Основы аналитической геометрии и линейной алгебры

По лекциям Чуркина В.А., ФИТ НГУ, I курс

2003, I семестр

Оглавление

Глава 1

Основы аналитической геометрии

1.1 Геометрические векторы

Часто встречаются величины, которые характеризуются не только каким-то численным значением, но и направлением. Например, в механике это сила, скорость, ускорение и т.д.

Работаем в рамках школьного курса геометрии, где есть неопределимые понятия точки, прямой, плоскости, пространства, отношений между ними, понятия расстояния, длины, площади, объёма и т.д.

ОПР 1.1.1 (Отношение $\sim$).

Пара точек (A, B) задаёт направленный отрезок AB. Будем говорить, что два направленных отрезка AB и CD находятся в отношении $\sim$ ($AB \sim CD$), если они имеют одинаковую длину и направление (или, что то же самое, если AB переводится в CD параллельным переносом).

УПР 1.1.2.

▷ Доказать, что $AB \sim CD \Leftrightarrow AC \sim BD \Leftrightarrow$ середины AD и BC совпадают.

Введённое отношение $\sim$ обладает следующими свойствами:
1) рефлексивность: $AB \sim AB$;
2) симметричность: $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$;
3) транзитивность: $AB \sim CD, CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$.

Все эти свойства легко получаются из свойств параллельных переносов. Свойство 1 следует из того, что тождественное преобразование плоскости - параллельный перенос; свойство 2 - из того, что обратное к параллельному переносу преобразование есть параллельный перенос; свойство 3 - из того, что композиция параллельных переносов есть также параллельный перенос.

УПР 1.1.3.

▷ Доказать, что множество всех направленных отрезков разбивается на классы отрезков, попарно находящихся в отношении $\sim$.

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности, называется *отношением эквивалентности*. Оно играет важную роль в математической логике, встретится оно и в алгебре; в частности, в курсах как алгебры, так и логики будет доказано, что отношение эквивалентности на любом множестве разбивает его на попарно непересекающиеся множества - *классы эквивалентности*, и будет дано понятие *фактор-множества* - множества классов эквивалентности. Неформально можно представлять себе переход к фактор-множеству как "склеивание" некоторых элементов множества по определённым признакам (например, для множества целых чисел - по свойству иметь одинаковые остатки при делении на какое-то фиксированное число).

ОПР 1.1.4 (Геометрический вектор).

Множество всех эквивалентных (то есть находящихся в отношении $\sim$) направленных отрезков называется геометрическим или свободным вектором ($\overrightarrow{AB}$).

Это определение отличается от школьного, где вектором назывался направленный отрезок. Дело в том, что операции над векторами или координаты вектора определяются именно для свободных векторов; кроме того, такое определение позволяет избавиться от некоторых логических неудобств, например, множества нулевых векторов $(AA, BB, ...)$.

Векторы будем обозначать строчными латинскими буквами (a, b, c...). Числа (скаляры) будем обозначать греческими буквами: λ, μ и т.д. Эти обозначения сохранятся и позже, в линейной алгебре.

Следствие 1.1.5.

▷ Всякий геометрический вектор можно отложить от любой точки.

ОПР 1.1.6 (Сложение векторов)**.**

Сложение геометрических векторов определяется "правилом треугольника". Пусть даны два вектора a и b. От произвольной точки A отложим вектор, равный a; от его конца (обозначим его B) отложим вектор, равный b. Пусть его конец - C. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ и будет суммой a + b.

Из определения следует, что сумма нескольких векторов $a_1 + a_2 + ... + a_n$ (понимаемая как $((a_1 + a_2) + ...) + a_n$) находится по "правилу многоугольника", когда от конца вектора a_i откладывается вектор, равный a_{i+1}, и полученная сумма будет равна вектору, соединяющему начало a_1 с концом a_n.

УПР 1.1.7.

▷ Доказать, что сложение по правилу треугольника не зависит от выбора представителей, то есть от того, от какой точки откладывать первый вектор.

Сложение векторов удовлетворяет следующим свойствам:
1. $\forall a, b, c\ (a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность*);
2. $\forall a, b\ a + b = b + a$ (*коммутативность*);
3. $\exists 0 \mid \forall a\ a + 0 = 0 + a = a$ (существование *нулевого вектора*);
4. $\forall a \exists (-a) \mid a + (-a) = (-a) + a = 0$ (существование *противоположного вектора*).

Свойства 1 и 2 легко доказать, если представить соответственно четырёхугольник, образованный векторами a, b, c, (a + b) + c (в нём векторы a + b и b + c будут диагоналями) и параллелограмм, построенный на векторах a и b (его диагональ a + b).

Нулевой вектор - $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$ Действительно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$.

Противоположный для $\overrightarrow{AB}$ вектор - $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$. Существование противоположного вектора позволяет определить операцию вычитания: $a - b := a + (-b)$.

Длину вектора a будем обозначать $|a|$.

ОПР 1.1.8 (Умножение вектора на скаляр)**.**

Пусть a - вектор, $\lambda \in \mathbf{R}$ - скаляр. Тогда λa - это вектор, длина которого равна $|\lambda| \cdot |a|$, при $\lambda > 0$ λa и a имеют одинаковое направление, при $\lambda < 0$ - противоположное.

УТВ 1.1.9.

▷ Сложение векторов и умножение на скаляр связаны следующими свойствами:
1. $\forall \lambda \in \mathbf{R}\ \forall a, b\ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}\ \forall a\ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}\ \forall a\ (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
4. $\forall a\ 1 \cdot a = a$.

▷ *Доказательство.*

- Этап 1: $\lambda = k, \mu = l \in \mathbf{Z}$. Тогда
$$ka = \begin{cases} \underbrace{a + ... + a}_{k \text{ раз}} & \text{при } k > 0 \\ 0 & \text{при } k = 0 \\ \underbrace{-a - ... - a}_{k \text{ раз}} & \text{при } k < 0 \end{cases}$$
Требуемые свойства имеют вид
$$\begin{cases} k(a + b) = ka + kb \\ (k + l)a = ka + la \\ (kl)a = k(la) \\ 1 \cdot a = a \end{cases}$$
Это легко проверить, используя свойства сложения.
- Этап 2: $\lambda, \mu \in \mathbf{Q}$. Тогда можно считать, что $\lambda = \frac{k}{n},\ \mu = \frac{l}{n},\ k, l, n \in \mathbf{Z}$. Требуемые свойства получаются умножением на n или n^2.
- Этап 3: $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Можно считать, что
$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n,\ \lambda_n \in \mathbf{Q};\ \mu = \lim_{n \to \infty} \mu_n,\ \mu_n \in \mathbf{Q}.$$
Далее надо перейти к пределу в равенствах $\lambda_n(a + b) = \lambda_n a + \lambda_n b$ и др.

□

1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость, базис

ОПР 1.2.1 (Линейная комбинация).
Пусть $a_1, ..., a_n$ - последовательность векторов, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - последовательность скаляров. Тогда выражение $\lambda_1 a_1, ..., \lambda_n a_n$ называется линейной комбинацией векторов $a_1, ..., a_n$.

ОПР 1.2.2 (Линейная зависимость и независимость).
Система векторов $a_1, ..., a_n$ называется линейно зависимой, если $\exists$ нетривиальная (то есть с ненулевыми коэффициентами) линейная комбинация этих векторов, равная нулю, и линейно независимой иначе.

ОПР 1.2.3 (Базис).
Базис - это максимальная (по включению) линейно независимая система векторов.

Следует заметить, что такое определение не гарантирует, что любой базис содержит одно и то же число векторов; это означает лишь, что к базису нельзя добавить ещё один вектор, не сделав систему линейно зависимой. В принципе возможен случай, когда некоторую систему векторов можно до бесконечности пополнять векторами без нарушения линейной независимости; это случай бесконечномерного пространства, который мы рассматривать не будем.

Теорема 1.2.4.

▷ Всякий вектор можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса, причём это разложение единственно.

▷ *Доказательство.*

- Пусть a - вектор, $e_1, ..., e_n$ - базис. Если $a = 0$, то $a = 0 \cdot e_1 + ... + 0 \cdot e_n$.
  Пусть $a \neq 0$. Тогда система $e_1, ..., e_n, a$ линейно зависима и $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \mid \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n + \mu a = 0$. Если $\mu = 0$, то система $e_1, ..., e_n$ линейно зависима и базисом не является. Значит, $\mu \neq 0$ и $a = -\frac{\lambda_1}{\mu} e_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\mu} e_n$.
- Докажем единственность. Пусть $a = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$. Тогда $(\alpha_1 - \beta_1) e_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0$ и в силу линейной независимости $e_1, ..., e_n$ $\alpha_i - \beta_i = 0 \; \forall i$.

□

Замечание 1.2.5.

▷ В доказательстве использовались только свойства скаляров и векторов из списка, без отсылок к геометрии, а значит, это доказательство не потеряет силу и в линейной алгебре.

Для геометрических векторов:

- нулевое пространство (состоящее только из нулевого вектора) базиса не имеет;
- на прямой любой ненулевой вектор образует базис;
- на плоскости и в трёхмерном пространстве, как известно из школьной геометрии, любой вектор разлагается в линейную комбинацию соответственно двух неколлинеарных и трёх некомпланарных (то есть, по сути, линейно независимых) векторов путём параллельной проекции на стороны параллелограмма (рёбра параллелепипеда), построенного на этих векторах. Значит, эти векторы образуют базис.

ОПР 1.2.6 (Координатная строка).
Пусть вектор a разлагается по базису $e_1, ..., e_n$ в виде $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$. Тогда последовательность $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ называется координатной строкой. (В дальнейшем мы часто будем записывать координаты в виде не строк, а столбцов $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.)

УТВ 1.2.7.

▷ При сложении векторов соответствующие координаты их складываются, а при умножении вектора на скаляр каждая координата его умножается на этот скаляр.

▷ *Доказательство.*

- Пусть $a = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n, b = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$. Тогда $a + b = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n) e_n$, $\lambda a = (\lambda \alpha_1) e_1 + ... + (\lambda \alpha_n) e_n$.

□

ОПР 1.2.8 (Декартова система координат)**.**

Декартова система координат (ДСК) задаётся выбором точки O ("начала координат") и базиса $e_1, ..., e_n$. Если векторы базиса имеют длину 1 и попарно перпендикулярны, то соответствующая система координат называется прямоугольной (ПДСК). Координатой точки M считается координата её радиус-вектора, то есть вектора $\overrightarrow{OM}$.

1) На прямой базисный вектор один, точке M соответствует вектор $\overrightarrow{OM} = xe,\ x \in \mathbf{R}$, то есть точка M определяется координатой x: M(x).

2) На плоскости через точку O проводятся две прямые в направлениях двух базисных векторов - *ось абсцисс* Ox и *ось ординат* Oy. Тогда $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$, где x, y - проекции вектора на одну ось параллельно другой. M определяется двумя координатами: M(x, y).

3) В пространстве осей уже три, по числу базисных векторов - Ox, Oy и *ось аппликат* Oz. Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{OM}$ получаются проецированием вектора на соответствующую ось параллельно плоскостям, включающим две другие оси (Oyz, Ozx, Oxy соответственно).

УТВ 1.2.9.

▷ Если в пространстве известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

▷ *Доказательство.*

- $\overrightarrow{OA} = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3,\ \overrightarrow{OB} = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2 + (z_2 - z_1)e_3$.

□

Деление отрезка в данном отношении:

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Пусть $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2), M(x, y, z)$. Тогда

$$\mu(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z).$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mu(x - x_1) = \lambda(x_2 - x) \\ \mu(y - y_1) = \lambda(y_2 - y) \\ \mu(z - z_1) = \lambda(z_2 - z) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda} \\ y = \dfrac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda} \\ z = \dfrac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda} \end{array}\right.$$

Другие системы координат:

1) Полярная система координат на плоскости.

$M \to (\rho, \varphi),\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$. ρ - длина вектора $\overrightarrow{OM}$, φ - угол в радианах между e и OM, где e - базисный вектор.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right.$$

2) Цилиндрическая система координат в пространстве.

Эта система во многом подобна полярной; точка M проецируется на плоскость Oxy в точку M', $M \to (\rho, \varphi, h)$, где ρ, φ - полярные координаты точки M', h - декартова z-координата M.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h \end{array}\right.$$

3) Сферическая система координат в пространстве.

$M \to (r, \varphi, \theta)$, где φ определяется как в цилиндрической системе, r - длина OM, θ - угол между OM и осью Oz $(0 \leq \theta \leq \pi)$.

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right.$$

Именно эта система наиболее близка к географической; разница лишь в том, что "широта" отсчитывается от полюса сферы радиуса r, а не от экватора, и нет понятия западной/восточной долготы.

1.3 Скалярное произведение векторов

ОПР 1.3.1 (Скалярное произведение)**.**

Пусть a, b - ненулевые векторы, φ - угол между ними. Тогда число

$$(a, b) := |a||b|\cos\varphi$$

называется скалярным произведением векторов a и b. Если a = 0 или b = 0, то (a, b) := 0.

В физике скалярное произведение обозначается просто $a \cdot b$ или ab.

Лемма 1.3.2.

▷ Пусть

$b \neq 0$ и $\bar{a}$ - ортогональная проекция вектора a на направление вектора b.

▷ Тогда

$(a, b) = (\bar{a}, b)$.

▷ *Доказательство.*

- $(a, b) = |a||b|\cos\varphi = (|a|\cos\varphi)|b| = |\bar{a}||b|\cos 0 = (\bar{a}, b)$.

□

УТВ 1.3.3 (Свойства скалярного произведения)**.**

▷ 1) $(a, b) = (b, a)$ (коммутативность);

2) $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$ (*однородность*);

3) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$ (*аддитивность*);

4) $(a, a) \geq 0, (a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (положительность).

▷ *Доказательство.*

- 1) $(a, b) = |a||b|\cos\varphi = |b||a|\cos\varphi = (b, a)$.
- 2) Рассмотрим три случая:
  а) $\lambda > 0$: $(\lambda a, b) = |\lambda a||b|\cos\varphi = \lambda|a||b|\cos\varphi = \lambda(a, b)$.
  б) $\lambda = 0$: $(0 \cdot a, b) = 0 = 0 \cdot (a, b)$.
  в) $\lambda < 0$: $(\lambda a, b) = |\lambda a||b|\cos(\pi - \varphi) = -\lambda|a||b|(-\cos\varphi) = \lambda|a||b|\cos\varphi = \lambda(a, b)$.
- 3) Если c = 0, то $(a + b, 0) = 0 = (a, 0) + (b, 0)$.
  Пусть $c \neq 0$, $\bar{a}, \bar{b}$ - ортогональные проекции векторов a и b на направление вектора c. Пусть e - вектор единичной длины в направлении c. Тогда $c = \gamma e$, $\bar{b} = \beta e$, $\bar{a} = \alpha e$.
  По лемме $(a + b, c) = (\overline{a + b}, c) = (\bar{a} + \bar{b}, c) = (\alpha e + \beta e, \gamma e) = ((\alpha + \beta)e, \gamma e) = (\alpha + \beta)\gamma(e, e) = (\alpha + \beta)\gamma$.
  $(a, c) + (b, c) = (\bar{a}, c) + (\bar{b}, c) = (\alpha e, \gamma e) + (\beta e, \gamma e) = \alpha\gamma + \beta\gamma$.
  Но для чисел $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.
- 4) $(a, a) = |a||a|\cos 0 = |a|^2 \geq 0$.
  $(a, a) = 0 \Leftrightarrow |a|^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

□

Следствие 1.3.4.

▷ 1. $|a| = \sqrt{(a, a)}$.

2. $\cos\varphi = \dfrac{(a, b)}{|a||b|}$ при $a \neq 0,\ b \neq 0$. $a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 0$.

3. Если $a = \sum\limits_i \alpha_i a_i,\ b = \sum\limits_j \beta_j b_j$, то $(a, b) = \sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_i \beta_j (a_i, b_j)$.

Базис $e_1, ..., e_n$ называется *ортонормированным* (ОНБ), если $|E_i| = 1, \ \forall i \neq j \ e_i \perp e_j$.

ОНБ (на которых фактически основана ПДСК) хороши тем, что в них очень просто вычисляется скалярное произведение и проекции произвольного вектора на векторы базиса.

4. Если $e_1, ..., e_n$ - ОНБ, $a = \sum_i \alpha_i e_i, \ b = \sum_j \beta_j e_j$, то $(a, b) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_i (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$.

5. Пусть $A(x_1, y_1, z_1), \ B(x_2, y_2, z_2)$ - координаты точек A и B в ПДСК. Тогда

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Теорема 1.3.5 (Формула разложения вектора по ортогональному базису.)**.**

▷ 1) Если e_1, e_2, e_3 - ортогональный базис, то $\forall a$

$$a = \frac{(a, e_1)}{e_1, e_1} e_1 + \frac{(a, e_2)}{e_2, e_2} e_2 + \frac{(a, e_3)}{e_3, e_3} e_3.$$

2) (следует из 1) Если e_1, e_2, e_3 - ОНБ, то $a = (a, e_1)e_1 + (a, e_2)e_2 + (a, e_3)e_3$.

▷ *Доказательство.*

- Пусть $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Умножим это равенство скалярно на e_j справа. Тогда

$$(a, e_j) = \alpha_j (e_j, e_j), \ \alpha_j = \frac{(a, e_j)}{e_j, e_j} e_j.$$

□

1.4 Векторное произведение

ОПР 1.4.1 (Векторное произведение)**.**
Вектор v называется векторным произведением векторов a и b, если:
1) $v \perp a, \ v \perp b$;
2) $|v| = S$, где S - площадь параллелограмма, построенного на a и b. Если φ - угол между векторами a и b, то $|v| = S = |a||b| \sin \varphi$;
3) тройка векторов a, b, v - правая, то есть, если общее начало векторов находится позади плоскости их концов, то их концы (в таком порядке) обходятся против часовой стрелки; равносильно - при закручивании правого винта от a к b по кратчайшему направлению направление его движения совпадает с направлением v.

Неясность с направлением возникает только тогда, когда a и b линейно зависимы; но тогда и $|v| = S = 0 \Rightarrow v = 0$.
Векторное произведение векторов a и b обозначается $[a, b]$. Иногда используется также обозначение, пришедшее из физики - $a \times b$.

УТВ 1.4.2 (Свойства векторного произведения)**.**

▷ 1) $[a, b] = -[b, a]$ (*антикоммутативность*);

2) $[\lambda a, b] = \lambda [a, b]$ (однородность);

3) $[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$ (аддитивность).

▷ *Доказательство.*

- 1) Сразу следует из определения.
- 2) Если $\lambda = 0$, равенство очевидно. Если $\lambda > 0$, то вектор a удлиняется в λ раз (не меняя направления), а значит, и вектор v удлинится в λ раз, не поменяв направления.

  Если $\lambda < 0$, то вектор a удлинится в $|\lambda|$ раз и изменит направление на противоположное. Площадь параллелограмма от этого тоже увеличится в $|\lambda|$ раз (замена a на (-a) не меняет площадь, поскольку $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$), значит, и v удлинится в $|\lambda|$ раз. Но, поскольку тройка векторов должна быть правой, v поменяет направление на противоположное. Это и означает умножение v на λ.
- 3) Если c = 0, то формула верна. Пусть $c \neq 0$. В силу предыдущего пункта можно считать, что $|c| = 1$.

  Пусть P - плоскость, ортогональная вектору c, $\bar{a}, \bar{b}, \overline{a + b}$ - ортогональные проекции соответствующих векторов на плоскость P. Тогда $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$. Кроме того, $[a, c] = [\bar{a}, c]$. $|[\bar{a}, c]| = |\bar{a}|$, поскольку вектор получается из $\bar{a}$ поворотом на $\pi/2$.

  Тогда $[a + b, c] = [\bar{a} + \bar{b}, c], [a, c] + [b, c] = [\bar{a}, c] + [\bar{b}, c]$. Поворотом на $\pi/2$ доказывается, что правые части равны.

□

Следствие 1.4.3.

$$\triangleright \left[\sum_i \alpha_i a_i, \sum_j \beta_j b_j\right] = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j [a_i, b_j].$$

Теперь наша задача - получить формулу для разложения векторного произведения по ОНБ e_1, e_2, e_3. Ограничимся только *правыми ОНБ*, то есть теми, которые образуют правую тройку векторов (или, что то же самое, $e_3 = [e_1, e_2]$; как нетрудно заметить, отсюда следует, что $[e_2, e_3] = e_1, \ [e_3, e_1] = e_2$).

Пусть $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \ b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$. Ввиду следствия

$$[a, b] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3.$$

Пусть в предложенной формуле $\alpha_3 = \beta_3 = 0$, то есть a и b лежат в координатной плоскости e_1, e_2. Тогда $[a, b] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3$.

Следовательно, площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, равна $|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$.

Число $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ называется *определителем матрицы второго порядка* $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$. Смысл определителя - ориентированная площадь параллелограмма:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \begin{cases} +S, & [a, b] = \lambda e_3, \ \lambda > 0; \\ -S & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если матрица обозначена буквой (например, A), то её определитель обозначается $\det A$ (от слова determinant). Если же матрица записана через свои элементы, то определитель обозначается так же, как сама матрица, но с прямыми вертикальными чертами вместо скобок:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} := \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

При такой записи следует, однако, понимать, что определитель - число, а не матрица, и говорить о строках или столбцах определителя смысла не имеет.

Тогда формула векторного произведения в координатах имеет вид:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Теперь, когда мы ввели три функции - скалярное и векторное произведения и определитель второго порядка - можно обобщить некоторые их свойства в виде определений.

ОПР 1.4.4 (Линейные, симметричные, нормированные функции)**.**

Функция f(a) векторного аргумента a называется линейной, если:

1) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$,

2) $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

Функция n векторных аргументов $f(a_1, ..., a_n)$ *называется n-линейной или полилинейной, если она линейна по каждому аргументу при фиксированных остальных.*

Функция n векторных аргументов $f(a_1, ..., a_n)$ *называется симметричной, если она не меняется при перестановке двух аргументов, и кососимметричной, если меняет знак.*

Скалярная функция n векторных аргументов $f(a_1, ..., a_n)$ *называется нормированной относительно базиса* $e_1, ..., e_n$, *если* $f(e_1, ..., e_n) = 1$.

Нетрудно видеть, что:

- скалярное произведение - билинейная симметричная функция, нормированная относительно любого ОНБ;
- векторное произведение - билинейная кососимметричная функция;
- определитель второго порядка - билинейная кососимметричная функция строк матрицы, нормированная относительно стандартного базиса (1, 0), (0, 1); можно рассматривать определитель и как функцию столбцов с теми же свойствами.

ОПР 1.4.5 (Смешанное произведение)**.**

Пусть даны три вектора a, b, c. Число $(a, b, c) := ([a, b], c)$ *называется смешанным произведением этих векторов.*

Из свойств скалярного и векторного произведений следует, что смешанное произведение - трилинейная функция, нормированная относительно правого ОНБ.

Если теперь e_1, e_2, e_3 - правый ОНБ, $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,\ b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,\ c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$, то по формулам для скалярного и векторного произведений получаем

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_1 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \gamma_3.$$

Это - *определитель матрицы третьего порядка* $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$.

Непосредственно из формулы вытекает, что определитель третьего порядка - кососимметричная функция строк матрицы. Если теперь записать в явном виде входящие в формулу определители второго порядка и перегруппировать слагаемые, мы получим

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 - \gamma_1\beta_2\alpha_3 - \beta_1\alpha_2\gamma_3 - \alpha_1\gamma_2\beta_3.$$

Из этой формулы видно, что определитель третьего порядка - кососимметричная функция столбцов матрицы, то есть при замене $\alpha \leftrightarrow \gamma$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ или $\beta \leftrightarrow \gamma$ определитель меняет только знак. Отсюда следует, что и смешанное произведение векторов - кососимметричная функция.

Следствие 1.4.6.

▷ $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$, в частности, $([a, b], c) = (a, [b, c])$.

▷ *Доказательство.*

- Из кососимметричности: $(a, b, c) = -(c, b, a)$. $(b, c, a) = -(c, b, a) = (c, a, b)$.
  $([a, b], c) = (a, b, c) = (b, c, a) = ([b, c], a) = (a, [b, c])$.

□

УТВ 1.4.7.

▷ Смешанное произведение (a, b, c) совпадает с ориентированным объёмом параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c, то есть равно $+$V, если тройка векторов правая, и -V, если левая.

▷ *Доказательство.*

- Выберем правый ОНБ e_1, e_2, e_3 так, чтобы векторы a и b лежали в плоскости e_1, e_2, а вектор c лежал в плоскости e_1, e_3.
  Тройку векторов a, b, c будем полагать правой. Если она левая, то по свойству кососимметричности изменится только знак смешанного произведения.
  Пусть θ - угол между c и e_3. Поскольку тройка правая, $\theta \le \pi/2$. Тогда $V = Sh = S|c|\cos\theta = |[a, b]||c|\cos\theta = ([a, b], c) = (a, b, c)$.

□

Следствие 1.4.8.

▷ $V = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) = 0$.

Замечание 1.4.9.

▷ Предыдущее следствие $((a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b))$ можно было доказать и рассматривая смешанное произведение как ориентированный объём.

1.5 Дополнительные свойства векторного произведения

УТВ 1.5.1 (Двойное векторное произведение)**.**

▷ $[[a, b], c] = (a, c)b - (b, c)a$.

▷ *Доказательство.*

- Выберем правый ОНБ так, чтобы $a = \alpha_1 e_1,\ b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,\ c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$. Сравним координаты в левой и правой частях произведения.
$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.\ [a,b] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\beta_2 \end{pmatrix}.\ [[a,b],c] = \begin{pmatrix} -\alpha_1\beta_2\gamma_2 \\ \alpha_1\beta_2\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$
$(a,c)b - (b,c)a = \alpha_1\gamma_1 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} - (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1\beta_2\gamma_2 \\ \alpha_1\beta_2\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

□

Из доказанного тождества следует, что $[a,[b,c]] = b(a,c) - c(a,b)$. Эту формулу неформально называют "формулой бац минус цаб".

УТВ 1.5.2 (Тождество Якоби)**.**

▷ $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$.

▷ *Доказательство.*

- Достаточно сложить выражения для всех трёх слагаемых, полученные по предыдущей формуле.

□

УТВ 1.5.3 (Скалярное произведение двух векторных произведений)**.**

▷ $([a,b],[c,d]) = \begin{vmatrix} (a,c) & (a,d) \\ (b,c) & (b,d) \end{vmatrix}$.

▷ *Доказательство.*

- $([a,b],[c,d]) = ([a,b],c,d) = ([[a,b],c],d) = ((a,c)b - (b,c)a, d) = (a,c)(b,d) - (b,c)(a,d)$.

□

УТВ 1.5.4 (Формула косинусов сферической геометрии)**.**

▷ Обычная формула косинусов на плоскости $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ доказывается с помощью скалярного произведения и связывает две стороны треугольника, угол между ними и противолежащую сторону. В сферической геометрии есть аналог этой формулы, изменившийся, правда, до неузнаваемости:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Здесь $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - "стороны" $BC,\ AC,\ AB$ сферического треугольника, то есть длины дуг больших окружностей сферы, проходящих через его вершины (в предположении, что радиус сферы равен 1) - они равны плоским углам $BOC,\ AOC,\ AOB$ соответственно. С - это двугранный угол, образованный плоскостями OAC и OBC, где О - центр сферы, причём γ - сторона, противоположная С.

Пусть a, b, c - векторы $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ соответственно. Их длины равны 1. Вектор [a,c] перпендикулярен плоскости OAC, вектор [b,c] - плоскости OAB. Угол С - это угол между этими двумя векторами. По формуле скалярного произведения

$$\cos C = \frac{([a,c],[b,c])}{|[a,c]||[b,c]|} = \frac{\begin{vmatrix} (a,b) & (a,c) \\ (c,b) & (c,c) \end{vmatrix}}{\sin\beta\sin\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

УТВ 1.5.5 (Формулы Крамера в размерностях 2 и 3)**.**

▷ а) Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \text{ или } x\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.\ (*)$$

Пусть $b' = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -\beta_1 \end{pmatrix}$, тогда $b' \perp b$. Умножим равенство $(*)$ скалярно на b'. Тогда $x(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1$, или $x\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$. Если a и b линейно независимы, то

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}.$$

Это и есть формулы Крамера для размерности 2.

б) Пусть дана система трёх линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2, \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases} \text{ или } x\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть a, b, c, d - соответствующие координатные столбцы. Умножим это равенство скалярно на [b,c]. Тогда получим уравнение $x(a, [b, c]) = (d, [b, c])$. Если a, b, c линейно независимы, то $(a, b, c) \neq 0$ и $x = \dfrac{(d, b, c)}{(a, b, c)}$, или

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}, z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}.$$

Это - формулы Крамера для размерности 3.

1.6 Замены базисов и декартовых систем координат

1) Пусть e_1, e_2 и e'_1, e'_2 - два базиса плоскости, старый и новый. Тогда

$$\begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2, \\ e'_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 \end{cases}$$

Матрица $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ (именно так!) называется *матрицей перехода* от старого базиса e_1, e_2 к новому e'_1, e'_2.
Как связаны координаты вектора в старом и новом базисе?
Пусть $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \alpha'_1 e'_1 + \alpha'_2 e'_2$. Заменив e'_1, e'_2 по формуле, получим равенства

$$\begin{cases} \alpha_1 = t_{11}\alpha'_1 + t_{12}\alpha'_2, \\ \alpha_2 = t_{21}\alpha'_1 + t_{22}\alpha'_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix}$$

(именно так, старые координаты через новые). Таким образом, старые координаты являются линейными функциями от новых.

2) Связь между декартовыми системами координат.

Пусть даны две ДСК Oe_1e_2 и $Oe'_1e'_2$ - старая и новая. Пусть $\overrightarrow{OO'} = x_0e_1 + y_0e_2$, e_1e_2 и $e'_1e'_2$ связаны матрицей перехода T. Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, $xe_1 + ye_2 = x_0e_1 + y_0e_2 + x'e'_1 + y'e'_2$.

Если заменить e'_1 и e'_2 с помощью матрицы T через e_1 и e_2, то получим

$$\begin{cases} x = x_0 + t_{11}x' + t_{12}y', \\ y = y_0 + t_{21}x' + t_{22}y'. \end{cases}$$

Это означает, что координаты точки M в старой и новой системах координат связаны аффинными формулами.

3) Для прямоугольных систем координат:

а) Новая получается из старой поворотом на угол φ. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

б) Очень похоже записывается матрица для отражения относительно прямой, повёрнутой относительно оси Ox на угол $\varphi/2$.

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

4) Параллельный перенос в матричном виде не выражается. В координатах он выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + x \\ \beta + y \end{pmatrix}.$$

1.7 Уравнения прямой на плоскости

1) Общее. Пусть дана некоторая ПДСК, (x_0, y_0) - некоторая точка прямой, $n = (a, b)$ - ***нормаль*** (вектор, перпендикулярный к прямой). Тогда для всякой точки прямой вектор, равный разности её радиус-вектора (x, y) и радиус-вектора выбранной точки (x_0, y_0), лежит на прямой и, значит, перпендикулярен n. В терминах скалярного произведения это можно записать так: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, или $ax + by = ax_0 + by_0$. Отсюда получаем общий вид уравнения

$$ax + by = c,\ a^2 + b^2 \neq 0.$$

Это уравнение сохраняет силу и в косоугольной ДСК, поскольку координаты точек в разных ДСК связаны аффинными преобразованиями.

Отсюда видно, что решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными - не что иное, как общая точка двух прямых, задаваемых этими уравнениями.

Если $b \neq 0$, уравнение можно переписать в виде $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, или $y = kx + l$. Это линейная функция, причём в прямоугольной системе k - ***угловой коэффициент*** (тангенс угла наклона прямой к оси Ox), l (в любой системе) - расстояние, на которое прямая сдвинута по оси Oy (то есть y-координата точки пересечения прямой с этой осью).

Если $b = 0$, то уравнение имеет вид $x = \frac{c}{a}$, или $x = p$. Это прямая, пересекающая ось Ox в точке p и параллельная Oy.

2) Нормальное уравнение в ПДСК. Пусть α - угол между нормалью n и Ox. Тогда $a = |n|\cos\alpha,\ b = |n|\sin\alpha$. В уравнении $ax + by = c$ будем считать $c = p|n|$, тогда уравнение перепишется в виде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

3) Следующее уравнение (в произвольной ДСК) годится только для прямых, пересекающих две координатные оси в двух <u>различных</u> точках $(a, 0)$ и $(0, b)$. Тогда уравнение прямой имеет вид $y = -\frac{b}{a}x + b$, или, после деления на b и перенесения x в левую часть,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это - уравнение в отрезках координатных осей.

Если $b = \infty$ (прямая параллельна Oy), то уравнение имеет вид $x/a = 1$. Аналогично, если прямая параллельна Ox, то уравнение имет вид $y/b = 1$.

4) Параметрическое уравнение. Пусть $r_0 = (x_0, y_0)$ - радиус-вектор произвольной точки прямой, u - ***направляющий вектор*** прямой (вектор, параллельный прямой). Тогда радиус-вектор произвольной точки прямой задаётся уравнением

$$r = r_0 + tu,\ u \neq 0,\ t \in \mathbf{R},$$

или в координатах:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2. \end{cases}$$

Если подставить эти выражения в уравнение $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ и разделить на t, получим $au_1 + bu_2 = 0$. Это соотношение позволяет получить параметрическое уравнение из общего и наоборот.

5) Каноническое уравнение. Выразим t из уравнений для координат:

$$t = \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}, \text{ или } \begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 \\ y - y_0 & u_2 \end{vmatrix} = 0.$$

6) Можно написать уравнение по двум точкам. Если известны две точки $M_0 = (x_0, y_0),\ M_1 = (x_1, y_1)$, то положим $r_0 := \overrightarrow{OM_0},\ u := \overrightarrow{M_0M_1}$. Подставив в каноническое уравнение, получим

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

1.8 Уравнения плоскости в пространстве

1) По аналогии с прямой можно рассмотреть ПДСК, взять произвольную точку (x_0, y_0, z_0) плоскости и нормаль (a, b, c). Тогда уравнение запишется в виде $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, или

$$ax + by + cz = d,\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Аналогичное уравнение верно и в косоугольной системе координат.

2) Нормальное уравнение. Выберем *стандартный ОНБ*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть α, β, γ - углы между n и векторами базиса. Тогда по формуле скалярного произведения $\cos\alpha = \dfrac{(n, e_1)}{|n| \cdot |e_1|}$, или

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

а само уравнение при $p := \dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ приобретает вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

3) В отрезках координатных осей (получается аналогично случаю для прямой):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4) Параметрическое уравнение получается аналогично прямой, но здесь нужно выбрать, кроме радиус-вектора r_0, уже два линейно независимых вектора u и v, лежащих в нашей плоскости.

$$r = r_0 + tu + sv,\ t, s \in \mathbf{R}, u \neq \lambda v.$$

В координатном виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1, \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2, \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3. \end{cases},\ r_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

5) Каноническое уравнение получается из параметрического:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6) Наконец, если известны три точки M_0, M_1, M_2, можно положить $r_0 = \overrightarrow{OM_0},\ u = \overrightarrow{M_0M_1},\ v = \overrightarrow{M_0M_2}$. Тогда получим уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

1.9 Уравнения прямой в пространстве

1) Поскольку в пространстве все точки имеют три координаты, общее уравнение уже не работает. Можно, однако, воспользоваться тем, что любые две пересекающиеся плоскости всегда пересекаются по прямой, и задать прямую двумя уравнениями плоскостей:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

2) Параметрическое уравнение сохраняет силу и в пространстве, с добавлением координаты z.

$$r = r_0 + tu,\ u \neq 0,\ \text{или}\ \begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2, \\ z = z_0 + tu_3. \end{cases}$$

Если прямая задана как пересечение плоскостей, то из системы уравнений можно найти нормали n_1 и n_2 к этим плоскостям. Поскольку направляющий вектор u перпендикулярен обоим векторам, можно в качестве u взять векторное произведение $u = [n_1, n_2]$.

1.10 Расстояния

1) От точки до прямой на плоскости.

Пусть прямая L задана уравнением $ax + by = c$. Пусть $N(x_0, y_0)$ - ортогональная проекция точки $M(x, y)$ на прямую L, $n = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ - нормаль к прямой длины 1. Тогда векторы n и $\overrightarrow{MN}$ линейно зависимы, угол между ними $\varphi = 0$ или π.

$$d(M, L) = |MN| = ||\overrightarrow{MN}||n|\cos\varphi| = \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(x - x_0) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(y - y_0)\right| = \frac{|ax + by - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

2) Аналогично выводится формула расстояния от точки до плоскости в пространстве:

$$d(M,P) = \frac{|ax+by+cz-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

3) Расстояние от точки до прямой в пространстве можно найти из параметрического уравнения. Пусть r - радиус-вектор интересующей нас точки, r_0 - радиус-вектор некоторой точки на прямой. Тогда расстояние $h = |r - r_0| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $r - r_0$ и направляющим вектором u (или -u, что неважно, поскольку нас интересует только синус). Значит, $h = \dfrac{|[r-r_0,u]|}{|u|}$, или

$$h = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-y_0 & u_2 \\ z-z_0 & u_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-z_0 & u_3 \\ x-x_0 & u_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_0 & u_1 \\ y-y_0 & u_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}},$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ r_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

4) Между прямыми в пространстве:

а) если прямые параллельны, то расстояние между ними равно расстоянию от любой точки одной прямой до другой прямой;

б) если прямые скрещиваются (не лежат в одной плоскости), то расстояние между ними равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $r_1 - r_0, u, v$, где r_0, u, r_1, v - параметрические векторы прямых, при этом сами прямые лежат в плоскостях верхнего и нижнего оснований параллелепипеда. Поскольку $V = Sh$, то

$$h = \frac{V}{S} = \frac{|(r_1-r_0,u,v)|}{|[u,v]|} = \frac{\left|\det\begin{pmatrix} x_1-x_0 & u_1 & v_1 \\ y_1-y_0 & u_2 & v_2 \\ z_1-z_0 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2}},$$

$$r_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\ r_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

1.11 Углы

1) Формулу для угла между векторами мы уже знаем:

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{|u||v|}.$$

2) Угол между прямыми равен углу между их нормалями (или направляющими векторами), если последний не превосходит $\pi/2$, и дополнительному до π углу в противном случае. Поэтому в выражении для косинуса нужно поставить модуль, чтобы угол не превосходил $\pi/2$:

$$\cos\varphi = \frac{|(n_1,n_2)|}{|n_1||n_2|} = \frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

3) Угол между прямой и плоскостью - дополнительный до $\pi/2$ к углу между данной прямой и прямой, содержащей нормаль к плоскости, поэтому

$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \frac{|(u,n)|}{|u||n|} = \frac{|au_1+bu_2+cu_3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

4) Двугранный угол между плоскостями равен углу между перпендикулярными к ним прямыми.

$$\cos\varphi = \frac{|(n_1,n_2)|}{|n_1||n_2|} = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

1.12 Кривые второго порядка на плоскости

ОПР 1.12.1 (Эллипс).

Эллипс - это кривая, которая в подходящей ПДСК задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a\geq b>0.$$

При a = b это окружность с уравнением $x^2+y^2=a^2$, a - радиус окружности. Преобразуем это уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{(by/a)^2}{b^2}=1.$$

Таким образом, эллипс получается из окружности сжатием вдоль оси Oy, причём $b/a\leq 1$. Отсюда ясно, что эллипс целиком лежит внутри прямоугольника $|x|\leq a, |y|\leq b$.

Эллипс имеет:
1) центр симметрии O;
2) оси симметрии Ox и Oy;
3) *фокусы*: $F_-(-c,0),\ F_+(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$;
4) *эксцентриситет* $e=c/a<1$;
5) *директрисы* - прямые L_- и L_+ с уравнениями $x=a/e$ и $x=-a/e$.
Число a называют *большой полуосью* эллипса, b - *малой*.

Лемма 1.12.2.

- Пусть

  $M(x,y)$ - точка эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

- Тогда

  $|MF_+|=a-ex,\ |MF_-|=a+ex.$

- *Доказательство.*

  - $|MF_\pm|=\sqrt{(x\mp c)^2+(y-c)^2}=\sqrt{x^2\mp 2cx+c^2+y^2}=\sqrt{x^2\mp 2cx+a^2-b^2+b^2-\frac{b}{a}x^2}=$ $\sqrt{(1-\frac{b^2}{a^2}x^2\mp 2cx+a^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2\mp 2cx+a^2}=\sqrt{(\frac{c}{a}x\mp a)^2}=|ex\mp a|=a\mp ex$, поскольку $0\leq ex<a$.

□

Теорема 1.12.3 (Фокальные свойства эллипса).

- Эллипс - это геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости есть величина постоянная, равная 2a.

- *Доказательство.*

  - 1) Если $M(x,y)$ - точка эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то ввиду леммы $|MF_+|+|MF_-|=a-ex+a+ex=2a$.
  - 2) Пусть $M(x,y)$ - точка плоскости, $|MF_+|+|MF_-|=2a$. Покажем, что M - точка эллипса.
    $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$
    $x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2.$
    $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$
    $a^2(x^2+2cx+a^2-b^2+y^2)=a^4+2a^2cx+(a^2-b^2)x^2.$
    $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$
    $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

□

Теорема 1.12.4 (Директориальные свойства эллипса).

- Эллипс - это геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до заданной точки (фокуса) к расстоянию до заданной прямой, не содержащей эту точку, есть величина постоянная (эксцентриситет), меньшая 1.

- *Доказательство.*

- 1) Пусть $M(x,y)$ - точка эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $L_+|\ x=a/e$ - правая директриса, $F_+(c,0)$ - правый фокус. Тогда
$$\frac{d(M,F_+)}{d(M,L+)}=\frac{a-ex}{a/e-x}=e.$$
- 2) Пусть M - точка плоскости и пусть $\dfrac{|MF_+|}{d(M,L+)}=e$. Тогда
$\dfrac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|a/e-x|}=e.$
$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|a-ex|.$
$x^2-2cx+a^2-b^2=a^2-2aex+e^2x^2.$
$(1-\dfrac{c^2}{a^2})x^2+y^2=b^2.$
$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

□

Из анализа известно (или точнее, станет известно в дальнейшем), что, если $F(x,y)=0$ - уравнение кривой и (x_0,y_0) - точка этой кривой, то уравнение касательной к кривой в этой точке имеет следующий вид:
$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y-y_0)=0.$$
Забегая вперёд: $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ - *частные производные* функции $F(x,y)$; они берутся как обычные производные по одной переменной, а вторая считается константой.

Таким образом, уравнение касательной для эллипса ($F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$)
$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)=0,\text{ или }\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.\ (*)$$

Теорема 1.12.5 (Оптическое свойство эллипса).

▷ Касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

▷ *Доказательство.*

- Пусть $M(x_0,y_0)$ - точка касания на эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Поскольку уравнение касательной $(*)$ записано как общее уравнение прямой, нормаль к ней $n=(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{a^2})$. Фокальные радиусы задаются векторами $r_+=\overrightarrow{F_+M}=(x_0-c,y_0)$, $r_-=\overrightarrow{F_-M}=(x_0+c,y_0)$. Если $\varphi_\pm$ - угол между n и $r\pm$, то
$$\cos\varphi_\pm=\frac{(n,r_\pm)}{|n||r_\pm|}=\frac{\frac{x_0^2}{a^2}\mp\frac{x_0c}{a^2}+\frac{y_0}{b^2}}{|n|(a\mp ex_0)}=\frac{1\mp ex_0/a}{|n|(a\mp ex_0)}=\frac{1}{|n|a}.$$
$\varphi_+=\varphi_-$, так как φ_+ и φ_- - острые углы.

□

Это свойство можно переформулировать и так: нормаль касательной к эллипсу делит пополам угол между фокальными радиусами точки касания. Теперь понятно, почему свойство называется оптическим: если в одном из фокусов находится точечный источник света или звука, то, отразившись от эллипса, волны соберутся в другом фокусе. Этот факт использовался ещё средневековыми архитекторами для создания необычных акустических эффектов, таких, как "говорящие"статуи.

ОПР 1.12.6 (Гипербола).

Гипербола - это кривая на плоскости, которая в подходящей ПДСК Oxy задаётся уравнением
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0,b>0.$$
При $a=b$ гипербола называется равнобочной и имеет уравнение $x^2-y^2=a^2$.

Запишем уравнение этой кривой в системе координат, повёрнутой на угол $\pi/4$.
$$e_1'=\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}},\ e_2'=\frac{-e_1+e_2}{\sqrt{2}}.\ T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.\ \begin{cases}X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\\Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y).\end{cases}$$
При написании системы считалось, что X, Y - "старые" координаты, а x, y - "новые". Поэтому векторы e_1',e_2' подобраны так, чтобы график в координатах X, Y получался из исходного поворотом против часовой стрелки.

Отсюда $XY=\dfrac{x^2-y^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$, или $Y=\dfrac{a^2/2}{X}$. Это график обратной пропорциональности, симметричный относительно прямых $y=\pm x$ и целиком лежащий в I и III четвертях.

Произвольная гипербола (аналогично эллипсу) получается из равнобочной сжатием вдоль оси Oy.

Гипербола имеет:
1) вершины $(a, 0)$ и $(-a, 0)$;
2) центр симметрии O, оси симметрии Ox, Oy;
3) асимптоты - прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, к которым гипербола приближается при $x \to \pm\infty$;
4) фокусы $F_-(-c, 0)$, $F_+(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;
5) эксцентриситет $e = c/a > 1$;
6) директрисы $x = \pm a/e$.

Лемма 1.12.7.

▷ Если $M(x, y)$ - точка гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, то$|MF_\pm| = |ex \mp a|$.

Теорема 1.12.8 (Фокальные свойства гиперболы).

▷ Гипербола - это геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости (фокусов) есть по абсолютному значению величина постоянная (равная 2a).

Теорема 1.12.9 (Директориальные свойства гиперболы).

▷ Гипербола - это геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до заданной точки (фокуса) к расстоянию до заданной прямой, не содержащей эту точку, есть величина постоянная (эксцентриситет), большая 1.

Лемма 1.12.10.

▷ Уравнение касательной к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Теорема 1.12.11 (Оптическое свойство гиперболы).

▷ Касательная к гиперболе делит пополам угол между фокальными радиусами точки касания.

▷ *Доказательство.*

- Все эти свойства доказываются аналогично эллипсу, со сменой знаков в некоторых местах.

□

ОПР 1.12.12 (Парабола).
Парабола - это кривая на плоскости, которая в подходящей ПДСК Oxy задаётся уравнением

$$y^2 = 2px, \ p > 0.$$

График получается из графика параболы $y = ax^2$, $a = \frac{1}{2p}$ отражением относительно прямой $y = x$. Отметим, что парабола "почти вся" лежит внутри сколь угодно малого угла с биссектрисой Ox. Действительно,

$$\frac{|y|}{x} = \frac{\sqrt{2px}}{x} = \sqrt{\frac{2p}{x}} \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

Отметим следующие характеристики параболы:
1) центра симметрии нет, но есть единственная ось симметрии - ось Ox;
2) точка $F(\frac{p}{2}, 0)$ - фокус параболы;
3) прямая L с уравнением $x = -p/2$ - директриса параболы.

Теорема 1.12.13 (Фокально-директориальное свойство параболы).

▷ Парабола - геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до заданной точки (фокуса) равно расстоянию до заданной прямой (директрисы).

▷ *Доказательство.*

- 1) Пусть (x, y) - точка параболы $y^2 = 2px$. Тогда $|MF| = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + p^2/4 + 2px} = \sqrt{x^2 + px + p^2/4} = |x + p/2| = d(M, L)$.
- 2) Пусть (x, y) - точка плоскости и $|MF| = d(M, L)$. Тогда $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = d(M, L)$, откуда $x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4$ и $y^2 = 2px$.

□

Это свойство повторяет директориальные свойства эллипса и гиперболы при e = 1 (для эллипса e < 1, для гиперболы e > 1). Вообще парабола занимает промежуточное положение между гиперболой и эллипсом; на неё можно смотреть как на гиперболу, вторая ветвь которой удалилась в бесконечность, или как на эллипс с большой полуосью бесконечной длины.

Лемма 1.12.14.

▷ Уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y_0 y = p(x_0 + x).$$

▷ *Доказательство.*

- $F(x, y) = y^2 - 2px$. Получаем, что уравнение имеет вид

$$2y_0(y - y_0) - 2p(x - x_0) = 0, \text{ или } y_0 y = px + px_0 + (y_0^2 - 2px_0).$$

Пользуемся тем, что $y_0^2 = 2px_0$.

□

Теорема 1.12.15 (Оптические свойства параболы)**.**

▷ Касательная к параболе делит пополам угол между фокальным радиусом точки касания и осью параболы. (Неформально: пучок лучей, испущенный из фокуса, становится параллельным, и наоборот, лучи, параллельные Ox и проходящие внутри параболы, собираются в фокусе.)

▷ *Доказательство.*

- Угловой коэффициент касательной равен p/y_0.
- Фокальный радиус-вектор $r(x_0 - p/2, y_0)$, направляющий вектор касательной $u(1, p/y_0)$. Пусть $e(1, 0)$ - вектор в направлении оси Ox, φ_1 - угол между касательной и осью, φ_2 - угол между касательной и фокальным радиусом. Тогда
$\cos\varphi_1 = \dfrac{|(u, e)|}{|u||e|} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (p/y_0)^2}}$,
$\cos\varphi_2 = \dfrac{|(r, u)|}{|r||u|} = \dfrac{x_0 - p/2 + p}{\sqrt{(x_0 - p/2)^2 + y_0^2}\sqrt{(1 + (p/y_0)^2}} = \dfrac{x_0 + p/2}{\sqrt{x_0^2 - px_0 + p^2/4 + 2px_0}\sqrt{(1 + (p/y_0)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (p/y_0)^2}}$.
Отсюда $\varphi_1 = \varphi_2$ как острые углы.

□

1.13 Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение кривой второго порядка в ДСК:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Наша цель - упростить уравнение выбором подходящей ПДСК.

Лемма 1.13.1.

▷ Поворотом ПДСК можно добиться того, чтобы B равнялось нулю.

▷ *Доказательство.*

- При повороте на угол φ координаты (x, y) выражаются через новые (x', y'):

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + x'\cos\varphi. \end{cases}$$

После замены получается уравнение $A'(x')^2 + 2B'x'y' + C'(y')^2 + ... = 0$. Имеем $B' = (C - A)\cos\varphi\sin\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \frac{C-A}{2}\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi$.
- Если $C = A$, положим $\varphi = \pi/4$, тогда $B' = 0$.
- Если $C \neq A$, то $B' = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A-C}$. $\varphi := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A-C}$.

□

Ввиду леммы можно считать, что кривая задаётся уравнением

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Лемма 1.13.2.

▷ Если $A \neq 0$, то можно добиться того, чтобы D равнялось нулю.

▷ *Доказательство.*

- Перепишем уравнение:
$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + Cy^2 + 2Ey - \frac{D^2}{A} + F = 0.$$
- Сделаем замену $x' := x + D/A,\ y' := y$ (перенос по оси Ox).

□

I. Пусть $AC \neq 0$. Тогда ввиду леммы уравнение приводится к виду

$$Ax^2 + Cy^2 = F.$$

$AC > 0$	$F = 0$	точка	$(0, 0)$
	$AF > 0$	эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	$AF < 0$	$\varnothing$ (мнимый эллипс)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
$AC < 0$	$F = 0$	пара пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
	$F = 0$	гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

II. Пусть $AC = 0$. Можно считать, что $C \neq 0,\ A = 0$. Тогда уравнение приводится к виду

$$Cy^2 + 2Dx + F = 0, \text{ или } y^2 = 2px + q.$$

$p \neq 0$		парабола $y^2 = 2px$
$p = 0$	$q = 0$	прямая (Ox)
	$q > 0$	пара параллельных прямых
	$q > 0$	$\varnothing$ (пара мнимых параллельных прямых)

Всякая вещественная кривая второго порядка - это либо эллипс, гипербола, парабола, либо прямая, пара пересекающихся или параллельных прямых или $\varnothing$.

1.14 Поверхности второго порядка в пространстве

ОПР 1.14.1 (Эллипсоид).
Эллипсоид - это поверхность в $\mathbf{R}^3$, которая в подходящей ПДСК задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a \geq b \geq c > 0.$$

Ясно, что $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$. При $a = b = c$ получается сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. При $a = b > c$ или $a > b = c$ получается *эллипсоид вращения*, при $a > b > c$ - трёхосный эллипсоид. В общем случае эллипсоид получается из сферы сжатием вдоль координатных осей.

Свойства симметрии:
O - центр симметрии, Ox, Oy, Oz - оси симметрии, Oxy, Oxz, Oyz - плоскости симметрии.

Лемма 1.14.2.

▷ Всякое плоское сечение поверхности второго порядка, параллельное круговому, является либо круговым, либо точкой, либо пустым.

▷ *Доказательство.*

- Поверхность второго порядка задаётся уравнением
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.$$

- Пусть система координат такова, что уравнение плоскости сечения z = 0. В сечении получается уравнение кривой второго порядка
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + ... = 0.$$
Если это окружность, то $a_{12} = 0,\ a_{11} = a_{22} \neq 0$. Сечение плоскостью z = h имеет вид
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \text{линейная часть} + \text{постоянная часть} = 0.$$
Здесь снова $a_{12} = 0,\ a_{11} = a_{22} \neq 0$. По предыдущему параграфу это уравнение приводится к виду $x^2+y^2 = c$.

□

Теорема 1.14.3.

▷ Трёхосный эллипсоид имеет ровно два семейства параллельных круговых сечений, так что всякая точка эллипсоида принадлежит ровно одной кривой из каждого семейства.

▷ *Доказательство.*

- Рассмотрим пересечение эллипсоида и сферы радиуса b.
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2})x^2 - (\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2})z^2 = 0, \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}x \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$$
- Таким образом, получаем пересечение сферы с двумя плоскостями, проходящими через её центр O, а это не что иное, как две несовпадающих больших окружности сферы. По лемме любое параллельное сечение также будет круговым.

□

ОПР 1.14.4 (Конус).
Конус - это поверхность второго порядка, которая в подходящей ПДСК задаётся уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,\ a \geq b > 0.$$

Это не тот конус, который знаком со школы. Во-первых, этот конус бесконечен; во-вторых, он простирается в обе стороны от вершины O; в-третьих, в общем случае его сечение плоскостью z = h - эллипс, а в школе изучался только *круговой конус*, то есть конус, у которого a = b.

Свойства симметрии:
O - центр симметрии, Ox, Oy, Oz - оси симметрии, Oxy, Oxz, Oyz - плоскости симметрии.

Плоские сечения конуса - это всегда эллипс, гипербола, парабола, прямая, пара пересекающихся прямых и точка. В самом деле, наличие этих сечений и отсутствие таких сечений, как пара параллельных прямых и ∅, очевидно. То, что других сечений нет, следует из классификации кривых второго порядка и того, что плоское сечение поверхности второго порядка - это кривая второго порядка.

Теорема 1.14.5.

▷ Плоское сечение кругового конуса, не содержащее вершину - это либо эллипс, либо гипербола, либо парабола.

▷ *Доказательство.*

- Пусть α - угол между осью и образующей конуса, β - угол между осью конуса и плоскостью сечения π. Впишем в конус сферу так, чтобы она касалась π. Точки касания конуса и сферы образуют окружность; пусть π' - плоскость этой окружности. Если $\pi \parallel \pi'$, то сечение - окружность.

  Пусть $\pi \nparallel \pi'$, L - прямая, по которой пересекаются плоскости. Ось $\perp \pi' \Rightarrow$ ось $\perp L \Rightarrow$ проекция оси $\perp L$.

  Пусть F - точка касания сферы и плоскости сечения, M - произвольная точка, D - проекция M на L. Тогда β - это угол между MD и осью конуса, поскольку $MD \parallel$ проекции оси.

  Пусть N - точка пересечения образующей, содержащей M, с плоскостью π'. Тогда $MN\cos\alpha$ - длина проекции MN на ось конуса, $MD\cos\beta$ - длина проекции MD на ось конуса. Но эти проекции равны. Действительно, точки D и N лежат в одной плоскости π', перпендикулярной оси, а значит, если спроецировать MD в MN, на длину проекции на ось это не повлияет. Кроме того, $MN = MF$ как касательные к сфере из одной точки M. Поэтому
$$\frac{MF}{MD} = \frac{MN}{MD} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \text{const}.$$

- Это - директориальное свойство нетривиальной кривой второго порядка, причём F - фокус, а L - директриса. Вид кривой определяется в зависимости от отношения $e := MF/MD$; если e $<$ 1, то это эллипс, если e $=$ 1 - парабола, если e $>$ 1 - гипербола.

$\square$

В случае $e \neq 1$ другой фокус получается в точке касания плоскости и сферы с другой стороны.

ОПР 1.14.6 (Однополостный гиперболоид).
Однополостный гиперболоид - это поверхность, которая в подходящей ПДСК задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Сечение плоскостью z $=$ h - это эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$ (при h $=$ 0 - "горловой эллипс"). Сечение плоскостью x $=$ 0 - это гипербола.

Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ называется *асимптотическим*; к нему гиперболоид приближается при $x \to \infty$, $y \to \infty$ или $z \to \infty$.

Свойства симметрии: O - центр симметрии, Ox, Oy, Oz - оси симметрии, Oxy, Oxz, Oyz - плоскости симметрии.

Плоские сечения - это эллипс, гипербола, парабола, пара пересекающихся прямых.

Теорема 1.14.7.

- ▷ Однополостный гиперболоид содержит два семейства прямых так, что всякая точка его $\in!$ (единственной) прямой из каждого семейства.
- ▷ *Доказательство.*
  - Перепишем уравнение гиперболоида в виде $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{y^2}{b^2}$.

$$\alpha\beta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\beta\left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \beta(1 + \frac{y}{b}), \\ \alpha(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \beta(1 - \frac{y}{b}) \end{cases}, \begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \beta(1 - \frac{y}{b}), \\ \alpha(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \beta(1 + \frac{y}{b}). \end{cases}$$

Каждая из систем задаёт прямую, лежащую на гиперболоиде. Для первой системы прямая задаётся пересечением плоскостей с нормалями $(\frac{\alpha}{a}, -\frac{\beta}{b}, \frac{\alpha}{c})$, $(\frac{\beta}{a}, \frac{\alpha}{b}, -\frac{\beta}{c})$. Они линейно независимы, ибо

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{a} & -\frac{\beta}{b} \\ \frac{\beta}{a} & \frac{\alpha}{b} \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{ab} > 0.$$

Значит, плоскости действительно пересекаются. Аналогично это доказывается для второй системы.

  - Всякая точка гиперболоида лежит на прямой, получаемой из первой или второй системы, так как по её координатам можно найти отношение α/β; оно определяет единственную прямую из первого и единственную прямую из второго семейства.

$\square$

ОПР 1.14.8 (Двуполостный гиперболоид).
Двуполостный гиперболоид - это поверхность, которая в подходящей ПДСК задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Сечение плоскостью z $=$ h - это эллипс при $|h| > c$, точка при $|h| = c$ и $\varnothing$ при $|h| < c$.

Плоские сечения - эллипс, гипербола, парабола, точка.

ОПР 1.14.9 (Эллиптический параболоид).
Эллиптический параболоид - это поверхность, которая в подходящей ПДСК задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Ясно, что $z \geq 0$. Сечение плоскостью z $=$ h при h $=$ 0 - точка, при h $>$ 0 - эллипс. Сечение плоскостью x $=$ 0 - парабола.

Центра симметрии нет. Ось симметрии - Oz, плоскости симметрии - Oxz, Oyz.

Сечение плоскостью y $=$ h даёт параболу:

$$\frac{x^2}{a^2} = 2(z - \frac{h^2}{2b^2}).$$

Она получается из параболы $\frac{x^2}{a^2} = 2z,\ y = 0$ параллельным переносом на вектор $(0, h, \frac{h^2}{2b^2}$. Таким образом, эллиптический параболоид получается, если параболу y $=$ 0 катить параллельно вершиной по параболе x $=$ 0.

ОПР 1.14.10 (Гиперболический параболоид).

Гиперболический параболоид - это поверхность, которая в подходящей ПДСК задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Сечение плоскостью z = 0 - это пара пересекающихся прямых, x = 0 - парабола (ветви вниз), x = 0 - парабола (ветви вверх). Гиперболический параболоид имеет вид "седла" и получается, если параболу y = 0 катить по параболе x = 0 так, чтобы её плоскость была перпендикулярна касательной к параболе x = 0.

Теорема 1.14.11.

▷ На гиперболическом параболоиде $\exists$ два семейства прямых | каждая его точка $\in!$ прямой из каждого семейства.

▷ *Доказательство.*

∘ Имеем $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2z$, или, при расщеплении по параметру λ,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = \lambda, \\ \lambda(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2z \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = \lambda, \\ \lambda(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 2z \end{array}\right.$$

Дальше - аналогично однополостному гиперболоиду (даже чуть проще).

□

Кроме того, поверхностями второго порядка являются цилиндрические поверхности в $\mathbf{R}^3$ - поверхности, в канонические уравнения которых не входит координата z. Они получаются, если через каждую точку некоторой кривой второго порядка в плоскости Oxy провести прямую параллельно оси Oz.

1) Цилиндр над эллипсом: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

2) Цилиндр над парой пересекающихся прямых (две пересекающиеся плоскости): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

3) Цилиндр над гиперболой: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

4) Цилиндр над параболой: $y^2 = 2px.$

5) Цилиндр над прямой (плоскость): $y^2 = 0.$

6) Цилиндр над парой параллельных прямых (две параллельные плоскости): $y^2 = a^2.$

7) Цилиндр над точкой (прямая): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

8) Цилиндр над пустым множеством $\varnothing$.

Дальнейшим нашим шагом могло бы быть приведение общего уравнения поверхности второго порядка (см. эллипсоид) к каноническому виду. На самом деле, как и для кривых, можно показать, что никаких других поверхностей второго порядка нет. Но это будет показано после развития основ линейной алгебры.

Глава 2

Основы алгебры

2.1 Алгебраические операции, алгебраические структуры, изоморфизм

ОПР 2.1.1 (Алгебраическая операция).

Алгебраическая операция на множестве M - это отображение $M \times M \to M$. Обычные обозначения для алгебраической операции - $+, \cdot, \circ, *$. Такая операция называется бинарной (двухместной).

Кроме того, можно определить внешние алгебраические операции $A \times M \to M$, где A - также некоторое множество.

ОПР 2.1.2 (Алгебраическая структура).

Алгебраическая структура - это непустое множество с заданным на нём семейством алгебраических операций.

Обобщение алгебраических структур, как и некоторых рассматриваемых здесь относящихся к ним понятий (таких, как изоморфизм, замкнутость относительно операций, конгруэнция), будет дано в математической логике, а точнее, в одном из её разделов - логике предикатов, где рассматриваются операции уже не двух, а произвольного числа аргументов (в том числе нуля аргументов - константы), а также отношения, или предикаты, обобщающие рассматриваемые ниже бинарные отношения.

Поэтому для согласования с обозначениями, принятыми в логике, будем заключать символы алгебраических структур в угловые скобки, например, $\langle M; \circ \rangle$.

ОПР 2.1.3 (Изоморфизм).

Пусть даны две структуры $\langle M; \circ \rangle$ и $\langle N; * \rangle$. Биекция (взаимно однозначное отображение) $f : M \to N$ называется изоморфизмом, если $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ $\forall a, b \in M$.

Алгебраические структуры называются изоморфными, если между ними можно установить изоморфизм. Обозначение: $\langle M; \circ \rangle \simeq \langle N; * \rangle$.

2.2 Группы, кольца, поля

ОПР 2.2.1 (Абелева группа).

Аддитивная абелева группа - это алгебраическая структура $\langle A; + \rangle$, операция которой удовлетворяет следующим свойствам (аксиомам):

C1. $\forall a, b, c \in A$ $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность);*

C2. $\forall a, b \in A$ $a + b = b + a$ *(коммутативность);*

C3. $\exists 0 \in A \mid \forall a$ $a + 0 = 0 + a = a$ *(существование нуля);*

C4. $\forall a \exists (-a) \mid a + (-a) = (-a) + a = 0$ *(существование противоположного элемента).*

Мультипликативная абелева группа - это абелева группа, в которой умножение заменено сложением. Соответственно, аксиомы имеют номера У1-У4, ноль называется единицей, а противоположный элемент - обратным.

Следствие 2.2.2.

▷ Сумма n элементов не зависит от способа расстановки скобок.

Следствие 2.2.3.

▷ Ноль единственен.

Следствие 2.2.4.

▷ $\forall$ элемента $\exists!$ противоположный.

Следствие 2.2.5.

▷ Уравнение a + x = b имеет единственное решение.

Все эти следствия уже были доказаны в курсе матанализа при рассмотрении аксиоматики действительных чисел, причём при доказательстве не использовалось ничего, кроме аксиом C1, C3, C4. Отсюда заключаем, что эти следствия верны для любых групп, а не только для коммутативных (абелевых).

ОПР 2.2.6 (Кольцо).
Кольцо - это алгебраическая структура с двумя бинарными операциями $\langle K; +, \cdot\rangle$, такая, что $\langle K; +\rangle$ - абелева группа и выполняется свойство

$$\forall a, b, c \in K \ a(b+c) = ab + ac, \ (a+b)c = ac + bc \text{ (дистрибутивность).}$$

Кольцо называется ассоциативным, коммутативным, с единицей, если операция умножения $\cdot$ удовлетворяет соответствующим аксиомам.

ОПР 2.2.7 (Поле).
Поле - это ассоциативное, коммутативное кольцо с $1 \neq 0$, удовлетворяющее аксиоме существования обратного элемента для ненулевых элементов.

Следствие 2.2.8.

▷ В поле нет делителей нуля.

▷ *Доказательство.*

- Пусть $\exists k, l \neq 0|\ kl = 0$ (делители нуля). Тогда $\exists k^{-1}$, $(k^{-1}k)l = 1 \cdot l = l \neq 0$, $k^{-1}(kl) = k^{-1} \cdot 0 = 0$. Но это невозможно ввиду ассоциативности умножения.

□

ОПР 2.2.9 (Замкнутость относительно операций).
Пусть $\langle M; \circ\rangle$ - алгебраическая структура. Подмножество $N \subseteq M$ замкнуто относительно алгебраический операции $\circ$, если $\forall a, b \in N \ a \circ b \in N$.

Ясно, что тогда всякое тождество для операции $\circ$ и элементов из M выполнимо и для элементов из $N \subseteq M$.

ОПР 2.2.10 (Подгруппа).
Подмножество B аддитивной абелевой группы A называется подгруппой, если B замкнуто относительно сложения, $0 \in B$, $a \in B \Rightarrow (-a) \in B$.

ОПР 2.2.11 (Подкольцо).
Подмножество L кольца $\langle K; +, \cdot\rangle$ называется подкольцом, если L - подгруппа $\langle K; +\rangle$ и L замкнуто относительно умножения.

ОПР 2.2.12 (Подполе).
Подмножество L поля K называется подполем, если L - подкольцо K и $\forall a \in L \ a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in L$.

2.3 Отношение эквивалентности. Фактор-множество

ОПР 2.3.1 (Бинарное отношение).
Бинарным отношением на множестве M называется всякое подмножество $R \subset M \times M$.

Если $(a, b) \in R$, то пишут кратко aRb и говорят, что a и b находятся в отношении R. Можно понимать R как функцию $R : M \times M \to \{\text{и}, \text{л}\}$ (или $\{0, 1\}$).

ОПР 2.3.2 (Отношение эквивалентности).
Бинарное отношение R называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обычные обозначения - $a \underset{R}{\sim} b$, $a \sim b$.

ОПР 2.3.3 (Класс эквивалентности).
Класс эквивалентности с представителем $a \in M$ для отношения эквивалентности $\sim$ на множестве M - это $R(a) := b \in M|\ b \sim a$.

УТВ 2.3.4.

▷ Классы эквивалентности разбивают множество:

1) $M = \bigcup\limits_{a \in M} R(a)$;

2) $R(a) \cap R(b) \neq \varnothing \Rightarrow R(a) = R(b)$.

▷ *Доказательство.*

- 1) $a \sim a \Rightarrow a \in R(a) \Rightarrow \bigcup_{a\in M} R(a) = M$.
- 2) Пусть $c \in R(a) \cap R(b)$. Тогда $c \sim a, c \sim b \Rightarrow b \sim a$. Если $x \sim b$, то $x \sim a$.

□

ОПР 2.3.5 (Фактор-множество).
Множество классов эквивалентности на множестве M обозначается $M/_\sim$ и называется фактор-множеством множества M по отношению R. Отображение $a \mapsto R(a)$ из M в $M/_\sim$ называется отображением факторизации.

ОПР 2.3.6 (Согласованность с операциями).
Отношение эквивалентности $\sim$ на множестве M согласовано с алгебраической операцией $*$, если $a \sim a', b \sim b' \Rightarrow a * b \sim a' * b'\ \forall a, b, a', b' \in M$.

Отношение эквивалентности, согласованное с алгебраическими операциями структуры, называется *конгруэнцией*. В этом случае операция $*$ индуцирует операцию $*$ на классах эквивалентности по правилу $R(a) * R(b) := R(a * b)$.
Отметим, что свойства операции $*$ на M часто наследуются операцией $*$ на $M/_\sim$.

2.4 Кольца вычетов и поля вычетов

ОПР 2.4.1 (Сравнимость по модулю).
Пусть $n \in \mathbf{N}, n > 1$. Определим на множества $\mathbf{Z}$ отношение сравнимости по модулю n по правилу

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow n \mid (a - b)\ \textit{(делит), то есть}\ a - b = nq,\ q \in \mathbf{Z}.$$

Это - отношение эквивалентности. Достаточно проверить все три свойства.

$a \equiv b(\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow$ a и b имеют одинаковые остатки от деления на n. Таким образом, классов эквивалентности столько же, сколько остатков от деления на n.

$$\mathbf{Z}_n := \mathbf{Z}/_{\equiv(\mathrm{mod}\ n)} = \{[0]_n, ..., [n-1]_n\}.$$

УТВ 2.4.2.

- ▷ Отношение $\equiv (\mathrm{mod}\ n)$ согласовано с операциями $+$ и $\cdot$ на $\mathbf{Z}$.
- ▷ *Доказательство.*
  - $\left\{\begin{array}{l} a \equiv a'(\mathrm{mod}\ n) \\ b \equiv b'(\mathrm{mod}\ n) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b \equiv a' + b \equiv a' + b'(\mathrm{mod}\ n) \\ ab \equiv a'b \equiv a'b'(\mathrm{mod}\ n) \end{array}\right.$.

□

Следовательно, $+$ и $\cdot$ индуцируют $+$ и $\cdot$ на $\mathbf{Z}_n$. Все свойства сложения и умножения в $\mathbf{Z}$, заданные в виде тождеств, переносятся в $\mathbf{Z}_n$. В частности, $\mathbf{Z}_n$ - ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

УТВ 2.4.3.

- ▷ $\mathbf{Z}_n$ - поле $\Leftrightarrow$ n - простое.
- ▷ *Доказательство.*
  - ($\Rightarrow$) Предположим, что n - составное: $n = kl,\ 1 < k < n,\ 1 < l < n$. Тогда $[k]_n \neq [0]_n, [l]_n \neq [0]_n$, но $[k]_n \cdot [l]_n = [kl]_n = [0]_n$. Таким образом, k и l - делители нуля, которых в поле быть не может.
  - ($\Leftarrow$) Пусть n = p - простое. Покажем, что $\mathbf{Z}_p$ - поле. В силу вышеизложенного достаточно проверить, что в $\mathbf{Z}_p\ \forall a \neq 0\ \exists a^{-1}$.
    Пусть $[a]_p \neq [0]_p$, то есть $p \nmid a$. Рассмотрим множество $[a][0], ..., [a][p-1]$. Покажем, что здесь все элементы различны. Если $[a][k] = [a][l], 0 \leq k < l < p$, то $[a][l-k] = 0$, другими словами, $p \mid a(l-k)$. Но $p \nmid a,\ p$ простое, следовательно, $p \mid (l-k)$, но это невозможно, поскольку $l - k < p$. Значит, классы все различны, их p, они лежат в $\mathbf{Z}_p$, где также p элементов. Значит, они совпадают. Поэтому $\exists b \mid\ [a][b] = [1],\ [b] = [a]^{-1}$.

□

ОПР 2.4.4 (Характеристика поля).
Пусть K - поле. Наименьшее число $n \mid\ \underbrace{1 + ... + 1}_{n\ \text{раз}} = 0$, называется характеристикой поля K, если такое n $\exists$. В противном случае полагают характеристику равной нулю. Обозначение: $char\, K$.

УТВ 2.4.5 (Свойства характеристики).

▷ 1. Если K - поле, то его характеристика всегда простое число или 0.

2. Если $\operatorname{char} K = p > 0$, то $\underbrace{a + ... + a}_{n \text{ раз}} = 0$.

3. Если $\operatorname{char} K = p > 0$, то $(a+b)^p = a^p + b^p$.

▷ *Доказательство.*

- 1) Пусть $\operatorname{char} K = n > 0$, n составное, $n = kl$, $1 < k < n$, $1 < n < l$. Тогда $(\underbrace{1 + ... + 1}_{k \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{1 + ... + 1}_{l \text{ раз}}) = \underbrace{1 + ... + 1}_{kl \text{ раз}} = 0$. В поле нет делителей нуля $\Rightarrow \underbrace{1 + ... + 1}_{k \text{ раз}} = 0$ или $\underbrace{1 + ... + 1}_{l \text{ раз}} = 0$. Это противоречит выбору n.
- 2) $\underbrace{a + ... + a}_{n \text{ раз}} = a \cdot (\underbrace{1 + ... + 1}_{n \text{ раз}}) = a \cdot 0 = 0$.
- 3) $(a+b)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k} b^k$. Если $0 < k < p$, то $p \nmid C_p^k$, $C_p^k = 0$ в K.

□

2.5 Векторные (линейные) пространства

ОПР 2.5.1 (Векторное пространство).
Векторное пространство V над полем K - это алгебраическая структура $\langle V; +, a \mapsto \lambda a, \lambda \in K \rangle$, удовлетворяющая следующим аксиомам:
1) $\langle V; + \rangle$ - абелева группа.
2) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.
3) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$.
4) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$.
5) $1 \cdot a = a$
$\forall a, b \in V,\ \forall \lambda, \mu \in K$.
Элементы из V называются векторами, элементы из K - скалярами.

Пример 2.5.2.

▷ Пусть K - поле, $V = K^n = (\alpha_1, ..., \alpha_n) | \alpha_i \in K$.

+: $(\alpha_1, ..., \alpha_n) + (\beta_1, ..., \beta_n) := (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$.

$\cdot$: $\lambda(\alpha_1, ..., \alpha_n) := (\lambda\alpha_1, ..., \lambda\alpha_n)$.

V - пространство строк длины n над полем K. Можно рассмотреть и пространство столбцов высоты n.

Пример 2.5.3.

▷ Пусть K - поле, X - произвольное множество, $V = F(X; K) := \{f : X \to K\}$ - *функциональное пространство.*

+: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$.

$\cdot$: $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$.

Замечание 2.5.4.

▷ К этому примеру сводится предыдущий при $X = 1, .., n$.

ОПР 2.5.5 (Подпространство).
Подпространство U векторного пространства V над полем K - это подмножество V, удовлетворяющее свойствам:
1) $0 \in U$.
2) $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$.
3) $\lambda \in K, a \in U \Rightarrow \lambda a \in U$.

Тогда U образует векторное пространство над K.

Понятие *базиса* векторного пространства как максимальной линейно независимой системы векторов уже введено; доказано, что это определение равносильно тому, что любой вектор выражается единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса.

УТВ 2.5.6.

▷ Если векторное пространство V над полем K имеет базис $e_1, ..., e_n$ из n векторов, то $V \simeq K^n$.

▷ *Доказательство.*

- Установим соответствие следующим образом:

$$a = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n \leftrightarrow (\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Это - изоморфизм. Действительно, если $b = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$, то

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)e_n \leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n).$$

$$\lambda a = (\lambda a_1)e_1 + ... + (\lambda a_n)e_n \leftrightarrow (\lambda a_1, ..., \lambda a_n).$$

□

ОПР 2.5.7 (Алгебра)**.**
Алгебра A над полем K - это алгебраическая структура $\langle A; +, \cdot, a \mapsto \lambda a, \lambda \in K \rangle$, где $\langle A; +, a \mapsto \lambda a \rangle$ - векторное пространство над K, $\langle A; +, \cdot \rangle$ - кольцо, $(\lambda a)b = \lambda(ab) \forall a, b \in A \ \forall \lambda \in K$.

Алгебра A называется ассоциативной, коммутативной, с единицей, без делителей нуля, если этим свойствам удовлетворяет умножение в A.

Пусть $e_1, ..., e_n$ - базис алгебры A над полем K, $a = \sum\limits_i \alpha_i e_i, \ b = \sum\limits_j \beta_j e_j$. Тогда

$$ab = \sum_i \sum_j (\alpha_i \beta_j)(e_i e_j).$$

A коммутативна $\Leftrightarrow e_i e_j = e_j e_i$. A ассоциативна $\Leftrightarrow (e_i e_j)e_k = e_i(e_j e_k)$.

Пример 2.5.8.

▷ Поле **C** *комплексных чисел* как алгебра над **R** с базисом $\{1, i\}$, задаваемое таблицей умножения для базиса:

$\cdot$	1	i
1	1	i
i	i	-1

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Умножение в **C** ассоциативно, коммутативно, с единицей. Обратные для ненулевых элементы:

$$(a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right) = 1.$$

2.6 Алгебра матриц

ОПР 2.6.1 (Матрица)**.**
Матрица порядка (размера) $s \times n$ над полем (кольцом) K - это прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & ... & a_{sn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \ a_{ij} \in K,$$

с s строками $(a_{i1} ... a_{in})$ и n столбцами $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix}$. При $s = n$ она называется квадратной порядка n.

Теорема 2.6.2.

▷ Множество $M_n(K)$ всех квадратных матриц порядка n над полем K образует алгебру над K относительно следующих операций:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}),\ \lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij}),\ (a_{ij})(b_{ij}) := (c_{ij}),\ \text{где } c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}.$$

Более того, $M_n(K)$ - ассоциативная алгебра с единицей, некоммутативная при $n \geq 2$.

▷ *Доказательство.*

- Свойства векторного пространства сразу следуют из определений операций сложения и умножения на скаляр.
- 1) Пусть E_{ij} - матрица, в которой на месте (i, j) стоит 1, а на остальных местах - нули. Тогда

$$A = (a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

  Таким образом, $\{E_{ij}\}$ - базис $M_n(K)$ как векторного пространства над K.

  Если $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}$, то будем писать $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
- 2) Докажем дистрибутивность.

  $(a_{ij})((b_{ij}) + (c_{ij})) = (a_{ij})(b_{ij} + c_{ij}) = \left(\sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right) = \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_k a_{ik}c_{kj}\right).$

  Аналогично для дистрибутивности с другой стороны.
- 3) Ассоциативность достаточно проверить на базисе. По правилу умножения $E_{ij}E_{jk} = E_{ik},\ E_{ij}E_{kl} = 0$ при $j \neq k$.

$$(E_{ij}E_{kl})E_{pq} = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq k \text{ или } l \neq p, \\ E_{iq} \text{ иначе} \end{cases} = E_{ij}(E_{kl}E_{pq}).$$

$$(\lambda E_{kl})E_{pq} = \begin{cases} 0 \text{ при } l \neq p, \\ \lambda E_{kq} \text{ иначе} \end{cases} = \lambda(E_{kl}E_{pq}).$$

- 4) Единица относительно умножения - это *единичная матрица* $E := \mathrm{Diag}(1, ...1)$.
- 5) Некоммутативность при $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Алгебра матриц снабжена также операцией *транспонирования*: $(a_{ij})^T := (a_{ji})$. Ясно, что

$$(A + B)^T = A^T + B^T,\ (\lambda A)^T = \lambda(A^T), (AB)^T = B^T A^T.$$

Все перечисленные операции можно распространить и на прямоугольные матрицы, надо лишь позаботиться о согласовании размеров. А именно:

- сложение определено только для матриц одинакового размера;
- при умножении матрицы порядка $s \times r$ на матрицу порядка $r \times n$ получается матрица порядка $s \times n$; в частности, при умножении столбца высоты n на строку длины n получается квадратная матрица порядка n, составленная из всевозможных произведений элементов столбца и строки, а при умножении строки на столбец получается матрица из одного элемента (фактически это скалярное произведение в координатах);
- при транспонировании матрицы порядка $s \times n$ получается матрица порядка $n \times s$, в частности, при транспонировании строки получаем столбец и наоборот.

Введение подобного "скалярного произведения" строки на столбец позволяет проще запомнить формулу для умножения матриц. В произведении матриц на месте (i, j) стоит не что иное, как произведение i-й строки первого сомножителя на j-й столбец второго.

2.7 Системы линейных уравнений (метод Гаусса)

Пусть дана система s линейных уравнений от n неизвестных над полем K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ ...... \\ a_{s1}x_1 + ... + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \quad (*)$$

ОПР 2.7.1 (Матрицы системы уравнений)**.**
Матрицы

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & ... & a_{sn} \end{pmatrix}, \ \widetilde{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & ... & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

называются соответственно матрицей коэффициентов системы и расширенной матрицей системы.

Столбцы $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *называются соответственно столбцами неизвестных и правых частей системы.*

Тогда система $(*)$ имеет матричную запись Ax = b и векторную запись $a_1x_1+...+a_nx_n = b$, где $a_1, ..., a_n$ - столбцы матрицы A.

ОПР 2.7.2 (Совместные, несовместные, равносильные системы)**.**

Система называется совместной над полем K, если $\exists$ *решение* $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in K^n |\ Ax^0 = b$, *и несовместной в противном случае. Две системы называются равносильными, если множества их решений совпадают.*

Следующие *элементарные преобразования* системы переводят её в равносильную:
1) Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на скаляр.
2) Перестановка уравнений.
3) Умножение уравнения на ненулевой скаляр.
К любому из этих преобразований существует обратное.

Элементарные преобразования системы задают *элементарные преобразования строк* расширенной матрицы $\widetilde{A}$. Все их можно представить как результат умножения матрицы на некую матрицу C слева: $\widetilde{A} \mapsto \widetilde{A}C$.

1) Прибавление к j-й строке i-й строки, умноженной на скаляр λ. Здесь C - *трансвекция* $C = E + \lambda E_{ij}$ - матрица, у которой на диагонали стоят единицы, на месте $(i, j)\ -\ \lambda$, на остальных местах - нули.

2) Перестановка i-й и j-й строк. Здесь $C = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ - матрица, у которой на диагонали, кроме мест (i, i) и (j, j), а также на местах (i, j) и (j, i) стоят единицы, на остальных местах - нули.

3) Умножение i-й строки на скаляр λ. Здесь $C = \mathrm{Diag}(1, ..., \lambda, ..., 1)$ - матрица, в которой на месте (i, i) стоит λ, на остальной диагонали - единицы, на остальных местах - нули.

Можно рассматривать и элементарные преобразования столбцов. Тогда матрица будет умножаться на матрицу преобразования справа: $\widetilde{A} \mapsto C\widetilde{A}$.

ОПР 2.7.3 (Ведущий элемент)**.**
Ведущий элемент строки - это её первый слева ненулевой элемент.

ОПР 2.7.4 (Ступенчатая матрица)**.**
Матрица называется ступенчатой, если последовательность номеров её строк возрастает, нулевые строки - снизу.

Ступенчатая матица называется разрешённой, если ведущие элементы равны 1 и они являются единственными ненулевыми элементами своих столбцов.

Теорема 2.7.5.

▷ Всякую матрицу над полем элементарными преобразованиями строк можно привести к ступенчатому и даже к разрешённому виду.

▷ *Доказательство.*

- Можно считать $A \neq 0$. Тогда переставим ненулевой элемент первого слева ненулевого столбца A в первую строку. Пусть это столбец k. (Можно переставить строки, а можно обойтись и без этого - прибавить к первой строке ту, в которой содержится этот ненулевой элемент).

  Теперь прибавим к i строке $(i = 2, ..., s)$ первую строку, умноженную на $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$, где α_i - k-й элемент i-й строки. Получим матрицу, в которой в первых (k - 1) столбцах стоят нули, а в k-м столбце только первый элемент ненулевой. Исключим из рассмотрения первую строку и первые k столбцов, применим тот же процесс к оставшейся матрице и т.д. Получим ступенчатую матрицу.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_s & \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Далее разделим каждую ненулевую строку на её ведущий элемент, а затем, прибавляя последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, ко всем остальным, получим нули над последним ведущим элементом, затем (прибавляя предпоследнюю строку) над предпоследним и т.д. В итоге получится матрица разрешённого ступенчатого вида.

$$\begin{pmatrix} \dots & \beta_1 & \dots \\ \dots & \beta_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \beta_r & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

□

Теперь достаточно научиться решать системы Cx = d, где C - ступенчатая разрешённая матрица.

Пусть r - число ведущих элементов матрицы C, $\widetilde{r}$ - матрицы $\widetilde{C}$. Тогда или $\widetilde{r} = r$, или $\widetilde{r} = r + 1$.

1) Во втором случае система несовместна, поскольку она содержит (r + 1)-е уравнение вида $0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_n = d_{r+1} \neq 0$.

2) $\widetilde{r} = r = n$. Тогда ∃! решение $x_1 = d_1, ..., x_n = d_n$.

3) $\widetilde{r} = r < n$. Система имеет более одного решения. Для простоты предположим, что ведущие элементы матрицы C расположены в первых n столбцах (если это не так, перенумеруем неизвестные). Перенесём вправо переменные $x_{r+1}, ..., x_n$ вместе с коэффициентами. Получим равносильную систему вида

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - \sum\limits_{j>r} C_{1j} x_j, \\ \dots\dots \\ x_r = d_r - \sum\limits_{j>r} C_{rj} x_j. \end{cases}$$

Тогда, придавая любые значения из поля K переменным $x_{r+1}, ...x_n$ и вычисляя по ним $x_1, ..., x_r$, получим все решения системы. Таким образом, отображение $K^{n-r} \to K^n$ по правилу $(x_{r+1}, ..., x_n) \mapsto (d_1 - \sum_{j>r} C_{1j} x_j, ...)$ отображает пространство K^{n-r} на множество всех решений системы. Такое множество называется *общим решением системы.*

Система называется *однородной*, если её правые части нулевые, то есть она имеет вид Ax = 0.

Заметим, что решения однородной системы удовлетворяют *принципу суперпозиции*: если x^1 и x^2 - решения системы Ax = 0, то и любая их линейная комбинация $\lambda x^1 + \mu x^2,\ \lambda, \mu \in K$ - тоже её решение. Таким образом, множество решений однородной системы есть векторное подпространство в K^n с базисом $f_1, ..., f_{n-r}$, где f_i - вектор, первые r координат которого - числа $-C_{1i}, ..., -C_{ri}$, на $(r+i+1)$-м месте стоит единица, на остальных - нули. Базис пространства решений называется *фундаментальной системой решений (ФСР).*

Далее, заметим, что:

- если x^0 - решение системы Ax = b, x^1 - решение однородной системы Ax = 0, то $x^0 + x^1$ - также решение системы Ax = b;
- если x^0 и x^1 - решения системы Ax = b, то $x^1 - x^0$ - решение однородной системы Ax = 0.

Множество решений неоднородной системы Ax = b - это *линейное многообразие* $x^0 + U := \{x^0 + u |\ u \in U\}$, где x^0 - частное решение системы Ax = b, U - общее решение однородной системы Ax = 0. Можно представлять себе линейное многообразие как подпространство, "сдвинутое" на некоторый не принадлежащий ему вектор. Принцип суперпозиции в нём уже не выполняется (хотя понятие базиса есть), и это приводит к отличиям его свойств от свойств векторного пространства.

Частное решение (как и ФСР) можно найти из метода Гаусса. Частным решением будет, например, вектор $(d_1, ..., d_r, 0, ..., 0)$.

Следствие 2.7.6.

▷ Однородная система s линейных уравнений от n неизвестных имеет ненулевое решение при s < n.

2.8 Базис и размерность векторного пространства

Теорема 2.8.1.

▷ Пусть V - векторное пространство над полем K и пусть V имеет базис из n векторов. Тогда

1) Любые m векторов из V при m > n линейно зависимы.

2) Любой другой базис V состоит из n векторов.

▷ *Доказательство.*

- 1) Пусть $e_1, ..., e_n$ - базис V, $a_1, ..., a_m \in V$. Тогда $a_i = \sum\limits_j a_{ij}e_j,\ a_{ij} \in K,\ i = 1, ..., m$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_i a_{ij} e_j = \sum\limits_j \left(\sum\limits_i \lambda_i a_{ij}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall j \sum\limits_j \lambda_i a_{ij} = 0$, то есть $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ - решение однородной системы $\sum\limits_{j=1}^{m} x_j a_{ij} = 0,\ j = 1, ..., n.$
  Так как n < m, то по следствию из метода Гаусса система имеет ненулевое решение $\lambda_1, ..., \lambda_m \Rightarrow a_1, ..., a_m$ линейно зависимы.
- 2) Если $e_1, ..., e_n,\ a_1, ..., a_m$ - базисы V, то $m \leq n$ и $n \leq m$ ввиду (1). Значит, m = n.

□

ОПР 2.8.2 (Размерность пространства).
Число векторов в любом базисе называется размерностью векторного пространства V и обозначается $\dim V$ *или* $\dim_k V$.

Следствие 2.8.3.

▷ Любая система из $\dim V$ линейно независимых векторов является базисом V.

ОПР 2.8.4 (Линейная оболочка).
Пусть $a_1, ..., a_n$ - векторы из пространства V над полем K. Тогда множество

$$\langle a_1, ..., a_s\rangle := \left\{\sum_{j=1}^{s} \lambda_i a_i |\ \lambda_i \in K\right\}$$

называется линейной оболочкой $a_1, ..., a_s$.

Очевидно, это подпространство из V. Очевидно, что векторное пространство является линейной оболочкой своего базиса и вообще любой системы векторов из этого пространства, включающей базис.

ОПР 2.8.5 (Ранг системы векторов).
Ранг системы векторов - это размерность их линейной оболочки, то есть максимальное число линейно независимых векторов в этой системе.

На самом деле $\langle a_1, ..., a_s\rangle$ - это минимальное по включению подпространство, содержащее $a_1, ..., a_s$.

УТВ 2.8.6.

▷ Пусть V - векторное пространство над полем K, $\dim V < \infty$. Пусть U - подпространство V. Тогда

1) U имеет конечный базис, $\dim U \leq \dim V$.

2) Любой базис U можно дополнить до базиса V.

3) $U \neq V \Rightarrow \dim U < \dim V$.

▷ *Доказательство.*

- 1) Если $U = \{0\}$, то его базис пуст, $\dim U = 0$. Пусть $U > \{0\}$. Тогде $\exists f_1 \in U|\ f_1 \neq 0$. Тогда $\langle f_1\rangle \subseteq U$.
  Если $\langle f_1\rangle = U$, то $\{f_1\}$ - базис U. Если $\langle f_1\rangle < U$, то $\exists f_2 \in U|\ f_2 \notin \langle f_1\rangle$. Тогда $\langle f_1, f_2\rangle \subseteq U$ и т.д.
  Этот процесс оборвётся на базисе, поскольку число линейно независимых векторов из U не больше, чем $\dim U$.
- 2) Пусть $f_1, ..., f_k$ - базис U. Если U = V, то это базис V. Если U < V, то $\exists f_{k+1} \notin U$ и т.д.
- 3) Вытекает из (2).

□

2.9 Суммы и пересечения подпространств

.

ОПР 2.9.1 (Сумма подпространств)**.**
Сумма подпространств - это линейная оболочка их объединения:

$$U + W := \{u + w|\ u \in U, w \in W\}.$$

Легко проверить, что пересечение подпространств (обычное теоретико-множественное) тоже будет подпространством.

Теорема 2.9.2.

▷ Мы знаем, что для мощности (числа элементов) конечных множеств справедлива формула: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Оказывается, существует аналог этой формулы для размерности конечномерных подпространств:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

▷ *Доказательство.*

- Пусть $e_1, ..., e_r$ - базис $U \cap W,\ e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_s$ - базис U, $e_1, ..., e_r, g_1, ..., g_t$ - базис W. Достаточно показать, что $e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_t$ - базис U + W, поскольку тогда $\dim(U + W) = r + s + t = (r + s) + (r + t) - r$.
- Линейная независимость: пусть $\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_j f_j + \sum \gamma_k g_k = 0$. Покажем, что все коэффициенты равны нулю.
  Тогда $\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_j f_j = -\sum \gamma_k g_k \in U \cap W$. Левая часть принадлежит U, правая - W, а значит, сам вектор принадлежит $U \cap W$. Но разложение вектора из W по базису W однозначно, а любой вектор из $U \cap W$ разлагается только по векторам $e_1, ..., e_r$, но не по $g_1, ..., g_t$. Поэтому $\gamma_k = 0\ \forall k$. Тогда $\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_j f_j = 0$. $e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_s$ - базис $\Rightarrow$ все слагаемые нулевые.
- Максимальность: пусть $u + w \in U + W,\ u = \sum \alpha_i e_i + \sum \beta_j f_j,\ w = \sum \alpha'_i + \sum \gamma_k g_k$. Тогда $u + w = \sum(alpha_i + \alpha'_i)e_i + \sum \beta_j f_j + \sum \gamma_k g_k$.

□

ОПР 2.9.3 (Прямая сумма)**.**
Сумма $U + W$ подпространств U и W называется прямой, если $\forall$ вектора из $U + W$ $\exists!$ запись в виде $u + w,\ u \in U,\ w \in W$. Аналогично определяется прямая сумма нескольких подпространств. Обозначение: $U \oplus W$.

УТВ 2.9.4.

▷ Сумма U + W прямая $\Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$.

▷ *Доказательство.*

- ($\Rightarrow$) Пусть $a \in U \cap W,\ a \neq 0$. Тогда $a = a + 0 = 0 + a$ - противоречие с единственностью записи.
- ($\Leftarrow$) Пусть $u + w = u' + w',\ u, u' \in U,\ w, w' \in W$. Тогда $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\} \Rightarrow u = u',\ w = w'$.

□

УТВ 2.9.5.

▷ Пусть V - векторное пространство над полем K, $\dim V < \infty$. Пусть $U \leq V$. Тогда $\exists W \leq V|\ V = U \oplus W$.

▷ *Доказательство.*

- Пусть $e_1, ..., e_r$ - базис U. Его можно дополнить до базиса V: $e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_s$. Пусть $W = \langle f_1, ..., f_s\rangle$, тогда $U + W = V$ и, в силу единственности разложения по базису, если $v = \sum \lambda_i e_i = \sum \mu_j f_j \in U \cap W$, то $v = 0$.

□

Отображение $\mathrm{pr} : V \to U$ по правилу $v = u + w \mapsto u$ называется *проецированием* V на U параллельно W. Оно линейно: $\mathrm{pr}\,(u + u') = \mathrm{pr}\,u + \mathrm{pr}\,u',\ \mathrm{pr}\,(\lambda u) = \lambda \mathrm{pr}\,u$.

2.10 Определитель

У нас уже были определители матриц порядка 2 и 3; кроме того, определителем матрицы порядка 1 является её единственный элемент. Определители можно рассматривать как функции от строк или столбцов матрицы. Как мы знаем, эти функции являются n-линейными (n - порядок матрицы), кососимметричными и нормированными относительно стандартного базиса

$$(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1) \text{ или } \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

Наша задача - обобщить понятие определителя. Оказывается, функция однозначно определяется по этим трём свойствам; но, чтобы доказать это, нужно сначала ввести новое понятие - перестановки.

ОПР 2.10.1 (Перестановка)**.**
Перестановка - это последовательность $(j_1,...,j_n)$, такая, что в ней встречаются все числа $1,...,n$.

ОПР 2.10.2 (Инверсия)**.**
Пара (j_k,j_l) называется инверсией, если $k<l$, а $j_k>j_l$.

ОПР 2.10.3 (Чётные и нечётные перестановки)**.**
Перестановка называется чётной, если число её инверсий чётно, и нечётной иначе. По определению знак чётной подстановки равен $+1$, нечётной - -1.

ОПР 2.10.4 (Транспозиция)**.**
Транспозиция - это перемена двух мест подстановки $j_k \leftrightarrow j_l$.

Лемма 2.10.5.

▷ 1) Транспозиция меняет чётность перестановки.

2) При $n \geq 2$ число чётных подстановок равно числу нечётных и равно $n!/2$.

▷ *Доказательство.*

- 1) Транспозиция двух соседних элементов либо добавляет, либо удаляет одну инверсию.
  Если элементы транспозиции разделены s символами: $...j_k i_1...i_s j_l...$, то, использущя транспозиции соседних элементов, переставим j_k вправо с помощью s + 1 транспозиций, а затем j_l влево с помощью s транспозиций. Знак при этом изменится 2s + 1 раз.
- 2) Пусть $n \geq 2$, Q - множество чётных подстановок, B - множество нечётных. Отображение $f:A\to B$, являющееся транспозицией первых двух элементов, взамино однозначно отображает A в B. Значит, $|A| = |B| = n!/2$.

□

Лемма 2.10.6.

▷ Если f - n-линейная функция, то f - кососимметричная функция ⇔ она обращается в ноль при двух равных аргументах.

▷ *Доказательство.*

- $(\Rightarrow)$ $f(...,a,...,a,...) = f(...,0,...,a,...) + f(...,a,...,0,...) = f(...,0,...,a,...) - f(...,0,...,a,...) = 0.$
- $(\Leftarrow)$ $f(...,a+b,...,a+b,...) = 0 \Rightarrow f(...,a,...,b,...) + f(...,b,...,a,...) = 0.$

□

Знаком $\sum\limits_{(j_1,...,j_n)}$ будем обозначать сумму по всевозможным перестановкам.

Теорема 2.10.7.

▷ Пусть V - векторное пространство над полем K с базисом $e_1,...,e_n$. Тогда на V ∃! n-линейная кососимметричная функция, нормированная относительно базиса $e_1,...,e_n$.

Если $V = K^n$ - пространство строк длины n, а $e_1,...,e_n$ - стандартный базис, то такая функция от строк матрицы A называется *определителем* и обозначается $\det A$.

▷ *Доказательство.*

- (!) Пусть $a_1, ..., a_n \in V,\ a_i = \sum\limits_j a_{ij} e_j,\ a_{ij} \in K$. Пусть $f : V^n \to K$ - функция, обладающая указанными свойствами. Тогда
$f(a_1, ..., a_n) = f(\sum\limits_{j_1} a_{1j_1} e_{j_1}, ..., \sum\limits_{j_n} a_{nj_n} e_{j_n}) = \sum\limits_{j_1} ... \sum\limits_{j_n} a_{1j_1} ... a_{nj_n} f(e_{j_1}, ..., e_{j_n}) =$
$\sum\limits_{(j_1,...,j_n)} a_{1j_1} ... a_{nj_n} f(e_{j_1}, ..., e_{j_n}) = \sum\limits_{(j_1,...,j_n)} a_{1j_1} ... a_{nj_n} \operatorname{sgn}(e_{j_1}, ..., e_{j_n})$.
Это выражение не зависит от вида самой функции.
Здесь мы воспользовались: в первом равенстве - единственностью разложения по базису, во втором - n-линейностью, в третьем - кососимметричностью (если $j_k = j_l$, то соответствующее слагаемое нулевое, поэтому остаётся только сумма по перестановкам), в четвёртом - нормированностью.
- ($\exists$) Надо доказать, что функция

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{(j_1,...,j_n)} a_{1j_1} ... a_{nj_n} \operatorname{sgn}(j_1, ..., j_n)\ (*)$$

действительно обладает свойствами определителя.
1) n-линейность. Если фиксировать все векторы, кроме a_i, то наша функция имеет вид $c_1 a_{i1} + ... + c_n a_{in},\ c_1, ..., c_n \in K$. Такая функция линейна по $(a_{i1}, ..., a_{in})$.
2) кососимметричность. Пусть $a_k = a_l,\ k < l$. Надо доказать, что $f(a_1, ..., a_n) = 0$. Имеем $a_{kj} = a_{lj}\ \forall j$. $a_{1j_1} ... a_{kj_k} ... a_{lj_l} ... a_{nj_n} = a_{1j_1} ... a_{lj_l} ... a_{kj_k} ... a_{nj_n} = a_{1j_1} ... a_{lj_k} ... a_{kj_l} ... a_{nj_n}$ (сделали транспозицию в перестановке). $\operatorname{sgn}(j_1 ... j_k ... j_l ... j_n) = -\operatorname{sgn}(j_1 ... j_l ... j_k ... j_n)$. Сумма - 0.
3) нормированность. $f(e_1, .., e_n) = \operatorname{sgn}(1, ..., n) = 1$.

□

Следствие 2.10.8.

▷ $\det E = 1$.

Вычислять определитель по общей формуле (*) не очень удобно, поскольку эта сумма содержит n! слагаемых, и это число очень быстро растёт с увеличением n. Поэтому широко используются различные приёмы, позволяющие ускорить вычисление определителя.

УТВ 2.10.9.

▷ При прибавлении к одной строке матрицы другой строки, умноженной на скаляр, определитель не изменяется.

▷ *Доказательство.*

- Можно считать, что это первые две строки.
$\det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + 0.$

□

УТВ 2.10.10.

▷ Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов её главной диагонали.

▷ *Доказательство.*

- Пусть $a_{1j_1} ... a_{nj_n} \neq 0$ - произведение в формуле $\det A$. Тогда $j_1 \geq 1, ..., j_n \geq n$. Если $j_k > k$, то $1 + ... + n > 1 + ... + n$. Противоречие. Поэтому $j_k = k\ \forall k$. Определитель имеет вид $a_{11} ... a_{nn}$, поскольку знак тождественной перестановки $(1, ..., n)$ равен 1.

□

УТВ 2.10.11.

▷ Определитель равен 0 $\Leftrightarrow$ строки матрицы линейно зависимы.

▷ *Доказательство.*

- Элементарными преобразованиями 1 рода (прибавление строки, умноженной на скаляр) приведём матрицу A к ступенчатому виду C. Тогда ввиду ранее доказанного $\det A = \det C = 0 \Leftrightarrow c_{nn} = 0 \Leftrightarrow$ некоторая строка линейно выражается через другие строки.

$\square$

УТВ 2.10.12.

▷ При транспонировании матрицы её определитель не меняется.

▷ *Доказательство.*

- Пусть $B = A^T = (b_{ij})$. Тогда $b_{ij} = a_{ji}$. Имеем $\det B = \sum_{(j_1,...,i_n)} b_{1j_1}...b_{nj_n}\mathrm{sgn}\,(j_1,...,j_n) = \sum_{(j_1,...,i_n)} a_{j_1 1}...a_{j_n n}\mathrm{sgn}\,(j_1,...,j_n)$.
  Перепишем произведение $a_{j_1 1}...a_{j_n n}$ по порядку строк, переставляя сомножители. Получим $a_{1l_1}...a_{nl_n}$. При этом $\mathrm{sgn}\,(j_1,...,j_n) = \mathrm{sgn}\,(j_1...j_n)\mathrm{sgn}\,(1...n) = \mathrm{sgn}\,(1...n)\mathrm{sgn}\,(l_1...l_n)$ (применили одну и ту же транспозицию к обеим перестановкам) $= \mathrm{sgn}\,(l_1...l_n)$.

$\square$

Следствие 2.10.13.

▷ Всякое свойство определителя в терминах строк справедливо и для столбцов. В частности, для нижней треугольной матрицы справедливо доказанное ранее свойство верхней треугольной.

УТВ 2.10.14.

▷ Определитель *полураспавшейся* матрицы $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где B, C - квадратные матрицы (если D = 0, матрица называется *распавшейся*), равен произведению определителей её диагональных клеток: $\det A = \det B \det C$.

▷ *Доказательство.*

- Приведём B и C к ступенчатому виду, распространяя элементарные преобразования на длинные строки A. Тогда $\det A$ равен произведению элементов главной диагонали и равен $\det B' \det C' = \det B \det C$, где B', C' - полученные из B и C ступенчатые матрицы.

$\square$

То же верно и для полураспавшейся матрицы другого вида $\begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$. Для доказательства достаточно её транспонировать.

Теорема 2.10.15.

▷ Определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей.

▷ *Доказательство.*

- Пусть $\det A = 0$. Тогда строки A линейно зависимы: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \exists \lambda_i \neq 0 | \sum \lambda_i a_i = 0$.
  Пусть $S = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Тода последнее равенство можно переписать в виде $SA = (0, ..., 0),\ S \neq (0, ..., 0)$.
  Но тогда $S(AB) = (SA)B = 0 \cdot B = 0,\ S \neq 0$, то есть строки AB линейно зависимы, $\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det B = \det A \det B$.
  Пусть $\det A \neq 0$ и пусть $B = (b_1, ..., b_n)$, где b_j - столбцы. Рассмотрим функцию $f(b_1, ..., b_n) = \dfrac{\det AB}{\det A}$.
  Покажем, что она совпадает с $\det B$.
- а) n-линейность достаточно проверить по первому столбцу. Если $b_1 = b_1' + b_1''$, то
  $f(b_1' + b_1'', b_2, ..., b_n) = \dfrac{\det(A \cdot (b_1, ..., b_n))}{\det A} = \dfrac{\det(A(b_1' + b_1''), Ab_2, ..., Ab_n)}{\det A} = \dfrac{\det(Ab_1' + Ab_1'', Ab_2, ..., Ab_n)}{\det A} = \dfrac{\det(Ab_1', ...) + \det(Ab_1'', ...)}{\det A} = f(b_1', ..., b_n) + f(b_1'', ..., b_n)$.
  Аналогично проверяется, что $f(\lambda b_1, ..., b_n) = \lambda f(b_1, ..., b_n)$.
- б) кососимметричность. Если два столбца совпадают, то совпадают и два столбца AB, поэтому $\det(AB) = 0,\ f(b_1, ..., b_n) = 0$.
- в) нормированность. Если $e_1, ..., e_n$ - стандартный базис, то $f(e_1, ..., e_n) = \dfrac{\det(AE)}{\det A} = \dfrac{\det A}{\det A} = 1$.
- Ввиду единственности определителя $\det B = f(b_1, ..., b_n) = \dfrac{\det(AB)}{\det A},\ \det(AB) = \det A \det B$.

$\square$

2.11 Разложение определителя по строке (столбцу)

ОПР 2.11.1 (Алгебраическое дополнение).

Пусть $A = (a_{ij})$ - матрица порядка n, M_{ij} - матрица, полученная из A вычёркиванием i-й строки и j-го столбца. Она называется дополнительной матрицей к месту (i, j) в матрице A. Число $\det M_{ij}$ *называется дополнительным минором к месту (i, j), а число $A_{ij} := \det M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением к месту (i, j).*

Теорема 2.11.2.

▷ В указанных обозначениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} \det A, & i = k, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

▷ *Доказательство.*

- Имеем $(a_{i1}, ..., a_{in}) = (a_{i1}, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, ..., a_{in})$.
  Пусть k = i. Ввиду линейности определителя по i-й строке чисел

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & a_{ij} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

  В написанной матрице переместим a_{ij} в позицию (1, 1). Знак определителя изменится $(i-1)+(j-1) = (i+j)(\text{mod}2)$ раз. Тогда матрица станет полураспавшейся с диагональными матрицами (a_{ij}) (из одного элемента) и M_{ij}. По свойству полураспавшихся матриц

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

- Пусть $k \neq i$. Пусть матрица B получается из A заменой k-й строки на i-ю. Тогда B имеет две одинаковые строки и ввиду доказанной формулы (при разложении по k-й строке)

$$0 = \det B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}.$$

□

ОПР 2.11.3 (Обратимая матрица).

Матрица A называется обратимой, если $\exists A^{-1}|\ AA^{-1} = A^{-1}A = E$. В этом случае $\det A \neq 0$ *(такая матрица называется невырожденной).*

УТВ 2.11.4 (Формула для обратной матрицы).

▷ Если $\det A \neq 0$, то A обратима и

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(именно так! Матрица из алгебраических дополнений транспонируется!).

▷ *Доказательство.*

- Пусть $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A}$, $AB = C = (c_{ij})$. Тогда
  $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\dfrac{A_{jk}}{\det A} = \dfrac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \sigma_{ij}$,
  σ_{ij} (*символ Кронеккера*) - число, стоящее в матрице E на месте (i, j) и равное 1 при i = j и 0 иначе.

□

Следствие 2.11.5.

▷ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Теорема 2.11.6 (Формулы Крамера)**.**

▷ Пусть Ax = b - *крамерова система* линейных уравнений, то есть A - квадратная матрица и $\det A \neq 0$. Тогда ∃! решение

$$x_0^i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

где матрица A_i получается из A заменой i-го столбца на столбец правых частей.

▷ *Доказательство.*

- Если $\det A \neq 0$, то $\exists A^{-1}$. Если $x^0 = A^{-1}b$, то $Ax^0 = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Eb = b$, решение ∃. Покажем единственность. Если $Ax^0 = b$, то умножением на A^{-1} получим $x^0 = A^{-1}b$. Вид решения: $x_i^0 = \sum_{j=1}^{n}(A^{-1})_{ij}b_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ji}}{\det A}b_j = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} b_j A_{ji} = \frac{\det A_i}{\det A}$.

□

2.12 Теорема о ранге для матриц

ОПР 2.12.1 (Минор)**.**
Пусть A - матрица порядка s×n над полем K. Минор порядка r из A - это определитель квадратной подматрицы порядка r из A.

ОПР 2.12.2 (Базисный минор, минорный ранг)**.**
Базисный минор - это ненулевой минор наименьшего порядка из A. Его порядок - минорный ранг матрицы A. Если A нулевая, то минорный ранг равен 0.

ОПР 2.12.3 (Строчный и столбцовый ранг)**.**
Строчный ранг матрицы A - это ранг системы её строк (то есть размерность их линейной оболочки), столбцовый - ранг системы столбцов как векторов в пространстве K^n (K^S).

Теорема 2.12.4 (Теорема о ранге)**.**

▷ Строчный, столбцовый и минорный ранги любой матрицы совпадают. Это число называется просто рангом матрицы и обозначается $\operatorname{rk} A$.

▷ *Доказательство.*

- Докажем сначала совпадение столбцового и минорного рангов матрицы A порядка $s \times n$ над полем K. Если A = 0, то очевидно. Пусть $A \neq 0$. Тогда в A есть базисный минор. Для простоты предположим, что соответствующая матрица расположена в первых r строках и первых r столбцах. Покажем, что первые r столбцов образуют базис системы столбцов A.
- 1. Линейная независимость. Если первые r столбцов линейно зависимы, то линейно зависимы столбцы, составленные из их первых r компонент, с теми же коэффициентами, и тогда определитель (минор) матрицы $r \times r$ равен нулю. Но он базисный и поэтому не равен нулю. Противоречие.
- 2. Максимальность. Покажем, что j-й столбец A при $j \geq r$ линейно выражается через первые r столбцов A. Пусть $1 \leq i \leq s$ и

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & ... & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det M = 0$ при i > r, так как $\det M$ - минор порядка r + 1, и при $1 \leq i \leq r$, так как M содержит две одинаковые строки. Разложим $\det M$ по последней строке M:

$$0 = \det M = a_{i1}A_{(r+1)1} + ... + a_{ir}A_{(r+1)r} + a_{ij}D,$$

где A_{kl} - алгебраическое дополнение к месту (k, l) в матрице M, D - базисный минор. Отсюда $a_{ij} = \lambda_1 a_{i1} + ... + \lambda_r a_{ir}$, где $\lambda_k = -A_{(r+1)k}/D$. Отметим, что λ_k не зависит от индекса i, поскольку при взятии алгебраического дополнения последняя строка M вычёркивается. Это означает:

$$(j\text{-й столбец}) = \lambda_1(1\text{-й столбец}) + ... + \lambda_r(r\text{-й столбец}).$$

- Далее, строчный ранг A равен столбцовому рангу A^T, который равен минорному рангу A^T и, значит, минорному рангу A, поскольку при транспонировании определители не меняются.

□

2.13 Задание подпространств и линейных многообразий системами линейных уравнений

Как мы уже знаем, метод Гаусса даёт множество решений U однородной системы линейных уравнений Ax = 0 от n переменных над полем K - это подпространство размерности $d = n - r = n - \operatorname{rk} A$. Множество же решений неоднородной системы Ax = b - это линейное многообразие $L = x^0 + U$, где x^0 - произвольное частное решение.

Теорема 2.13.1.

▷ Всякое подпространство U из K^n, где K - поле, и всякое линейное многообразие $L = x^0 + U \subseteq K^n$ является решением подходящей системы n - d линейных уравнений, где $d = \dim U$.

▷ *Доказательство.*

- Пусть C - матрица порядка $n \times d$ над K, столбцы которой образуют базис U, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец переменных, $x^0 \in K^n$ - данный столбец, $x^0 \notin U$.
  Рассмотрим матрицу $\widetilde{C} := (C|\ x - x^0)$ порядка $x \times (d+1)$. Приведём C к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, распространяя преобразования на расширенные строки $\widetilde{C}$. Тогда в первых d столбцах возникнут нули в последних $n - d$ строках, поскольку $\operatorname{rk} C = d$. Компоненты вектора, составленного из последних n - d компонент последнего столбца матрицы, будет иметь вид $\lambda_{i1}x_1 + ... + \lambda_{in}x_n - b_i$.
  Пусть теперь
  $$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & ... & \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{(n-d)1} & ... & \lambda_{(n-d)n} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-d} \end{pmatrix}.$$
  Тогда этот вектор запишется в виде Ax - b.
  Далее, $x \in L = x^0 + U \Leftrightarrow x - x^0 \in U \Leftrightarrow x - x^0$ - линейная комбинация столбцов C $\Leftrightarrow \operatorname{rk} C = \operatorname{rk} \widetilde{C} \Leftrightarrow Ax - b = 0$ (поскольку слева от Ax - b стоят нули, а выше их - ступенчатая матрица) $\Leftrightarrow Ax = b$.
  Таким образом, система Ax = b задаёт L. Чтобы задать U, надо в этом рассуждении взять $x^0 = 0$.

□

ОПР 2.13.2 (Базис линейного многообразия).
Пусть $L = x^0 + U$ - линейное многообразие, $x^0 \notin U$, $u_1, ..., u_d$ - базис подпространства U. Тогда множество векторов $x^0, x^1 = x^0 + u_1, ..., x^d = x^0 + u_d$ называется базисом линейного многообразия L.

Это только определение; из него не следуют такие свойства базиса, как единственность разложения и т.д.

ОПР 2.13.3 (Сумма линейных многообразий).
Сумма линейных многообразий L и M - это наименьшее линейное многообразие, включающее L и M. Оно обозначается L + M.

Лемма 2.13.4.

▷ $a + U = b + U \Leftrightarrow a - b \in U$.

▷ *Доказательство.*

- ($\Rightarrow$) Пусть $x = a + u = b + v,\ u, v \in U$. Тогда $a - b = v - u \in U$.
- ($\Leftarrow$) Пусть $a - b = v \in U$, пусть $x \in a + U$, тогда $x = a + u,\ u \in U \Rightarrow x = b + v + u,\ v + u \in U \Rightarrow x \in b + U$. Аналогично, если $x \in b + U$, то $x \in a + U$.

□

Теорема 2.13.5.

▷ Если подпространства U, V из пространства K^n, где K - поле, а также линейные многообразия $L = x^0 + U, M = y^0 + V$, заданы своими базисами, то можно найти базисы $U + V, U \cap V, L \cap M, L + M$.

▷ *Доказательство.*

- U + V: Пусть $u_1, ..., u_n$ - базис U, $v_1, ..., v_s$ - базис V. Тогда $U + V = \langle u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s \rangle$. Достаточно в этой системе столбцов найти базис, он и будет базисом суммы. Например, таким базисом будет система столбцов, содержащая базисный минор матрицы, составленной из $u_1, ..., u_r, v_1, .., v_s$.

- $U \cap V,\ L \cap M$: можно найти системы Ax = 0 и Ax = b, задающие U и L соответственно. Аналогично можно найти системы Cx = 0 и Cx = d, задающие V и M соответственно. Тогда системы

$$\begin{cases} Ax = 0, \\ Cx = 0 \end{cases}, \begin{cases} Ax = b, \\ Cx = d \end{cases}$$

задают соответственно $U \cap V,\ L \cap M$.

- L + M:

Случай 1. $L \cap M \neq \varnothing$. Этот случай распознаётся ввиду возможности найти базис пересечения.

Пусть $\exists z^0 |\ z^0 \in L \cap M$. Тогда $L = x^0 + U = x^0 + U,\ M = y^0 + V = z^0 + V$ ввиду леммы. Теперь $L + M = (z^0 + U) + (z^0 + V) = z^0 + U + V =: L^0$.

Действительно, $L^0 \supseteq L,\ L^0 \supseteq M$. Если ещё $z^0 + W \supseteq z^0 + U,\ z^0 + W \supseteq z^0 + V$, то $W \supseteq U,\ W \supseteq V \Rightarrow W \supseteq U + W \Rightarrow z^0 + W \supseteq z^0 + U + V$. Таким образом, L^0 - действительно наименьшее многообразие, включающее L и M, а его базис мы найти можем (из базиса U + V).

Случай 2. $L \cap M = \varnothing$. Пусть $L^0 = x^0 + \langle y^0 - x^0, U, V \rangle$ (где линейная оболочка U и V понимается как линейная оболочка их базисов). Тогда $L^0 \supseteq x^0 + U = L,\ L^0 \supseteq x^0 + (y^0 - x^0) + V = y^0 + V = M$. Если ещё $x^0 + W = y^0 + W \supseteq L = x^0 + U,\ x^0 + W = y^0 + W \supseteq M = y^0 + V$, то $W \supseteq U,\ W \supseteq V,\ W \ni y^0 - x^0$, то есть $x^0 + W \supseteq L^0$. Значит, $L^0 = L + M$.

□

ОПР 2.13.6 (Ортогональные столбцы)**.**
Столбцы a и b называются ортогональными, если $a^T b = 0$. *Ясно, что тогда и* $b^T a = 0$.

Теорема 2.13.7 (Альтернатива Фредгольма)**.**

▷ Либо система Ax = b несовместна, либо всякое решение *сопряжённой системы* $A^T y = 0$ ортогонально столбцу b. (То есть это свойство эквивалентно совместности системы).

▷ *Доказательство.*

- (⇒) $\exists x^0 |\ Ax^0 = b$. Тогда, если $A^T y^0 = 0$, то $b^T y^0 = (Ax^0)^T y^0 = (x^{0T} A^T) y^0 = x^{0T}(A^T y^0) = x^{0T} \cdot 0 = 0$.
- (⇐) Пусть даны множества решений систем $A^T y = 0$ и $\begin{cases} A^T y = 0, \\ b^T y = 0 \end{cases}$. Тогда совпадают размерности пространств решений:

$$S - \operatorname{rk} A^T = S - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix},\ \operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk}(A|b)^T \Rightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$$

(при транспонировании ранг не меняется). По критерию совместности, если ранги основной и расширенной матриц системы Ax = b совпадают, то система имеет решение.

□

Приложение А

Некоторые методы, основанные на преобразованиях матриц

А.1 Вычисление обратной матрицы

Метод вычисления обратной матрицы, основанный на алгебраических дополнениях, не очень удобен, поскольку требует вычисления большого числа определителей, что само по себе достаточно медленная операция.

Пусть дана квадратная матрица A порядка n. Припишем к ней справа единичную матрицу E и преобразуем полученную матрицу $(A|E)$ порядка $n \times 2n$ элементарными преобразованиями строк так, чтобы привести A к разрешённому ступенчатому виду.

Если $\det A \neq 0$, то $\operatorname{rk} A = n$, поэтому в левой части получится матрица E. Пусть C - произведение всех матриц, соответствующих элементарным преобразованиям строк. Заметим, что $\det C \neq 0$. Тогда полученная матрица имеет вид $(AC|EC)$, причём $AC = E \Rightarrow EC = C = A^{-1}$. Таким образом, в правой части полученной матрицы стоит A^{-1}.

Если же $\det A = 0$, то обратной матрицы не существует. Поскольку строки A линейно зависимы, при приведении A к ступенчатому виду появится нулевая строка и, значит, единичной матрицы не получится.

А.2 Поиск базисов суммы и пересечения

Пусть $u_1, ..., u_r$ и $v_1, ..., v_s$ - базисы подпространств U и V пространства строк K^n. Тогда $U+V = \langle u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s \rangle$. Пусть A и B - матрицы, составленные из векторов этих базисов (записанных по строкам). Тогда $t = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \dim(U+V)$. При приведении матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк ненулевые строки полученной матрицы образуют линейно независимую систему из t векторов, принадлежащих U + V (поскольку элементарные преобразования сохраняют линейную оболочку строк). Значит, эти строки образуют базис U + V.

Покажем, что при приведении матрицы $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду строки правой половины полученной матрицы, расположенные справа от нулевых строк левой половины, образуют базис $U \cap V$.

- Прежде всего заметим, что каждая строка левой половины матрицы есть некоторая линейная комбинация векторов базисов U и V: $\sum \lambda_i u_i + \sum \mu_j v_j$, а соответствующая строка правой половины имеет вид $\sum \mu_j v_j$ с теми же коэффициентами μ_j (поскольку над ними осуществлялись те же преобразования строк, только на месте матрицы A стоит нулевая). Если теперь в матрице есть полностью нулевая строка, то $\sum \lambda_i u_i + \sum \mu_j v_j = 0$, $\sum \mu_j v_j = 0$. Если $\exists j |\ \mu_j \neq 0$, то строки матрицы B $v_1, ..., v_s$ линейно зависимы, что невозможно. Если же $\forall j\ \mu_j = 0$, то $\sum \lambda_i u_i = 0$, причём эта комбинация нетривиальная (поскольку при элементарных преобразованиях никогда не происходит умножения строки на ноль). Но это тоже невозможно. Таким образом, справа от нулевых строк левой половины матрицы стоят ненулевые строки.

- Эти строки принадлежат $U \cap V$. Действительно, $\sum \lambda_i u_i + \sum \mu_j v_j = 0 \Rightarrow \sum \mu_j v_j = -\sum \lambda_i u_i$. Таким образом, строка справа от нулевой раскладывается по базисам как U, так и V, а значит, принадлежит обоим подпространствам.

- Они линейно независимы как строки ступенчатой матрицы.

- Их число равно $r + s - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = \dim(U \cap V)$, то есть их число равно размеру базиса.

Таким образом, при преобразовании указанной матрицы получаются одновременно базис суммы (над нулевыми строками левой половины матрицы) и базис пересечения (справа от этих строк).

Предметный указатель