Курс математического анализа

Кренделев

19 июня 2006 г.

Оглавление

Глава 1

Множества

1.1 Введение в теорию множеств

ОПР 1.1.1 (Множество).
Первичное понятие — совокупность объектов.

ОПР 1.1.2 (Задание множества).
Множество считается заданным, *если для любого объекта мы можем сказать, принадлежит этот объект множеству или нет.*

1.1.3 Обозначения

▷ $A, B, C \ldots$ *— обозначения множеств;*

▷ $x, y, z \ldots$ *— элементы множества;*

▷ *x принадлежит множеству A — $x \in A$;*

▷ *x не принадлежит множеству A — $x \notin A$;*

▷ *A включено в B — $A \subseteq B$;*

▷ $\varnothing$ *— пустое множество.*

1.1.4 Способы задания множеств

1. $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ — перечисление;
2. $x \in A$, если выполнено свойство $A(x)$.

ОПР 1.1.5 (Подмножества).
Пусть A и B множества. Будем говорить, что $A \subseteq B$, если из $x \in A$ следует $x \in B$.

1.1.6 Свойства принадлежности

1. $A \subseteq A$;
2. $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогда $A \subseteq C$;
3. $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тогда $A = B$;
4. $A = B$, тогда $B = A$;
5. $A = B$ и $B = C$, тогда $A = C$.

1.1.6.1 Свойства множеств

1. $A = A$ — однородность;
2. $A = B$, тогда $B = A$ — симметрия;
3. $A = B, B = C$, тогда $A = C$ — транзитивность.

1.2 Логическая символика

ОПР 1.2.1 (Высказывание).
Высказыванием *назовём повествовательным предложением о каких либо свойствах объекта.*

- *Если x — объект, то $P(x)$ — предложение.*
- *Нас интересует истинно выражение или ложь.*

ОПР 1.2.2 (Операции).
На множестве высказываний вводятся операции. Если P и Q — два высказывания, тогда:

1. *$P \& Q$ истинно, если истинны и P, и Q — называется логическим* "И"*или* "КОНЪЮНКЦИЯ *;*
2. *$P|Q$ истинно, если истинно P или Q — называется логическим* "ИЛИ"*или* "ДИЗЪЮНКЦИЯ *;*
3. *$\urcorner P$ истинно, если ложно P. —* ОТРИЦАНИЕ *;*
4. *$P \Rightarrow Q$ — из истинности P следует истинность Q —* СЛЕДСТВИЕ"*или* "ИМПЛИКАЦИЯ *;*
5. *$P \Leftrightarrow Q$ — P и Q равносильны, т.е. $(P \Rightarrow Q)\&(Q \Rightarrow P)$.*

ОПР 1.2.3 (Кванторы).
Следующие "значки"принято называть кванторами, *и использовать для сокращения записи:*

- $\forall$ — *для всех;*
- $\exists$ — *существует;*
- $|$ — *такое что.*

1.3 Операции над множествами

ОПР 1.3.1 (Операции над множествами).
Пусть A,B — множества, тогда:

1. $A \cup B = C \risingdotseq \{x \in C \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)\}$ — *объединение;*
2. $A \cap B = C \risingdotseq \{x \in C \Leftrightarrow (x \in A) \& (x \in B)\}$ — *пересечение;*
3. $A \setminus B = C \risingdotseq \{x \in C \Leftrightarrow (x \in A) \& (x \notin B)\}$ — *вычитание;*
4. $A \cap B = \varnothing$, *тогда* $A \setminus B = A$ — *дополнение.*

ОПР 1.3.2 (Декартово произведение).
Пусть A, B — *множества, тогда* $A \times B \fallingdotseq \{\{x, y\} \big| x \in A, y \in B\}$ — декартово (прямое) произведение. *В общем случае* $A_1 \times \dots \times A_n = \{\{x_1, \dots x_n\} \big| x_i \in A_i \quad \forall i\}$. *В частном случае, когда* $\forall i \colon A_i = A, A \times \dots \times A = A^n$.

1.4 Отображение множеств

ОПР 1.4.1 (Отображение множеств).
Пусть A, B — *множества, тогда* отображением $f \colon A \to B$ *называется любое правило, которое каждому элементу из* A *единственным образом сопоставляет элемент из* B. *При* $x \in A, y \in B$ *записывается:* $y = f(x)$. *При этом:*

- $D(f) \risingdotseq \{x \in A \big| f(x)\}$;

  $D(f)$ — *область определения;*
- $E(f) \risingdotseq \{y \in B \big| \exists x \in A \big| E(x) = y\}$;

  $E(f)$ — *область значений;*

  $y \in E(f)$;

  $y = F(x)$.

ОПР 1.4.2 (Тождественное отображение).
$F \colon A \to A \risingdotseq \forall x \quad F(x) = x$;
Также обозначается:

$F(x) = id(x) = x$.

ОПР 1.4.3 (Постоянное отображение).
$F \colon A \to B \risingdotseq \forall x \quad F(a) = b$, *при* $a \in A, b \in B$.

- $F(A) \risingdotseq \{y \in B \big| y = F(x)\}$ — образ A относительно отображения F;
- $F^{-1}(B) \risingdotseq \{x \in A \big| y = F(x), y \in B\}$ — прообраз B относительно отображения F.

ОПР 1.4.4 (Обратная функция).
Если $f^{-1}(y)$ *состоит из единственного элемента* $\forall y \in E(f)$, *тогда говорят, что функция* f *обладает* обратной *и обозначают* $f^{-1} \colon B \to A$.

ОПР 1.4.5 (Типы отображений).
Пусть $f \colon A \to B$, *тогда:*

- f — *сюръекция (отображение на), если* $\forall y \in B \quad \exists x \in A \big| f(x) = y$;
- f — *инъекция (разнозначность), если* $\forall x_1, x_2 \in A \big| x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$;
- f — *биекция (взаимооднозначность), если* f — *инъекция и сюръекция;*
- *Обратное отображение.*

ОПР 1.4.6 (Обратное отображение).
Пусть $F \colon A \to B$ — *отображение, тогда* F^{-1} — *обратное отображение, если* $\forall y \in B \quad \exists x \big| F(x) = y$;

Если F — *инъективно и сюръективно, то определено* $G = F^{-1} \big| G \colon B \to A$.

ОПР 1.4.7 (Суперпозиция отображения).
Пусть A, B, C — *множества;* $f \colon A \to B, \quad g \colon B \to C$, *тогда* $h = g(f) = g \circ f$ — *суперпозиция функций* f *и* g, $h \colon A \to C$.

1.4.7.1 Упражнение

▷ Доказать, что $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

ОПР 1.4.8 (График отображения).
$G(F) = \{(x, y) \in A \times B \big| y = F(x)\}$ $G(F)$ — *график отображения.*
Замечание.
Если G — *обратное отображение* F *и* $F \colon A \to B$, *тогда* $G \circ F \colon A \to A; G \circ F = idA; F \circ G \colon B \to B = idB$.

1.5 Вещественные числа

1.5.1 Введение

▷ $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

▷ $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x,y)=x+y$ — сложение;

▷ $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g(x,y)=x\cdot y$ — умножение.

ОПР 1.5.2 (Аксиомы сложения)**.**

A1. $\exists\ \ 0 \big| \forall x\in R\colon\quad x+0=x$ — *существование нуля;*

A2. $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad x+y=y+x$ — *коммутативность;*

A3. $\forall x\in\mathbb{R}\quad \exists(-x)\big|\, x+(-x)=0$ — *существование аддитивного обратного;*

A4. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\quad x+(y+z)=(x+y)+z$ — *ассоциативность.*

Следствие 1.5.2.1 (Следствия аксиом сложения).

1. 0 — единственный;
2. Обратный элемент для x — единственный;
3. Уравнение $x+a=b$ имеет единственный корень (решение).

▷ **Доказательство**.

1. Пусть таких элементов два: $0_1, 0_2$, тогда $0_1=0_1+0_2=0_2$;
2. Пусть y_1,y_2 — обратные элементы для x, тогда $y_2=0+y_2=(x+y_1)+y_2=(x+y_2)+y_1=0+y_1=y_1$;
3. $x=b+(-a)$

□

ОПР 1.5.3 (Аксиомы умножения)**.**

M1. $\exists 1\in\mathbb{R}\big|\forall x\in R\colon\quad x\cdot 1=x$ — *существование единицы;*

M2. $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad x\cdot y=y\cdot x$ — *коммутативность;*

M3. $\forall x\in\mathbb{R}\quad \big| x\neq 0\quad \exists y\in\mathbb{R}\big| x\cdot y=1$ — *существование мультипликативного обратного;*

M4. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ — *ассоциативность;*

(A+M) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\quad (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ — *дистрибутивность;*

Следствие 1.5.3.1 (Свойства аксиом умножения).

1. Единица единственна;
2. $\forall x\neq 0$ обратный элемент единственный.

ОПР 1.5.3.2 (Деление и вычитание)**.**

- $x\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{y}$ — *деление;*
- $x+(-y)=x-y$ — *вычитание.*

ОПР 1.5.4 (Аксиомы порядка)**.**
Пусть $Q(x,y)$ — *некоторое высказывание на* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. $Q(x,y)\colon x\leqslant y$ — *порядок.*

Если $x\leqslant y$ *и* $y\leqslant x$, *то говорят* $x=y$;

Если $x\leqslant y$, *но* $x\neq y$, *то* $x<y$.

O0. $x,y\in\mathbb{R}$, *из трёх высказываний* $x<y$, $x=y$, $x>y$ *истинно только одно;*

O1. $\forall x\in\mathbb{R}\colon x\leqslant x$;

O2. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$: *если* $x\leqslant y$, $y\leqslant z$, *то* $x\leqslant z$;

O3. $\forall x,y\in\mathbb{R}$: *если* $x\leqslant y$, *то* $\forall z\colon x+z\leqslant y+z$;

O4. $z\in\mathbb{R}, z\geqslant 0$ *и* $\forall x,y\in\mathbb{R}$: *если* $x\leqslant y$, *то* $z\cdot x\leqslant z\cdot y$.

Следствие 1.5.4.1 (Следствия аксиом порядка).

Пусть $a,b\in\mathbb{R}$, тогда:

1. Если $a>0, b>0$, то $a+b>0$;
2. Если $a>0, b>0$, то $a\cdot b>0$;
3. Если $a\neq 0$, то $a\cdot a>0$;
4. $0<1$.

1.6 Натуральные числа

ОПР 1.6.1 (Индуктивное множество)**.**
Множество $M\subseteq\mathbb{R}$ *назовём* индуктивным, *если выполнены условия:*

1. $1\in M$;

2. $\forall x \in M \Rightarrow x+1 \in M$.

УТВ 1.6.1.1 (Существование индуктивного множества).

▷ Индуктивное множество существует.

▷ **Доказательство**.

✓ $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$;
✓ $1 \in \mathbb{R}$;
✓ $\forall x \in \mathbb{R}\colon x+1 \in \mathbb{R}$.
Следовательно, $\mathbb{R}$ — индуктивное множество.

□

УТВ 1.6.1.2 (О пересечении индуктивных множеств).

▷ Любое пересечение индуктивных множеств является индуктивным множеством.

▷ **Доказательство**.

- 1 принадлежит всем множествам, следовательно 1 принадлежит пересечению всех множеств.
- Пусть x принадлежит пересечению множеств, тогда x принадлежит каждому множеству, значит, $1+x$ принадлежит каждому множеству, и следовательно $1+x$ принадлежит пересечению всех множеств.
- Условия из определения индуктивного множества выполнены, значит, пересечение индуктивных множеств является индуктивным множеством.

□

ОПР 1.6.2 (Множество натуральных чисел).
Множеством натуральных чисел *называется пересечение всех индуктивных множеств из* $\mathbb{R}$. *Обозначается:* $\mathbb{N}$

Следствие 1.6.2.1 (Индуктивные подмножества $\mathbb{N}$).

▷ Если $M \subseteq \mathbb{N}$ и M индуктивно, то $M = \mathbb{N}$.

▷ **Доказательство**.

т.к. M — индуктивно, то $M \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow M = \mathbb{N}$.

□

Следствие 1.6.2.2 (Следствие 1).

▷ $1 < 2 < 3 < \ldots \qquad \forall x\colon x < x+1$.

Следствие 1.6.2.3 (Метод математической индукцией).

▷ Пусть задано множество высказываний зависимых от натурального числа $P(n), n \in \mathbb{N}$.

- Пусть $P(1)$ — истинно;
- Если $P(k)$ — истинно, то $P(k+1)$ — истинно;

Тогда $P(n)$ истинно $\forall n \in \mathbb{N}$.

▷ **Доказательство**.

M множество $\{k \mid P(k) - \text{истинно}\}$.
$$\left.\begin{cases} 1 \in M \\ k \in M \Rightarrow k+1 \in M \end{cases}\right\} \Rightarrow M\text{— индуктивное множество.}$$

□

ОПР 1.6.3 (Различные множества).

1. $(-A) \leftrightharpoons \{-x \mid x \in A\}$;
2. $A + B = C \leftrightharpoons \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$;
3. $A \cdot B = C \leftrightharpoons \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\}$;
4. $A - B \leftrightharpoons A + (-B)$.

ОПР 1.6.4 (Множество целых чисел).

- *Множество* целых чисел $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_i - \mathbb{N}$;
- *Множество* рациональных чисел: $\{x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{p}{q}$, *где* $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

1.7 Степень числа

ОПР 1.7.1 (Степень числа).
Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, *тогда:*

1. $a^0 = 1; a^1 = a; a^2 = a \cdot a^1; \ldots a^n = a \cdot a^{n-1}, n \in \mathbb{N}$;
2. $a^0 = 1; a^{-1} = \frac{1}{a}; a^{-2} = \frac{1}{a^2}; \ldots a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

1.7.1.1 Свойства степени

Пусть $a, b \in \mathbb{R}\, n, m \in \mathbb{N}$, тогда:

1. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$;
2. $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$;
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.

Теорема 1.7.2 (Тождество 1).

▷ $\forall q \neq 0$ справедливо $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

▷ **Доказательство**.

- Т.к. $q \neq 0$, то $1 - q$ обратим.
- $(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = 1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) - q \cdot$ $\cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = 1 - q^n \Rightarrow$ $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

□

Теорема 1.7.3 (Тождество 2).

▷ $\forall A, B \in \mathbb{R}$ справедливо $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} \cdot B^0 + A^{n-2} \cdot B^1 + \ldots + A^1 \cdot$ $\cdot B^{n-2} + A^0 \cdot B^{n-1})$.

▷ **Доказательство**.

- Если $B = 0$, то тождество очевидно.
- Пусть $B \neq 0$, тогда определим $q = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$. Подставив q в тождество 1.7.2, получим требуемое.

□

1.8 Аксиома Архимеда

ОПР 1.8.1 (Аксиома Архимеда).
$\forall a \in \mathbb{R}\colon \exists k \in Z \big| a < k$.

Следствие 1.8.1.1 (Следствие 1).

▷ Пусть

$a \in \mathbb{R}$ и $\forall n \in \mathbb{N}\colon a \leqslant \frac{1}{n}$.

▷ Тогда

$a \leqslant 0$.

▷ **Доказательство**.

От противного

- ✓ Пусть $a > 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{a} > 0$;
- ✓ $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \Rightarrow_{\text{(по аксиоме Архимеда)}} \exists s \big| 0 < \frac{1}{a} < s \Rightarrow s > 0 \Rightarrow s \in \mathbb{N}$;
- ✓ $\frac{1}{a} < s \Rightarrow 1 < as \Rightarrow a > \frac{1}{s}$.

Получили противоречие, следовательно, $a \leqslant 0$.

□

Следствие 1.8.1.2 (Следствие 2).

▷ Пусть

- $A > 1, A \in \mathbb{R}$;
- $a \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon a \leqslant A^{-n} \leqslant \frac{1}{A^n}$.

▷ Тогда

$a \leqslant 0$.

▷ **Доказательство**.

- Так как $A > 1$ то $\exists \beta \in \mathbb{R} \big| \beta > 0$ и $A = 1 - \beta$. Тогда $A^n = (1 + \beta)^n = \underbrace{(1 + \beta)(1 + \beta) \ldots (1 + \beta)}_{n} = 1 + n\beta +$ что-то положительное $\Rightarrow A^n >$ $1 + n\beta > n\beta$.
- $\forall n\colon a \leqslant \frac{1}{A^n} \Rightarrow a \leqslant \frac{1}{n\beta} \Rightarrow a \cdot \beta \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow_{\text{(из следствия 1.8.1.1)}} a \cdot \beta \leqslant 0$; Но $\beta > 0$, следовательно $a \leqslant 0$.

□

1.9 Абсолютная величина

ОПР 1.9.1 (Абсолютной величины).
Отображение $\big|\ \big|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *действующее по следующему правилу:*

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geqslant 0; \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

называется абсолютной величиной.

Следствие 1.9.1.1 (Свойства абсолютной величины).

1. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; в частности $|-x| = |x|$;
2. Если $a \in \mathbb{R}, a > 0$, то:
   (a) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$;
   (b) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.
3. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ —*неравенство треугольника*;
4. $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$.

▷ **Доказательство**.

1. Вытекает из определения;
2. Вытекает из определения;
3. $$\begin{array}{rcccc} & -|x| & \leqslant & x & \leqslant & |x| \\ + & & & & & \\ & -|y| & \leqslant & y & \leqslant & |y| \\ \hline & -(|x|+|y|) & \leqslant & x+y & \leqslant & (|x|+|y|) \end{array}$$
   Из свойства 2 абсолютной величины 1.9.1.1 получаем: $|x+y| \leqslant \leqslant |x| + |y|$;
4. ✓ $x = (x-y)+y$; $y = (y-x)+x$;
   ✓ Из свойства 3 абсолютной величины 1.9.1.1 получаем: $|x| = |(x-y)+| \leqslant |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leqslant |x-y|$;
   $|y| = |(y-x)+x| \leqslant |y-x| + |x| \Rightarrow -|y-x| \leqslant |x| - |y| \Rightarrow \Rightarrow_{\text{(свойство 1)}} -|x-y| \leqslant |x| - |y|$;
   Используя свойство 2, получаем: $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$.

□

1.10 Расширенная числовая прямая

ОПР 1.10.1 (Расширенная числовая прямая).
Введём пару объектов:

- $-\infty$ — *некий объект, обладающий свойством:* $\forall x \in \mathbb{R}\colon -\infty < x$;
- $+\infty$ — *некий объект, обладающий свойством:* $\forall x \in \mathbb{R}\colon x < +\infty$.

Тогда $\overline{\mathbb{R}} \leftrightharpoons \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — расширенная числовая прямая.

ОПР 1.10.2 (Множества на расширенной числовой прямой).

1. $[a,b] \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ — *замкнутый отрезок;*

2. $(a,b) \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ — *открытый отрезок;*
3. $(a,b] \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$ — *полуоткрытый отрезок;*
4. $[a,b) \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$ — *полуоткрытый отрезок;*
5. $(-\infty, +\infty) \leftrightharpoons \overline{\mathbb{R}}$;
6. $(-\infty, a] \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}$;
7. $(-\infty, a) \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$;
8. $[a, +\infty) \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x\}$;
9. $(a, +\infty) \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$;

1.11 Верхняя и нижняя грани

ОПР 1.11.1 (Верхняя и нижняя грани).
Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$.

- *Число* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется* верхней гранью *множества* A*, если* $\forall x \in A\colon x \leqslant \leqslant \ell$;
- *Число* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется* нижней гранью *множества* A*, если* $\forall x \in A\colon x \geqslant \geqslant \ell$.

ОПР 1.11.2 (Ограниченность множества).
Множество A *называется:*

- ограниченным сверху*, если в* $\mathbb{R}$ *существует верхняя грань множества* A;
- ограниченным снизу*, если в* $\mathbb{R}$ *существует нижняя грань множества* A;
- ограниченным*, если оно ограниченно снизу и сверху.*

1.11.2.1 Обозначение множеств граней

▷ $\Gamma^+(A)$ — множество верхних граней множества A;

▷ $\Gamma^-(A)$ — множество нижних граней множества A;

ОПР 1.11.3 (Точная грань).

- *Число* $q \in \Gamma^+(A)$ *называется* точной верхней гранью *множества* A *если* $\forall q' \in \Gamma^+(A)\colon q \leqslant q'$.
  Обозначается $q = \sup(A) = \sup\limits_{a \in A} a$;

- *Число* $q \in \Gamma^-(A)$ *называется* точной нижней гранью *множества* A *если* $\forall q' \in \Gamma^-(A)\colon q' \leqslant q$.

  Обозначается $q = \inf(A) = \inf\limits_{a \in A} a$;

1.12 Аксиома непрерывности

ОПР 1.12.1 (Аксиома непрерывности).
Всякое подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ *обладает точной верхней и точной нижней гранями.*

1.13 Аксиома о вложенных отрезках

ОПР 1.13.1 (Максимум и минимум множества).
Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$; $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда:*

- *если* ℓ *— верхняя грань* A *и* $\ell \in A$, *то* ℓ — максимум множества A.

  Обозначается $\ell = \max(A) = \max\limits_{a \in A} a$.

- *если* ℓ *— нижняя грань* A *и* $\ell \in A$, *то* ℓ — минимум множества A.

  Обозначается $\ell = \min(A) = \min\limits_{a \in A} a$.

1.13.1.1 Некоторые обозначения

$< a, b >; a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ — любой интервал между a и b .

ОПР 1.13.2 (Вложенность интервалов).
Пусть $J_1 =< a, b >; J_2 =< c, d >$.
Если $a \leqslant c < d \leqslant b$, *то интервал* J_2 *называется* вложенным *в интервал* J_1.
Обозначается $J_2 \subseteq J_1, J_2 \leqslant J_1$.

ОПР 1.13.3 (Вложенность семейства интервалов).
Множество (семейство) интервалов $J_1, J_2, \ldots, J_k, \ldots$ *называется* вложенным, *если* $\forall k\colon J_{k+1} \subseteq J_k$.

ОПР 1.13.4 (Аксиома о вложенных отрезках).
Для любого семейства замкнутых отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам в этом семействе, т.е. $\exists x \in \overline{\mathbb{R}} \forall k\colon x \in J_k$.

Теорема 1.13.4.1 (Об эквивалентности аксиом).

▷ Из аксиомы непрерывности 1.12.1 на стр. 25 следует аксиома о вложенных отрезках 1.13.4.

▷ **Доказательство**.

Пусть:

- ✓ A — множество левых концов интервалов J_k из аксиомы о вложенных отрезках;
- ✓ A — множество правых концов интервалов J_k из аксиомы о вложенных отрезках.

$A \subseteq \mathbb{R}$; $B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow_{\text{(по аксиоме непрерывности)}} \exists \inf B, \exists \sup A$; По построению, получаем $\inf B = \sup A$.

□

1.14 Сечение Дедекинда

ОПР 1.14.1 (Сечения).
Пусть L, H *— два подмножества* $\overline{\mathbb{R}}$ *такие, что:*

1. *в* L *и* H *есть хотя бы один элемент* $\mathbb{R}$;
2. $\forall x \in L, \forall y \in H$ *имеет место* $x < y$.

(L, H) *называется* сечением (по Дедекинду).

ОПР 1.14.2 (Аксиома Дедекинда).
Для любого сечения (L, H) *либо* L *имеет максимальный элемент, либо* H *имеет минимальный элемент.*

Теорема 1.14.2.1 (Об эквивалентности аксиом).

▷ Из аксиомы непрерывности 1.12.1 на стр. 25 следует аксиома Дедекинда 1.14.2.

1.15 Дроби и операции на ними

ОПР 1.15.1 (Десятичные дроби).

- $a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ *— конечная десятичная дробь;*
- $a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ *— бесконечная десятичная дробь, если для любого натурального* k *можно указать* α_k.

1.15.1.1 Алгоритм построения десятичной дроби

▷ Пусть x — рационально, тогда, согласно аксиоме Архимеда 1.8.1 на стр. 21, существует число $a \in \mathbb{Z}$ такое, что $a < x \leqslant a + 1$;

▷ Найдем наибольшее число α_1 такое, что $a + \frac{\alpha_1}{10}$ Получим: $a, \alpha_1 < x \leqslant$ $\leqslant a, \alpha_1 + \frac{1}{10}$;

▷ Затем ищем $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$.. На каком-то шаге m получим:

$$a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m < x \leqslant a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m + \frac{1}{10^m}.$$

Мы получили десятичную дробь.

Следствие 1.15.1.2 (Свойства десятичных дробей).

1. В десятичных дробях число нулей не бесконечно;
2. Разложение в бесконечные десятичные дроби для различных чисел различно.

▷ **Доказательство**.

1. Пусть $a, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ — разложение числа x в десятичную дробь и пусть условие не выполнено, т.е. с какой-то позиции в разложении идут только нули. Тогда

$$1 < x - a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \leqslant \frac{1}{10^{m+k}};$$
$$0 < x - a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \leqslant 0.$$

2. Пусть $x \neq y$, а их разложения в десятичные дроби одинаково. Значит

$$a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m < x \leqslant a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m + \frac{1}{10^m};$$
$$a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m < y \leqslant a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m + \frac{1}{10^m};$$
$$\Rightarrow \forall m\colon 0 < |x - y| \leqslant \frac{1}{10^m} \Rightarrow 0 < |x - y| \leqslant 0.$$

Следовательно, x, y совпадают.

□

ОПР 1.15.2 (Действительное число).
Действительным числом *называется бесконечная десятичная дробь в виде* $x = a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots$.

1.15.2.1 Действия над действительными числами

Пусть

$$x = a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots; y = b, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_k \ldots.$$

Тогда:

- $x = y$, если $a = b$, и $\forall i \in \mathbb{N} \quad \alpha_i = \beta_i$;
- $x < y$, если $a < b$ или $a = b, \exists k \in \mathbb{N} \big| \alpha_k < \beta_k$ и $\forall i < k \alpha_i = \beta_i$
- $-x = -a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots$;
- $x + y = a + b, \alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_2 \ldots \alpha_n + \beta_n \ldots$;
- Произведение;

Лемма 1.15.3 (О монотонности степени).

▷ Пусть

$x, y \in \mathbb{R}; x > 0; y > 0.$

▷ Тогда

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ имеет место:

1. $x < y \Rightarrow x^n < y^n$
2. $x^n < y^n \Rightarrow x < y$.

▷ **Доказательство**.

1. $x < y \Rightarrow x^2 < xy, xy < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2$; И так далее (по индукции).
2. От противного.
   - ✓ Пусть $x = y$, тогда $x^n = y^n$ — ПРОТИВОРЕЧИЕ;
   - ✓ Пусть $x > y$, тогда по свойству 1 получаем $x^n > y^n$ — ПРОТИВОРЕЧИЕ.

   Следовательно, $x < y$.

□

Теорема 1.15.4 (О корне n ой степени из действительного числа).

▷ $\forall c \geqslant 0, c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \quad \exists! x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0 \big| x^n = c$[I]

▷ **Доказательство**.

[I] $\exists!$ — существует, и единственный

✓ Существование.
$\sqrt[n]{c} = a,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, при этом $\forall k > 0$ имеет место $a,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots < \sqrt[n]{c} < a,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots + \frac{1}{10^k}$

✓ Единственность.
Пусть есть два элемента $x, y \big| x^n = c, y^n = c$. Допустим, что $x \neq y$, тогда возможны два случая:

1. $x < y$;
Тогда из леммы 1.15.3 $\Rightarrow x^n < y^n \Rightarrow c < c$ — ПРОТИВОРЕЧИЕ.
2. $x > y$;
Аналогично.

□

1.16 Счетные множества

ОПР 1.16.1 (Счетных множеств).
Множество A называется счетным, *если существует инъекция: $\nu\colon A \to \mathbb{N}$, ν — нумерирующее отображение.*

1. *ν — определено $\forall x \in A$;*
2. *Если $x, y \in A$ и $x \neq y$, то $\nu(x) \neq \nu(y)$.*

ОПР 1.16.2 (Конечных множеств).
A называется конечным, *если $\exists m \in M\colon\ \nu\colon A \to \{1, 2, \ldots, m\}$ — взаимооднозначное. Если такого m не существует, то A —* бесконечно.

ОПР 1.16.3 (Не более чем счетных множеств).
Если A — конечно или счетно, то A не более, чем счетно.

ПРЕДЛ 1.16.4 (О не более, чем счетных подмножествах).

▷ Пусть
$B \subseteq A$ и A — не более, чем счетно.

▷ Тогда
B — не более, чем счетно.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow \nu(x) \in \mathbb{N}$;
- Пусть $x,\ y \in B \Rightarrow x,\ y \in A;\ \nu(x) = \nu(y) \Leftrightarrow x = y$.

□

ПРЕДЛ 1.16.5 (Инъекция не более, чем счетных множеств).

▷ Пусть
$f\colon A \to B$ — инъективно. B — не более, чем счетное множество.

▷ Тогда
A — не более, чем счетно.

▷ **Доказательство**.

Пусть $x \in A$, тогда $f(x) \in B \Rightarrow \mu\colon A \to \mathbb{N} \Rightarrow \mu = \nu \circ f$, где ν — нумерирующее для B.

□

ПРЕДЛ 1.16.6 (Сюрьекция не более, чем счетных множеств).

▷ Пусть
$f\colon A \to B$ — сюрьективно. A — не более, чем счетное множество.

▷ Тогда
B — не более, чем счетное множество.

ПРЕДЛ 1.16.7 (Определение эквивалентных множеств).

▷ Два множества A и B называются *эквивалентными*, если существует взаимооднозначное отображение $f\colon A \to B$ (биективное).

Теорема 1.16.8 (Эквивалентность $\mathbb{N}$ своим бесконечным подмножествам).

▷ Всякое бесконечное подмножество $M \subseteq \mathbb{N}$ эквивалентно $\mathbb{N}$. Это означает, что $\exists\,\nu\colon M \to \mathbb{N}$ — взаимооднозначное.

▷ **Доказательство**.

$M \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow$

✓ $\exists x_1 \big| x_1$ — наименьший для M; $\Rightarrow \nu(x_1) = 1;\ M_1 = M \setminus \{x_1\}$;
✓ $\exists x_2 \big| x_2$ — наименьший для M_1; $\Rightarrow \nu(x_2) = 2;\ M_2 = M \setminus \{x_2\}$;
✓ И так далее.

Получаем, что ν определена на всем множестве M и $\forall k \in \mathbb{N}\colon \exists x_k$ — по построению.

□

Следствие 1.16.8.1 (К теореме).

▷ Все счетные множества эквивалентны.

▷ **Доказательство**.

Пусть A, B — два счетных множества. Тогда определены нумерации $\nu\colon A \to \mathbb{N}, \mu\colon B \to \mathbb{N} \ \Rightarrow \nu(A) \subseteq \mathbb{N}, \mu(B) \subseteq \mathbb{N} \ \Rightarrow \exists f\colon \nu(A) \to \mathbb{N}, \exists g\colon \mu(B) \to \mathbb{N} \ \Rightarrow \mu^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ \nu\colon A \to B$ — взаимооднозначное отображение.

□

ПРЕДЛ 1.16.9 (Об объединение счетных множеств)**.**

▷ Пусть

A, B — два счетных множества.

▷ Тогда

$A \cup B$ — счетное множество.

▷ **Доказательство**.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$; $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$; $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}\Big| \nu(a_k) = 2k-1$, $\nu(b_k) = 2k \Rightarrow \nu\colon (A \cup B) \to \mathbb{N}$ —- нумерация для $A \cup B$.

□

Теорема 1.16.10 (Кантора о счетном объединении счетных множеств)**.**

▷ Пусть

$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — счетных набор счетных множеств.

▷ Тогда

$C = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ — счетное множество.

Следствие 1.16.10.1 (К теореме).

▷ $\mathbb{Q}$ — счетно.

Теорема 1.16.11 (Не счётность $\mathbb{R}$)**.**

▷ Пусть

$A \subseteq \mathbb{R}$; $A = [a, b], a < b$.

▷ Тогда

Множество A не является счетным.

▷ **Доказательство**.

∘ Можно считать, что $[a, b] = [0, 1]$.

Пусть $[0, 1]$ — счётно, значит существует элемент $x_1 \in [0, 1]$. $[0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Существует хотя бы один интервал $[\alpha_1, \beta_1] \mid x_1 \notin [\alpha_1, \beta_1]$.

Рассмотрим $[\alpha_1, \beta_1]$ и элемент x_2: $[\alpha_1, \beta_1]$ разбиваем на 3 части. очевидно $\exists [\alpha_2, \beta_2] \mid x_2 \notin [\alpha_2, \beta_2]$. Заметим, что $[\alpha_2, \beta_2] < [\alpha_1, \beta_1]$.

По индукции получим интервал $[\alpha_n, \beta_n] \mid x_n \neq\in [\alpha_n, \beta_n], \quad [\alpha_n, \beta_n] < [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$.

Получим семейство вложенных замкнутых отрезков. По теореме о вложенных отрезках $\exists y \in [\alpha_n, \beta_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Но элементу y невозможно приписать никакой номер, т.к. по построению она не может совпадать ни с одной из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

□

Глава 2

Числовые последовательности и пределы

ОПР 2.1 (Выпуклого отрезка)**.**
Множество $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *называется* выпуклым, *если* $\forall x,\, y \in U \Rightarrow [x,\, y] \in U$.

ОПР 2.2 (Элементарной окрестности)**.**
Элементарной ε окрестностью *точки* $p \in \mathbb{R}$ *называется множество вида* $B_p(\varepsilon) = \{x \big| |x-p| < \varepsilon\}$.

ОПР 2.3 (Элементарной окрестности $+\infty$ и $-\infty$)**.**
Элементарной окрестностью точки $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется множество вида* $(r, +\infty)$, *т.е.* $\{x \in \mathbb{R} \big| x > r,\ r \in \mathbb{R}\}$.
Аналогично, элементарной окрестностью точки $-\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется* $(-\infty, r)$, *т.е.* $\{x \in \mathbb{R} \big| x < r,\ r \in \mathbb{R}\}$.

ОПР 2.4 (Окрестности)**.**
Множество $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *называется* окрестностью *точки* P, *если существует элементарная окрестность* V *точки* P, *такая, что* $U \subseteq V$.

Следствие 2.4.1 (Свойства окрестностей).

▷
1. Если U— окрестность точки P, то $P \in U$;
2. Если U и V— окрестности точки P, то $W = U \cap V$— окрестность точки P;
3. Если $U \subseteq V$ и U— окрестность точки P, то V— окрестность точки P;
4. Всякая окрестность точки P содержит выпуклый отрезок;

5. (отделимость)
$\forall P,\, Q \in \overline{\mathbb{R}} \big| P \neq Q$ существуют окрестности U_P и $U_Q \big| U_P \cap U_Q = \varnothing$.

▷ **Доказательство**.

(5) Пусть $P \neq Q$. Тогда предположим, что $P < Q$. Отсюда получаем:
$P < \frac{P+Q}{2} < Q \Rightarrow B_P(\frac{P-Q}{4}) \cap B_Q(\frac{P-Q}{4}) = \varnothing$.

□

ОПР 2.5 (Диаметра множества)**.**
Пусть $S \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, *тогда* диаметр множества S *это:*

$$\operatorname{diam} S \overset{def}{=} \sup_{\forall x,\, y \in S} |x - y|.$$

2.6 Последовательности и их пределы

ОПР 2.6.1 (Последовательности)**.**
Последовательностью *называется любое отображение* $f\colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$. *Следовательно, любая последовательность — это не более, чем счетное множество.*
Говорят, что последовательность задана, *если* $\forall n \in \mathbb{N}$ *можно указать* x_n, *n-ый элемент последовательности.*

2.6.1.1 Способы задания последовательностей

▷
1. В виде формулы. Пример: $x_n = f(n)$;
2. В виде итераций. Пример: $x_{n+1} = f(x_n)$.

2.6.2 Операции над последовательностями

▷ Пусть даны две последовательности $\{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\, \ldots\} = x; \{y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n\, \ldots\} = y$.

▷ Тогда:

1. $\exists z = x + y \overset{def}{=} \{x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots,\, x_n + y_n,\, \ldots\}$;
2. $\exists z = x \cdot y \overset{def}{=} \{x_1 \cdot y_1,\, x_2 \cdot y_2,\, \ldots,\, x_n \cdot y_n,\, \ldots\}$;
3. Если $y_n \neq 0,\, \forall n \in \mathbb{N}$, то $\exists z = \frac{x}{y} \overset{def}{=} \{\frac{x_1}{y_1},\, \frac{x_2}{y_2},\, \ldots,\, \frac{x_n}{y_n},\, \ldots\}$;
4. Последовательность вида $a,\, a,\, \ldots,\, a,\, \ldots$ — называется *постоянной последовательностью*;
5. $\exists z = \frac{1}{y}$ — называется *обратной последовательностью*, если $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

2.7 Пределы последовательностей

ОПР 2.7.1 (Топологическое определение предела).

Будем говорить, что последовательность x_n сходится *(стремится) к* a, *где* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *при* $n \to \infty$ *(и записывать в виде* $x \to a$ *при* $n \to \infty$ *или* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*), если для любой окрестности* U *точки* a *существует такой номер* M*, что* $\forall n \geqslant M\colon x_n \in U$.

Теорема 2.7.2 (О единственности предела).

▷ Пусть

$x_n \to a$ и $x_n \to b$ при $n \to \infty$.

▷ Тогда

$a = b$.

▷ **Доказательство**.

- Пусть U окрестность точки a, а V окрестность точки b, тогда согласно определению предела 2.7.1: $\exists M_1\big|\, x_n \in U\ \forall n \geqslant M_1$; $\exists M_2\big|\, x_n \in V\ \forall n \geqslant M_2 \Rightarrow$ выбираем $M = \max\{M_1, M_2\}$ и получаем, что $\forall n \geqslant M\colon x_n \in U$, $x_n \in V \Rightarrow x_n \in (U \cap V) \Rightarrow \forall U, V\colon U \cap V \neq \varnothing$, с другой стороны по свойству 5 для окрестностей 2.4.1, если $a \neq b$, получаем $\exists U, V\big|\, U \cap V = \varnothing$ — противоречие $\Rightarrow a = b$.

□

ОПР 2.7.3 (Монотонного возрастания последовательности).

Последовательность x_n *называется* монотонно возрастающей *(*строго монотонно возрастающей*), если* $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \leqslant x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$.

ОПР 2.7.4 (Монотонного убывания последовательности).

Последовательность x_n *называется* монотонно убывающей *(*строго монотонно убывающей*), если* $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \geqslant x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$.

ОПР 2.7.5 (Монотонности последовательности).

Последовательность называется монотонной *(*строго монотонной*), если она либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает (либо строго монотонно убывает, либо строго монотонно возрастает).*

Теорема 2.7.6 (О пределе монотонной последовательности).

▷ Всякая монотонная последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

▷ **Доказательство**.

- Мы рассмотрим случай, когда последовательность монотонно возрастает. Для монотонно убывающей последовательности рассуждения аналогичны.
- Пусть x_n — монотонно возрастающая последовательность., тогда возьмем $a = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Пусть:
  1. $a = -\infty \Rightarrow x_n = a\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = -\infty$;
  2. $a \neq -\infty$, $a > -\infty$. Рассмотрим окрестность точки a, $\quad U = [r, a]$. Пусть V — произвольная окрестность точки a, тогда: $\exists r\big|\, U \subseteq V$; $\exists M\big|\, x_M \in [r, a], \Rightarrow \forall n > M\colon x_n \in [r, a]$, т.к. $x_{n+1} \geqslant x_n$. Значит, топологические условия существования предела 2.7.1 выполнены, следовательно, a — предел.

□

ОПР 2.7.7 (Истинности высказывания).

Будем говорить, что высказывание $P(n)$ истинно, начиная с некоторого номера, *если* $\exists M \in \mathbb{N}\big|\, \forall n \geqslant M\colon P(n)$ *— истинно.*

Теорема 2.7.8 (О неравенстве пределов).

▷ Пусть

$x_n \to a$, $y_n \to b$ при $n \to \infty$; $a, b \in \mathbb{R}$.

▷ Тогда

1. Если $a < b$, то $x_n < y_n$ начиная с некоторого номера;
2. Если $x_n \leqslant y_n$ начиная с некоторого номера, то $a \leqslant b$.

▷ **Доказательство**.

1. Если $a < b$, то $\exists c \in \mathbb{R}\big|\, a < c < b$. Множества $(-\infty, c)$ и $(c, +\infty)$ не пересекаются. $(-\infty, c)$ — окрестность точки a; $(c, +\infty)$ — окрестность точки b. $x_n \to a \Rightarrow \exists M_1 \in \mathbb{R}\big|\, \forall n > M_1\colon x_n \in (-\infty, c)$; $y_n \to b \Rightarrow \exists M_2 \in \mathbb{R}\big|\, \forall n > M_2\colon y_n \in (c, +\infty)$. Если $M = \max\{M_1, M_2\}$, то $\forall n > M\colon x_n \in (-\infty, c)$; $y_n \in (c, +\infty) \Rightarrow x_n < y_n$.
2. От противного. Пусть $a > b$, тогда согласно пункту 1, $\exists M \in \mathbb{N}\big|\, \forall n > M\colon x_n > y_n$ — противоречие, значит, $a \leqslant b$.

□

ОПР 2.7.9 (Ограниченной последовательности).

Последовательность x_n *называется* ограниченной, *если* $\exists M \in \mathbb{N}\big|\, \forall n \in \mathbb{N}\colon |x_n| < M$.

Теорема 2.7.10 (О промежуточном пределе (лемма о двух милиционерах)).

▷ Пусть

v_n, x_n, w_n — три последовательности, причем:

- $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$;
- $x_n \in [v_n,\, w_n]$ — начиная с некоторого номера.

▷ Тогда

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

▷ **Доказательство**.

- Перепишем условия в ином виде:
  1. $\exists M_1 \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n \geqslant M_1 : x_n \in [v_n,\, w_n]$;
  2. $\forall V_a : \exists M_2 \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n \geqslant M_2 : v_n \in V_a$;
  3. $\forall V_a : \exists M_3 \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n \geqslant M_3 : w_n \in V_a$.
- Пусть $M = \max\{M_1,\, M_2,\, M_3\} \Rightarrow \forall n \geqslant M$ условия 1, 2, 3 — выполнены одновременно, значит, $v_n \in V_a$, $w_n \in V_a \Rightarrow [v_n,\, w_n] \subseteq V_a \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n \in V_a$.

□

ОПР 2.7.11 (Арифметические критерии сходимости последовательности).
Пусть x_n — последовательность, тогда:

1. $x_n \to a$ *при* $n \to \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n > M : |x_n - a| < \varepsilon$;
2. $x_n \to +\infty$ *при* $n \to \infty \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n > M : \forall t \in \mathbb{R} : x_n \geqslant t$;
3. $x_n \to -\infty$ *при* $n \to \infty \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n > M : \forall t \in \mathbb{R} : x_n \leqslant t$.

УТВ 2.7.12 (Об эквивалентности критериев сходимости).

▷ Топологические и арифметические критерии сходимости последовательностей эквивалентны.

Следствие 2.7.13 (Об ограниченности сходящейся последовательности).

▷ Пусть

$x_n \to a$ при $n \to \infty$ и $a \in \mathbb{R}$.

▷ Тогда

Последовательность x_n — ограничена.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $\varepsilon = 1 : \exists M \,\Big|\, \forall n > M : |x_n - a| < 1$. Тогда: $\forall n > M : |x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a| \leqslant 1 + |a|$.
- Пусть $S = \max\{|x_1|,\, |x_2|,\, \ldots,\, |x_M|,\, 1 + |a|\}$, тогда последовательность x_n ограничена: $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant S$.

□

Следствие 2.7.14 (Сходимость последовательности из модулей).

▷ Пусть

$x_n \to a$ при $n \to \infty$.

▷ Тогда

$|x_n| \to |a|$ при $n \to \infty$.

▷ **Доказательство**.

- Следует из арифметического критерия сходимости + свойства модуля $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$.

□

2.8 Арифметические свойства предела

Теорема 2.8.1 (О пределе суммы).

▷ Пусть

- $x_n \to a$; $y_n \to b$ при $n \to \infty$;
- $a + b$ — определено.

▷ Тогда

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

▷ **Доказательство**.

1. Пусть $a,\, b \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0 : \exists M_1 \,\Big|\, \forall n > M_1 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; $\exists M_2 \,\Big|\, \forall n > M_2 : |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем $M = max\{M_1,\, M_2\} \Rightarrow \forall n > M : |x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$;
2. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, тогда: $x_n \to a \Rightarrow x_n$ — ограничена. $\exists c \,\Big|\, \forall n \in \mathbb{N} : x_n < c$; Но, начиная с некоторого номера: $\forall t \in \mathbb{R} : y_n > t - c \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n + y_n \geqslant t - c + c = t \Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$.

□

Теорема 2.8.2 (О произведении пределов)**.**

▷ Пусть

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;
  $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$;
- $a \cdot b$— определено.

▷ Тогда

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$.

▷ **Доказательство**.

1. (Случай 1) Пусть $a,\, b \in \mathbb{R}$. Пусть
   ✓ $c \mid a,\, b \in (-c,\, c)$;
   ✓ $\varepsilon > 0$ — произвольное.
   Тогда, начиная с некоторого номера N:
   ✓ в силу теоремы об ограниченности последовательности:
   ⋆ $|x_n| \leqslant c$;
   ⋆ $|y_n| \leqslant c$.
   ✓ по определению предела 2.7.11:
   ⋆ $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2c}$;
   ⋆ $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}$.
   Пусть M такое, что выполнены все четыре условия $\Rightarrow \forall n > M\colon |x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \leqslant |x_n(y_n - b)| + |b(x_n - a)| = |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| < c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon$
2. (Случай 2) Пусть $b = +\infty$, $a > 0$. Пусть $t \in \mathbb{R}$, тогда существует такое c, что начиная с некоторого номера $x_n > c$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, то $y_n > \frac{t}{c}$ — начиная с некоторого номера. Значит: $x_n \cdot y_n > c \cdot \frac{t}{c} = t \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = +\infty$.

□

Теорема 2.8.3 (Об обратном произведении)**.**

▷ Пусть

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ a \neq 0$.

▷ Тогда

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

▷ **Доказательство**.

(Случай 1)
Пусть $|a| = \infty . \forall t \in \mathbb{R}\colon \exists M \mid \forall n > M\colon |x_n| > t \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}\colon \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{t} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon = \frac{1}{t} > 0\colon \left|\frac{1}{x_n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n}\right| \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

- (Случай 2) Пусть $|a| \neq \infty, a > 0$. $\exists c \in [0,\, a) \mid$ начиная с некоторого номера $x_n > c$. Поскольку $x_n \to a$, то $|x_n - a| \leqslant c^2\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n| \cdot |a|} < \varepsilon$.

□

Следствие 2.8.4 (Теорема об отношении пределов).

▷ Пусть

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$;
- $\frac{a}{b}$ — определено.

▷ Тогда

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

▷ **Доказательство**.

- Следует из теорем: 2.8.3 и 2.8.2.

□

2.9 Подпоследовательности

ОПР 2.9.1 (Подпоследовательности)**.**
Пусть есть некоторое отображение $n_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. *Предположим, что отображение* n_k *обладает следующим свойством—* $n_k \to \infty$, *при* $k \to \infty$.
Предположим, что есть последовательность x_n, *тогда* x_{n_k} *называется* подпоследовательностью *последовательности* x_n.

Теорема 2.9.2 (О подпоследовательности сходящейся последовательности)**.**

▷ Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, и ее предел совпадает с пределом последовательности. Т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists M \big| \forall n > M\colon |x_n - a| < \varepsilon$.

  Рассмотрим подпоследовательность x_{n_k}. Поскольку $n_k \to \infty$, при $k \to \infty$, то $\exists j \big| \forall k > j n_k > M \Rightarrow \forall k > j |x_{n_k} - a| > \varepsilon$. Это и означает сходимость любой подпоследовательности.

□

Следствие 2.9.3 (О не сходимости последовательности).

Если для последовательности x_n существует такие две сходящиеся подпоследовательности x_{n_k} и x_{n_j}, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \neq \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j}$, то последовательность не сходится.

Пример 2.9.3.1 (К следствию).

▷ $x_n = \cos \pi n = (-1)^n$.

$x_{2k} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 1$;

$x_{2k+1} = -1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = -1$;

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} \neq \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}$.

ОПР 2.9.4 (Частичного предела).
Пусть x_n — некоторая последовательность. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется частичным пределом *последовательности x_n, если существует такая подпоследовательность x_{n_k}, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.*

Теорема 2.9.5 (Вейрштрасса о подпоследовательностях).

▷ Множество частичных пределов последовательности содержит наибольший и наименьший элементы в $\overline{\mathbb{R}}$ и следовательно всякая последовательность содержит сходящуюся в $\overline{\mathbb{R}}$ подпоследовательность.

▷ **Доказательство**.

- Пусть x_n — некоторая последовательность. Рассмотрим множество вида $U_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Пусть $v_n = \sup U_n$. Очевидно, что $U_{n+1} \subset \subset U_n \Rightarrow v_{n+1} \leqslant v_n \Rightarrow$ последовательность v_n монотонно убывающая. Значит: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} v_n = h \in \overline{\mathbb{R}}$.
- (Случай 1) Пусть $h = -\infty$.

  Тогда $-\infty < x_n \leqslant v_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = h = -\infty$.
- (Случай 2) Пусть $h > -\infty$.

  Тогда существует такая последовательность u_n, что u_n — монотонно возрастает и $u_n < h$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = h$, ($u_n = h - \frac{1}{n}$, если $h \in \mathbb{R}$ или $u_n = n$, если $h = +\infty$).

По построению:

$\forall k\colon u_k < v_k = \sup U_k$. Т.к. $v_k = \sup U_k \Rightarrow \exists x_{n_k} \big| x_{n_k} > u_n$ и $x_{n_k} < v_k$.

$\lim\limits_{k\to\infty} u_k = h$, $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = h \Rightarrow \lim\limits_{(} k \to \infty) x_{n_k} = h$.

Следовательно, всякая последовательность имеет сходящуюся в $\overline{\mathbb{R}}$ подпоследовательность.

□

ОПР 2.9.6 (Верхних и нижних пределов).
Пусть x_n — некоторая последовательность. Пусть A — множество частичных пределов, тогда:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \stackrel{def}{=} \sup A; \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \stackrel{def}{=} \inf A;$$

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, то последовательность x_n имеет предел.

Теорема 2.9.7 (Критерий Коши сходимости последовательности).

▷ Последовательность x_n сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\colon \exists M \in \mathbb{N} \big| \forall \ell, k > M, \colon |x_\ell - x_k| < \varepsilon$.

▷ **Доказательство**.

$\Rightarrow$ Пусть $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем $M \big| \forall n > M\colon |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|x_\ell - x_k| = |x_\ell - a - x_k + a| \leqslant |x_\ell - a| + |x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ — условие Коши выполнено.

$\Leftarrow$ Пусть x_n удовлетворяет условию Коши. Значит, у x_n есть сходящаяся подпоследовательность (т. Вейрштрасса 2.9.5 на стр. 41).

$x_{n_k} \big| \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$; $|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

ОПР 2.9.8 (Последовательности Коши).
Последовательность x_n называется фундаментальной (последовательностью Коши), *если она удовлетворяет условию Коши 2.9.7*

Следствие 2.9.9 (из критерия Коши).

Пусть
- $a_n = x_n \cdot y_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;
- y_n — ограничена, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}\colon |y_n| \leqslant c$, $c \in \mathbb{R}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2.10 Числовые ряды

ОПР 2.10.1 (Числового ряда).

Пусть дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

$S_1 = a_1$;
$S_2 = S_1 + a_2$;
...
$S_n = S_{n-1} + a_n$.

Последовательность S_n *называется* последовательностью частичных сумм ряда *(определяет ряд). Обозначается:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

ОПР 2.10.2 (Суммы ряда).

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *называется* суммой ряда.
Если $S \in \mathbb{R}$, *то ряд называется* сходящимся.

Теорема 2.10.3 (Существование суммы положительного ряда).

▷ Пусть

$\forall i \in \mathbb{N}$: $a_i \geqslant 0$ (ряд положительный).

▷ Тогда

Ряд имеет сумму, возможно бесконечную.

▷ **Доказательство**.

- Т.к. $S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow S_b \leqslant S_{n-1}$. Следовательно, последовательность частичных сумм монотонно возрастает, а значит, согласно теореме о монотонных последовательностях **??** на стр. **??**, S_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

□

Теорема 2.10.4 (О необходимом признаке сходимости ряда).

▷ Пусть

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.

▷ Тогда

$\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$

▷ **Доказательство**.

- Рассмотрим две подпоследовательности S_n:

  $S_k,\ s_{k-1} \Rightarrow S_k, S_{k-1}$ — сходятся. $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} S_{k-1} = S$ (сумма ряда).

  Заметим, что: $S_k - S_{k-1} = a_k$(по построению) $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(S_k - S_{k-1}) = \lim\limits_{k\to\infty} a_k \Rightarrow S - S = \lim\limits_{k\to\infty} a_k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

□

Пример 2.10.4.1 (Полезные примеры).

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$
   $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 = n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$
   Ряд расходится.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.
   (a) Последовательность частичных сумм ограничена;
   (b) S_n не имеет предела (1,0,1,0,...);
   $S_{2n} = 1, S_{2n+1} = 0$.
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ — частичная последовательность.
   $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
   (a) $|q| < S \quad \lim S_n = \frac{1}{1-q}$
   (b) $|q| > S \quad \lim S_n$ — не существует.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;
   $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$;
   $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots + 1 - \frac{1}{n+1}$;
   $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$;
   $\lim S_n = \lim(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический ряд.
   $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$.
   Докажем, что ряд расходящийся.
   $\frac{1}{n} > 0 \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$ (L может быть равна ∞)
   $S_{2^k}: S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \ldots$;
   $S_{2^k} = 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{7}) + \ldots + (\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k - 1})$(телескопический

метод)$\geqslant 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}+\ldots+(\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}})=1+\frac{k}{2}$;
$S_{2^k}\geqslant 1+\frac{k}{2}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2^k}=\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^S}\quad \S>1$;
При $S>1$ этот ряд сходиться. S_n монотонно возрастает$\Rightarrow\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$;
$S_{2^k-1}=1+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+(\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{7^3})+\ldots+(\frac{1}{2^{(k-1)S}}+\ldots+\frac{1}{(2^k-1)^S})\leqslant$
$\leqslant 1+(\frac{1}{2^S}+\frac{1}{2^S})+(\frac{1}{4^S}+\ldots+\frac{1}{4^S})+\ldots+\frac{1}{2^{(k-1)S}}+\ldots+\frac{1}{2^{(k-1)S}}=1+\frac{2}{2^S}+\frac{4}{4^S}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2(k-1)S}=1+\frac{1}{2^{S-1}}+(\frac{1}{2^{S-1}})^2+\ldots+(\frac{1}{2^{S-1}})^{k-1}=\frac{1-(\frac{1}{2^{S-1}})^k}{1-\frac{1}{2^{S-1}}}$;
Заметим $\lim\frac{1-(\frac{1}{2^{S-1}})^k}{1-\frac{1}{2^{S-1}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{S-1}}}$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n=L, L<\infty$;

Теорема 2.10.5 (Об ограниченности частичных сумм)**.**

▷ Пусть

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

▷ Тогда

Последовательности частичных сумм ограничена (обратное не верно).

▷ **Доказательство**.

- Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, значит, S_n имеет предел. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S,\ S\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $\Rightarrow S_n$ — ограничена из теоремы 2.7.13 на стр. 37 об ограниченности сходящейся последовательности.

□

ОПР 2.10.6 (Суммы рядов)**.**
Пусть даны два ряда $\sum a_i$ *и* $\sum b_i$*, тогда ряд* $\sum(a_i+b_i)$ *называется* суммой рядов.
Если $\lambda\in\mathbb{R}$*, то* $\sum\lambda a_i$ *называется* произведением ряда на число.

Теорема 2.10.7 (О сумме сходящихся рядов)**.**

▷ Пусть

$A=\sum a_i;\ B=\sum b_i$ — два сходящихся ряда. $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$.

▷ Тогда

$\sum(\lambda a_i+\mu b_i)=\lambda A+\mu B$.

▷ **Доказательство**.

- $S_n=(\lambda a_1+\mu b_1)+(\lambda a_2+\mu b_2)+\ldots+(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda(a_1+a_2+\ldots+a_n)+\mu(b_1+b_2+\ldots+b_n)=\lambda A_n+\mu B_n$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda A_n+\mu B_n)=\lambda\lim\limits_{n\to\infty} A_n+\mu\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\lambda A+\mu B$.

□

ОПР 2.10.8 (Остатка ряда)**.**
Пусть дан ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$*. Предположим, что зафиксировано* m*, тогда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i=a_1+a_2+\ldots+a_m+\sum\limits_{i=m+1}^{\infty} a_i$.

$R_m=\sum\limits_{i=m+1}^{\infty} a_i$ — остаток ряда.
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i=S_m+R_m$.

Теорема 2.10.9 (О сходимости остатка ряда)**.**

▷ Пусть

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}$ — сходится.

▷ Тогда

$\forall m\in\mathbb{N}$: R_m — то же сходится.

▷ **Доказательство**.

- $\delta=\sum\limits_{n=0}^{m-1}$, тогда $S_n=\delta+S_n^m$
S_n^m — частичная сумма ряда R_m
$S_n^m=S_n\cdot\delta\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n-\delta=L-\delta\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} S_n^m$ — существует $\Rightarrow R_m$ — сходится.

□

Теорема 2.10.10 (Критерий Коши о сходимости ряда)**.**

▷ Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\colon\exists M\in\mathbb{N}|\forall n>M,\forall p\in\mathbb{N}\colon|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$

▷ **Доказательство**.

- S_n — последовательность частичных сумм. $S_{n+p}-S_n=(a_{n+1}+a_{n+2}|\ldots+a_{n+p})$; $|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|$.

□

2.11 Знакоположительные ряды

ОПР 2.11.1 (Знакоположительного ряда)**.**
Ряд $\sum a_i$ *называется* знакоположительным (положительным)*, если* $\forall i \in \mathbb{N}\colon a_i \geqslant 0$.

Лемма 2.11.2 (Достаточный признак сходимости положительного ряда)**.**

▷ Пусть

$\sum a_i$ — положительный ряд такой, что последовательность его частичных сумм ограниченна.

▷ Тогда

Ряд $\sum a_i$ сходится.

▷ **Доказательство**.

- Поскольку $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ и $a_{n+1} \geqslant 0$, значит, $S_{n+1} \geqslant S_n \Rightarrow S_n$ — монотонна. По теореме **??** на стр. **??**, получаем, что S_n сходится, возможно к бесконечности.
- Согласно ограниченности, получаем $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}\colon 0 < S_n \leqslant M$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \leqslant M \Rightarrow$ ряд $\sum a_i$ сходится.

□

Теорема 2.11.3 (Признак сравнение для знакоположительных рядов)**.**

▷ Пусть

$A = \sum a_i$ и $B = \sum b_i$ — два положительных ряда, причем, начиная с некоторого номера $M \in \mathbb{N}\colon \forall i > M\colon 0 \geqslant a_i \geqslant b_i$.

▷ Тогда

- Если ряд B сходится, то и ряд A сходится;
- Если ряд A расходится, то и ряд B расходится.

▷ **Доказательство**.

- Заметим, что $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n \Rightarrow$ $\Rightarrow A_n \leqslant B_n \Rightarrow$ последовательность A_n — ограниченна. Согласно лемме 2.11.2 A_n — сходится.
- Пусть A_n — расходится, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \infty$. $A_n \leqslant B_n$, используя свойства пределов 2.7.8 на стр. 36, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} B_n \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} B_n \geqslant \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \infty \Rightarrow$ ряд B — расходится.

□

ОПР 2.11.4 (Одинаково сходящихся рядов)**.**
Два ряда $\sum a_i$ *и* $\sum b_i$ *будем называть* одинаково сходящимися*, если они оба одновременно либо сходятся, либо расходятся.*

Теорема 2.11.5 (Асимптотический признак сходимости)**.**

▷ Пусть

$\sum a_i$ и $\sum b_i$ — два знакоположительных ряда.

Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$.

▷ Тогда

Ряды $\sum a_i$ и $\sum b_i$ обладают одинаковой сходимостью.

▷ **Доказательство**.

- Во-первых, заметим, что $L > 0$;
- Во-вторых: т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \Rightarrow \forall \varepsilon\colon \exists M \in \mathbb{N} \mid \forall n > M\colon \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L - \varepsilon$.
- Выберем такое ε, что $L - \varepsilon > 0$. Тогда

$$(L-\varepsilon)b_n < a_n < (L+\varepsilon)b_n.$$

Согласно теореме об алгебраических свойствах рядов 2.10.7 на стр. 45 получаем, что если ряд $\sum b_n$ сходится, то ряды $\sum(L+\varepsilon)b_n$, $\sum(L-\varepsilon)b_n$ тоже сходятся.

Получаем:

$$0 < (L-\varepsilon)b_n < a_n;\ 0 < a_n < (L+\varepsilon)b_n.$$

- Согласно признаку сравнения 2.11.3:
  - ✓ Из $0 < (L-\varepsilon)b_n < a_n$ следует:
    - ⋆ если ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_n$ тоже сходится;
    - ⋆ если ряд $\sum b_n$ расходится, то ряд $\sum a_n$ тоже расходится;
  - ✓ Из $0 < a_n < (L+\varepsilon_n)b_n$ следует:
    - ⋆ если ряд $\sum b_n$ сходится, то ряд $\sum a_n$ тоже сходится;
    - ⋆ если ряд $\sum a_n$ расходится, то ряд $\sum b_n$ тоже расходится;

□

Пример 2.11.5.1 (Примеры использования теоремы)**.**

1.

$$\sum \frac{1}{n^2+n+1} \sim \sum \frac{1}{n_2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n+1} = 1;$$

2.

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}} \sim \sum \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+10)}} = 1.$$

Следствие 2.11.5.2 (Частные случаи теоремы).

- ▷ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, тогда:
  - ∘ если $\sum b_i$ сходится, то $\sum a_i$ сходится;
  - ∘ если $\sum a_i$ расходится, то $\sum b_i$ расходится.
- ▷ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.

Теорема 2.11.6 (Признак Даламбера сходимости ряда)**.**

▷ Пусть

$A = \sum a_i$ — знакоположительный ряд;

Предположим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

▷ Тогда

1. если $q > 1$, то ряд A расходится.
2. если $q = 1$, то ряд A может как сходиться, так и расходиться;
3. если $q < 1$, то ряд A сходится;

▷ **Доказательство**.

1. Пусть $q > 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$. Следовательно, начиная с некоторого номера $M\colon a_{n+1} > a_n$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$. Получаем, что не выполнен необходимый признак сходимости 2.10.4 на стр. 43.
2. Пусть $q = 1$. Рассмотрим два ряда:
   ✓ $\sum \frac{1}{n}$ — расходится;
   ✓ $\sum \frac{1}{n^2}$ — сходится;
   Но $q = 1$ для обоих рядов.

3. Пусть $0 < q < 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Следовательно, $\exists \varepsilon > 0 \,|\, \exists M \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > M\colon \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 - \varepsilon$. Пусть $\alpha = 1 - \varepsilon,\ 0 < \alpha < 1$, следовательно, $a_{n+1} \leqslant \alpha a_n$.
   Рассмотрим остаток ряда R_m:

$$a_{m+1} \leqslant \alpha\, a_m;$$
$$a_{m+2} \leqslant \alpha\, a_{m+1} \leqslant \alpha^2\, a_m;$$
$$\ldots$$
$$a_{m+k} \leqslant \alpha^k\, a_m.$$

   Получаем: $R_m = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_m \alpha^{n-m} \leqslant a_m \sum\limits_{n=m}^{\infty} \alpha^{n-m} = a_m \alpha^{-m} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha^n -$
   сходится.

□

Теорема 2.11.7 (Радикальный признак Коши сходимости ряда)**.**

▷ Пусть

$A = \sum a_i$ — знакоположительный ряд;

Предположим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

▷ Тогда

1. если $q > 1$, то ряд A расходится.
2. если $q = 1$, то ряд A может как сходиться, так и расходиться;
3. если $q < 1$, то ряд A сходится;

▷ **Доказательство**.

1. Пусть $q > 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$. Следовательно, начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$. Нарушено необходимое условие сходимости ряда 2.10.4 на стр. 43.
2. Пусть $q = 1$. Рассмотрим два ряда:
   ✓ $\sum \frac{1}{n}$ — расходится;
   ✓ $\sum \frac{1}{n^2}$ — сходится;
   Но $q = 1$ для обоих рядов.
3. Пусть $0 < q < 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Следовательно, $\exists M \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > M\colon \sqrt[n]{a_n} < 1$. Значит, $\exists \alpha < 1 \,|\, \forall n > M\colon \sqrt[n]{a_n} \leqslant \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall n > M\colon a_n \leqslant \alpha^n$. Т.к. $\alpha < 1$, то $\sum \alpha^n$ — сходится, а значит, $\sum a_n$ — сходится.

□

2.12 Знакопеременные ряды

ОПР 2.12.1 (Знакопеременных рядов)**.**

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, *где* $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n\geqslant 0$ *называется* знакопеременным рядом.

Теорема 2.12.2 (Признак сходимости Лейбница для знакопеременных рядов)**.**

▷ Пусть

- $\sum(-1)^{n-1}a_n,\ a_n\geqslant 0$— знакопеременный ряд;
- a_n— монотонно убывает;
- $\lim a_n=0$.

▷ Тогда

Ряд $\sum(-1)^{n-1}a_n$ сходится.

▷ **Доказательство**.

- Рассмотрим две подпоследовательности частичных сумм:
  - ✓ $S_{2k+1}=a_1-(a_2-a_3)-\ldots-(a_{2k}-a_{2k+1})\leqslant a_1$, т.к. $\forall n\in N\colon a_{n+1}\leqslant$ $\leqslant a_n$;
  - ✓ $S_{2k}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2k-1}-a_{2k})$;

  Получим: $0\leqslant S_{2k};\ S_{2k}\leqslant S_{2k+1};\ \exists\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}$.
- $S_{2k+1}=S_{2k}+a_{2k+1}\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}+\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}$.
- $\left.\begin{matrix}S_{2k+1}\\ S_{2k}\end{matrix}\right\}$ сходятся.

  Запишем это маленько в другой форме:

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k}=L\Rightarrow\forall\varepsilon>0\colon\exists M_1\in\mathbb{N}\,|\,\forall k>M_1\colon|S_{2k}-L|<\varepsilon;$$
$$\lim_{k\to\infty}S_{2k+1}=L\Rightarrow\forall\varepsilon>0\colon\exists M_2\in\mathbb{N}\,|\,\forall k>M_2\colon|S_{2k+1}-L|<\varepsilon.$$

Пусть $M=\max\{M_1,\,M_2\}$, тогда $\forall n>M\colon|S_n-L|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n=L$.

□

Лемма 2.12.3 (Неравенство Абеля)**.**

▷ Пусть

$u_k\geqslant u_{k+1}\geqslant\ldots\geqslant u_\ell\geqslant 0;$

$v_k,\,v_{k+1},\,\ldots,\,v_\ell\in\mathbb{R}.$

▷ Тогда

Имеет место неравенство Абеля:

$$\left|\sum_{n=k}^{\ell}u_nv_n\right|\leqslant h\cdot u_k,$$

где $h=\sup\limits_{j\in[k,\,\ell]}\left|\sum\limits_{n=k}^{j}v_n\right|$.

▷ **Доказательство**.

- Обозначим $S_j=\sum\limits_{n=k}^{j}v_n,\ j\in\{k,\,k+1,\,\ldots,\,\ell\}$.
- Положим $S_{k-1}=0$ Тогда $v_j=S_j-S_{j-1}$;

$$\left|\sum_{n=k}^{\ell}u_nv_n\right|=|u_kv_k+u_{k+1}v_{k+1}+\ldots+u_\ell v_\ell|=$$
$$=|u_k(S_k-S_{k-1})+u_{k+1}(S_{k+1}-S_k)+\ldots+u_\ell(S_\ell-S(\ell-1))|=$$
$$=|S_k(u_k-u_{k+1})+S_{k+1}(u_{k+1}-u_{k+2}+\ldots+S_{\ell-1}(u_{\ell-1}-u_\ell)+S_\ell u_\ell|\leqslant$$
$$\leqslant|S_k||u_k-u_{k+1}|+|S_{k+1}||u_{k+1}-u_{k+2}|+\ldots+|S_{\ell-1}||u_{\ell-1}-u_\ell|+|S_\ell||u_\ell|\leqslant$$
$$\leqslant_{(\text{т.к. } u_k\geqslant u_{k+1}\geqslant\ldots\geqslant u_\ell\geqslant 0)}h(u_k-u_{k+1}+u_{k+1}-\ldots+u_{\ell-1}-u_\ell-u_\ell)=hu_k.$$

□

Теорема 2.12.4 (Признак Абеля-Дирихле сходимости рядов)**.**

▷ Пусть

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$, причём выполнены следующие условия:

I. u_n — монотонно убывающая последовательность такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$;

II. частичные суммы S_n ряда $\sum\limits_k v_k$ — ограничены.

▷ Тогда

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ — сходится.

▷ **Доказательство**.

- Будем проверять условие Коши 2.10.10 на стр. 46.
- Пусть $\varepsilon > 0$. Определим $\forall j\colon\ S_j = \sum\limits_{n=1}^{j} v_n \Rightarrow \exists h \big| \forall j \in \mathbb{N}\colon |S_j| \leqslant h$.

  Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то существует такой номер M, что $\forall n > M\colon u_n < \frac{\varepsilon}{2h}$.
- Пусть $\ell > k \geqslant M$, тогда

$$\left|\sum_{n=k}^{\ell} v_n\right| = |S_\ell - S_{k-1}| \leqslant |S_\ell| + |S_{k-1}| \leqslant 2h$$

$$\left|\sum_{n=k}^{\ell} u_n v_n\right| \leqslant \left|\sum_{n=k}^{\ell} u_k v_n\right| \leqslant 2h\, u_k < 2h\frac{\varepsilon}{2h} = \varepsilon.$$

Условие Коши выполнено, ряд сходится.

□

2.12.4.1 Полезные факты

Имеют место следующие равенства:

$$\sum_{x=0}^{m} \sin(xa+b) = \frac{\sin\left(\frac{a(m+1)}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{am}{2}+b\right)}{\sin\frac{a}{2}}; \tag{2.12.1}$$

$$\sum_{x=0}^{m} \cos(xa+b) = \frac{\sin\left(\frac{a(m+1)}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{am}{2}+b\right)}{\sin\frac{a}{2}}. \tag{2.12.2}$$

▷ **Доказательство**.

I $\sum\limits_{x=0}^{m} \sin(xa+b) = \frac{\sin\left(\frac{a(m+1)}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{am}{2}+b\right)}{\sin\frac{a}{2}}$.

Докажем индукцией по m.

1. Проверим базу индукции: $m = 0 \Rightarrow \sin b = \sin b$;

2. Пусть равенство верно при m, докажем, что оно верно и при $m+1$, т.е. докажем, что

$$\sum_{x=0}^{m} \sin(ax+b) = \frac{\sin\frac{a(m+1)}{2}\sin\left(\frac{am}{2}+b\right)}{\sin\frac{a}{2}} + \sin(a(m+1)+b) = \frac{\sin\frac{a(m+2)}{2}\ \mathrm{s}}{}$$

или

$$\sin\frac{a(m+1)}{2}\sin\left(\frac{am}{2}+b\right) + \sin\frac{a}{2}\sin(a(m+1)+b) = \sin\frac{a(m+2)}{2}\sin\left(\frac{a(}{}\right.$$

Используем формулу преобразования произведения тригонометрических функций к сумме, получим

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{a}{2}-b\right) - \cos\left(\frac{a(m+1)}{2}+\frac{am}{2}+b\right)\right] + \sin\frac{a}{2}\sin(a(m+1)+b) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{a}{2}-b\right) - \cos\left(\frac{a(m+2)}{2}+\frac{a(m+1)}{2}+b\right)\right]$$

Значит:

$$\sin\frac{a}{2}\sin(a(m+1)+b) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{a(m+1)}{2}+\frac{am}{2}+b\right) - \cos\left(\frac{a(m+2)}{2}+\frac{a}{}\right.\right.$$
$$= \sin\frac{a}{2}\sin(a(m+1)+b;$$

II Аналогично.

□

Пример 2.12.4.2 („ основной “).

▷ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},\ x \in \mathbb{R}$.

Данный ряд сходится.

▷ **Доказательство**.

- Пусть

$$u_n = \frac{1}{n};\ v_n = \sin nx.$$

Тогда

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \sin nx;\ \exists h \big| |S_k| \leqslant k\ - \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$S_k = \left|\sum_{n=1}^{k} \sin nx\right| = \left|\sum_{n=0}^{k} \sin nx\right| =_{\text{(из ((2.12.1)) на стр. 53, если положить } b=0,\ x=n,\ a=x)} \left|\frac{\sin\frac{x(k+1)}{2}\sin\frac{xk}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\sin\frac{x(k+1)}{2}\right|\left|\sin\frac{xk}{2}\right|}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

При $x \neq 0$, $x \neq 2\pi$ S_k ограничены; при $x = 0$ или $x = 2\pi$ $\sin nx = 0$.

□

2.13 Абсолютная сходимость

ОПР 2.13.1 (Абсолютной сходимости)**.**
Ряд $\sum a_i$ *называется* абсолютно сходящимся*, если ряд* $\sum |a_i|$ *сходится.*

Теорема 2.13.2 (Об абсолютной сходимости ряда)**.**

▷ Пусть

Ряд абсолютно сходится

▷ Тогда

Он сходится. Обратное не верно.

▷ **Доказательство**.

- Пусть ряд $\sum a_i$ абсолютно сходится. Применим признак Коши 2.10.10 на стр. 46:
  $\varepsilon > 0\colon M \bigm| \forall k > M,\ \forall \ell > 0\colon \big||a_k| + |a_{k+1}| + \ldots + |a_{k+\ell}|\big| < \varepsilon.$

  $$|a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+\ell}| \leqslant |a_k| + |a_{k+1}| + \ldots + |a_{k+\ell}| = \big||a_k| + |a_{k+1}| + \ldots + |a_{k+\ell}|\big| \leqslant \varepsilon$$

  Значит, ряд $\sum a_i$ сходится.
- Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ — сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится.

□

ОПР 2.13.3 (Условно сходящегося ряда)**.**
Если ряд $\sum a_i$ *сходится, а ряд* $\sum |a_i|$ *расходится, то ряд называют* услоно *сходящимся.*

Следствие 2.13.4 (Признак Даламбера (для произвольных рядов))**.**

▷ Пусть

Дан ряд $\sum a_i \bigm| \exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$.

▷ Тогда

1. Если $q < 1$ то ряд сходится абсолютно;
2. Если $q = 1$ то нельзя ничего сказать о сходимости ряда;
3. Если $q > 1$ то ряд расходится.

▷ **Доказательство**.

- Поскольку ряд $\sum |a_i|$ — знакоположительный, рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$;

  Далее применим признак Даламбера 2.11.6 на стр. 49.

□

Следствие 2.13.5 (Признак Коши (для произвольных рядов))**.**

▷ Пусть

Дан ряд $\sum a_i \bigm| \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

▷ Тогда

1. Если $q < 1$ то ряд сходится абсолютно;
2. Если $q = 1$ то нельзя ничего сказать о сходимости ряда;
3. Если $q > 1$ то ряд расходится.

▷ **Доказательство**.

- Аналогично предыдущему (2.13.4).

□

ОПР 2.13.6 (Произведения по Коши)**.**
Пусть даны два ряда $\sum a_i$, $\sum b_i$. *Тогда ряд* $\sum c_i$ *называется* произведением по Коши *рядов* $\sum a_i$, $\sum b_i$, *если* $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$.

Теорема 2.13.7 (Мертенса)**.**

▷ <u>Пусть</u>

Ряды $\sum a_i$, $\sum b_i$ — сходятся абсолютно.

▷ <u>Тогда</u>

Ряд $\sum c_i$ (произведение по Коши) сходится.

Глава 3

Функции

3.1 Пределы функций

3.1.1 Напоминание

▷ Элементарные окрестности

- $p \in \mathbb{R},\ B_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, p - \varepsilon < x < p + \varepsilon\};$
- $p = +\infty\colon\ B_\varepsilon(p) = \{x \,\big|\, x > \varepsilon\};$
- $p = -\infty\colon\ B_\varepsilon(p) = \{x \,\big|\, x < \varepsilon\}.$

Окрестность точки p — любое множество U такое, что существует элементарная окрестность $B_\varepsilon(p) \,\big|\, B_\varepsilon(p) \subset U$.

Множество окрестностей p обозначим $\vartheta(p)$.

Лемма 3.1.2 (Лемма 0).

▷ Пусть

$U_i(p)$ — элементарные окрестности точки p, $i = 1, 2, \ldots, n$.

▷ Тогда

Существует окрестность V точки p такая, что $\forall i\colon V \in U_i(p)$.

▷ **Доказательство**.

- Поскольку $U_i(p)$ — элементарные окрестности, то $\exists \varepsilon_i \,\big|\, \forall i\colon U_i(p) = B_{\varepsilon_i}(p)$.
- Пусть $\varepsilon = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \varepsilon_i \Rightarrow V = B_\varepsilon \in U_i(p)$ — $\forall i$.

□

ОПР 3.1.3 (Канонической базы).

Для любой точки p существует набор элементарных окрестностей $U_n(p)$, которые называются канонической базой *точки pи определяется следующим образом:*

- *Если $p \in \mathbb{R}$, то $U_n(p) = B_{\frac{1}{n}}(p)$;*
- *Если $p = +\infty$ то $U_n(p) = (n, +\infty)$;*
- *Если $p = -\infty$ то $U_n(p) = (\infty, -n)$.*

Лемма 3.1.4 (Лемма 1).

▷ Пусть

$p \in \overline{\mathbb{R}}$, x_n — последовательность, $\forall n\colon x_n \in U_n(p)$.

▷ Тогда

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p.$

▷ **Доказательство**.

- Пусть $p \in \mathbb{R}$.

$$\forall n\colon x_n \in U_n(p) \Rightarrow \forall n\colon p - \frac{1}{n} < x_n < p + \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leqslant |x_n - p| < \frac{1}{n};$$
$$\lim_{n\to\infty} |x_n - p| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow x_n \to p.$$

- Пусть $p = +\infty$.

$$x \in U_n(p) \Rightarrow x_n > n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty;$$

- Пусть $p = -\infty$.

$$x \in U_n(p) \Rightarrow x_n < -n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

□

ОПР 3.1.5 (Предельной точки).

Точка p называется предельной точкой *множества M* (точкой прикосновения), *если $\forall U \in \vartheta(p)\colon \exists x \in M \,\big|\, x \neq p$ и $x \in U \cap M$*

Пример 3.1.5.1 (Пример 1).

b предельная точка интервала $(a,\, b)$.

Пример 3.1.5.2 (Пример 2)**.**

Пусть $x_n \Big| \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$;
$\{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots\} \Rightarrow a$ — предельная точка.

Лемма 3.1.6 (Лемма П1)**.**

▷ Пусть

- $M \subset E \subset \overline{\mathbb{R}}$;
- p — предельная точка для M.

▷ Тогда

p — предельная точка для E.

▷ **Доказательство**.

- Следует из определения.

□

Лемма 3.1.7 (Лемма П2)**.**

▷ Пусть

p — предельная точка для M.

▷ Тогда

$\forall U \in \vartheta(p)\colon p$ — предельная точка $M \cap U$.

▷ **Доказательство**.

- Следует из определения.

□

Лемма 3.1.8 (Лемма П3 (о характеризации предельных точек))**.**

▷ Пусть

$M \subset \overline{\mathbb{R}},\, M \neq \varnothing$.

▷ Тогда

$p \in \overline{\mathbb{R}}$ является предельной точкой для множества $M \Leftrightarrow \exists$ последовательность $x_n \Big| \forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \in M,\, x_n \neq p$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$.

▷ **Доказательство**.

($\Rightarrow$) Пусть p предельная точка M, тогда рассмотрим каноническую базу:

$$U_n(p),\ \forall n\colon U_n(p) \cap M \neq \varnothing;$$
$$x_n \in U_n(p),\ x_n \neq p;$$
$$x_n \in U_n(p) - \forall n \in \mathbb{N}.$$

Согласно лемме 1 3.1.4 на стр. 60, последовательность x_n такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$.

($\Leftarrow$) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, причём $x_n \in M$, $x_n \neq p$. Значит, $\forall \varepsilon > 0\colon \exists S \in \mathbb{N} \Big| \forall k > S\colon |x_k - p| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{n}$, тогда $\forall n > 0\colon \exists S \in \mathbb{N} \Big| \forall k > S\colon |x_k - p| < \frac{1}{n}$. Значит, точка p предельная.

□

Лемма 3.1.9 (Лемма П4)**.**

▷ Пусть

$M \in \overline{\mathbb{R}},\ M \neq \varnothing,\ p = \sup M,\ q = \inf M.$

▷ Тогда

$p, q \notin M$ — предельные точки множества M.

▷ **Доказательство**.

Т.к. $p = \sup M$, то $\exists x \in M \mid x < p$. Рассмотрим окрестность $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ точки p.
Для всякой такой окрестности $\exists y \in M \mid y \in B_\varepsilon(p)$. Действительно, если бы такая точка не существовала, то p — не sup.

□

ОПР 3.1.10 (Замыкания множества)**.**
Пусть $M \subset \overline{\mathbb{R}}$, $M \neq \varnothing$. *Назовём* замыканием множества M *множество*

$$\overline{M} \stackrel{def}{=} M \cup \{\ \textit{множество предельных точек } M\}.$$

ОПР 3.1.11 (Замкнутого множества)**.**
Если $M = \overline{M}$, *то* M *называют* замкнутым.

Следствие 3.1.11.1 (Из леммы П4).

▷ Пусть

$M =< a,\, b >,\ a < b.$

▷ Тогда

$\overline{M} = [a,\, b]$.

▷ **Доказательство**.

- Если $a < x < b$, то x — предельная точка по лемме 3.1.8 (если взять $x_n = x - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim n \to \infty x_n = x$).
- $a = \inf M$, $b = \sup M$ — предельные точки, согласно лемме 3.1.9.
- Докажем, что других точек нет.

  Пусть $p \notin [a,\, b]$, p— предельная точка. Тогда либо $p > b$, либо $p < a$.

  Пусть $p > b$, тогда если $\varepsilon = \frac{|b-p|}{2}$, то $B_\varepsilon(p) \cap [a,\, b] = \varnothing$.

  Аналогично для $p < a$.

□

ОПР 3.1.12 (Изолированной точки)**.**
Пусть $M \subset \overline{\mathbb{R}}$, $M \neq \varnothing$. Тогда точка $p \in M$ называется изолированной, *если p не является предельной.*

ОПР 3.1.13 (Предела функции в предельной точке)**.**
Пусть $M \subset \overline{\mathbb{R}}$, $M \neq \varnothing$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset D(f)$;
Пусть p предельная точка M.
Число $L \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом функции *f в точке p при $x \to p$ по множеству M, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists U \in \vartheta(p) \big| \forall x \in U \cap M \colon x \neq p,\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

И это обозначают $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in M}} f(x) = L$.

Пример 3.1.13.1.

▷ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1},\ D(f) = (-\infty,\, 1) \cup (1,\, \infty) = M;\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in M}} f(x) = x + 1 = 2;$

▷ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in M}} \sqrt{x-1} = 0,$ если $M = [1,\, \infty)$.

Теорема 3.1.14 (Критерий Гейне существования предела функции в предельной точке)**.**

▷ Пусть

- $M \subset \overline{\mathbb{R}}$, $M \neq \varnothing$, p — предельная точка;

- $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset D(f)$;

▷ Предположим, что

Для любой последовательности $x_n \big| \forall n \colon x_n \to p,\ x_n \neq p$ последовательность $y_n = f(x_n)$ сходится.

▷ Тогда

Существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x_n \in M}} f(x_n) = L,\ L = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

▷ **Доказательство**.

Шаг 1. Если все последовательности $f(x_n)$, то у них тот же предел. Пусть $x_n \to p$, $y_n \to p$ — пробные последовательности.

$$a_n = f(x_n),\ b_n = f(y_n);$$
$$z_n = x_1,\ y_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n \to p;$$
$$c_n = f(z_n).$$

Последовательность c_n сходится в силу условия теоремы.

По построению a_n и b_n подпоследовательности c_n. Согласно теореме о подпоследовательностях

$$\underline{\lim} n a_n = \underline{\lim} n b_n = \underline{\lim} n c_n.$$

Для некоторой последовательности x_n получаем $\underline{\lim} n f(x_n) = L$.

Шаг 2. Напомним: Если p — предельная точка, то $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ существует, если

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists U(p) \big| \forall x \in U(p) \colon || < \varepsilon.$$

Пусть для какой-то последовательности $\underline{\lim} n f(x_n) = L$, а условие существования предела не выполнено. Тогда

$$\forall U(p) \colon \exists x \in U(p) \big| |f(x) - L| \geqslant \varepsilon.$$

Выбирая в качестве $U(p)$ стандартную базу, получаем что

$$\forall n \colon \exists x_n \in B_n(p) \big| |f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon \Rightarrow$$
$$\underline{\lim} n x_n = p,\ f(x_n) = a_n,\ |a_n - L| \geqslant \varepsilon;\ |\underline{\lim} n a_n - L| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \underline{\lim} n a_n \neq L.$$

Шаг 3. Если $\exists \lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, то для любой последовательности $x_n \to p$: $\underline{\lim} n f(x_n) = L$.

Очевидно, в следствии ограниченности предела функции.

□

Следствие 3.1.14.1 (Не существование предела).

▷ Пусть

p — предельная точка и существуют две последовательности x_n, y_n такие, что

$$x_n \to p,\ y_n \to p,\ \underline{\lim} n f(x_n) \neq \underline{\lim} n f(x_n).$$

▷ Тогда

Функция не имеет предела в точке p.

Теорема 3.1.15 (Алгебраический свойства предела функции в точке)**.**

▷ Пусть

f и g — две функции, определённые на одной и той же окрестности M предельной точки p.

▷ Предположим, что

$\exists \lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in M}} f(x) = A;$

$\exists \lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in M}} g(x) = B.$

▷ Тогда

1. Если $A+B$ определено, то $\exists \lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in M}} (f(x)+g(x)) = A+B$
2. Если $A\cdot B$ определено, то $\exists \lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in M}} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$
3. Если существует такая окрестность U точки p, что $\forall x \in U \setminus \{p\}\colon g(x) \neq 0$, тогда $\exists \lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in M\cap(U\setminus\{p\})}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, при условии что $\frac{A}{B}$ определено.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $x_n \to p$ — пробная последовательность. $\exists S \mid \forall n > S\colon x_n \in M$, тогда согласно теореме Гейне 3.1.14 на стр. 63

$$\underline{\lim} n f(x_n) = A;$$
$$\underline{\lim} n g(x_n) = B.$$

Из теорем об алгебраических свойствах предела последовательности (2.8.1 на стр. 38,2.8.2 на стр. 39, 2.8.3 на стр. 39) получаем:

$$\exists \underline{\lim} n (f(x)+g(x)) = A+B;$$
$$\exists \underline{\lim} n (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B;$$
$$\exists \underline{\lim} n \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Поскольку, это верно для всякой пробной последовательности, то согласно теореме Гейне 3.1.14 на стр. 63, получаем, что существуют пределы функций.

□

3.2 Качественные свойства предела

Теорема 3.2.1 (О неравенствах пределов функций)**.**

▷ Пусть

Пусть $V \subset \overline{\mathbb{R}}$, p — предельная точка V, $u(x)$ и $v(x)$ — пара функций, определённых на V.

▷ Предположим, что

Существует окрестность $U(p)$ точки p такая, что

$$\forall x \in U(p) \cap V\colon u(x) \geqslant v(x).$$

▷ Тогда

Если $\exists \lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in V\cap U(p)}} u(x) = A$, $\exists \lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in V\cap U(p)}} v(x) = B$, то $A \geqslant B$.

▷ **Доказательство**.

- Возьмём пробную последовательность $x_n \to p \mid x_n \in V \cap U(p)$. $\forall x_n$ имеет место $\forall n \in \mathbb{N}\colon u(x_n) \geqslant v(x_n)$.

$$u(x_n) = a_n,\ v(x_n) = b_n;$$

$\underline{\lim} n a_n = A$, $\underline{\lim} n b_n = B \Rightarrow A \geqslant B$(согласно теореме о неревенстве пределов для последова

□

Теорема 3.2.2 (О существовании промежуточного предела)**.**

▷ Пусть

Пусть $V \subset \overline{\mathbb{R}}$, p — предельная точка V, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ — три функций, определённых на V.

▷ Предположим, что

Существует окрестность $U(p)$ точки p такая, что

$$\forall x \in U(p) \cap V : u(x) \geqslant w(x) \geqslant v(x).$$

▷ Тогда

Если $\exists \lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in V \cap U(p)}} u(x) = A$, $\exists \lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in V \cap U(p)}} v(x) = A$, то $\exists \lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in V \cap U(p)}} v(x) = A$.

▷ **Доказательство**.

∘ Возьмём пробную последовательность $x_n \to p \,\big|\, x_n \in V \cap U(p)$. $\forall x_n$ имеет место

$$\begin{array}{ccccc} u(x_n) & \geqslant & w(x_n) & \geqslant & v(x_n) \\ \| & & \| & & \| \\ a_n & & c_n & & b_n \end{array}$$

$$a_n \geqslant c_n \geqslant b_n.$$

Применим лемму о существовании промежуточного предела для последовательностей 2.7.10 на стр. 37 и получим:

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in V \cap U(p)}} u(x) \geqslant \lim_{\substack{x \to p \\ x \in V \cap U(p)}} w(x) \geqslant \lim_{\substack{x \to p \\ x \in V \cap U(p)}} v(x) \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \to p \\ x \in V \cap U(p)}} w(x) = A.$$

Для любой пробной последовательности.

□

ОПР 3.2.3 (Возрастающих функций).

- *Функция* f, *определенная на множестве* $S \subset \overline{\mathbb{R}}$, *называется* возрастающей, *если*
$$\forall x,\, y \in S\colon x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$
- *Функция* f, *определенная на множестве* $S \subset \overline{\mathbb{R}}$, *называется* строго возрастающей, *если*
$$\forall x,\, y \in S\colon x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

ОПР 3.2.4 (Убывающих функций).

- *Функция* f, *определенная на множестве* $S \subset \overline{\mathbb{R}}$, *называется* убывающей, *если*
$$\forall x,\, y \in S\colon x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$
- *Функция* f, *определенная на множестве* $S \subset \overline{\mathbb{R}}$, *называется* строго убывающей, *если*
$$\forall x,\, y \in S\colon x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

ОПР 3.2.5 (Монотонных функций).

- *Функция* f, *определенная на множестве* $S \subset \overline{\mathbb{R}}$, *называется* монотонной, *если она либо возрастает, либо убывает.*
- *Функция* f, *определенная на множестве* $S \subset \overline{\mathbb{R}}$, *называется* монотонной, *если она либо строго возрастает, либо строго убывает.*

Теорема 3.2.6 (О пределе монотонной функции).

▷ Пусть

f возрастает на $< a,\, b >$.

▷ Тогда

Существуют пределы:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in < a,\, b >}} f(x) = H;$$
$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in < a,\, b >}} f(x) = L;$$

Причём:

$$H = \sup_{x \in < a,\, b >} f(x) = \sup \{y \,\big|\, \exists x \in < a,\, b > : y = f(x)\};\ L = \inf_{x \in < a,\, b >} f(x) = \inf \{y \,\big|\, \exists x \in <$$

▷ **Доказательство**.

∘ Для $x \to p$.

I Пусть $H = -\infty$, тогда $\forall x \in < a,\, b >\colon f(x) \leqslant -\infty \Rightarrow f(x) = -\infty \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to b} -\infty$.

II Пусть $h > -\infty$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta \,\big|\, \forall x \in (b - \delta,\, b)\colon f(x) \in (H - \varepsilon,\, H).$$
$$\forall z \in (b - \delta,\, b)\colon f(z) \geqslant H - \varepsilon_{(\text{из возрастания})}.$$

- Аналогично для $x \to a$.

$\square$

Теорема 3.2.7 (О пределе суперпозиции).

▷ Пусть

- f, g — две функции такие, что $f: U \to V,\ g: V \to \mathbb{R}$, где $U,\ V \in \overline{\mathbb{R}}$.
- p— предельная точка U. $q = \lim\limits_{x\to p} f(x)$— предельная точка V.

▷ Тогда

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = \lim_{y\to q} g(y),$$

если $\exists \lim\limits_{x\to p} f(x),\ \exists \lim\limits_{y\to q} g(y)$.

▷ **Доказательство**.

- Пусть x_n — пробная последовательность в U, $x_n \to p$, тогда рассмотрим $y_n = f(x_n)$:

$$\underline{\lim} n y_n = \underline{\lim} n f(x_n) = q \Rightarrow y_n \to q \text{ в } V \Rightarrow \underline{\lim} n g(y_n) \text{ — существует.}$$

$\square$

3.3 Односторонние пределы

ОПР 3.3.1 (Непонятно чего).
Пусть $J =< a,\, b >,\ a < p < b$. Тогда

$$J^+ = J \cap (p,\, +\infty);$$
$$J^- = J \cap (-\infty,\, p).$$

ОПР 3.3.2 (Одностороннего предела).

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in J^-}} f(x) = \lim_{x\to p-} = f(p-0) \text{ — предел слева;}$$
$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in J^+}} f(x) = \lim_{x\to p+} = f(p+0) \text{ — предел справа.}$$

Теорема 3.3.3 (О равенстве односторонних пределов).

▷ Пусть

$M \subset \overline{\mathbb{R}}$, p — предельная точка M.

▷ Предположим, что

Существуют односторонние пределы в точке p, причём $\lim\limits_{p+} f(x) = \lim\limits_{p+} f(x) = L$.

▷ Тогда

$\exists \lim\limits_{x\to p} f(x) = L$.

▷ **Доказательство**.

- Пусть L правый и левый пределы f в точке $p \in M$, тогда

$$\forall\varepsilon\colon \exists\delta_1 \Big| \forall x \in J^- \Big| \, |x-p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$
$$\forall\varepsilon\colon \exists\delta_2 \Big| \forall x \in J^+ \Big| \, |x-p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1,\, \delta_2\}$, тогда $\forall x\colon |x-p| < \delta \Rightarrow$

✓ если $x > p$, то $|x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$;

✓ если $x < p$, то $|x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Значит:

$$\forall x\colon |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \Rightarrow_{\text{(согласно определению 2.7.11 на стр. 37)}} \exists \lim_{x\to p} f(x) =$$

$\square$

3.4 O-символика

ОПР 3.4.1 (Бесконечно малой функции).
Будем говорить, что $f(x)$ является бесконечно малой *относительно $g(x)$ в точке p, если*

$$\forall\varepsilon > 0\colon \exists U \in \vartheta(p) \Big| \, |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)| \ \forall x \in U.$$

В этом случае пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to p$.

ОПР 3.4.2 (O).
Будем говорить, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to p$, если

$$\exists U \in \vartheta(p) \text{ и } C \in \mathbb{R} \Big| \, |f(x)| \leqslant C|g(x)| \ \forall x \in U.$$

ОПР 3.4.3 (Эквивалентных функций).
Будем говорить, что $f(x) \sim g(x)$ (эквивалентна) *при* $x \to p$, *если*

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to p.$$

Лемма 3.4.4 (Лемма 1).

▷ Пусть

$g(x)$ такое, что существует окрестность $U(p)$ точки p такая, что $\forall x \in U(p) \setminus \{p\}\colon g(x) \neq 0$.

▷ Тогда

1. $f(x) = o(g(x))$ при $x \to p \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
2. $f(x) = O(g(x))$ при $x \to p \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = O(1) = L \neq 0$;
3. $f(x) \sim (g(x))$ при $x \to p \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

▷ **Доказательство**.

- Следует из определений 3.4.2 на стр. 70, 3.4.1 на стр. 70 и 3.1.13 на стр. 63.

□

Лемма 3.4.5 (Лемма 2).

▷ $f(x) = o(g(x))$, при $x \to p$, если существует функция $\alpha(x)\Big|\lim\limits_{x\to p} \alpha(x) = 0$.

$f(x) = \alpha(x)g(x)$, при $x \in U(p)$, где $U(p)$ — окрестность точки p.

▷ **Доказательство**.

- Следует из алгебраических свойств предела (3.1.15 на стр. 65).

□

Лемма 3.4.6 (Свойства эквивалентных функций).

1. $f \sim f$;
2. если $g \sim f$, то $f \sim g$;
3. если $f \sim g$, $g \sim h$, то $f \sim h$;
4. если $f_i \sim g_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$, то $f_1 f_2 \ldots f_n \sim g_1 g_2 \ldots g_n$;
5. если $f \sim g$ и $\lim\limits_{x\to p} f(x) = a$, то $\lim\limits_{x\to p} g(x) = a$.

3.5 Непрерывность функций

Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$, $p \in M, f(p)$.

ОПР 3.5.1 (Непрерывности функции в точке).
Будем говорить, что f непрерывна *в точке* p, *если*

$$\forall \varepsilon\colon \exists \text{ окрестность } U(p) \text{ точки } p \Big| \forall x \in U(p)\colon |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

3.5.1.1 Расшифрование

▷ f непрерывна в точке p, если

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0 \Big| \forall x\colon |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Следствие 3.5.2 (Эквивалентные определения).

f непрерывна в точке $p \in M$, если для любой последовательности $x_n \to p$ при $n \to \infty\colon x_n \in M$, $x_n \neq p$:

1. $y_n = f(x_n)$ сходится при $n \to \infty$;
2. $\underline{\lim} n y_n = f(p)$.

Следствие 3.5.3 (Характеризация непрерывной функции через односторонние пределы).

▷ Пусть

У функции f существуют односторонние пределы в точке p, причём

- $f(p-0)$, $f(p+0) \in \mathbb{R}$;
- $f(p-0) = f(p+0)$.

▷ Тогда

$f(p-0) = f(p+0) = f(p)$.

▷ **Доказательство**.

- Очевидно (используем теорему о существовании предела 3.3.3 на стр. 69).

□

Теорема 3.5.4 (Алгебраические свойства непрерывных функций).

▷ Пусть

$f\colon M \to \mathbb{R}$, $g\colon M \to \mathbb{R}$, $p \in M$.

▷ Предположим, что

f, g — непрерывны в точке p.

▷ Тогда

Следующие функции непрерывны в точке p:

1. $f + g$
2. $|f|$
3. $f \cdot g$
4. если существует окрестность $U(p)$ точки p такая, что $\forall x \in U(p)\colon g(x) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ — непрерывна в точке p.

▷ **Доказательство**.

Вытекает из:

1. Определение непрерывной функции через пределы (следствие 3.5.2 на стр. 72);
2. Теорема Гейне (3.1.14 на стр. 63)
3. Алгебраические свойства предела (теорема 3.1.15 на стр. 65)

□

Теорема 3.5.5 (О непрерывности суперпозиции функций).

▷ Пусть

$f\colon V \to W$, $g\colon W \to \mathbb{R}$.

▷ Предположим, что

$p \in V$, $f(p) \in W$.

▷ Пусть

f — непрерывна в точке p, а g непрерывна в точке $f(p)$.

▷ Тогда

$h = g(f(x))$ — непрерывна в точке p.

▷ **Доказательство**.

◦ Следует из теоремы о пределе суперпозиции (3.2.7 на стр. 69).

□

Лемма 3.5.6 (Непрерывность постоянной и тождественно функций).

▷ Функции $f(x) = b$ — *постоянная* и $g(x) = x$ — *тождественная* функции непрерывны в любой точке $\mathbb{R}$.

▷ **Доказательство**.

◦ Пусть $p \in \mathbb{R}$. Рассмотрим последовательность $x_n \big| \underline{\lim} n x_n = p$. Тогда

1. $y_n = f(x_n) = b$, $\underline{\lim} n y_n = b = f(p)$;
2. $y_n = g(x_n) = x_n$, $\underline{\lim} n y_n = \underline{\lim} n y_n = p = g(p)$.

□

Следствие 3.5.7 (Многочлен степени не большей n).

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ — называется *многочленом* степени не большей n.

$P_n(x)$ — непрерывен на всей числовой оси.

Следствие 3.5.8 (Дробно-рациональная функция).

$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n^2(x)}$ — называется *дробно-рациональной функцией*.

$Q_n(x)$ — непрерывна в точках $p \in \mathbb{R} \big| p_n^2(p) \neq 0$.

ОПР 3.5.9 (Непрерывности на множестве).

Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$, f — *называется* непрерывной на множестве M, *если она непрерывна в каждой его точке.*

3.6 Глобальные свойства непрерывных функций

Теорема 3.6.1 (Больцано-Вейрштрасса (условие)).

▷ Пусть

$f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

▷ Предположим, что

$f(a) < 0$, $f(b) \geqslant 0$.

▷ Тогда

$$\exists c \in [a, b] \big| f(c) = 0.$$

ОПР 3.6.2 (Точки разрыва)**.**

Пусть $f\colon \ < a, b > \to \mathbb{R}$. *Если* $p \in < a, b >$ *такая, что* f *не является непрерывной в точке* p, *то* p — *называется точкой* разрыва.

ОПР 3.6.3 (Классификация точек разрыва)**.**

Если в точке p: $f(p-0)$ *и* $f(p+0) \in \mathbb{R}; f(p-0) \neq f(p+0)$, *то точка* p *называется* точкой разрыва I-го рода.

В любом другом случае — точкой разрыва II-го рода.

ОПР 3.6.4 (Скачка функции)**.**

$f(x+0) - f(x-0)$ — *называется* скачком функции *в точке* x.

Пример 3.6.4.1 (Точек разрыва)**.**

▷ Пример 1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ — точка разрыва I-го рода.

▷ Пример 2.

$f(x) = \frac{1}{|x|}$;

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = +\infty$.

▷ Пример 3.

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x = 0$;

$\sin y = 0$, $y = \pi k \Rightarrow \frac{1}{x} = \pi k \Rightarrow x = \frac{1}{\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$;

$a_k = \frac{1}{\pi k} \Rightarrow \underline{\lim} n \sin a_k = \lim 0 = 0$;

$\sin y = 1$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$;

$b_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k} \Rightarrow \underline{\lim} n \sin b_k = \lim 1 = 1$.

ОПР 3.6.5 (Устранимой точки разрыва II-го рода)**.**

Пусть

- x — *точка разрыва для* f;
- *существуют односторонние пределы в точкех*: $f(x-0)$ *и* $f(x+0)$;
- *скачок функции* f *в точке* x *равен* 0;

Тогда точка x *называется* устранимой точкой разрыва I-го рода.

Пример 3.6.5.1 (Устранимой точки разрыва)**.**

▷ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$;
$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (x+1) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} (x+1) = 2 \Rightarrow x = 1$ — устранимая точка разрыва I-го рода.

Теорема 3.6.6 (О точках разрыва для монотонных функций)**.**

▷ Пусть

$f\colon \ < a, b > \to \overline{\mathbb{R}}$, f — монотонна.

▷ Тогда

$\forall p \in < a, b >$, $a < p < b$ — является точкой разрыва I-го рода.

▷ Причём

- если $f(x)$ монотонно возрастает, то $f(p-0) \leqslant f(p) \leqslant f(p+0)$;
- если $f(x)$ монотонно убывает, то $f(p-0) \geqslant f(p) \geqslant f(p+0)$.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $p \in < a, b >$, тогда рассмотрим два интервала $J^- = < a, p)$, $J^+ = (p, b >)$. f монотонно на интервале J^-. По теореме о пределе монотонной функции 3.2.6 на стр. 68 получаем:

$$\exists \lim_{\substack{x \to p \\ x \in J^-}} f(x) = f(p-0).$$

- Совершенно аналогично:

$$\exists \lim_{\substack{x \to p \\ x \in J^+}} f(x) = f(p+0).$$

- Пусть f возрастает. Тогда

$$f(x) \leqslant f(p) - \forall x \in J^- \Rightarrow \lim_{\substack{x \to p \\ x \in J^-}} f(x) = f(p-0) \leqslant f(p);$$
$$f(x) \geqslant f(p) - \forall x \in J^+ \Rightarrow \lim_{\substack{x \to p \\ x \in J^+}} f(x) = f(p+0) \geqslant f(p);$$
$$\Rightarrow f(p-0) \leqslant f(p) \leqslant f(p+0).$$

- Аналогично для случая, когда f монотонно убывает.

$\square$

Теорема 3.6.7 (Больцано-Вейрштрасса (доказательство))**.**

▷ Пусть

$f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

▷ Предположим, что

$f(a) < 0,\ f(b) \geqslant 0.$

▷ Тогда

$$\exists \varphi \in (a,\, b] \mid f(\varphi) = 0 \text{ и } \forall x \in (a,\, \varphi)\colon f(x) > 0.$$

▷ **Доказательство**.

Шаг 1.

$[a_0,\, b_0] = [a,\, b]$.

Пусть $[a_n,\, b_n]$ — построен. Тогда рассмотрим $c_n = \frac{a_n - b_n}{2}$: Если $f(c_n) > 0$, тогда $a_{n+1} = c_n,\ b_{n+1} = b_n$, иначе $a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_n$.

Свойства построения:

- ✓ $\forall n\colon [a_{n+1},\, b_{n+1}] \subset [a_n,\, b_n]$;
- ✓ $|b_n - a_n| = \frac{|b-a|}{2^n}$;
- ✓ $a_n,\, b_n$ — образуют систему вложенных отрезков.

Таким образом:

- ✓ $\exists \varphi \mid \forall n\colon \varphi \in [a_n,\, b_n],\ a_n \leqslant \varphi \leqslant b_n$;
- ✓ $\underline{\lim} n |b_n - a_n| = \underline{\lim} n \frac{|b-a|}{2^n} = 0; \Rightarrow \underline{\lim} n a_n = \underline{\lim} n b_n = \varphi$;
- ✓ $f(a_n) > 0 \Rightarrow \underline{\lim} n f(a_n) \geqslant 0$;
- ✓ $f(b_n) \leqslant 0 \Rightarrow \underline{\lim} n f(b_n) \leqslant 0$.

В силу непрерывности: $\underline{\lim} n f(a_n) = \underline{\lim} n f(b_n) \Rightarrow \underline{\lim} n f(a_n) = 0 = f(\varphi)$.

Шаг 2.

$f(a) > 0;\ S = \{x \in [a,\, b] | f(x) > 0\},\ S \neq \varnothing$. Докажем, что $\inf S \neq a$.

Пусть $\inf S = a$. Тогда $\forall$ окрестности $B_{\frac{1}{n}}(a)$ точки a: $\exists x_n \in S \mid x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a);\ x_n \to a$ при $n \to \infty$.
$f(x_n) = 0 \Rightarrow \underline{\lim} n f(x_n) = 0 = f(a) > 0$ — противоречие.

□

Следствие 3.6.7.1.

▷ Пусть

- ○ $f(x)$ непрерывна на $< a,\, b >$;
- ○ $p \in < a,\, b >$ и $f(p) > 0$.

▷ Тогда

$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall x \in [p - \varepsilon,\, p + \varepsilon]\colon f(x) > 0.$

Следствие 3.6.7.2 (Теорема о промежуточных значениях).

▷ Пусть

- ○ f — непрерывна на $[a,\, b]$;
- ○ $p = f(a),\ q = f(b)$.

▷ Тогда

$\forall h \in [p,\, q]($ если $p < q)$ или $h \in [q,\, p($ иначе$)\colon \exists x \mid f(x) = h.$

▷ **Доказательство**.

- ○ Применим теорему Больцано-Вейрштрасса 3.6.7 к функции $g(x) = f(x) - h$.

□

Теорема 3.6.8 (О связности)**.**

▷ Пусть

$f\colon < a,\, b > \to \overline{\mathbb{R}},\ f$ непрерывна на $< a,\, b >$.

▷ Тогда

Если I отрезок на $< a,\, b >$, то $f(I)$ — либо точка, либо отрезок.

▷ **Доказательство**.

- ○ Пусть $p = \inf\limits_{x \in < a,\, b >} f(x),\ q = \sup\limits_{x \in < a,\, b >} f(x)$. Очевидно, что $p \leqslant q$.
  - ✓ Если $p = q$, тогда функция f постоянная, и значит, её образ точка;
  - ✓ Пусть $p < q$.
    $f(I) \subset [p,\, q];\ f(I) \supset (p,\, q)$
    Докажем, что $\forall y \in (p,\, q)\colon \exists x \mid f(x) = y$.
    Пусть $y =\in (p,\, q)$, тогда в силу определения точных граней, получаем $\exists x_1 \mid f(x_1) > y$; и $\exists x_2 \mid f(x_2) < y$.
    - ⋆ Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим интервал $[x_1,\, x_2]$:

      $f(x_1) - y > 0,\ f(x_2) - y < 0 \Rightarrow_{(\text{в силу теоремы 3.6.7})} \exists x_3 \in [x_1,\, x_2] \mid f(x_3) - y =$

    - ⋆ Если $x_1 > x_2$, аналогично рассматриваем интервал $x_2,\, x_1$.

□

Теорема 3.6.9 (Непрерывность монотонной функции)**.**

▷ Пусть

$J =< a,\, b >,\ f$ — монотонна.

▷ Тогда

Если $f(J) \subset \mathbb{R}$ — интервал, то f непрерывна.

▷ **Доказательство**.

- (От противного)

  Пусть $f(x)$ монотонна и существует точка x_0, в которой f не является непрерывной. Предположим, что f — монотонно возрастает, $f(x_0)$ значение функции в точке x_0.

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \Rightarrow f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \Rightarrow$$

$$\left(\substack{\text{по теореме (3.6.6 на стр. 76),}\\ \text{все точки разрыва I-го рода}}\right) f(x_0-0) < f(x_0) \Rightarrow \exists p \,\big|\, f(x_0-0) < p < f(x_0).$$

  Очевидно, что не существует точки x_1 такой, что $f(x_1) = p$. Значит, множество $f(J)$ не отрезок. Противоречие.

□

Теорема 3.6.10 (Об обратной функции)**.**

▷ Пусть

$J =< a,\, b >,\ f$ — строго монотонная, непрерывная функция на J.

▷ Тогда

Существует обратная функция $f^{-1}\colon f(J) \to J$, которая строго монотонна и непрерывна.

▷

- Если f возрастает, то f^{-1} возрастает;
- Если f убывает, то f^{-1} убывает.

▷ **Доказательство**.

- Функция f не постоянна.

- ✓ Пусть f возрастает.

  Т.к. f непрерывна и не постоянна, то $f(J)$ — отрезок. Если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$, и следовательно, $\forall y \in f(J)\colon \exists! x \,\big|\, y = f(x)$. Значит, обратная функция f^{-1} для f существует.

  ✓ Докажем, что f^{-1} строго монотонно возрастает. Пусть $y_1 < y_1,\ y_1,\, y_2 \in f(J)$, тогда $\exists x_1,\, x_2 \,\big|\, y_1 = f^{-1}(x_1),\ y_2 = f^{-1}(x_2)$.

  Предположим, что $x_1 > x_2$, тогда

$$\begin{array}{ccc} f(x_1) & > & f(x_2) \\ \| & & \| \\ y_1 & > & y_2 \end{array} \text{— противоречие.}$$

  Значит, $x_1 < x_2$ и f^{-1} монотонно возрастает.

  ✓ $f(J)$— отрезок, $f^{-1}\colon f(J) \to J$ переводит отрезок в отрезок, значит, f^{-1} непрерывна.

□

Теорема 3.6.11 (Вейерштрасса о максимуме и минимуме)**.**

▷ Пусть

- $J = [a,\, b] \subset \mathbb{R}$;
- $f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывна на $[a,\, b]$.

▷ Тогда

1. f — ограниченна, т.е. $\exists M \,\big|\, \forall x \in [a,\, b]\colon |f| < M$;
2. $\exists \alpha,\, \beta \in [a,\, b] \,\big\|\, f(\alpha) = \min\limits_{x\in[a,\,b]} f(x),\ f(\beta) = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$.

▷ **Доказательство**.

- Если f постоянная, то теорема очевидно.
- Пусть f не постоянна, тогда $S = f([a,\, b])$ — отрезок. $p = \inf\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$, $q = \sup\limits_{x\in[a,\,b]} f(x),\ S \subset [p,\, q]$.

  Существует последовательность $a_n \subset S, a_n \to p$ при $n \to \infty$. $\exists x_n \in [a,\, b] \,\big\|\, f(x_n) = a_n$. $x_n \in [a,\, b]$ — $\forall n \in \mathbb{N}$, значит, x_n — ограничена, следовательно можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}.

  Пусть $x_0 = \underline{\lim} k x_{n_k},\ x_0 \in [a,\, b],\ f(x_{n_k}) = a_{n_k}$.

  a_{n_k}— подпоследовательность сходящейся последовательности a_n. $\underline{\lim} k a_{n_k} = p \Rightarrow \underline{\lim} k f(x_{n_k}) = \underline{\lim}_{a_{n_k}} = p = f(x_0)$.

□

3.7 Равномерная непрерывность

ОПР 3.7.1 (Равномерной непрерывности)**.**
Пусть $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *называется* равномерно непрерывной*, если* $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0 \,\big|\, \forall x,\, y \in A\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

ОПР 3.7.2 (Модуля непрерывности)**.**
Пусть $w(t)$ *определена на отрезке* $[0,\, h)$. *Будем говорить, что функция* $w(t)$ *является* модулем непрерывности *функциии* f *на множестве* A*, если*

а). $w(t) \geqslant 0$ *и* $w(t)$ *— возрастает;*

б). $\lim\limits_{t \to 0} w(t) = 0$;

в). $\forall x,\, y \in A\colon |x - y| < h \Rightarrow |f(x) - f(y)| < w(|x - y|)$.

Пример 3.7.2.1 (Липшицевы и Гельдеровы функций)**.**

▷ Пусть $w(t) = c \cdot t$.

Множество таких функций f на множестве A, что $|f(x) - f(y)| \leqslant c \cdot |x - y|$ — $\forall x,\, y$, называется *Липшицевыми функциями* с показателем c.

▷ Пусть $w(t) = c \cdot t^{\alpha}$.

Множество функций f с модулем непрерывности $w(t)$ называется *Гельдеровыми функциями* с показателем α.

Следствие 3.7.2.2 (Непрерывность равномерно непрерывной функции).

▷ Если функция f — равномерно непрерывна на A, то f — непрерывна.

3.7.3 Конструкция

▷ Пусть

$A \subset \mathbb{R}$.

▷ Рассмотрим

$$A^2 = A \times A \overset{def}{=} \{(x,\, y) \,\big|\, x,\, y \in A\}.$$

▷ Введем

1. $D_t(A) = \{(x,\, y) \in A^2 \,\big|\, |x - y| < t\}$;
2. $\Omega_f(t) = \sup\limits_{(x,\,y) \in D_t(A)} |f(x) - f(y)|$.

▷ Свойства

а). $\Omega_f(t) \geqslant 0$;

б). $\Omega_f(0) = 0$;

в). Если $t_1 < t_2$, то $\Omega_f(t_1) \leqslant \Omega_f(t_2)$;

г). $|f(x) - f(y)| \leqslant \Omega_f(|x - y|)$.

Теорема 3.7.4 (Условие равномерной непрерывности)**.**

▷ f — равномерно непрерывна на A $\Leftrightarrow$существует модуль непрерывности $w(f)$ для функции f на множестве A.

▷ **Доказательство**.

$\Leftarrow$ Пусть существует модуль непрерывности $w(t)$, тогда т.к. $\lim_{t \to 0} w(t) = 0$, то:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0 \,\big|\, t < \delta \Rightarrow w(t) < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant w(|x - y|) < \varepsilon - \forall x,\, a \in A \,\big|\, |x - y$$

$\Rightarrow$ Пусть f равномерно непрерывна, тогда согласно конструкции 3.7.3 построим функцию $\Omega_f(t)$.

Согласно равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0 \,\big|\, \forall x,\, y |x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\sup_{x,\, y \,\big|\, |x - y| < \delta} |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Тогда $\Omega_f(t)$ — модуль непрерывности.

□

Пример 3.7.4.1 (Не равномерно непрерывной функции)**.**

▷ Пусть

$A = [0,\, \infty)$.

▷ Тогда

Функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на A.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $x = x$, $y = x + t$, $x \geqslant 0$, тогда $|f(x + t) - f(x)| = |(x^2 + 2tx + t^2) - (x^2)| = t^2 + 2xt$.

□

Теорема 3.7.5 (Кантора о равномерной непрерывности).

▷ Пусть

f— непрерывна на$[a,\, b] \subset \mathbb{R}$.

▷ Тогда

f— равномерно непрерывна на $[a,\, b]$.

▷ **Доказательство**.

Пусть $A = [a, b]$ для функции f.
Построим функцию $\Omega_f(t) = Sup|f(x) - f(y)|$ для $x, y\big|\, |x - y| < t$
Докажем, что $\Omega_f(t)$ — ограничена на множестве $[0, b - a]$. Согласно теореме Вейерштрасса (О max и min) $\quad |f(x)| \leqslant \max \underline{\lim} ts_{x \in [a,b]} |f(x)| = L$;
$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant 2L$;
$Sup|f(x) - f(y)| \leqslant 2L$, для $x, y \in [a, b] \Rightarrow \Omega_f(t) \leqslant 2L \quad \forall t \in [0, b - a)$,
т.к. $\Omega_f(t)$ — ограничена и $\Omega_f(t)$ — монотонна, то по теореме о пределе монотонной функции $\Rightarrow \exists \lim \underline{\lim} ts_{t \to 0} \Omega_f(t) = \alpha$.
Докажем, что $\alpha = 0$.
Пусть $t = \frac{1}{n}, n \in N$. Рассмотрим $\Omega_f(\frac{1}{n}) = Sup|f(x) - f(y)|$, для $x, y\big|\, |x - y| < \frac{1}{n}$. Согласно определению Sup $\forall n \exists x_n, y_n \in A\big|\, |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \Omega_f(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$, т.к. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim \underline{\lim} ts_{n \to \infty} |x_n - y_n| = 0$
$x_n \in [a, b] \Rightarrow x_n$ — ограниченная последовательность$\Rightarrow$ по т. Вейерштрасса у неё существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}
$\lim \underline{\lim} ts_{n \to \infty} x_{n_k} = x_0$
x_0 — предельная точка $[a, b]$
$[a, b]$ — замкнут $\Rightarrow x_0 \in [a, b]$ Выберем y_{n_k}:
такую, что $\lim \underline{\lim} ts_{n \to \infty} |x_n - y_n| = 0 \Rightarrow y_{n_k}$ — сходиться.
$\lim \underline{\lim} ts_{k \to \infty} y_{n_k} = x_0$. Т.к. f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ — непрерывна в x_0
$\begin{cases} \lim \underline{\lim} ts_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0); \\ \quad \lim \underline{\lim} ts_{k \to \infty} y_{n_k} = f(x_0). \end{cases}$ Это непрерывно в $x_0 \Rightarrow \lim \underline{\lim} ts_{k \to \infty} |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| = 0$
$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \Omega_t(\frac{1}{n_k}) - \frac{1}{n_k}$
$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| + \frac{1}{n_k} \geqslant \Omega_f(\frac{1}{n_k}) \geqslant 0$
Перейдём к пределу при $k \to \infty$, тогда $\lim \underline{\lim} ts_{n \to \infty} \Omega_f(\frac{1}{n_k}) = 0$ по лемме о 3 милиционерах $\lim \underline{\lim} ts_{t \to 0} \Omega_f(t) = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$.

□

3.8 Элементарные функции

3.8.1 Показательная и логарифмическая функции

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad a \neq 0, a \in \mathbb{R}$
Придумать функцию, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. $f_a(1) = a$;
2. $f_a(x + y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$;
3. f_a — непрерывна.

Свойства $f_a(x)$:

1. $f_a(0) = 1 \quad \forall a, a \neq 0$;
   Док-во.
   $f_a(1 + 0) = f_a(1) \cdot f_a(0) = f_a(1) \Rightarrow f_a(0) = 1$.
2. $f_a(x) = \frac{1}{f_a(x)}$;
   Док-во.
   $L = f_a(x - x) = f_a(x) \cdot f_a(-x) \Rightarrow f_a(-x) = \frac{1}{f_a(x)}$.
3. $f_a(x) \geqslant 0$;
   Док-во.
   $f_a(x) = f_a(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f_a(\frac{x}{2}) \cdot f_a(\frac{x}{2}) = (f_a(\frac{x}{2}))^2 \geqslant 0$
   В силу свойств действительных чисел.
4. $f_a(\frac{m}{n}) = (a^m)^{\frac{1}{n}} \quad m, n \in \mathbb{Z}$;
   Док-во.
   $f_a{}^n(\frac{m}{n}) = \underbrace{f_a(\frac{m}{n}) \cdot f_a(\frac{m}{n}) \cdot \ldots f_a(\frac{m}{n})}_{\text{n раз}} = f_a(\underbrace{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n}}_{\text{n раз}}) = f_a(m) =$
   $f_a \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{m раз}} = f_a(1)^m = a^m \Rightarrow f_a(\frac{m}{n}) = (a^m)^{\frac{1}{n}}$.
5. Если $f_a(x)$ непрерывна в $x = 0$, то она непрерывна на $\mathbb{R}$;
   Док-во.
   Если t непрерывна в $x = 0$, то $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f_a(x) = f_a(x) = 1$ (Согласно свойству 1)
   Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f_a(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_a(x - x_0) \cdot f_a(x_0) = f_a(x_0) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f_a(x - x_0) = f_a(x_0) \cdot \lim\limits_{y \to 0} f_a(y) = f_a(x)$.
   Если $y = x - x_0$, то $f_a(x)$ — непрерывна.

Теорема 3.8.2.

▷ Пусть

f, g — две непрерывные функции на $\mathbb{R}$
Предположим, что $f(q) = g(q) \quad \forall q \in Q$

▷ Тогда

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)$

▷ **Доказательство**.

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Выберем пробную последовательность $q_n \to x$, при $n \to \infty$, тогда в силу непрерывности
$\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = f(x)$
$\lim\limits_{n\to\infty} g(q_n) = g(x)$
$q_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(q_n) = g(q_n) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

□

Следствие 3.8.3.

Любые две непрерывные функции $f_a(x)$ и $g_a(x)$, удовлетворяющие свойствам (1 и 2) совпадают.

▷ **Доказательство**.

Пусть $x = \frac{m}{n} \quad q \in \mathbb{Q}$
Согласно свойству (4):
$f_a(\frac{m}{n}) = (a^m)^{\frac{1}{n}}$
$g_a(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}}$, тем самым $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f_a(q) = g_a(q)$

□

$f_a(x)$ — называется показательной функцией с показателем a.
Построение функции.
Пусть $x \in \mathbb{R}$.
Определим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$:

1. $f(0) = 1$;
2. $f(x)$ — определена $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. $f(x)$ — непрерывна при $x = 0$;
4. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

Неравенство Бернулли: $(1 + n)^m \geqslant 1 + mn \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n > -1$
При $n = 0$ или $m = 1$ достигается равенство.

Теорема 3.8.4 (Теорема1)**.**

▷ $f(x)$ — определена $\forall x \in \mathbb{R}$.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $x \in \mathbb{R}$, тогда $\exists k \in \mathbb{N} \mid x > -k$ (из аксиомы Архимеда)
  $z_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ некоторая последовательность.
  Докажем, что $n > k$.
  z_n — монотонно возрастает.
  $z_n > 0$. Если докажем, что $\frac{z_{n+1}}{z_n} > 1$, то $z_{n+1} > z_n \quad n > k$
  $1 + \frac{x}{n} = \frac{n+x}{n} \geqslant \frac{n-k}{n} > 0$
  $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = (1 + \frac{x}{n}) \cdot (\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}})^{n+1} = (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} - 1)^{n+1} = (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{1+\frac{x}{n+1}-1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}})^{n+1} = (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{x(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n})}{\frac{n+x}{n}})^{n+1} = (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{n \cdot x \cdot (-1)}{(n+x) \cdot n(n+1)})^{n+1} = (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{-x}{(n+x)(n+1)})^{n+1} \geqslant (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{(n+1)(-x)}{(n+x)(n+1)}) = (1 + \frac{x}{n})(1 - \frac{x}{n+x}) = \frac{n+x}{n} \cdot \frac{n}{n+x} = 1 \Rightarrow z_n$ — монотонно возрастает при $n > k$.
- Таким образом, $z_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ при $x > k$ монотонно возрастает.

$$-\infty < (1 + \frac{x}{k})^k < \lim_{n\to 0} (1 + \frac{x}{n})^n.$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, предположим, что $x < l$. Следовательно, $-x > -l$.
$(1 - \frac{x}{n})^n$ при $-x > -l$ монотонно возрастает.
Пусть $m = \max(l, x)$, тогда если $n > m$, то:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{l}\right)^l} < \infty.$$

Т.е. z_n — монотонно возрастает и ограниченна. Значит существует предел $\forall x \in \mathbb{R}$.

Отсюда следует, что $\forall x$ функция $f(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ — определена. $f(x) = \exp(x) = e^x$ — называется *экспонента*.

□

Следствие 3.8.4.1.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = e^1 = exp(1).$$

Следствие 3.8.4.2.

Если $-k < x < l$, то:

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{(1-\frac{x}{l})}$$

Следствие 3.8.4.3.

Если $x > 0$, то:

$$e^x \geqslant 1+x.$$

Если $x < 1$, то:

$$e^x < \frac{1}{1-x}.$$

Теорема 3.8.5 (Непрерывность e^x в нуле)**.**

▹ e^x непрерывна в точке $x = 0$.

▹ **Доказательство**.

$e^0 = 1$ (из определения).

Пусть $z_n \to 0$ при $n \to \infty$ приближает последовательность. Т.к. $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, то $\exists M \mid \forall n > M \quad |z_n| < 1$.

Пусть $n > M$, тогда:

$$(1+\frac{z_n}{n})\cdot(1-\frac{z_n}{n}) = 1-\frac{z_n^2}{n^2} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\frac{z_n}{n})^n \leqslant \frac{1}{(1-\frac{z_n}{n})^n} \leqslant \frac{1}{1-z_n} \quad \text{следует из свойств.}$$

Т.е. $(1+z_n) \leqslant e^{z_n} \leqslant \frac{1}{1-z_n}$.

Если $z_n \to 0$, то $1+z_n \to 1$ и $\frac{1}{1-z_n} \to 1$. Следовательно по теореме о трех милиционерах, $\lim_{n\to\infty} e^{z_n} = 1$.

□

Следствие 3.8.5.1.

Пусть $z_n \to a$ при $n \to \infty$, тогда $(1+\frac{z_n}{n})^n \to e^n$.

Теорема 3.8.6.

▹ $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.

▹ **Доказательство**.

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{y}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})\right)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(1$$

Т.е. $z_n = x+y+\frac{xy}{n}$. $z_n \to x+y$ при $n \to \infty$. Следовательно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(x+y).$$

□

Теорема 3.8.7 (Монотонность exp)**.**

▹ $\exp(x)$ — строго монотонно возрастает на $\mathbb{R}$.

▹ **Доказательство**.

Пусть $x_1 < x_2;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим:

$$\exp(x_2) = \exp(x_2-x_1+x_1) = \exp(x_1)\cdot\exp(x_2-x_1) \underbrace{\geqslant}_{\text{по след. 3}} \exp(x_1)\cdot(1+x_2-x_1) >$$

Т.е. строгая монотонность доказана.

□

Теорема 3.8.8 (Поведение exp на ∞)**.**

▹ $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = \infty$.
$\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$.

▹ **Доказательство**.

- При $x > 0$ по следствию 3: $\exp(x) \geqslant 1+x \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(1+x) = \infty$.

∘ Рассмотрим функцию e^{-x}. Тогда $0 < e^{-x} < \frac{1}{1-x}$. Тогда $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x} = 0$.

□

Теорема 3.8.9 (Замечательный предел)**.**

▷ $\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x}) = 1$.

▷ **Доказательство**.

Можно считать, что $x \in (-1; 1)$. Согласно следствию 2 имеет место $1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$ Следовательно:

$$x < e^x - 1 < \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

∘ Пусть $x > 0$, тогда:

$$1 < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-x}.$$

Т.к. $\lim_x \to 0\frac{1}{1-x} = 1$, то по теореме о 3-х милиционерах:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

∘ Пусть $x < 0$, тогда:

$$1 > \frac{e^x-1}{x} > \frac{1}{1-x}.$$

Т.к. $\lim_x \to 0\frac{1}{1-x} = 1$, то по теореме о 3-х милиционерах:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

□

Таким образом построена функция e^x такая, что e^x — определена на $(-\infty, +\infty)$; e^x принимает значения на $(0, \infty)$; e^x — строго монотонна; $e^{(x+y)} = e^x \cdot e^y$.

Согласно теореме об обратной функции существует обратная функция, которую мы обозначим $\ln x$. Свойства $\ln x$:

1. $\ln x$ — непрерывна на области определения (следует из теоремы об обратной функции);

2. $\ln x$ — строго монотонно возрастающая (следует из теоремы об обратной функции);

3. $e^{\ln x}\ \forall x \in (0, \infty)$, $\ln e^x = x\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$ (следует из теоремы об обратной функции);

4. $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.

   Пусть $x_1 > 0, x_2 > 0$; $y_1 = \ln x_1, y_2 = \ln x_2$. $e^{y_1+y_2} = e^{y_1} \cdot e^{y_2} = e^{\ln x_1} \cdot \cdot e^{\ln x_2} = x_1 \cdot x_2$. Следовательно:

$$\ln e^{y_1+y_2} = \ln(x_1 + x_2)$$

$$\ln e^{y_1+y_2} = y_1 + y_2 = \ln x_1 + \ln x_2.$$

   $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$ доказательство аналогично.

5. $\forall x > 0 \qquad 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$.

   При $x > 0$ $e^x > 1 + x$. Пусть $x = \ln y$, тогда:

$$1 + \ln y < e^{\ln y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 > \ln y. \qquad (1)$$

   Согласно свойству 4 $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. В неравенстве (1) сделаем замену $y = \frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} - 1 > \ln \frac{1}{z} = -\ln z \Rightarrow \ln z > 1 - \frac{1}{z}\ \forall z > 0.$$

6. Замечательный предел:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

   Пусть $x = 1 + y$. Т.к. согласно свойству 5 $x - 1 \geqslant \ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$, то при замене получаем:

$$y \geqslant \ln(1+y) \geqslant 1 - \frac{1}{y+1} = \frac{y}{y+1}. \qquad (2)$$

   Пусть $y > 0$, тогда:

$$1 \geqslant \frac{\ln(1+y)}{y} \geqslant \frac{1}{y+1}.$$

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1 \quad \text{по теореме о трех милиионерах.}$$

   Пусть $y < 0$, тогда:

$$1 \leqslant \frac{\ln(1+y)}{y} \leqslant \frac{1}{y+1}.$$

$$\lim_{y\to 0-} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1 \quad \text{по теореме о трех милиионерах.}$$

7.
$$\lim_{y\to\infty}\ln y = +\infty$$
$$\lim_{y\to 0}\ln y = -\infty$$

Следует из теоремы об обратной функции.

ОПР 3.8.10 (Показательной функции)**.**
Пусть $a > 0, a \neq 1$. *Определим функцию* $a^x = \exp(x\ln a)$*:*

1. $a^0 = 1$*;*
2. $a^1 = a$*;*
3. $a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x\ln a)\cdot\exp(y\ln a) = a^x\cdot a^y$*;*
4. a^x *— непрерывная функция, т.к. является суперпозицией 2-х непрерывных функций;*
5. $\exp(\frac{m}{n}\ln a) = a^{\frac{m}{n}}$.

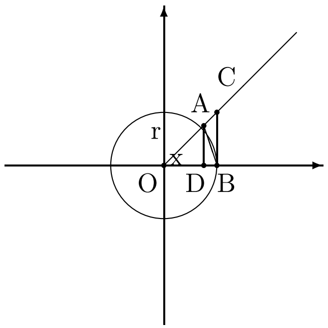
3.8.11 Тригонометрические функции

$l = 2\pi$.
$\cos\alpha$ — проекция со знаком.
$\sin\alpha$ — проекция со знаком.
$\alpha\in(0,\pi)$ по периодичности.
Тем самым $\sin x,\ \cos x$ определены $\forall x\in\mathbb{R}$.
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Лемма 3.8.12.

▷ $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ имеет место: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

▷ **Доказательство**.



$\triangle_1$ — площадь треугольника OAB;
$\triangle_2$ — площадь треугольника OCB;
$\triangle_3$ — площадь треугольника OAD;
$\triangle_3 < \triangle_1 < \triangle_2$
$\triangle_1 = r^2\sin x\cdot\frac{1}{2}$;
$\triangle 2 = r^2\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{2}$;
$\triangle 3 = r^2 x\cdot\frac{1}{2}$;
$\frac{1}{2}r^2\sin x < \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}r^2\operatorname{tg} x$.
Следствие: $\forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\quad|\sin x|\leqslant|x|$.

□

Теорема 4.8.13 (Теорема2)**.**

▷ Функции $\sin x,\cos x$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$; $\operatorname{tg} x,\operatorname{ctg} x$ непрерывны на области определения

▷ **Доказательство**.

$x_0, x_1\subset\mathbb{R}\quad|\sin x_1-\sin x_0| = 2|\sin\frac{x_0-x_1}{2}|\cdot|\cos\frac{x_0+x_1}{2}|\leqslant 2\cdot|\sin\frac{x_1-x_0}{2}|$. Пусть $|x_0-x_1|<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, тогда в силу неравенства $|\sin x|<|x|\forall x\,|\,|x|<\frac{\pi}{2}$
$|\sin\frac{x_1-x_0}{2}|<|\frac{x_1-x_0}{2}|$
$|\sin x_1-\sin x_0|\leqslant 2\cdot|\sin\frac{x_1-x_0}{2}|<2\cdot\frac{x_1-x_0}{2} = |x_1-x_0|<\varepsilon\Rightarrow\sin x$ — равномерно непрерывна.
Для cos аналогично.

□

Если F равномерно непрерывна$\Rightarrow F$ равномерна $\Rightarrow\operatorname{tg} x,\operatorname{ctg} x$ непрерывны на области определения.

Теорема 4.8.14 (Замечательный предел)**.**

▷ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

▷ **Доказательство**.

Пусть $x>0$, тогда согласно неравенству $\sin x < x < \operatorname{tg} x$;
$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.
$\lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1$;
$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0+}\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$. По теореме о зажатой функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$;

$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$, отсюда следует существование предела справа. Пусть $x < 0 \Rightarrow -x > 0$;
$\sin -x < -x < \operatorname{tg} x$;
$1 > x > \frac{1}{\cos x}$, по тем же рассуждениям $\Rightarrow$ существует предел слева$\Rightarrow$ существует предел.
$\sin x$ — непрерывна, строго монотонно возрастает на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. По теореме об обратной функции, существует обратная функция $\arcsin x$ — эта функция строго монотонно возрастает.
$\cos x$ — непрерывна, строго монотонно убывает на $(0; \pi)$ соответственно существует обратная функция $\arccos x$, которая строго монотонно убывает. Для $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ — аналогично.

□

4.8.15 Гиперболические функции

1. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^- x}{2}$;
2. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^- x}{2}$;
3. $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;
4. $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$;
5. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

Пример 4.8.16 (К формулам)**.**

▷ $y = \operatorname{sh} x$;
$e^x - e^- x = 2y$;
$z = e^x, z > 0$;
$z + \frac{1}{z} = 2y$;
$z^2 - 2zy - 1 = 0$;
$D = 4y^2 + 4$;
$z_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$;
$z = y + \sqrt{y^2+1}$;
$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$;
$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \Rightarrow \mathrm{arcshy} = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

5.1 Основные определения и теоремы

ОПР 5.1.1 (Множества, плотного в себе).
Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ *называется* плотным в себе *если* $\forall x \in A$, x *- предельная точка* A.

Пример 5.1.2 (Плотного множества).

$A =< a, b >$ при $a < b$.

ОПР 5.1.3 (Производной функции).
Пусть A *плотно в себе,* $f : A \to \mathbb{R}, a \in A$. *Рассмотрим выражение* $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *при* $x \neq a$. *Если* $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k$, *то* k *называется* производной функции f в точке a *и обозначается* $k = f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = D_x f(a)$.

ОПР 5.1.4 (Правая и левая производные).
Пусть A *плотно в себе,* $f : A \to \mathbb{R}, a \in A$. *Рассмотрим выражение* $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *при* $x \neq a$. *Если* $\exists \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k$, *то* k *называется* правой производной функции f в точке a *(обозначается* $f'_r(a)$*).*
$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_l(a)$ — левая производная.

ОПР 5.1.5 (Дифференцируемой функции).
Пусть A *плотно в себе,* $f : A \to \mathbb{R}, a \in A$. *Функция* f *называется* дифференцируемой в точке a *если* $\exists L \in \mathbb{R}$ *и функция* $\alpha(x) \mid \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 \mid f(x) = f(a) + L(x-a) + \alpha(x) \cdot |x-a|$.

Эквивалентно: $f(x) = f(a) + L(x-a) + o(|x-a|)$ *при* $x \to a$.

Теорема 5.1.6.

▷ Если функция f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в точке a (обратное неверно, например: $f(x) = |x|, a = 0$). Т.к. f дифференцируема в точке a, то $\exists L$ и $\alpha(x) \mid f(x) = f(a) + L(x-a) + \alpha(x)|x-a|$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = lim_{x\to a}(f(x) + L(x-a) + \alpha(x) \cdot |x-a|) =$$

$$= f(a) + L\lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a}(\alpha(x) \cdot |x-a|) = f(a) + 0 + 0 = f(a)$$

Следовательно, $f(x)$ дифференцируема.

Теорема 5.1.7 (Необходимость и достаточность дифференцируемости функции).

▷ Для того, чтобы функция f была дифференцируема в точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная в точке a. При этом L(из усл. дифф.) $= f'(a)$.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

Необходимость:
Пусть f дифференцируема в точке a, тогда

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \alpha(x) \cdot |x-a|.$$

Пусть $x \neq a$:

$$f(x) - f(a) - L(x-a) = \alpha(x) \cdot |x-a|$$

$$\frac{f(x) = f(a)}{x-a} - L = \alpha(x) \cdot \frac{|x-a|}{x-a}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{|x-a|}{x-a} & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$\sigma(x)$ ограничена, т.е. $|\sigma(x)| \leqslant 1$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - L = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = L \Rightarrow \text{существует производная}$$

$$f'(a) = L$$

Достаточность:

Рассмотрим $\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{|x-a|} \cdot (\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} (\frac{x-a}{|x-a|} \cdot (\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)))$$

$$\lim_{x\to a} (\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)) = 0 \qquad \text{т.к. производная существует}$$

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 \qquad \text{а это означает дифференцируемость.}$$

$\square$

Теорема 5.1.8 (Алгебраические свойства производной)**.**

▷ Пусть

A — плотно в себе, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, f, g — дифференцируемы в точке a. Введём:

$$P(x) = f(x) + g(x)$$

$$Q(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad (g(x) \neq 0)$$

▷ Тогда

1. $P'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $Q'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
3. $R'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$

▷ **Доказательство**.

Дифференцируемость означает, что производная в точке a конечна.

1.

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)-P(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a))}{x-a} \right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a))}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

2.

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)-Q(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{(f(x)-f(a))\cdot g(a) + (g(x)-g(a))\cdot f(a)}{x-a} \right) =$$

$$= \lim_{x\to a} (\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{конечна}} \cdot \underbrace{g(a)}_{\text{сущ-ет}} + \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot f(a)}_{\text{аналогично}}) = f'(a)\cdot g(a) + g'(a)\cdot f(a)$$

3.

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{(x-a)\cdot g(a)\cdot g(x)} =$$

$$= \frac{1}{g^2(a)} \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(x)}{x-a} \right) = \frac{1}{g^2(a)} \lim_{x\to a} \left(\frac{(f(x)-f(a))\cdot g(a)}{x-a} - \right.$$

$$= \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

$\square$

Теорема 5.1.9 (Дифференцирование суперпозиций)**.**

▷ A, B — плотные в себе, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $b \in B$, причём $b = f(a)$. Рассмотрим $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Если f — дифференцируема в точке a, g — дифференцируема в точке b, то h — дифференцируема в точке a, при этом

$$h'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

▷ **Доказательство**.

Пусть $y = f(x)$, т.к. g — дифференцируема в точке $b = f(a)$, то имеет место:

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + \beta(y)\cdot|y-b|$$

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x)-b) + \beta(f(x))\cdot|f(x)-b|$$

$$h(x) - h(a) = g'(f(a))\cdot(f(x)-f(a)) + \beta(f(x))\cdot|f(x)-f(a)|$$

Пусть $x \neq a$:

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = g(f(a)) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \beta(f(x)) \cdot \frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = g'(f(a)) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \beta(f(x)) \cdot \frac{|f(x)-f(a)|}{x-a} =$$

$$= g'(f(a)) \cdot f'(a) + 0.$$

□

Следствие 5.1.10 (Дифференцирование обратной функции).

▷ Пусть

$f\colon A \to \mathbb{R}$, A — плотно в себе, $b = f(a)$ и существует обратная функция $f^{-1} = g$.

▷ Тогда

f^{-1} — дифференцируема в точке b, причём $(f^{-1})'(b) = g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, где $b = f(a)$.

$$(f^{-1})' f(a) = \frac{1}{f'(a)} \qquad (f'(a) \neq 0).$$

▷ **Доказательство**.

Пусть $f^{-1} = g$ — обратная функция. Тогда

$$(g \circ f)(x) = x$$

Продифференцируем её:

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство дифференцируемости аналогично доказательству в теореме о дифференцируемости суперпозиции.

□

5.2 Качественные свойства дифференцируемых функций

ОПР 5.2.1 (Локальных минимума и максимума)**.**

Пусть A — плотно в себе, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Будем говорить, что точка x_0 является точкой локального максимума функции f *если* $\exists U(x_0) \mid \ \forall x \in U(x_0) \quad f(x) \leqslant f(x_0)$.

Если $f(x) \geqslant f(x_0)$, то x_0 — точка локального минимума.

ОПР 5.2.2 (Локального экстремума)**.**

Если x_0 — точка локального минимума или локального максимума функции f, то x_0 называется точкой локального экстремума функции f.

Теорема 5.2.3 (Теорема Ферма)**.**

▷ Пусть

$f\colon\ < a, b > \to \mathbb{R}$, x_0 — внутренняя точка интервала $< a, b >$.

▷ Тогда

если x_0 — точка локального экстремума и f — дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.

▷ **Доказательство**.

- Пусть x_0 — точка локального максимума. Тогда $\exists U(x_0) \mid \forall x \in U(x_0) \quad f(x) \leqslant$ $\leqslant f(x_0)$. Раз $U(x_0)$ — окрестность, то $\exists$ элементарная окрестность вида $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U(x_0)$.

  Т.к. x_0 — точка максимума, то $f(x) - f(x_0) < 0$.

  Пусть $x > x_0$, тогда $x - x_0 > 0 \Rightarrow$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Т.к. функция дифференцируема, то имеет место:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} = f'(x_0) \leqslant 0 \qquad \text{по предельному переходу}$$

Пусть $x < x_0$, тогда $x - x_0 < 0 \Rightarrow$

$$\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} > 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} = f'(x_0) \geqslant 0$$

$\Bigg| \Longrightarrow f'(x_0) = 0.$

- Для локального минимума аналогично.

□

Теорема 5.2.4 (Теорема Ролля).

▷ Пусть

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на $[a,b]$, f — дифференцируема на (a,b), $f(a)=f(b)$.

▷ Тогда

$\exists c \in (a,b) \mid f'(c)=0$.

▷ **Доказательство**.

Поскольку f непрерывна на [a,b], то по теореме Вейерштрасса $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ такие, что:

$$M = f(c_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$m = f(c_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

- Если $M=m$, тогда $f(x)=const \Rightarrow f'(x)=0$

  Тогда выбираем точку $c \neq a$ и $c \neq b$.
- Пусть $M \neq m$. Т.к. $f(a)=f(b)$, то очевидно, что одна из точек c_1,c_2 не совпадает ни с a, ни с b.

  Пусть c — та из точек c_1, c_2, которая не совпадает с a и b. Следовательно, c — экстремальная точка функции f. Тогда по теореме Ферма f'(c)=0.

□

Теорема 5.2.5 (Коши или теорема о среднем значении).

▷ Пусть

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$; f, g — непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b). Предположим, что $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

▷ Тогда

$\exists c \in (a,b) \mid \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

▷ **Доказательство**.

Докажем, что $g(b)-g(a) \neq 0$. Действительно: если бы $g(b)-g(a)=0$, то по теореме Ролля $\exists d \in (a,b) \mid g'(d)=0$, что противоречит условию.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) + (g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$$

Утверждение 1: $F(x)$ — непрерывна на $[a,b]$ (очевидно);

Утверждение 2: $F(x)$ — дифференцируема на (a,b) (тоже очевидно);

Утверждение 3: $F(a)=0$ и $F(b)=0$;

По теореме Ролля $\exists c \in (a,b) \mid F'(c)=0$.

$$F'(x) = f'(x)\,(g(b)-g(a)) - g'(x)\,(f(b)-f(a)) \Rightarrow$$

$$F'(c) = f'(c)\,(g(b)-g(a)) - g'(c)\,(f(b)-f(a)) = 0 \Rightarrow$$

(т.к. $g'(c) \neq 0$, $(g(b)-g(a)) \neq 0$)

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

Следствие 5.2.6 (Теорема Лагранжа о среднем значении).

▷ Пусть

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на $[a,b]$, f — дифференцируема на (a,b).

▷ Тогда

$\exists c \in (a,b) \mid f(a)-f(b) = f'(c)\cdot(b-a)$

▷ **Доказательство**.

В теореме о среднем значении положим $g(x)=x$. $g(x)$ — удовлетворяет всем условиям теоремы. $g'(x)=1$ подставляем в теорему:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Отсюда следует утверждение следствия.

□

Теорема 5.2.7 (Дифференциальный критерий монотонности функции).

▷ Пусть

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ f$ — дифференцируема на (a,b).

▷ Тогда

1. f(x) — монотонно возрастает на $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$
2. f(x) — монотонно убывает на $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$

▷ **Доказательство**.

- Докажем для возрастания.
  $\longrightarrow$ Пусть f — возрастает, $x_0 \in (a,b)$, $x_0 < x$, тогда $f(x) \geqslant f(x_0) \Rightarrow$

$$\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geqslant 0$$

  Т.к. x_0 — произвольная точка, то $f'(x_0) \geqslant 0 \quad \forall x_0 \in (a,b)$.
  $\longleftarrow$ Пусть $f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$, $x_1 < x_2 \mid [x_1, x_2] \in (a,b)$.
  Тогда по теореме Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \qquad \text{где } c \in (x_1, x_2)$$

  Отсюда:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geqslant 0 \qquad \text{(по условию)}$$

  $x_1 - x_2 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1)$.
- Для убывания аналогично.

□

5.2.8 Правила Лопиталя

ОПР 5.2.8.1 (Неопределенность вида $\frac{0}{0}$).
Пусть $(a,b) \subset \mathbb{R}, a < b$; f, g *— непрерывные функции на* $[a,b]$; f, g *— дифференцируемые функции на* (a,b).
Предположим, что:

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$$

Нас интересует $\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$. *В этом случае говорят, что возникла* неопределенность вида $\frac{0}{0}$ в точке a.
Для точки b *аналогично (с заменой правых пределов на левые).*

Теорема 5.2.8.2 (Правило Лопиталя 1, $\frac{0}{0}$).

▷ Пусть

$\frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность вида $\frac{0}{0}$ в точке a.

▷ Тогда

если

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

то

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \qquad \text{, где } A \in \mathbb{R}$$

▷ **Доказательство**.

- Пусть A - конечно, $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\exists U(a)$ вида $(a, x_0] \mid \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, x_0)$. Это следует из определения предела.
  Заметим, что:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \qquad \text{т.к. } f(a) = g(a) = 0$$

  Следовательно, по теореме Коши о среднем:

$$\exists c \in (a, x_0) \mid \frac{f(x_0) - f(a)}{g(x_0) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, x_0)$$

  А это означает, что $\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.
- Пусть $A = +\infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$.
  Дальше аналогично.
- Пусть $A = -\infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} < -\frac{1}{\varepsilon}$.
  Дальше аналогично.

□

ОПР 5.2.8.3 (Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$).
Пусть f, g *— непрерывные функции на* $[a,b]$; f, g *— дифференцируемые функции на* (a,b).

Предположим, что:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty$$

Нас интересует $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$. *В этом случае говорят, что возникла* неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ в точке a (или при $x \to a$).

Теорема 5.2.8.4 (Правило Лопиталя 2, $\frac{\infty}{\infty}$)**.**

- Пусть

  $\frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ в точке a.

- Тогда

  если
  $$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$
  то
  $$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \qquad \text{, где } A \in \mathbb{R}$$

- **Доказательство**.

  Заметим, что если $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то $\lim_{x\to a+0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

  Теперь остаётся правильно применить правило Лопиталя 1 для функций $\frac{1}{f(x)}, \frac{1}{g(x)}$.

□

6.3 Производные высших порядков

ОПР 6.3.1.

Пусть A — плотное в себе множество, $f\colon A \to \mathbb{R}$ $\forall x \in A$, f — дифференцируема в точке x_0.

$f'(x)$ — отображение $A \to \mathbb{R}$. Предположим, что $f'(x)$ дифференцируема в A.

По индукции определяются высшие производные:

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{y\to x} \frac{f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)}{y - x}$$

Пример 6.3.2 (Обозначений производных высших порядков)**.**

$f'(x), f''(x), f^{v}(x)$

$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = D^n f(x).$

6.3.3 Дифференцируемых, непрерывных множеств функций

- $D^n(A,\mathbb{R}) = \{$множество всех n-раз дифференцируемых функций на $A\}$
- $C^n(A,\mathbb{R}) = \{$множество функций на A таких, что что они обладают непрерывными производными всех порядков до n включительно$\}$
- $C^0(A,\mathbb{R}) = \{$множество всех непрерывных функций на $A\}$

  Очевидное следствие: $C^n(A,\mathbb{R}) < D^n(A,\mathbb{R})$

6.3.4 Список n-тых производных:

1. $x^a \qquad (x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n} \qquad , a \in \mathbb{R}$
2. $a^x \qquad (a^x)^{(n)} = \ln^n a \cdot a^x$

   $(e^x)^{(n)} = e^x$
3. $\ln x \qquad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$
4. $\sin bx \qquad (\sin bx)^{(n)} = b^n \sin(bx + \frac{\pi n}{2})$
5. $\cos bx \qquad (\cos bx)^{(n)} = b^n \cos(bx + \frac{\pi n}{2})$

   Всё доказывается по индукции.

6.3.5 Свойства высших производных:

$f, g \in D^n(A, \mathbb{R})$, тогда

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ следует из определения производной;
2. $\forall a \in \mathbb{R} (af)^{(n)} = a(f^{(n)})$ следует из определения производной

   Для $C^n(A, \mathbb{R})$ оба свойства аналогично $\Rightarrow D^n, C^n$ — векторные пространства.
3. если $f, g \in D^n(A, \mathbb{R})$, то $f \cdot g \in D^n(A, \mathbb{R})$.

Теорема 6.3.6 (Формула Лейбница для производных произведения)**.**

▷ Если $f, g \in D^n(A, \mathbb{R})$, то $f \cdot g \in D^n(A, \mathbb{R})$, причем:

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k}(f) \cdot D^k(g) \qquad ,\text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

▷ **Доказательство**.

Из формулы Лейбница следует утверждение теоремы (т.к. f, g — дифференцируемы, а C_n^k — константа).

Доказательство формулы Лейбница: (по индукции)

- При $k = 1$ это верно (по формуле дифференцирования произведения):

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg = C_1^0 Df \cdot g + C_1^1 f \cdot Dg$$

- Пусть при n — верно:

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k}(f) \cdot D^k(g)$$

Докажем:

$$D^{n+1}(f \cdot g) = D(D^n(f \cdot g)) = D(\sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k}(f) \cdot D^k(g)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D(D^{n-k}(f) \cdot D^k(g)) =$$

$$= \sum_{k=0} nC_n^k \left(D^{n-k+1}(f) \cdot D^k(g) + D^{n-k}(f) \cdot D^{k+1}(g)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k+1}(f) \cdot D^k(g) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k}(f) \cdot D^{k+1}(g) =$$

Положим $k = s - 1$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k+1}(f) D^k(g) + \sum_{s=1}^{n+1} C_n^{s-1} D^{n-s+1}(f) \cdot D^s =$$

Положим $s = k$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k+1}(f) D^k(g) + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^k D^{n-k+1}(f) D^k(g) =$$

$$= C_n^0 D^{n+1}(f) \cdot g + \sum_{k=1}^{n} \left((C_n^k + C_n^{k-1}) \cdot D^{n-k+1}(f) \cdot D^k(g)\right) + C_n^k f \cdot D^{n+1}(g) =$$

(Поскольку $C_n^0 = C_{n+1}^0, C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$, то по свойству биномиальных коэффициентов $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$)

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k D^{n+1-k}(f) \cdot D^k(g)$$

□

6.4 Формула Тейлора

ОПР 6.4.1 (Многочлена).

Отображение $P^n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *вида* $P^n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ *— многочлен* $(a_i \in \mathbb{R})$.

$\deg(P^n) = \max_n \mid a_i \neq 0$ *— степень многочлена;*

$\deg(0) = -infty$*;*

$\deg(const) = 0$*;*

Многочлены можно складывать, умножать; можно брать суперпозицию многочленов.

Лемма 6.4.2 (Формула Тейлора для многочленов).

▷ Пусть

$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $c \in \mathbb{R}$

▷ Тогда

$\exists$ единственный набор $b_1, b_2, \ldots, b_n \mid P(x) = b_0 + b_1(x-c) + \ldots + b_n(x-c)^n$, причем $b_k = \frac{P^(n)(c)}{k!}$

▷ **Доказательство**.

Т.к. $P(x) = b_0 + b_1(x-c) + \ldots + b_n(x-c)^n$, то:

$P(c) = b_0$

$P'(x) = b_1 + 2b_2(x-c) + \ldots + kb_k(x-c)^{k-1} + \ldots + nb_n(x-c)^{n-1}$

$P'(c) = b_1$

По индукции:

$P^{(k)}(x) = k! \cdot b_k + (x-c) \cdot Q(x)$

$P^{(k)}(c) = k! \cdot b_k \Rightarrow b_k = \frac{P^k(c)}{k!}$

□

Теорема 6.4.3 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

▷ Пусть

f — непрерывна на $[a,b], f \in D^{n+1}((a,b), \mathbb{R})$. Предположим $\forall k \leqslant n+1$ $\exists \lim_{x\to a+0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(a)$

▷ Тогда

$\exists c \in (a,b) \mid f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n$, где R_n — остаточный член в форме Лагранжа, который имеет вид:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Замечание:

1. При $n=1$ формула Тейлора совпадает с формулой Лагранжа;

2. Если f — полином, то формула Тейлора совпадает с формулой Тейлора для полиномов.

▷ **Доказательство**.

- **Лемма:** Пусть f, g определены на $[a,b]$; f, g $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемы на (a,b);

  $\forall k = 0, 1, \ldots, n+1 \quad \exists \lim_{x\to a+0} f^{(k)}(x) = lim_{x\to a+0} g(k)(x) = 0.$

  Пусть $g^{(k)}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

  Тогда

  $$\exists c \in (a,b) \mid \frac{f(b)}{g(a)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

  Доказательство леммы:

  По теореме Коши о среднем:

  $$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} \qquad \text{, где } c_1 \in (a,b)$$

  Рассмотрим интервал (a, c_1), тогда:

  $$\frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{f'(c_1)-f'(a)}{g'(c_1)-g'(a)} = \frac{f''(c_2)}{g''(c_2)} \qquad \text{, где } c_2 \in (a, c_1)$$

  Действуем по индукции, тогда найдется точка $c_n \mid \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_{n+1})}$

  c_{n+1} обозначим через $c \in (a,b)$

- **Доказательство теоремы:**

  Выберем функции $F(x) = f(x)\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, G(x) = (x-a)^{n+1}$

  Очевидно в силу свойств $f(x), F(x), G(x)$ удовлетворяют условиям леммы.

  $$\left.\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k\right)^{(m)}\right|_{x=a} = f^{(m)}(a)$$

$F^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - f(m)(a)$ Тогда по лемме получаем:

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{(b-a)^{n+1}} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad, c \in (a,b)$$

$$\Rightarrow f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

$\square$

Обычно пишут:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \text{— разложение функции в ряд Тейлора}$$

Замечание:

1. Если $a = 0$, то разложение называется *разложением Макларена.*

2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

   Пусть $f^{(n+1)}(x)$ ограничена на $[a, b]$, тогда:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^n(x-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_n = o((x-a)^n) \text{ при } x \to a$$

   Действительно:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(n+1)(c)}{(n+1)!}}_{\text{ограничено}} \underbrace{(x-a)}_{\to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \qquad \text{— формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.}$$

7.4.4 Стандартные разложения

1. $e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
5. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}(x^n) + o(x^n)$

ОПР 7.4.5.

Пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, *тогда* $f \in C^\infty((a,b),\mathbb{R})$ *если* $\forall n \in \mathbb{N}$ f *— дифференцируема на* (a,b).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Пример: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

7.5 Достаточный признак существования экстремума

Лемма 7.5.1.

▷ Пусть

$f\colon (a,b) \to \mathbb{R},\ p \in (a,b),\ f(x) = f(p) + A(x-p)^n + o((x-p)^n)$

▷ Тогда

1. если n — чётное, то p — точка экстремума f:
   (a) $A > 0$ — min;
   (b) $A < 0$ — max;
2. если n -нечетное, то p не является экстремальной точкой.

▷ **Доказательство**.

Запишем функцию в следующем виде:

$$f(x) = f(p) + A(1+\beta(x)) \cdot (x-p)^n \qquad \text{, где } \beta(x) \to 0 \text{ при } x \to p$$

$\exists$ окрестность U точки p: $U = (p-\delta, p+\delta) \mid (1+\beta(x)) > 0 \quad \forall x \in U$.

- Пусть n — четно, тогда:
  - ✓ если $A > 0$, то:
  $$f(x) - f(p) = A(1+\beta(x))(x-p)^n \geqslant 0 \quad \forall x \in U \Rightarrow p \text{ — точка min}$$
  - ✓ если $A < 0$, то: $f(x) - f(p) \leqslant 0 \Rightarrow p$ — точка max $\Rightarrow$ при четном n p — экстремум.
- Пусть n — нечетно, $A \neq 0$ тогда:
  - ✓ если $A > 0$, то:
  $$f(x) - f(p) = A(1+\beta(x))(x-p)^n \geqslant 0 \quad \forall x \in U \Rightarrow p \text{ — точка min}$$
  - ✓ если $A < 0$, то: $f(x) - f(p) \leqslant 0 \Rightarrow p$ — точка max $\Rightarrow$ при четном n p — экстремум.

□

Теорема 7.5.2 (Достаточный признак существования экстремума)**.**

▷ Пусть

$f\colon (a,b) \to \mathbb{R},\ f \in D^{(n+1)}(a \cdot b),\ f'(p) = 0,\ f''(p) = 0,\ \ldots,\ f^{(n)}(p) = 0,$
$A = f^{(n+1)}(p) \neq 0$

▷ Тогда

если $n+1$ четно, то p — локальный экстремум, причем если $A > 0$, то p — точка min, если $A < 0$, то p — точка max. Если $n+1$ — нечетно, то p не локальный экстремум.

▷ **Доказательство**.

Т.к. $f \in D^{n+1}(a,b)$, $p \in (a,b)$, то можно применить формулу Тейлора:

$$f(x) = f(p) + \frac{f'(p)}{1!}(x-p) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1} + o((x-p)^{n+1})$$

Поскольку по условию первые n производных равны 0, то:

$$f(x) = f(p) + \frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1} + o((x-p)^{n+1}).$$

Теперь применяем лемму.

□

7.6 Выпуклые функции

ОПР 7.6.1 (Выпуклой и вогнутой функции).

Пусть $f\colon\ <a,b>\to\mathbb{R}$, $<a,b>$ *— выпуклое множество, т.е. если* $x_1,x_2\in<a,b>$, *то* $\forall\lambda,\mu\mid\lambda+\mu=1\quad(\lambda\geqslant 0,\mu\geqslant 0)$ $x=\lambda x_1+\mu x_2\in<a,b>$.

Говорят, что f — выпукло (или выпукло сверху) на $<a,b>$ *если* $\forall x_1,x_2\in<a,b>$ *имеет место* $f(\lambda x_1+\mu x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)\quad(\lambda>0,\mu>0,\lambda+\mu=1)$. *Если равенство возможно только при* $x_1=x_2$, *то говорят, что* f — строго выпукло.

Говорят, что f — вогнуто (или выпукло снизу) на $<a,b>$ *если* $\forall x_1,x_2\in<a,b>$ *имеет место* $f(\lambda x_1+\mu x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)\quad(\lambda>0,\mu>0,\lambda+\mu=1)$. *Если равенство возможно только при* $x_1=x_2$, *то говорят, что* f — строго выпукло.

Замечание: *Если* f *— выпукла, то* $(-f)$ *— очевидна вогнута. Будем изучать только выпуклые функции.*

7.6.2 Геометрический смысл выпуклости

ОПР 7.6.2.1 (Выпуклость в $\mathbb{R}^2$).

Пусть $A\subset\mathbb{R}^2$. *Говорят, что* A — выпукло в $\mathbb{R}^2$ *если* $\forall p,q\in A,\forall\lambda,\mu\mid\lambda>0,\mu>0,\lambda+\mu=1\quad\lambda p+\mu q\in A$

ОПР 7.6.2.2 (Надграфика и подграфика).

Пусть $f\colon <a,b>\to\mathbb{R}$, *тогда:*

$$\Gamma^+=\{(x,y)\mid x\in<a,b>,y\geqslant f(x)\}\qquad\text{— надграфик (выпуклое множество)}$$

$$\Gamma^-=\{(x,y)\mid x\in<a,b>,y\leqslant f(x)\}\qquad\text{— поддграфик (выпуклое множество)}$$

$\Gamma^+\cap\Gamma^-$ *— график* $(x,f(x))$.

Теорема 7.6.2.3 (Геометрическая характеристика выпуклости).

- ▷ $f\colon <a,b>\to\mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда $\Gamma^+(f)$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$

- ▷ **Доказательство**.

  - ∘ $\longrightarrow$

    Пусть f — выпукло, тогда если $\lambda>0,\ \mu>0,\ \lambda+\mu=1,\ x_1,x_2\in<a,b>$, то $f(\lambda x_1+\mu x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$.

    Пусть точка $(x_1,y_1)\in\Gamma^+(f)$, тогда $y_1\geqslant f(x_1)$.

    Пусть точка $(x_2,y_2)\in\Gamma^+(f)$, тогда $y_2\geqslant f(x_2)$.

    $$\lambda y_1+\mu y_2\geqslant\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)\Rightarrow(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)\in\Gamma^+(f)$$

    $$\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)\Rightarrow\Gamma^+(f)\text{ — выпукло.}$$

  - ∘ $\longleftarrow$

    Пусть $\Gamma^+(f)$ — выпукло; $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\Gamma^+(f)$.

    Тогда $\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)\in\Gamma^+(f)$.

    $\lambda>0,\ \mu>0,\ \lambda+\mu=1,\ <a,b>$ — выпукло $\Rightarrow\lambda x_1+\mu x_2\in<a,b>$

    $\lambda y_1+\mu y_2\geqslant f(\lambda x_1+\mu x_2)$

    $\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)\geqslant f(\lambda x_1+\mu x_2)$. Следовательно, f — выпукла сверху.

□

Теорема 8.6.3 (Неравенство Йенсена).

- ▷ Пусть

  J — выпуклое подмножество $\overline{\mathbb{R}}$, $f\colon J\to\mathbb{R}$, f — выпукла сверху. Пусть $x_0,x_1,\ldots,x_n\in J,a_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, причем $\lambda_i>0\quad\forall i=0,1,\ldots,n$ и $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$

- ▷ Тогда

  1. Если $x=\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n$, то $x\in J$;
  2. $f(\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_0f(x_0)+\lambda_1f(x_1)+\ldots+\lambda_nf(x_n)$

  Причем если f — строго выпукла сверху, то равенство $f(\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n)=\lambda_0f(x_0)+\lambda_1f(x_1)+\ldots+\lambda_nf(x_n)$ возможно только в том случае, когда $x_0=x_1=\ldots=x_n$.

- ▷ **Доказательство**.

  - ∘ По индукции. Пусть $n=1$. Если $x_0,x_1\in J,\ \lambda_0,\lambda_1\in\mathbb{R},\ \lambda_0>0,\lambda_1>0,\ \lambda_0+\lambda_1=1$, то $x=\lambda_0x_0+\lambda_1x_1\in J$ в силу выпуклости множества J.

    Рассмотрим:

    $$f(\lambda_0x_0+\lambda_1x_1)\leqslant\lambda_0f(x_0)+\lambda_1f(x_1)\text{ (в силу выпуклости } f\text{ на } J)$$

    $f(\lambda_0x_0+\lambda_1x_1)\leqslant\lambda_0f(x_0)+\lambda_1f(x_1)$ только если $x_0=x_1$ (следует из строгой вып

  - ∘ Пусть при n — верно, рассмотрим при $n+1$.

    $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,x_{n+1}$ (число точек заведомо $\geqslant 3$)

    $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},\lambda_n,\lambda_{n+1}$ (набор точек, удовлетворяющих условию)

    Рассмотрим:

    $$x=\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_{n-1}x_{n-1}+\lambda_nx_n+\lambda_{n+1}x_{n+1}\qquad(1)$$

Пусть $\lambda'_n = \lambda_n + \lambda_{n+1}$.

Если $\lambda'_n = 0$, то очевидно верно (попадаем в случай n).

Пусть $\lambda'_n \neq 0$. Тогда рассмотрим $\alpha = \frac{\lambda_n}{\lambda'_n}$ и $\beta = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n}$.

$x' = \alpha x_n + \beta x_{n+1} \quad \Rightarrow x' \in J$ (это следует из выпуклости).

Заметим, что $x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda'_n \underbrace{(\alpha x_n + \beta x_{n+1})}_{x'}$.

Поскольку $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda'_n = 1$ и $\lambda_i > 0$, то $x \in J$ (следует из истинности при n). То есть 1-ое свойство доказано.

- Применим шаг n к формуле (1):

$$f(x) \leqslant \lambda_0 f(x_0) + \ldots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda'_n f(\alpha x_n + \beta x_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_0 f(x_0) + \ldots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda'_n (\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n+1})) = \quad \text{(следует из свойства выпуклости } f)$$

$$= \lambda_0 f(x_0) + \ldots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda'_n \alpha f(x_n) + \lambda'_n \beta f(x_{n+1}) = \tag{2}$$

$$= \lambda_0 f(x_0) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \Rightarrow \text{ неравентсво доказано.}$$

Докажем строгое неравенство. Пусть f — строго выпукло, тогда по предположению индукции равенство возможно если $x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1} = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$. В силу строгой выпуклости f последнее равенство (2) возможно только если $x_n = x_{n+1} = x_0 = x_1 = \ldots$.

$\square$

Теорема 8.6.4 (Критерий выпуклости функции)**.**

▷ Пусть $J = (a, b)$, $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^1(J)$. Если f — выпукла на j тогда $\forall x, p \in J$ имеет место:

$$f(x) \geqslant f(p) + f'(p)(x - p) \tag{3}$$

Если f — строго выпукла, то равенство (3) возможно только при $x = p$.

Обратно: если $f \in D^1(J)$ и $\forall x, p \in J$ имеет место (3), то f — выпукла на (a, b). Причем если (3) имеет место только при $x = p$, то f — строго выпукла вверх на (a, b).

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- $\longrightarrow$

  $f \in D^1(J)$, f — выпукла; $x, p \in J$. Пусть $x \neq p$ (в противном случае неравенство выполняется тривиально).

  Пусть $0 < \lambda < 1$, тогда $1 - \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

  Заметим, что $\lambda + (1 - \lambda) = 1$, $\lambda x + (1 - \lambda)p \in J$ в силу выпуклости J.

Тогда $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(p) \geqslant f(\lambda x + (1 - \lambda)p)$ следует из выпуклости f.

Перепишем:

$$\lambda f(x) \geqslant \lambda f(p) + (f(p + \lambda(x - p)) - f(p)) = \lambda f(p) + \frac{(f(p + \lambda(x - p)) - f(p))}{(x - p)}(x - p)$$

$$f(x) \geqslant f(p) + \frac{(f(p + \lambda(x - p)) - f(p))}{\lambda(x - p)}(x - p)$$

Т.к. неравенство выполняется $\forall \lambda > 0$, перейдём слева и справа к пределу при $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{(f(p + \lambda(x - p)) - f(p))}{\lambda(x - p)} = f'(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \geqslant f(p) + f'(p)(x - p) \quad \text{при } x \neq p$$

Т.к. при $x = p$ очевидно, то неравенство (3) доказано.

Пусть f — строго выпукло, $x \neq p$, тогда:

$$\frac{f(x) + f(p)}{2} > f\left(\frac{x + p}{2}\right) \quad \text{(в неравенстве Йенсена } \lambda = \tfrac{1}{2})$$

$$f\left(\frac{x + p}{2}\right) = f\left(p + \frac{x - p}{2}\right) \geqslant f(p) + f'(p) \cdot \left(\frac{x - p}{2}\right) \quad \text{(следует из (3))}$$

$$f(x) + f(p) > 2f(p) + f'(p)(x - p) \Rightarrow f(x) > f(p) + f'(p)(x - p).$$

- $\longleftarrow$

  Пусть $f \in D^1(J)$ и $\forall x, p \in J \quad f(x) > f(p) + f'(p)(x - p)$.

  Пусть $x_1, x_2 \in J$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, тогда:

$$f(x_1 \geqslant f(p) + (x_1 - p) f'(p)$$

$$f(x_2 \geqslant f(p) + (x_2 - p) f'(p)$$

Домножим первое и второе неравенства на $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ соответственно и сложим:

$$\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \geqslant \lambda f(p) + \mu f(p) + f'(p)(\lambda x_1 - \lambda p + \mu x_2 - \mu p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \geqslant f(p) + f'(p)(\lambda x_1 + \mu x_2 - p)$$

Поскольку p — произвольно, то пусть $p = \lambda x_1 + \mu x_2$. Следовательно:

$$\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + \mu x_2) \tag{4}$$

А это и означает выпуклость.

Если (3) — строгое неравенство, то и (4) тоже строгое неравенство если $x_1 \neq x_2$.

□

Теорема 8.6.5 (Дифференциальный критерий выпуклости)**.**

▷ Пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^1((a,b))$. Для выпуклости f на (a,b) (строгой выпуклости f на (a,b)) необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ возрастала на (a,b) (строго возрастала на (a,b)).

▷ **Доказательство**.

∘ **Необходимость:**

Пусть $f \in D^1((a,b))$. Тогда $\forall x, p \in (a,b)$ (в силу предыдущих теорем):
$$f(x) \geqslant f(p) + f'(p)(x-p)$$
Пусть $x_1 = x,\ x_2 = p$, тогда:
$$f(x_1) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$
Пусть $x_2 = x,\ x_1 = p$, тогда:
$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$
Очевидно, что эти 2 неравенства должны выполняться одновременно.

Сложим 2 неравенства:
$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant f(x_2) + f(x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f'(x_2) - f'(x_1))(x_1 - x_2) \leqslant 0$$
Если $x_2 > x_1$, то:
$$f'(x_2) - f'(x_1) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_2) \geqslant f'(x_1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ — возрастает}$$
Если f — строго выпукла, то неравенства строгие:
$$f'(x_2) > f'(x_1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ — строго возрастает.}$$

∘ **Достаточность:** Пусть $f'(x)$ возрастает на (a,b).

Надо доказать, что
$$\forall x, p \in (a,b) \quad f(x) \geqslant f(p) + f'(p)(x-p) \qquad (5).$$
Рассмотри $u(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)$ (p — фиксировано), тогда $u'(x) = f'(x) - f'(p)$.

✓ Если $x \geqslant p$, то в силу возрастания $f'(x)$: $f'(x) - f'(p) \geqslant 0$. $u'(x) \geqslant 0$, тогда при $x > p$ $u(x)$ — возрастает (по уже доказанной части теоремы). Следовательно:
$$u(x) \geqslant u(p) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x) - u(p) \geqslant 0 \quad \text{при } x \geqslant p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x) - u(p) = u(x) \geqslant 0 \quad \Rightarrow$$
$\Rightarrow f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) \geqslant 0$ т.е. при $x \geqslant p$ неравенство (5) выполнено.

✓ Пусть $x < p$, тогда повторяем те же рассуждения для $u(x)$ и получаем, что (5) выполнено.

□

Следствие 8.6.6 (Теорема:).

▷ Пусть

$f \in D^2((a,b))$

▷ Тогда

f — выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$ и строго выпукла если $\forall (\alpha,\beta) \in (a,b) \quad \exists x \in (\alpha,\beta) \mid f''(x) > 0$.

▷ **Доказательство**.

Очевидно.

□

9.7 Основные неравенства анализа

Теорема 9.7.1 (Неравенство Коши для среднего арифметического и среднего геометрического).

▷ Пусть

$\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$; $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Пусть $x_i \geqslant 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

▷ Тогда

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \geqslant x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}$. Причем равенство возможно только если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Комментарий: при $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$: $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$.

▷ **Доказательство**.

Если хотя бы одно $x_i = 0$ неравенство очевидно. Будем считать, что $x_i > 0$.

- Рассмотрим $\phi(x) = -\ln x$: функция определена на выпуклом множестве $(0, \infty)$. $\phi'(x) = -\frac{1}{x}$, $\phi''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \forall x \in (0, \infty) \quad \phi''(x) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (-\ln x)$ выпукла сверху на $(0, \infty)$.

Рассмотрим элемент $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n, \quad x \in (0, \infty)$. Из неравенства Йенсена:

$$-\lambda \ln x_1 - x_2 \ln x_2 - \ldots - x_n \ln x_n \geqslant -\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)$$

$$\ln(x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}) \leqslant \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)$$

Т.к. ln - монотонно возрастающая функция, то:

$$x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

Второе утверждение следует из того, что $\phi''(x) > 0 \Rightarrow (-\ln x)$ строго выпукла сверху и равенство в силу неравенства Йенсена возможно только если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

□

Следствие 9.7.1.1 (Теорема (неравенство Юнга)).

▷ Пусть

$p > 0,\ q > 0 \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p, q — сопряженные показатели).

▷ Тогда

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ имеет место:

$$\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \geqslant xy \qquad \text{(неравенство Юнга)}$$

▷ **Доказательство**.

Пусть $x_1 = |x|^p,\ x_2 = |y|^q,\ \lambda_1 = \frac{1}{p},\ \lambda_2 = \frac{1}{q},\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$.

Из неравенства Коши:

$$\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \geqslant |x||y| \geqslant xy.$$

□

Следствие 9.7.1.2 (Лемма (о произведении)).

▷ $\forall u \geqslant 0, v \geqslant 0$; $\forall p > 0, q > 0 \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ имеет место:

$$u \cdot v = \inf_{t \in (0,\infty)} \left(\frac{|u|^p t^p}{p} + \frac{|v|^q}{q t^q} \right) \tag{1}$$

▷ **Доказательство**.

- Если $u = v = 0$, то очевидно.
- Если $u > 0, v = 0$, то слева 0, справа $\inf_{t \in (0,\infty)} (\frac{|u|^p t^p}{p}) = 0$.
- Если $u = 0, v > 0$, то очевидно.
- Будем считать, что $u > 0, v > 0$. Рассмотрим 2 выражения:

$$x = tu > 0, \quad y = v\frac{v}{t} > 0.$$

Подставим в неравенство Юнга:

$$\frac{|u|^p t^p}{p} + \frac{|v|^q}{q t^q} \geqslant tu \cdot \frac{v}{t} = uv.$$

Взяв inf от обеих частей, получим:

$$\inf_{t \in (0,\infty)} \left(\frac{|u|^p t^p}{p} + \frac{|v|^q}{q t^q} \right) \geqslant uv.$$

Можно выбрать такое t, что:

$$\frac{|u|^p t^p}{p} + \frac{|v|^q}{q t^q} = uv \Rightarrow \inf \text{достигается.} \tag{2}$$

Покажем это. Найдём такое $t = u^\alpha \cdot v^\beta$, что первое слагаемое в равенстве (2) будет равняться $\frac{uv}{p}$. Т.е.:

$$u^p t^p = u^p u^{\alpha p} v^{\beta p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^{p(1+\alpha)}v^{\beta p} = uv.$$

Тогда:

$$p(1+\alpha) = 1 \text{ и } \beta p = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{p} - 1 \text{ и } \beta = \frac{1}{p}.$$

Т.к. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то:

$$\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{q} \Rightarrow t = \frac{v^{\frac{1}{p}}}{u^{\frac{1}{q}}}.$$

Второе слагаемое из (2) имеет следующий вид:

$$\frac{v^q u}{qv^{\frac{q}{p}}} = \frac{v^{q-\frac{q}{p}}u}{q} = \frac{vu}{q}$$

$\Big| \Longrightarrow \frac{uv}{p} + \frac{uv}{q} = uv(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) = uv.$

□

Следствие 9.7.1.3 (Теорема (Неравенство Гёльдера)).

▷ Пусть

Пусть даны 2 последовательности длины n: $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; $p > 0, q > 0 \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

▷ Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

▷ **Доказательство**.

Возьмём:

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad Y = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad t > 0$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i t \frac{y_i}{t}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|x_i t \frac{y_i}{t}\right| = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i t| \cdot \left|\frac{y_i}{t}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|^p t^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{qt^q}\right)}_{\text{неравенство Юнга}} =$$

$$= \frac{t^p}{p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{qt^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{t^p}{p} \cdot X^p + \frac{1}{qt^q} Y^q.$$

Заметим, что:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{t^p}{p} X^p + \frac{1}{q - t^q} Y^q \text{ выполняется } \forall t > 0.$$

Возьмем inf слева и справа по $t > 0$, тогда согласно предыдущей лемме о произведении:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant X \cdot Y = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Следствие 9.7.1.4 (Теорема (неравенство Коши-Буняковского)).

▷ Пусть

Пусть даны 2 последовательности длины n: $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

▷ Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} \quad \text{неравенство Коши-Буняковского.}$$

▷ **Доказательство**.

Очевидно. Следует из неравенства Гёлдера, где $p = q = \frac{1}{2}$.

□

Следствие 9.7.1.5 (Теорема (Неравенство Минковского)).

▷ Пусть

Пусть даны 2 последовательности длины n: $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; $p \geqslant 1$.

▷ Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Замечание: если $p = 2$, то это неравенство треугольника.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- Пусть $p = 1$, тогда очевидно выполнено в силу того, что $\forall i \quad |x_i+y_i| \leqslant \leqslant |x_i| + |y_i|$.
- Будем считать, что $p > 1$.
  - ✓ Если $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = 0$, то неравенство очевидно.
  - ✓ Поэтому будем считать, что $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p > 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i + y_i|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i + y_i|^{p-1} \cdot (|x_i| + |y_i|)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i|\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i + y_i|^{p-1} \cdot |y_i|\right).$$

⋆ Рассмотрим $\sum_{i=1}^{n}(|x_i + y_i|^{p-1}|x_i|)$:
Применим неравенство Гёльдера с $q = \frac{p}{p-1}$, тогда $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(|x_i + y_i|^{p-1}|x_i|) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

⋆ Аналогично:

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i + y_i|^{p-1}|y_i|) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Big| \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Таким образом:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

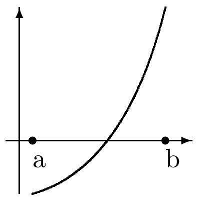
10.8 Снова об уравнении $f(x) = 0$

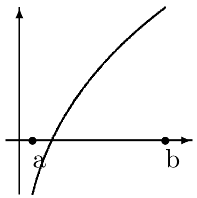
ОПР 10.8.1.
Пусть $\xi \in \mathbb{R}$. *Будем говорить, что* ξ приближает $x \in \mathbb{R}$ с точностью ε *если* $|x - \xi| < \varepsilon$.

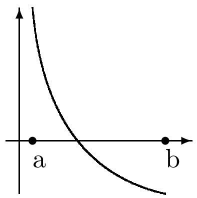
Будем считать, что функция $f(x)$ удовлетворяет следующим требованиям:

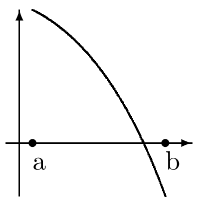
- $f(x)$ определена на замкнутом интервале $[a, b]$, $f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- $f(x) \in C^2([a, b])$;
- $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Случаи:

1. $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$; 

2. $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$; 

3. $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$; 

4. $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$; 

Замечание 1. В силу теоремы Бельцано-Вейерштрасса для таких функций $\exists \xi \in (a, b) \mid f(\xi) = 0$. В силу монотонности ξ — единственна.

Замечание 2. Достаточно рассмотреть только один случай (например, 1). С помощью замены переменных и смены знака $f(x)$ получаем все остальные.

Конструкция (как ищется):

1. Возьмём произвольную точку $x_0 \mid f(x_0) > 0$, например, $x_0 = b$. Проведём через точку $(x_0, f(x_0))$ касательную к функции, получим $(x_1, 0)$ — точку пересечения касательной и оси абсцисс. Аналогично проведём касательную через точку $(x_1, f(x_1))$ и получим точку $(x_2, 0)$. Действуя по индукции, найдём точку $(x_n, 0)$.

   Рассмотрим касательную проходящую через точку $(x_n, f(x_n))$:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n} = x_n - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n}$ — итерации Ньютона (метод Ньютона, метод секущих).

2.

УТВ 10.8.2.

▷ $x_1, x_2, \dots, x_n$ сходится к ξ.

▷ **Доказательство**.

Пусть $\xi \mid f(\xi) = 0$. Докажем лемму.

Лемма 10.8.3.

✓ Пусть
$x_n \mid \xi \leqslant x_n \leqslant b$

✓ Тогда
$\xi \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$

✓ **Доказательство**.

⋆ $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $f(x_n) > 0$, $f'(x_n) > 0 \;\Rightarrow\; x_{n+1} \leqslant x_n$.

⋆ Пусть $\theta \in [\xi, x_n]$, тогда по теореме Лагранжа $\frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n} = f'(\theta)$. Т.к. по условию $f(\xi) = 0$, то $f'(\theta) = \frac{f(x_n)}{x_n - \xi}$.

$f'(x)$ — возрастает $\Rightarrow f'(\theta) \leqslant f'(x_n)$ (т.к. $x_n > \theta$), следовательно:

$$\frac{f(x_n)}{x_n - \xi} \leqslant f'(x_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leqslant x_n - \xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi \leqslant x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$$

.

□

Следствие: Т.к. последовательность x_n монотонно убывает и ограничена снизу числом ξ (которое $> a$), то $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\xi}$.

Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\overline{\xi} = \overline{\xi} - \frac{f(\overline{\xi})}{f'(\overline{\xi})}.$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{f(\overline{\xi})}{f'(\overline{\xi})} = 0 \;\Rightarrow\; f(\overline{\xi}) = 0 \;\Rightarrow\; \xi = \overline{\xi}.$$

□

3. Определим скорость сходимости. Пусть $\theta \in (\xi, x_n)$, тогда:

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(\xi - x_n) + \frac{f''(\theta)}{2!}(\xi - x_n)^2$$

$$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(\theta)}{2!}(\xi - x_n)^2 = 0$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \xi - x_n + \frac{f''(\theta)}{2! f'(x_n)}(\xi - x_n)^2 = 0$$

$$\xi - x_{n+1} + \frac{f''(\theta)}{2! f'(x_n)}(\xi - x_n)^2 = 0$$

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(\theta)}{2! f'(x_n)}(\xi - x_n)^2.$$

Введем $L=\sup_{x\in[a,b]}f''(x),\ \gamma=\inf_{x\in[a,b]}f'(x)$. Пусть:

$$0<\frac{f''(\theta)}{2!f'(x_n)}\leqslant\frac{L}{2\gamma}=M<\infty$$

$$0<x_{n+1}-\xi\leqslant M(x_n-\xi)^2\leqslant M^2(x_{n-1}-\xi)^4.$$

По индукции:

$$\alpha(x_{n+k}-\xi)\leqslant M^k(x_n-\xi)^{2^k}\qquad \text{— оценка ошибки на k-ом шаге.}$$

Примеры:

1. Пусть $a>0$. Найдём $\sqrt{a}$ на интервале $(0,+\infty)$.

$$f(x)=x^2-a$$

$$f'(x)=2x$$

$$f''(x)=2$$

Таким образом $f(x)$ удовлетворяет условиям. В качестве точки b возьмем $b=1+\frac{a}{2}$. Рассмотрим $f(1+\frac{a}{2})=1+a+\frac{a^2}{4}-a\ >0$. Итерационный процесс:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-a}{2x_n}=x_n-\frac{x_n}{2}+\frac{a}{2x_n}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\qquad\text{— метод Герона.}$$

2. Пусть $a>0$. Найдем $a^{-1}=\frac{1}{a}$.

$$f(x)=a-\frac{1}{x}\qquad\text{на } (0,\infty)\text{ — непрерывна}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\ >0$$

$$f''(x)=-\frac{2}{x^3}\ <0$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\frac{x_na-1}{x_n}}{\frac{1}{x_n^2}}=x_n-(x_na-1)=x_n-x_n^2a+x_n=x_n(2-ax_n).$$

Теорема 10.8.4 (Ослабленный признак монотонного возрастания функции)**.**

▷ Пусть

$J=<a,b>\overline{\mathbb{R}}$, $f\colon J\to\mathbb{R}$. Предположим, что f — непрерывна на J и существует не более чем счетное множество $E\subset J\mid\forall x\in J\setminus E$ f обладает левой производной.

▷ Тогда

если $\forall x\in J\setminus E$ имеет место $f'_l(x)\geqslant 0$, то f возрастает на J, $f'_l(x)\leqslant 0$, то f — убывает на J.

Замечание: аналогичное утверждение имеет место для правой производной.

▷ **Доказательство**.

Докажем для случая $f'_l(x)\geqslant 0$, для убывающей аналогично.

- Предположим, что $f'_l(x)>0\quad\forall x\in J\setminus E$. Пусть $x_1,x_2\in J,\ x_1<x_2$. Надо доказать, что $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. Допустим, это не так: $f(x_1)>f(x_2)$.

  Рассмотрим множество $A=f(E)$. Поскольку E — не более чем счетное, то A — не более чем счетное.

  Пусть $p,q\in\mathbb{R}$ $p<q\mid f(x_2)<p<q<f(x_1)$. Очевидно такие точки существуют. Так как $[p,q]$ — интервал, то он не является счетным множеством. Следовательно, $\exists k\in[p,q]\mid k\notin A$.

  Рассмотрим функцию $\psi(x)=f(x)-k$. Очевидно, что:

$$\psi(x_1)=f(x_1)-k\ >0$$

$$\psi(x_2)=f(x_2)-k\ <0$$

  Следовательно, $\exists c\in[x_1,x_2]\mid\psi(c)=0\Rightarrow$ (по теореме Больцано-Вейерштрасса) k.

  Т.к. $k\notin A$, то $c\notin E$. Следовательно, в точке c существует левая производная. причем $f'_l(c)>0$.

  Если $x<c$, то согласно предположению $f(x)-f(c)>0$ Ra $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$.

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_l(c)\ \leqslant 0.$$

  Получили противоречие (т.к. мы предположили, что функция убывающая). Следовательно, если $f'_l(x)>0$ $\forall x\in J\setminus E$, то f — монотонно возрастает. Т.е. для строго положительной производной мы доказали.

- Пусть $t>0$. Рассмотри $\eta(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$, $\tilde{f}(x)=f(x)+t\eta(x)$. Тогда:

$$\eta'(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0.$$

  Рассмотрим $\tilde{f}'_l(x)$, где $x\in J\setminus E$:

$$\tilde{f}'_l(x)=f_l(x)+\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t > 0\ \tilde{f}_l'(x) > 0.$$

Следовательно по предыдущему, если $x_1 < x_2$, то $\tilde{f}(x_1) < \tilde{f}(x_2)$. Следовательно:

$$\forall t > 0\ f(x_1) + t\frac{1}{1+e^{-x_1}} \leqslant f(x_2) + t\frac{1}{1+e^{-x_2}}.$$

Переходим к пределу при $t \to 0$ и получаем, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

$\square$

Глава 12

Интегрирование функций одной переменной

12.1 Первообразная

Задача: пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Требуется найти такую функцию $F(x)$, где $x \in (a,b)$, что $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

ОПР 12.1.1 (Точной первообразной).
Если такая F существует, то она называется точной первообразной *функции f на (a,b).*

Пример 12.1.2.

$$f(x) = sgn(x), \text{ т.е. } f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Докажем, что точной первообразной нет.

Пусть $F(x)$ существует, тогда она должна быть дифференцируема, значит есть соотношение:

$$F(x) - F(0) = F'(\xi)(x-0) \qquad \xi \in (0,x), \text{ по теореме Лагранжа.}$$

При $x > 0$ $F'(\xi) = 1$, тогда:

$$F(x) = F(0) + x.$$

При $x < 0$ $F'(\xi) = -1$, тогда:

$$F(x) = F(0) - x.$$

Следовательно, $F(x) = |x| + F(0)\ \forall x \in \mathbb{R}$, но $|x|$ не является дифференцируемой.

ОПР 12.1.3 (Истинность высказывания в основном).
Пусть A — некоторое множество. Предположим, что $\forall x \in A$ определено некоторое высказывание $P(x)$. Пусть $E = \{x \in A \mid P(x) \text{ — ложно}\}$.
Если E не более чем счетно, то будем говорить, что $P(x)$ — истинно (или верно) в основном.

ОПР 12.1.4 (Непрерывность в основном).
f — непрерывна на множестве A в основном *если множество точек разрыва не более чем счетно.*

ОПР 12.1.5 (Дифференцируемость в основном).
f — дифференцируема на множестве A в основном *если множество точек, где производной не существует, не более чем счетно.*

ОПР 12.1.6.
Будем говорить, что $F(x) = g(x)$ на множестве A в основном *если $E = \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$ — не более чем счетно.*

ОПР 12.1.7 (Первообразной).
Пусть $J = <a,b>$, $f\colon <a,b> \to \mathbb{R}$, f — определена в основном на J.
F называется первообразной функции f на J *если:*

1. *F непрерывна на J;*
2. *F дифференцируема в основном на J;*
3. *$F'(x) = f(x)$ (равняется в основном).*

Пример 12.1.8 ($F(x) = |x|$ на $\mathbb{R}$).

1. F непрерывна на $\mathbb{R}$;
2. $F'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
   В 0 производной нет. Т.о. множество, где производной не существует не более чем счетно;
3. $sgn(x) = F'(x)$ всюду кроме 0;

Следовательно, $|x|$ — первообразная для $sgn(x)$ (но это не точная первообразная).

Пример 12.1.9 ($f(x) = sgn(\sin x) \cdot \cos x$).

$F(x) = |\sin x|$, $\sin x = 0$ при $x = \pi k$ (это множество счетно).

$F'(x) = sgn(\sin x)\cos x$ — равенство выполнено в основном.

Следовательно, $F(x)$ — первообразная.

ОПР 12.1.10 (Интегрируемость f)**.**
Будем говорить, что f — интегрируема на $J =< a, b >$ *если* f *— определена в основном и обладает первообразной* F *на* J.

Лемма 12.1.11.

▷ Пусть

f — интегрируема на $J =< a, b >$. Предположим, что $g \mid g = f$ в основном на J.

▷ Тогда

g — интегрируема и F — первообразная для g.

▷ **Доказательство**.

Пусть множество $E_1 \mid F'(x) = f(x)$ на $J \setminus E_1$. Пусть множество $E_2 \mid f(x) = g(x)$ на $J \setminus E_2$; $E = E_1 \cup E_2$.

Т.к. E_1 и E_2 не более чем счетны, то E — не более чем счетно.

Тогда на множестве $J \setminus E$ имеет место равенство:

$$F'(x) = f(x) = g(x).$$

Следовательно, F — первообразная для g и g — интегрируема.

□

Следствие 12.1.11.1.

▷ Пусть

f — интегрируема на $J =< a, b >$. $I =< c, d >\mid I \subset J$.

▷ Тогда

f — интегрируема на I.

▷ **Доказательство**.

Очевидно

□

Следствие 12.1.11.2 ().

▷ Первообразная функции 0 на $J =< a, b >$ есть функция постоянная на J (если J — не отрезок, то утверждение неверно).

▷ **Доказательство**.

Пусть есть первообразная $F(x) \Rightarrow F'(x) = 0$ в основном. Следовательно, $\exists E$ счетное $\mid F(x)$ дифференцируема на $J \setminus E$, $F'(x) = 0\ \forall x \in J \setminus E$.

Согласно теореме об ослабленной монотонности (10.8.4) функция F — возрастающая, а с другой стороны F — убывающая. Следовательно, $F = const$ в основном, следовательно по определению первообразной F — непрерывна.

$\Big|\Longrightarrow F$ — всюду $const$.

□

Теорема 12.1.12 (Алгебраические свойства интегрируемых функций)**.**

▷ Пусть

$J =< a, b >$; f, g — интегрируемы на J; пусть F — первообразная для f, G — первообразная для g (на J).

▷ Тогда

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функция $h = \lambda f + \mu y$ — интегрируема на J. Причем $H = \lambda F + \mu G$ — первообразная для h.

▷ **Доказательство**.

Раз f — интегрируема, то $\exists E_1$ (не более чем счетно) $\mid \forall x \in J \setminus E_1 \quad F'(x) = f(x)$.

Аналогично, $\exists E_2 \mid \forall x \in J \setminus E_2 \quad G'(x) = g(x)$.

Рассмотрим $E = E_1 \cup E_2$ (не более чем счетно). Следовательно $\forall x \in J \setminus E$ имеет место одновременно:

$$F'(x) = f(x)$$

$$G'(x) = g(x).$$

Домножим первое равенство на λ, а второе на μ и сложим:

$$\lambda F'(x) + \mu G'(x) = xf(x) + \mu g(x) \quad \underbrace{=}_{\text{т.к. можно дифф-ть}} \quad = [\lambda F(x) + \mu G(x)]' = H'(x)$$

□

Замечание: Пусть $f(x)$ — интегрируема на $J =< a, b >$, $F_1(x)$ — первообразная f. Пусть $F_2(x)$ — первообразная функции f. Значит:

$$\exists E_1 \mid F_1(x) = f(x) \text{ на } J \setminus E_1$$

$$\exists E_2 \mid F_2(x) = f(x) \text{ на } J \setminus E_2.$$

Очевидно, если $E = E_1 \cup E_2$, то $\forall x \in J \setminus E$ $F_1'(x) = F_2'(x) \Rightarrow (F_1(x) - F_2(x))' = 0$.

Следовательно, согласно следствию 12.1.11.2 $F_1(x) - F_2(x) = c - const$. Опять же только на интервале.

12.1.13 Множества всех превообразных функции на множестве

▷ Будем обозначать через $[F(x)]$ множество всех первообразных функции f на $J =< a, b >$.

ОПР 12.1.14 (Неопределенного интеграла).
Множество всех первообразных $F(x)$ называется неопределенным интегралом *и обозначается:*

$$\int f(x)dx = [F(x)]$$

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \textit{где } c \textit{ — произвольная } const.$$

ОПР 12.1.15 (Определенного интеграла).
Пусть f — интегрируема на $J =< a, b >$, тогда выражение $F(b) - F(a)$ называется определенным интегралом *и обозначается:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \textit{Формула Ньютона-Лейбница.} \tag{1}$$

Пример 12.1.16 ($\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ при $x \in (0, 1)$).

$F(x) = -\frac{1}{x} + c$. Определенный интеграл неопределен.

Лемма 12.1.17 (Корректность определенного интеграла).

▷ Определенный интеграл (1) определен корректно ((1) не зависит от выбора первообразной).

▷ <u>**Доказательство**</u>.

Пусть F — искомая первообразная; F_1 — другая первообразная.

Значит по определению первообразной $F_1 = F + c$. Следовательно:

$$\int_a^b f(x)dx = F_1(b) - F_1(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a).$$

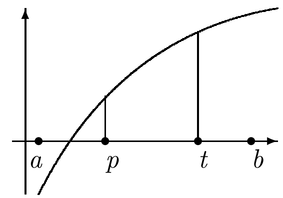
□

Предположим, что $\exists \mu_2 \colon S \to \mathbb{R}$ (где $S \subset R^2$); $\Xi = [a, b] \times [c, d]$.
Предположим:

1. $\mu_2(\Xi) = |b - a| \cdot |d - c|$;
2. если $S_1 \subset S_2,\ S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^2$, то $\mu_2(S_1) \leqslant \mu_2(S_2)$;
3. если $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то $\mu_2(S_1 \cup S_2) = \mu_2(S_1) + \mu_2(S_2)$.

ОПР 12.1.18 (Криволинейной трапеции).
Пусть $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$; f — непрерывна на $[a, b]$.

$$W_f(p, t) = \{x, y \mid x \in [p, t],\ y \in [0, f(x)]\} \quad \textit{— криволинейная трапеция}$$



Лемма 12.1.19 (Ньютона).

▷ Функция $F(x) = \mu_2(W_f(a, x))$ является точной первообразной для положительной и непрерывной на $[a, b]$ функции f, причем $F'(X) = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

Пусть $x \in (a, b),\ \epsilon > 0, \delta > 0$. В силу непрерывности f на $[a, b]$ если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

∘ Пусть $x > x_0$. Рассмотрим:

$$F(x) - F(x_0) = \mu_2(W_f(a, x)) - \mu_2(W_f(a, x_0)) = \mu_2(W_f(a, x_0)) + \mu_2(W_f(x_0, x)) - \mu_2($$

Пусть $x' \in (x_0, x) \mid |f(x') - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Тогда:

$$-\frac{\epsilon}{2} < f(x') - f(x_0) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\epsilon}{2} + f(x_0) < f(x') < f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}$$

Рассмотрим:

$$\mu_2(W_f(x_0, x)) \leqslant |x - x_0|(f(x_0) + \frac{\epsilon}{2})$$

$$\mu_2(W_f(x_0, x)) \leqslant |x - x_0|(f(x_0) - \frac{\epsilon}{2})$$

Следовательно:

$$(x - x_0)(f(x_0) - \frac{\epsilon}{2}) \leqslant F(x) - F(x_0) \leqslant (x - x_0)(f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\epsilon}{2} \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

- Если $x < x_0$, то аналогично.
- Таким образом:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

$\epsilon \to 0$ означает, что $|x - x_0| \to 0 \Rightarrow |F'(x_0) - f(x_0)| \leqslant 0 \Rightarrow$ по аксиоме Архимеда $F'(x_0) = f(x_0)$.

□

Следствие 12.1.19.1.

Очевидно, что если f — произвольная непрерывная функция на $[a, b]$, $f = f^+ - f^-$ (f^+, f^- — положительные непрерывные функции на $[a, b]$).

Для f^+, f^- первообразные существуют, следовательно и для их разности (для f) первообразная тоже существует.

12.2 Свойства интегралов

Теорема 12.2.1 (Об интегрируемости на объединении отрезков)**.**

▷ Пусть

$J =< a, b >,\ c \in (a, b),\ J_1 = J \cap (-\infty, c), J_2 = J \cap (c, +\infty).$

▷ Тогда

если f — интегрируема на J_1 и J_2, то они интегрируемы на J.

▷ **Доказательство**.

Пусть F_1 — первообразная f на J_1, F_2 — первообразная f на J_2. Они существуют по условиям теоремы. Рассмотрим:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) - F_1(c)\ x \in J_1 \\ F_2(x) - F_2(c)\ x \in J_2 \\ 0\ x = c \end{cases}$$

Если $x > c$, то F — непрерывна; если $x < c$ то F — непрерывна, тогда:

$$\lim_{x\to c-0} F(x) = \lim_{x\to c-0}(F_1(x) - F_1(c)) = 0$$

$$\lim_{x\to c+0} F(x) = \lim_{x\to c-0}(F_2(x) - F_2(c)) = 0$$

Следовательно, F — непрерывна в точке c.

Пусть:

$$E_1 \mid F_1'(x) = f(x) \quad \text{если } x \in J_1 \setminus E_1$$

$$E_2 \mid F_2'(x) = f(x) \quad \text{если } x \in J_2 \setminus E_2$$

Рассмотрим $E = E_1 \cup E_2 \cup c$. Очевидно, E не более чем счетно. Следовательно на множестве $J \setminus E$ имеет место: $F'(x) = f(x)$.

□

Следствие 12.2.1.1.

Пусть $f_1(x)$ — интегрируема на (a, c), $f_2(x)$ — интегрируема на (c, b). Тогда

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \quad x \in (a, c) \\ f_2(x) \quad x \in (c, b) \\ \text{"чему угодно"} \quad x = c \end{cases} \quad \text{— интегрируема на } (a, b).$$

Теорема 12.2.2 (О линейности определенного интеграла)**.**

▷ Пусть

f, g — интегрируемы на $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

▷ Тогда

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

▷ **Доказательство**.

f, g — интегрируемы, тогда существуют первообразные F, G. Следовательно по лемме Ньютона (12.1.19) $\lambda F + \mu G$ — первообразная для $\lambda f + \mu g$. Тогда:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda F(b) + \mu G(b) - \lambda F(a) - \mu G(a) =$$

$$= \lambda(F(b) - G(a)) + \mu(G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f\ dx + \mu \int_a^b g\ dx.$$

$\square$