,)\Big)\Big)$$

$$\left.\& \, v_{n+1} = ex(v_n,v_{N+1})\right].$$

4. Минимизация: Рассмотрим функцию

$$f(v_0,\dots,v_{n-1}) = \mu v_n[g(v_0,\dots,v_{n-1},v_n) = 0].$$

Пусть формула $\varphi(v_0,\dots,v_{n+1})$ представляют функцию g. Тогда следующая формула представляет функцию $f(v_0,\dots,v_{n-1})$:

$$\xi(v_0,\dots,v_n) \leftrightharpoons$$

$$\leftrightharpoons \varphi(v_0,\dots,v_n,0) \& \, \forall v_{N+1}\big((v_{N+1} < v_n) \to \neg\varphi(v_0,\dots,v_{n-1},v_{N+1},0)\big).$$

Теорема 20.15 доказана.

Теорема 20.16 (Геделя о неразрешимости). Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$ и T – непротиворечивая теория. Тогда T – неразрешима.

Это означает, что система аксиом A_0 наследственно неразрешима, то есть, любая содержащая её непротиворечивая теория является неразрешимой.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Допустим, что теория T – разрешима. Тогда множество номеров $M = \gamma(T)$ – рекурсивно. Следовательно, характеристическая функция χ_M является общерекурсивной. Определим функцию

$$f(x,y) \leftrightharpoons \begin{cases} \gamma[\gamma^{-1}(x)]_{\underline{y}}^{v_0}, & x \in \gamma\big(F(\Sigma_0)\big); \\ 0, & x \notin \gamma\big(F(\Sigma_0)\big). \end{cases}$$

Функция $f(x,y)$ всюду определена, и так как множество номеров $\gamma\big(F(\Sigma_0)\big)$ примитивно рекурсивно, то и функция $f(x,y)$ будет примитивно рекурсивной.

Пусть $g(x,y) \leftrightharpoons \chi_M(f(x,y))$. Очевидно, что функция $g(x,y)$ является общерекурсивной. Следовательно, она представима в арифметике Пеано. Пусть формула $\varphi(v_0,v_1,v_2)$ представляет функцию $g(v_0,v_1)$. Положим $n \leftrightharpoons \gamma(\varphi(v_0,v_0,0))$. Тогда имеем

$$f(n,y) = \gamma\left([\varphi(v_0,v_0,0)]_{\underline{y}}^{v_0}\right) = \gamma\left(\varphi\left(\underline{y},\underline{y},0\right)\right).$$

Тогда $f(n,n) = \gamma\big(\varphi(\underline{n},\underline{n},0)\big)$. И $g(n,n) = \chi_M\big(f(n,n)\big)$.

Возможны два случая для значения $g(n,n)$.

1. Пусть $g(n,n) = \chi_M\big(f(n,n)\big) = 1$. Тогда, так как $g(n,n) \neq 0$, имеем $A_0 \vdash \neg\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big)$. А так как $A_0 \subseteq T$, имеем $T \vdash \neg\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big)$. Следовательно, $\neg\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big) \in T$. И, в силу того, что T непротиворечиво, получим, что $\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big) \notin T$. Следовательно, $\gamma\left(\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big)\right) \notin M$, т.е. $\chi_M\big(f(n,n)\big) = \chi_M\left(\gamma\left(\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big)\right)\right) = 0$. А это противоречит нашему предположению, что $\chi_M\big(f(n,n)\big) = 1$.

2. Пусть $g(n,n) = \chi_M\big(f(n,n)\big) = 0$. Тогда $\chi_M\left(\gamma\left(\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big)\right)\right) = 0$. Следовательно, $\gamma\left(\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big)\right) \notin M$, т. е. $\varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big) \notin T$. Тогда, в силу того, что T – непротиворечиво и $A_0 \subseteq T$, получим $A_0 \nvdash \varphi\big(\underline{n},\underline{n},0\big)$. Следовательно, $g(n,n) \neq 0$, и мы опять пришли к противоречию.

Мы пришли к противоречию, предположив, что функция χ_M общерекурсивна. Следовательно, множество номеров M не является рекурсивным, а теория T – неразрешима.

Теорема 20.16 доказана.

Теорема 20.17 (Черча о неразрешимости). Множество ИП$_{\Sigma_0}$теорем логики предикатов сигнатуры Σ_0 является неразрешимым.

Доказательство. Введем обозначения:

$$T \leftrightharpoons \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid\ \vdash \varphi\},\ T_0 \leftrightharpoons \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid A_0 \vdash \varphi\} \text{ и } \psi \leftrightharpoons \&_{\varphi \in A_0}\varphi.$$

Очевидно, что множества предложений T и T_0 являются теориями.

Рассмотрим стандартную модель натуральных чисел

$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; <, +, *, s, 0\rangle$. Очевидно, что $\mathfrak{N} \vDash A_0$. Тогда, в силу Теоремы о существовании модели, получим, что теория T_0 непротиворечива. Следовательно, по теореме Геделя о неразрешимости, получим, что теория T_0 неразрешима.

С другой стороны, имеем

$$\varphi \in T_0 \ \Leftrightarrow\ A_0 \vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ \psi \vdash \varphi \ \Leftrightarrow \vdash (\psi \to \varphi) \ \Leftrightarrow\ (\psi \to \varphi) \in T.$$

Пусть $m \leftrightharpoons \gamma(\psi)$ и $n \leftrightharpoons \gamma(\varphi)$. Тогда $n = c\big(9, c(m,n)\big) = \gamma(\psi \to \varphi)$. Следовательно, $\chi_{\gamma(T_0)}(n) = \chi_{\gamma(T)}\Big(c\big(9, c(m,n)\big)\Big)$.

Будем доказывать от противного. Допустим, что теория T – разрешима. Тогда характеристическая функция $\chi_{\gamma(T)}$ является общерекурсивной. Следовательно, характеристическая функция $\chi_{\gamma(T_0)}$ так же общерекурсивна. А значит, теория T_0 разрешима. Мы пришли к противоречию.

Теорема 20.17 доказана.

Следствие 20.18. Если $\Sigma_0 \subseteq \sigma$, то ИП_σ $-$ неразрешимо.

Доказательство: упражнение.

Теорема 20.19 (Геделя о неполноте). Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$ и T – перечислимая, непротиворечивая теория, тогда T не полна. То есть, система аксиом A_0 не имеет непротиворечивых перечислимых пополнений.

Доказательство. Допустим теория T полна. Тогда, по Предложению 20.11, теория T разрешима. А это противоречит Теореме Геделя о неразрешимости. Следовательно, теория T – не полна.

Теорема 20.19 доказана.

Следствие 20.20. Множество $B = \{\gamma(\varphi) \mid A_0 \vdash \varphi\}$ рекурсивно перечислимо.

Доказательство: упражнение.

§21. Аксиоматизируемые классы

Определение 21.1. Рассмотрим $K_\sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} - \text{модель сигнатуры } \sigma\}$. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда ***теорией класса*** K называется множество предложений

$$Th(K) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \forall \mathfrak{A} \in K \quad \mathfrak{A} \models \varphi\} = \{\varphi \in S(\sigma) \mid K \models \varphi\}.$$

Определение 21.2. Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$. Тогда

$$K(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \mathfrak{A} \models \Gamma\} = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \forall \varphi \in \Gamma \quad \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

Определение 21.3. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Класс K называется ***аксиоматизируемым***, если существует такое множество предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$.

Предложение 21.4. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда $K \subseteq K\big(Th(K)\big)$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{A} \in K$. Пусть $\psi \in Th(K)$. Тогда, по определению теории класса, имеем, что для любой модели $\mathfrak{B} \in K$ выполнено $\mathfrak{B} \models \psi$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \psi$. Значит, $\mathfrak{A} \models Th(K)$. Таким образом, получаем, что $\mathfrak{A} \in K\big(Th(K)\big)$.

Предложение 21.4 доказано.

Предложение 21.5. Пусть $K = K(\Gamma)$. Тогда $\Gamma \subseteq Th(K)$.

Доказательство. Рассмотрим $\varphi \in \Gamma$. Если $\mathfrak{A} \in K(\Gamma)$, то $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \varphi$. А значит $\varphi \in Th(K)$. Таким образом, получаем, что $\Gamma \subseteq Th(K)$.

Предложение 21.5 доказано.

Предложение 21.6. Класс моделей K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = K(Th(K))$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть класс K аксиоматизируем. Тогда, по Определению 21.3, найдется такое множество предложений Γ, что $K = K(\Gamma)$.

По Предложению 21.4 выполнено $K \subseteq K(Th(K))$.

С другой стороны, пусть $\mathfrak{A} \in K\big(Th(K)\big)$. Тогда $\mathfrak{A} \vDash Th(K)$. А так как $\Gamma \subseteq Th(K)$, то $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. Следовательно, $\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K$. Таким образом получаем, что $K\big(Th(K)\big) \subseteq K$.

($\Leftarrow$) Пусть $K = K(Th(K))$. Так как $Th(K) \subseteq S(\sigma)$, то класс K аксиоматизируем.

Предложение 21.6 доказано.

Следствие 21.7. Для любого аксиоматизируемого класса K существует наибольшее по включению множество аксиом. Это множество в точности $Th(K)$.

Доказательство: упражнение.

Предложение 21.8. Пусть $K -$ аксиоматизируемый класс. Тогда если $\mathfrak{A} \in K$ и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \in K$ (т.е. аксиоматизируемый класс замкнут относительно элементарной эквивалентности).

Доказательство. Пусть $K -$ аксиоматизируемый класс. Тогда, по Определению 21.3, найдется такое множество предложений Γ, что $K = K(\Gamma)$. Так как $\mathfrak{A} \in K$, то $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. Так как $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то для любого предложения

$\varphi \in S(\sigma)$ выполенео $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \vDash \varphi$. Следовательно, $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$. А это означает, что $\mathfrak{B} \in K$.

Предложение 21.8 доказано.

Предложение 21.9. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq S(\sigma)$ и $K_1, K_2 \subseteq K_\sigma$. Тогда

a) Если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, то $K(\Gamma_2) \subseteq K(\Gamma_1)$.

b) Если $K_1 \subseteq K_2$, то $Th(K_2) \subseteq Th(K_1)$.

Доказательство.

a) Пусть $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Рассмотрим $\mathfrak{A} \in K(\Gamma_2)$. Очевидно, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma_2$. Следовательно, $\mathfrak{A} \vDash \Gamma_1$. Значит, $\mathfrak{A} \in K(\Gamma_1)$. Таким образом, мы получили, что $K(\Gamma_2) \subseteq K(\Gamma_1)$.

b) Пусть $K_1 \subseteq K_2$. Рассмотрим $\varphi \in Th(K_2)$. Очевидно, что $K_2 \vDash \varphi$. Следовательно, $K_1 \vDash \varphi$. Значит, $\varphi \in Th(K_1)$. Таким образом, мы получили, что $Th(K_2) \subseteq Th(K_1)$.

Предложение 21.9 доказано.

Замечание 21.10. В общем случае не верно, что

a) $K = K(Th(K))$;

b) $\Gamma = Th\big(K(\Gamma)\big)$.

Доказательство. *a)* Пусть $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; \cdot, +, 0, 1 \rangle$ и пусть $K = \{\mathfrak{N}\}$. Существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M} \vDash Th(\mathfrak{N})$ и $\|\mathfrak{M}\|$ более чем счетная. Следовательно, $\mathfrak{M} \ncong \mathfrak{N}$. А значит $\mathfrak{M} \notin K$.

С другой стороны, так как $\mathfrak{M} \vDash Th(\mathfrak{N}) = Th(K)$, то $\mathfrak{M} \in K(Th(K))$. Следовательно, $\mathfrak{M} \in K(Th(K) \setminus K$, т.е. $K \neq K(Th(K))$.

b) Пусть $\Gamma = \emptyset$. Тогда $K(\Gamma) = K_\sigma$. Следовательно,

$Th\big(K(\Gamma)\big) = Th(K_\sigma) = \{\varphi \in S(\sigma) |\ \varphi - \text{тождествено истино}\} \neq \emptyset$. Таким образом, мы получили, что $\Gamma \neq Th\big(K(\Gamma)\big)$.

Замечание 21.10 доказано.

Следствие 21.11. Не каждый класс моделей аксиоматизируем.

Доказательство: упражнение.

Предложение 21.12. $\Gamma = Th((K(\Gamma))$ тогда и только тогда, когда Γ является теорией.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Очевидно.

($\Leftarrow$) Пусть Γ является теорией. Очевидно, что $\Gamma \subseteq Th((K(\Gamma))$. Допустим, что $\Gamma \neq Th((K(\Gamma))$. Тогда найдется такое предложение $\varphi \in S(\sigma)$, что $\varphi \in Th((K(\Gamma))$ и $\varphi \notin \Gamma$. Так как $\Gamma -$ теория, то $\Gamma \nvdash \varphi$. Следовательно, множество предложений $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} -$ непротиворечиво. А значит, по Теореме о существовании модели, найдется такая модель $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Следовательно, с одной стороны, так как $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, то $\mathfrak{A} \in K(\Gamma)$. И, с другой стороны, так как $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi$, то $\mathfrak{A} \nvDash \varphi$. Значит, $\varphi \notin Th(K(\Gamma))$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, $\Gamma = Th((K(\Gamma))$.

Предложение 21.12 доказано.

Следствие 21.13. Отображения $K \to Th(K)$ и $\Gamma \to K(\Gamma) -$ взаимно обратные, т.е. устанавливающие взаимно однозначное соответствие между аксиоматизируемыми классами и теориями.

Доказательство: упражнение.

Определение 21.14. Класс K называется ***конечно аксиоматизируемым,*** если существует конечное множество предложений Γ такое, что $K = K(\Gamma)$.

Замечание 21.15. Класс K является конечно аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда существует предложение $\varphi \in S(\sigma)$ такое, что

$K = K(\{\varphi\})$.

Доказательство.

(⇒) Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ и $K = K(\Gamma)$. Положим $\varphi = \psi_1 \& \dots \& \psi_n$. Тогда $K = K(\{\varphi\})$.

(⇐) Очевидно.

Замечание 21.15 доказано.

Предложение 21.16. Если $K = K(\{\varphi\})$, то $\overline{K} = K_\sigma \backslash K = K(\{\neg\varphi\})$.

Доказательство.

$\overline{K} = K_\sigma \backslash K = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma | \mathfrak{A} \notin K\} = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma | \mathfrak{A} \nvDash \varphi\} = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma | \mathfrak{A} \vDash \neg\varphi\} = K(\{\neg\varphi\})$.

Предложение 21.16 доказано.

Следствие 21.17. Класс моделей K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс моделей $\overline{K}$ конечно аксиоматизируем.

Доказательство: упражнение.

Теорема 21.18. Класс моделей K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда классы моделей K и $\overline{K}$аксиоматизируемы.

Доказательство.

(⇒) Если класс K конечно аксиоматизируем, то, по Следствию 20. 17, класс $\overline{K}$ также конечно аксиоматизируем. Следовательно, классы K и $\overline{K}$ аксиоматизируемы.

(⇐) Пусть классы K и $\overline{K}$ аксиоматизируемы. Тогда существуют такие множества предложений $\Gamma, \Delta \in S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$ и $\overline{K} = K(\Delta)$.

Допустим, что множество $\Gamma \cup \Delta$ непротиворечиво. Тогда, по Теореме о существовании модели, найдется такая модель $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma \cup \Delta$. Из того, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, следует, что $\mathfrak{A} \in K$. А из того, что $\mathfrak{A} \vDash \Delta$, следует, что $\mathfrak{A} \in \overline{K}$. Приходим к противоречию, так как $K \cap \overline{K} = \emptyset$.

Следовательно, множество $\Gamma \cup \Delta$ противоречиво. Тогда существуют конечные множества предложений $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и $\Delta_0 \subseteq \Delta$ такие, что секвенция $\Gamma_0, \Delta_0 \vdash$ доказуема. Покажем, что $K = K(\Gamma_0)$:

Пусть $\mathfrak{A} \in K = K(\Gamma)$. Тогда $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. А так как $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, то $\mathfrak{A} \vDash \Gamma_0$. Следовательно, $K \subseteq K(\Gamma_0)$.

Пусть теперь $\mathfrak{A} \in K(\Gamma_0)$. Допустим, что $\mathfrak{A} \notin K$. Тогда $\mathfrak{A} \in \overline{K}$. А так как $\overline{K} = K(\Delta)$, то $\mathfrak{A} \vDash \Delta$. Следовательно, $\mathfrak{A} \vDash \Delta_0$. А значит, $\mathfrak{A} \vDash \Gamma_0 \cup \Delta_0$. А это противоречит тому, что секвенция $\Gamma_0, \Delta_0 \vdash$ доказуема. Получаем, что $\mathfrak{A} \in K$. Значит, $K(\Gamma_0) \subseteq K$.

Таким образом, мы доказали, что $K = K(\Gamma_0)$. Аналогично доказывается, что $\overline{K} = K(\Delta_0)$.

Теорема 21.18 доказана.

§22. Универсально и экзистенциально аксиоматизируемые классы

Определение 22.1. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. Будем говорить, что модель $\mathfrak{A}$ является ***подмоделью*** модели $\mathfrak{B}$ (обозначается $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), если

1. $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;
2. Для любых $P^n, f^n, c \in \sigma$ и для любых $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняются следующие условия:
   a. $\mathfrak{A} \vDash P(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash P(a_1, \dots, a_n)$;
   b. $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$;
   c. $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Определение 22.2. Пусть $\mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $A \subseteq |\mathfrak{B}|$. Будем говорить, что множество A ***замкнуто относительно операций*** в модели $\mathfrak{B}$, если

1. Для любого функционального символа $f^n \in \sigma$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ имеем $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in A$;
2. Для любой константы $c \in \sigma$ имеем $c^{\mathfrak{B}} \in A$.

Определение 22.3. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. Будем говорить, что модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ***элементарно эквивалентны*** (и обозначать $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$.

Определение 22.4. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. Будем говорить, что модель $\mathfrak{A}$ является ***элементарной подмоделью*** модели $\mathfrak{B}$ (обозначается $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$), если

1. $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;
2. Для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Предложение 22.5. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда для любого терма $t \in T(\sigma)$, где $FV(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$, и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеет место $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по построению терма.

1. Пусть $t = x_1$. Тогда $t^{\mathfrak{A}}(a_1) = a_1 = t^{\mathfrak{B}}(a_1)$.

2. Пусть $t = c \in \sigma$. Тогда, по определению подмодели получим $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}$.

3. Пусть $t = f(t_1, \dots, t_n)$, где $f \in \sigma, t_1, \dots, t_n \in T(\sigma)$ и $FV(t_1, \dots, t_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда, по Определению значения терма на модели, получим $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n))$. Далее, по индукционному предположению получаем

$$f^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\right) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)).$$

Таким образом, получаем $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$.

Предложение 22.5 доказано.

Предложение 22.6. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда для любой бескванторной формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеет место $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по построению формулы.

1. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n))$. Тогда условие $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ равносильно условию $t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$. Из Предложения 22.5 следует, что $t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$ и $t_2^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$. Следовательно, получим $t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$. А это равенство, в свою очередь, равносильно условию $\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

2. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = P(t_1, \dots, t_m)$, где $P \in \sigma, t_1, \dots, t_m \in T(\sigma)$ и $FV(t_1, \dots, t_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда, по определению истинности формулы на модели, получаем:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash P\left(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\right).$$

Из Предложения 22.5 следует, что $t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_i^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$ длялюбого $i \in \{1, \dots, m\}$. Следовательно,

$$\mathfrak{A} \vDash P\left(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash P\left(t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)\right).$$

А это, в свою очередь, равносильно условию $\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

3. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1 \& \varphi_2)$. Тогда, по определению истинности формулы на модели, получаем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ и } \mathfrak{A} \vDash \varphi_2(a_1, \dots, a_n).$$

По индукционному предположению имеем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi_i(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi_i(a_1, \dots, a_n), \text{ где } i \in \{1,2\}.$$

Следовательно, получаем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ и } \mathfrak{B} \vDash \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

4. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Тогда, по определению истинности формулы на модели, получаем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ или } \mathfrak{A} \vDash \varphi_2(a_1, \dots, a_n).$$

По индукционному предположению имеем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi_i(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi_i(a_1, \dots, a_n), \text{ где } i \in \{1,2\}.$$

Следовательно, получаем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ или } \mathfrak{B} \vDash \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

5. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \neg\varphi_1$. Тогда, по определению истинности формулы на модели, получаем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \varphi_1(a_1, \dots, a_n).$$

По индукционному предположению имеем

$$\mathfrak{A} \nvDash \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \nvDash \varphi_1(a_1, \dots, a_n).$$

Следовательно, получим

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \nvDash \varphi_1(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Теорема 22.7. (Критерий элементарного вложения) Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$, имеющей вид $\exists x\, \psi(x, y_1, \dots, y_n)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n).$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists x\, \psi(x, y_1, \dots, y_n)$ и $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда, так как $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, то по определению элементарной подмодели, выполнено:

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Далее, по определению истинности формулы на модели получаем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \exists x\, \psi(x, y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n).$$

И еще раз используя определение элементарной подмодели, получаем

$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n)$, поэтому

$\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n)$.

($\Leftarrow$) Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists x\, \psi(x, y_1, \dots, y_n)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n).$$

Покажем, что для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Представим формулу φ в предваренной нормальной форме. Т.е., пусть

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ и формула $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ – бескванторная.

Будем доказывать индукцией по количеству кванторов m.

1. Пусть $m = 0$. Тогда формула $\varphi -$ бескванторная. Следовательно верность утверждения следует из Предложения 22.6.

2. Допустим, что для любой формулы, содержащей m кванторов утверждение верно. Докажем, что утверждение будет верно и для формулы, содержащей $m + 1$ квантор.

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists y \varphi'(y, x_1, \dots, x_n)$, где формула φ' содержит ровно m кванторов. Тогда, по определению истинности формулы на модели, имеем

$$\mathfrak{A} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n).$$

Тогда, по индукционному предположению, и в силу того, что $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ получим

$$\exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \exists c \in |\mathfrak{B}|: \mathfrak{B} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n).$$

И, следовательно,

$$\mathfrak{A} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n).$$

С другой стороны, из условия Теоремы вытекает

$$\mathfrak{B} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n).$$

По индукционному предположению получаем

$$\exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n).$$

И, следовательно,

$$\mathfrak{B} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n).$$

Пусть теперь $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \forall y \varphi'(y, x_1, \dots, x_n)$, где формула φ'содержит ровно m кванторов. Тогда

$$\mathfrak{A} \vDash \forall y \varphi'(y, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \neg \exists y \neg \varphi'(y, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \exists y \neg \varphi'(y, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \nvDash \exists y \neg \varphi'(y, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \forall y \varphi'(y, x_1, \dots, x_n).$$

Теорема 22.7 доказана.

Рассмотрим модель $\mathfrak{A} = \langle A;\ \sigma \rangle$. Пусть $C_A = \{c_a \mid a \in A\} -$ множество констант, такое, что $C_A \cap \sigma = \emptyset$ и для любых $a, b \in A$ выполняется условие

$$a \neq b \ \Rightarrow c_a \neq c_b.$$

Расширим сигнатуру σ следующим образом: $\sigma_A = \sigma \cup C_A$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{A}_A$ сигнатуры σ такую, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_A \upharpoonright \sigma_A$, и для любого $a \in A$ имеем $c_a^{\mathfrak{A}_A} = a$.

Определение 22.8. Пусть $\mathfrak{A} \in K_\sigma$. ***Элементарной диаграммой*** модели $\mathfrak{A}$ называется множество предложений

$$D(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \varphi - \text{бескванторное и } \mathfrak{A}_A \vDash \varphi\}.$$

Определение 22.9. Пусть $\mathfrak{A} \in K_\sigma$. ***Полной диаграммой*** модели $\mathfrak{A}$ называется множество предложений

$$FD(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \vDash \varphi\}.$$

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, тогда $A = |\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}| = B$. Обозначим $\mathfrak{B}_A = \mathfrak{B}_B \upharpoonright \sigma_A$.

Предложение 22.10. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. Тогда

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{B}_A \vDash D(\mathfrak{A}).$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Возьмём предложение $\varphi \in D(\mathfrak{A})$. Тогда существует такая бескванторная формула $\psi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$ и такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, что $\varphi = \psi\left(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}\right)$. Следовательно, получим

$$\varphi \in D(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A}_A \vDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A}_A \vDash \psi\left(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}\right) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B}_A \vDash \psi\left(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}\right) \Rightarrow \mathfrak{B}_A \vDash \varphi.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{B}_A \vDash D(\mathfrak{A})$.

Возьмём бескванторную формулу $\psi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$. Тогда для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ имеем:

$$\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_A \vDash \psi(\mathrm{c}_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Leftrightarrow \psi(\mathrm{c}_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \in D(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B}_A \vDash \psi(\mathrm{c}_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n).$$

Следовательно, по определению, получаем, что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предложение 22.10 доказано.

Предложение 22.11. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $A \subseteq B$. Тогда

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B}_A \vDash FD(\mathfrak{A}).$$

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$. Возьмём предложение $\varphi \in FD(\mathfrak{A})$. Существует такая формула $\psi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$ и такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, что $\varphi = \psi(\mathrm{c}_{a_1}, \dots, c_{a_n})$. Следовательно, получим

$$\varphi \in FD(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A}_A \vDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A}_A \vDash \psi(\mathrm{c}_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B}_A \vDash \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Rightarrow \mathfrak{B}_A \vDash \varphi.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{B}_A \vDash FD(\mathfrak{A})$. Возьмём формулу $\psi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$. Тогда для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ имеем

$$\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_A \vDash \psi(\mathrm{c}_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Leftrightarrow \psi(\mathrm{c}_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \in FD(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B}_A \vDash \psi(\mathrm{c}_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n).$$

Следовательно, по Определению 22.4, получим, что $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

Предложение 22.11 доказано.

Следствие 22.12. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. Тогда

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B} \vDash Th(\mathfrak{A}).$$

Доказательство: упражнение.

Замечание 22.13. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. Тогда

a. $D(\mathfrak{A}) \subseteq FD(\mathfrak{A})$;

b. $Th(\mathfrak{A}) \subseteq FD(\mathfrak{A})$;

c. $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \;\Rightarrow\; \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$;

d. $Th(\mathfrak{A}) \cup D(\mathfrak{A}) \subseteq FD(\mathfrak{A})$.

Доказательство: упражнение.

Определение 22.14. Пусть $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) -$ бескванторная формула сигнатуры σ. Тогда формула вида $\exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ называется ***экзистенциальной формулой*** (или $\exists$-формулой), а формула вида $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ называется ***универсальной формулой*** (или $\forall$-формулой).

Определение 22.15. Говорят, что класс K ***замкнут относительно подсистем***, если вместе с каждой своей системой он содержит все ее подсистемы, т.е. если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ выполняется условие

$$(\mathfrak{A} \in K \text{ и } \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{B} \in K.$$

Определение 22.16. Говорят, что класс K ***замкнут относительно надсистем***, если вместе с каждой своей системой он содержит все ее надсистемы, т.е. если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ выполняется условие

$$(\mathfrak{A} \in K \text{ и } \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}) \Rightarrow \mathfrak{B} \in K.$$

Определение 22.17. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **$\exists$-теорией** класса K называется множество предложений

$$Th_\exists(K) = \{\varphi \in Th(K) | \varphi - \exists - \text{формула}\}.$$

Определение 22.18. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **$\forall$-теорией** класса K называется множество предложений

$$Th_\forall(K) = \{\varphi \in Th(K) | \varphi - \forall - \text{формула}\}.$$

Предложение 22.19. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда

a. $K \subseteq K(Th_\exists(K))$;
b. $K \subseteq K(Th_\forall(K))$.

Доказательство. a) Пусть $\mathfrak{A} \in K$. Выберем предложение $\varphi \in Th_\exists(K)$. Очевидно, что из $\varphi \in Th_\exists(K)$ следует, что $\varphi \in Th(K)$. А это означает, что $K \vDash \varphi$, в частности $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Таким образом, получаем, что $\mathfrak{A} \in K(Th_\exists(K))$.

b) Пусть $\mathfrak{A} \in K$. Выберем предложение $\varphi \in Th_\forall(K)$. Очевидно, что из $\varphi \in Th_\forall(K)$ следует, что $\varphi \in Th(K)$. А это означает, что $K \vDash \varphi$, в частности $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Таким образом, получаем, что $\mathfrak{A} \in K(Th_\forall(K))$.

Предложение 22.19 доказано.

Определение 22.20. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Класс K называется

$\exists$-***аксиоматизируемым***, если существует такое множество $\exists$-предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$.

Определение 22.21. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Класс K называется

$\forall$-***аксиоматизируемым***, если существует такое множество $\forall$-предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$.

Теорема 22.20. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда

a) Класс $K -$ $\exists$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = K(Th_\exists(K))$.

b) Класс $K -$ $\forall$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = K(Th_\forall(K))$.

Доказательство.

a) ($\Rightarrow$) Пусть класс $K -$ $\exists$-аксиоматизируем, значит существует такое множество $\exists$-предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$. Очевидно, что тогда

$\Gamma \subseteq Th_{\exists}(K)$. По Предложению 22.19 выполнено $K \subseteq K(Th_{\exists}(K))$. Покажем, что $K(Th_{\exists}(K)) \subseteq K$.

Пусть $\mathfrak{A} \in K(Th_{\exists}(K))$. Тогда $\mathfrak{A} \vDash Th_{\exists}(K)$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. Поэтому $\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K$. Мы показали, что $K(Th_{\exists}(K)) \subseteq K$, значит,

$K = K(Th_{\exists}(K))$.

($\Leftarrow$) Пусть $K = K(Th_{\exists}(K))$. Так как множество $\exists$-предложений $Th_{\exists}(K) \subseteq S(\sigma)$, то класс K $\exists$-аксиоматизируем.

b) ($\Rightarrow$) Пусть класс $K -$ $\forall$-аксиоматизируем, значит существует такое множество $\forall$-предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$. Очевидно, что тогда $\Gamma \subseteq Th_{\forall}(K)$. По Предложению 22.19 выполнено $K \subseteq K(Th_{\forall}(K))$. Покажем, что $K(Th_{\forall}(K)) \subseteq K$.

Пусть $\mathfrak{A} \in K(Th_{\forall}(K))$. Тогда $\mathfrak{A} \vDash Th_{\forall}(K)$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$.

Поэтому $\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K$. Мы показали, что $K(Th_{\forall}(K)) \subseteq K$, значит,

$K = K(Th_{\forall}(K))$.

($\Leftarrow$) Пусть $K = K(Th_{\forall}(K))$. Так как множество $\forall$-предложений $Th_{\forall}(K) \subseteq S(\sigma)$, то класс K $\forall$-аксиоматизируем.

Теорема 22.20 доказана.

Теорема 22.21. Пусть класс $K \subseteq K_{\sigma} -$ аксиоматизируем. Тогда

a) Класс $K -$ $\forall$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.

b) Класс $K -$ $\exists$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно надсистем.

Доказательство. Так как класс $K -$ аксиоматизируем, то найдется такое множество предложений $\Gamma \in S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$.

a) $\Rightarrow$) Пусть класс $K -$ $\forall$-аксиоматизируем. Тогда $\Gamma = Th_{\forall}(K)$. Выберем системы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_{\sigma}$ такие, что $\mathfrak{B} \in K$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Пусть $\varphi \in \Gamma$. Тогда предложение φ имеет вид $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$, где формула $\psi(x_1, \dots, x_n) -$ бескванторная. Тогда получим, что $\mathfrak{B} \vDash \varphi$, т.е. $\mathfrak{B} \vDash \forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$. Следовательно, по определению истинности формулы на модели, получим, что для любых $b_1, .., b_n \in |\mathfrak{B}|$ имеем $\mathfrak{B} \vDash \psi(b_1, \dots, b_n)$.А так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то и для любых $a_1, .., a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеем $\mathfrak{B} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$. Далее, по Предложению 22.6 получаем, что для любых $a_1, .., a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполнено $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$. Следовательно, $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Таким образом, мы получили, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. Значит, $\mathfrak{A} \in K$, т.е. класс K замкнут относительно подсистем.

($\Leftarrow$) Пусть класс K замкнут относительно подсистем, $K = K(Th(K))$. Рассмотрим $\Gamma \leftrightharpoons Th_{\forall}(K)$ и покажем, что $K(\Gamma) = K$. По Предложению 22.19 выполнено $K \subseteq K(Th_{\forall}(K))$, то есть $K \subseteq K(\Gamma)$. Поэтому осталось показать, что $K(\Gamma) \subseteq K$. Рассмотрим произвольную модель $\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K(Th_{\forall}(K))$.

<u>*Случай 1.*</u> Пусть множество предложений $\Gamma \cup D(\mathfrak{A}) -$ противоречиво. Тогда существуют такие предложения $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ и $\psi_1, \dots, \psi_k \in D(\mathfrak{A})$, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_k \vdash$ доказуема.

Пусть $\psi = \psi_1 \& \dots \& \psi_k$. Очевидно, что $\psi \in D(\mathfrak{A})$. Тогда существуют бескванторная формула $\xi(x_1, \dots, x_m)$ и элементы $a_1, \dots, a_m \in |\mathfrak{A}|$ такие, что $\psi = \xi\left(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}\right)$. Тогда имеем:

$$\cfrac{\cfrac{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \xi\left(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}\right) \vdash}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \neg\xi\left(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}\right)}}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m)}$$

Так как секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m)$ доказуема, то она тождественно истинна. Поскольку $K \vDash \Gamma$, то $K \vDash \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Следовательно, $K \vDash \forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m)$. А это означает, что

$$\forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m) \in Th_{\forall}(K) = \Gamma.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A} \vDash \forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m), \text{ т.е. } \mathfrak{A} \vDash \neg\xi(a_1, \dots, a_m).$$

Тогда получим, что

$$\mathfrak{A}_A \vDash \neg\xi\left(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}\right), \text{ т.е. } \neg\psi = \neg\xi\left(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}\right) \in D(\mathfrak{A}).$$

Таким образом, мы пришли к противоречию с $\psi \in D(\mathfrak{A})$.

<u>*Случай 2.*</u> Пусть множество предложений $\Gamma \cup D(\mathfrak{A})$ непротиворечиво. Тогда, по теореме о существовании модели, найдется такая модель $\mathfrak{B}_A$, что $\mathfrak{B}_A \vDash \Gamma \cup D(\mathfrak{A})$. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_A \upharpoonright \sigma_A$. Очевидно, что тогда $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$. Следовательно, $\mathfrak{B} \in K$.

С другой стороны, так как $\mathfrak{B}_A \vDash D(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Следовательно, $\mathfrak{A} \in K$. Стало быть, $K(Th_\forall(K)) \subseteq K$.

Таким образом, мы показали, что $K = K(Th_\forall(K))$, т.е. класс K является $\forall$- аксиоматизируемым.

b) ($\Rightarrow$) Пусть класс K является $\exists$-аксиоматизируемым. Тогда $K = K(\Gamma)$, где любая формула $\varphi \in \Gamma$ является $\exists$-формулой.

Рассмотрим модели $\mathfrak{A} \in K$ и $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$. Покажем, что $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$.

Пусть $\varphi \in \Gamma$ имеет вид $\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$. Тогда из того, что $\mathfrak{A} \vDash \exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$ следует, что найдутся элементы $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$. А, так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{B}|$ и $\mathfrak{B} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$. Следовательно, $\mathfrak{B} \vDash \exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$, т.е. $\mathfrak{B} \vDash \varphi$. Таким образом, получили, что $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$.

($\Leftarrow$) Без доказательства.