

ББК 22.12  
Л 13  
УДК 510.2 + 510.5 + 510.6

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований согласно проекту 94-01-210001*

Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 1995. — ISBN 5-02-014844-X.

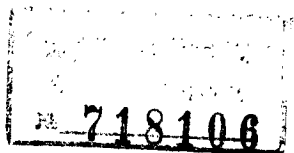
В книге систематически изложены основы теории множеств, математической логики и теории алгоритмов в форме задач. Книга предназначена для активного изучения математической логики и смежных с ней наук.

Состоит из трех частей: «Теория множеств», «Математическая логика» и «Теория алгоритмов». Задачи снабжены указаниями и ответами. Все необходимые определения сформулированы в кратких теоретических введениях к каждому параграфу.

2-е издание — 1984 г.

Сборник может быть использован как учебное пособие для математических факультетов университетов, педагогических институтов, а также в технических вузах при изучении кибернетики и информатики.

Для математиков — алгебраистов, логиков и кибернетиков.



Л 1602020000-004  
053(02)-95 Без объявл.

© И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, 1995

ISBN 5-02-014844-X

## СОДЕРЖАНИЕ \*)

Предисловие к третьему изданию .....	4
Предисловие к первому изданию .....	5
<i>Часть I. Теория множеств</i> .....	7
§ 1. Операции над множествами .....	7 (155)
§ 2. Отношения и функции .....	13 (160)
§ 3. Специальные бинарные отношения .....	22 (165)
§ 4. Кардинальные числа .....	31 (170)
§ 5. Ординальные числа .....	35 (176)
§ 6. Действия над кардинальными числами .....	44 (183)
<i>Часть II. Математическая логика</i> .....	50
§ 1. Алгебра высказываний .....	50 (187)
§ 2. Функции алгебры логики .....	57 (191)
§ 3. Исчисления высказываний .....	63 (195)
§ 4. Язык логики предикатов .....	74 (200)
§ 5. Выполнимость формул логики предикатов .....	81 (201)
§ 6. Исчисления предикатов .....	89 (206)
§ 7. Аксиоматические теории .....	98 (209)
§ 8. Фильтрованные произведения .....	108 (215)
§ 9. Аксиоматизируемые классы .....	116 (219)
<i>Часть III. Теория алгоритмов</i> .....	124
§ 1. Частично рекурсивные функции .....	124 (227)
§ 2. Машины Тьюринга .....	136 (234)
§ 3. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества .....	142 (237)
§ 4. Нумерации Клини и Поста .....	148 (242)
Ответы, решения, указания .....	158
Список литературы .....	248
Предметный указатель .....	250

\*) Цифры в скобках указывают страницы ответов.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В последние годы интерес к математической логике значительно возрос ввиду широкого распространения вычислительной техники и развития информатики, появления логического программирования, исследования проблем искусственного интеллекта. В основе программирования лежат базисные понятия математической логики — формализованные языки, исчисления, семантические модели. Поэтому активное изучение математической логики становится как нельзя более актуальным. К сожалению, ощущается недостаток учебной литературы по этой дисциплине на русском языке.

Новое издание книги несколько отличается от предыдущих. За время, прошедшее после первых двух изданий книги, несколько изменилась терминология. В соответствии с этим она изменена и в книге, введены новые современные термины. Некоторые обозначения заменены более простыми. Хотя количество задач почти не изменилось, многие из них переформулированы. К ряду задач даны более подробные ответы.

Несколько обновлен список литературы, в него включены монографии по математической логике, опубликованные на русском языке после выхода в свет второго издания книги.

Авторы благодарны коллегам за полезные замечания и предложения.

*И.А. Лавров  
Л.Л. Максимова*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время математическая логика и смежные с ней науки привлекают все большее внимание. Это вызвано как интенсивным развитием самих этих наук, так и найденными глубокими приложениями в различных областях математики и техники.

Курс математической логики несколько лет назад стал обязательным для математических факультетов университетов и педагогических институтов СССР. На первых порах большой отряд студентов и преподавателей был практически лишен учебных пособий по этой специальности. В настоящее время этот недостаток в некоторой степени исправлен. Сейчас имеется ряд учебников и книг по математической логике. Здесь и несколько книг советских авторов, но в основном это переводная литература. И все же те, кто ведет практические занятия, испытывают значительные трудности. И дело не в том, что задач нет. Большое количество задач по математической логике разбросано по разным книгам. Только в самое последнее время появилась книга С.Г. Гиндикина «Алгебра логики в задачах», где собран значительный материал по алгебре логики.

В нашей книге сделана попытка систематически изложить основы теории множеств, математической логики и теории алгоритмов в форме задач. От читателя не предполагается никакой предварительной подготовки. Он может использовать эту книгу для изучения математической логики, не обращаясь к другим учебникам и пособиям. Тем не менее мы приводим краткий список имеющейся на русском языке литературы. Каждому параграфу предпослано краткое введение, содержащее определения всех основных понятий, используемых в задачах этого параграфа. Ранее введенные понятия и определения используются часто без ссылок; в этих случаях читатель может использовать указатель терминов и обозначений.

Основные теоремы сформулированы в виде задач. Для того чтобы доказательства были возможно более простыми, технические леммы также выделены в виде отдельных задач.

Большинство задач снабжено ответами и указаниями. Иногда мы даем подробные ответы к простым задачам для иллюстрации метода рассуждения, впервые встретившегося. В дальнейшем уже ограничиваемся лишь краткими указаниями. Трудные задачи отмечены звездочкой.

Большинство задач каждой части может быть решено без обращения к другим частям. Там, где необходимо, мы делаем соответствующие ссылки в самой задаче или в указании к ней.

Естественно, что в книге не затронуты многие направления современной математической логики. Некоторые темы лишь намечены, для них приведены лишь самые первоначальные понятия и результаты. Так, например, аксиоматическая теория множеств (§ 7 части II) занимает мало места, хотя в действительности все задачи из части I могут быть решены в рамках теории ZF. В части III из различных уточнений понятия алгоритма выбраны лишь рекурсивные функции и машины Тьюринга.

Мы ставили себе целью главным образом систематизировать уже имеющиеся задачи. По этой причине здесь имеется стандартный набор задач и очень мало задач, специально придуманных авторами. Если задачи нам нравились, то мы брали их из других книг и не ссылались на это.

В книге употребляются следующие общепринятые обозначения:

$\mathcal{N}, \mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$  — множества натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел соответственно;

$\Rightarrow$  — если ..., то ...;

$\Leftrightarrow$  — ...тогда и только тогда, когда ...;

$\Leftarrow$  — есть по определению;

$\{x \mid \dots x \dots\}$  — множество таких элементов  $x$ , для которых выполняется условие  $\dots x \dots$ ;

$\{x_1, x_2, \dots\}$  — множество, состоящее из элементов  $x_1, x_2, \dots$ ;

$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  — упорядоченная последовательность элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

В основу этой книги положен наш сборник «Задачи по логике», выпущенный в 1970 г. издательством Новосибирского государственного университета. Сборник значительно дополнен, сделана существенная переработка, мы постарались учесть многочисленные замечания, высказанные нам. Мы благодарны Л.Н. Шеврину, А.И. Омарову, Н.Г. Хисамиеву, А.А. Акатаеву, В.А. Успенскому, Г.Е. Минцу, С.Ю. Маслову, А.О. Слисенко, И.Д. Заславскому и другим за ценные обсуждения. Особо мы благодарны Ю.Л. Ершову, М.И. Каргаполову и М.А. Тайцлину, а также другим членам кафедры алгебры и математической логики НГУ за большую помощь при подготовке этой книги. Мы глубоко признательны Н.В. Белякину за большой труд по редактированию нашей книги.

1 декабря 1973 г.  
г. Новосибирск  
Академгородок

И.А. Лавров  
Л.Л. Максимова

## ЧАСТЬ I

### ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

---

#### § 1. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Через  $\in$  обозначается *отношение принадлежности*, т. е.  $x \in A$  означает, что элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$ . Если  $x$  не является элементом множества  $A$ , то это записывается  $x \notin A$ . Два множества  $A$  и  $B$  считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Мы пишем  $A = B$ , если  $A$  и  $B$  равны, и  $A \neq B$  в противном случае. Через  $\subseteq$  обозначается *отношение включения* множеств, т. е.  $A \subseteq B$  означает, что каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ . В этом случае  $A$  называется *подмножеством*  $B$ , а  $B$  — *надмножеством*  $A$ . Если  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ , то  $A$  называется *собственным подмножеством*  $B$ , и в этом случае пишем  $A \subset B$ .

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается через  $\emptyset$ . *Семейство всех подмножеств* данного множества  $A$  обозначается через  $P(A)$ .

*Объединением множеств  $A$  и  $B$*  называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

*Объединением семейства множеств  $A_i$  ( $i \in I$ )* называется множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{существует } i_0 \in I \text{ такое, что } x \in A_{i_0}\}.$$

*Пересечением множеств  $A$  и  $B$*  называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

*Пересечением семейства множеств  $A_i$  ( $i \in I$ ), где  $I \neq \emptyset$ ,* называется множество

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

*Разностью множеств  $A$  и  $B$*  называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Мы предполагаем, что все встречающиеся в задачах этого параграфа множества являются подмножествами некоторого *универсального множества*  $U$ . Разность  $U \setminus A$  называется *дополнением* множества  $A$  и обозначается через  $-A$ .

*Симметрической разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

1. Доказать:

- (а)  $A \subseteq A$  (рефлексивность);
- (б) если  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$ , то  $A \subseteq C$  (транзитивность);
- (в)  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ;
- (г)  $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ ;
- (д)  $A \setminus B \subseteq A$ .

2. Доказать, что если  $A$  есть множество корней уравнения  $x^2 - 7x + 6 = 0$  и  $B = \{1, 6\}$ , то  $A = B$ .

3. Доказать, что  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ .

4. Доказать, что  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$ .

5. Доказать, что для любого  $A$ :

- (а)  $\emptyset \subseteq A \subseteq U$ ;
- (б) если  $A \subseteq \emptyset$ , то  $A = \emptyset$ ; если  $U \subseteq A$ , то  $A = U$ ;
- (в)  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,  $A \cup U = U$ ,  $A \cap U = A$ .

6. Доказать, что существует лишь одно множество, не имеющее элементов.

7. Существуют ли такие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

8. Доказать, что множество всех корней многочлена  $\alpha(x) = \beta(x) \cdot \gamma(x)$  есть объединение множеств корней многочленов  $\beta(x)$  и  $\gamma(x)$ .

9. Доказать, что пересечение множеств действительных корней многочленов  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  с действительными коэффициентами совпадает с множеством всех действительных корней многочлена  $\gamma(x) = \alpha^2(x) + \beta^2(x)$ .

10. Доказать, что

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow (-A) \cup B = U.$$

11. Доказать следующие тождества:

- (а)  $A \cup A = A \cap A = A$ ;
- (б)  $A \cap B = B \cap A$ ;
- (в)  $A \cup B = B \cup A$ ;
- (г)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;
- (д)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ;
- (е)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
- (ж)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
- (з)  $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$ .

12. Доказать следующие тождества:

- (а)  $\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$ ;
- (б)  $\neg(A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$ ;
- (в)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ;
- (г)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ;
- (д)  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ ;
- (е)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ ;
- (ж)  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$ ;
- (з)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ ;
- (и)  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ ;
- (к)  $\neg(\neg A) = A$ ;
- (л)  $A \cup (\neg A) = U$ ;
- (м)  $A \cap (\neg A) = \emptyset$ ;
- (н)  $(A \cap B) \cup [A \cap (\neg B)] = (A \cup B) \cap [A \cup (\neg B)] = A$ ;
- (о)  $[(\neg A) \cup B] \cap A = A \cap B$ ;
- (п)  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ;
- (р)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ;
- (с)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ;
- (т)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ .

13. Доказать, что:

- (а)  $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ и } B \subseteq C$ ;
- (б)  $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ и } A \subseteq C$ ;
- (в)  $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq (\neg B) \cup C$ ;
- (г)  $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap (\neg B) \subseteq C$ ;
- (д)  $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$ ;
- (е)  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$ ;
- (ж)  $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ ;
- (з)  $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$ ;
- (и)  $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$ ;
- (к)  $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ ;
- (л)  $A \subseteq B \Rightarrow \neg B \subseteq \neg A$ ;
- (м)  $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ ;
- (н)  $A = \neg B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ и } A \cup B = U$ .

14. Доказать тождества:

- (а)  $A \dot{\cup} B = B \dot{\cup} A$ ;
- (б)  $A \dot{\cup} (B \dot{\cup} C) = (A \dot{\cup} B) \dot{\cup} C$ ;
- (в)  $A \cap (B \dot{\cup} C) = (A \cap B) \dot{\cup} (A \cap C)$ ;
- (г)  $A \dot{\cup} (A \dot{\cup} B) = B$ ;
- (д)  $A \cup B = A \dot{\cup} B \dot{\cup} (A \cap B)$ ;
- (е)  $A \setminus B = A \dot{\cup} (A \cap B)$ ;
- (ж)  $A \dot{\cup} \emptyset = A$ ;
- (з)  $A \dot{\cup} A = \emptyset$ ;
- (и)  $A \dot{\cup} U = \neg A$ ;
- (к)  $A \cup B = (A \dot{\cup} B) \cup (A \cap B)$ .



15. Доказать, что:

$$(a) (A_1 \cup \dots \cup A_n) \dot{-} (B_1 \cup \dots \cup B_n) \subseteq (A_1 \dot{-} B_1) \cup \dots \cup (A_n \dot{-} B_n);$$

$$(б) (A_1 \cap \dots \cap A_n) \dot{-} (B_1 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \dot{-} B_1) \cup \dots \cup (A_n \dot{-} B_n).$$

16. Доказать, что:

$$(a) A \dot{-} B = \emptyset \Leftrightarrow A = B;$$

$$(б) A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \dot{-} B.$$

$$(в) A \dot{-} B = C \Leftrightarrow B \dot{-} C = A \Leftrightarrow C \dot{-} A = B.$$

17. Определить операции  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$  через:

$$(a) \dot{-}, \cap;$$

$$(б) \dot{-}, \cup;$$

$$(в) \setminus, \dot{-}.$$

18\*. Доказать, что нельзя определить:

$$(a) \setminus \text{ через } \cap \text{ и } \cup;$$

$$(б) \cup \text{ через } \cap \text{ и } \setminus.$$

19. Доказать, что множества образуют кольцо без единицы, где  $\dot{-}$  играет роль операции сложения, а  $\cap$  играет роль операции умножения. Что является вычитанием в этом кольце?

20. Найти все подмножества множеств  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$ ,  $\{x\}$ ,  $\{1, 2\}$ .

21. (а) Доказать, что множество из  $n$  элементов имеет  $2^n$  подмножеств.

(б) Сколько подмножеств из  $k$  элементов имеет множество из  $n$  элементов ( $k \leq n$ )?

22. Доказать, что:

$$(a) P(A \cap B) = P(A) \cap P(B);$$

$$(б) P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} P(A_i);$$

$$(в) P(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1 \mid A_1 \in P(A) \text{ и } B_1 \in P(B)\};$$

$$(г) P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in P(A_i) \right\}.$$

23. Доказать, что для любых  $a, b, c, d$

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow a = c \text{ и } b = d.$$

24. Какие из утверждений верны для всех  $A, B$  и  $C$ ?

$$(a) \text{ Если } A \in B \text{ и } B \in C, \text{ то } A \in C.$$

$$(б) \text{ Если } A \subseteq B \text{ и } B \in C, \text{ то } A \in C.$$

$$(в) \text{ Если } A \cap B \subseteq -C \text{ и } A \cup C \subseteq B, \text{ то } A \cap C = \emptyset.$$

$$(г) \text{ Если } A \neq B \text{ и } B \neq C, \text{ то } A \neq C.$$

$$(д) \text{ Если } A \subseteq -(B \cup C) \text{ и } B \subseteq -(A \cup C), \text{ то } B = \emptyset.$$

25. Доказать, что для любых  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,

если  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1$ , то  $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ .

26. Для каждого положительного целого числа  $n$  указать множество  $A_n$  из  $n$  элементов такое, что если  $x, y \in A_n$ , то  $x \in y$  или  $y \in x$ , или  $x = y$ .

27. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

где  $A, B$  и  $C$  — данные множества и  $B \subseteq A \subseteq C$ .

28. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases}$$

где  $A, B$  и  $C$  — данные множества и  $B \subseteq A, A \cap C = \emptyset$ .

29. Пусть даны системы множеств  $\{A_i\}_{i \in I}$  и  $\{B_i\}_{i \in I}$ , где  $I$  — некоторое множество. Решить системы уравнений:

(а)  $A_i \cap X = B_i, i \in I;$

(б)  $A_i \cup X = B_i, i \in I.$

При каких  $A_i$  и  $B_i$  эти системы имеют решения?

30. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

где  $A, B$  и  $C$  — данные множества и  $B \subseteq A \subseteq C$ .

31. Показать, что:

(а)  $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset;$

(б) любое уравнение относительно множества  $X$ , в правой части которого стоит  $\emptyset$ , равносильно уравнению  $(A \cap X) \cup [B \cap (-X)] = \emptyset$ , где  $A$  и  $B$  — некоторые множества, в записи которых не содержится символ  $X$ ;

(в) система уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = \emptyset, \\ B \cap (-X) = \emptyset \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда  $B \subseteq -A$ ; при этом условием решением системы является любое множество  $X$  такое, что

$$B \subseteq X \subseteq -A;$$

(г) описать метод решения системы уравнений с одним неизвестным.

32. Пользуясь методом задачи 31, решить следующие системы:

$$(a) \begin{cases} A \cup X = B \cap X, \\ A \cap X = C \cup X; \end{cases}$$

$$(б) \begin{cases} A \setminus X = X \setminus B, \\ X \setminus A = C \setminus X; \end{cases}$$

$$(в) \begin{cases} A \cap X = B \setminus X, \\ C \cup X = X \setminus A. \end{cases}$$

При каких  $A$ ,  $B$  и  $C$  эти системы имеют решение?

33. Доказать, что всякое множество есть:

- (а) объединение всех своих подмножеств;
- (б) объединение всех своих конечных подмножеств;
- (в) объединение всех своих одноэлементных подмножеств.

34. Пусть имеется последовательность множеств

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq \dots$$

Доказать, что пересечение любой бесконечной подпоследовательности этих множеств совпадает с пересечением всей последовательности.

35. Пусть имеется последовательность множеств

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots$$

Доказать, что объединение любой бесконечной подпоследовательности этих множеств совпадает с объединением всей последовательности.

36. Доказать следующие тождества:

$$(a) \bigcup_{k \in K} \bigcup_{t \in T} A_{kt} = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{k \in K} A_{kt};$$

$$(б) \bigcap_{k \in K} \bigcap_{t \in T} A_{kt} = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{k \in K} A_{kt};$$

$$(в) - \left( \bigcup_{k \in K} A_k \right) = \bigcap_{k \in K} (-A_k);$$

$$(г) - \left( \bigcap_{k \in K} A_k \right) = \bigcap_{k \in K} (-A_k);$$

$$(д) \bigcup_{k \in K} A_k \cup \bigcup_{k \in K} B_k = \bigcup_{k \in K} (A_k \cup B_k);$$

$$(е) \bigcup_{k \in K} (B \cap A_k) = B \cap \left( \bigcup_{k \in K} A_k \right);$$

$$(ж) \bigcap_{k \in K} (B \cup A_k) = B \cup \left( \bigcap_{k \in K} A_k \right).$$

37. (а) Доказать, что для любых  $K, T, A_{kt}$

$$\bigcup_{k \in K} \bigcap_{t \in T} A_{kt} \subseteq \bigcap_{t \in T} \bigcup_{k \in K} A_{kt}.$$

(б) Доказать, что в утверждении (а) включение нельзя заменить равенством.

38. Доказать, что:

(а) если  $A_t \subseteq B$  для всех  $t \in T$ , то  $\bigcup_{t \in T} A_t \subseteq B$ ;

(б) если  $B \subseteq A_t$  для всех  $t \in T$ , то  $B \subseteq \bigcap_{t \in T} A_t$ ;

(в) если  $A_t \subseteq B_t$  для всех  $t \in T$ , то  $\bigcup_{t \in T} A_t \subseteq \bigcup_{t \in T} B_t$  и  $\bigcap_{t \in T} A_t \subseteq \bigcap_{t \in T} B_t$ .

39. Доказать, что:

(а)  $\bigcup_{t \in T} A_t$  есть наименьшее множество, содержащее все множества  $A_t$ ;

(б)  $\bigcap_{t \in T} A_t$  есть наибольшее множество, содержащееся во всех множествах  $A_t$ .

40. Доказать, что если  $\left( \bigcap_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} A_n \right) \cap \left( \bigcap_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} B_n \right) = \emptyset$ , то

$$\bigcap_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} A_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} [A_n \cap (B_{n-1} \setminus B_n)],$$

где

$$\left( \bigcup_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} B_n \right) \subseteq B_0.$$

41. Доказать, что для любой системы множеств  $A_0, \dots, A_n, \dots$  существует система попарно непересекающихся множеств  $B_0, \dots, B_n, \dots$  такая, что  $\bigcup_{n \in \mathcal{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} B_n$  и  $B_n \subseteq A_n$ .

## § 2. ОТНОШЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Прямым (декартовым) произведением множеств  $A_1, \dots, A_n$  называется множество

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n \}.$$

Если  $A_1 = \dots = A_n = A$ , то множество  $A_1 \times \dots \times A_n$  называется прямой степенью множества  $A$  и обозначается через  $A^n$ .

Бинарным отношением между элементами множеств  $A$  и  $B$  называется любое подмножество  $R$  множества  $A \times B$ . Если  $A = B$ , то отношение называется бинарным отношением на  $A$ . Вместо  $\langle x, y \rangle \in R$  часто пишут  $xRy$ .

Областью определения бинарного отношения  $R$  называется множество

$$\delta_R = \{x \mid \text{существует } y \text{ такое, что } \langle x, y \rangle \in R\}.$$

Областью значений бинарного отношения  $R$  называется множество

$$\rho_R = \{y \mid \text{существует } x \text{ такое, что } \langle x, y \rangle \in R\}.$$

Для бинарных отношений определены обычным образом теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т. д.

Дополнением бинарного отношения  $R$  между элементами  $A$  и  $B$  считается множество

$$-R = (A \times B) \setminus R.$$

Обратным отношением для бинарного отношения  $R$  называется множество

$$R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \in R\}.$$

Образом множества  $X$  относительно  $R$  называется множество

$$R(X) = \{y \mid \text{существует } x \in X \text{ такое, что } \langle x, y \rangle \in R\},$$

прообразом  $X$  относительно  $R$  называется  $R^{-1}(X)$ .

Произведением отношений  $R_1 \subseteq A \times B$  и  $R_2 \subseteq B \times C$  называется отношение

$$R_1 \cdot R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \text{существует } z \text{ такое, что } \langle x, z \rangle \in R_1 \text{ и } \langle z, y \rangle \in R_2\}.$$

Отношение  $f$  называется функцией из  $A$  в  $B$  (из  $A$  на  $B$ ), если  $\delta_f = A$ ,  $\rho_f \subseteq B$  (соответственно  $\rho_f = B$ ) и для всех  $x, y_1, y_2$  из  $\langle x, y_1 \rangle \in f$  и  $\langle x, y_2 \rangle \in f$  следует  $y_1 = y_2$ . Функция  $f$  из  $A$  в  $B$  обозначается  $f: A \rightarrow B$ . Если  $f$  — функция, то пишем  $y = f(x)$  вместо  $\langle x, y \rangle \in f$  и называем  $y$  значением функции  $f$  при значении аргумента  $x$ . Для любого множества  $A$  определяем  $i_A: A \rightarrow A$  следующим образом:

$$i_A(x) = x.$$

Функция  $f$  называется 1-1-функцией, если для любых  $x_1, x_2, y$  из того, что  $y = f(x_1)$  и  $y = f(x_2)$ , следует  $x_1 = x_2$ . Говорят, что функция  $f: A \rightarrow B$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ , если  $\delta_f = A$ ,  $\rho_f = B$  и  $f$  — 1-1-функция. Взаимно однозначное соответствие  $f: A \rightarrow A$  называется подстановкой множества  $A$ .

Множество всех функций из  $A$  в  $B$  обозначается через  $B^A$ .  
 Декартовым произведением семейства множеств  $A_i$  ( $i \in I$ ) называется множество

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \text{ и } f(i) \in A_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

Назовем  $n$ -местным отношением на множестве  $A$  любое подмножество множества  $A^n$ . Функцию  $f: A^n \rightarrow B$  назовем  $n$ -местной функцией из множества  $A$  в  $B$  и будем писать  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  вместо  $y = f((x_1, \dots, x_n))$  и называть  $y$  значением функции  $f$  при значении аргументов  $x_1, \dots, x_n$ .

1. Доказать, что существуют  $A, B$  и  $C$  такие, что:

- (а)  $A \times B \neq B \times A$ ;
- (б)  $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ .

2. Найти геометрическую интерпретацию следующих множеств:

(а)  $[a, b] \times [c, d]$ , где  $[a, b]$  и  $[c, d]$  — отрезки действительной прямой  $\mathcal{D}$ ;

- (б)  $[a, b]^2$ ;
- (в)  $[a, b]^3$ ;
- (г)  $\mathcal{D}^n$ .

3. Доказать, что если  $A, B, C$  и  $D$  не пусты, то:

- (а)  $A \subseteq B$  и  $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$ ;
- (б)  $A = B$  и  $C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$ .

4. Доказать, что:

- (а)  $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ ;
- (б)  $\bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i)$ .

5. Доказать, что  $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ . При каких  $A, B, C$  и  $D$  получается равенство?

6. Доказать, что:

- (а)  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ ;
- (б)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ;
- (в)  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$ ;
- (г)  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ ;
- (д)  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ ;
- (е)  $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$ , где  $A \subseteq C$  и  $B \subseteq D$ ;
- (ж)  $U^2 \setminus (A \times B) = [(U \setminus A) \times U] \cup [U \times (U \setminus B)]$ ;

$$(3) \bigcup_{k \in K} A_k \times \bigcup_{l \in L} B_l = \bigcup_{(k,l) \in K \times L} (A_k \times B_l);$$

$$(4) \bigcap_{k \in K} A_k \times \bigcap_{l \in L} B_l = \bigcap_{(k,l) \in K \times L} (A_k \times B_l).$$

7. Пусть  $A, B \neq \emptyset$  и  $(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times D)$ . Доказать, что  $A=B=C=D$ .

8. Найти  $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \cdot R, R \cdot R^{-1}, R^{-1} \cdot R$  для следующих отношений:

$$(a) R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{N} \text{ и } x \text{ делит } y\};$$

$$(б) R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{N} \text{ и } y \text{ делит } x\};$$

$$(в) R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{Q} \text{ и } x+y \leq 0\};$$

$$(г) R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{Q} \text{ и } 2x \geq 3y\};$$

$$(д) R = \{(x, y) \mid x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } y \geq \sin x\}.$$

9. Доказать, что:

$$(a) \delta_R = \emptyset \Leftrightarrow R = \emptyset \Leftrightarrow \rho_R = \emptyset;$$

$$(б) \delta_{R^{-1}} = \rho_R, \rho_{R^{-1}} = \delta_R;$$

$$(в) \delta_{R_1 \cdot R_2} = R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2});$$

$$(г) \rho_{R_1 \cdot R_2} = R_2(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2}).$$

10. Доказать, что:

$$(a) \text{ если } B \neq \emptyset, \text{ то } \delta_{A \times B} = A;$$

$$(б) \text{ если } A \neq \emptyset, \text{ то } \rho_{A \times B} = B.$$

11. Пусть  $R$  — бинарное отношение на  $A$ . Доказать, что  $R = i_A$  тогда и только тогда, когда  $R \cdot R_1 = R_1 \cdot R = R_1$  для любого отношения  $R_1$  на  $A$ .

12. Доказать, что для любых бинарных отношений:

$$(a) R \cup R = R \cap R = R;$$

$$(б) (R^{-1})^{-1} = R;$$

$$(в) (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1};$$

$$(г) (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1};$$

$$(д) -R^{-1} = (-R)^{-1};$$

$$(e) \left( \bigcup_{i \in I} R_i \right)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1};$$

$$(ж) \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}.$$

13. Для каких бинарных отношений  $R$  справедливо  $R^{-1} = -R$ ?

14. Пусть  $A$  и  $B$  — конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно.

(а) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств  $A$  и  $B$ ?

(б) Сколько имеется функций из  $A$  в  $B$ ?

(в) Сколько имеется 1-1-функций из  $A$  в  $B$ ?

(г) При каких  $m$  и  $n$  существует взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ ?

15. Доказать, что для любых бинарных отношений:

(а)  $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$ ;

(б)  $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$ ;

(в)  $\left( \bigcup_{i \in I} R_i \right) \cdot Q = \bigcup_{i \in I} (R_i \cdot Q)$ ;

(г)  $Q \cdot \left( \bigcup_{i \in I} R_i \right) = \bigcup_{i \in I} (Q \cdot R_i)$ .

16. Доказать, что:

(а)  $Q \cdot \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (Q \cdot R_i)$ ;

(б)  $\left( \bigcap_{i \in I} R_i \right) \cdot Q \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \cdot Q)$ ;

(в) в утверждениях (а) и (б) включения нельзя заменить равенствами.

17. Образуют ли бинарные отношения группу относительно операций  $\cdot$  и  $^{-1}$ ?

18. Доказать, что если  $R_1 \subseteq R_2$ , то:

(а)  $Q \cdot R_1 \subseteq Q \cdot R_2$ ;

(б)  $R_1 \cdot Q \subseteq R_2 \cdot Q$ ;

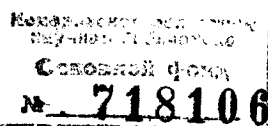
(в)  $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$ .

19. Доказать, что:

(а) если  $B \neq \emptyset$ , то  $B^A \neq \emptyset$ ;

(б)  $B^A \subseteq P(A \times B)$ .

20. Установить взаимно однозначное соответствие между  $A^n$  и  $A^I$  при  $I = \{1, \dots, n\}$ .





21. Используя определение, описать множество  $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{\mathcal{Q}})$ , где  $\mathcal{Q}$  — множество действительных чисел.

22. Доказать, что если  $f$  есть функция из  $A$  в  $B$  и  $g$  есть функция из  $B$  в  $C$ , то  $f \cdot g$  есть функция из  $A$  в  $C$ .

23. Пусть  $f$  и  $g$  — функции. При каких условиях:

- (а)  $f^{-1}$  является функцией;
- (б)  $f \cdot g$  является 1-1-функцией?

24. Пусть  $A, B, A_1, B_1$  — такие множества, что  $A$  находится во взаимно однозначном соответствии с  $A_1$ , а  $B$  — с  $B_1$ . Показать, что можно установить взаимно однозначное соответствие:

- (а) между  $A \times B$  и  $A_1 \times B_1$ ;
- (б) между  $A^B$  и  $A_1^{B_1}$ ;
- (в) между  $A \cup B$  и  $A_1 \cup B_1$ , если  $A \cap B = \emptyset$  и  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ .

25. Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами

- (а)  $A \times B$  и  $B \times A$ ;
- (б)  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ ;
- (в)  $(A \times B)^C$  и  $A^C \times B^C$ ;
- (г)  $(A^B)^C$  и  $A^{B \times C}$ ;
- (д)  $A^{B \cup C}$  и  $A^B \times A^C$ , если  $B \cap C = \emptyset$ ;
- (е)  $\prod_{i \in I} A_i$  и  $\prod_{i \in I} A_{\varphi(i)}$ , где  $\varphi$  — подстановка множества  $I$ ;
- (ж)  $\prod_{i \in I} A_i$  и  $\prod_{k \in K} \left( \prod_{j \in T_k} A_j \right)$ , где  $\bigcup_{k \in K} T_k = I$  и все  $T_k$  попарно не пересекаются;

каются;

- (з)  $A^I$  и  $\prod_{k \in K} A^{T_k}$ , где  $\bigcup_{k \in K} T_k = I$  и все  $T_k$  попарно не пересекаются.

26. Пусть  $\varphi: A \rightarrow A$  — подстановка множества  $A$ . Доказать, что  $\varphi^{-1}$  — подстановка множества  $A$ .

27. Доказать, что множество подстановок множества  $A$  образует группу.

28. Пусть  $\varphi: A \rightarrow B$  — взаимно однозначное соответствие. Доказать, что:

- (а)  $\varphi^{-1}$  — взаимно однозначное соответствие между  $B$  и  $A$ ;
- (б)  $\varphi^{-1} \cdot \varphi = i_B$ ;

$$(в) \varphi \cdot \varphi^{-1} = i_A.$$

29. Доказать, что для того, чтобы отношение  $R \subseteq A \times B$  было взаимно однозначным соответствием между  $A$  и  $B$ , необходимо и достаточно, чтобы  $R \cdot R^{-1} = i_A$  и  $R^{-1} \cdot R = i_B$ .

30. Доказать, что объединение (пересечение) двух функций  $f_1$  и  $f_2$  из  $A$  в  $B$  является функцией из  $A$  в  $B$  тогда и только тогда, когда  $f_1 = f_2$ .

31. Доказать, что для любой функции  $f$ :

$$(а) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$(б) f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

32. Доказать, что для любой функции  $f$ :

$$(а) f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B);$$

$$(б) f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i),$$

и эти включения нельзя заменить равенствами.

33. Доказать, что  $f$  удовлетворяет условию

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \text{ для любых } A \text{ и } B$$

тогда и только тогда, когда  $f$  есть 1-1-функция.

34. Доказать, что  $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$  для любой функции  $f$ .

35. Доказать, что если в предыдущем примере  $f$  есть 1-1-функция, то выполняется равенство.

36. Доказать, что если  $A \subseteq B$ , то  $f(A) \subseteq f(B)$  для любой функции  $f$ .

37. Доказать, что для любой функции  $f$

$$f(A) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap \delta_f = \emptyset.$$

38. Доказать следующие тождества для любой функции  $f$ :

$$(а) f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$$

$$(б) f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i);$$

$$(в) f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$$

$$(г) f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i);$$

$$(д) f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

39. Доказать, что если  $A \subseteq B$ , то справедливо  $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$  для любой функции  $f$ .

40. Доказать, что для любой функции  $f$

$$f^{-1}(A) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap \rho_f = \emptyset.$$

41. Доказать, что если  $A \subseteq \delta_f$  и  $B \subseteq \rho_f$ , то:

(а)  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ;

(б)  $f(f^{-1}(B)) = B$ ;

(в)  $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$ ;

(г)  $f(A) \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ ;

(д)  $f(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}(B)$ .

42. Пусть  $f: A \rightarrow B$ . Определим  $f_*: P(A) \rightarrow P(B)$ ,  $f^*: P(B) \rightarrow P(A)$  такие, что  $f_*(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$  и  $f^*(Y) = \{x \mid f(x) \in Y\}$ . При каких условиях  $f^* \cdot f_* = i_{P(B)}$ ? При каких условиях  $f_* \cdot f^* = i_{P(A)}$ ?

43. В обозначениях предыдущей задачи доказать, что:

(а)  $f^*(X \cap Y) = f^*(X) \cap f^*(Y)$ ;

(б)  $(f \cdot g)^*(X) = f^*(g^*(X))$ .

44. Пусть  $U$  — непустое множество. Для любого подмножества  $A$  множества  $U$  обозначим через  $\chi_A^U$  следующую функцию (характеристическую функцию множества  $A$ ):

$$\chi_A^U = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A, \\ 1, & \text{если } x \in U \setminus A. \end{cases}$$

Определим функцию  $f: P(U) \rightarrow \{0, 1\}^U$  следующим условием:  $f(A) = \chi_A^U$  для любого  $A \in P(U)$ . Доказать, что  $f$  есть взаимно однозначное соответствие между  $P(U)$  и  $\{0, 1\}^U$ .

45. Доказать, что введенная в предыдущей задаче функция  $\chi_A^U$  удовлетворяет следующим условиям:

(а)  $\chi_{\emptyset}^U(x) = 0$ ;

(б)  $\chi_U^U(x) = 1$ ;

(в)  $\chi_{U \setminus A}^U(x) = 1 - \chi_A^U(x)$ ;

(г)  $\chi_{A \cup B}^U(x) = \chi_A^U(x) \vee \chi_B^U(x)$ ;

(д)  $\chi_{A \cap B}^U(x) = \chi_A^U(x) \wedge \chi_B^U(x)$ ;

$$(e) \chi_{A \setminus B}^U(x) = 1 - \chi_B^U(x) + \chi_{A \cup B}^U(x);$$

$$(ж) \text{ если } A = \bigcup_{i \in I} A_i, \text{ то } \chi_A^U(x) = \min_{i \in I} \chi_{A_i}^U(x);$$

$$(з) \text{ если } A = \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ то } \chi_A^U(x) = \max_{i \in I} \chi_{A_i}^U(x).$$

46. Доказать свойства *полной дистрибутивности*:

$$(a) \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} = \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij};$$

$$(б) \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{ij}.$$

47. Доказать, что  $A^I = \prod_{i \in I} A_i$ , где  $A_i = A$  для всех  $i \in I$ .

48. Пусть  $A_i \subseteq X_i$ . Доказать, что:

$$(a) \prod_{i \in I} a_i = \bigcap_{i \in I} \prod_{j \in J} A_{ij}, \text{ где } A_{ii} = A_i, A_{ij} = X_j \text{ при } i \neq j;$$

$$(б) \prod_{i \in I} X_i \setminus \prod_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \prod_{j \in J} B_{ij}, \text{ где } B_{ii} = X_i \setminus A_i, B_{ij} = X_j \text{ при } i \neq j.$$

49. Доказать, что:

$$(a) \bigcap_{k \in K} \prod_{t \in T} A_{kt} = \prod_{t \in T} \bigcap_{k \in K} A_{kt};$$

(б) если  $A_{t_1} \cap A_{t_2} = \emptyset$  при  $t_1 \neq t_2$ , то можно установить взаимно одно-

значное соответствие между  $B^{\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)}$  и  $\prod_{t \in T} B^{A_t}$ ;

(в) можно установить взаимно однозначное соответствие между  $\left(\prod_{t \in T} B_t\right)^A$  и  $\prod_{t \in T} B_t^A$ .

50. Доказать, что если  $A_t \neq \emptyset$  для всех  $t \in T$ , то  $\prod_{t \in T} A_t \neq \emptyset$  (одна из формулировок *аксиомы выбора*).

51. Доказать, что между  $\prod_{t \in T} A_t$  и  $\left(\prod_{t_1 \in T_1} A_{t_1}\right) \times \left(\prod_{t_2 \in T_2} A_{t_2}\right)$  можно установить взаимно однозначное соответствие, если  $T_1 \cup T_2 = T$  и  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## § 3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

В этом параграфе рассматриваются бинарные отношения, заданные на непустом множестве.

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется *рефлексивным*, если

$$\langle x, x \rangle \in R \text{ для всех } x \in A,$$

*иррефлексивным*, если

$$\langle x, x \rangle \notin R \text{ для всех } x \in A.$$

Бинарное отношение  $R$  называется *симметричным*, если

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R,$$

и *антисимметричным*, если

$$\langle x, y \rangle \in R \text{ и } \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y.$$

Бинарное отношение  $R$  называется *транзитивным*, если

$$\langle x, y \rangle \in R \text{ и } \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R.$$

Рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение на множестве  $A$  называется *эквивалентностью* на  $A$ . Классом эквивалентности (смежным классом) элемента  $x$  по эквивалентности  $R$  называется множество

$$[x]_R = x/R = \{y \mid \langle x, y \rangle \in R\}.$$

Множество классов эквивалентности элементов множества  $A$  по эквивалентности  $R$  называется *фактормножеством*  $A$  по  $R$  и обозначается через  $A/R$ .

Бинарное отношение на множестве  $A$  называется *предпорядком* на  $A$ , если оно рефлексивно и транзитивно. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на множестве  $A$  называется *частичным порядком* на  $A$ . Частичный порядок часто обозначается символом  $\leq$ . Порядок  $\leq^{-1}$  называется *двойственным* к  $\leq$  и обозначается символом  $\geq$ . Будем писать  $x < y$ , если  $x \leq y$  и  $x \neq y$ . Частичный порядок  $\leq$  на множестве  $A$  называется *линейным*, если любые два элемента из  $A$  сравнимы по  $\leq$ , т. е.  $x \leq y$  или  $y \leq x$  для любых  $x, y \in A$ . Множество  $A$  с заданным на нем частичным (линейным) порядком  $\leq$  называется *частично (линейно) упорядоченным*. Подмножество  $B$  множества  $A$ , частично упорядоченного отношением  $\leq$ , называется *цепью* в  $A$ , если оно линейно упорядочено отношением  $\leq \cap B^2$ .

Элемент  $a$  частично упорядоченного множества  $A$  называется *максимальным* (минимальным), если из того, что  $a \leq x$  ( $x \leq a$ ), следует  $a = x$ . Элемент  $a$  из  $A$  называется *наибольшим* (наименьшим), если  $x \leq a$  ( $a \leq x$ ) для всех  $x \in A$ . *Верхней* (нижней) *гранью* подмножества  $B$  частично упорядоченного множества  $A$  называется любой элемент  $a$  из  $A$  такой, что  $b \leq a$  ( $a \leq b$ ) для любого  $b \in B$ . *Точной верхней* (нижней)

гранью подмножества  $B \subseteq A$  называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань для  $B$ . Точная верхняя и точная нижняя грани множества  $B \subseteq A$  обозначаются через  $\sup B$  и  $\inf B$  соответственно.

Линейный порядок  $\leq$  на множестве  $A$  назовем *полным*, если каждое непустое подмножество множества  $A$  имеет наименьший элемент. В этом случае множество  $A$  называется *вполне упорядоченным*.

Пусть  $A$  и  $B$  — частично упорядоченные множества и  $f$  — функция из  $A$  в  $B$ .  $f$  называется *монотонным отображением*, если из  $x_1 \leq x_2$  следует  $f(x_1) \leq f(x_2)$  для любых элементов  $x_1, x_2 \in A$ . Если  $f$  есть вза-

имно однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ ,  $f$  и  $f^{-1}$  — монотонные отображения, то  $f$  называется *изоморфизмом частично упорядоченных множеств  $A$  и  $B$* , а множества  $A$  и  $B$  называются *изоморфными*.

Частично упорядоченное множество  $M$  называется *решеткой* или *структурой*, если для любых двух элементов  $x, y \in M$  существуют точная нижняя грань  $x \cap y$  и точная верхняя грань  $x \cup y$ . Будем обозначать  $((x_1 \cap x_2) \cap x_3) \cap \dots \cap x_k$  через  $x_1 \cap x_2 \cap x_3 \cap \dots \cap x_k$  и  $((x_1 \cup x_2) \cup x_3) \cup \dots \cup x_k$  через  $x_1 \cup x_2 \cup x_3 \dots \cup x_k$ . Наибольший элемент решетки (если он существует) обозначается через 1, а наименьший — через 0.

Решетка  $M$  называется *дистрибутивной*, если для любых  $x, y, z \in M$  выполнены тождества

$$(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z),$$

$$(x \cap y) \cup z = (x \cup z) \cap (y \cup z).$$

Дистрибутивная решетка  $M$  называется *булевой алгеброй*, если для любого элемента  $x \in M$  существует *дополнение*, т. е. элемент  $(-x)$ , удовлетворяющий условиям: для любого элемента  $y \in M$

$$[x \cup (-x)] \cap y = y, \quad [x \cap (-x)] \cup y = y.$$

Семейство подмножеств  $S$  данного множества  $A$  называется *алгеброй подмножеств*, если  $S$  замкнуто относительно теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения, т. е.

$$X, Y \in S \Rightarrow (X \cup Y) \in S, \quad (X \cap Y) \in S, \quad (-X) \in S.$$

*Фильтром* на булевой алгебре  $M$  называется непустое подмножество  $D \subseteq M$ , удовлетворяющее условиям:

$$(1) \quad x, y \in D \Rightarrow (x \cap y) \in D,$$

$$(2) \quad x \in D, x \leq y \Rightarrow y \in D,$$

$$(3) \quad x \in D \Rightarrow (-x) \notin D.$$

Фильтр  $D$  на булевой алгебре  $M$  называется *ультрафильтром*, если он удовлетворяет условию

$$(4) \quad x \in D \text{ или } (-x) \in D \text{ для любого } x \in M.$$

Фильтр  $D$  на булевой алгебре  $M$  называется *простым*, если он удовлетворяет условию: для любых  $x, y \in M$

$$(5) (x \cup y) \in D \Rightarrow x \in D \text{ или } y \in D.$$

Фильтр  $D$  на булевой алгебре  $M$  называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом фильтре на  $M$ .

1. Доказать, что если отношения  $R_1$  и  $R_2$  рефлексивны, то рефлексивны отношения  $R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cap R_2$ ,  $R_1^{-1}$ ,  $R_1 \cdot R_2$ .

2. Доказать, что если  $R_1$  и  $R_2$  иррефлексивны, то иррефлексивны и отношения  $R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cap R_2$ ,  $R_1^{-1}$ . Показать, что произведение  $R_1 \cdot R_2$  иррефлексивных отношений может не быть иррефлексивным.

3. Доказать, что если  $R_1$  и  $R_2$  симметричны, то симметричны отношения  $R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cap R_2$ ,  $R_1^{-1}$ ,  $R_1 \cdot R_1^{-1}$ .

4. Доказать, что произведение  $R_1 \cdot R_2$  симметричных отношений  $R_1$  и  $R_2$  симметрично тогда и только тогда, когда  $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$ .

5. Доказать, что:

(а) если отношения  $R_1$  и  $R_2$  антисимметричны, то антисимметричны также  $R_1 \cap R_2$  и  $R_1^{-1}$ ;

(б) объединение  $R_1 \cup R_2$  антисимметричных отношений  $R_1$  и  $R_2$  на  $A$  антисимметрично тогда и только тогда, когда  $R_1 \cdot R_2^{-1} \subseteq i_A$ .

6. Построить бинарное отношение:

(а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;

(б) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;

(в) рефлексивное, транзитивное, не симметричное;

(г) антисимметричное, транзитивное, не рефлексивное.

7.(а) Построить бинарное отношение, симметричное, транзитивное, но не рефлексивное.

(б) Доказать, что если  $R$  есть транзитивное и симметричное отношение на множестве  $A$  и  $\delta_R \cup \rho_R = A$ , то  $R$  есть эквивалентность на  $A$ .

8. Доказать, что любое отношение  $R$ , симметричное и антисимметричное одновременно, является транзитивным.

9. Доказать, что отношение  $R$  на множестве  $A$  является одновременно эквивалентностью и частичным порядком в том и только том случае, когда  $R = i_A$ .

10. На множествах  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$  определим  $R_m, Q, S$  следующим образом:

$$(a, b) \in R_m \Leftrightarrow (a - b) \text{ делится на } m \ (m > 0);$$

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle \in Q \Leftrightarrow a + d = b + c;$$

$$(a, b), (c, d) \in S \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow [(a \cdot d = b \cdot c) \text{ и } b \neq 0 \text{ и } d \neq 0] \text{ или } (a = c, b = 0, d = 0).$$

Доказать, что  $R_m, Q$  и  $S$  являются отношениями эквивалентности.

11. Пусть  $A$  — множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентностями следующие отношения:

(а) параллельность прямых;

(б) перпендикулярность прямых?

12. На множестве  $\mathbb{Q}$  действительных чисел определим отношение  $R$  следующим образом:

$$\alpha R \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \text{ — рациональное число.}$$

Доказать, что  $R$  есть эквивалентность.

13. Доказать, что если  $R$  — эквивалентность, то:

$$(a) x \in [x]_R;$$

$$(б) (x, y) \in R \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R.$$

14. Доказать, что если  $R$  есть эквивалентность, то  $R^{-1}$  есть также эквивалентность.

15. Пусть  $R \subseteq A^2$ . Доказать, что

$$R \text{ есть эквивалентность} \Leftrightarrow (R \cdot R^{-1}) \cup I_A = R.$$

16. Доказать, что если  $R_1$  и  $R_2$  — эквивалентности на  $A$ , то:

$$(a) R_1 \cdot R_1 = A^2 \Leftrightarrow R_1 = A^2;$$

$$(б) R_1 \cdot R_2 = A^2 \Leftrightarrow R_2 \cdot R_1 = A^2.$$

17. Доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между классом всех разбиений множества  $A$  на непересекающиеся непустые подмножества и семейством всех отношений эквивалентности на  $A$ . (Семейство  $\{A_i\}_{i \in I}$  называется *разбиением*  $A$ , если  $\bigcup_{i \in I} A_i = A$  и множества  $A_i$  попарно не пересекаются.)

18. Доказать, что  $R$  тогда и только тогда является отношением эквивалентности на множестве  $A$ , когда существует система  $\mathcal{P}$  попарно непересекающихся множеств такая, что

$$R = \bigcup_{C \in \mathcal{P}} C \times C \text{ и } \bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = A.$$



19. Пусть  $f: A \rightarrow B$  — произвольная функция. Положим

$$Q = \{\langle x, y \rangle \mid f(x) = f(y)\}.$$

Доказать, что  $Q$  является эквивалентностью на  $A$  и для отображения  $f$  существует разложение

$$f = \varepsilon \cdot f_1,$$

где  $\varepsilon$  — естественное отображение  $A$  на  $A/Q = \{[x]_Q \mid x \in A\}$ , т. е.  $\varepsilon(x) = [x]_Q$ ,  $f_1$  — взаимно однозначное соответствие между  $A/Q$  и  $f(A)$ .

20. Доказать, что пересечение любой системы эквивалентностей на множестве  $A$  есть эквивалентность на  $A$ .

21. Доказать, что объединение  $R_1 \cup R_2$  эквивалентностей  $R_1$  и  $R_2$  является эквивалентностью тогда и только тогда, когда  $R_1 \cup R_2 = R_1 \cdot R_2$ .

22. Доказать, что произведение  $R_1 \cdot R_2$  двух эквивалентностей  $R_1$  и  $R_2$  тогда и только тогда является эквивалентностью, когда  $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$ .

23. Доказать, что если  $R_1$  и  $R_2$  — эквивалентности и  $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$ , то  $R_1 + R_2 = R_1 \cdot R_2$ , где  $R_1 + R_2$  — наименьшее отношение эквивалентности, включающее  $R_1 \cup R_2$ .

24. Доказать, что для всякого семейства эквивалентностей  $\{R_i\}_{i \in I}$  существует эквивалентность  $Q$  такая, что  $\bigcup_{i \in I} R_i \subseteq Q$ , и для всякого отношения эквивалентности  $R$ , если  $\bigcup_{i \in I} R_i \subseteq R$ , то  $Q \subseteq R$ .

25. Доказать, что

$$p_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_n^i p_i \quad (p_0 = 1),$$

где  $p_n$  — число эквивалентностей на множестве из  $n$  элементов.

26. Доказать, что множество всех подмножеств данного множества частично упорядочено отношением включения  $\subseteq$ .

27. Пусть  $\leq$  и  $<$  на множестве  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  определяются обычным образом. Доказать, что  $< \cdot < \neq <$ ;  $\leq \cdot < = <$ ;  $\leq \cdot \geq = \mathcal{N}^2$ .

28. Доказать, что  $i_A$  есть частичный порядок на  $A$ .

29. Пусть  $a \leq b \Leftrightarrow a, b \in \mathcal{N}$  и  $a$  делит  $b$ . Считаем, что 0 делит 0. Доказать, что  $\leq$  — частичный порядок на  $\mathcal{N}$ .

30. (а) Доказать, что всякое частично упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента.

(б) Доказать, что наибольший (наименьший) элемент частично упорядоченного множества является единственным максимальным (минимальным) элементом.

(в) Построить пример частично упорядоченного множества, имеющего точно один минимальный элемент, но не имеющего наименьшего элемента.

31. Доказать, что если  $R$  — частичный порядок, то  $R^{-1}$  — частичный порядок.

32. Показать, что если  $\{R_i\}_{i \in I}$  — система частичных порядков на множестве  $A$ , то  $\bigcap_{i \in I} R_i$  — частичный порядок на множестве  $A$ .

33. Доказать, что отношение  $R$  на множестве  $A$  есть предпорядок тогда и только тогда, когда  $R = (R \cdot R) \cup i_A$ .

34. Пусть  $R$  — отношение предпорядка на  $A$ . Положим

$$a \sim b \Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in R \text{ и } \langle b, a \rangle \in R.$$

Доказать, что:

(а)  $\sim$  есть отношение эквивалентности на  $A$ ;

(б) если  $a \sim a_1$ ,  $b \sim b_1$ ,  $\langle a, b \rangle \in R$ , то  $\langle a_1, b_1 \rangle \in R$ ;

(в)  $R_1$  есть отношение частичного порядка на  $A/\sim$ , где

$$\langle [a], [b] \rangle \in R_1 \Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in R.$$

35. Доказать, что если  $R$  — частичный (линейный, полный) порядок на  $X$  и  $A \subseteq X$ , то  $R \cap A^2$  есть частичный (линейный, полный) порядок на  $A$ .

36. Пусть  $\leq$  — частичный порядок на  $A$ . Доказать, что  $<$  иррефлексивно и транзитивно.

37. Доказать, что если некоторое отношение  $<$  на  $A$  иррефлексивно и транзитивно, то отношение

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ или } x = y$$

есть частичный порядок на  $A$ .

38. Показать, что если  $A$  и  $A_1$  — частично упорядоченные множества и  $f: A \rightarrow A_1$  — монотонная функция, осуществляющая взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $A_1$ , то  $f^{-1}$  может не быть монотонной.

Рассмотреть случай, когда  $A$  — линейно упорядоченное множество.

39. Доказать, что любое частично упорядоченное множество  $A$  изоморфно некоторой системе подмножеств множества  $A$ , упорядоченной включением  $\subseteq$ .

40. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  — линейные порядки на множестве  $A$ . Когда  $R_1 \cdot R_2$  — линейный порядок?

41. (а) Доказать, что любое непустое конечное частично упорядоченное множество  $A$  содержит минимальный и максимальный элементы.

(б) Пусть частично упорядоченное множество  $A$  конечно. Доказать, что для любого элемента  $a \in A$  существуют элементы  $b$  и  $c$  из  $A$  такие, что  $a \leq b$  и  $b$  есть максимальный элемент в  $A$ ;  $c \leq a$  и  $c$  есть минимальный элемент в  $A$ .

42. Построить линейный порядок на множестве:

(а)  $\mathcal{N}^2$ ;

(б)  $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}^2 \cup \mathcal{N}^3 \cup \dots \cup \mathcal{N}^n \cup \dots$ ;

(в)  $\mathcal{B}$  комплексных чисел.

43. Доказать, что любое конечное множество можно линейно упорядочить.

44. Доказать, что всякий частичный порядок  $R$  на конечном множестве  $A$  может быть продолжен до линейного порядка  $R \subseteq Q$  на множестве  $A$  (см. также задачу 69 из § 5).

45. Пусть  $A$  — частично упорядоченное множество, в котором каждая цепь имеет не более  $m$  элементов, а любое подмножество попарно несравнимых элементов состоит не более чем из  $n$  элементов. Показать, что  $A$  имеет не более  $m \cdot n$  элементов.

46. Пусть  $\leq_A$  есть частичный порядок на множестве  $A$ ,  $\leq_B$  — частичный порядок на множестве  $B$ . Назовем *прямым произведением частично упорядоченных множеств  $A$  и  $B$*  множество  $A \times B$  с заданным на нем отношением  $\leq$ :

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 \leq_A a_2 \text{ и } b_1 \leq_B b_2.$$

Доказать, что  $\leq$  есть частичный порядок на  $A \times B$ .

47. Пусть  $A$  — частично упорядоченное множество,  $a, b \in A$  и  $a \leq b$ . Назовем *сегментом* множество  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ . Показать, что множество всех сегментов множества  $A$ , частично упорядоченное по включению, изоморфно некоторому подмножеству прямого произведения  $A$  и двойственного к нему частично упорядоченного множества.

48. Назовем частично упорядоченное множество  $A$  *самодвойственным*, если оно изоморфно двойственному к нему частично упорядоченному множеству. Доказать, что:

(а) имеются в точности два неизоморфных частично упорядоченных двухэлементных множества, каждое из которых самодвойственно;

(б) имеется пять попарно неизоморфных частично упорядоченных множеств, имеющих три элемента, и три из них самодвойственны.

49\*. Будем говорить, что частично упорядоченное множество  $A$  удовлетворяет:

(1) *условию минимальности*, если всякое непустое подмножество  $M$  множества  $A$  обладает по крайней мере одним минимальным элементом;

(2) *условию обрыва убывающих цепей*, если всякая строго убывающая цепь в  $A$  конечна;

(3) *условию индуктивности*, если для любого свойства  $T$  выполнено следующее:

пусть для любого элемента  $a \in A$  из справедливости свойства  $T$  для всех элементов, строго меньших  $a$ , вытекает справедливость  $T$  для  $a$ ; тогда свойством  $T$  обладают все элементы множества  $A$ .

Доказать эквивалентность всех этих условий.

50. Доказать, что частично упорядоченное множество удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда все его цепи вполне упорядочены.

51\*. Описать все линейно упорядоченные множества  $A$ , обладающие таким свойством, что для любых  $a \leq b$  существует только конечное число  $c$  таких, что  $a \leq c \leq b$ .

52. Найти все множества  $M$  такие, что существует полный порядок  $R$  такой, что  $R^{-1}$  также является полимым порядком на  $M$ .

53. Пусть  $\varphi: A \times A \rightarrow A$  и для всех  $x, y, z \in A$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x),$$

$$\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z),$$

$$\varphi(x, x) = x.$$

Определим  $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x, y) = x$ . Доказать, что:

(а)  $\leq$  есть частичный порядок на  $A$ ;

(б)  $\varphi(x, y)$  есть точная нижняя грань относительно порядка  $\leq$ .

54. Доказать, что любое подмножество множества  $P(A)$ , частично упорядоченное по включению, имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань.

55. Доказать, что:

(а) любое линейно упорядоченное множество есть решетка;

(б) семейство всех эквивалентностей на множестве  $A$  есть решетка.

56. Доказать, что в решетке любой максимальный элемент является наибольшим, а любой минимальный элемент является наименьшим.

57. Доказать, что в любой конечной решетке существуют наибольший и наименьший элементы.

58. Привести примеры решеток:

- (а) без наибольшего элемента, но с наименьшим элементом;
- (б) без наименьшего элемента, но с наибольшим элементом;
- (в) без наибольшего и без наименьшего элементов.

59. Доказать, что в любой решетке выполнены тождества:

$$\begin{aligned} (l_1) \quad x \cup y &= y \cup x, & (l_2) \quad x \cap y &= y \cap x, \\ (l_3) \quad x \cup (y \cap z) &= (x \cup y) \cap z, & (l_4) \quad x \cap (y \cup z) &= (x \cap y) \cup z, \\ (l_5) \quad (x \cap y) \cup y &= y, & (l_6) \quad x \cap (x \cup y) &= x. \end{aligned}$$

60. Пусть на множестве  $M$  заданы двуместные функции  $\cup$  и  $\cap$ , удовлетворяющие тождествам  $(l_1) - (l_6)$  из предыдущей задачи.

(а) Доказать, что для любых  $x, y \in M$   $x \cup y = y$  тогда и только тогда, когда  $x \cap y = x$ .

(б) Определим  $x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x$ . Доказать, что  $M$  есть решетка относительно  $\leq$ , причем точная нижняя и точная верхняя грани элементов  $x$  и  $y$  совпадают с  $x \cap y$  и  $x \cup y$  соответственно.

61. Доказать, что во всякой булевой алгебре  $M$ :

- (а) существует наименьший элемент  $0$  и наибольший элемент  $1$ ;
- (б) для всякого  $a \in M$  дополнение  $(-a)$  единственно;
- (в)  $b = -a \Leftrightarrow a \cap b = 0$  и  $a \cup b = 1$ ;
- (г)  $-(a \cap b) = (-a) \cup (-b)$ ;
- (д)  $-(a \cup b) = (-a) \cap (-b)$ ;
- (е)  $a \leq b \Leftrightarrow a \cap (-b) = 0$ .

62. Доказать, что алгебра подмножеств, упорядоченная включением, есть булева алгебра.

63. Доказать, что  $1 \in D$  и  $0 \notin D$  для любого фильтра  $D$ .

64. Пусть  $M$  — булева алгебра,  $A \subseteq M$ . Доказать, что если  $a_1 \cap \dots \cap a_n \neq 0$  для любого  $n > 0$  и любых элементов  $a_1, \dots, a_n \in A$ , то множество

$$D = \{x \mid x \in M, a_1 \cap \dots \cap a_n \leq x \text{ для некоторых } a_1, \dots, a_n \in A\}$$

есть фильтр на  $M$ .

65. Пусть  $D$  — фильтр на булевой алгебре  $M$  и  $(x \cup y) \in D$ . Доказать, что существует фильтр  $D_1 \supseteq D$  такой, что  $x \in D_1$  или  $y \in D_1$ .

66. Доказать, что для любого фильтра  $D$  следующие условия эквивалентны:

- (а)  $D$  есть максимальный фильтр;
- (б)  $D$  есть простой фильтр;
- (в)  $D$  есть ультрафильтр.

67\*. Доказать, что любой фильтр на булевой алгебре  $M$  содержится в некотором максимальном фильтре на  $M$ .

68. Доказать, что для любых элементов  $a, b$  булевой алгебры  $M$ , если неверно, что  $a \leq b$ , то существует простой фильтр  $D$  такой, что  $a \in D$  и  $b \notin D$ .

69. Пусть  $M$  — булева алгебра,  $\mathcal{P}$  — множество всех простых фильтров на  $M$ . Положим для  $a \in M$

$$h(a) = \{D \mid a \in D \in \mathcal{P}\}.$$

Доказать, что множество

$$S = \{h(a) \mid a \in M\}$$

есть алгебра подмножеств множества  $\mathcal{P}$ .

70. Доказать, что любая булева алгебра изоморфна некоторой алгебре подмножеств подходящего множества (*теорема Стоуна*).

71. Доказать, что любой фильтр на конечной булевой алгебре имеет наименьший элемент.

72. Доказать, что любая конечная булева алгебра изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого множества.

#### § 4. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество  $A$  называется *эквивалентным* множеству  $B$  (символически  $A \sim B$ ), если между  $A$  и  $B$  можно установить взаимно однозначное соответствие.

*Мощностью* множества  $A$  называется класс всех множеств, эквивалентных множеству  $A$ , и обозначается через  $\bar{A}$ . Эквивалентные множества называются также *равномощными*.

Обозначим через  $n$  мощность множества  $\mathcal{N}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , где  $n \in \mathcal{N}$ . Каждое множество  $A$ , эквивалентное  $\mathcal{N}_n$  для некоторого  $n$ , называется *конечным*, а  $n$  — *числом элементов множества  $A$* . Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Каждое множество  $A$ , эквивалентное множеству  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , называется *счетным* и его мощность обозначается через  $\aleph_0$ .

Каждое множество  $A$ , эквивалентное множеству действительных чисел  $\mathcal{Q}$ , называется *континуальным* и его мощность обозначается через  $c$ .

Мощности произвольных множеств называются *кардинальными числами*. Кардинальные числа конечных множеств называются *конечными*, для бесконечных множеств — *бесконечными*. Кардинальное число  $s$  называется *мощностью континуума*.

Будем говорить, что  $\bar{A} \leq \bar{B}$ , если  $A$  эквивалентно некоторому подмножеству множества  $B$ . Если  $\bar{A} \leq \bar{B}$ , а  $A$  и  $B$  не эквивалентны, то скажем, что  $\bar{A} < \bar{B}$ .

1. Доказать, что:

- (а)  $A \sim A$  (рефлексивность);
- (б) если  $A \sim B$ , то  $B \sim A$  (симметричность);
- (в) если  $A \sim B$  и  $B \sim C$ , то  $A \sim C$  (транзитивность).

2. Доказать, что:

- (а)  $A \sim B \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$ ;
- (б)  $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$ ,  $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$  и  $\bar{A}_1 \leq \bar{B}_1 \Rightarrow \bar{A}_2 \leq \bar{B}_2$ ;
- (в) если существует функция из  $A$  на  $B$ , то  $\bar{B} \leq \bar{A}$ .

3\*. Пусть  $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$  и  $A \sim A_2$ . Доказать, что  $A \sim A_1$ .

4. Доказать, что если  $\bar{A} \leq \bar{B}$  и  $\bar{B} \leq \bar{A}$ , то  $\bar{A} = \bar{B}$  (теорема Кантора—Бернштейна).

5. Доказать, что:

- (а) всякое подмножество конечного множества конечно;
- (б) объединение конечного числа конечных множеств конечно;
- (в) прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно.

6. (а) Доказать, что конечное множество не эквивалентно никакому своему собственному подмножеству и никакому собственному надмножеству.

(б) Доказать, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов.

(в) Доказать, что кардинальных чисел бесконечно много.

7. Доказать, что из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество.

8. Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому собственному подмножеству.

9. Показать, что всякое подмножество счетного множества счетно или конечно.

10. (а) Пусть область определения функции счетна. Доказать, что область значений этой функции конечна или счетна.

(б) Доказать, что непустое множество  $A$  является счетным или конечным тогда и только тогда, когда оно есть множество значений некоторой функции из  $\mathcal{N}$  в  $A$ .

11. Доказать, что если из счетного множества удалить конечное подмножество, то оставшееся множество будет счетным.

12. Доказать, что:

(а) если  $A$  и  $B$  счетны, то  $A \cup B$  счетно;

(б) если все  $A_i$  конечны, непусты и попарно не пересекаются, то  $\bigcup_{i \in \mathcal{N}} A_i$  счетно;

(в) если все  $A_i$  счетны, то  $\bigcup_{i \in \mathcal{N}} A_i$  счетно.

13. Доказать, что:

(а) если  $A$  бесконечно и  $B$  — конечное или счетное множество, то  $A \cup B \sim A$ ;

(б) если  $A$  бесконечно и несчетно,  $B$  конечно или счетно, то  $A \setminus B \sim A$ .

14. Доказать, что если  $A_1, \dots, A_n$  ( $1 \leq n$ ) счетны, то счетно множество  $A_1 \times \dots \times A_n$ .

15. Доказать, что:

(а) множество целых чисел счетно;

(б) множество рациональных чисел счетно;

(в) множество рациональных чисел сегмента  $[a, b]$  счетно при  $a < b$ ;

(г) множество пар  $\langle x, y \rangle$ , где  $x$  и  $y$  — рациональные числа, счетно.

16. Доказать, что множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого счетного множества, есть счетное множество.

17. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

18. Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

19. Доказать счетность множества алгебраических чисел, т. е. чисел, являющихся корнями многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами.

20. Доказать, что любое множество попарно непересекающихся открытых интервалов на действительной прямой не более чем счетно.

21\*. Доказать, что мощность любого множества попарно непересекающихся букв  $T$  на плоскости не более чем счетна.



22. Доказать, что если  $A \subseteq \mathcal{Q}$  и существует  $\delta > 0$  такое, что для всех различных элементов  $x, y$  из  $A$  справедливо  $|x - y| \geq \delta$ , то  $A$  конечно или счетно.

23. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции на действительной оси не более чем счетно.

24. Доказать, что:

(а)  $(0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, 1] \sim [0, 1)$ ;

(б)  $[a, b] \sim [c, d]$ , где  $a < b, c < d$ ;

(в)  $[a, b] \sim \mathcal{Q}$ .

25. Доказать, что множества точек квадрата и отрезка эквивалентны.

26. Доказать, что множества точек двух окружностей эквивалентны.

27. Доказать, что  $\mathcal{Q}^n \sim \mathcal{Q}^m$  ( $1 \leq n, m$ ).

28. Установить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и плоскости.

29\*. Доказать, что множество точек сегмента  $[0, 1]$  несчетно.

30. Какова мощность множества иррациональных чисел?

31. Доказать существование трансцендентных (неалгебраических) чисел.

32. Доказать, что объединение конечного или счетного числа множеств мощности  $s$  имеет мощность  $s$ .

33\*. Доказать, что множество всех счетных последовательностей натуральных чисел имеет мощность  $s$ .

34. Доказать, что:

(а) множество всех счетных последовательностей, составленных из 0 и 1, имеет мощность  $s$ ;

(б)  $\overline{P(\mathcal{N})}$   $s$ .

35. Доказать, что:

(а) если  $\overline{A}_i = s$  для всех  $i \in I$ , то  $\overline{\overline{A}_1 \times \dots \times \overline{A}_n} = s$ ;

(б) если  $\overline{A}_i = s$  для всех  $i \in I$  и  $\overline{I} = s$ , то  $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = s$ .

36. Какова мощность множества:

(а) всех счетных последовательностей действительных чисел;

(б) всех непрерывных функций на действительной прямой;

(в) всех монотонных функций на действительной прямой?

37. Пусть  $A$  — счетное множество точек на действительной прямой. Можно ли выбрать  $a$  так, чтобы

$$\{x + a \mid x \in A\} \cap A = \emptyset?$$

38\*. Доказать, что множество действительных функций, заданных на сегменте  $[0, 1]$ , имеет мощность, большую  $c$ .

39. Доказать, что мощность множества всех функций, определенных на сегменте  $[a, b]$  при  $a < b$  и разрывных хотя бы в одной точке, больше  $c$ .

40\*. Доказать, что множество всех подмножеств  $P(A)$  множества  $A$  имеет мощность, большую  $A$ .

41. Пусть  $A$  — семейство множеств такое, что для каждого множества  $A$  из  $A$  существует множество  $B$  из  $A$ , не эквивалентное никакому подмножеству множества  $A$ . Доказать, что объединение всех множеств из  $A$  не эквивалентно никакому подмножеству множества из  $A$ .

42. Доказать, что не существует множества, содержащего все множества.

43. Будем говорить, что последовательность натуральных чисел  $b_1, b_2, \dots$  растет быстрее, чем последовательность  $a_1, a_2, \dots$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0. \text{ Доказать, что:}$$

(а) для каждой последовательности натуральных чисел существует последовательность, растущая быстрее ее;

(б) если множество последовательностей  $A$  обладает свойством, что для каждой последовательности  $a_1, a_2, \dots$  существует последовательность из  $A$ , растущая быстрее, чем  $a_1, a_2, \dots$  то множество  $A$  не счетно.

## § 5. ОРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Пусть  $A$  и  $B$  — линейно упорядоченные множества. Множество  $A$  называется *подобным*  $B$  (символически  $A \approx B$ ), если  $A$  и  $B$  изоморфны как частично упорядоченные множества.

*Порядковым типом* линейно упорядоченного множества  $A$  называется класс всех линейно упорядоченных множеств, подобных  $A$ , и обозначается через  $\bar{A}$ . *Мощностью порядкового типа*  $\bar{A}$  называется  $\bar{A}$ . Будем считать  $0$  порядковым типом  $\emptyset$ .

Обозначим через  $n$  порядковый тип множества

$$\mathcal{N}_n = \{0, 1, \dots, n-1\},$$

где  $0 < 1 < \dots < n-1$  и  $n \in \mathcal{N}$ . Обозначим через  $\omega, \pi, \eta, \lambda$  порядковые типы множеств натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел и действительных чисел соответственно с их естественным порядком.

Если  $\alpha$  есть порядковый тип множества  $A$ , то через  $\alpha^*$  обозначим порядковый тип множества  $A$  с двойственным порядком.

Назовем *начальным отрезком*, *отсекаемым элементом*  $a \in A$  от линейно упорядоченного множества  $A$ , множество

$$A_a = \{x \mid x \in A, x < a\}.$$

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — порядковые типы линейно упорядоченных непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  с порядками  $\leq_A$  и  $\leq_B$  соответственно. Суммой порядковых типов  $\alpha$  и  $\beta$  называется порядковый тип множества  $A \cup B$  с порядком  $\leq$ , определенным следующим образом:

$$x \leq y \Leftrightarrow (x \in A, y \in B) \text{ или } (x, y \in A \text{ и } x \leq_A y) \text{ или } (x, y \in B \text{ и } x \leq_B y).$$

Сумма порядковых типов  $\alpha$  и  $\beta$  обозначается через  $\alpha + \beta$ .

Пусть дано семейство попарно непересекающихся линейно упорядоченных множеств  $A_i$  с порядковыми типами  $\alpha_i$  и порядками  $\leq_i$  соответственно, где  $i \in I$ , а  $I$  линейно упорядочено отношением  $\leq_I$ . Суммой порядковых типов  $\alpha_i$  называется порядковый тип множества  $\bigcup_{i \in I} A_i$  с порядком  $\leq$ , определенным следующим образом:

$$x \leq y \Leftrightarrow (x, y \in A_{i_1} \text{ и } x \leq_{i_1} y \text{ для некоторого } i_1 \in I) \text{ или}$$

$$(x \in A_{i_1}, y \in A_{i_2} \text{ для некоторых } i_1 \leq_I i_2).$$

Сумма порядковых типов  $\alpha_i$  обозначается через  $\sum_{i \in I} \alpha_i$ .

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — порядковые типы линейно упорядоченных множеств  $A$  и  $B$  с порядками  $\leq_A$  и  $\leq_B$  соответственно. Произведением порядковых типов  $\alpha$  и  $\beta$  называется порядковый тип множества  $A \times B$  с порядком  $\leq$ , определенным следующим образом:

$$\langle x_1, y_1 \rangle \leq \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow (y_1 <_B y_2) \text{ или } (y_1 = y_2 \text{ и } x_1 \leq_A x_2).$$

Произведение порядковых типов  $\alpha$  и  $\beta$  обозначается через  $\alpha \cdot \beta$ .

Обозначим через  $\alpha^n$  выражение  $(\dots (\alpha \cdot \alpha) \cdot \dots \cdot \alpha)$  ( $n$  раз).

Порядковые типы вполне упорядоченных множеств называются *ординальными* или *порядковыми числами*. Если  $\alpha$  и  $\beta$  — порядковые числа, то говорят, что  $\alpha < \beta$ , если любое множество  $A$  порядкового типа  $\alpha$  изоморфно некоторому начальному отрезку множества  $B$  порядкового типа  $\beta$ ;  $\alpha \leq \beta$  означает, что  $\alpha < \beta$  или  $\alpha = \beta$ .

Порядковое число  $\alpha$  называется *предельным*, если  $\alpha \neq 0$  и

$$\alpha = \sup\{\beta \mid \beta \text{ — порядковое число и } \beta < \alpha\}.$$

*Возведение в степень для порядковых чисел* определяется следующим образом:

$$\alpha^0 = 1,$$

$$\alpha^{\xi+1} = \alpha^\xi \cdot \alpha,$$

$$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \beta\} \text{ для предельного порядкового числа } \beta.$$

1. Доказать, что если линейно упорядоченные множества подобны, то они и эквивалентны.

2. Доказать, что любое множество  $A$ , эквивалентное линейно упорядоченному множеству  $B$ , можно линейно упорядочить так, что  $A$  станет подобным  $B$ .

3. Пусть  $A, B, C$  — линейно упорядоченные множества. Доказать, что:

(а)  $A \simeq A$  (рефлексивность);

(б) если  $A \simeq B$ , то  $B \simeq A$  (симметричность);

(в) если  $A \simeq B$  и  $B \simeq C$ , то  $A \simeq C$  (транзитивность).

4. Пусть  $A$  и  $B$  — линейно упорядоченные множества. Доказать, что если  $\overline{A} = \overline{B}$ , то  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , но обратное неверно.

5. Доказать, что множество из  $n$  элементов можно линейно упорядочить  $n!$  способами.

6. Доказать, что все конечные линейно упорядоченные множества одинаковой мощности подобны между собой.

7. Доказать, что для бесконечных множеств утверждение предыдущей задачи неверно.

8. Доказать, что линейно упорядоченные множества подобны тогда и только тогда, когда между ними существует взаимно однозначное соответствие, являющееся монотонным отображением.

9. Доказать, что для любого линейно упорядоченного множества  $A$  и любых  $a, b \in A$ :

(а)  $a \notin A_a$ ;

(б) если  $a$  — наименьший элемент  $A$ , то  $A_a = \emptyset$ ;

(в)  $A_a$  — линейно упорядоченное множество;

(г) если  $a < b$ , то  $(A_b)_a = A_a$ .

10. Доказать, что множество всех отрезков линейно упорядоченного множества  $A$ , упорядоченное отношением включения, подобно  $A$ .

11. Доказать, что бесконечное линейно упорядоченное множество  $A$  имеет порядковый тип  $\omega$  тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

- (а) в  $A$  имеется наименьший элемент  $a_0$ ;
- (б) для любого  $a \in A$  существует точная нижняя грань  $a'$  в множестве  $\{x \mid a < x, x \in A\}$  ( $a'$  называется *непосредственно следующим за  $a$* );
- (в) для любого подмножества  $X$  множества  $A$  из того, что  $a_0 \in X$  и  $X$  содержит вместе с каждым своим элементом непосредственно следующий за ним элемент, следует, что  $X = A$ .

12. Доказать, что бесконечное линейно упорядоченное множество имеет порядковый тип  $\omega$  тогда и только тогда, когда все его начальные отрезки конечны.

13\*. Доказать, что любое счетное линейно упорядоченное множество  $A$  имеет порядковый тип  $\eta$  тогда и только тогда, когда  $A$  удовлетворяет следующим условиям:

- (а) в  $A$  нет наименьшего и наибольшего элементов;
- (б) для любых  $x, y \in A$  таких, что  $x < y$ , существует  $z \in A$  такой, что  $x < z < y$  (такой порядок называется *плотным*).

14\*. Доказать, что всякое счетное линейно упорядоченное множество подобно некоторому подмножеству множества  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел.

15\*. Пусть  $A$  — линейно упорядоченное множество, содержащее не менее двух элементов,  $B = A \cup A^2 \cup \dots \cup A^n \cup \dots$ . Положим для любых  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in A$  ( $1 \leq n, m$ )

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \leq \langle y_1, \dots, y_m \rangle \Leftrightarrow (n \leq m \text{ и } x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n) \text{ или}$$

$$(x_1 = y_1, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_i < y_i \text{ для некоторого } i \leq n \text{ и } i \leq m).$$

Доказать, что:

- (а)  $\leq$  есть линейный порядок на  $B$ ;
- (б) любое счетное линейно упорядоченное множество подобно некоторому подмножеству множества  $B$ .

16. Доказать, что порядковый тип любого интервала (не сегмента) действительных чисел есть  $\lambda$ .

17\*. Подмножество  $B$  линейно упорядоченного множества  $A$  с порядком  $\leq$  называется *плотным в  $A$* , если для любых  $a_1, a_2 \in A$  существует  $b \in B$  такое, что  $a_1 \leq b \leq a_2$  или  $a_2 \leq b \leq a_1$ . Доказать, что если  $A$  содержит счетное плотное в  $A$  подмножество, то  $A$  подобно некоторому

подмножеству множества действительных чисел  $\mathscr{D}$  с естественным порядком.

18. Показать, что  $(\alpha^*)^* = \alpha$  для любого порядкового типа  $\alpha$ .

19. Показать, что  $\pi^* = \pi$ ,  $\eta^* = \eta$ ,  $\lambda^* = \lambda$ ,  $\omega^* \neq \omega$ .

20. Доказать, что:

(а) для любых порядковых типов  $\alpha$  и  $\beta$  существуют и однозначно определены порядковые типы  $\alpha + \beta$  и  $\alpha \cdot \beta$ ;

(б) для любого линейно упорядоченного множества  $I$  и любого семейства порядковых типов  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  существует и однозначно определен порядковый тип  $\sum_{i \in I} \alpha_i$ .

21. Привести пример порядковых типов  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что

$$\alpha + \beta \neq \beta + \alpha.$$

22. Доказать, что:

(а)  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ;

(б)  $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ ;

(в)  $2 + 3 = 5$ ;

(г)  $1 + \omega = \omega$ , но  $\omega + 1 \neq \omega$ ;

(д)  $\omega^* + \omega = \pi$ ;

(е)  $\eta + \eta = \eta$ ;

(ж)  $\lambda + 1 + \lambda = \lambda$ ;

(з)  $\lambda + \lambda \neq \lambda$ ;

(и)  $1 + \lambda + 1$  есть порядковый тип сегмента  $[a, b]$  при  $a < b$ .

23. Привести пример порядковых типов  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что

$$\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha.$$

24. Доказать, что:

(а)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ ;

(б)  $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ ;

(в)  $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ ;

(г)  $2 \cdot 2 = 4$ ;

(д)  $\eta^2 = \eta$ ;

(е)  $\omega \cdot \eta \neq \omega \cdot (\eta + 1)$ .

25. Построить множества порядковых типов  $\omega^2$ ,  $\omega^3$ ,  $\omega^4$ , ...

26. (а) Доказать, что для любых порядковых типов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

(б) Привести пример порядковых типов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  таких, что

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

27. Пусть  $J$  и  $I$  — линейно упорядоченные множества,  $\{B_i\}_{i \in I}$  — семейство попарно непересекающихся подмножеств множества  $J$  такое, что  $\bigcup_{i \in I} B_i = J$ . Доказать, что если  $J = \sum_{i \in I} \bar{B}_i$ , то для любого се-

мейства порядковых чисел  $\{\alpha_j\}_{j \in J}$  имеем  $\sum_{j \in J} \alpha_j = \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in B_i} \alpha_j \right)$ .

28. Доказать, что  $\alpha \cdot \beta = \sum_{b \in B} \alpha_b$ , где  $\alpha_b = \alpha$  для всех  $b \in B$  и  $\bar{B} = \beta$ .

29. Доказать, что:

(а)  $(\alpha + \beta)^* = \beta^* + \alpha^*$ ;

(б)  $(\alpha \cdot \beta)^* = \alpha^* \cdot \beta^*$ ;

(в)  $\left( \sum_{i \in I} \alpha_i \right)^* = \sum_{i \in I^*} \alpha_i^*$ , где  $I$  — линейно упорядоченное множество,

а  $I^*$  есть множество  $I$  с двойственным порядком.

30. Доказать, что:

(а) всякое конечное линейно упорядоченное множество вполне упорядочено;

(б) множество  $\mathcal{N}$ , где  $0 < 1 < 2 < \dots$ , вполне упорядочено;

(в) множество  $\mathcal{N}$ , где  $0 < 2 < 4 < \dots < 1 < 3 < 5 < \dots$ , вполне упорядочено;

(г) множество  $\mathcal{N}$ , где  $\dots < 3 < 2 < 1 < 0$ , не является вполне упорядоченным.

31. Являются ли вполне упорядоченными следующие множества:

(а) множество  $\mathbb{Z}$  целых чисел с их естественным порядком;

(б) множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел с обычным порядком  $\leq$ ;

(в) множество  $\mathbb{R}$  действительных чисел с обычным порядком  $\leq$ ;

(г) множество чисел вида  $1 - \frac{1}{n}$ , где  $n$  — положительное целое число, с обычным порядком  $\leq$ ?

32. Доказать, что:

(а) всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент;

(б) каждое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено.

33. Доказать, что если  $A \sim B$  и  $A$  вполне упорядочено, то  $B$  можно вполне упорядочить так, чтобы было  $A \simeq B$ .

34. Показать, что если  $A$  — вполне упорядоченное множество, то у каждого элемента множества  $A$ , кроме наибольшего, имеется непосредственно следующий за ним элемент (см. задачу 11).

35. Можно ли во вполне упорядоченном множестве выделить бесконечную убывающую цепь элементов  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ ?

36. Доказать, что линейно упорядоченное множество вполне упорядочено тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножества типа  $\omega^*$ .

37. Пусть  $A$  — вполне упорядоченное множество. Доказать, что не существует такого монотонного взаимно однозначного соответствия  $f: A \rightarrow A$ , чтобы для некоторого элемента  $a \in A$  было  $f(a) < a$ .

38. Доказать, что вполне упорядоченное множество не может быть подобным своему отрезку или части своего отрезка.

39. Доказать, что два различных отрезка вполне упорядоченного множества не могут быть подобными.

40. Доказать, что существует не более одного изоморфизма двух вполне упорядоченных множеств.

41\*. Доказать, что из двух вполне упорядоченных множеств одно подобно другому или его отрезку.

42. Доказать, что линейно упорядоченное множество конечно тогда и только тогда, когда оно вполне упорядочено относительно заданного и относительно двойственного порядков.

43. Пусть  $A$  — вполне упорядоченное множество,  $B \subseteq A$  и для любого элемента  $x \in A$  множество  $B$  удовлетворяет условию: если  $A_x \subseteq B$ , то  $x \in B$ . Доказать, что  $B = A$  (принцип трансфинитной индукции).

44. Пусть  $\alpha, \beta$  — произвольные порядковые числа. Доказать, что:

(а)  $\alpha < \beta$  или  $\beta < \alpha$  или  $\alpha = \beta$ ;

(б) из указанных выше условий выполняется для  $\alpha$  и  $\beta$  лишь одно.

45. Пусть  $W_\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — порядковые числа. Показать, что  $\overline{W}_\alpha = \alpha$ .

46. Доказать, что всякое множество порядковых чисел вполне упорядочено.

47. Доказать, что для любого множества порядковых чисел  $S$ :

(а) существует порядковое число, большее всех чисел из  $S$ ;

(б) среди порядковых чисел, не принадлежащих множеству  $S$ , существует наименьшее.

48. Доказать, что не существует множества, содержащего все порядковые числа.

49. Доказать, что  $\alpha + 1$  есть порядковое число, непосредственно следующее за  $\alpha$  (см. задачу 11).

50. Доказать, что для любого порядкового числа  $\alpha$  имеет место одно и только одно из утверждений:

1)  $\alpha = 0$ ;



2) множество  $\{\beta \mid \beta \text{ — порядковое число и } \beta < \alpha\}$  имеет максимальный элемент;

3)  $\alpha$  — предельное порядковое число.

51\*. Доказать, что любое порядковое число представимо в виде  $\alpha + n$ , где  $\alpha$  есть предельное порядковое число или 0,  $n$  — натуральное число.

52. Доказать, что:

- (а) сумма двух порядковых чисел есть порядковое число;
- (б) произведение двух порядковых чисел есть порядковое число;
- (в) упорядоченная сумма порядковых чисел, где множество индексов вполне упорядочено, есть порядковое число.

53. Пусть  $I$  и  $\{A_i\}_{i \in I}$  линейно упорядочены. Доказать, что если  $A_i \neq \emptyset$ ,  $\sum_{i \in I} \bar{A}_i$  есть порядковое число, то  $I$  и все  $A_i$  вполне упорядочены.

54. Доказать, что:

- (а) если  $A$  и  $B$  вполне упорядочены и  $A \subseteq B$ , то  $\bar{A} \leq \bar{B}$ ;
- (б)  $\alpha \leq \alpha + \gamma$ ,  $\alpha \leq \gamma + \alpha$ ;
- (в)  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$ ;
- (г)  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ ;
- (д)  $\gamma + \alpha = \gamma + \beta \Rightarrow \alpha = \beta$ ;
- (е)  $\alpha + \gamma < \beta + \gamma \Rightarrow \alpha < \beta$ .

55. Привести пример порядковых чисел  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  таких, что

$$\alpha \neq \beta \text{ и } \alpha + \gamma = \beta + \gamma.$$

56. Доказать, что:

- (а)  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ ;
- (б)  $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$ , если  $\gamma \neq 0$ ;
- (в)  $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta \Rightarrow \alpha < \beta$ ;
- (г)  $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta \Rightarrow \alpha = \beta$ , если  $\gamma \neq 0$ ;
- (д)  $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha < \beta$ .

57. Пусть  $\beta \leq \alpha$ . Порядковое число  $\gamma$  называется *разностью*  $\alpha$  и  $\beta$  и обозначается через  $\alpha - \beta$ , если  $\alpha = \beta + \gamma$ .

Доказать, что:

- (а)  $\alpha - \beta$  существует и единственно;
- (б)  $\gamma \leq \beta < \alpha \Rightarrow \beta - \gamma < \alpha - \gamma$ ;
- (в)  $\gamma \leq \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha - \beta \leq \alpha - \gamma$ ;
- (г)  $\beta \leq \alpha \Rightarrow \gamma \cdot (\alpha - \beta) = \gamma \cdot \alpha - \gamma \cdot \beta$ .

58. Доказать, что:

- (а) если  $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$  и  $\beta_2 < \beta_1$ , то  $\alpha_1 < \alpha_2$ ;
- (б)\* если  $\gamma < \alpha\beta$ , то существуют и единственны такие  $\delta$  и  $\varepsilon$ , что  $\delta < \alpha$ ,  $\varepsilon < \beta$  и  $\gamma = \alpha \cdot \varepsilon + \delta$ ;
- (в) если  $\beta > 0$ , то для любого  $\alpha$  существуют и единственны такие  $\gamma$  и  $\delta$ , что  $\delta < \beta$  и  $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$  (теорема о делении с остатком).

59. Доказать, что для любых порядковых чисел  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ , если  $\alpha_0 \neq 0$  и  $\alpha_1 \neq 0$ , то существуют натуральное число  $n$  и порядковые числа  $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  такие, что  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > 0$  и

$$\alpha_0 = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2} = \alpha_{n-1} \cdot \beta_{n-1} + \alpha_n, \quad \alpha_{n-1} = \alpha_n \cdot \beta_n.$$

(алгоритм Евклида).

60. Пусть свойство  $P$  таково, что для любого ординального числа  $\alpha$  из того, что все ординальные числа  $\beta < \alpha$  обладают свойством  $P$ , следует, что  $\alpha$  обладает свойством  $P$ . Доказать, что все ординальные числа обладают свойством  $P$  (принцип трансфинитной индукции для ординальных чисел).

61. Доказать, что для любых порядковых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  существует и единственно  $\alpha^\beta$ .

62. Построить множество порядкового типа  $\omega^\omega$ .

63\*. Доказать, что:

(а) если  $\alpha < \beta$  и  $\gamma > 1$ , то  $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$ ;

(б)  $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ ;

(в)  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$ .

64\*. Доказать, что:

(а) если  $\omega^\gamma = \alpha + \beta$  и  $\beta \neq 0$ , то  $\beta = \omega^\gamma$ ;

(б) если  $\alpha > 1$  и  $\beta \geq 1$ , то  $\alpha^\beta \geq \alpha \cdot \beta$ ;

(в) если  $\alpha > 1$  и  $\beta \geq 1$ , то существуют и однозначно определены  $\xi, \gamma$  и  $\delta$  такие, что

$$\beta = \alpha^\xi \cdot \gamma + \delta \quad \text{и} \quad \gamma < \alpha, \quad \delta < \alpha^\xi;$$

(г) если  $\gamma > 1$  и  $1 \leq \alpha < \gamma^\delta$ , то существуют натуральное число  $n$  и такие последовательности порядковых чисел  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  и  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , что

$$\alpha = \gamma^{\delta_1} \cdot \beta_1 + \gamma^{\delta_2} \cdot \beta_2 + \dots + \gamma^{\delta_n} \cdot \beta_n,$$

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_n \quad \text{и} \quad 0 \leq \beta_i < \gamma \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \dots$$

65\*. Множество  $\mathfrak{A}$  называется транзитивным, если отношение

$$X \leq Y \Leftrightarrow (X = Y \text{ или } X \in Y)$$

вполне упорядочивает  $\mathfrak{A}$ ,  $\emptyset \in \mathfrak{A}$  и если из  $X \in Y$ ,  $Y \in \mathfrak{A}$  следует  $X \in \mathfrak{A}$ . Доказать, что для любого порядкового числа  $\alpha \geq 0$  существует и единственно транзитивное множество, упорядоченное по типу  $\alpha$ .

66\*. Следующее утверждение называется аксиомой выбора.

(1) *Аксиома выбора.* Пусть  $X_a$  — непустое множество для любого  $a \in A$ . Тогда существует функция выбора  $f: A \rightarrow \bigcup_{a \in A} X_a$  такая, что  $f(a) \in X_a$  для любого  $a \in A$ .

Доказать, что каждое из следующих утверждений эквивалентно аксиоме выбора.

(2) *Лемма Цорна.* Частично упорядоченное множество, каждое из линейно упорядоченных подмножеств которого имеет верхнюю грань, содержит максимальный элемент.

(3) *Принцип максимальности Куратовского—Хаусдорфа.* Каждая цепь частично упорядоченного множества содержится в некоторой максимальной цепи.

(4) *Аксиома Цермело.* Для любого семейства  $\mathcal{A}$  непустых попарно непересекающихся множеств существует такое множество  $S$ , что  $A \cap S$  для каждого  $A \in \mathcal{A}$  состоит ровно из одной точки.

(5) *Теорема Цермело.* Каждое множество можно вполне упорядочить.

(6) *Лемма Тейхмюллера—Тьюки.* Каждое семейство множеств, имеющее конечный характер, обладает максимальным элементом. (Семейство  $\mathcal{A}$  множеств имеет *конечный характер*, если оно удовлетворяет условию:  $X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow$  каждое конечное подмножество множества  $X$  принадлежит  $\mathcal{A}$ .)

67. Пусть  $A$  — частично упорядоченное множество, в котором каждая цепь имеет верхнюю грань, и  $a \in A$ . Доказать, что существует максимальный элемент  $m \in A$  такой, что  $m \geq a$ .

68. Пусть  $A$  — множество подмножеств множества  $B$  такое, что для каждой цепи  $C$  (порядок по включению) объединение множеств из  $C$  принадлежит  $A$ . Доказать, что тогда  $A$  имеет максимальный элемент.

69\*. Доказать, что для всякого частичного порядка  $R$  на множестве  $A$  существует линейный порядок  $L$  на множестве  $A$  такой, что  $R \subseteq L$ .

## § 6. ДЕЙСТВИЯ НАД КАРДИНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Кардинальное число  $m$  называется *суммой кардинальных чисел*  $n_1$  и  $n_2$  и обозначается через  $n_1 + n_2$ , если каждое множество мощности  $m$  эквивалентно объединению двух непересекающихся множеств мощностей  $n_1$  и  $n_2$ . Аналогично, кардинальное число  $m$  называется *суммой кардинальных чисел*  $n_i$  ( $i \in I$ ) и обозначается через

$m = \sum_{i \in I} n_i$ , если каждое множество мощности  $m$  эквивалентно  $\bigcup_{i \in I} A_i$ , где  $A_i = n_i$  и все  $A_i$  попарно не пересекаются.

Кардинальное число  $m$  называется *произведением кардинальных чисел*  $n_1$  и  $n_2$  и обозначается через  $n_1 \cdot n_2$ , если каждое множество мощности  $m$  эквивалентно  $A \times B$ , где  $A$  и  $B$  имеют мощности  $n_1$ ,  $n_2$ . Аналогично, кардинальное число  $m$  называется *произведением кардинальных чисел*  $n_i$  ( $i \in I$ ) и обозначается  $m = \prod_{i \in I} n_i$ , если каждое множество мощности  $m$  эквивалентно  $\prod_{i \in I} A_i$ , где  $\bar{A}_i = n_i$ .

Кардинальное число  $m$  называется *степенью кардинальных чисел*  $n_1$  и  $n_2$  и обозначается через  $n_1^{n_2}$ , если каждое множество мощности  $m$  эквивалентно  $A^B$ , где  $A$  и  $B$  имеют мощности  $n_1$  и  $n_2$ .

1. Доказать, что для произвольных мощностей  $m$  и  $n$  выполняется одно и только одно из условий  $m=n$ ,  $m < n$  или  $n < m$  (*трихотомия*).

2. Доказать, что кардинальные числа линейно упорядочены отношением  $\leq$ .

3. Доказать, что среди кардинальных чисел нет наибольшего.

4. Доказать, что:

- (а)  $3 + 5 = 8$ ;
- (б)  $n + \aleph_0 = \aleph_0$ , где  $n$  конечное;
- (в)  $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ;
- (г)  $\aleph_0 + c = c$ ;
- (д)  $c + c = c$ .

5. Доказать, что:

- (а) для любых множеств  $A_1, A_2$  существуют множества  $B_1, B_2$  такие, что  $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$  и  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ;
- (б) сумма двух кардинальных чисел всегда существует.

6. Доказать для произвольных кардинальных чисел:

- (а)  $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ ;
- (б)  $n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$ ;
- (в)  $n + 0 = n$ .

7. Пусть  $A, B, C, A_1, \dots, A_n$  — конечные множества. Доказать, что:

- (а)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} + \bar{B} - \overline{A \cap B}$ ;

$$(б) \overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} - \overline{A \cap B} - \overline{A \cap C} - \overline{B \cap C} + \overline{A \cap B \cap C};$$

$$(в) d\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ i_1 < \dots < i_k}}^n \overline{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} + \dots;$$

$$(г) \overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ i_1 < \dots < i_k}}^n \overline{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} + \dots$$

8. (а) Доказать, что  $n < m \Rightarrow n+1 \leq m$ .

(б) Привести пример таких кардинальных чисел  $n$  и  $m$ , что  $n+1 \leq m$ , но  $m \leq n$ .

9. Доказать, что  $n \leq m$  тогда и только тогда, когда существует  $n_1$  такое, что  $n + n_1 = m$ . Показать, что такое  $n_1$  определяется не однозначно.

10. Доказать, что:

$$(а) 3 \cdot 5 = 15;$$

$$(б) \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0;$$

$$(в) \aleph_0 \cdot c = c;$$

$$(г) c \cdot c = c.$$

11. Доказать, что:

$$(а) \text{ если } A \sim B \text{ и } C \sim D, \text{ то } A \times C \sim B \times D;$$

(б) произведение двух кардинальных чисел всегда существует.

12. Доказать для произвольных кардинальных чисел:

$$(а) n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1;$$

$$(б) n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) = (n_1 \cdot n_2) \cdot n_3;$$

$$(в) n_1 \cdot (n_2 + n_3) = (n_1 \cdot n_2) + (n_1 \cdot n_3);$$

$$(г) n \cdot 1 = n;$$

$$(д) n \cdot 0 = 0;$$

(е)\*  $n \cdot m = n$ , если  $m$  — конечное, а  $n$  — бесконечное кардинальное число;

(ж)\*  $n \cdot \aleph_0 = n$ , если  $n$  — бесконечное кардинальное число.

13\*. Доказать, что  $n^2 = n$ , если  $n$  — бесконечное кардинальное число.

14. Доказать, что если  $n$  и  $m$  — кардинальные числа и одно из них бесконечно, то  $n \cdot m = n + m = \max(n, m)$ , если  $n \neq 0$  и  $m \neq 0$ .

15. Доказать, что:

$$(а) 2^{\aleph_0} = c;$$

$$(б) \aleph_0^{\aleph_0} = c;$$

$$(в) c^{\aleph_0} = c.$$

16. Доказать, что для двух кардинальных чисел  $n$  и  $m$  всегда существует  $n^m$ .

17. Доказать для произвольных кардинальных чисел  $m$ ,  $n$  и  $p$ :

$$(а) m^{n+p} = m^n \cdot m^p;$$

$$(б) (m \cdot n)^p = m^p \cdot n^p;$$

$$(в) (m^n)^p = m^{n \cdot p};$$

$$(г) m^1 = m;$$

$$(д) 1^m = 1.$$

$$18. \text{Доказать, что } \overline{P(A)} = 2^{\overline{A}}.$$

19. Доказать для произвольных кардинальных чисел:

$$(а) \text{если } m \leq n \text{ и } n \leq p, \text{ то } m \leq p;$$

$$(б) \text{если } m \leq n, \text{ то } m + p \leq n + p;$$

$$(в) \text{если } m \leq n, \text{ то } m \cdot p \leq n \cdot p;$$

$$(г) \text{если } m \leq n, \text{ то } m^p \leq n^p;$$

$$(д) \text{если } m \leq n, \text{ то } p^m \leq p^n;$$

$$(е) \text{если } m, n > 1, \text{ то } m + n \leq m \cdot n;$$

$$(ж) m + n = n \text{ тогда и только тогда, когда } \aleph_0 \cdot m \leq n;$$

$$(з) \text{если } n + m = n \text{ и } n_1 \geq n, \text{ то } n_1 + m = n_1;$$

$$(и) n + m = n \text{ тогда и только тогда, когда } n + k \cdot m = n \text{ } (k \in \mathcal{N}, k > 0);$$

$$(к) n + m = n \text{ тогда и только тогда, когда } n + \aleph_0 \cdot m = n;$$

$$(л) m < 2^m.$$

20. Доказать для произвольных кардинальных чисел:

$$(а) \text{если } 2^m \geq \aleph_0, \text{ то } 2^m \geq 2^{\aleph_0};$$

$$(б) \text{если } m^n = \aleph_0, \text{ то } m = \aleph_0, \text{ а } n \text{ конечное.}$$

21. Доказать для произвольных кардинальных чисел:

$$(а) \text{если } n \geq \aleph_0, \text{ то } 2^n = n^n;$$

$$(б) \text{если } 1 < m \leq n, \aleph_0 \leq n, \text{ то } m^n = n^n.$$

22. Доказать для произвольных кардинальных чисел:

$$(а) \text{если } \overline{I} = m, n_i = n \text{ для всех } i \in I, \text{ то } m \cdot n = \sum_{i \in I} n_i;$$

$$(б) \text{если } m + p = n + p \text{ и } p \text{ конечно, то } m = n;$$

$$(в) \text{если } 2 \cdot n_1 = 2 \cdot n_2, \text{ то } n_1 = n_2.$$

23. Доказать, что

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \leq \sum_{i \in I} \bar{A}_i.$$

24. (а) Пусть  $\{m_i\} (i \in I)$  — семейство кардинальных чисел, причем  $m_i = 0$  для  $i \in J \subseteq I$ . Доказать, что

$$\sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I \setminus J} m_i.$$

(б) Пусть  $\{m_i\} (i \in I)$  — семейство кардинальных чисел, причем  $m_i = 1$  для  $i \in J \subseteq I$ . Доказать, что

$$\prod_{i \in I} m_i = \prod_{i \in I \setminus J} m_i.$$

(в) Доказать, что  $\prod_{i \in I} m_i = 0$  тогда и только тогда, когда существует  $i_0 \in I$  такое, что  $m_{i_0} = 0$ .

25. Доказать, что если  $\varphi$  — подстановка на множестве  $I$ , то:

$$(а) \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} m_{\varphi(i)};$$

$$(б) \prod_{i \in I} m_i = \prod_{i \in I} m_{\varphi(i)}.$$

26. Пусть  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$  есть разбиение множества  $J$  на непустые попарно непересекающиеся множества. Доказать, что:

$$(а) \sum_{i \in I} m_i = \sum_{\lambda \in L} \left( \sum_{i \in A_\lambda} m_i \right);$$

$$(б) \prod_{i \in I} m_i = \prod_{\lambda \in L} \left( \prod_{i \in A_\lambda} m_i \right).$$

27. Доказать, что:

$$(а) n \cdot \sum_{i \in I} (n \cdot m_i) = \sum_{i \in I} (n \cdot m_i);$$

$$(б) \prod_{i \in I} \left( \sum_{j \in J_i} m_{ij} \right) = \sum_{f \in K} \prod_{i \in I} m_{if(i)}, \text{ где } K = \prod_{i \in I} J_i.$$

28. Доказать, что если  $m_i \leq n_i$  для всех  $i \in I$ , то:

$$(а) \sum_{i \in I} m_i \leq \sum_{i \in I} n_i;$$

$$(б) \prod_{i \in I} m_i \leq \prod_{i \in I} n_i.$$

29. Пусть  $J \subseteq I$ . Доказать, что:

$$(а) \sum_{i \in J} m_i \leq \sum_{i \in I} m_i;$$

$$(б) \prod_{i \in J} m_i \leq \prod_{i \in I} m_i, \text{ где } m_i \neq 0 \text{ для } i \in I \setminus J.$$

30\*. Пусть  $\{m_i\}_{i \in I}$  и  $\{n_i\}_{i \in I}$  — два семейства кардинальных чисел и  $n_i \geq 2$  для всех  $i \in I$ . Доказать, что:

$$(а) \text{ если } m_i \leq n_i \text{ для всех } i \in I, \text{ то } \sum_{i \in I} m_i \leq \prod_{i \in I} n_i;$$

$$(б) \text{ если } m_i < n_i \text{ для всех } i \in I, \text{ то } \sum_{i \in I} m_i < \prod_{i \in I} n_i.$$

$$31. \text{ Пусть } 0 < m_0 < m_1 < \dots. \text{ Доказать, что } \sum_{n \in \mathcal{N}} m_n < \prod_{n \in \mathcal{N}} m_n.$$

32. Пусть  $n \geq \aleph_0$ ,  $\{n_i\}_{i \in I}$  — семейство кардинальных чисел, не превосходящих  $n$ ,  $\bar{I} \leq n$ . Доказать, что  $\sum_{i \in I} n_i \leq n$ .

33. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — кардинальные числа,  $\bar{I} = \beta$  и  $\alpha_i = \alpha$  для каждого  $i \in I$ . Доказать, что  $\alpha^\beta = \prod_{i \in I} \alpha_i$ .

34. Доказать, что:

$$(а) m^{\left(\sum_{i \in I} n_i\right)} = \prod_{i \in I} m^{n_i};$$

$$(б) \left(\prod_{i \in I} m_i\right)^n = \prod_{i \in I} m_i^n.$$

35. Доказать, что для любого кардинального числа  $m$  нельзя представить  $m^{\aleph_0}$  в виде  $\sum_{i \in \mathcal{N}} m_i$ , где  $m_i < m_{i+1}$ .



# § 1. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

*Алфавитом* называется любое непустое множество. Элементы этого множества называются *символами* данного алфавита. *Словом* в алфавите  $\mathcal{C}$  называется произвольная конечная (возможно, пустая) последовательность символов из  $\mathcal{C}$ . *Произведением слов*  $A$  и  $B$  называется слово  $AB$ . Слово  $B$  называется *подсловом* слова  $A$ , если  $A = CBD$  для некоторых слов  $C$  и  $D$ . Слово  $B$  может входить как подслово в слово  $A$  несколько раз. *Результатом замены* данного вхождения подслова  $B$  в слово  $CBD$  на слово  $E$  называется слово  $CED$ .

*Результатом подстановки*  $A(a \setminus B)$  в слово  $A$  слова  $B$  вместо символа  $a$  называется слово, полученное одновременной заменой всех вхождений символа  $a$  в слово  $A$  на слово  $B$ . Через

$$A(a_1 \setminus B_1, \dots, a_n \setminus B_n)$$

обозначается результат одновременной подстановки в  $A$  формулы  $B_1$  вместо  $a_1$ , ... формулы  $B_n$  вместо  $a_n$ .

Рассмотрим алфавит  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ , где

$$\mathcal{C}_1 = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{\neg, \&, \vee, \supset\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{(\, , \,)\}.$$

Символы из  $\mathcal{C}_1$  называются *переменными высказываниями* или *пропозициональными переменными*. Символы из  $\mathcal{C}_2$  называются *логическими связками*. Связка  $\neg$  называется *отрицанием*,  $\&$  — *конъюнкцией*,  $\vee$  — *дизъюнкцией*,  $\supset$  — *импликацией*. Скобки из  $\mathcal{C}_3$  называются *вспомогательными символами*.

Понятие *формулы алгебры высказываний* определяется следующим образом:

- 1) пропозициональная переменная есть формула;
- 2) если  $A$  и  $B$  — формулы, то  $\neg A$ ,  $(A \& B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \supset B)$  — формулы;
- 3) других формул, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

*Подформулой* формулы  $A$  называется любое подслово слова  $A$ , которое само является формулой.

В §§ 1–3 будут использоваться буквы  $P, Q, \dots$ , возможно, с индексами, для обозначения произвольных пропозициональных переменных, а буквы  $A, B, C, \dots$  — для обозначения формул.

Будем обозначать формулу  $((A \supset B) \& (B \supset A))$  через  $(A \equiv B)$ .

Будем интерпретировать логические связки как функции, определенные на множестве  $\{и, л\}$  (*истина, ложь*), со значениями в этом же множестве следующим образом.

Отрицание:  $\neg и = л, \neg л = и$ .

Конъюнкция:  $и \& и = и, и \& л = л \& и = л \& л = л$ .

Дизъюнкция:  $и \vee и = и \vee л = л \vee и = и, л \vee л = л$ .

Импликация:  $и \supset и = л \supset и = л \supset л = и, и \supset л = л$ .

Тогда каждая формула будет интерпретироваться как функция, определенная на множестве  $\{и, л\}$ , со значениями в этом же множестве, полученная из  $\neg, \&, \vee, \supset$  по правилам построения данной формулы. Такую функцию будем также называть *таблицей истинности* данной формулы. *Значением формулы A* при данных значениях переменных в множестве  $\{и, л\}$  называется значение функции, соответствующей формуле A, при этих значениях переменных.

Формулы A и B называются *эквивалентными* (обозначается через  $A \sim B$ ), если при любых значениях переменных значение A совпадает со значением B. Формула называется *выполнимой* (*опровержимой*), если существует такой набор значений переменных, при которых эта формула принимает значение и (л). Формула называется *тождественно истинной* или *тавтологией* (*тождественно ложной* или *противоречием*), если эта формула принимает значение и (л) при всех значениях переменных.

Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — формулы ( $n \geq 1$ ). Будем называть *конъюнкцией* формул  $A_1, \dots, A_n$  формулу  $(\dots(A_1 \& A_2) \dots \& A_n)$  и обозначать ее через  $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n)$ . Будем называть *дизъюнкцией* формул  $A_1, A_2, \dots, A_n$  формулу  $(\dots(A_1 \vee A_2) \dots \vee A_n)$  и обозначать ее через  $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n)$ .

Формула, которая есть пропозициональная переменная или отрицание переменной, называется *литералом*. Произвольная конъюнкция литералов называется *конъюнктом* или *элементарной конъюнкцией*; произвольная дизъюнкция литералов называется *дизъюнктом* или *элементарной дизъюнкцией*.

*Дизъюнктивной нормальной формой* (*д.н.ф.*) называется произвольная дизъюнкция конъюнктов, а *конъюнктивной нормальной формой* (*к.н.ф.*) — произвольная конъюнкция дизъюнктов.

*Д.н.ф. (к.н.ф.) A* называется *совершенной* и обозначается *с.д.н.ф. (с.к.н.ф.)*, если каждая переменная формулы A входит с отрицанием или без отрицания в каждый конъюнкт (дизъюнкт) точно один раз.

*Д.н.ф. (к.н.ф., с.д.н.ф., с.к.н.ф.)*, эквивалентная данной формуле A, называется *с.д.н.ф. (к.н.ф., с.д.н.ф., с.к.н.ф.)* формулы A.

1. Определить, является ли данная последовательность формулой:

- (а)  $(P_0 \& P_1)P_2 \neg P_3$ ;
- (б)  $(P_0 \& P_1) \supset P_2$ ;
- (в)  $((P_3 \supset P_0) \& \neg P_0)$ ;
- (г)  $((\neg P_0) \supset P_1) \supset \neg (P_2 \vee P_3)$ .

2. Сколькими способами можно расставить скобки в последовательности, чтобы получилась формула:

- (а)  $P_0 \supset \neg P_1 \vee P_2 \& P_0$ ;
- (б)  $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \neg P_1 \supset \neg P_2$ ?

3. Выписать все подформулы формулы:

- (а)  $((P_0 \supset P_1) \& (P_2 \supset P_3)) \supset (\neg P_1 \vee P_3)$ ;
- (б)  $((P_0 \supset P_1) \supset ((P_0 \supset \neg P_1) \supset \neg P_1))$ .

4. Доказать, что всякая формула  $C$ , не являющаяся пропозициональной переменной, может быть представлена в одном из следующих видов:  $\neg A$ ,  $(A \& B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \supset B)$  для некоторых формул  $A$  и  $B$ .

5. Доказать, что результат замены некоторого вхождения формулы  $C$  в формулу  $A$  вместо подформулы  $B$  снова есть формула.

6. Доказать, что результат подстановки  $A(P \setminus B)$  формулы  $B$  вместо пропозициональной переменной  $P$  в формулу  $A$  снова есть формула.

7. Построить таблицы истинности для следующих формул:

- (а)  $((P \supset Q) \vee (P \supset (Q \& P)))$ ;
- (б)  $(\neg(P \supset \neg(Q \& P)) \supset (P \vee R))$ ;
- (в)  $((P \& (Q \supset P)) \supset \neg P)$ ;
- (г)  $((P \& \neg Q) \supset Q) \supset (P \supset Q)$ ;
- (д)  $((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R)))$ ;
- (е)  $((P \& (Q \vee \neg P)) \& ((\neg Q \supset P) \vee Q))$ .

8. Доказать выполнимость формул:

- (а)  $\neg(P \supset \neg P)$ ;
- (б)  $((P \supset Q) \supset (Q \supset P))$ ;
- (в)  $((Q \supset (P \& R)) \& \neg((P \vee R) \supset Q))$ .

9. Доказать тождественную истинность формул:

- (а)  $((P \supset Q) \vee (Q \supset P))$ ;
- (б)  $((P \supset Q) \vee (P \supset \neg Q))$ ;
- (в)  $(P \supset (Q \supset (P \& Q)))$ ;
- (г)  $((P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R)))$ ;
- (д)  $((\neg P \supset \neg Q) \supset (Q \supset P))$ ;
- (е)  $(P \supset (Q \supset P))$ ;
- (ж)  $(P \vee \neg P)$ ;

- (з)  $((P \supset Q) \supset ((P \supset (Q \supset R)) \supset (P \supset R)))$ ;
- (и)  $((P \& Q) \supset P)$ ;
- (к)  $((P \& Q) \supset Q)$ ;
- (л)  $(P \supset (P \vee Q))$ ;
- (м)  $(Q \supset (P \vee Q))$ ;
- (н)  $((P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R)))$ ;
- (о)  $((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg P))$ ;
- (п)  $(\neg \neg P \supset P)$ ;
- (р)  $(P \supset \neg \neg P)$ ;
- (с)  $((\neg Q \supset \neg P) \supset ((\neg Q \supset P) \supset Q))$ ;
- (т)  $((P \vee P) \supset P)$ ;
- (у)  $((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset (P \vee R)))$ ;
- (ф)  $((P \supset Q) \supset (P \supset P))$ ;
- (х)  $(\neg P \supset (P \supset Q))$ .

10. При каких значениях переменных  $X, Y, Z, U, V, W$  ложны следующие формулы:

- (а)  $((X \supset (Y \& Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X)) \supset \neg Y$ ;
- (б)  $((X \& Y) \vee (X \& Z) \vee (Y \& Z) \vee (U \& V) \vee (U \& W) \vee (V \& W) \vee (\neg X \& \neg U))$ ;
- (в)  $((X \vee Y) \vee Z) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z))$ ;
- (г)  $((X \vee Y) \& ((Y \vee Z) \& (Z \vee X))) \supset ((X \& Y) \& Z)$ ;
- (д)  $((X \vee Y) \supset ((\neg X \& Y) \vee (X \& \neg Y)))$ ?

11. Доказать, что если формула  $A$  тождественно истинна, то формула  $A(P \setminus B)$  тождественно истинна. (Здесь  $P$  — пропозициональная переменная, а  $B$  — формула.)

12. Доказать, что если формулы  $A$  и  $(A \supset B)$  тождественно истинны, то формула  $B$  тождественно истинна.

13. Доказать, что:

(а) если формулы  $(A \vee B)$  и  $(\neg A \vee C)$  тождественно истинны, то формула  $(B \vee C)$  тождественно истинна;

(б) если формулы  $(A \vee B)$ ,  $(A \supset C)$ ,  $(B \supset D)$  тождественно истинны, то формула  $(C \vee D)$  тождественно истинна;

(в) если формулы  $(\neg A \vee B)$ ,  $(\neg C \vee \neg B)$  тождественно истинны, то формула  $(A \supset \neg B)$  тождественно истинна.

14. Доказать, что

$$A \sim B \Leftrightarrow (A \equiv B).$$

15. Доказать, что:

(а)  $A \sim A$ ;

(б)  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ ;

(в)  $(A \sim B \text{ и } B \sim C) \Rightarrow A \sim C$ .

16. Доказать, что из  $A_1 \sim A_2$  и  $B_1 \sim B_2$  следует:

- (а)  $\neg A_1 \sim \neg A_2$ ;
- (б)  $(A_1 \& B_1) \sim (A_2 \& B_2)$ ;
- (в)  $(A_1 \vee B_1) \sim (A_2 \vee B_2)$ ;
- (г)  $(A_1 \supset B_1) \sim (A_2 \supset B_2)$ .

17. Доказать, что если  $A \sim B$ , то  $A(P \setminus C) \sim B(P \setminus C)$  для любых формул  $A$ ,  $B$  и  $C$  и переменной  $P$ .

18. Доказать, что если  $B \sim B_1$  и  $A_1$  есть результат замены некоторого вхождения подформулы  $B$  в формулу  $A$  на формулу  $B_1$ , то  $A \sim A_1$ .

19. Доказать эквивалентности:

- (а)  $(P \& P) \sim P$ ;
- (б)  $(P \& Q) \sim (Q \& P)$ ;
- (в)  $(P \& (Q \& R)) \sim ((P \& Q) \& R)$ ;
- (г)  $(P \& (Q \vee R)) \sim ((P \& Q) \vee (P \& R))$ ;
- (д)  $(P \& (Q \vee P)) \sim P$ ;
- (е)  $(P \vee P) \sim P$ ;
- (ж)  $(P \vee Q) \sim (Q \vee P)$ ;
- (з)  $(P \vee (Q \vee R)) \sim ((P \vee Q) \vee R)$ ;
- (и)  $(P \vee (Q \& R)) \sim ((P \vee Q) \& (P \vee R))$ ;
- (к)  $(P \vee (Q \& P)) \sim P$ .

20. Доказать эквивалентности:

- (а)  $\neg \neg A \sim A$ ;
- (б)  $(A \supset B) \sim (\neg A \vee B)$ ;
- (в)  $\neg(A \& B) \sim (\neg A \vee \neg B)$ ;
- (г)  $\neg(A \supset B) \sim (A \& \neg B)$ ;
- (д)  $\neg(A \vee B) \sim (\neg A \& \neg B)$ ;
- (е)  $(A \& (B \vee \neg B)) \sim A$ ;
- (ж)  $(A \vee (B \& \neg B)) \sim A$ ;
- (з)  $(A \supset \neg A) \sim \neg A$ ;
- (и)  $((A \vee B) \& (A \vee C) \& (B \vee D) \& (C \vee D)) \sim ((A \& D) \vee (B \& C))$ ;
- (к)  $(A \& (A \vee C) \& (B \vee C)) \sim ((A \& D) \vee (B \& C))$ ;
- (л)  $((A \vee B) \& (B \vee C) \& (C \vee A)) \sim ((A \& B) \vee (B \& C) \vee (C \& A))$ ;
- (м)  $((A \vee B) \& (B \vee C) \& (C \vee D)) \sim ((A \& C) \vee (B \& C) \vee (B \& D))$ ;
- (н)  $((A \vee B \vee C) \& (B \vee C \vee D) \& (C \vee D \vee A)) \sim ((A \& B) \vee (A \& D) \vee (B \& D) \vee C)$ ;
- (о)  $((A \vee B) \& (A \vee \neg B)) \sim A$ ;
- (п)  $((A \& B) \vee ((A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B))) \sim (A \vee B)$ ;
- (р)  $(A \vee (\neg A \& B)) \sim (A \vee B)$ .

21. Доказать, что:

- (а)  $(A \equiv A) \sim (B \equiv B)$ ;

- (б)  $(A \equiv (B \equiv C)) \sim ((A \equiv B) \equiv C)$ ;  
 (в)  $(A \equiv B) \sim (B \equiv A)$ .

22. Доказать, что для любой формулы существует эквивалентная ей формула с *тесными отрицаниями*, т. е. формула, в которой нет символа  $\supset$  и отрицания относятся только к пропозициональным переменным.

23. Доказать, что для любой формулы существует эквивалентная ей:

- (а) конъюнктивная нормальная форма;  
 (б) дизъюнктивная нормальная форма.

24. Привести к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:

- (а)  $((P \supset Q) \supset (R \supset \neg P)) \supset (\neg Q \supset \neg R)$ ;  
 (б)  $(((((P \supset Q) \supset \neg P) \supset \neg Q) \supset \neg R) \supset R)$ ;  
 (в)  $((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset \neg R) \supset (P \supset \neg Q)))$ .

25. Доказать, что если  $A$  есть тождественно истинная к.н.ф., то для любого дизъюнкта формулы  $A$  существует переменная  $P$  такая, что  $P$  и  $\neg P$  входят в этот дизъюнкт.

26. Доказать, что если  $A$  есть тождественно ложная д.н.ф., то для любого конъюнкта формулы  $A$  существует переменная  $P$  такая, что  $P$  и  $\neg P$  входят в этот конъюнкт.

27. Пусть  $A$  — формула с тесными отрицаниями (см. задачу 22) и  $A_1$  получается из  $A$  заменой  $\&$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\&$  и переменных  $A_i$  на  $\neg A_i$ . Доказать, что  $A_1 \sim \neg A$ .

28\*. Пусть  $A$  и  $B$  — формулы с тесными отрицаниями (см. задачу 22) и  $A^*$ ,  $B^*$  — формулы, *двойственные* к  $A$  и  $B$  соответственно ( $A^*$  получается из  $A$  заменой  $\&$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\&$ ). Доказать, что из  $A \sim B$  следует  $A^* \sim B^*$  (закон двойственности).

29. По данному набору значений переменных построить конъюнкт, истинный только для этого набора значений переменных. (Назовем такую формулу *конъюнктом, соответствующим данному набору значений переменных*.)

30. Доказать, что всякая формула  $A$  эквивалентна дизъюнкции конъюнктов, соответствующих тем наборам значений переменных, при которых данная формула истинна (см. задачу 29).

31. (а) Доказать, что для любой выполнимой формулы существует эквивалентная ей с.д.н.ф.

(б) Доказать, что для тождественно ложной формулы не существует эквивалентной ей с.д.н.ф.

32. По данному набору значений переменных построить дизъюнкт, ложный только для этого набора значений переменных. (Назо-

вем такую формулу дизъюнктом, соответствующим данному набору значений переменных.)

33. Доказать, что всякая формула  $A$  эквивалентна конъюнкции дизъюнктов, соответствующих тем наборам значений переменных, при которых данная формула ложна (см. задачу 32).

34. (а) Доказать, что для любой опровержимой формулы существует эквивалентная ей с.к.н.ф.

(б) Доказать, что для тождественно истинной формулы не существует эквивалентной ей с.к.н.ф.

35. Привести к совершенной дизъюнктивной нормальной форме, т. е. найти с.д.н.ф., эквивалентную данной формуле:

$$(a) ((\neg P \supset \neg Q) \supset ((Q \& R) \supset (P \& R)));$$

$$(b) (((P \supset Q) \supset \neg P) \supset (P \supset (Q \& P)));$$

$$(в) (\neg((P \& Q) \supset \neg P) \& \neg((P \& Q) \supset \neg Q)).$$

36. Привести к совершенной конъюнктивной нормальной форме, т. е. найти с.к.н.ф., эквивалентную данной формуле:

$$(a) ((R \supset P) \supset (\neg(Q \vee R) \supset P));$$

$$(b) (\neg((P \& Q) \supset P) \vee (P \& (Q \vee R)));$$

$$(в) (\neg(P \& (Q \vee R)) \supset ((P \& Q) \vee R)).$$

37. Построить формулу  $A$  такую, чтобы данная формула была тождественно истинной:

$$(a) (((A \& Q) \supset \neg P) \supset ((P \supset \neg Q) \supset A));$$

$$(b) (((R \supset (\neg Q \& P)) \supset A) \supset (A \& (P \supset Q) \& R)).$$

38. Построить формулу от трех переменных, которая истинна в том и только том случае, когда ровно две переменные ложны.

39. Построить формулу от трех переменных, которая принимает такое же значение, как и большинство (меньшинство) переменных.

40. Построить формулу  $A$  от переменных  $P, Q, R$  так, чтобы:

$$(a) (P \& A) \sim (P \& Q) \text{ и } (P \vee A) \sim (P \vee R);$$

$$(b) (R \supset A) \sim (R \supset (P \& Q)) \text{ и } (A \supset R) \sim (\neg(P \vee Q) \supset R);$$

$$(в) (P \supset A) \sim (Q \supset (\neg P \vee R)) \text{ и } ((R \supset Q) \supset P) \sim (\neg P \supset \neg A).$$

41. Доказать, что формула от  $n$  переменных является тождественно истинной (тождественно ложной) формулой тогда и только тогда, когда ее с.д.н.ф. (с.к.н.ф.) содержит  $2^n$  попарно не эквивалентных конъюнктов (дизъюнктов).

42. Пусть формула  $A$  записана в с.к.н.ф. Строим формулу  $B$  следующим образом:

1) выпишем конъюнкцию дизъюнктов, не входящих в  $A$ ;

2) меняем  $\&$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\&$ ,  $P_i$  на  $\neg P_i$ ,  $\neg P_i$  на  $P_i$ .

Доказать, что формула  $B$  — с.д.н.ф. формулы  $A$ .

43. По с.к.н.ф. формулы  $A$  построить:

- (а) с.д.н.ф.  $A^*$ , где  $A^*$  — двойственная к  $A$  (см. задачу 28);
- (б) с.к.н.ф. формулы  $\neg A$ ;
- (в) с.д.н.ф. формулы  $\neg A$ .

44. По с.д.н.ф. формулы  $A$  и с.д.н.ф. формулы  $B$  построить:

- (а) с.к.н.ф. и с.д.н.ф. формулы  $(A \vee B)$ ;
- (б) с.к.н.ф. и с.д.н.ф. формулы  $(A \& B)$ ;
- (в) с.к.н.ф. и с.д.н.ф. формулы  $(A \supset B)$ .

45\*. Доказать, что формула  $A$  от переменных  $P_1, \dots, P_k$  эквивалентна некоторой формуле, содержащей лишь  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\supset$  и не содержащей  $\neg$ , тогда и только тогда, когда в ее с.к.н.ф. отсутствует дизъюнкт  $(\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_k)$ .

46\*. Пусть формула  $A$  не содержит других связок, кроме  $\equiv$ . Доказать, что  $A$  является тождественно истинной тогда и только тогда, когда каждая переменная входит в  $A$  четное число раз.

47\*. Пусть формула  $A$  не содержит других связок, кроме  $\equiv$  и  $\neg$ . Доказать, что  $A$  является тождественно истинной тогда и только тогда, когда каждая переменная и знак отрицания входят в  $A$  четное число раз.

## § 2. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

*Функцией алгебры логики* называется любая  $n$ -местная функция из  $\{0, 1\}$  в  $\{0, 1\}$ . Множество всех функций алгебры логики обозначается через  $S$ .

Будем говорить, что функция  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  существенно зависит от переменной  $x_i$ , если существует такая последовательность  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$  из 0 и 1, что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Переменные, от которых функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  существенно зависит, называются *существенными переменными* для функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , остальные — *фиктивными*. Будем отождествлять функции, из которых добавлением фиктивных переменных можно получить одну и ту же функцию.

Пусть имеется некоторое множество  $G$  функций алгебры логики. Каждой  $n$ -местной функции  $f$  из  $G$  поставим в соответствие функциональный символ  $f$ . Пусть  $v_0, v_1, v_2, \dots$  — счетное множество символов, называемых переменными. Определим понятие *терма*:



- (а) переменная есть терм;  
 (б) если  $f$  —  $n$ -местная функция из  $G$  и  $T_1, \dots, T_n$  — термы, то  $f(T_1, \dots, T_n)$  — терм;  
 (в) других термов нет.

Сопоставим каждой переменной  $v_0, v_1, \dots$  ее значение во множестве  $\{0, 1\}$ . Определим значение терма  $T$  при данных значениях переменных:

- (а) если  $T$  — переменная, то значение  $T$  совпадает со значением этой переменной;  
 (б) если  $T = f(T_1, \dots, T_n)$ , а значения  $T_1, \dots, T_n$  есть  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  соответственно, то значение  $T$  есть  $f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ .

Говорим, что  $n$ -местная функция  $g$  алгебры логики *представима термом*  $T$ , если все переменные  $T$  содержатся среди  $v_1, \dots, v_n$  и для любых значений переменных  $v_1, \dots, v_n$  значение терма  $T$  совпадает со значением  $g(v_1, \dots, v_n)$ . Говорим, что функция  $g$  есть *суперпозиция* функций  $f_1, \dots, f_n$ , если  $g$  представима термом, все функциональные символы которого содержатся среди  $f_1, \dots, f_n$ .

Система функций  $G$  называется *полной*, если любая функция алгебры логики есть некоторая суперпозиция функций из  $G$ . Система функций  $G$  называется *независимой*, если никакая функция  $f$  системы  $G$  не представима суперпозициями функций из  $G \setminus \{f\}$ .

Класс функций  $G$  называется *замкнутым*, если вместе с любыми функциями он содержит и все их суперпозиции. Замкнутый класс  $G$  называется *предполным*, если  $G \neq C$  и  $G$  не содержится ни в каком другом замкнутом классе, отличном от  $C$ . Независимая система функций  $G$  называется *базисом замкнутого класса*  $K$ , если всякая функция из  $K$  есть суперпозиция функций из  $G$ . Введем специальные обозначения для основных функций алгебры логики:

$$0(x) = 0, \quad 1(x) = 1 \text{ для всех } x, \quad i(x) = x;$$

$$\neg x = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 1, \\ 1 & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$x \cdot y = x \& y = \begin{cases} 1 & \text{при } x = y = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$x \vee y = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y = 0, \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$x + y = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y; \end{cases}$$

$$x \supset y = \neg x \vee y, \quad x \equiv y = \neg(x + y), \quad x | y = \neg(x \cdot y).$$

Через  $C_1$  обозначается класс функций, удовлетворяющих условию  $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ , а через  $C_0$  — класс функций, удовлетворяющих условию  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ .  $L$  есть класс всех *линейных функций*, т. е. функций вида  $x_1 + \dots + x_n + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ .  $D$  есть класс *самодвойственных функций*, т. е. функций, удовлетворяющих условию  $f(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$ . Через  $M$  обозначается класс всех *монотонных функций*, т. е. функций, удовлетворяющих условию

$$x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n).$$

Пусть  $T$  — терм, представляющий некоторую функцию алгебры логики, в записи которого встречаются только знаки  $\&$ ,  $\vee$  и  $\neg$  и переменные  $a_1, \dots, a_k$ . Обозначим через  $\varepsilon(T, x)$  формулу теории множеств, полученную из терма  $T$  подстановками вместо переменных  $a_1, \dots, a_k$  соответственно выражений  $x \in Z_1, \dots, x \in Z_k$ .

Обозначим через  $Z(T)$  выражение, которое получается из терма  $T$  заменой переменных  $a_i$  символами  $Z_i$ , символов  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\neg$  — соответственно символами  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $-$ . При интерпретации  $Z_f$  в теории множеств символы  $Z_i$  будут обозначать подмножества универсального множества  $U$ .

1. Показать, что каждой формуле  $A$  алгебры высказываний можно сопоставить функцию  $\varphi(A)$  алгебры логики так, что

$$A_1 \sim A_2 \Leftrightarrow \varphi(A_1) = \varphi(A_2).$$

2. Сколько имеется функций алгебры логики от  $n$  переменных?

3. Найти все существенные переменные следующих функций:

(а)  $(y \& x) \vee (\neg y \& z)$ ;

(б)  $(x \& y) \vee \neg x$ ;

(в)  $(x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))$ .

4. Выразить с помощью суперпозиций:

(а)  $\&$  и  $\supset$  через  $\vee$  и  $\neg$ ;

(б)  $\vee$  и  $\supset$  через  $\&$  и  $\neg$ ;

(в)  $\&$  и  $\vee$  через  $\supset$  и  $\neg$ ;

(г)  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ ,  $\neg$  через  $!$ ;

(д)  $\neg$  через  $\supset$  и  $0$ ;

(е)  $\neg$  через  $+$  и  $1$ ;

(ж)  $\vee$  через  $\supset$ .

5. Доказать, что  $C_1$ ,  $C_0$ ,  $L$ ,  $D$  и  $M$  являются различными замкнутыми классами, отличными от  $C$ .

6. Доказать, что нельзя выразить с помощью суперпозиций:

- (а)  $\neg$  через  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\supset$  и  $\equiv$ ;
- (б)  $\supset$  через  $\&$ ,  $\vee$ ;
- (в)  $*$   $\&$  через  $\vee$ ,  $\supset$ .

7. (а) Доказать, что для каждой функции  $f(x, x_1, \dots, x_n)$  выполняется равенство

$$f(x, x_1, \dots, x_n) = (x \cdot f(1, x_1, \dots, x_n)) \vee (\neg x \cdot f(0, x_1, \dots, x_n)).$$

(б) Пусть  $n \geq i \geq 1$ . Доказать, что каждую функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  алгебры логики можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i} (x_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot x_i^{\varepsilon_i}) \cdot f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где  $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ ,  $x_j^0 = \neg x_j$ ,  $x_j^1 = x_j$ .

8. Доказать полноту систем функций:

- (а)  $\{\&, \vee, \neg\}$ ;
- (б)  $\{\vee, \neg\}$ ;
- (в)  $\{\&, \neg\}$ ;
- (г)  $\{\supset, \neg\}$ .

9. Доказать неполноту систем функций:

- (а)  $\{\&, \vee, \supset\}$ ;
- (б)  $\{\neg\}$ .

10. Доказать полноту систем функций:

- (а)  $\{1\}$ ;
- (б)  $\{1\}$  (здесь  $1 = \neg(x \vee y)$ );
- (в)  $\{\supset, 0\}$ ;
- (г)  $\{+, \vee, 1\}$ .

11. Доказать, что:

- (а)  $\{+, \cdot, 1\}$  — полная система функций;
- (б) любая функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  единственным образом представима в виде:

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k},$$

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

где  $\varepsilon_{i_1 \dots i_k} \in \{0, 1\}$ .

12. Показать, что следующие системы функций независимы:

- (а)  $\{\neg, \equiv\}$ ;
- (б)  $\{\neg, +\}$ ;

(в)  $\{\equiv, +\}$ ;

(г)  $\{\equiv, \vee\}$ .

13. Показать полноту и независимость следующих систем функций:

(а)  $\{\supset, /\}$ , где  $x/y = \neg(y \supset x)$ ;

(б)  $\{0, 1, [, ., ., .]\}$ , где  $[x, y, z] = (y \& x) \vee (\neg y \& z)$ ;

(в)  $\{\equiv, \vee, 0\}$ .

14. Покажите, что  $\equiv, +$  не составляют полной системы функций. Выясните все возможные способы сделать эту систему полной системой независимых функций добавлением одной не более чем 2-местной функции.

15. Какая система из одной 2-местной функции является полной? Найдите все такие системы.

16. Привести пример полной системы функций:

(а) состоящей из одной 3-местной функции;

(б) состоящей из одной  $n$ -местной функции ( $n \geq 2$ ).

17. Доказать, что из всякой полной системы функций можно выделить конечную полную подсистему.

18. Доказать, что:

(а)  $\{\&, \supset\}$  — базис для  $C_1$ ;

(б)  $\{\&, +\}$  — базис для  $C_0$ ;

(в)\*  $\{\vee, \&, 0, 1\}$  — базис для  $M$ ;

(г)  $\{0, \equiv\}$  — базис для  $L$ ;

(д)\*  $\{\neg, xy + xz + yz\}$  — базис для  $D$ .

19. Доказать, что классы  $C_1, C_0$  являются предполными классами.

20. Доказать, что:

(а) из всякой немонотонной функции и функций 0 и 1 можно получить суперпозициями функцию  $\neg$ ;

(б) класс  $M$  является предполным классом.

21. Доказать, что:

(а) из всякой несамодвойственной функции и функции  $\neg$  можно получить суперпозициями функций 0 и 1;

(б) класс  $D$  является предполным классом.

22. Доказать, что:

(а) из всякой нелинейной функции и функций 0, 1,  $\neg$  можно получить суперпозициями функцию  $\&$ ;

(б) класс  $L$  является предполным классом.

23. Доказать, что любой замкнутый класс  $K \neq C$  содержится в некотором предполном классе.

24. Доказать, что система функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из предполных классов.

25\*. Доказать, что не существует предполных классов, отличных от  $C_1$ ,  $C_0$ ,  $L$ ,  $D$  и  $M$  (теорема Э. Поста).

26. Доказать, что всякий базис  $S$  содержит не более четырех функций.

27. Пусть  $T$  и  $T_1$  — термы, представляющие некоторые функции алгебры логики,  $\varepsilon(T, x)$  — формула теории множеств, определенная в конце вводной части параграфа. Доказать, что:

$$(a) \varepsilon((T \vee T_1), x) \Leftrightarrow (\varepsilon(T, x) \vee \varepsilon(T_1, x));$$

$$(б) \varepsilon((T \& T_1), x) \Leftrightarrow (\varepsilon(T, x) \& \varepsilon(T_1, x));$$

$$(в) \varepsilon(\neg T, x) \Leftrightarrow \neg \varepsilon(T, x).$$

28. Доказать, что в теории множеств:

$$(a) Z(\neg T) = -Z(T), \text{ где } -Z = U \setminus Z;$$

$$(б) Z(T \vee T_1) = Z(T) \cup Z(T_1);$$

$$(в) Z(T \& T_1) = Z(T) \cap Z(T_1).$$

29. Доказать, что в теории множеств

$$\varepsilon(T, x) \Leftrightarrow x \in Z(T).$$

30. Пусть функция  $f$  представима термом  $T$ , а  $g$  — термом  $T_1$ . Доказать, что:

(a) если  $f(a_1, \dots, a_k) = g(a_1, \dots, a_k)$  для всех  $a_1, \dots, a_k$ , то в теории множеств выполняется тождество  $Z(T) = Z(T_1)$ ;

(б) если  $(f(a_1, \dots, a_k) \supset g(a_1, \dots, a_k)) = 1$  для всех  $a_1, \dots, a_k$ , то в теории множеств выполняется соотношение  $Z(T) \subseteq Z(T_1)$ ;

(в) если  $f(a_1, \dots, a_k) = 1$  для всех  $a_1, \dots, a_k$ , то в теории множеств выполняется тождество  $Z(T) = U$ ;

(г) если  $f(a_1, \dots, a_k) = 0$  для всех  $a_1, \dots, a_k$ , то в теории множеств выполняется тождество  $Z(T) = \emptyset$ .

31. Доказать, что если функция  $f(a_1, \dots, a_k)$  представима термом  $T$  и  $Z(T) = U$  для произвольных множеств  $Z_1, \dots, Z_k \subseteq U$ , то  $f(a_1, \dots, a_k) = 1$  для всех  $a_1, \dots, a_k$ .

32. На основании каких тождеств алгебры логики можно получить следующие теоремы теории множеств:

$$(a) (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z);$$

$$(б) X \cap Y = Y \cap X;$$

$$(в) -(X \cap Y) = -X \cup -Y;$$

$$(г) -(-X) = X?$$

33. Какие теоремы теории множеств можно получить из следующих тождеств алгебры логики:

(а)  $(a \& (\neg a \vee b)) \supset b = 1$ ;

(б)  $a \& (a \vee b) = a$ ;

(в)  $a \vee \neg a = 1$ ;

(г)  $(a \& b) \supset (a \vee b) = 1$ ;

(д)  $a \& b = b \& a$ ;

(е)  $a = a \& (b \vee \neg b)$ ;

(ж)  $\neg(a \& b) = \neg a \vee \neg b$ ;

(з)  $(a \& b) \vee a = a$ ;

(и)  $(a \& b) \& c = a \& (b \& c)$ ;

(к)  $\neg(a \vee b) = \neg a \& \neg b$ ;

(л)  $a \vee (a \& b) = a$ ;

(м)  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ;

(н)  $a \& \neg a = 0$ ?

### § 3. ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Определим *исчисление высказываний ИС*. Рассмотрим алфавит  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3 \cup \mathcal{G}_4$ , где  $\mathcal{G}_1 = \{P_1, P_2, \dots\}$ ,  $\mathcal{G}_2 = \{\neg, \&, \vee, \supset\}$ ,  $\mathcal{G}_3 = \{(\ , \ )\}$ ,  $\mathcal{G}_4 = \{\vdash\}$ . Понятие формулы определяется, как в § 1. *Секвенциями* называются выражения следующих трех типов, где  $A_1, \dots, A_n, B$  — любые формулы:

$A_1, \dots, A_n \vdash B$ , где  $n > 0$  («из  $A_1, \dots, A_n$  следует  $B$ »),

$\vdash B$  ( $B$  доказуема),

$A_1, \dots, A_n \vdash$  (система  $A_1, \dots, A_n$  противоречива).

*Правилом вывода* называется выражение вида  $\frac{\Sigma_1, \dots, \Sigma_k}{\Sigma}$ , где  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \Sigma$  — произвольные секвенции.  $\Sigma$  называется *непосредственным следствием*  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  по данному правилу вывода.

*Исчисление ИС* определяется следующими схемой аксиом и правилами вывода (где символы  $A, B, C$  обозначают произвольные формулы,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma$  — конечные последовательности формул, возможно, пустые).

*Схема аксиом:*  $A \vdash A$ .

*Правила вывода:*

$$1. \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma \vdash (A \& B)} \text{ (введение } \& \text{);}$$

2.  $\frac{\Gamma \vdash (A \& B)}{\Gamma \vdash A}$  (удаление  $\&$ );
3.  $\frac{\Gamma \vdash (A \& B)}{\Gamma \vdash B}$  (удаление  $\&$ );
4.  $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$  (введение  $\vee$ );
5.  $\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$  (введение  $\vee$ );
6.  $\frac{\Gamma_1 \vdash (A \vee B), \Gamma_2, A \vdash C, \Gamma_3, B \vdash C}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \vdash C}$  (удаление  $\vee$ );
7.  $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \supset B)}$  (введение  $\supset$ );
8.  $\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash (A \supset B)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B}$  (удаление  $\supset$ );
9.  $\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}$  (введение  $\neg$ );
10.  $\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash \neg A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$  (сведение к противоречию);
11.  $\frac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}$  (удаление  $\neg$ );
12.  $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}$  (уточнение);
13.  $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$  (расширение);
14.  $\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash C}$  (перестановка);
15.  $\frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}$  (сокращение).

*Аксиомой* называется выражение, получающееся из схемы аксиом подстановкой вместо символа  $A$  конкретной формулы.

*Вывод в ИС* есть конечная последовательность секвенций  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  такая, что для каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ )  $\Sigma_i$  есть либо аксиома, либо непосредственное следствие предыдущих секвенций по правилам 1–15.

Секвенция  $\Sigma$  называется *выводимой* (или *доказуемой*) в ИС, если существует вывод в ИС, оканчивающийся секвенцией  $\Sigma$ .

Правило  $\frac{\Sigma_1, \dots, \Sigma_k}{\Sigma}$  называется *допустимым в ИС*, если из выводимости в ИС секвенций  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  следует выводимость секвенции  $\Sigma$ .

Определим *исчисление ИВ*. Схемами аксиом исчисления ИВ являются следующие выражения:

1.  $(A \supset (B \supset A))$ ;
2.  $((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)))$ ;
3.  $((A \& B) \supset A)$ ;
4.  $((A \& B) \supset B)$ ;
5.  $((A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \& C))))$ ;
6.  $(A \supset (A \vee B))$ ;
7.  $(B \supset (A \vee B))$ ;
8.  $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$ ;
9.  $((A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A))$ ;
10.  $(\neg \neg A \supset A)$ .

Исчисление ИВ имеет следующее *правило вывода* (modus ponens):

$$\frac{A, (A \supset B)}{B}.$$

*Аксиомой* (или *вариантом схемы аксиом*) называется выражение, получаемое из данной схемы аксиом подстановкой вместо символов  $A, B$  и  $C$  конкретных формул. Формула  $A$  называется *непосредственным следствием* формул  $A$  и  $(A \supset B)$ .

*Выводом в ИВ* называется конечная последовательность формул  $A_1, \dots, A_k$  такая, что для каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ )  $A_i$  есть либо аксиома, либо непосредственное следствие предыдущих формул.

*Вывод из множества формул  $\Gamma$*  есть последовательность формул  $A_1, \dots, A_k$  такая, что для каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ )  $A_i$  есть либо аксиома, либо одна из формул  $\Gamma$ , либо непосредственное следствие предыдущих формул.

Будем писать  $\vdash A$  ( $\Gamma \vdash A$ ), если существует вывод (вывод из  $\Gamma$ ), оканчивающийся формулой  $A$ . Формула  $A$  в этом случае называется *выводимой в ИВ* (*выводимой из  $\Gamma$* ).

Множество формул  $\Gamma$  назовем *противоречивым*, если существует формула  $A$  такая, что  $\Gamma \vdash A$  и  $\Gamma \vdash \neg A$ , *непротиворечивым* — в противном случае.

Выражение вида  $\frac{\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash B}$  назовем *допустимым в ИВ* *правилом*, если в ИВ из  $\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n$  следует  $\Gamma \vdash B$ .

*Интуиционистским исчислением высказываний ИИВ* называется исчисление, схемами аксиом которого являются схемы аксиом 1–9 исчисления ИВ и формулы вида  $(\neg A \supset (A \supset B))$ , правилом вывода —



modus ponens. Определение выводимости в ИИВ аналогично соответствующему определению для ИВ;  $\vdash_{\text{ИИВ}} A$  ( $\Gamma \vdash_{\text{ИИВ}} A$ ) означает, что  $A$  выводима в ИИВ (выводима в ИИВ из  $\Gamma$ ).

Логической матрицей называется система  $\mathbb{M} = \langle M; D, \&, \vee, \supset, \neg \rangle$ , где  $M$  — непустое множество,  $D \subseteq M$ ,  $\&, \vee, \supset$  — двуместные,  $\neg$  — одноместная функция на  $M$ . Формула  $A$  называется *общезначимой* в  $\mathbb{M}$ , если при любых значениях переменных в множестве  $M$  значение формулы  $A$  входит в  $D$ .

Говорим, что формула  $A$  *зависит от системы формул*  $\Delta$ , если существует конечная последовательность формул  $B_1, \dots, B_n$ , где  $B_n = A$  и для любого  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )  $B_i$  есть результат подстановки в некоторую формулу из  $\Delta$  или  $B_i$  есть непосредственное следствие предыдущих формул по modus ponens. В противном случае  $A$  называется *независимой от*  $\Delta$ . Система формул  $\Delta$  называется *независимой*, если каждая формула  $A$  из  $\Delta$  независима от  $\Delta \setminus \{A\}$ .

Система схем аксиом называется *независимой*, если для каждой схемы аксиом существует ее вариант, независимый от множества вариантов остальных схем аксиом.

### 1. Построить выводы секвенций в ИС:

- (а)  $\vdash (A \supset A)$ ;
- (б)  $(A \supset B), (B \supset C) \vdash (A \supset C)$ ;
- (в)  $\vdash (\neg \neg A \equiv A)$ ;
- (г)  $(A \supset (B \supset C)), (A \supset B), A \vdash C$ ;
- (д)  $(A \supset B), \neg B \vdash \neg A$ ;
- (е)  $A, \neg B \vdash \neg(A \supset B)$ .

2. Доказать *правило подстановки* в ИС: если выводима секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash B$ ,  $P$  — переменная и  $C$  — любая формула, то выводима секвенция  $A_1(P \setminus C), \dots, A_n(P \setminus C) \vdash B(P \setminus C)$ .

### 3. Доказать, что следующие правила являются допустимыми в ИС:

- (а) 
$$\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash (A \supset B)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B} \quad (\text{сечение});$$
- (б) 
$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, (A \& B) \vdash C} \quad (\text{объединение посылок});$$
- (в) 
$$\frac{\Gamma, (A \& B) \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C} \quad (\text{расщепление посылок});$$
- (г) 
$$\frac{\Gamma, A \vdash C, \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, (A \vee B) \vdash C} \quad (\text{разбор случаев});$$

- (д)  $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}$  (контрапозиция);
- (е)  $\frac{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}{\Gamma, A \vdash B}$  (доказательство от противного);
- (ж)  $\frac{A_1, \dots, A_n \vdash B}{\vdash ((A_1 \& \dots \& A_n) \supset B)}$  (введение  $\&$  и  $\supset$ );
- (з)  $\frac{((A_1 \& \dots \& A_n) \supset B)}{A_1, \dots, A_n \vdash B}$  (удаление  $\&$  и  $\neg$ ).

4. Доказать, что если правило  $\frac{\Gamma_1 \vdash A}{\Gamma_2 \vdash A}$  допустимо в ИС для любой

формулы  $A$ , то правило  $\frac{\Gamma_1 \vdash}{\Gamma_2 \vdash}$  допустимо в ИС.

5. Вывести в ИС следующие секвенции:

- (а)  $(A \supset B), (B \supset C) \vdash (A \supset C)$ ;  
 (б)  $(A \supset (B \supset C)) \vdash (B \supset (A \supset C))$ ;  
 (в)  $(A \supset (B \supset C)) \vdash ((A \& B) \supset C)$ ;  
 (г)  $((A \& B) \supset C) \vdash (A \supset (B \supset C))$ ;  
 (д)  $(A \supset B) \vdash ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ ;  
 (е)  $(A \supset B) \vdash ((C \supset A) \supset (C \supset B))$ ;  
 (ж)  $(A \supset B) \vdash ((C \& A) \supset (C \& B))$ ;  
 (з)  $(A \supset B) \vdash ((A \& C) \supset (B \& C))$ ;  
 (и)  $(A \supset B) \vdash ((A \vee C) \supset (B \vee C))$ ;  
 (к)  $(A \supset B) \vdash ((C \vee A) \supset (C \vee B))$ ;  
 (л)  $\neg A \vdash (A \supset B)$ ;  
 (м)  $A \vdash (\neg A \supset B)$ ;  
 (н)  $B \vdash (A \supset B)$ ;  
 (о)  $(A \supset B) \vdash (\neg B \supset \neg A)$ ;  
 (п)  $(A \supset \neg B) \vdash (B \supset \neg A)$ ;  
 (р)  $(\neg A \supset B) \neg (\neg B \supset A)$ ;  
 (с)  $(\neg A \supset B) \neg (B \supset A)$ .

6. Доказать, что следующие правила допустимы в ИС:

- (а)  $\frac{\Gamma, A \vdash B; \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash (A \equiv B)}$ ;  
 (б)  $\frac{\Gamma \vdash (A \equiv B)}{\Gamma, A \vdash B}$ ;  
 (в)  $\frac{\Gamma \vdash (A \equiv B)}{\Gamma, B \vdash A}$ .

7. Вывести в ИС следующие секвенции:

- (а)  $(A \supset B), (B \supset A) \vdash (A \equiv B)$ ;

- (б)  $(A \equiv B) \vdash (A \supset B)$ ;
- (в)  $(A \equiv B) \vdash (B \supset A)$ ;
- (г)  $(A \equiv B), A \vdash B$ ;
- (д)  $\vdash (A \equiv A)$ ;
- (е)  $(A \equiv B), (B \equiv C) \vdash (A \equiv C)$ ;
- (ж)  $(A \equiv B) \vdash (B \equiv A)$ ;
- (з)  $(A \equiv B) \vdash (\neg A \equiv \neg B)$ ;
- (и)  $(A \equiv B) \vdash ((A \& C) \equiv (B \& C))$ ;
- (к)  $(A \equiv B) \vdash ((C \& A) \equiv (C \& B))$ ;
- (л)  $(A \equiv B) \vdash ((A \vee C) \equiv (B \vee C))$ ;
- (м)  $(A \equiv B) \vdash ((C \vee A) \equiv (C \vee B))$ ;
- (н)  $(A \equiv B) \vdash ((A \supset C) \equiv (B \supset C))$ ;
- (о)  $(A \equiv B) \vdash ((C \supset A) \equiv (C \supset B))$ .

8. Пусть  $A$  — формула,  $B$  — подформула формулы  $A$ ,  $A_1$  — результат замены некоторого вхождения  $B$  в  $A$  на формулу  $B_1$ . Доказать выводимость в ИС секвенции  $(B \equiv B_1) \vdash (A \equiv A_1)$  (теорема о замене в ИС).

9. Вывести в ИС следующие секвенции:

- (а)  $\vdash ((A \& B) \equiv (B \& A))$ ;
- (б)  $\vdash ((A \vee B) \equiv (B \vee A))$ ;
- (в)  $\vdash ((A \& (B \& C)) \equiv ((A \& B) \& C))$ ;
- (г)  $\vdash (A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$ ;
- (д)  $\vdash ((A \& (B \vee C)) \equiv ((A \& B) \vee (A \& C)))$ ;
- (е)  $\vdash ((A \vee (B \& C)) \equiv ((A \vee B) \& (A \vee C)))$ ;
- (ж)  $\vdash (\neg(A \& B) \equiv (\neg A \vee \neg B))$ ;
- (з)  $\vdash (\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \& \neg B))$ ;
- (и)  $\vdash ((A \supset B) \equiv (\neg A \vee B))$ ;
- (к)  $\vdash (\neg \neg A \equiv A)$ ;
- (л)  $\vdash ((A \supset B) \vee (B \supset A))$ .

10. Пусть  $A$  — формула, а  $A_1$  — ее к.н.ф. (см. § 1). Доказать выводимость в ИС секвенции  $\vdash (A \equiv A_1)$ .

11. Доказать, что для любой тождественно истинной к.н.ф.  $A$  секвенция  $\vdash A$  выводима в ИС.

12. Доказать, что:

(а) если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  выводима в ИС, то формула  $((A_1 \& \dots \& A_n) \supset B)$  тождественно истинна;

(б) если секвенция  $\vdash B$  выводима в ИС, то формула  $B$  тождественно истинна;

(в) если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash$  выводима в ИС, то формула  $\neg(A_1 \& \dots \& A_n)$  тождественно истинна.

13\*. Доказать, что секвенция  $\vdash A$  выводима в ИС тогда и только тогда, когда  $A$  тождественно истинна (*теорема о полноте ИС*).

14. Выводимы ли в ИС следующие секвенции:

- (а)  $\vdash ((P \vee Q) \supset (P \& R))$ ;
- (б)  $\vdash (((P \supset Q) \supset Q) \supset P)$ ;
- (в)  $\vdash (((P \supset Q) \supset Q) \supset Q)$ ;
- (г)  $\vdash (\neg(P \vee \neg P) \supset (P \vee \neg P))$ ;
- (д)  $P \vdash \neg(P \supset \neg P)$ ;
- (е)  $(P \supset Q) \vdash (Q \supset P)$ ?

15\*. Доказать *интерполяционную теорему* для ИС: если доказуема секвенция  $A \vdash B$  и недоказуемы секвенции  $A \vdash$  и  $\vdash B$ , то существует формула  $C$ , все переменные которой входят как в  $A$ , так и в  $B$ , такая, что доказуемы секвенции  $A \vdash C$  и  $C \vdash B$  (такая формула  $C$  называется *интерполянт*ом).

16. Построить интерполянты (см. задачу 15) для следующих секвенций:

- (а)  $\neg(\neg Q \vee R) \vdash (P \supset Q)$ ;
- (б)  $\neg(P \supset \neg(Q \& S)) \vdash ((S \supset (P \supset R)) \supset R)$ .

17. Являются ли выводами в ИВ следующие последовательности формул:

- (а)  $(P \supset (P \vee Q))$ ;
- (б)  $(P \supset (P \vee Q)), ((P \supset (P \vee Q)) \supset (P \supset (P \supset (P \vee Q))))$ ,  $(P \supset (P \supset (P \vee Q)))$ ;
- (в)  $(P \supset (Q \supset P)), ((P \supset (P \vee Q)) \supset Q)$ ,  $Q$ ?

18. Построить выводы следующих формул в ИВ:

- (а)  $(P \supset P)$ ;
- (б)  $((P \vee P) \supset P)$ ;
- (в)  $(P \supset \neg \neg P)$ .

19. Доказать, что если  $A$  выводима в ИВ, то  $A(P \setminus B)$  выводима в ИВ для любых переменных  $P$  и формулы  $B$  (*правило подстановки*).

20. Найти минимальное множество  $\Gamma$  так, чтобы следующая последовательность была выводом в ИВ из  $\Gamma$ :

- (а)  $(P \supset (Q \supset R))$ ,  $P$ ,  $(Q \supset R)$ ,  $Q$ ,  $R$ ;
- (б)  $((P \supset \neg \neg Q) \supset (\neg Q \supset \neg P))$ ,  $(P \supset \neg \neg Q)$ ,  $(\neg Q \supset \neg P)$ ,  $\neg Q$ ,  $\neg P$ .

21. Доказать, что  $A \vdash A$  в ИВ.

22. Доказать, что следующие правила являются допустимыми в ИВ:

- (а)  $\frac{\Gamma \vdash A}{B, \Gamma \vdash A}$ ;  
 (б)  $\frac{B, B, \Gamma \vdash A}{B, \Gamma \vdash A}$ ;  
 (в)  $\frac{\Gamma, A, B, \Gamma_1 \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma_1 \vdash C}$ ;  
 (г)  $\frac{\Gamma \vdash A; A, \Gamma_1 \vdash B}{\Gamma, \Gamma_1 \vdash B}$ ;  
 (д)  $\frac{A_1, \dots, A_n \vdash B}{A_1 (P \setminus C), \dots, A_n (P \setminus C) \vdash B (P \setminus C)}$ .

23\*. Доказать теорему о дедукции в ИВ: если  $\Gamma, A \vdash B$ , то  $\Gamma \vdash (A \supset B)$ .

24. Доказать для ИВ:

- (а)  $\Gamma, A, B \vdash (A \& B)$  (введение  $\&$ );  
 (б)  $\Gamma, A \vdash (A \vee B)$  (введение  $\vee$ );  
 (в)  $\Gamma, B \vdash (A \vee B)$  (введение  $\vee$ );  
 (г)  $\frac{\Gamma, A \vdash B; \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$  (введение  $\neg$ );  
 (д)  $\Gamma, (A \& B) \vdash A$  (удаление  $\&$ );  
 (е)  $\Gamma, (A \& B) \vdash B$  (удаление  $\&$ );  
 (ж)  $\frac{\Gamma, A \vdash C; \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, (A \vee B) \vdash C}$  (удаление  $\vee$ );  
 (з)  $\Gamma, \neg \neg A \vdash A$  (удаление  $\neg$ ).

25. Доказать, что множество  $\Gamma$  непротиворечиво тогда и только тогда, когда существует формула, невыводимая в ИВ из  $\Gamma$ .

26. Доказать, что в ИВ:

- (а)  $\vdash (A \equiv A)$ ;  
 (б)  $(A \equiv B) \vdash (B \equiv A)$ ;  
 (в)  $(A \equiv B), (B \equiv C) \vdash (A \equiv C)$ ;  
 (г)  $(A \equiv B) \vdash (\neg A \equiv \neg B)$ ;  
 (д)  $(A \equiv B) \vdash ((A \& C) \equiv (B \& C))$ ;  
 (е)  $(A \equiv B) \vdash ((C \& A) \equiv (C \& B))$ ;  
 (ж)  $(A \equiv B) \vdash ((A \vee C) \equiv (B \vee C))$ ;  
 (з)  $(A \equiv B) \vdash ((C \vee A) \equiv (C \vee B))$ ;  
 (и)  $(A \equiv B) \vdash ((A \supset C) \equiv (B \supset C))$ ;  
 (к)  $(A \equiv B) \vdash ((C \supset A) \equiv (C \supset B))$ .

27. Пусть  $A$  — формула,  $B$  — подформула формулы  $A$ ,  $A_1$  — результат замены некоторого вхождения  $B$  в  $A$  на формулу  $B_1$ . Доказать теорему о замене в ИВ:

$$(B \equiv B_1) \vdash (A \equiv A_1).$$

28. Доказать, что следующие формулы выводимы в ИВ:

- (а)  $((A \& (B \& C)) \equiv ((A \& B) \& C))$ ;
- (б)  $((A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C))$ ;
- (в)  $((A \& B) \equiv (B \& A))$ ;
- (г)  $((A \vee B) \equiv (B \vee A))$ ;
- (д)  $((A \& (B \vee C)) \equiv ((A \& B) \vee (A \& C)))$ ;
- (е)  $((A \vee (B \& C)) \equiv ((A \vee B) \& (A \vee C)))$ ;
- (ж)  $((A \& A) \equiv A)$ ;
- (з)  $((A \vee A) \equiv A)$ ;
- (и)  $((A \vee (A \& B)) \equiv A)$ ;
- (к)  $((A \& (A \vee B)) \equiv A)$ ;
- (л)  $(\neg \neg A \equiv A)$ ;
- (м)  $\neg(A \& \neg A)$ ;
- (н)  $(A \vee \neg A)$ ;
- (о)  $((A \& B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B))$ ;
- (п)  $((A \vee B) \equiv \neg(\neg A \& \neg B))$ ;
- (р)  $((A \supset B) \equiv \neg(A \& \neg B))$ ;
- (с)  $((A \supset B) \equiv (\neg A \vee B))$ ;
- (т)  $((A \& B) \equiv \neg(A \supset \neg B))$ ;
- (у)  $((A \vee B) \equiv \neg(A \supset B))$ ;
- (ф)  $(\neg(A \& B) \equiv (\neg A \vee \neg B))$ ;
- (х)  $(\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \& \neg B))$ ;
- (ц)  $\vdash (\neg \neg \neg A \equiv \neg A)$ .

29. Доказать, что если формула  $A$  выводима в ИВ, то секвенция  $\vdash A$  выводима в ИС.

30\*. Доказать, что:

(а) если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  выводима в ИС, то  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  в ИВ;

(б) если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash$  выводима в ИС, то  $A_1, \dots, A_n \vdash (B \& \neg B)$  в ИВ;

(в) если секвенция  $\vdash B$  выводима в ИС, то формула  $B$  выводима в ИВ.

31. Доказать, что:

(а) все аксиомы ИВ тождественно истинны;

(б) все выводимые в ИВ формулы тождественно истинны.

32. Доказать теорему о полноте ИВ: каждая тождественно истинная формула выводима в ИВ.

33. Найти такие формулы  $A$  и  $B$ , что из выводимости в ИВ формулы  $A$  следует выводимость  $B$ , но неверно, что  $A \vdash B$ .

34. Пусть  $A$  — формула и  $P_1, \dots, P_n$  — все ее переменные. Доказать, что если  $A$  невыводима в ИВ, то существуют такие формулы  $B_1, \dots, B_n$ , что в ИВ выводима формула  $\neg A (P_1 \setminus B_1, \dots, P_n \setminus B_n)$ .

35. Пусть  $A$  и  $B$  — формулы. Положим

$$A \approx B \Leftrightarrow \vdash (A \equiv B) \text{ в ИВ; } \|A\| \Leftrightarrow \{B \mid A \approx B\}.$$

Доказать, что:

(а)  $\approx$  есть отношение эквивалентности на множестве  $F$  всех формул;

(б) фактормножество  $F/\approx \Leftrightarrow \{\|A\| \mid A \in F\}$  есть булева алгебра, где  $\|A\| \leq \|B\| \Leftrightarrow \vdash (A \supset B)$  в ИВ (эта алгебра называется алгеброй Линденбаума для ИВ);

(в)  $A$  выводима в ИВ тогда и только тогда, когда  $\|A\|$  есть наибольший элемент 1 алгебры  $F/\approx$ .

36. Пусть  $\mathcal{B}$  — булева алгебра. Поставим ей в соответствие логическую матрицу  $\langle \mathcal{B}; \{1\}, \&, \vee, \supset, \neg \rangle$ , где  $x \& y = x \cap y$ ,  $x \vee y = x \cup y$ ,  $x \supset y = \neg x \cup y$ ,  $\neg x = \neg x$ . Доказать, что  $A$  выводима в ИВ тогда и только тогда, когда  $A$  общезначима во всех логических матрицах, соответствующих булевым алгебрам.

37\*. (а) Пусть  $T$  — ультрафильтр на алгебре Линденбаума  $F/\approx$  (см. задачу 35). Для произвольной переменной  $P$  положим значение  $P$  равным 1, если  $\|P\| \in T$ , и 0 в противном случае. Доказать, что для любой формулы  $A$

$$A \in T \Leftrightarrow A \text{ истинна при этих значениях переменных.}$$

(б) Вывести из (а) теорему о полноте исчисления ИВ (см. задачу 32).

38. Пусть  $A$  — формула,  $\Delta$  — система формул,  $\mathbb{M}$  — логическая матрица. Доказать, что если все формулы из  $\Delta$  общезначимы в  $\mathbb{M}$  и непосредственное следствие общезначимых в  $\mathbb{M}$  формул есть общезначимая в  $\mathbb{M}$  формула, а формула  $A$  не общезначима в  $\mathbb{M}$ , то  $A$  независима от  $\mathbb{M}$ .

39. Пусть  $M = \{0, 1, 2\}$ ,  $D = \{0\}$ ,  $x \& y = \max\{x, y\}$ ,  $x \vee y = \min\{x, y\}$ ,  $x \supset y = \max\{0, y - x\}$ ,  $\neg x = 2 - x$ . Доказать, что формула

$$A = ((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R)))$$

не зависит от  $\Delta$ , где  $\Delta = \{(P \supset (Q \supset P)), ((\neg P \supset \neg Q) \supset (Q \supset P))\}$ , используя логическую матрицу  $\langle M; D, \&, \vee, \supset, \neg \rangle$ .

40\*. Доказать независимость схем аксиом исчисления ИВ.

41. Пусть  $L$  — исчисление высказываний со схемами аксиом:

L1.  $(A \supset (B \supset A))$ ,

L2.  $((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)))$ ,

L3.  $((\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A))$

и правилом вывода  $\frac{A, (A \supset B)}{B}$ .

(а) Доказать, что все выводимые в  $L$  формулы выводимы также в ИВ.

(б) Доказать теорему дедукции для  $L$ .

(в) Положим  $(A \& B) = \neg(A \supset \neg B)$ ,  $(A \vee B) = (\neg A \supset B)$ . Доказать, что все выводимые в ИВ формулы выводимы в  $L$ .

42. Доказать, что:

(а) все выводимые в ИИВ формулы выводимы в ИВ;

(б)  $(\neg \neg P \supset P)$ ,  $(P \vee \neg P)$  не выводимы в ИИВ.

43. Для исчисления ИИВ доказать теорему о дедукции: если  $\Gamma, A \vdash_{\text{ИИВ}} B$ , то  $\Gamma \vdash_{\text{ИИВ}} (A \supset B)$ .

44. Пусть ИИС — исчисление секвенций, которое отличается от ИС отсутствием правила И1. Доказать, что:

(а) если формула  $A$  выводима в ИИВ, то секвенция  $\vdash A$  выводима в ИИС;

(б) если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  выводима в ИИС, то имеем  $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{ИИВ}} B$ ;

(в) если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash$  выводима в ИИС, то имеем  $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{ИИВ}} (B \& \neg B)$ ;

(г) если секвенция  $\vdash B$  выводима в ИИС, то формула  $B$  выводима в ИИВ.

45. Доказать, что:

(а)  $\vdash_{\text{ИИВ}} (A \supset \neg \neg A)$ ;

(б)  $\vdash_{\text{ИИВ}} \neg \neg (\neg \neg A \supset A)$ ;

(в)  $\neg \neg A, \neg \neg (A \supset B) \vdash_{\text{ИИВ}} \neg \neg B$ .

46\*. Доказать, что если формула  $A$  выводима в ИВ, то формула  $\neg \neg A$  выводима в ИИВ.



47. Пусть  $M_n = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $D = \{0\}$ ,  $x \& y = \max\{x, y\}$ ,  $x \vee y = \min\{x, y\}$ ,  $x \supset y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq y, \\ y, & \text{если } x < y, \end{cases}$   $\neg x = \begin{cases} 0, & \text{если } x = n, \\ n, & \text{если } x < n. \end{cases}$

Доказать, что:

(а) все выводимые в ИИВ формулы общезначимы в

$$\mathbb{M}_n = \langle M_n; D, \&, \vee, \supset, \neg \rangle \quad (n = 1, 2, \dots);$$

(б) формулы

$$A_n = ((P_1 \equiv P_2) \vee \dots \vee (P_1 \equiv P_{n+1}) \vee \dots \vee (P_n \equiv P_{n+1}))$$

невыводимы в ИИВ ( $n = 1, 2, \dots$ ).

48\*. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; D, \&, \vee, \supset, \neg \rangle$  — логическая матрица такая, что множество общезначимых в  $\mathbb{M}$  формул совпадает с множеством формул, выводимых в ИИВ. Доказать, что множество  $M$  бесконечно.

#### § 4. ЯЗЫК ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Пусть  $I, J, K$  — произвольные множества. Рассмотрим алфавит  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3 \cup \mathcal{G}_4 \cup \mathcal{G}_5 \cup \mathcal{G}_6$ , где

$\mathcal{G}_1 = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$  — предметные переменные,

$\mathcal{G}_2 = \{P_i^n\}_{i \in I} \ (n_i \in \mathcal{N})$  — предикатные символы,

$\mathcal{G}_3 = \{f_j^n\}_{j \in J} \ (n_j \in \mathcal{N})$  — функциональные символы,

$\mathcal{G}_4 = \{a_k\}_{k \in K}$  — предметные константы,

$\mathcal{G}_5 = \{\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists\}$  — логические символы,

$\mathcal{G}_6 = \{., (, )\}$  — вспомогательные символы.

$P_i^n$  называется  $n_i$ -местным предикатным символом,  $f_j^n$  называется  $n_j$ -местным функциональным символом, символ  $\forall$  называется квантором общности, а символ  $\exists$  — квантором существования. Названия остальных символов и сокращенные обозначения формул приведены в § 1.

$\sigma = \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3 \cup \mathcal{G}_4$  назовем сигнатурой. На дальнейшее зафиксируем некоторую сигнатуру  $\sigma$ .

Дадим определение *терма сигнатуры*  $\sigma$ .

1. Предметные переменные и предметные константы являются термами.

2. Если  $f^n$  —  $n$ -местный функциональный символ из  $\sigma$  и  $t_1, \dots, t_n$  — термы, то  $f^n(t_1, \dots, t_n)$  — терм.

3. Никаких термов, кроме построенных по п.1, 2, нет.

*Атомной формулой сигнатуры  $\sigma$*  назовем произвольное слово  $P^n(t_1, \dots, t_n)$ , где  $P^n$  —  $n$ -местный предикатный символ из  $\sigma$ , а  $t_1, \dots, t_n$  — термы сигнатуры  $\sigma$ .

Дадим определение формулы сигнатуры  $\sigma$ .

1. Атомная формула есть формула.

2. Если  $A$  и  $B$  — формулы, то  $\neg A$ ,  $(A \supset B)$ ,  $(A \& B)$ ,  $(A \vee B)$  есть формулы.

3. Если  $A$  — формула, а  $x$  — предметная переменная, то  $\forall xA$ , и  $\exists xA$  есть формулы. (В этом случае  $\forall xA$  и  $\exists xA$  называются *областью действия квантора  $\forall x$  или  $\exists x$  соответственно*.)

4. Никаких формул, кроме построенных по пп. 1–3, нет.

Вхождение переменной  $x$  в формулу называется *связанным*, если оно находится в области действия квантора  $\forall x$  или  $\exists x$ , и *свободным* в противном случае. Переменная  $x$  называется *свободной переменной* формулы  $A$ , если в  $A$  имеется свободное вхождение  $x$ , и *связанной переменной* формулы  $A$ , если в  $A$  имеется связанное вхождение  $x$ . Терм  $t$  называется *свободным для переменной  $x$*  в формуле  $A$ , если никакое свободное вхождение  $x$  в  $A$  не находится в области действия никакого квантора  $\forall u$  или  $\exists u$ , где  $u$  — переменная, входящая в  $t$ . Формула  $A$  называется *замкнутой формулой* или *предложением*, если всякое вхождение переменной в  $A$  является связанным.

Подслово формулы  $A$ , которое само является формулой, называется *подформулой* формулы  $A$ .

В дальнейшем используем символы  $x, y, z, x_1, x_2, \dots$  для обозначения предметных переменных,  $t_1, t_2, \dots$  для обозначения термов,  $A, B, \dots$  для обозначения формул. В случаях, когда речь идет о формуле  $A$  и переменных  $x_1, \dots, x_n$ , используется также запись  $A(x_1, \dots, x_n)$ . Если  $A(x_1, \dots, x_n)$  — формула, то через  $A(t_1, \dots, t_n)$  обозначаем *результат подстановки термов  $t_1, \dots, t_n$  в  $A$  вместо всех свободных вхождений переменных  $x_1, \dots, x_n$* .

Пусть  $M$  — непустое множество и  $R^n$  — некоторое  $n$ -местное отношение на  $M$ .  $n$ -местным *предикатом на  $M$* , соответствующим отношению  $R^n$ , называется  $n$ -местная функция  $P^n$  из  $M$  в  $\{и, л\}$  такая, что для любых  $a_1, \dots, a_n \in M$

$$P^n(a_1, \dots, a_n) = и \Leftrightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R^n.$$

Алгебраической системой  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  сигнатуры  $\sigma$  называется непустое множество  $M$ , где каждому  $n$ -местному предикатному (функциональному) символу из  $\sigma$  сопоставлен  $n$ -местный предикат (функция) на  $M$ , а каждой предметной константе из  $\sigma$  сопоставлен некоторый элемент из  $M$ . Предикаты (функции, элементы), сопоставленные символам из  $\sigma$ , обозначаем теми же символами.

Алгебраическую систему  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  называем моделью, если  $\sigma$  не содержит функциональных символов.

Мощностью системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  называется мощность  $\overline{M}$  множества  $M$  и обозначается через  $\overline{\mathbb{M}}$ .

Пусть  $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ . Система  $\mathbb{M}_1 = \langle M; \sigma_1 \rangle$  называется обеднением системы  $\mathbb{M}_2 = \langle M; \sigma_2 \rangle$ , а  $\mathbb{M}_2$  — обогащением  $\mathbb{M}_1$ , если символы из  $\sigma_1$  интерпретируются одинаково в  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$ .

Пусть  $M_1 \subseteq M_2$ . Система (модель)  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$  называется подсистемой (подмоделью)  $\mathbb{M}_2 = \langle M_2; \sigma \rangle$ , а  $\mathbb{M}_2$  — расширением  $\mathbb{M}_1$ , если все символы из  $\sigma$  интерпретируются в  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$  одинаково на элементах из  $M_1$ . Если  $M_1 \neq M_2$ , то подсистема (расширение, подмодель) называется собственной.

Пусть  $t$  — терм сигнатуры  $\sigma$ , все переменные которого содержатся среди  $x_1, \dots, x_k$ ,  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  — алгебраическая система. Значение термина  $t$  при значениях переменных  $t_1, \dots, t_k \in M$  определяется по индукции.

1. Если  $t$  есть переменная  $x_i$ , то значение  $t$  есть  $t_i$ .
2. Если  $t$  есть  $f_1^n(t_1, \dots, t_n)$ , а значения  $t_1, \dots, t_n$  есть  $a_1, \dots, a_n$ , то значение  $t$  есть  $f_1^n(a_1, \dots, a_n)$ .

Предложением сигнатуры  $\sigma$ , относящимся к алгебраической системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , называется предложение сигнатуры  $\sigma_M = \sigma \cup M$ .

Истинностное значение предложения  $A$ , относящегося к  $\mathbb{M}$ , определим по индукции ( $\mathbb{M} \models A$  будет означать, что  $A$  истинно в  $\mathbb{M}$ ):

- (а)  $\mathbb{M} \models P_i^n(t_1, \dots, t_n)$ , где  $t_1, \dots, t_n$  — термы сигнатуры  $\sigma_M$  без переменных, тогда и только тогда, когда  $P_i^n(t_1, \dots, t_n)$  истинно в  $\mathbb{M}$ ;
- (б)  $\mathbb{M} \models (A \& B)$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{M} \models A$  и  $\mathbb{M} \models B$ ;
- (в)  $\mathbb{M} \models (A \vee B)$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{M} \models A$  или  $\mathbb{M} \models B$ ;
- (г)  $\mathbb{M} \models (A \supset B)$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{M} \not\models A$  или  $\mathbb{M} \models B$ ;
- (д)  $\mathbb{M} \models \neg A$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{M} \not\models A$ ;

(е)  $\mathbb{M} \models \forall x A(x)$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{M} \models A(m)$  для всех  $m \in M$ ;

(ж)  $\mathbb{M} \models \exists x A(x)$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{M} \models A(m)$  для некоторого  $m \in M$ .

Формула  $A(x_1, \dots, x_k)$  сигнатуры  $\sigma$ , все свободные переменные которой есть  $x_1, \dots, x_k$ , называется *истинной в  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  при значениях переменных  $m_1, \dots, m_k \in M$  соответственно*, если предложение  $A(m_1, \dots, m_k)$  истинно в  $\mathbb{M}$ . В противном случае  $A$  считается *ложной в  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$* .

1. Пусть  $f^1$  — одноместный,  $g^2$  — двуместный,  $h^3$  — трехместный функциональные символы. Являются ли термами слова:

(а)  $f^1(g^2(v_0, v_1))$ ;

(б)  $g^2(f^1(v_2, h^3(v_0, v_1, v_2)))$ ;

(в)  $f^1(g^2(v_0), h^3(v_0, v_1, v_2))$ ?

2. Пусть  $f^1, g^2, h^3$  те же, что в предыдущей задаче,  $P^1$  — одноместный,  $Q^3$  — трехместный предикатные символы. Являются ли формулами слова:

(а)  $Q^3(v_0, f^1(v_1), h^3(v_1, v_2, v_2))$ ;

(б)  $(P^1(v_0) \supset \forall v_1 (Q^3(v_0, v_1, v_2) \& P^1(g^2(v_0, v_1))))$ ;

(в)  $Q^3(P^1(v_0), f^1(v_1), f^1(v_2))$ ;

(г)  $f^1(h^3(v_0, v_1, v_2))$ ?

3. Показать, что выражение

$$\exists v_0 \forall v_1 \dots \forall v_v (P(v_1) \& \dots \& P(v_v)),$$

где  $P$  — одноместный предикатный символ, не является формулой.

4. Выписать все подформулы формулы:

(а)  $Q^2(f^1(v_0), g^2(v_0, v_1))$ ;

(б)  $(\exists v_0 Q^2(v_0, v_1) \supset \neg(P^1(g^2(v_0, v_1)) \& \forall v_2 P^1(v_2)))$ .

5. Описать множество термов от одной переменной  $v_0$ :

(а) и функционального символа  $f^1$ ;

(б) и функционального символа  $g^2$ .

6. Какие вхождения переменных являются свободными, а какие связанными в формулах:

- (а)  $\forall v_0 (P(v_0, v_1) \supset \forall v_1 Q(v_1))$ ;  
 (б)  $(\forall v_0 P(v_0, v_1) \supset \forall v_1 R(v_0, v_1))$ ;  
 (в)  $(\neg \exists v_2 Q(v_2, v_2) \& R(f(v_1, v_2)))$ ?

7. Является ли свободным для  $x$  в  $A$  терм  $t$ :

- (а)  $t = f(v_0, v_3)$ ,  $x = v_1$ ,  $A = \forall v_0 P(v_0, v_1)$ ;  
 (б)  $t = f(v_1, v_2)$ ,  $x = v_1$ ,  $A = (P(v_1, v_2) \supset \exists v_2 Q(v_2))$ ?

8. Доказать, что:

- (а) терм, не содержащий переменных, свободен для любой переменной в любой формуле;  
 (б) переменная  $x$  свободна для  $x$  в любой формуле;  
 (в) если  $A$  не содержит свободных вхождений  $x$ , то любой терм свободен для  $x$  в  $A$ .

9. Пусть  $\mathbb{M} = \langle \mathcal{N}; S^3, P^3 \rangle$ , где

$$S^3(x, y, z) = \text{и} \Leftrightarrow x + y = z, \quad P^3(x, y, z) = \text{и} \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

Записать формулу с одной свободной переменной  $x$ , истинную в  $\mathbb{M}$  тогда и только тогда, когда:

- (а)  $x = 0$ ;  
 (б)  $x = 1$ ;  
 (в)  $x = 2$ ;  
 (г)  $x$  четно;  
 (д)  $x$  нечетно;  
 (е)  $x$  — простое число.

10. Записать формулу с двумя свободными переменными  $x$  и  $y$ , истинную в  $\mathbb{M}$  из задачи 9 тогда и только тогда, когда:

- (а)  $x = y$ ;  
 (б)  $x \leq y$ ;  
 (в)  $x < y$ ;  
 (г)  $x$  делит  $y$ ;  
 (д)  $x$  и  $y$  являются простыми числами-близнецами.

11. Записать формулу с тремя свободными переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$ , истинную в  $\mathbb{M}$  из задачи 9 тогда и только тогда, когда:

- (а)  $z$  — наименьшее общее кратное  $x$  и  $y$ ;  
 (б)  $z$  — наибольший общий делитель  $x$  и  $y$ .

12. Записать предложение, выражающее в модели  $\mathbb{M}$  из задачи 9:

- (а) коммутативность сложения;  
 (б) ассоциативность сложения;  
 (в) коммутативность умножения;  
 (г) ассоциативность умножения;  
 (д) дистрибутивность сложения относительно умножения;  
 (е) бесконечность множества простых чисел;  
 (ж) всякое число есть сумма четырех квадратов;  
 (з) существование н.о.к. и н.о.д. для чисел, отличных от нуля.

13. Записать предложение, выражающее в модели  $\mathcal{M}$  из задачи 9:

- (а) несуществование единицы;
  - (б) простых чисел — конечное число;
  - (в) всякое число можно представить в виде суммы двух квадратов;
  - (г) для всякого числа существует строго меньшее число;
  - (д) существование наибольшего натурального числа.
- Истинны ли эти предложения в модели  $\mathcal{M}$ ?

14. Записать предложение, выражающее в модели  $\mathcal{M}$  из задачи 9:

- (а) простых чисел-близнецов бесконечно много;
- (б) всякое четное число, большее 2, есть сумма двух простых.

15. Записать предложение, выражающее в модели  $\mathcal{M}$  из задачи 9 то, что уравнение  $3x^2 + 2x + 1 = 0$  имеет в точности два различных корня.

16. Записать предложение, выражающее в модели  $\mathcal{M}$  из задачи 9, что система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 0, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решения.

17. Пусть  $M$  — множество точек, прямых и плоскостей 3-мерного евклидова пространства со следующими предикатами:

$$T(x) = \text{и} \Leftrightarrow x \text{ — точка};$$

$$Пр(x) = \text{и} \Leftrightarrow x \text{ — прямая};$$

$$Пл(x) = \text{и} \Leftrightarrow x \text{ — плоскость};$$

$$Л(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow x \text{ лежит на } y.$$

Записать следующие формулы:

- (а) через каждые две точки можно провести прямую; если эти точки различны, то такая прямая единственна;
- (б) через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость;
- (в) определение параллельных прямых;
- (г) определение параллельных плоскостей.

18. В модели из задачи 17 записать:

- (а) аксиому Евклида о параллельных прямых;
- (б) аксиому Лобачевского о параллельных прямых.

19. Подобрать предикаты и записать:

- (а) аксиомы Гильберта для евклидовой геометрии;
- (б) аксиомы для геометрии Лобачевского;
- (в) аксиомы для геометрии Римана.

20. Рассмотрим модели с одним 2-местным предикатом  $R(x, y)$ . Записать, что данный предикат  $R(x, y)$ :

- (а) рефлексивен;

- (б) симметричен;
- (в) транзитивен;
- (г) является отношением эквивалентности.

21. Записать в сигнатуре  $\tau = \langle \leq, = \rangle$ , где  $\leq$  и  $=$  есть 2-местные предикаты, аксиомы:

- (а) частично упорядоченного множества;
- (б) линейно упорядоченного множества.

22. Пусть  $M$  — частично упорядоченное множество и

$$Q^2(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow x \leq y.$$

Записать, что:

- (а)  $x$  есть наименьший элемент;
- (б)  $x$  есть минимальный элемент;
- (в)  $x$  лежит между  $y$  и  $z$ ;
- (г) множество плотно упорядоченно;
- (д) каждый максимальный элемент является минимальным.

23. Пусть  $M = P(A)$ , где  $A$  — некоторое множество, и

$$Q^2(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow x \subseteq y.$$

Записать, что:

- (а)  $x$  есть пересечение  $y$  и  $z$ ;
- (б)  $x$  есть объединение  $y$  и  $z$ ;
- (в)  $x = \emptyset$ ;
- (г)  $x = A$ ;
- (д)  $x$  есть дополнение  $y$ .

24. Рассмотрим  $\mathbb{M} = \langle P(A); =, f^2, g^2 \rangle$ , где  $f^2(x, y) = x \cap y$ ,  $g^2(x, y) = x \cup y$ ,  $=$  — предикат равенства множеств. Записать, что:

- (а)  $x \subseteq y$ ;
- (б)  $x$  есть одноэлементное множество.

25. Записать в сигнатуре  $\tau = \langle \leq, = \rangle$  аксиомы:

- (а) упорядоченного множества с наибольшим и наименьшим элементом;
- (б) дискретно упорядоченного множества;
- (в) решетки;
- (г) дистрибутивной решетки;
- (д) дедекиндовой решетки;
- (е) дистрибутивной решетки с относительными дополнениями;
- (ж) булевой алгебры;
- (з) атомной булевой алгебры.

26. Записать в подходящей сигнатуре аксиомы:

- (а) квазигруппы;
- (б) лупы;
- (в) полугруппы;

- (г) коммутативной полугруппы;
- (д) коммутативной полугруппы с сокращением.

27. Записать в подходящей сигнатуре аксиомы:

- (а) группы;
- (б) абелевой группы;
- (в) упорядоченной абелевой группы;
- (г) полной группы.

28. Записать в подходящей сигнатуре аксиомы:

- (а) кольца;
- (б) ассоциативного, коммутативного кольца;
- (в) кольца Ли;
- (г) области целостности;
- (д) тела;
- (е) поля;
- (ж) алгебраически замкнутого поля;
- (з) вещественно замкнутого поля.

29. Пусть  $\mathbb{M} = \langle \mathcal{N}; P^1, g^1, 0 \rangle$ , где  $g^1(x) = x + 1$ , а  $P^1$  — произвольный одноместный предикат, 0 — нуль. Записать аксиому индукции для  $P^1$ .

30. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; Q^2, P^1 \rangle$ , где  $M$  — вполне упорядоченное множество,  $Q^2(x, y) \Leftrightarrow x \leq y$ ,  $P^1$  — произвольный одноместный предикат. Записать аксиому трансфинитной индукции для  $P^1$ .

## § 5. ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Формулу  $A$  сигнатуры  $\sigma$  назовем *выполнимой*, если существует такая алгебраическая система  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , что  $A$  истинна в  $\mathbb{M}$  при некоторых значениях свободных переменных. Формулу  $A$  сигнатуры  $\sigma$  назовем *тождественно истинной* (или *тавтологией*), если  $A$  истинна в любой алгебраической системе сигнатуры  $\sigma$  при любых значениях свободных переменных. Будем говорить, что формула  $A$  *семантически следует из множества формул*  $\Gamma$  (символически  $\Gamma \models A$ ), если для любой алгебраической системы  $\mathbb{M}$  из истинности в  $\mathbb{M}$  всех формул из  $\Gamma$  при некоторых значениях переменных следует истинность  $A$  в  $\mathbb{M}$  при тех же значениях переменных. Если  $A \models B$  и  $B \models A$ , то пишем  $A \sim B$ .

Формула вида  $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n A$ , где  $A$  — бескванторная формула,  $Q_i$  есть  $\forall$  или  $\exists$ , называется *предваренной* (или *пренексной*) *нормальной формой*. Если все  $Q_i$  есть  $\forall$ , то эта форма называется  $\forall$ -*формулой* (или *универсальной формулой*); если все  $Q_i$  есть  $\exists$ , то эта форма называется  $\exists$ -*формулой*. Если существует  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) такое, что  $Q_1, \dots, Q_i$  есть



$\exists$ , а  $Q_{i+1}, \dots, Q_n$  есть  $\forall$ , то эта форма называется *скулемовской нормальной формой* (или  $\exists\forall$ -формулой).

Пусть  $P$  — одноместный предикатный символ, не входящий в  $\sigma$ . Любой формуле  $A$  сигнатуры  $\sigma$  сопоставим формулу  $\rho_P(A)$  (называемую *релятивизацией  $A$  относительно  $P$* ) следующим образом

$$\rho_P(B) = B \text{ для атомной формулы } B,$$

$$\rho_P((B_1 \& B_2)) = (\rho_P(B_1) \& \rho_P(B_2)),$$

$$\rho_P((B_1 \vee B_2)) = (\rho_P(B_1) \vee \rho_P(B_2)),$$

$$\rho_P((B_1 \supset B_2)) = (\rho_P(B_1) \supset \rho_P(B_2)),$$

$$\rho_P(\neg B) = \neg \rho_P(B),$$

$$\rho_P(\forall x B) = \forall x (P(x) \supset \rho_P(B)),$$

$$\rho_P(\exists x B) = \exists x (P(x) \& \rho_P(B)).$$

Пусть  $\sigma$  содержит двуместный предикатный символ  $=$ . Обозначим через  $KE_\sigma$  класс алгебраических систем сигнатуры  $\sigma$  таких, что в системах из класса  $KE_\sigma$  соотношение  $x = y$  истинно в том и только в том случае, когда элементы  $x$  и  $y$  совпадают. Системы из класса  $KE_\sigma$  называем *нормальными системами*.

1. Доказать, что формула  $A$  сигнатуры  $\sigma$  выполнима в алгебраической системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  тогда и только тогда, когда  $A$  выполнима в любом обогащении  $\mathbb{M}' = \langle M; \sigma' \rangle$ .

2. Доказать, что для любого предложения  $A$  сигнатуры  $\sigma$ , относящегося к алгебраической системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , имеем  $\mathbb{M} \models A$  или  $\mathbb{M} \models \neg A$ .

3. Доказать, что:

(а)  $A$  выполнима тогда и только тогда, когда  $\neg A$  не тождественно истинна;

(б)  $A$  тождественно истинна тогда и только тогда, когда  $\neg A$  невыполнима.

4. Доказать, что бескванторная формула истинна тогда и только тогда, когда она может быть получена подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний.

5. (а) Доказать, что если замкнутая  $\forall$ -формула истинна в алгебраической системе, то она истинна в любой ее подсистеме.

(б) Доказать, что если замкнутая  $\forall$ -формула истинна в алгебраической системе, то она истинна в любом ее расширении.

(в) Привести пример формулы  $A$  и алгебраической системы  $\mathbb{M}$  таких, что  $\mathbb{M} \models A$  и  $A$  ложна в некотором расширении и некоторой подсистеме системы  $\mathbb{M}$ .

6. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  есть подсистема системы  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$ . Доказать, что для любого предложения  $A$  сигнатуры  $\sigma$ , относящегося к алгебраической системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ ,  $\mathbb{M} \models A$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{M}_2 \models \rho_P(A)$ , где  $\mathbb{M}_2 = \langle M_1; \sigma, P \rangle$  есть обогащение  $\mathbb{M}_1$ , а  $\rho_P(A)$  — релятивизация формулы  $A$ , причем для любого  $a \in M_1$

$$\mathbb{M}_2 \models P(a) \Leftrightarrow a \in M.$$

7. Выполнимы ли формулы:

- (а)  $\exists x P(x)$ ;
- (б)  $\forall x P(x)$ ;
- (в)  $\exists x \forall y (Q(x, x) \& \neg Q(x, y))$ ;
- (г)  $\exists x \exists y (P(x) \& \neg P(y))$ ;
- (д)  $\exists x \forall y (Q(x, y) \supset \forall z R(x, y, z))$ ;
- (е)  $(P(x) \supset \forall y P(y))$ ?

8. Являются ли тождественно истинными формулы:

- (а)  $(\exists x P(x) \supset \forall x P(x))$ ;
- (б)  $\neg(\exists x P(x) \supset \forall x P(x))$ ;
- (в)  $(\exists x \forall y Q(x, y) \supset \forall y \exists x Q(x, y))$ ;
- (г)  $(\forall x \exists y Q(x, y) \supset \exists y \forall x Q(x, y))$ ?

9. Пусть  $A(t)$  получается из  $A(x)$  заменой всех свободных вхождений переменной  $x$  на терм  $t$ . Доказать тождественную истинность следующих формул, если терм  $t$  свободен для  $x$  в  $A(x)$ :

- (а)  $\forall x A(x) \supset A(t)$ ;
- (б)  $A(t) \supset \exists x A(x)$ .

10. Привести примеры формул  $A(x)$  и термов  $t$  таких, чтобы формулы (а) и (б) предыдущей задачи не были тождественно истинными.

11\*. Доказать, что формула

$$(\forall x \exists y P(x, y) \& \forall x \forall y (P(x, y) \supset \neg P(y, x))) \& \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \supset (P(y, z) \supset P(x, z)))$$

выполнима в некоторой бесконечной модели и ложна во всех конечных.

12\*. Доказать, что формула

$$\exists x \forall y (F(x, y) \supset (\neg F(y, x) \supset (F(x, x) \equiv F(y, y))))$$

истинна в любой модели, содержащей не более трех элементов.

13\*. Доказать, что следующие формулы истинны во всякой конечной модели, но не тождественно истинны:

- (а)  $\exists x \forall y \exists z ((F(y, z) \supset F(x, z)) \supset (F(x, x) \supset F(y, x)))$ ;  
 (б)  $(\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (F(x_1, x_1) \& (F(x_1, x_3) \supset (F(x_1, x_2) \vee F(x_2, x_3)))) \supset \exists y \forall z F(y, z))$ .

14. Записать формулу с одноместными предикатами, выполняемую лишь в моделях, содержащих не менее пяти элементов.

15. Доказать тождественную истинность следующих формул:

- (а)  $(\neg \exists x A(x) \supset \neg \forall x A(x))$ ;  
 (б)  $(\exists x (A(x) \& (B \supset C(x))) \supset \forall x (A(x) \supset \neg C(x)) \supset \neg B)$ , где  $x$  не свободна в  $B$ ;  
 (в)  $(\forall x (A(x) \supset \neg B(x)) \supset \neg (\exists x A(x) \& \forall x B(x)))$ ;  
 (г)  $(\forall x (A(x) \supset \neg B(x)) \supset \neg (\forall x A(x) \& \exists x B(x)))$ .

16. Доказать, что если  $B$  не содержит свободных вхождений  $x$ , то:

- (а)  $\neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$ ;  
 (б)  $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$ ;  
 (в)  $(\forall x A(x) \& B) \sim \forall x (A(x) \& B)$ ;  
 (г)  $(B \& \forall x A(x)) \sim \forall x (B \& A(x))$ ;  
 (д)  $(\exists x A(x) \& B) \sim \exists x (A(x) \& B)$ ;  
 (е)  $(B \& \exists x A(x)) \sim \exists x (B \& A(x))$ ;  
 (ж)  $(B \vee \forall x A(x)) \sim \forall x (B \vee A(x))$ ;  
 (з)  $(\forall x A(x) \vee B) \sim \forall x (A(x) \vee B)$ ;  
 (и)  $(\exists x A(x) \vee B) \sim \exists x (A(x) \vee B)$ ;  
 (к)  $(B \vee \exists x A(x)) \sim \exists x (B \vee A(x))$ ;  
 (л)  $(\forall x A(x) \supset B) \sim \exists x (A(x) \supset B)$ ;  
 (м)  $(B \supset \forall x A(x)) \sim \forall x (B \supset A(x))$ ;  
 (н)  $(\exists x A(x) \supset B) \sim \forall x (A(x) \supset B)$ ;  
 (о)  $(B \supset \exists x A(x)) \sim \exists x (B \supset A(x))$ ;  
 (п)  $(\forall x A(x) \& \forall x C(x)) \sim \forall x (A(x) \& C(x))$ ;  
 (р)  $(\exists x A(x) \vee \exists x C(x)) \sim \exists x (A(x) \vee C(x))$ ;  
 (с)  $\forall x A(x) \sim \forall y A(y)$ , где  $A(x)$  не содержит  $y$ ,  $A(y)$  получается заменой всех свободных вхождений  $x$  в  $A(x)$  на  $y$ ;  
 (т)  $\exists x A(x) \sim \exists y A(y)$ , где  $A(x)$  не содержит  $y$ ,  $A(y)$  получается заменой всех свободных вхождений  $x$  в  $A(x)$  на  $y$ ;  
 (у)  $\forall x B \sim B$ ;  
 (ф)  $\exists x B \sim B$ .

17. Пусть  $A$ —формула,  $B$ —подформула формулы  $A$ ,  $A_1$ —результат замены некоторого вхождения  $B$  в  $A$  на формулу  $B_1$ . Доказать, что если  $B \sim B_1$ , то  $A \sim A_1$  (теорема о замене).

18. Доказать, что для любой формулы существует эквивалентная ей пренексная нормальная форма.

19. Привести к пренексной нормальной форме, считая  $A$  и  $B$  бескванторными формулами:

- (а)  $\neg \exists x \forall y \exists z \forall u A$ ;
- (б)  $(\exists x \forall y A(x, y) \& \exists x \forall y B(x, y))$ ;
- (в)  $(\exists x \forall y A(x, y) \vee \exists x \forall y B(x, y))$ ;
- (г)  $(\exists x \forall y A(x, y) \supset \exists x \forall y B(x, y))$ .

20. Пусть  $\sigma = \langle \{P_i^n\}_{i \in I}, \{f_j^n\}_{j \in J}, \{a_k\}_{k \in K} \rangle$ ,  $T$  — множество всех термов сигнатуры  $\sigma$ . Определить на  $T$  предикаты и функции так, чтобы  $T$  стало алгебраической системой сигнатуры  $\sigma$ .

21. (а) Пусть формула сигнатуры  $\sigma$  имеет вид

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m B(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

для некоторой формулы  $B$  (возможно, содержащей кванторы);  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  —  $n$ -местные функциональные символы, не входящие в  $\sigma$ . Доказать, что для любой системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  существует обогащение  $\mathbb{M}_1$  сигнатуры  $\sigma' = \sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  такое, что

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\exists y_1 \dots \exists y_m B(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \equiv \\ \equiv B(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))). \end{aligned}$$

(б) Доказать, что для любого предложения  $A$  сигнатуры  $\sigma$  существует некоторая  $\forall$ -формула  $A_1$  сигнатуры  $\sigma'$ , полученной добавлением к  $\sigma$  новых функциональных символов, обладающая следующим свойством: для любой системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  существует обогащение  $\mathbb{M}_1$  сигнатуры  $\sigma'$  такое, что

$$\mathbb{M}_1 \models (A \equiv A').$$

(Добавленные функции в  $\mathbb{M}_1$  называются *скулемовскими функциями*.)

22. Для формулы  $\forall x \exists z \forall y \exists u ((y > z \supset y > x) \& (u < z) \& \neg (u < x))$  построить  $\forall$ -формулу, существование которой утверждается в задаче 21 (б). Для системы  $\mathbb{M} = \langle \mathcal{N}; < \rangle$  найти требуемое обогащение.

23. Для формулы  $\forall x \forall y \exists z \exists t (P(x, t) \& \neg P(y, z))$  построить  $\forall$ -формулу, существование которой утверждается в задаче 21 (б). Для любой системы  $\mathbb{M} = \langle M; P \rangle$ , где  $M = \{0, 1\}$ , найти подходящее обогащение.

24. Для формулы

$$\forall x \forall y \exists z \exists v \forall t (\neg S(x, y, y) \supset (S(z, v, x) \& P(v, t, t)))$$

и системы  $\mathbb{M} = \langle \mathcal{N}; S^3, P^3 \rangle$  из задачи 9 из § 4 построить скулемовские функции (см. задачу 21 (б)).

25. Доказать, что если формула сигнатуры  $\sigma$  выполнима, то она выполнима на некоторой алгебре термов сигнатуры  $\sigma' \supseteq \sigma$ .

26\*. (а) Пусть  $A(u, x, y)$  не содержит свободных переменных, отличных от  $u, x$  и  $y$ . Доказать, что формула  $\exists u \forall x \exists y A(u, x, y)$  тождественно истинна тогда и только тогда, когда тождественно истинна формула

$$\exists u (\forall x (\exists y A(u, x, y) \supset P(u, x)) \supset \forall x P(u, x)),$$

где  $P$  — двуместный предикатный символ, не входящий в  $A(u, x, y)$ .

(б) Доказать, что для любого предложения  $A$  можно построить скулемовскую нормальную форму  $A^*$  такую, что  $A$  тождественно истинно тогда и только тогда, когда  $A^*$  тождественно истинна.

27. Пусть  $A^*$  — скулемовская нормальная форма предложения  $A$ . Показать, что  $A \sim A^*$  в общем случае неверно. Всегда ли верно, что  $A \models A^*$ ? Аналогичный вопрос для  $A^* \models A$ .

28. Привести к скулемовской нормальной форме:

(а)  $(\exists x \forall y Q(x, y) \supset \forall x \exists y Q(x, y))$ ;

(б)  $\exists x \forall y \exists z \forall v R(x, y, z, v)$ ;

(в)  $\forall x \exists y \forall v \exists z R(x, y, z, v)$ .

29. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  — произвольная модель и  $M \subseteq M_1$ . Доказать, что существует расширение  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$  модели  $M$  такое, что для любой формулы  $A(x_1, \dots, x_n)$  и любых элементов  $a_1, \dots, a_n \in M$

$$\mathbb{M} \models A(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathbb{M}_1 \models A(a_1, \dots, a_n).$$

30. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  и  $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ . Пусть  $C(x)$  — формула со свободной переменной  $x$  сигнатуры  $\sigma_M = \sigma \cup M$ . Доказать, что

$$\mathbb{M} \models \exists x C(x) \Leftrightarrow \mathbb{M} \models (C(m_1) \vee \dots \vee C(m_n));$$

$$\mathbb{M} \models \forall x C(x) \Leftrightarrow \mathbb{M} \models (C(m_1) \& \dots \& C(m_n)).$$

31. Доказать, что если алгебраическая система  $\mathbb{M}$  конечна, то для любого предложения  $A$  можно построить бескванторное предложение  $A^*$ , относящееся к  $\mathbb{M}$ , такое, что  $\mathbb{M} \models (A \equiv A^*)$ .

32. Доказать, что если алгебраическая система конечна, то для любой формулы можно в конечное число шагов проверить, выполнима она на этой системе или нет.

33. Доказать, что формула вида  $\forall x_1 \dots \forall x_m A(x_1, \dots, x_m)$ , где  $A(x_1, \dots, x_m)$  — бескванторная формула без функциональных симво-

лов и констант, тождественно истинна тогда и только тогда, когда она истинна в любой модели из  $m$  элементов.

34. Доказать, что формула вида  $\exists x_1 \dots \exists x_m A(x_1, \dots, x_m)$ , где  $A(x_1, \dots, x_m)$  — бескванторная формула без функциональных символов и констант, тождественно истинна тогда и только тогда, когда она истинна в любой одноэлементной модели.

35. Доказать, что формула вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_m \exists y_1 \dots \exists y_n A(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

где  $A(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  — бескванторная формула без функциональных символов и констант, тождественно истинна тогда и только тогда, когда она истинна в любой модели из  $m$  элементов.

36\*. Пусть  $A$  — формула сигнатуры  $\sigma = \langle P_1, \dots, P_n \rangle$ , где  $P_1, \dots, P_n$  — одноместные предикатные символы. Доказать, что  $A$  выполнима тогда и только тогда, когда  $A$  выполнима в модели, содержащей не более  $2^n$  элементов.

37. Выполнимы ли формулы:

- (а)  $\forall x \exists y (P(x) \equiv \neg P(y))$ ;
- (б)  $\exists x \forall y \exists z (P_1(x) \equiv (P_2(y) \vee P_3(z)))$ ;
- (в)  $\exists y \forall x (P(x) \equiv \neg P(y))$ ?

38. Пусть  $\sigma = \langle P_1, \dots, P_n \rangle$ , где  $P_1, \dots, P_n$  — одноместные предикатные символы. Доказать, что для любого предложения  $A$  сигнатуры  $\sigma$  существует формула  $B$ , эквивалентная  $A$ , построенная с помощью  $\&$ ,  $\vee$  и  $\neg$  из  $\exists$ -составляющих, т. е. формул вида  $\exists x(B_1 \& \dots \& B_s)$ , где  $s \geq 1$  и  $B_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) имеет вид  $P(x)$  или  $\neg P(x)$  для некоторого  $P$  из  $\sigma$ .

39. Для  $\exists$ -составляющей  $C$  (см. задачу 38) обозначим через  $C(B_1, \dots, B_n)$  формулу, полученную из  $C$  стиранием квантора  $\exists x$  и заменой всех вхождений подформул  $P_1(x), \dots, P_n(x)$  в  $C$  на  $B_1, \dots, B_n$  соответственно. Доказать, что формула

$$A = (C_1 \& \dots \& C_k \& \neg C_{k+1} \& \dots \& \neg C_{k+m}),$$

где  $C_1, \dots, C_{k+m}$  —  $\exists$ -составляющие,  $k \geq 1$ ,  $m \geq 0$ , выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула алгебры высказываний

$$A_1 = (C_1(B_{11}, \dots, B_{1n}) \& \neg C_{k+1}(B_{11}, \dots, B_{1n}) \& \dots \& \neg C_{k+m}(B_{11}, \dots, B_{1n}) \& \dots$$

$$\dots \& C_k(B_{k1}, \dots, B_{kn}) \& \neg C_{k+1}(B_{k1}, \dots, B_{kn}) \& \dots \& \neg C_{k+m}(B_{k1}, \dots, B_{kn})).$$

40\*. Указать метод построения по любому предложению  $A$  с одно-местными предикатами формулы  $B$  исчисления высказываний такой, что выполнимость формулы  $A$  эквивалентна выполнимости  $B$ .

41. Пользуясь методом задачи 40, установить, выполнимы ли следующие формулы:

- (а)  $\neg \forall x (P(x) \supset \forall y (P(y) \supset ((Q(x) \supset \neg Q(y)) \vee \forall z P(z))))$ ;  
 (б)  $\forall x \exists y \neg (P(y) \supset ((P(x) \supset Q(x)) \supset ((Q(x) \supset R(x)) \supset R(y))))$ ;  
 (в)  $\forall x \exists z \forall y (((P(y) \& Q(z)) \supset (P(x) \vee R(z))) \supset (Q(x) \equiv \neg Q(y)))$ .

42. Написать предложение сигнатуры  $\langle = \rangle$ :

- (а) истинное во всех нормальных моделях, содержащих не более  $n$  элементов ( $n \geq 1$ ), и ложное в остальных нормальных моделях;  
 (б) истинное во всех нормальных моделях, содержащих не менее  $n$  элементов ( $n \geq 1$ ), и ложное в остальных нормальных моделях;  
 (в) истинное во всех нормальных моделях, содержащих в точности  $n$  элементов ( $n \geq 1$ ), и ложное в остальных нормальных моделях.

43. Пусть

$$\mathcal{E}_1 \triangleq \exists x (x = x),$$

$$\mathcal{E}_n \triangleq \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \right)$$

для  $n \geq 2$ .

(а) Доказать, что  $\mathcal{E}_n$  истинна во всякой нормальной модели, содержащей по крайней мере  $n$  элементов.

(б) Доказать эквивалентность следующих формул для нормальных моделей:

$$\exists v \left( \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \right) \& \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \neg (v = x_i) \right) \right),$$

$$\left( \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \right) \& \mathcal{E}_{n+1} \right).$$

(в) Доказать, что каждое предложение сигнатуры  $\langle = \rangle$  эквивалентно на нормальных моделях формуле, построенной из  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$  с помощью  $\&, \vee$  и  $\neg$ .

(г) Назовем спектром формулы  $A$  совокупность мощностей нормальных моделей, на которых выполняема формула  $A$ . Показать, что каждая выполнимая формула, построенная из  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$  с помощью  $\&, \vee$  и  $\neg$ , имеет спектр, являющийся объединением конечного числа интервалов вида

$$\{m \mid a \leq m \leq b\} \text{ и } \{m \mid m \geq a\} \quad (a \in \mathcal{N}, b \in \mathcal{N}).$$

(д) Показать, что предложение сигнатуры  $\langle = \rangle$  тождественно истинно на нормальных моделях тогда и только тогда, когда оно имеет спектр  $\{m \mid m \geq 1\}$ .

44. Найти бесконечную систему формул сигнатуры  $\langle = \rangle$ , выполнимую лишь в бесконечных нормальных моделях.

45\*. Привести пример формулы, ложной на всех нормальных моделях с нечетным числом элементов и такой, что для любого четного числа  $n$  существует нормальная модель мощности  $n$ , на которой эта формула истинна.

## § 6. ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Рассмотрим алфавит  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5 \cup \mathcal{C}_6$ , где  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_6$  взяты из § 4. Понятия и обозначения сигнатуры, терма, формулы, свободной и связанной переменной, предложения определяются, как в § 4.

В этом параграфе предполагается, что сигнатура конечна или счетна.

Определим *секвенциальное исчисление ИПС*. Алфавит исчисления ИПС есть  $\mathcal{C} \cup \{ \vdash \}$ . Понятия секвенции, правила вывода и т. п. определяются аналогично соответствующим понятиям для ИС (см. § 3).

Исчисление ИПС определяется следующими схемой аксиом и правилами вывода ( $A, B, C$  — произвольные формулы;  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  — произвольные последовательности формул, возможно, пустые;  $t$  — терм, свободный для  $x$  в  $A(x)$ ;  $A(t)$  получается из  $A(x)$  заменой всех свободных вхождений  $x$  на  $t$ ).

*Схема аксиом:*  $A \vdash A$ .

*Правила вывода:*

1.  $\frac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma \vdash (A \& B)}$  (введение  $\&$ );
2.  $\frac{\Gamma \vdash (A \& B)}{\Gamma \vdash A}$  (удаление  $\&$ );
3.  $\frac{\Gamma \vdash (A \& B)}{\Gamma \vdash B}$  (удаление  $\&$ );
4.  $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$  (введение  $\vee$ );
5.  $\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$  (введение  $\vee$ );
6.  $\frac{\Gamma_1 \vdash (A \vee B); \Gamma_2, A \vdash C; \Gamma_3, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$  (удаление  $\vee$ );
7.  $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \supset B)}$  (введение  $\supset$ );



8.  $\frac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash (A \supset B)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B}$  (удаление  $\supset$ );
9.  $\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}$  (введение  $\neg$ );
10.  $\frac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash \neg A}{\Gamma \vdash}$  (сведение к противоречию);
11.  $\frac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}$  (удаление  $\neg$ );
12.  $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}$  (уточнение);
13.  $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$  (расширение);
14.  $\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash C}$  (перестановка);
15.  $\frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}$  (сокращение);
16.  $\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}$ , где  $x$  не входит свободно в  $\Gamma$  (введение  $\forall$ );
17.  $\frac{\Gamma \vdash \forall A(x)}{\Gamma \vdash A(x)}$  (удаление  $\forall$ );
18.  $\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \exists x A(x)}$  (введение  $\exists$ );
19.  $\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash B}$ , где  $x$  не входит свободно в  $\Gamma, B$  (удаление  $\exists$ ).

Понятия вывода в ИПС и т. п. определяются аналогично соответствующим понятиям для ИС (см. § 3).

Определим исчисление ИП. Схемами аксиом исчисления ИП являются следующие выражения:

1.  $(A \supset (B \supset A))$ ;
2.  $((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)))$ ;
3.  $((A \& B) \supset A)$ ;
4.  $((A \& B) \supset B)$ ;
5.  $((A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \& C))))$ ;
6.  $(A \supset (A \vee B))$ ;
7.  $(B \supset (A \vee B))$ ;
8.  $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$ ;
9.  $((A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A))$ ;
10.  $(\neg \neg A \supset A)$ ;
11.  $(\forall x A(x) \supset A(t))$ ;
12.  $(A(t) \supset \exists x A(x))$ .

В схемах аксиом 1–10  $A, B, C$  — любые формулы; в схемах аксиом 11, 12  $A(x)$  — формула,  $t$  — терм, свободный для  $x$  в  $A(x)$ ,  $A(t)$  — формула, полученная из  $A(x)$  заменой всех свободных вхождений  $x$  на  $t$ .

*Правила вывода ИП:*

$$\text{I. } \frac{A, (A \supset B)}{B};$$

$$\text{II. } \frac{(C \supset A(x))}{(C \supset \forall y A(y))};$$

$$\text{III. } \frac{(A(x) \supset C)}{(\exists y A(y) \supset C)};$$

причем в правилах II и III  $x$  не входит свободно в  $C$ , а  $y$  не входит свободно в  $A(x)$  и  $y$  свободно для  $x$  в  $A(x)$ .

Формула  $B$  называется *непосредственным следствием* формул  $A$  и  $(A \supset B)$  по правилу I;  $(C \supset \forall y A(y))$  и  $(\exists y A(y) \supset C)$  представляют собой *непосредственные следствия* формул  $(C \supset A(x))$  по правилу II и  $(A(x) \supset C)$  по правилу III соответственно.

*Выводом в ИП* называется конечная последовательность формул  $A_1, \dots, A_n$  такая, что для каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )  $A_i$  есть либо аксиома, либо непосредственное следствие одной или двух предыдущих формул.

*Квазивывод из множества формул  $\Gamma$*  есть последовательность формул  $A_1, \dots, A_n$  такая, что для каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )  $A_i$  есть либо аксиома, либо одна из формул  $\Gamma$ , либо непосредственное следствие одной или двух предыдущих формул.

Для квазивывода  $A_1, \dots, A_n$  из множества  $\Gamma$  и каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) определим по индукции множество формул  $\Delta(A_i) \subseteq \Gamma$ :

- 1) если  $A_i$  есть аксиома, то  $\Delta(A_i) = \emptyset$ ;
- 2) если  $A_i \in \Gamma$ , то  $\Delta(A_i) = \{A_i\}$ ;
- 3) если  $A_i$  есть непосредственное следствие  $A_j$  и  $A_k$  ( $j, k < i$ ), то  $\Delta(A_i) = \Delta(A_j) \cup \Delta(A_k)$ ;
- 4) если  $A_i$  есть непосредственное следствие  $A_j$  ( $j < i$ ), то  $\Delta(A_i) = \Delta(A_j)$ .

*Выводом из  $\Gamma$  в ИП* называется квазивывод  $A_1, \dots, A_n$ , удовлетворяющий условию: если  $A_i$  есть непосредственное следствие формулы  $A_j = (C \supset A(x))$  по правилу II или формулы  $A_j = (A(x) \supset C)$  по правилу III, то  $x$  не входит свободно в формулы из  $\Delta(A_j)$ .

Формула  $A$  называется *выводимой в ИП* (символически:  $\vdash A$ ), если существует вывод в ИП, оканчивающийся формулой  $A$ .

Формула  $A$  называется *выводимой из  $\Gamma$  в ИП* (символически:  $\Gamma \vdash A$ ), если существует вывод из  $\Gamma$  в ИП, оканчивающийся формулой  $A$ .

Множество формул  $\Gamma$  назовем *непротиворечивым*, если не существует формулы  $A$  такой, что  $\Gamma \vdash A$  и  $\Gamma \vdash \neg A$ . В противном случае  $\Gamma$  назовем *противоречивым*.

Множество формул  $\Gamma$  сигнатуры  $\sigma$  назовем *полным*, если для любой замкнутой формулы сигнатуры  $\sigma$  выполняется  $\Gamma \vdash A$  или  $\Gamma \vdash \neg A$ . В противном случае  $\Gamma$  называется *неполным*.

1. Доказать, что любая секвенция, выводимая в ИС, выводима в ИПС.

2. Пусть  $A_1, \dots, A_n, A$  — формулы ИС,  $B$  — формула ИПС,  $A'_1, \dots, A'_n, A'$  — формулы, полученные из  $A_1, \dots, A_n, A$  в результате подстановки  $B$  вместо пропозициональной переменной  $P$ . Доказать, что если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash A$  выводима в ИС, то  $A'_1, \dots, A'_n \vdash A'$  выводима в ИПС.

3. Доказать, что правила из задач 3 и 6 из § 3 допустимы в ИПС.

4. Пусть  $u$  не входит свободно в  $A(x)$ ,  $u$  свободно для  $x$  в  $A(x)$ ,  $A(u)$  получается из  $A(x)$  заменой всех свободных вхождений  $x$  на  $u$ . Построить выводы в ИПС секвенций:

(а)  $\exists x A(x) \vdash \exists x A(x)$ ;

(б)  $\forall x A(x) \vdash \forall x A(x)$ .

5. Пусть  $u$  свободно для  $x$  в формулах  $A_1(x), \dots, A_n(x), B(x)$ . Доказать, что если в ИПС выводима  $A_1(x), \dots, A_n(x) \vdash B(x)$ , то выводима  $A_1(u), \dots, A_n(u) \vdash B(u)$ .

6. Пусть  $A$  не содержит свободных вхождений  $x$ . Доказать выводимость в ИПС секвенций:

(а)  $\vdash (\forall x A \equiv A)$ ;

(б)  $\vdash (\exists x A \equiv A)$ ;

(в)  $\vdash (\forall x \forall y B(x, y) \equiv \forall y \forall x B(x, y))$ ;

(г)  $\vdash (\exists x \exists y B(x, y) \equiv \exists y \exists x B(x, y))$ ;

(д)  $\vdash (\forall x \forall y B(x, y) \supset \forall y B(x, y))$ ;

(е)  $\vdash (\exists x B(x, x) \supset \exists x \exists y B(x, y))$ ;

(ж)  $\vdash (\exists x B(x) \equiv \neg \forall x \neg B(x))$ ;

(з)  $\vdash (\forall x B(x) \equiv \neg x \neg B(x))$ ;

(и)  $\vdash (\neg \forall x B(x) \equiv \exists x \neg B(x))$ ;

(к)  $\vdash (\neg \exists x B(x) \equiv \forall x \neg B(x))$ ;

(л)  $\vdash ((\forall x B(x) \& \forall x C(x)) \equiv \forall x (B(x) \& C(x)))$ ;

(м)  $\vdash ((\exists x B(x) \vee \exists x C(x)) \equiv \exists x (B(x) \vee C(x)))$ ;

- (н)  $\vdash ((A \& \forall x B(x)) \equiv \forall x (A \& B(x)))$ ;  
 (о)  $\vdash ((A \vee \exists x B(x)) \equiv \exists x (A \vee B(x)))$ ;  
 (п)  $\vdash ((A \& \exists x B(x)) \equiv \exists x (A \& B(x)))$ ;  
 (р)  $\vdash ((A \vee \forall x B(x)) \equiv \forall x (A \vee B(x)))$ ;  
 (с)  $\vdash (\exists x (B(x) \& C(x)) \supset (\exists x B(x) \& \exists x C(x)))$ ;  
 (т)  $\vdash ((\forall x B(x) \vee \forall x C(x)) \equiv \forall x (B(x) \vee C(x)))$ ;  
 (у)  $\vdash ((A \supset \forall x B(x)) \equiv \forall x (A \supset B(x)))$ ;  
 (ф)  $\vdash ((A \supset \exists x B(x)) \equiv \exists x (A \supset B(x)))$ ;  
 (х)  $\vdash ((\forall x B(x) \supset A) \equiv \exists x (B(x) \supset A))$ ;  
 (ц)  $\vdash ((\exists x B(x) \supset A) \equiv \forall x (B(x) \supset A))$ ;  
 (ч)  $\vdash (\exists x (B(x) \supset C(x)) \equiv (\forall x B(x) \supset \exists x C(x)))$ .

7. Доказать, что в ИПС выводимы секвенции:

- (а)  $(A \equiv B) \vdash (\neg A \equiv \neg B)$ ;  
 (б)  $(A \equiv B) \vdash ((A \& C) \equiv (B \& C))$ ;  
 (в)  $(A \equiv B) \vdash ((C \& A) \equiv (C \& B))$ ;  
 (г)  $(A \equiv B) \vdash ((A \vee C) \equiv (B \vee C))$ ;  
 (д)  $(A \equiv B) \vdash ((C \vee A) \equiv (C \vee B))$ ;  
 (е)  $(A \equiv B) \vdash ((A \supset C) \equiv (B \supset C))$ ;  
 (ж)  $(A \equiv B) \vdash ((C \supset A) \equiv (C \supset B))$ ;  
 (з)  $\forall x (A \equiv B) \vdash (\forall x A \equiv \forall x B)$ ;  
 (и)  $\forall x (A \equiv B) \vdash (\exists x A \equiv \exists x B)$ .

8. Пусть  $A$  — формула,  $B$  — подформула формулы  $A$ ,  $A_1$  — результат замены некоторого вхождения  $B$  в  $A$  на формулу  $B_1$ ,  $x_1, \dots, x_n$  — все свободные переменные формул  $A$  и  $A_1$ . Доказать, что в ИПС выводима секвенция  $\forall x_1 \dots \forall x_n (B \equiv B_1) \vdash (A \equiv A_1)$  (теорема о замене для ИПС).

9. Доказать, что для любой формулы  $A$  существует пренексная нормальная форма  $A'$  такая, что  $\vdash (A \equiv A')$  выводима в ИПС.

10. Найти пренексную нормальную форму для следующих формул:

- (а)  $(\forall x \exists y (A(x) \supset B(y, z)) \supset \exists x \forall z (B(x, z) \& A(y)))$ , где  $A$  и  $B$  — бескванторные формулы;  
 (б)  $(\forall x P(x) \supset \forall y (\forall z Q(x, z) \supset \forall u P(u)))$ .

11\*. Пусть  $A$  — формула, построенная из атомных формул и их отрицаний с помощью  $\&$ ,  $\vee$  и кванторов  $\forall$  и  $\exists$  по любым переменным. Пусть  $A^+$  — результат одновременной замены в  $A$   $\&$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\&$ ,  $\forall$  на  $\exists$ ,  $\exists$  на  $\forall$ , атомных формул их отрицаниями. Доказать, что в ИПС выводима секвенция  $\vdash (A^+ \equiv \neg A)$ .

12\*. Пусть  $A$  — формула, построенная из атомных формул и их отрицаний с помощью  $\&$ ,  $\vee$  и кванторов  $\forall$  и  $\exists$  по любым переменным. Пусть  $A'$  — результат одновременной замены в  $A$   $\&$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\&$ ,  $\forall$  на  $\exists$ ,  $\exists$  на  $\forall$ . Доказать, что в ИПС:

- (а) если выводима секвенция  $\vdash (A \supset B)$ , то выводима  $\vdash (B' \supset A')$ ;
- (б) если выводима секвенция  $\vdash (A \equiv B)$ , то выводима  $\vdash (A' \equiv B')$ .

13. Показать, что квазивывод в ИП из пустого множества формул есть вывод в ИП.

14. Являются ли выводами в ИП последовательности:

- (а)  $(\forall x \exists y A(x, y) \supset \exists y A(y, y))$ ;
- (б)  $(\forall x P(x) \supset P(y)), (\forall x P(x) \supset \forall y P(y))$ ;
- (в)  $(A(x) \supset \exists x A(x))$ ,  
 $((A(x) \supset \exists x A(x)) \supset (\forall x A(x) \supset (A(x) \supset \exists x A(x))))$ ,  
 $(\forall x A(x) \supset (A(x) \supset \exists x A(x)))$ ?

15. Каким требованиям должна удовлетворять формула  $A(x)$ , чтобы следующая последовательность была выводом в ИП:

- (а)  $(A(y) \supset \exists x A(x)), (\exists y A(y) \supset \exists x A(x))$ ;
- (б)  $(\forall x A(x) \supset A(y)), (\forall x A(x) \supset \forall y A(y))$ ?

16. Доказать, что если  $A_1, \dots, A_n, A$  — формулы ИВ,  $B$  — формула ИП,  $P$  — пропозициональная переменная и  $A_1, \dots, A_n \vdash A$  в ИВ, то  $A_1(P \setminus B), \dots, A_n(P \setminus B) \vdash A(P \setminus B)$  в ИП.

17. Построить выводы формул в ИП:

- (а)  $(\forall x \forall y A(x, y) \supset \forall y \forall x A(x, y))$ ;
- (б)  $(\exists x \exists y A(x, y) \supset \exists y \exists x A(x, y))$ ;
- (в)  $(\exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y))$ .

18. Является ли выводом из  $\Gamma = \{(C \supset A(x))\}$  в ИП, где  $C$  не содержит свободных вхождений  $x$ , последовательность формул:

- (а)  $(C \supset A(x)), (C \supset \forall x A(x))$ ;
- (б)  $((C \supset A(x)) \supset (B(y) \supset (C \supset A(x))))$ ,  $(C \supset A(x))$ ,  
 $(B(y) \supset (C \supset A(x))), (\exists y B(y) \supset (C \supset A(x)))$ ,

если  $C$  и  $A(x)$  не содержат свободных вхождений  $y$ ?

19. Построить выводы из  $\Gamma = \{\forall x (A(x) \supset B(x))\}$  в ИП следующих формул:

- (а)  $(\exists x A(x) \supset \exists x B(x))$ ;
- (б)  $(\forall y A(y) \supset \forall z B(z))$ .

20. Доказать, что следующие правила допустимы в ИП:

- (а)  $\frac{\Gamma \vdash A}{B, \Gamma \vdash A}$ ;

- (б)  $\frac{B, B, \Gamma \vdash A}{B, \Gamma \vdash A};$   
 (в)  $\frac{\Gamma, A, B, \Gamma_1 \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma_1 \vdash C}.$

21\*. Доказать теорему о дедукции в ИП:

если  $\Gamma, A \vdash B$ , то  $\Gamma \vdash (A \supset B)$ .

22. Доказать, что если в ИП  $\Gamma \vdash A$  и  $\Gamma, A \vdash B$ , то  $\Gamma \vdash B$ .

23. Доказать, что утверждение задачи 24 из § 3 справедливо в ИП.

24. Доказать следующие правила:

(а)  $\forall$ -удаление:  $\forall x A(x) \vdash A(t)$ , где  $A(x)$  и  $t$  подчиняются тем же требованиям, что и в схеме аксиом 11;

(б)  $\exists$ -введение:  $A(t) \vdash \exists x A(x)$  при тех же условиях, что и в (а);

(в)  $\forall$ -введение:  $\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}$ , где  $x$  не входит свободно в формулы из  $\Gamma$ ;

(г)  $\exists$ -удаление:  $\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash B}$ , где  $x$  не входит свободно ни в формулы из  $\Gamma$ , ни в формулу  $B$ .

25. Доказать, что формула  $A(x)$  выводима в ИП тогда и только тогда, когда выводима формула  $\forall x A(x)$ .

26. Пусть  $z_1, \dots, z_n$  не входят связанно в  $A(z_1, \dots, z_n)$  и в  $B(z_1, \dots, z_n)$  и пусть  $A(z_1, \dots, z_n) \vdash B(z_1, \dots, z_n)$  в ИП. Доказать, что существует вывод  $B(z_1, \dots, z_n)$  из  $A(z_1, \dots, z_n)$  в ИП, в который  $z_1, \dots, z_n$  не входят ни разу в связанном виде.

27. Пусть  $z_1, \dots, z_n$  не входят связанно в  $A(z_1, \dots, z_n)$  и в  $B(z_1, \dots, z_n)$ ;  $x_1, \dots, x_n$  — переменные, не входящие связанно в  $A(z_1, \dots, z_n)$  и в  $B(z_1, \dots, z_n)$ . Доказать, что

$$A(z_1, \dots, z_n) \vdash B(z_1, \dots, z_n) \Leftrightarrow A(x_1, \dots, x_n) \vdash B(x_1, \dots, x_n).$$

28\*. Пусть  $\Gamma$  — множество формул сигнатуры  $\sigma$ ,  $A$  — формула сигнатуры  $\sigma$ . Доказать, что если  $\Gamma \vdash A$  в ИП, то существует вывод  $A$  из  $\Gamma$  в ИП, состоящий лишь из формул сигнатуры  $\sigma$ .

29. Доказать, что если формула  $A$  выводима в ИП, то секвенция  $\vdash A$  выводима в ИПС.

30. Доказать, что:

(а) если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  выводима в ИПС, то  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  в ИП;

(б) если секвенция  $A_1, \dots, A_n \vdash$  выводима в ИПС, то  $A_1, \dots, A_n \vdash (B \& \neg B)$  в ИП;

(в) если секвенция  $\vdash B$  выводима в ИПС, то формула  $B$  выводима в ИП.

31. Пусть  $A$  — формула,  $B$  — подформула формулы  $A$ ,  $A'$  — результат замены некоторого вхождения  $B$  в  $A$  на формулу  $B'$ . Доказать, что если  $\vdash (B \equiv B')$ , то  $\vdash (A \equiv A')$  (теорема о замене для ИП).

32. Доказать, что если  $\Gamma \vdash A$  в ИП, то  $\Gamma \models A$ .

33. Доказать, что все выводимые в ИП формулы тождественно истинны.

34. Доказать, что если множество формул  $\Gamma$  выполнимо, то оно непротиворечиво. (Множество  $\Gamma$  выполнимо, если существуют алгебраическая система  $\mathbb{M}$  и значения в  $\mathbb{M}$  свободных переменных такие, что все формулы из  $\Gamma$  истинны при этих значениях переменных.)

35. Доказать, что множество формул  $\Gamma$  противоречиво тогда и только тогда, когда любая формула выводима в ИП из  $\Gamma$ .

36. Доказать, что если множества формул  $T_0, T_1, T_2, \dots$  непротиворечивы и  $T_i \subseteq T_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), то  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$  — непротиворечивое множество формул.

37\*. Доказать теорему Линденбаума: любое непротиворечивое множество формул  $T$  можно расширить до полного непротиворечивого множества той же сигнатуры.

38. Пусть множество формул  $\Gamma$  сигнатуры  $\sigma$  полно и непротиворечиво. Доказать, что для любых предложений  $A, B$  сигнатуры  $\sigma$ :

(а)  $\Gamma \vdash (A \& B) \Leftrightarrow \Gamma \vdash A$  и  $\Gamma \vdash B$ ;

(б)  $\Gamma \vdash (A \vee B) \Leftrightarrow \Gamma \vdash A$  или  $\Gamma \vdash B$ ;

(в)  $\Gamma \vdash \neg A \Leftrightarrow$  не верно  $\Gamma \vdash A$ ;

(г)  $\Gamma \vdash (A \supset B) \Leftrightarrow$  (не верно  $\Gamma \vdash A$ ) или  $\Gamma \vdash B$ .

39. Пусть множество формул  $\Gamma$  сигнатуры  $\sigma$  полно и непротиворечиво и удовлетворяет условию: если  $\Gamma \vdash \exists x A(x)$ , то  $\Gamma \vdash A(t)$  для некоторого термина  $t$  сигнатуры  $\sigma$ , свободного для  $x$  в  $A(x)$ . Доказать, что:

(а)  $\Gamma \vdash \exists x A(x) \Leftrightarrow \Gamma \vdash A(t)$  для некоторого термина  $t$  сигнатуры  $\sigma$ , свободного для  $x$  в  $A(x)$ ;

(б)  $\Gamma \vdash \forall x A(x) \Leftrightarrow \Gamma \vdash A(t)$  для любого термина  $t$  сигнатуры  $\sigma$ , свободного для  $x$  в  $A(x)$ .

40. Пусть множество  $\Gamma \cup \{\exists x A(x)\}$  непротиворечиво. Доказать, что если переменная  $y$  не входит в  $\Gamma$  и в  $\exists x A(x)$ , то множество  $\Gamma \cup \{\exists x A(x), A(y)\}$  непротиворечиво.

41\*. Доказать, что любое непротиворечивое множество предложений выполнимо (*теорема о существовании модели*).

42. Доказать *теорему Левенгейма—Скулема*: любое выполнимое множество предложений выполнимо в некоторой счетной алгебраической системе.

43. Доказать, что если предложение  $A$  невыводимо в ИП, то  $\neg A$  выполнимо на натуральных числах.

44. Доказать, что формула  $A$  тождественно истинна тогда и только тогда, когда  $A$  выводима в ИП (*теорема Гёделя о полноте ИП*).

45. Показать, что если предложение  $A$  истинно во всех системах на натуральных числах, то  $A$  тождественно истинно.

46. Доказать, что если предложение  $A$  выполнимо в некоторой системе, то  $A$  выполнимо на натуральных числах.

47. Доказать, что если предложение  $A$  истинно на всякой системе, на которой истинны формулы счетного множества  $\Gamma$ , то  $\Gamma \vdash A$ .

48. Доказать, что если множество предложений  $\Gamma$  счетно и каждое конечное подмножество  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$  выполнимо, то все множество  $\Gamma$  выполнимо (*локальная теорема Мальцева*).

49. Доказать, что если отрицание любой конъюнкции конечного числа предложений счетного множества  $\Gamma$  недоказуемо в ИП, то множество  $\Gamma$  выполнимо.

50. Доказать для любого предложения  $A$  и любого счетного множества  $\Gamma$   $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$  (*теорема адекватности*).

51. Доказать, что если  $\Gamma$  — счетное множество предложений и  $\Gamma \models A$ , то  $\Gamma_1 \vdash A$  для некоторого конечного подмножества  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$  (*теорема Мальцева о компактности*).

52. Доказать, что для того, чтобы  $A$  была выводима в ИП, недостаточно, чтобы  $A$  была истинной на всех конечных системах.

53. Пусть  $A$  — бескванторная формула ИП. Доказать, что  $A$  выводима в ИП тогда и только тогда, когда  $A$  выводима лишь из аксиом 1–10 по правилу 1.

54. Выводимы ли в ИП формулы:

(а)  $(\exists x A(x) \supset \forall x A(x))$ ;

(б)  $\neg(\exists x A(x) \supset \forall x A(x))$ ;

(в)  $(\exists x \forall y A(x, y) \supset \exists y \forall x A(x, y))$ ;



(г)  $(\forall x \exists y A(x, y) \supset \exists y \forall x A(x, y))$ ;

(д)  $((\forall x A(x) \supset \exists x B(x)) \equiv \exists x (A(x) \supset B(x)))$ ?

## § 7. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

В этом параграфе предполагается, что сигнатура  $\sigma$  не более чем счетна. *Исчислением предикатов с равенством (ИПР)* называется исчисление, аксиомами которого являются:

1) аксиомы ИП сигнатуры  $\sigma \cup \{=\}$ ;

2) аксиомы равенства

Е1.  $\forall x (x = x)$ ,

Е2.  $\forall x \forall y \forall z ((x = y \ \& \ y = z) \supset x = z)$ ,

Е3.  $\forall x \forall y (x = y \supset y = x)$ ;

3) формулы вида

Е<sub>P</sub>.  $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((x_1 = y_1 \ \& \dots \ \& \ x_n = y_n) \supset$   
 $\supset (P(x_1, \dots, x_n) \equiv P(y_1, \dots, y_n)))$ ;

Е<sub>f</sub>.  $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((x_1 = y_1 \ \& \dots \ \& \ x_n = y_n) \supset$   
 $\supset (f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)))$

для любого предикатного символа  $P$  из  $\sigma$  и любого функционального символа  $f$  из  $\sigma$ .

Правилами вывода этого исчисления являются правила вывода ИП. Выводимость, а также другие понятия определяются аналогично соответствующим понятиям для ИП.

Используем следующее сокращение:

$$\exists! x A(x) = \exists x (A(x) \ \& \ \forall y (A(y) \supset x = y)),$$

где  $A(x)$  — произвольная формула. Квантор  $\exists! x$  читается как «существует единственное  $x$  такое, что...».

*Элементарной теорией сигнатуры  $\sigma$*  называется множество  $T$  предложений сигнатуры  $\sigma \cup \{=\}$ , содержащее все предложения, выводимые из  $T$  в ИПР. *Теоремами теории  $T$*  называются все формулы сигнатуры  $\sigma \cup \{=\}$ , выводимые из  $T$ . *Системой аксиом для теории  $T$*  называется любое множество формул  $A \subseteq T$ , из которого выводимы в ИПР все предложения из  $T$ . Элементарная теория  $T$  называется *непротиворечивой* (противоречивой, *полной*, *неполной*), если множество предложений  $T$  непротиворечиво (противоречиво, полно, неполно). Система предложений называется *независимой*, если ни одно из них не может быть выведено в ИПР из остальных.

*Моделью теории  $T$*  называется всякая нормальная алгебраическая система, в которой истинны все формулы из  $T$ .

Алгебраические системы  $M_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$  и  $M_2 = \langle M_2; \sigma \rangle$  называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное

соответствие  $\varphi$  между  $M_1$  и  $M_2$  такое, что для любых  $m_1, \dots, m_n \in M_1$  и  $P^n, f^n, a \in \sigma$

$$M_1 \models P(m_1, \dots, m_n) \Leftrightarrow M_2 \models P(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_n)),$$

$$\varphi(f(m_1, \dots, m_n)) = f(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_n)),$$

$$\varphi(a) = a.$$

Если  $M$  изоморфна некоторой подсистеме системы  $M_1$ , то  $M$  называется *изоморфно вложимой в  $M_1$* .

Теорией равенства  $E$  называется множество предложений сигнатуры  $\langle = \rangle$ , выводимых в ИПР.

Пусть  $\sigma_a = \langle s, +, \cdot, 0 \rangle$ , где  $s$  — символ одноместной,  $+$  и  $\cdot$  — символы двуместных функций,  $0$  — предметная константа.

Через  $Q$  будем обозначать теорию, аксиомами которой являются:

$$Q_1. \forall x \forall y (s(x) = s(y) \supset x = y);$$

$$Q_2. \forall x \neg s(x) = 0;$$

$$Q_3. \forall x (\neg x = 0 \supset \exists y (x = s(y)));$$

$$Q_4. \forall x (x + 0 = x);$$

$$Q_5. \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y));$$

$$Q_6. \forall x (x \cdot 0 = 0);$$

$$Q_7. \forall x \forall y (x \cdot s(y) = x \cdot y + x).$$

Через  $x \leq y$  обозначаем формулу  $\exists z (z + x = y)$ , а через  $x < y$  — формулу  $(x \leq y \ \& \ \neg x = y)$ .

Через  $P$  будем обозначать теорию сигнатуры  $\sigma_a$ , аксиомами которой являются  $Q_1 - Q_7$  и бесконечное множество формул вида

$$P_A. \forall y ((A(0) \ \& \ \forall x (A(x) \supset A(s(x)))) \supset A(y)),$$

где  $A(x)$  — любая формула сигнатуры  $\sigma_a$  со свободной переменной  $x$ .

Формула  $P_A$  называется *аксиомой индукции для  $A$* .

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_0 = 0, \Delta_1 = s(0), \dots, \Delta_{n+1} = s(\Delta_n), \dots$$

Через  $R$  будем обозначать теорию сигнатуры  $\sigma_a$  со следующим бесконечным множеством аксиом:

$$R_1^{(np)}. \Delta_n + \Delta_p = \Delta_{n+p} \text{ (для любых } n, p \in \mathcal{N});$$

$$R_2^{(np)}. \Delta_n \cdot \Delta_p = \Delta_{n \cdot p} \text{ (для любых } n, p \in \mathcal{N});$$

$$R_3^{(np)}. \Delta_n \neq \Delta_p \text{ (для любых } n, p \in \mathcal{N}, n \neq p);$$

$R_4^{(n)}. \forall x (x \leq \Delta_n \supset (x = \Delta_0 \vee \dots \vee x = \Delta_n))$  (для каждого  $n \in \mathcal{N}$ );

$R_5^{(n)}. \forall x (x \leq \Delta_n \vee \Delta_n \leq x)$  (для каждого  $n \in \mathcal{N}$ ).

Множество натуральных чисел  $\mathcal{N}$  с  $s(x) = x + 1$ , обычными сложением и умножением и константой 0 называется *стандартной моделью арифметики* и обозначается через  $\mathbb{N} = \langle \mathcal{N}; s, +, \cdot, 0 \rangle$ .

Пусть ZF — теория сигнатуры  $\langle \in \rangle$ , где  $\in$  — бинарный предикат, с аксиомами  $ZF_1 - ZF_9$ .

$ZF_1$ . Аксиома объемности:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \equiv z \in y) \equiv x = y).$$

$ZF_2$ . Аксиома пары:

$$\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \equiv (v = x \vee v = y)).$$

$ZF_3$ . Аксиома выделения:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv (z \in x \ \& \ A)),$$

где  $A$  — формула, не содержащая  $x$  и  $y$ .

$ZF_4$ . Аксиома множества подмножеств:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv \forall u (u \in z \supset u \in x)).$$

$ZF_5$ . Аксиома множества-суммы:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv \exists v (z \in v \ \& \ v \in x)).$$

$ZF_6$ . Аксиома выбора:

$$\begin{aligned} \forall x (\forall y \forall z ((y \in x \ \& \ z \in x) \supset (\exists v (v \in y) \ \& \\ \& (\exists u (u \in z \ \& \ u \in v) \supset z = y))) \supset \\ \supset \exists u \forall t (t \in x \supset \exists v \forall w (v = w \equiv (w \in u \ \& \ w \in t))). \end{aligned}$$

$ZF_7$ . Аксиома бесконечности:

$$\begin{aligned} \exists x (\forall y (\neg \exists z (z \in y) \supset y \in x) \ \& \ \forall w (w \in x \supset \\ \supset \forall u (\forall v (v \in u \equiv (v = w \vee v \in w)) \supset u \in x))). \end{aligned}$$

$ZF_8$ . Аксиома регулярности:

$$\forall x (\exists y (y \in x) \supset \exists y (y \in x \ \& \ \forall z (z \in x \supset \neg z \in y))).$$

$ZF_9$ . Аксиома замены:

$$\begin{aligned} \forall x (\forall y \forall z \forall w ((y \in x \ \& \ A(y, z) \ \& \ A(y, w)) \supset z = w) \supset \\ \supset \exists r \forall s (s \in r \equiv \exists t (t \in x \ \& \ A(t, s)))). \end{aligned}$$

где  $A(t, s)$  — формула ZF.

Используем следующие обозначения:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \supset z \in y);$$

$$x = 0 \Leftrightarrow \forall y \neg y \in x;$$

$$x = \{y\} \Leftrightarrow \forall z (z \in x \equiv z = y);$$

$$x = \{y, z\} \Leftrightarrow \forall u (u \in x \equiv (u = y \vee u = z));$$

$$\langle x, y \rangle \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\};$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \Leftrightarrow \langle x_1, \langle x_2, \dots, x_n \rangle \rangle \quad (n > 2);$$

$$y = x_1 \times \dots \times x_n \Leftrightarrow \forall u (u \in y \equiv \exists z_1 \dots \exists z_n (z_1 \in x_1 \& \dots \& z_n \in x_n \& u = \langle z_1, \dots, z_n \rangle)) \text{ для } n \geq 2;$$

$$y = P(x) \Leftrightarrow \forall z (z \in y \equiv z \subseteq x);$$

$$\text{Fn}(x) \Leftrightarrow (\forall y (y \in x \supset \exists u \exists v (y = \langle u, v \rangle)) \& \forall y \forall u \forall v ((\langle y, u \rangle \in x \& \langle y, v \rangle \in x) \supset u = v));$$

$$y = \delta(x) \Leftrightarrow \forall z (z \in y \equiv \exists u (\langle z, u \rangle \in x));$$

$$y = \cup x \Leftrightarrow \forall z (z \in y \equiv \exists u (u \in x \& z \in u));$$

$$y = \cap x \Leftrightarrow \forall z (z \in y \equiv \forall u (u \in x \supset z \in u));$$

$$z = x \cup y \Leftrightarrow \forall u (u \in z \equiv (u \in x \vee u \in y));$$

$$z = x \cap y \Leftrightarrow \forall u (u \in z \equiv (u \in x \& u \in y));$$

$$\text{Ord}(x) \Leftrightarrow (\forall y \forall z ((z \in y \& y \in x) \supset z \in x) \& \forall y \forall z ((y \in x \& z \in x) \supset (z \in y \vee y = z \vee y \in z)));$$

$$M_A(x, y) \Leftrightarrow (\text{Ord}(y) \& x \in y \& A(x) \& \forall z (z \in x \supset \neg A(z)));$$

$$L(x) \Leftrightarrow (\text{Ord}(x) \& \neg x = 0 \& \forall y \neg x = y \cup \{y\});$$

$$x = \omega \Leftrightarrow (L(x) \& \forall y (y \in x \supset \neg L(y)));$$

$$N(x) \Leftrightarrow \exists y (y = \omega \& x \in y);$$

$$y \Rightarrow s(x) \Leftrightarrow y = x \cup \{x\};$$

$$x + y = z \Leftrightarrow \exists v (\text{Fn}(v) \& \delta(v) = s(y) \& \langle 0, x \rangle \in v \& \langle y, z \rangle \in v \& \forall t \forall u ((t \in \delta(v) \& \neg t = y \& \langle t, u \rangle \in v) \supset \langle s(t), s(u) \rangle \in v));$$

$$x \cdot y = z \Leftrightarrow \exists v (\text{Fn}(v) \& \delta(v) = s(y) \& \langle 0, 0 \rangle \in v \& \langle y, z \rangle \in v \& \forall t \forall u ((\langle t, u \rangle \in v \& \neg t = y) \supset \langle s(t), u + x \rangle \in v)).$$

1. Доказать, что в ИПР сигнатуры  $\sigma$  выводимы:

(а)  $((x_1 = y_1 \& \dots \& x_n = y_n) \supset t(x_1, \dots, x_n) = t(y_1, \dots, y_n))$  для любого терма  $t$  сигнатуры  $\sigma$ ;

(б)  $((x_1 = y_1 \ \& \dots \ \& \ x_n = y_n) \supset (A(x_1, \dots, x_n) \equiv A(y_1, \dots, y_n)))$  для любой формулы  $A$  сигнатуры  $\sigma$ .

2. Доказать, что если  $\Gamma$  — множество аксиом теории  $T$  сигнатуры  $\sigma$ ,  $\mathbb{M}$  — алгебраическая система сигнатуры  $\sigma$ , в которой истинны все формулы из  $\Gamma$ , то в  $\mathbb{M}$  истинны все теоремы теории  $T$ .

3. Пусть предложение  $A$  истинно в любой системе, в которой истинны все аксиомы теории  $T$ . Доказать, что  $A$  принадлежит  $T$ .

4\*. Доказать, что если все аксиомы теории  $T$  истинны в некоторой алгебраической системе, то существует модель теории  $T$ .

5. Доказать, что всякая непротиворечивая теория имеет модель.

6. Доказать, что если предложение  $A$  истинно во всех моделях теории  $T$ , то  $A$  есть теорема теории  $T$  (теорема о полноте ИПР).

7\*. Пусть предложение  $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists! y A(x_1, \dots, x_n, y)$  есть теорема теории  $T$  сигнатуры  $\sigma$ . Пусть теория  $T_1$  сигнатуры  $\sigma' = \sigma \cup \{f^n\}$ , где  $f^n \notin \sigma$ , имеет в качестве аксиом все аксиомы теории  $T$  и

$$\forall x_1 \dots \forall x_n A(x_1, \dots, x_n, f^n(x_1, \dots, x_n)).$$

(а) Доказать, что для любой формулы  $B$  сигнатуры  $\sigma'$  существует формула  $B^*$  сигнатуры  $\sigma$ , удовлетворяющая условиям:

1) если  $f^n$  не входит в  $B$ , то  $B^* = B$ ;

2)  $(B^* \equiv B)$  есть теорема теории  $T_1$ .

(б) Доказать, что если  $B$  не содержит  $f^n$  и является теоремой теории  $T_1$ , то  $B$  является теоремой  $T$ .

8\*. Доказать, что если элементарная теория  $T$  имеет бесконечную модель, то  $T$  имеет и счетную модель.

9. Доказать, что теория  $T$  имеет модель тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество  $T_1 \subseteq T$  выполнимо.

10\*. Доказать, что если теория  $T$  для любого натурального числа  $n$  имеет модель мощности, большей  $n$ , то эта теория имеет бесконечную модель.

11. Доказать, что не существует предложения, истинного во всех конечных моделях и ложного в любой бесконечной модели.

12. Доказать, что если предложение  $A$  истинно во всех бесконечных группах, то  $A$  истинно во всех конечных группах достаточно большого порядка.

13. Доказать, что теория равенства  $E$  неполна.

14. Доказать, что предложение  $A$  сигнатуры  $\langle = \rangle$  истинно во всех нормальных системах тогда и только тогда, когда  $A$  есть теорема теории  $E$ .

15\*. Построить алгоритм, позволяющий по любому предложению сигнатуры  $\langle = \rangle$  узнавать, является ли это предложение теоремой теории  $E$ .

16. Являются ли следующие предложения теоремами теории  $E$ :

(а)  $\forall x \exists y \forall z (\neg z = x \vee \neg y = z)$ ;

(б)  $\forall x \exists y \forall z \exists v (v = z \ \& \ \neg (z = x \ \& \ \neg x = y \ \& \ v = y))$ ?

17. Пусть сигнатура  $\sigma$  содержит один двуместный предикат  $P$ ,  $T$  есть множество формул, выводимых из  $\Gamma = \{A_1, A_2\}$ , где

$$A_1 = \forall x \forall y (P(x, y) \supset \neg P(y, x)),$$

$$A_2 = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \supset (P(y, z) \supset P(x, z))).$$

Является ли  $T$  полной теорией?

18. Доказать, что  $Q$  — непротиворечивая теория.

19\*. Является ли система предложений  $\{Q_1, \dots, Q_7\}$  независимой?

20\*. Доказать, что в теории  $Q$  невыводимы формулы:

(а)  $\neg x = s(x)$ ;

(б)  $0 + x = x$ ;

(в)  $s(x + y) = s(x) y$ ;

(г)  $x + y = y + x$ ;

(д)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;

(е)  $x \leq x$ ;

(ж)  $0 \cdot x = 0$ ;

(з)  $s(x) \cdot y = x \cdot y + y$ ;

(и)  $x \cdot y = y \cdot x$ ;

(к)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ;

(л)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ;

(м)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ .

21. Доказать выводимость в  $Q$  формул:

(а)  $(x + y = 0 \supset (x = 0 \ \& \ y = 0))$ ;

(б)  $(x \cdot y = 0 \supset (x = 0 \vee y = 0))$ .

22. Доказать, что всякая модель теории  $Q$  бесконечна.

23. Определить константу  $0$  и функции  $s$ ,  $+$  и  $\cdot$  так, чтобы моделью теории  $Q$  стало множество:

(а)  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ;

(б)  $\mathcal{N} \cup \{a\} = \{0, 1, 2, \dots; a\} \ (a \notin \mathcal{N})$ ;

(в)  $\mathcal{N} \cup \{a, b\} = \{0, 1, 2, \dots; a, b\} \ (a, b \notin \mathcal{N})$ ;

(г)  $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}' = \{0, 1, 2, \dots; a_0, a_1, a_2, \dots\}$  ( $a_i \notin \mathcal{N}$  для всех  $i$  и  $a_i \neq a_j$  при  $i \neq j$ ).

24. Можно ли определить константу 0 и функции  $s$ ,  $+$  и  $\cdot$  так, чтобы моделью теории Q стало:

- (а) множество всех целых чисел;
- (б) множество всех неотрицательных рациональных чисел;
- (в) множество всех рациональных чисел?

25. Доказать, что теория Р непротиворечива.

26. Доказать зависимость аксиом теории Р.

27. Доказать, что все формулы из задачи 20 являются теоремами теории Р.

28\*. Доказать, что существует *нестандартная* (т. е. неизоморфная системе  $\mathbb{N}$ ) модель теории Р.

29. Доказать, что следующие формулы являются теоремами Р:

- (а)  $(x + z = y + z \supset x = y)$ ;
- (б)  $(\neg z = 0 \supset (x \cdot z = y \cdot z \supset x = y))$ .

30. Доказать, что следующие формулы являются теоремами Р:

- (а)  $0 \leq x$ ;
- (б)  $((x \leq y \ \& \ y \leq z) \supset x \leq z)$ ;
- (в)  $((x \leq y \ \& \ y \leq x) \supset x = y)$ ;
- (г)  $(x \leq y \vee y \leq x)$ ;
- (д)  $\neg x < x$ ;
- (е)  $x < s(x)$ ;
- (ж)  $0 < s(x)$ ;
- (з)  $(x < y \supset \neg y < x)$ ;
- (и)  $(x < y \vee y < x \vee x = y)$ ;
- (к)  $(x < y \equiv s(x) \leq y)$ ;
- (л)  $x \leq x + y$ ;
- (м)  $(x < y \equiv x + z < y + z)$ ;
- (н)  $(\neg y = 0 \supset x \leq x \cdot y)$ ;
- (о)  $(\neg x = 0 \supset (y < z \equiv x \cdot y < x \cdot z))$ .

31\*. Доказать, что для любой формулы  $A(x)$  с одной свободной переменной  $x$  следующие формулы являются теоремами Р:

(а)  $(\forall x (\forall z (z < x \supset A(z)) \supset A(x)) \supset \forall x A(x))$  (возвратная индукция);

(б)  $(\exists x A(x) \supset \exists y (A(y) \ \& \ \forall z (z < y \supset \neg A(z))))$  (принцип наименьшего числа);

(в)  $(\forall x (A(x) \supset \exists y (y < x \ \& \ A(y))) \supset \forall x \neg A(x))$  (метод бесконечного спуска).

32. Введем следующие сокращения:

$$x = \text{rest}(y, z) \triangleq ((x < z \ \& \ \exists u (y = u \cdot z + x)) \vee (z = 0 \ \& \ x = y));$$

$$z = \left[ \frac{x}{y} \right] \triangleq (\exists u (u < y \ \& \ x = z \cdot y + u) \vee (y = 0 \ \& \ x = z)).$$

Доказать, что следующие формулы являются теоремами P:

$$(a) \ \forall x \forall y \exists! z (z = \text{rest}(y, x));$$

$$(б) \ \forall x \forall y \exists! z \left( z = \left[ \frac{x}{y} \right] \right).$$

33. Записать формулу  $\text{Пр}(x)$  такую, что  $\text{Пр}(\Delta_n)$  является теоремой теории P тогда и только тогда, когда  $n$  — простое число.

34\*. Введем следующие сокращения:

$$x/y \triangleq \exists z (y = x \cdot z);$$

$$z = d(x, y) \triangleq (z/x \ \& \ z/y \ \& \ \forall u ((u/x \ \& \ u/y) \supset u/z));$$

$$z = d_n(x_1, \dots, x_n) \triangleq \exists u (z = d(x_1, u) \ \& \ u = d_{n-1}(x_2, \dots, x_n)) \text{ для } n > 2;$$

$$u = \beta(x, y, z) \triangleq u = \text{rest}(x, 1 + y \cdot (z + 1)).$$

Доказать, что следующие формулы являются теоремами P:

$$(a) \ \forall x_1 \dots \forall x_n \exists! y (y = d_n(x_1, \dots, x_n));$$

$$(б) \ \forall x \forall y \forall z \exists! u (u = \beta(x, y, z));$$

$$(в) \ \forall x \forall y \forall z \forall u ((z = d(x, y) \ \& \ u = \text{rest}(x, y)) \supset z = d(y, u));$$

$$(г) \ \forall x \forall y ((\neg x = 0 \ \& \ \neg y = 0 \ \& \ d(x, y) = s(0)) \supset \\ \supset \exists z \exists u \exists v \exists w (x \cdot z = y \cdot u + s(0) \ \& \ y \cdot v = x \cdot w + s(0)));$$

$$(д) \ \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((d_n(x_1, \dots, x_n) = \Delta_1 \ \& \ y_1 < x_1 \ \& \dots \\ \dots \ \& \ y_n < x_n) \supset \exists z (\text{rest}(z, x_1) = y_1 \ \& \dots \ \& \ \text{rest}(z, x_n) = y_n));$$

$$(е) \ \forall x \forall y \forall z \forall u \exists x_1 \exists y_1 (\forall v (v \leq z \supset \\ \supset \beta(x, y, v) = \beta(x_1, y_1, v)) \ \& \ \beta(x_1, y_1, s(z)) = u).$$

35\*. Доказать, что любая теорема теории R является теоремой теории Q.

36. Будет ли независимой система формул

$$\{R_1^{(np)} \mid n, p \in \mathcal{N}\} \cup \{R_2^{(np)} \mid n, p \in \mathcal{N}\} \cup \\ \cup \{R_3^{(np)} \mid n, p \in \mathcal{N}, n \neq p\} \cup \{R_4^{(n)} \mid n \in \mathcal{N}\} \cup \{R_5^{(n)} \mid n \in \mathcal{N}\}?$$

37. Доказать, что стандартная модель арифметики изоморфно вложима в любую модель теории R.

38. Доказать в ZF:

(a) существование и единственность пустого множества 0:

$$\exists! x (x = 0);$$



(б) существование и единственность пары:

$$\forall x \forall y \exists! z (z = \{x, y\});$$

(в) существование и единственность  $\{x\}$ :

$$\forall x \exists! y (y = \{x\});$$

(г) аксиому упорядоченной пары:

$$(\langle x, y \rangle = \langle z, u \rangle \supset (x = z \ \& \ y = u));$$

(д) аксиому упорядоченной  $n$ -ки:

$$(\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \supset (x_1 = y_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_n = y_n));$$

(е) существование и единственность множества подмножеств:

$$\forall x \exists! y (y = P(x));$$

(ж) существование и единственность прямого произведения:

$$\forall x \forall y \exists! z (z = x \times y);$$

(з) существование и единственность прямого произведения:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists! y (y = x_1 \times \dots \times x_n);$$

(и) существование и единственность области определения функции:

$$\forall x (Fn(x) \supset \exists! y (y = \delta(x)));$$

(к) существование и единственность  $\cup x$ :

$$\forall x \exists! y (y = \cup x);$$

(л) существование и единственность  $x \cup y$ :

$$\forall x \forall y \exists! z (z = x \cup y);$$

(м) существование и единственность  $x \cap y$ :

$$\forall x \forall y \exists! z (z = x \cap y);$$

(н) существование и единственность  $\cap x$  для  $x \neq 0$ :

$$\forall x (\neg x = 0 \supset \exists! y (y = \cap x)).$$

39. Доказать в ZF следующие теоремы:

(а)  $\neg x \in x$ ;

(б)  $\neg (x \in y \ \& \ y \in x)$ ;

(в)  $\neg (x \in y \ \& \ y \in z \ \& \ z \in x)$ .

40. Доказать, что следующие утверждения об ординальных числах являются теоремами ZF:

(а)  $(Ord(z) \supset (y \in z \supset (x \in y \supset x \in z)))$ ;

(б)  $((Ord(x) \ \& \ y \in x) \supset Ord(y))$ ;

(в)  $(\text{Ord}(x) \supset W(x))$ , где  $W(x)$  есть формула, означающая, что  $\in$  есть полный иррефлексивный порядок на  $x$ ;

(г)  $((\text{Ord}(x) \ \& \ y = x \cup \{x\}) \supset \text{Ord}(y))$ ;

(д)  $((\text{Ord}(x) \ \& \ \forall y (\forall z (z \in y \supset A(z)) \supset A(y))) \supset A(x))$ , где  $A(x)$  — формула с одной свободной переменной  $x$  (*трансфинитная индукция*);

(е)  $((\text{Ord}(x) \ \& \ \text{Ord}(y)) \supset (x \in y \vee y \in x \vee x = y))$ ;

(ж)  $((\text{Ord}(x) \ \& \ \neg x = 0) \supset 0 \in x)$ ;

(з)  $((\text{Ord}(x) \ \& \ \text{Ord}(y) \ \& \ x \in y) \supset \forall u \forall v ((M_A(u, x) \ \& \ M_A(v, y)) \supset u = v))$ .

41. Доказать в ZF следующие теоремы:

(а)  $(\forall y (y \in x \supset \text{Ord}(y)) \supset \text{Ord}(x))$ ;

(б)  $((\neg x = 0 \ \& \ \forall y (y \in x \supset \text{Ord}(y))) \supset \text{Ord}(x))$ ;

(в)  $\exists x L(x)$ ;

(г)  $\exists! x (x = \omega)$ ;

(д)  $(\text{Ord}(\omega) \ \& \ 0 \in \omega \ \& \ \forall x (x \in \omega \supset x \cup \{x\} \in \omega))$ .

42. Доказать в ZF следующие теоремы:

(а)  $(N(x) \supset \text{Ord}(x))$ ;

(б)  $((N(x) \ \& \ y \in x) \supset N(y))$ ;

(в)  $\forall x (N(x) \supset \exists! y (N(y) \ \& \ y = s(x)))$ ;

(г)  $((N(x) \ \& \ N(y) \ \& \ s(x) = s(y)) \supset x = y)$ ;

(д)  $\neg s(x) = 0$ ;

(е)  $((N(x) \ \& \ \neg x = 0) \supset \exists y (N(y) \ \& \ x = s(y)))$ .

43. Доказать в ZF принцип индукции для натуральных чисел: для любой формулы  $A(x)$  с одной свободной переменной  $x$

$$((A(0) \ \& \ \forall x ((N(x) \ \& \ A(x)) \supset A(s(x)))) \supset \forall y (N(y) \supset A(y))).$$

44. Доказать в ZF следующие теоремы:

(а)  $\forall x \forall y ((N(x) \ \& \ N(y)) \supset \exists! z (N(z) \ \& \ x + y = z))$ ;

(б)  $\forall x (N(x) \supset x + 0 = x)$ ;

(в)  $\forall x \forall y ((N(x) \ \& \ N(y)) \supset x + s(y) = s(x + y))$ ;

(г)  $\forall x \forall y ((N(x) \ \& \ N(y)) \supset \exists! z (N(z) \ \& \ x \cdot y = z))$ ;

(д)  $\forall x (N(x) \supset x \cdot 0 = 0)$ ;

(е)  $\forall x \forall y ((N(x) \ \& \ N(y)) \supset x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$ .

45\*. Доказать, что если  $A$  есть теорема теории  $P$ , то формула  $\rho_N(A)$ , полученная из  $A$  релятивизацией кванторов относительно  $N$ , есть теорема теории ZF.

## § 8. ФИЛЬТРОВАННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

*Фильтром над множеством  $I$*  называется произвольный фильтр на булевой алгебре  $P(I)$ , т. е. непустое подмножество  $D$  множества  $P(I)$ , удовлетворяющее условиям:

- (а) если  $X, Y \in D$ , то  $(X \cap Y) \in D$ ;
- (б) если  $X \in D$ ,  $X \subseteq Y \subseteq I$ , то  $Y \in D$ ;
- (в)  $\emptyset \notin D$ .

Фильтр  $D$ , удовлетворяющий условию

- (г) для всех  $X \subseteq I$  имеет место  $X \in D$  или  $(I \setminus X) \in D$ ,

называется *ультрафильтром над  $I$* .

Фильтр  $D$  называется *главным*, если он содержит наименьший элемент.

Фильтр  $D$  называется *счетно полным*, если для любой счетной системы элементов  $D$  ее пересечение принадлежит  $D$ .

Пусть  $\bar{I} = m \geq \aleph_0$ . *Фильтром Фреше над  $I$*  называется любой фильтр над  $I$ , содержащий  $\Phi = \{X \mid X \subseteq I \text{ и } \overline{I \setminus X} < m\}$ .

Пусть  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$  и  $\mathbb{M}_2 = \langle M_2; \sigma \rangle$  — алгебраические системы. Отображение  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  называется *гомоморфизмом из  $\mathbb{M}_1$  в  $\mathbb{M}_2$* , если для любых  $b_1, \dots, b_n \in M_1$ :

(а)  $\mathbb{M}_1 \models P^n(b_1, \dots, b_n) \Rightarrow \mathbb{M}_2 \models P^n(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$  для любого предикатного символа  $P^n \in \sigma$ ;

(б)  $\varphi(F^n(b_1, \dots, b_n)) = F^n(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$  для любого функционального символа  $F^n \in \sigma$ ;

(в)  $\varphi(a) = a$  для любой предметной константы  $a \in \sigma$ .

Гомоморфизм  $\varphi: \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$  назовем *сильным*, если выполняется условие

(г) если  $\mathbb{M}_2 \models P^n(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$ , то существуют  $b'_1, \dots, b'_n \in M_1$  такие, что  $\varphi(b_1) = \varphi(b'_1), \dots, \varphi(b_n) = \varphi(b'_n)$  и  $\mathbb{M}_1 \models P^n(b'_1, \dots, b'_n)$ .

Взаимно однозначное соответствие  $\varphi$  между  $M_1$  и  $M_2$  назовем *изоморфизмом между  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$* , если  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  есть гомоморфизмы. Если  $\mathbb{M}_1$  изоморфно  $\mathbb{M}_2$ , то пишем  $\mathbb{M}_1 \approx \mathbb{M}_2$ .

Пусть  $\{\mathbb{M}_i\}_{i \in I}$  — семейство алгебраических систем сигнатуры  $\sigma$ ,  $M_i$  — основные множества  $\mathbb{M}_i$ .

*Прямым произведением систем  $\mathbb{M}_i$  ( $i \in I$ )* назовем алгебраическую систему  $\prod_{i \in I} \mathbb{M}_i = \langle \prod_{i \in I} M_i; \sigma \rangle$ , где:

(а) для каждого предикатного символа  $P^n \in \sigma$

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i \models P^n(f_1, \dots, f_n) \Leftrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i \models P^n(f_1(i), \dots, f_n(i))$$

для каждого  $i \in I$ ;

(б) для каждого функционального символа  $F^n \in \sigma$

$$F^n(f_1, \dots, f_n)(i) = F^n(f_1(i), \dots, f_n(i));$$

(в) для каждой предметной константы  $a \in \sigma$

$$a(i) = a.$$

Пусть  $D$  — фильтр над  $I$ . Определим на  $\prod_{i \in I} M_i$  отношение

$$f \sim_D g \Leftrightarrow \{i \mid f(i) = g(i)\} \in D$$

и пусть

$$f/D = \{g \mid f \sim_D g\},$$

$$\prod_{i \in I} M_i / D = \left\{ f/D \mid f \in \prod_{i \in I} M_i \right\}.$$

Полагаем для предикатного символа  $P^n$  из  $\sigma$

$$P^n(f_1/D, \dots, f_n/D) = \text{и} \Leftrightarrow \{i \mid \mathfrak{M}_i \models P^n(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in D,$$

для  $n$ -местного функционального символа  $F^n$  из  $\sigma$

$$F^n(f_1/D, \dots, f_n/D) = F^n(f_1, \dots, f_n)/D$$

и для предметной константы  $a$  из  $\sigma$

$$a = a/D.$$

Система  $\mathfrak{M} = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D = \langle \prod_{i \in I} M_i / D; \sigma \rangle$  с так определенными предикатами и функциями называется *фильтрованным (или приведенным) произведением систем  $\mathfrak{M}_i$  по фильтру  $D$* .

Если  $D$  — ультрафильтр, то  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  называется *ультрапроизведением*; если все  $\mathfrak{M}_i$  совпадают и равны  $\mathfrak{M}$ , то  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  называется

*ультрастепенью  $\mathfrak{M}$*  и обозначается  $\mathfrak{M}^I / D$ .

Назовем формулу  $A(x_1, \dots, x_n)$  сигнатуры  $\sigma$  *условно фильтрующей по фильтру  $D$  над  $I$* , если для любых алгебраических систем  $\mathfrak{M}_i (i \in I)$  сигнатуры  $\sigma$  и любых  $f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} M_i$  из того, что

$$\{i \mid \mathfrak{M}_i \models A(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in D,$$

следует, что

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \models A(f_1/D, \dots, f_n/D).$$

Будем говорить, что формула  $A(x_1, \dots, x_n)$  сигнатуры  $\sigma$  фильтруется по фильтру  $D$  над  $I$ , если для любых алгебраических систем  $\mathfrak{M}_i$  ( $i \in I$ ) сигнатуры  $\sigma$  и любых  $f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} M_i$

$$\{i \mid \mathfrak{M}_i \models A(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in D \Leftrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \models A(f_1/D, \dots, f_n/D).$$

1. Доказать, что если  $D$  — фильтр над  $I$ , то  $I \in D$ .
2. Пусть  $X \subseteq I$ . Доказать, что  $\{Y \mid Y \subseteq I \text{ и } X \subseteq Y\}$  есть фильтр над  $I$ .
3. Пусть  $D$  — фильтр над  $I$  и  $J \in D$ . Показать, что  $D_1 = \{X \cap J \mid X \in D\}$  есть фильтр над  $J$ , а также, что если  $D$  — неглавный фильтр, то  $D_1$  — также неглавный фильтр.
4. Доказать, что если какое-нибудь конечное множество принадлежит фильтру, то этот фильтр главный.
5. Доказать, что всякий неглавный ультрафильтр содержит все множества, имеющие конечные дополнения.
6. Доказать, что фильтр  $D$  над  $I$  есть ультрафильтр тогда и только тогда, когда  $D$  является максимальным множеством в множестве всех фильтров над  $I$ , упорядоченном по включению.
7. Доказать, что во множестве  $\Phi$  всех фильтров над  $I$ , упорядоченном по включению,  $\{I\}$  есть наименьший элемент. Показать также, что если  $\bar{I} \geq 2$ , то в  $\Phi$  нет наибольшего элемента.

8. Доказать, что для того, чтобы над  $I$  существовал фильтр, содержащий множество  $S \subseteq P(I)$ , необходимо и достаточно, чтобы пересечение любого конечного числа элементов из  $S$  было непусто.

9. Пусть  $I$  — бесконечное множество мощности  $\alpha$  и

$$\Phi = \{X \mid X \subseteq I \text{ и } \bar{X} < \alpha\}.$$

Доказать, что  $\Phi$  есть фильтр над  $I$ .

10. Доказать, что система  $\Psi$  подмножеств множества  $I$  содержится в некотором фильтре Фреше тогда и только тогда, когда каждое пересечение конечного числа множеств системы  $\Psi$  имеет мощность, равную мощности множества  $I$ .

11. Показать, что каждый неглавный ультрафильтр над счетным множеством будет фильтром Фреше.

12. Пусть  $F$  — фильтр над  $I$ ,  $A \subseteq I$  и  $F_A = \{X \cap A \mid X \in F\}$ . Доказать, что для того, чтобы  $F_A$  было фильтром над  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $X \in F$  было  $X \cap A \neq \emptyset$ .

13. Пусть  $F$  — ультрафильтр над  $I$ ,  $A \subseteq I$  и  $F_A = \{X \cap A \mid X \in F\}$ . Доказать, что для того, чтобы  $F_A$  было ультрафильтром над  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы  $A$  принадлежало  $F$ .

14\*. Показать, что всякий фильтр можно расширить до ультрафильтра.

15. Доказать, что всякий фильтр является пересечением всех содержащих его ультрафильтров.

16. Пусть  $F$  и  $G$  — фильтры над  $I$ . Доказать, что

$$F \cap G = \{X \cup Y \mid X \in F \text{ и } Y \in G\}.$$

17. Доказать, что если объединение конечной последовательности  $\{A_i\}_{i \leq n}$  подмножеств множества  $I$  принадлежит ультрафильтру  $F$ , то по крайней мере одно из множеств  $A_i$  принадлежит  $F$ .

18. Пусть  $F$  — ультрафильтр, а  $G_1, \dots, G_n$  — фильтры над  $I$ . Доказать, что если  $F \supseteq G_1 \cap \dots \cap G_n$ , то существует такое  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), что  $F \supseteq G_i$ .

19. Пусть множество  $J$  бесконечно. Построить ультрафильтр  $F$  и семейство ультрафильтров  $\{G_j\}_{j \in J}$  такие, что  $F \supseteq \bigcap_{j \in J} G_j$ , но  $F$  не содержит  $G_j$  ни для какого  $j$ .

20. Доказать, что  $\bigcap_{X \in F} X$ , где  $F$  — ультрафильтр, содержит не более одной точки.

21. Пусть  $D$  — фильтр над  $I$  и  $\sim$  — некоторое отношение эквивалентности на  $I$ . Пусть  $D^\sim = \{B \mid \exists A (A \in D \text{ и } B = \{[x]_\sim \mid x \in A\})\}$ . Доказать, что:

(а)  $D^\sim$  — фильтр над  $I/\sim$ ;

(б) если  $D$  — ультрафильтр, то  $D^\sim$  — ультрафильтр;

(в) если  $D$  — ультрафильтр и  $[x]_\sim \notin D$  для любого  $x$ , то  $D^\sim$  — неглавный ультрафильтр.

22. Доказать, что фильтр  $D$  над  $I$  является счетно полным тогда и только тогда, когда не существует убывающей последовательности  $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$  элементов  $X_i \in D$  такой, что  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i = \emptyset$ .

23. Доказать, что  $\sim_D$  есть отношение эквивалентности на  $\prod_{i \in I} M_i$ .

24. Доказать, что если  $f_1 \sim_D g_1, \dots, f_n \sim_D g_n$ , то:

(а)  $P^n(f_1/D, \dots, f_n/D) = P^n(g_1/D, \dots, g_n/D)$ ;

(б)  $F^n(f_1, \dots, f_n) \sim_D F^n(g_1, \dots, g_n)$ .

25. Доказать, что для любого  $I$

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i \simeq \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D,$$

где  $D = \{I\}$ .

26. Доказать, что каноническое отображение  $\varphi: \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$ ,

где  $\varphi(f) = f/D$ , является гомоморфизмом  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$  на  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$ . Показать, что в общем случае этот гомоморфизм не является сильным гомоморфизмом.

27. Доказать, что если предложение, не содержащее  $\neg$  и  $\supset$ , истинно на прямом произведении  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ , то оно истинно на фильтрованном произведении  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  по любому фильтру  $D$ .

28. Доказать, что если  $D, D_1$  — фильтры над  $I$  и  $D \subseteq D_1$ , то отображение  $\varphi$ , определенное условием  $\varphi(f/D) = f/D_1$ , является гомоморфизмом  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  на  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D_1$ .

29. Пусть  $J \in D$ ,  $D$  — фильтр над  $I$ . Показать, что

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \simeq \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j / D_j,$$

где  $D_j$  — фильтр, образованный пересечениями  $J$  с множествами фильтра  $D$ . В частности, если  $D$  — главный фильтр, состоящий из подмножеств множества  $J$ , то

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \simeq \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j$$

30. Пусть  $I$  конечно и  $D$  — фильтр над  $I$ . Доказать, что  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  изоморфно прямому произведению некоторых систем  $\mathfrak{M}_i$ .

31. Пусть  $\{I_k \mid k \in K\}$  — разбиение  $I$  и пусть над  $I_k$  заданы фильтры  $D_k$ , а над  $K$  — фильтр  $D^*$ . Показать, что

$$D = \{X \subseteq I \mid \{k \mid k \in K \text{ и } X \cap I_k \in D_k\} \in D^*\}$$

есть фильтр над  $I$  и для любых  $\mathfrak{M}_i$  ( $i \in I$ )

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \simeq \prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} \mathfrak{M}_i / D_k \right) / D^*$$

(ассоциативный закон для фильтрованных произведений).

32. Доказать, что если пересечение  $J$  всех множеств фильтра  $D$  над  $I$  непусто и не принадлежит  $D$ , то

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \simeq \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j \cdot \left( \prod_{k \in J'} \mathfrak{M}_k / D_{J'} \right),$$

где  $J' = I \setminus J$  и  $D_{J'}$  — фильтр над  $J'$ , образованный пересечениями  $J'$  со всеми множествами фильтра  $D$ .

33. Пусть  $\varphi_i: \mathfrak{M}_i \rightarrow \mathfrak{N}_i$  — гомоморфизмы,  $\varphi(f/D) = (\varphi'(f))/D$ , где  $(\varphi'(f))(j) = \varphi_j(f(j))$  для  $f \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ ,  $j \in J$ . Доказать, что тогда  $\varphi$  есть гомоморфизм  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  в  $\prod_{i \in I} \mathfrak{N}_i / D$ . Доказать, что если  $\varphi_i$  — сильные гомоморфизмы (изоморфизмы), то таким же является и  $\varphi$ .

34. Пусть  $\varphi$  есть взаимно однозначное соответствие между  $I$  и  $J$ ,  $D$  — фильтр над  $I$ ,  $D_1 = \{\varphi(X) \mid X \in D\}$ . Доказать, что

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \simeq \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_{\varphi^{-1}(j)} / D_1.$$

35. Пусть  $\{C_i \mid i \in I\}$  — семейство множеств, на  $I$  задано отношение эквивалентности  $\sim$  такое, что  $i \sim j \Rightarrow C_i = C_j$ . Доказать, что для любого ультрафильтра  $D$  над  $I$  существует изоморфное вложение  $\prod_{i \in I / \sim} C_\alpha / D^\sim$  в  $\prod_{i \in I} C_i / D$ , где  $D^\sim$  строится, как в задаче 21, а  $C_\alpha = C_i$  для  $i \in I / \sim$  и  $i \in \alpha$ .



36. Пусть  $\{I_k\}_{k \in K}$  — семейство всех конечных непустых подмножеств множества  $I$ ,  $\{\mathfrak{M}_i\}_{i \in I}$  — семейство алгебраических систем сигнатуры  $\sigma$ . Доказать, что существует фильтр  $D$  над  $K$  такой, что для любого фильтра  $D_1 \supseteq D$  над  $K$  существует изоморфное вложение

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i \text{ в}$$

$$\prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} \mathfrak{M}_i \right) / D_1.$$

37. Доказать, что если  $A$  и  $B$  условно фильтруются по фильтру  $D$  над  $I$ , то  $(A \& B)$ ,  $\exists x B$ ,  $\forall x A$  также условно фильтруются по  $D$ .

38. Доказать, что если  $A$  и  $B$  фильтруются по фильтру  $D$  над  $I$ , то  $(A \& B)$ ,  $\exists x A$  также фильтруются по  $D$ .

39. Доказать, что атомные формулы фильтруются по любому фильтру.

40. Пусть  $A$  фильтруется по ультрафильтру  $D$ . Доказать, что  $\neg A$  фильтруется по  $D$ .

41. Доказать, что всякая формула фильтруется по любому ультрафильтру (*теорема Лоса*).

42. Пусть  $A$  фильтруется по фильтру  $D$  над  $I$ , а  $B$  условно фильтруется по  $D$ . Доказать, что  $(A \supset B)$  и  $\neg A$  условно фильтруются по  $D$ .

43. Назовем формулу *хорновской*, если она получается из формул вида  $\neg A$ ,  $(A \supset B)$ ,  $B$ , где  $A$  — конъюнкция атомных формул, а  $B$  — атомная формула, при помощи операций конъюнкции и навешивания кванторов. Доказать, что хорновские формулы условно фильтруются по любому фильтру.

44. Доказать, что ультрапроизведение линейно упорядоченных множеств линейно упорядочено.

45. Доказать, что фильтрованное произведение предупорядоченных множеств предупорядочено.

46. Доказать, что фильтрованное произведение частично упорядоченных множеств частично упорядочено.

47. Доказать, что фильтрованное произведение групп есть группа.

48. Пусть конечная система  $\mathfrak{M}$  содержит  $n$  элементов. Доказать, что любая ультрастепень  $\mathfrak{M}$  содержит также  $n$  элементов.

49. Показать, что если мощности всех сомножителей не превосходят натурального числа  $n$ , то мощность ультрапроизведения не превосходит  $n$ .

50. Доказать, что любое фильтрованное произведение бесконечных систем бесконечно.

51. Пусть для каждого  $i$  в семействе  $\{\mathfrak{M}_i\}_{i \in I}$  имеется лишь конечное число систем мощности  $i$ . Доказать, что в этом случае ультрапроизведение  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  по неглавному ультрафильтру  $D$  бесконечно.

52. Доказать, что если для любого  $i \in I$  имеем  $\overline{\overline{\mathfrak{M}_i}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{N}_i}}$ , то для любого фильтра  $D$  над  $I$

$$\overline{\overline{\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D}} \leq \overline{\overline{\prod_{i \in I} \mathfrak{N}_i / D}}.$$

53\*. Пусть все сомножители  $\mathfrak{M}_i$  ( $i \in \mathcal{N}$ ) конечны,  $D$  — ультрафильтр над  $\mathcal{N}$  и  $\{i \mid \overline{\overline{\mathfrak{M}_i}} = n\} \notin D$  для каждого  $n \in \mathcal{N}$ . Доказать, что  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathfrak{M}_i / D$  имеет мощность континуума.

54. Пусть все сомножители  $\mathfrak{M}_i$  ( $i \in \mathcal{N}$ ) конечны или счетны,  $D$  — неглавный ультрафильтр над множеством натуральных чисел  $\mathcal{N}$  и имеем  $\{i \mid \overline{\overline{\mathfrak{M}_i}} = n\} \notin D$  для каждого натурального  $n$ . Доказать, что мощность  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathfrak{M}_i / D$  равна континууму.

55\*. Доказать, что если  $D$  — несчетно полный ультрафильтр над  $I$  и для каждого натурального  $n$  имеем  $\{i \mid \overline{\overline{\mathfrak{M}_i}} = n\} \notin D$ , то  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  имеет мощность не меньше континуума.

56. Пусть все  $\mathfrak{M}_i$  ( $i \in I$ ) счетны и  $D$  — счетно полный ультрафильтр над  $I$ . Доказать, что  $\overline{\overline{\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D}} = \aleph_0$ .

57. Пусть  $\langle A_i; \leq \rangle$  — частично упорядоченные множества ( $i \in \mathcal{N}$ ), причем  $A_i$  содержит  $i$  минимальных элементов. Какова мощность множества минимальных элементов в ультрапроизведении  $\prod_{i \in \mathcal{N}} A_i / D$ , если  $D$  — неглавный ультрафильтр над  $\mathcal{N}$ ?

58\*. Доказать, что для каждого бесконечного множества  $I$  существует такой фильтр  $D$  над  $I$ , что для каждого фильтра  $D_1$  над  $I$ , содержащего  $D$ , и каждой бесконечной системы  $\mathfrak{M}$

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}^I / D_1}} \geq 2^I.$$

59. Доказать, что для любой бесконечной алгебраической системы  $\mathfrak{M}$  и любой данной мощности  $m$  существует ультрастепень системы  $\mathfrak{M}$ , мощность которой больше  $m$ .

60\*. Доказать, что если  $D$  — не счетно полный ультрафильтр над  $I$  и алгебраическая система  $\mathfrak{M}$  бесконечна, то естественное вложение  $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}^I/D$ , т. е.  $\varphi(a) = f/D$ , где  $f(i) = a$  для всех  $i \in I$ , не будет взаимно однозначным соответствием между  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}^I/D$ .

## § 9. АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЕ КЛАССЫ

Обозначим через  $K_\sigma$  класс всех алгебраических систем сигнатуры  $\sigma$ . Класс  $K$  алгебраических систем сигнатуры  $\sigma$  назовем *аксиоматизируемым*, если существует элементарная теория  $T(K)$  сигнатуры  $\sigma$  такая, что  $K$  есть семейство всех моделей теории  $T(K)$ . Система аксиом  $\Sigma$  для теории  $T(K)$  называется *системой аксиом для  $K$* .

Класс  $K$  называется *конечно аксиоматизируемым*, если существует конечная система аксиом для  $K$ . Класс  $K$  называется *универсально аксиоматизируемым*, если существует система аксиом для  $K$ , состоящая из  $\forall$ -формул. Алгебраические системы из класса  $K$  будем называть  *$K$ -системами*.  *$K$ -подсистемой* ( *$K$ -расширением*) данной системы  $\mathfrak{M}$  будем называть систему из класса  $K$ , являющуюся подсистемой (расширением)  $\mathfrak{M}$ . Класс  $K$  назовем *абстрактным*, если вместе с каждой алгебраической системой  $K$  содержит все ей изоморфные алгебраические системы. Системы  $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$  и  $\mathfrak{M}' = \langle M'; \sigma \rangle$  назовем *элементарно эквивалентными*, если для любого предложения  $A$  сигнатуры  $\sigma$

$$\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models A.$$

Отображение  $\varphi: M \rightarrow M'$  назовем *элементарным*, если для любой формулы  $A(x_1, \dots, x_n)$  и любых  $m_1, \dots, m_n \in M$

$$\mathfrak{M} \models A(m_1, \dots, m_n) \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models A(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_n)).$$

Система  $\mathfrak{M}'$  называется *элементарно вложимой в  $\mathfrak{M}$* , если существует элементарное отображение  $\mathfrak{M}'$  в  $\mathfrak{M}$ .

$\mathfrak{M}$  называется *элементарной подсистемой  $\mathfrak{M}'$* , а  $\mathfrak{M}'$  — *элементарным расширением  $\mathfrak{M}$*  (символически  $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}'$ ), если:

а)  $\mathfrak{M}$  — подсистема  $\mathfrak{M}'$ ;

б) тождественное отображение  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{M}'$  является элементарным.

Пусть  $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$  есть подсистема системы  $\mathfrak{M}'$ . Говорим, что  $\mathfrak{M}$  есть *подсистема, порожденная множеством  $A \subseteq M$* , если  $\mathfrak{M}$  есть наименьшая подсистема системы  $\mathfrak{M}'$ , содержащая множество  $A$ .

Подмоделью алгебраической системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  называется любая подмодель модели  $\mathbb{M}' = \langle M; \sigma' \rangle$ , где  $\sigma'$  получается из  $\sigma$  заменой всех функциональных символов  $f^n$  на предикатные символы  $P_f^{n+1}$  и

$$\mathbb{M}' \models P_f^{n+1}(m_1, \dots, m_n, m_{n+1}) \Leftrightarrow \mathbb{M} \models f(m_1, \dots, m_n) = m_{n+1}.$$

Диаграммой алгебраической системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  называется множество  $D(\mathbb{M})$ , составленное из всех истинных в  $\mathbb{M}$  атомных предложений, относящихся к системе  $\mathbb{M}$ , и их отрицаний:

$$D(\mathbb{M}) = \left\{ P^n(m_1, \dots, m_n) \mid P^n \in \sigma, m_1, \dots, m_n \in M, \mathbb{M} \models P^n(m_1, \dots, m_n) \right\} \cup \\ \cup \left\{ \neg P^n(m_1, \dots, m_n) \mid P^n \in \sigma, m_1, \dots, m_n \in M, \mathbb{M} \not\models P^n(m_1, \dots, m_n) \right\}.$$

Полной диаграммой алгебраической системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  называется множество  $FD(\mathbb{M})$  всех истинных в  $\mathbb{M}$  предложений сигнатуры  $\sigma$ , относящихся к системе  $\mathbb{M}$ .

1. Доказать, что класс  $K_\sigma$  аксиоматизируем.
2. Доказать, что объединение и пересечение аксиоматизируемых классов являются аксиоматизируемыми.
3. Пусть  $K$  — аксиоматизируемый класс,  $\mathbb{M} \in K$  и  $\mathbb{M}'$  изоморфна  $\mathbb{M}$ . Показать, что  $\mathbb{M}' \in K$ .
4. Пусть  $K$  — аксиоматизируемый класс,  $\{i \mid i \in I, \mathbb{M}_i \in K\} \in D$ , где  $D$  — ультрафильтр над  $I$ . Доказать, что  $\prod_{i \in I} \mathbb{M}_i / D \in K$ .
5. Доказать, что если класс  $K$  алгебраических систем аксиоматизируем, то класс  $K'$  всех бесконечных систем из  $K$  также аксиоматизируем.
6. Пусть  $K$  — аксиоматизируемый класс, содержащий конечные системы со сколь угодно большим числом элементов. Построить бесконечную систему из класса  $K$ . Доказать, что  $K$  содержит бесконечную систему мощности континуума.
7. Доказать, что не являются аксиоматизируемыми:
  - (а) класс конечных групп;
  - (б) класс конечных абелевых групп;
  - (в) класс циклических групп.
8. Доказать, что класс полей конечной характеристики неаксиоматизируем.

9. Пусть  $\mathbb{M}_0 = \langle M_0; \leq \rangle$ ,  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \leq \rangle$ , ... — семейство вполне упорядоченных множеств такое, что  $\overline{M}_{k+1} \geq k+1$ . Доказать, что ультрапроизведение  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{M}_i / D$  вполне упорядоченно относительно  $\leq$  тогда и

только тогда, когда  $D$  — главный ультрафильтр. Вывести отсюда, что класс вполне упорядоченных множеств неаксиоматизируем.

10\*. Доказать, что класс  $K$  аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно ультрапроизведений и элементарной эквивалентности.

11\*. Доказать, что элементарная теория  $T$  имеет модель тогда и только тогда, когда выполнимо каждое конечное подмножество  $T_0 \subseteq T$  (локальная теорема Мальцева).

12. Доказать, что любая непротиворечивая теория имеет модель (теорема о существовании модели).

13. Доказать, что для того, чтобы класс  $K$  был конечно аксиоматизируем, необходимо и достаточно, чтобы  $K$  и его дополнение  $K_o \setminus K$  были аксиоматизируемы.

14. Пусть  $K$  — конечно аксиоматизируемый класс и  $\prod_{i \in I} \mathbb{M}_i / D \in K$ , где  $D$  — ультрафильтр над  $I$ . Доказать, что  $\{i \mid \mathbb{M}_i \in K\} \in D$ .

15. Пусть  $K$  — аксиоматизируемый класс, содержащий конечные системы со сколь угодно большим числом элементов. Доказать, что класс бесконечных систем из  $K$  не является конечно аксиоматизируемым.

16. Доказать, что не являются конечно аксиоматизируемыми классы:

- (а) бесконечных групп;
- (б) бесконечных частично упорядоченных множеств;
- (в) бесконечных линейно упорядоченных множеств.

17. Доказать, что класс полей характеристики 0 не является конечно аксиоматизируемым.

18. Пусть теория  $T$  имеет бесконечную модель. Доказать, что для любого бесконечного кардинального числа  $m$  существует модель для  $T$ , мощность которой больше, чем  $m$  (теорема Мальцева о расширении).

19. Пусть для любого  $n \in \mathcal{N}$  теория  $T$  имеет модель мощности, большей  $n$ . Доказать, что для любого бесконечного кардинального числа  $m$  существует модель для  $T$ , мощность которой больше, чем  $m$ .

20\*. Доказать, что если каждое конечное обединение конечной подмодели модели  $\mathbb{M}$  изоморфно вложимо в некоторую модель из класса

моделей  $K$ , то  $\mathbb{M}$  изоморфно вложима в подходящее ультрапроизведение моделей из  $K$ .

21. Пусть  $D(\mathbb{M})$  есть диаграмма системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  и  $\mathbb{M}' = \langle M'; \sigma \cup M \rangle$  — модель для  $D(\mathbb{M})$ . Доказать, что  $\mathbb{M}$  изоморфно вложима в  $\langle M; \sigma \rangle$ .

22. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  — конечная алгебраическая система конечной сигнатуры. Доказать, что существует  $\exists$ -предложение  $A$  сигнатуры  $\sigma$  такое, что для любой системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$   $A$  истинно в  $\mathbb{M}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{M}'$  изоморфно вложима в  $\mathbb{M}$ .

23. Пусть  $\sigma$  — конечная сигнатура,  $\mathbb{M}_i = \langle M_i; \sigma \rangle$  ( $i \in I$ ) — система конечных алгебраических систем сигнатуры  $\sigma$  и существует  $n$  такое, что  $\overline{M}_i \leq n$ . Доказать, что для любого ультрафильтра  $D$  над  $I$  существует  $i_0 \in I$  такое, что  $\prod_{i \in I} \mathbb{M}_i / D \simeq \mathbb{M}_{i_0}$ .

24. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  — алгебраическая система,  $A$  — непустое подмножество  $M$  и  $\mathbb{M}_i = \langle M_i; \sigma \rangle$  ( $i \in I$ ) — семейство всех подсистем в  $\mathbb{M}$  таких, что  $\mathbb{M}_i \supseteq A$ . Доказать, что  $\mathbb{M} = \langle \bigcap_{i \in I} M_i; \sigma \rangle$  есть подсистема в  $\mathbb{M}$ , порожденная множеством  $A$ .

25. Доказать, что если  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$  есть подсистема системы  $\mathbb{M}$ , порожденная множеством  $A$ , то  $M_1$  есть множество всех значений термов сигнатуры  $\sigma$ , когда переменные принимают значения в множестве  $A$ .

26. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ ,  $A$  — непустое множество  $M$ . Доказать, что подсистема  $\mathbb{M}'$ , порожденная множеством  $A$ , имеет мощность не более чем  $\max\{\overline{A}, \overline{\sigma}, \aleph_0\}$ .

27. Доказать, что каждый аксиоматизируемый класс состоит из обединений алгебраических систем некоторого универсально аксиоматизируемого класса.

28. Доказать, что каждая система из аксиоматизируемого класса  $K$  конечной сигнатуры содержит конечную или счетную  $K$ -подсистему.

29. Пусть  $K$  — аксиоматизируемый класс, сигнатура  $\sigma$  которого имеет мощность  $p$  и пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  — некоторая  $K$ -система. Доказать, что каждое подмножество  $A \subseteq M$ , имеющее мощность  $m$ , содержится внутри подходящей  $K$ -подсистемы системы  $\mathbb{M}$  мощности не выше  $p + m + \aleph_0$  (теорема Левенгейма—Скулема).

30. Доказать, что каждая бесконечная система  $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$  аксиоматизируемого класса  $K$  допускает  $K$ -расширение любой наперед заданной мощности, большей  $\overline{M} + \overline{\sigma}$ .

31\*. Построить пример аксиоматизируемого класса  $K$  такого, что класс  $K$  содержит конечные модели со сколь угодно большим числом элементов, а все бесконечные модели из  $K$  имеют мощность не меньше мощности континуума.

32\*. Построить пример аксиоматизируемого класса  $K$  такого, что в  $K$  существует счетная модель, а все отличные от нее модели класса  $K$ , являющиеся расширениями этой модели, имеют мощность, не меньшую мощности континуума.

33\*. Доказать, что если аксиоматизируемый класс  $K$  содержит систему мощности  $m \geq \aleph_0$ , то для любого  $n \geq 2^m$  существует  $K$ -система мощности  $n$ .

34. Предположим, что справедлива обобщенная гипотеза континуума: для любых кардинальных чисел  $m, n$  из  $m \leq n \leq 2^m$  следует, что  $m = n$  или  $n = 2^m$ . Доказать, что тогда для любого аксиоматизируемого класса  $K$  справедливо в точности одно из следующих условий:

(а) мощности конечных систем из  $K$  ограничены некоторым натуральным числом, и  $K$  состоит лишь из конечных систем;

(б) мощности конечных систем из  $K$  ограничены некоторым натуральным числом, и существует бесконечное кардинальное число  $m$  такое, что для любого бесконечного кардинального числа  $n$  класс  $K$  содержит модель мощности  $n$  тогда и только тогда, когда  $n \geq m$ ;

(в) мощности конечных систем из  $K$  не ограничены, и существует бесконечное кардинальное число  $m \leq 2^{\aleph_0}$  такое, что  $K$  содержит систему бесконечной мощности  $n$  тогда и только тогда, когда  $n \geq m$ .

Привести примеры классов для каждого из случаев (а), (б), (в).

35. Доказать, что если  $\varphi: M \rightarrow M'$  — элементарное отображение, то  $\varphi$  одно-однозначно и для каждой формулы  $A(x_1, \dots, x_n)$  и любых  $m_1, \dots, m_n \in M$  имеем

$$\mathfrak{M} \models A(m_1, \dots, m_n) \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models A(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_n)).$$

36. Пусть  $\mathfrak{N} = \langle \mathcal{N}; \leq \rangle$ ,  $\mathfrak{M} = \langle M; \leq \rangle$ , где  $\mathcal{N}$  — множество натуральных чисел,  $M$  — множество положительных целых чисел. Показать, что  $\mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{M}$  элементарно эквивалентны, но  $\mathfrak{N}$  не является элементарным расширением  $\mathfrak{M}$ .

37. Пусть  $M$  — множество четных чисел,  $\mathfrak{M} = \langle M; \leq \rangle$ ,  $\mathfrak{N} = \langle \mathcal{N}; \leq \rangle$ , где  $\leq$  — обычный порядок. Является ли  $\mathfrak{M}$  элементарной подмоделью  $\mathfrak{N}$ ?

38. Пусть  $\mathbb{K} = \langle \mathbb{R}; +, \cdot \rangle$  — поле действительных чисел,  $\mathbb{C} = \langle \mathbb{C}; +, \cdot \rangle$  — поле комплексных чисел. Является ли  $\mathbb{C}$  элементарным расширением  $\mathbb{K}$ ?

39. Доказать, что для любого ультрафильтра  $D$  над  $I$  каноническое отображение  $\varphi: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^I/D$ , определенное условием  $\varphi(b) = f/D$ , где  $f(i) = b$  для всех  $i \in I$ , является элементарным вложением  $\mathbb{M}$  в  $\mathbb{M}^I/D$ . Доказать, что если  $\mathbb{M}$  — конечная система, то  $\varphi$  есть изоморфизм  $\mathbb{M}$  на  $\mathbb{M}^I/D$ .

40. Пусть  $\mathbb{M}_n = \langle M_n; \leq \rangle$  — линейно упорядоченные множества ( $n \in \mathcal{N}$ );  $M_n$  содержит  $2n + 1$  элемент.

(а) Построить изоморфизм множества целых чисел  $\langle \mathbb{Z}; \leq \rangle$  в  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{M}_i/D$ , если  $D$  — неглавный ультрафильтр на  $\mathcal{N}$ .

(б) Будет ли этот изоморфизм элементарным отображением?

41. Пусть  $FD(\mathbb{M})$  есть полная диаграмма системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  и  $\mathbb{M}' = \langle M'; \sigma \cup M \rangle$  — модель для  $FD(\mathbb{M})$ . Доказать, что  $\mathbb{M}$  элементарно вложена в  $\langle M'; \sigma \rangle$ .

42. Доказать, что для любой бесконечной системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  и любого кардинального числа  $m$  существует элементарное расширение системы  $\mathbb{M}$  мощности, большей  $m$ .

43. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  есть подсистема системы  $\mathbb{M}' = \langle M'; \sigma \rangle$ . Доказать, что для того, чтобы  $\mathbb{M}$  была элементарной подсистемой  $\mathbb{M}'$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой формулы  $A(x_1, \dots, x_n, y)$  сигнатуры  $\sigma$  и любых  $m_1, \dots, m_n \in M$  из  $\mathbb{M}' \models \exists y A(m_1, \dots, m_n, y)$  следовало существование такого  $m \in M$ , что  $\mathbb{M} \models A(m_1, \dots, m_n, m)$ .

44. Доказать, что каждая бесконечная система конечной или счетной сигнатуры  $\sigma$  является элементарным расширением счетной системы сигнатуры  $\sigma$ .

45. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  — бесконечная система,  $X \subseteq M$  и  $m$  — такая мощность, что  $\max\{\bar{\sigma}, \bar{X}, \aleph_0\} \leq m \leq \bar{M}$ . Доказать, что существует элементарная подсистема  $\mathbb{M}' = \langle M'; \sigma \rangle$  мощности  $m$  такая, что  $X \subseteq M'$ .

46. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  — бесконечная система и  $m \geq \max\{\bar{M}, \bar{\sigma}\}$ . Доказать, что  $\mathbb{M}$  обладает элементарным расширением мощности  $m$ .

47\*. Пусть  $\mathbb{M}_1, \dots, \mathbb{M}_n, \dots$  — множество систем таких, что  $\mathbb{M}_{i+1}$  есть элементарное расширение  $\mathbb{M}_i$  для любого  $i$ . Доказать, что  $\bigcup_i \mathbb{M}_i$  есть элементарное расширение каждого  $\mathbb{M}_i$ .



48\*. Доказать, что класс  $K$  аксиоматизируем тогда и только тогда, когда  $K$  является абстрактным, замкнутым относительно ультрапроизведений и замкнутым относительно взятия элементарных подсистем.

49\*. Доказать, что класс  $K$  систем сигнатуры  $\sigma$  универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любой системы  $\mathbb{M}$  сигнатуры  $\sigma$  из того, что каждое конечное объединение каждой конечной подмодели системы  $\mathbb{M}$  изоморфно вложено в некоторую  $K$ -систему, следует, что  $\mathbb{M}$  принадлежит  $K$ .

50. Показать, что класс  $K$  тогда и только тогда универсально аксиоматизируем, когда  $K$  является замкнутым относительно ультрапроизведений, абстрактным и наследственным (замкнутым относительно взятия подсистем).

51. Пусть класс  $K$  аксиоматизируем, а  $SK$  — класс систем, изоморфных подсистемам  $K$ -систем. Доказать, что класс  $SK$  универсально аксиоматизируем.

52\*. Доказать, что для того, чтобы  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{M}_1$  были элементарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ультрафильтр  $D$  над  $I$ , для которого существует элементарное отображение  $\mathbb{M}$  в  $\mathbb{M}'_1/D$ .

53. Доказать, что если  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{M}_1$  элементарно эквивалентны и  $\mathbb{M}$  конечна, то  $\mathbb{M}_1$  конечна и изоморфна  $\mathbb{M}$ .

54. Доказать, что для того, чтобы непротиворечивая теория  $T$  была полной, необходимо и достаточно, чтобы все ее модели были элементарно эквивалентны.

55. Показать, что класс моделей категоричной теории состоит (с точностью до изоморфизма) из одной конечной системы. (Теория называется *категоричной*, если все ее модели изоморфны.)

56. Пусть  $T$  — элементарная теория, не имеющая конечных моделей, которая  $m$ -категорична в некоторой бесконечной мощности  $m$ . Доказать, что  $T$  — полная теория. (Теория называется  *$m$ -категоричной*, если все ее модели мощности  $m$  изоморфны.)

57. Доказать, что теория плотно упорядоченных множеств (см. задачу 13 из § 5 части I) без наименьшего и наибольшего элементов является полной.

58. Пусть  $\Gamma$  — полное множество предложений сигнатуры  $\sigma$ ,  $\Gamma_0 \supseteq \Gamma$ ,  $\Gamma_1 \supseteq \Gamma$  — два непротиворечивых множества предложений таких, что все предметные константы из  $\Gamma_0$  и все функциональные и предикатные символы из  $\Gamma_1$  входят в  $\sigma$ . Доказать, что множество  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$  непротиворечиво.

59. Пусть  $\Gamma$  — полное множество предложений сигнатуры  $\sigma$ ,  $A$  — предложение, все предметные константы которого входят в  $\sigma$ ,  $\Gamma \cup \{A\}$  непротиворечиво. Доказать, что если  $\Gamma$  выполнимо в системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , то множество  $\{A\} \cup FD(\mathbb{M})$  непротиворечиво.

60. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  есть обеднение системы  $\mathbb{M}_1 = \langle M; \sigma_1 \rangle$ ,  $\mathbb{M}_2 = \langle M_2; \sigma \rangle$  — элементарное расширение  $\mathbb{M}$ . Доказать, что существует элементарное расширение  $\mathbb{M}_3 = \langle M_3; \sigma_1 \rangle$  системы  $\mathbb{M}_1$  такое, что  $\langle M_3; \sigma \rangle$  есть элементарное расширение  $\mathbb{M}_2$ .

61\*. Пусть  $\Gamma$  — полное множество предложений сигнатуры  $\sigma$ ,  $A$  — предложение сигнатуры  $\sigma_1 \supseteq \sigma$ ,  $B$  — предложение сигнатуры  $\sigma_2 \supseteq \sigma$  и  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma$ , причем все предметные константы  $A$  и все предметные константы  $B$  входят в  $\sigma$ . Доказать, что если  $\Gamma \cup \{A\}$  и  $\Gamma \cup \{B\}$  непротиворечивы, то  $\Gamma \cup \{A, B\}$  непротиворечиво.

62. Пусть  $\Gamma$  — полное множество предложений сигнатуры  $\sigma$ ,  $A$  — предложение сигнатуры  $\sigma_1 \supseteq \sigma$ ,  $B$  — предложение сигнатуры  $\sigma_2 \supseteq \sigma$  и  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma$ . Доказать, что если  $\Gamma \cup \{A\}$  и  $\Gamma \cup \{B\}$  непротиворечивы, то  $\Gamma \cup \{A, B\}$  непротиворечиво.

63\*. Пусть  $A$  — предложение сигнатуры  $\sigma_1$ ,  $B$  — предложение сигнатуры  $\sigma_2$  и  $\vdash (A \supset B)$  в ИП, а  $\neg A$  и  $B$  невыводимы в ИП. Доказать, что  $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$  непусто и существует предложение  $C$  сигнатуры  $\sigma$  такое, что  $\vdash (A \supset C)$  и  $\vdash (C \supset B)$  в ИП (интерполяционная теорема для ИП).

### § 1. ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Будем изучать *частичные числовые функции*  $f^n(x_1, \dots, x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), т. е. функции, определенные на некотором подмножестве  $M \subseteq \mathcal{N}^n$  с натуральными значениями. Для любых  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{N}$  и любых функций  $f^k$  и  $g^s$  пишем  $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = g(a_{j_1}, \dots, a_{j_s})$ , если значения  $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$  и  $g(a_{j_1}, \dots, a_{j_s})$  не определены или эти значения определены и совпадают.

$n$ -местная функция  $f^n(x_1, \dots, x_n)$  называется *всюду определенной*, если  $\delta_{f^n} = \mathcal{N}^n$ .

Следующие всюду определенные функции назовем *простейшими*:

$$s^1(x) = x + 1,$$

$$o^1(x) = 0,$$

$$I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m \text{ (при } 1 \leq m \leq n).$$

Будем говорить, что функция

$$h^n(x_1, \dots, x_n) = g^m(f_1^n(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^n(x_1, \dots, x_n))$$

получается с помощью *оператора суперпозиции* из функций  $g^n, f_1^n, \dots, f_m^n$ . Скажем, что функция

$$h^n(x_1, \dots, x_n) = g^m(t_1, \dots, t_m)$$

получается с помощью *оператора подстановки* из функций  $g, f_1, \dots, f_m$ , если  $t_i = f_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$ , где  $x_{j_l}$  есть одна из переменных  $x_1, \dots, x_n$  или  $t_i$  есть одна из переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

Скажем, что функция  $f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)$  получается из функций  $g^n(x_1, \dots, x_n)$  и  $h^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, z)$  с помощью *оператора при-*

митивной рекурсии, если она может быть задана схемой примитивной рекурсии:

$$\begin{cases} f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = g^n(x_1, \dots, x_n), \\ f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y+1) = h^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)). \end{cases}$$

Для  $n = 0$  схема примитивной рекурсии имеет следующий вид:

$$\begin{cases} f(0) = a, \\ f(y+1) = g(y, f(y)), \end{cases}$$

где  $a$  — постоянная одноместная функция, равная числу  $a$ .

Будем говорить, что функция  $f^n(x_1, \dots, x_n)$  получается из функции  $g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)$  с помощью оператора минимизации ( $\mu$ -оператора), и обозначать

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) = 0],$$

если выполнено условие:  $f^n(x_1, \dots, x_n)$  определено и равно  $y$  тогда и только тогда, когда  $g(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, g(x_1, \dots, x_n, y-1)$  определены и не равны 0, а  $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется *примитивно рекурсивной* (прф), если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется *частично рекурсивной* (чрф), если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется *общерекурсивной* (орф), если она частично рекурсивна и всюду определена.

Говорим, что функция  $f^n(x_1, \dots, x_n)$  получается из функций  $g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)$  и  $h^n(x_1, \dots, x_n)$  с помощью *ограниченного  $\mu$ -оператора*, если  $\mu y [g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$  определено для всех  $x_1, \dots, x_n$  и не больше, чем  $h(x_1, \dots, x_n)$ , и

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

Говорим, что функция  $f^{n+1}$  получается из  $g^n$ ,  $h^{n+s+1}$ ,  $t_1^1, \dots, t_s^1$  *возвратной рекурсией*, если она может быть задана схемой

$$\begin{cases} f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = g^n(x_1, \dots, x_n), \\ f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y+1) = h^{n+s+1}(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, t_1(y+1)), \dots, f(x_1, \dots, x_n, t_s(y+1))), \end{cases}$$

где  $t_1(y+1) \leq y, \dots, t_s(y+1) \leq y$ .

Используем обозначение

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) = h(x_1, \dots, x_n, y)],$$

если выполнено условие:  $f^n(x_1, \dots, x_n)$  определено и равно  $y$  тогда и только тогда, когда  $g(x_1, \dots, x_n, i)$  и  $h(x_1, \dots, x_n, i)$  определены для  $i = 0, 1, \dots, y$ , но  $g(x_1, \dots, x_n, i) \neq h(x_1, \dots, x_n, i)$  при  $i < y$  и  $g(x_1, \dots, x_n, y) = h(x_1, \dots, x_n, y)$ .

Подобным образом используются обозначения:

$$\mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) \neq h(x_1, \dots, x_n, y)],$$

$$\mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) \leq h(x_1, \dots, x_n, y)],$$

$$\mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) < h(x_1, \dots, x_n, y)] \text{ и т. д.}$$

Будем говорить, что функция  $f(x)$  получается из функции  $g(x)$  с помощью *итерации*, и обозначать  $f(x) = ig(x)$ , если

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x+1) = g(f(x)). \end{cases}$$

Будем говорить, что функция  $f(x)$  получается из функции  $g(x)$  с помощью *обращения*, и обозначать  $f(x) = g^{-1}(x)$ , если

$$f(x) = \mu y [g(y) = x].$$

Пусть  $G$  — некоторое семейство  $n$ -местных частичных функций. Функцию  $F^{n+1}$  назовем *универсальной функцией* для  $G$ , если

$$G = \{F(0, x_1, \dots, x_n), F(1, x_1, \dots, x_n), \dots\}.$$

1. Доказать, что любая примитивно рекурсивная функция всюду определена.

2. Доказать, что если функция  $f^n(x_1, \dots, x_n)$  примитивно рекурсивна, то следующие функции примитивно рекурсивны:

- (а)  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$  (перестановка аргументов);  
 (б)  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, \dots, x_n, x_1)$  (циклическая перестановка аргументов);  
 (в)  $f_3(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$  (введение фиктивного аргумента);  
 (г)  $f_4(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, \dots, x_{n-1})$  (отождествление аргументов).

3. Какие функции получаются из простейших с помощью лишь суперпозиций?

4. Доказать, что из  $o^1$  и  $I_m^n$  с помощью суперпозиций и схем примитивной рекурсии нельзя получить функции  $x + 1$  и  $2x$ .

5. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

- (а)  $f(x) = x + n$ ;  
 (б)  $f(x) = n$ ;  
 (в)  $f(x, y) = x + y$ ;  
 (г)  $f(x, y) = x \cdot y$ ;  
 (д)  $f(x, y) = x^y$  (здесь  $0^0 = 1$ );  
 (е)  $f(x) = x!$  (здесь  $0! = 1$ ).

6. Какая функция получается из  $g$  и  $h$  с помощью схемы примитивной рекурсии:

- (а)  $g(x) = x, h(x, y, z) = z^x$ ;  
 (б)  $g(x) = x, h(x, y, z) = x^z$ ?

7. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

- (а)  $sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$   
 (б)  $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$   
 (в)  $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x - 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$   
 (г)  $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq y, \\ x - y, & \text{если } x > y; \end{cases}$   
 (д)  $|x - y|$ ;  
 (е)  $\max(x, y)$ ;  
 (ж)  $\min(x, y)$ .

8. Доказать следующие равенства:

- (а)  $x \dot{-} y = s(x) \dot{-} s(y)$ ;

$$(б) x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y);$$

$$(в) x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z;$$

$$(г) (x \dot{-} y) \dot{-} z = (x \dot{-} z) \dot{-} y.$$

9. Пусть  $g^{n+1}, \alpha^m, \beta^m$  — примитивно рекурсивные функции. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

$$(а) f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \dots, x_n, i);$$

$$(б) f^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, z) = \begin{cases} \sum_{i=y}^z g(x_1, \dots, x_n, i), & \text{если } y \leq z, \\ 0, & \text{если } y > z; \end{cases}$$

$$(в) f^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=\alpha(y_1, \dots, y_m)}^{\beta(y_1, \dots, y_m)} g(x_1, \dots, x_n, i), & \text{если } \alpha(y_1, \dots, y_m) \leq \beta(y_1, \dots, y_m), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$(г) f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \prod_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \dots, x_n, i);$$

$$(д) f^{n+2}(x_1, \dots, x_n, y, z) = \begin{cases} \prod_{i=y}^z g(x_1, \dots, x_n, i), & \text{если } y \leq z, \\ 0, & \text{если } y > z; \end{cases}$$

$$(е) f^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) =$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=\alpha(y_1, \dots, y_m)}^{\beta(y_1, \dots, y_m)} g(x_1, \dots, x_n, i), & \text{если } \alpha(y_1, \dots, y_m) \leq \beta(y_1, \dots, y_m), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

10. Доказать, что если  $f$  получается из примитивно рекурсивных функций  $g$  и  $h$  с помощью ограниченного  $\mu$ -оператора, то  $f$  примитивно рекурсивна.

11. Пусть функции  $f_0^n, f_1^n, \dots, f_s^n$  обладают следующим свойством: для любых натуральных значений  $x_1, \dots, x_n$  одна и только одна из этих функций равна 0. Скажем, что функция  $g^n$  кусочно задана, если

$$g^n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} h_0^n(x_1, \dots, x_n), & \text{если } f_0^n(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ h_s^n(x_1, \dots, x_n), & \text{если } f_s^n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Доказать, что если функции  $h_0^n, \dots, h_s^n, f_0^n, \dots, f_s^n$  примитивно рекурсивны, то  $g^n$  примитивно рекурсивна.

12. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

12. Докажите, что следующие функции принимают целые значения:
- $\left[ \frac{x}{y} \right]$  — частное от деления  $x$  на  $y$  (здесь  $\left[ \frac{x}{0} \right] = x$ );
  - $\text{rest}(x, y)$  — остаток от деления  $x$  на  $y$  (здесь  $\text{rest}(x, 0) = x$ );
  - $\tau(x)$  — число делителей числа  $x$ , где  $\tau(0) = 0$ ;
  - $\sigma(x)$  — сумма делителей числа  $x$ , где  $\sigma(0) = 0$ ;
  - $\text{lh}(x)$  — число простых делителей числа  $x$ , где  $\text{lh}(0) = 0$ ;
  - $\pi(x)$  — число простых чисел, не превосходящих  $x$ ;
  - $k(x, y)$  — наименьшее общее кратное чисел  $x$  и  $y$ , где  $k(x, 0) = k(0, y) = 0$ ;
  - $d(x, y)$  — наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ , где  $d(0, 0) = 0$ ;
  - $p(x)$  —  $x$ -е простое число ( $p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5, \dots$ );
  - $\text{long}(x)$  — номер наибольшего простого делителя числа  $x$ ;
  - $\text{ex}(x, y)$  — показатель степени  $x$ -го простого числа  $p(x)$  в каноническом разложении на простые множители числа  $y$ , где  $\text{ex}(x, 0) = 0$ ;
  - $[\sqrt{x}]$ ;
  - $[y\sqrt{x}]$ , где  $[0\sqrt{x}] = x$ ;
  - $[x\sqrt{2}]$ ;
  - $[e \cdot x]$ ;
  - $\{e^x\}$ ;
  - $C_x^y$  (здесь  $C_x^y = 1$  при  $y \geq x$ ).

13. (a) Доказать, что функция

$$c(x, y) = \frac{(x + y)^2 + 3x + y}{2}$$

(канторовская нумерующая функция) осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{N}^2$  и  $\mathcal{N}$  (нумерует пары натуральных чисел).

(б) Пусть  $l(x)$  и  $r(x)$  таковы, что

$$c(l(x), r(x)) = x.$$



Доказать, что  $l(x)$  и  $r(x)$  примитивно рекурсивны и  $l(c(x, y)) = x$ ,  $r(c(x, y)) = y$ .

14. Для каждого  $n > 1$  определим функции

$$c^1(x_1) = x_1,$$

$$c^{n+1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) = c^n(c(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1})$$

(см. задачу 13).

Пусть  $c_{ni}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) таковы, что  $c^n(c_{n1}(x), \dots, c_{nn}(x)) = x$ .

(а) Доказать тождества

$$c_{ni}(c^n(x_1, \dots, x_n)) = x_i \quad \text{для } 1 \leq i \leq n.$$

(б) Доказать, что функции  $c^n$  и  $c_{ni}$  примитивно рекурсивны.

(в) Доказать, что функции  $c^n(x_1, \dots, x_n)$  осуществляют взаимно однозначные соответствия между  $\mathcal{N}^n$  и  $\mathcal{N}$  (нумеруют кортежи натуральных чисел длины  $n$ ).

15. Как из одноместных частично рекурсивных функций и функций  $c^n(x_1, \dots, x_n)$  получить все частично рекурсивные функции?

16\*. Назовем одноместную функцию  $f(x)$  функцией большого размаха, если она каждое натуральное число принимает в качестве своего значения бесконечное число раз.

(а) Пусть пара функций  $\langle f_1(x), f_2(x) \rangle$  отображает  $\mathcal{N}$  на  $\mathcal{N}^2$ . Доказать, что  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — функции большого размаха.

(б) Пусть  $f_1(x)$  — произвольная примитивно рекурсивная функция большого размаха. Построить примитивно рекурсивную функцию  $f_2(x)$  так, чтобы функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  осуществляли взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{N}^2$ .

17\*. Рассмотрим функцию Гёделя

$$\beta(x, y, z) = \text{rest}(x, 1 + y(z + 1)).$$

Доказать, что, какова бы ни была конечная последовательность натуральных чисел  $a_1, \dots, a_n$ , система уравнений

$$\begin{cases} \beta(x, y, 0) = \alpha_0, \\ \dots\dots\dots \\ \beta(x, y, n) = \alpha_n \end{cases}$$

имеет по меньшей мере одно решение  $x, y$ .

18\*. Доказать, что если функции  $g, h, t_1, \dots, t_s$  примитивно рекурсивны и  $f$  получается из них возвратной рекурсией, то функция  $f$  примитивно рекурсивна.

19. Доказать, что функция, перечисляющая по порядку числа Фибоначчи:

$$\begin{cases} f(0) = 0, & f(1) = 1, \\ f(n+2) = f(n) + f(n+1), \end{cases}$$

примитивно рекурсивна.

20. Пусть функции  $f$  и  $g$  определены следующим образом:

$$\begin{cases} f(0) = a, & g(0) = b, \\ f(x+1) = h_1(x, f(x), g(x)), \\ g(x+1) = h_2(x, f(x), g(x)). \end{cases}$$

Доказать, что если функции  $h_1$  и  $h_2$  примитивно рекурсивны, то функции  $f$  и  $g$  примитивно рекурсивны.

21. Пусть  $f_1^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}$  определены с помощью совместной рекурсии:

$$\begin{cases} f_i^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = g_i^n(x_1, \dots, x_n), \\ f_i^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y+1) = \\ = h_i^{n+k+1}(x_1, \dots, x_n, y, f_1(x_1, \dots, x_n, y), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

для всех  $1 \leq i \leq k$ .

Доказать, что если функции  $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_k$  примитивно рекурсивны, то функции  $f_1, \dots, f_k$  примитивно рекурсивны.

22. Доказать, что всякая примитивно рекурсивная функция общерекурсивна.

23. (а) Доказать, что суперпозиция общерекурсивных функций есть общерекурсивная функция.

(б) Доказать, что, применяя оператор примитивной рекурсии к общерекурсивным функциям, мы получим общерекурсивную функцию.

(в) Привести пример общерекурсивной функции, из которой с помощью  $\mu$ -оператора получается функция, не являющаяся общерекурсивной.

24. Доказать, что если функция  $f^n(x_1, \dots, x_n)$  частично рекурсивна, то следующие функции частично рекурсивны:

(а)  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$  (перестановка аргументов);

(б)  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, \dots, x_n, x_1)$  (циклическая перестановка аргументов);

(в)  $f_3(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$  (введение фиктивного аргумента);

(г)  $f_4(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, \dots, x_{n-1})$  (отождествление аргументов).

25. Доказать, что:

(а) существует в точности  $\aleph_0$  частично рекурсивных функций;

(б) существует частичная числовая функция, не являющаяся общерекурсивной;

(в) существует всюду определенная числовая функция, не являющаяся общерекурсивной.

26. Доказать, что частично рекурсивны следующие функции:

(а) нигде не определенная функция  $\omega$ , т. е. функция  $\omega$  с пустой областью определения;

(б)  $f(x, y) = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

(в)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & \text{если } y \text{ делит } x, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

(г)  $f(x, y) = \begin{cases} z, & \text{если } z^y = x, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

(д) функция, определенная в конечном числе точек.

27. Доказать, что если функции  $g^{n+1}$ ,  $h^{n+1}$  и  $t^{n+1}$  частично рекурсивны, то следующие функции частично рекурсивны:

(а)  $\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = h(x_1, \dots, x_n, y)]$ ;

(б)  $\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) \neq h(x_1, \dots, x_n, y)]$ ;

(в)  $\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) \leq h(x_1, \dots, x_n, y)]$ ;

(г)  $\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) < h(x_1, \dots, x_n, y)]$ ;

(д)  $\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \text{ и } h(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ ;

(е)  $\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \text{ или } h(x_1, \dots, x_n, y) \leq t(x_1, \dots, x_n, y)]$ .

28. (а) Доказать, что функция  $f^{n+1}$ , возникающая из частичных функций  $g^n$  и  $h^{n+2}$  с помощью оператора примитивной рекурсии, может быть получена с помощью специальной рекурсии вида

$$\begin{cases} F(x, 0) = x, \\ F(x, y + 1) = G(F(x, y)) \end{cases}$$

и суперпозиций из функций  $g^n, h^{n+2}, o, s, I_m^n$  и  $c, l, r$  из задачи 13.

(б) Доказать, что функция  $f(x)$ , получающаяся из  $a$  и  $h(x, y)$  с помощью оператора примитивной рекурсии, может быть получена с помощью итерации и суперпозиций из функций  $a, h, o, s, I_m^n$  и  $c, l, r$  из задачи 13.

29. Доказать, что функция  $f^n$ , получающаяся из частичной функции  $g^{n+1}$  с помощью  $\mu$ -оператора, может быть получена из функций  $g, I_m^n$  и  $c, l, r$  из задачи 13 с помощью суперпозиций и  $\mu$ -оператора специального вида

$$F(x) = \mu y[G(x, y) = 0].$$

30\*. Доказать, что функция  $f^{n+1}$ , получающаяся с помощью оператора примитивной рекурсии из всюду определенных функций  $g^n$  и  $h^{n+2}$ , может быть получена из этих функций и функций  $+, \div, s, o, I_m^n$  и  $c, l, r, \beta$  из задач 13, 17 с помощью суперпозиций и  $\mu$ -оператора специального вида из задачи 29.

31. (а) Пусть  $\sqrt{2} = a_0, a_1 a_2 \dots$  — разложение числа  $\sqrt{2}$  в бесконечную десятичную дробь. Доказать, что  $a_n$  — общерекурсивная функция от  $n$ .

(б) Пусть  $e = a_0, a_1 a_2 \dots$  — разложение числа  $e$  в бесконечную десятичную дробь. Доказать, что  $a_n$  — общерекурсивная функция от  $n$ .

(в) Пусть  $\pi = a_0, a_1 a_2 \dots$  — разложение числа  $\pi$  в бесконечную десятичную дробь. Доказать, что  $a_n$  — общерекурсивная функция от  $n$ .

32\*. Пусть  $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots$  — разложение действительного числа  $\alpha$  в бесконечную десятичную дробь. Число  $\alpha$  назовем *общерекурсивным* (конструктивным), если  $a_n$  — общерекурсивная функция от  $n$ . Доказать, что алгебраические числа общерекурсивны.

33. Доказать, что:

(а)  $i(ax + b) = b \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1}$  при  $a > 1$ ;

(б)  $i\left(1 + \left[\frac{x}{2}\right]\right) = sg\ x$ ;

(в)  $i\left(x + 1 + \left[\frac{x+1}{2}\right] - \left[\frac{x}{2}\right]\right) = 2x \div 1$ ;

(г)  $i(\overline{sg}\ x + 2x) = 2^{x-1} \div \overline{sg}\ x$ ;

(д)  $i(x + 1 + [\sqrt{4x+1}]) = x^2 + x$ ;

$$(e) i(x + 1 + 2[\sqrt{x}]) = x^2.$$

34\*. Доказать, что следующие функции могут быть получены из функций  $s(x) = x + 1$  и  $q(x) = x \div [\sqrt{x}]^2$  с помощью операций подстановки, итерации и сложения двух функций:

- |                                  |                    |
|----------------------------------|--------------------|
| (a) $I_m^n(x_1, \dots, x_n)$ ;   | (з) $[\sqrt{x}]$ ; |
| (б) $o(x)$ ;                     | (и) $x \cdot y$ ;  |
| (в) $sg(x)$ ;                    | (к) $x \div y$ ;   |
| (г) $\overline{sg}(x)$ ;         | (л) $c(x, y)$ ;    |
| (д) $ax + by + c$ ;              | (м) $l(x)$ ;       |
| (e) $x^2$ ;                      | (н) $r(x)$ .       |
| (ж) $\left[\frac{x}{2}\right]$ ; |                    |

35\*. Доказать, что всякая примитивно рекурсивная функция может быть получена из функций  $s(x) = x + 1$  и  $q(x) = x \div [\sqrt{x}]^2$  с помощью операций подстановки, итерации и сложения двух функций (теорема Р. Робинсона).

36. Доказать, что:

- (a)  $I_1^1(f(x)) = f(I_1^1(x)) = f(f^{-1}(f(x))) = f(x)$ ;  
 (б)  $f^{-1}(f(f^{-1}(x))) = f^{-1}(x)$ .

37. Доказать, что:

- (a) если  $f^{-1}(x)$  определена в какой-нибудь точке  $a$ , то

$$f(f^{-1}(a)) = a;$$

- (б) если  $f^{-1}(x)$  всюду определена, то  $f(f^{-1}(x)) = I_1^1(x)$ ;

- (в) существует  $f(x)$  такая, что  $f^{-1}(x)$  всюду определена, но

$$f^{-1}(f(x)) \neq I_1^1(x).$$

38. Доказать, что:

- (a)  $(x + 1)^{-1} = x - 1$ ;  
 (б)  $(o(x))^{-1} = 0 - x$ ;  
 (в)  $(2x)^{-1} = \frac{x}{2}$ ;  
 (г)  $(x^2)^{-1} = \sqrt{x}$ ;  
 (д)  $\left(\left[\frac{x}{n}\right]\right)^{-1} = nx$ ;  
 (e)  $([{}^n\sqrt{x}])^{-1} = x^n$ ;

$$(ж) q^{-1}(x) = x + \left[ \frac{x+1}{2} \right]^2, \text{ где } q(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2;$$

$$(з) q^{-1}(2x) = x^2 + 2x;$$

$$(и) q^{-1}(2x+1) = x^2 + 4x + 2;$$

$$(к) q^{-1}(2x+2y) = (x+y)^2 + 2x + 2y.$$

39\*. Доказать, что следующие функции могут быть получены из функций  $s(x) = x + 1$  и  $q(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$  с помощью операций подстановки, обращения и сложения двух функций:

$$(а) I_m^n(x_1, \dots, x_n);$$

$$(з) [\sqrt{x}];$$

$$(б) o(x);$$

$$(и) x \cdot y;$$

$$(в) \overline{sg}(x);$$

$$(к) x \dot{-} y;$$

$$(г) \overline{sg}(x);$$

$$(л) c(x, y);$$

$$(д) ax + by + c;$$

$$(м) l(x);$$

$$(е) x^2;$$

$$(н) r(x).$$

$$(ж) \left[ \frac{x}{2} \right];$$

40. Пусть  $f(x) = \mu y[h(x, y) = 0]$ . Доказать, что  $f(x)$  может быть получена из  $h$ ,  $s(x) = x + 1$  и  $q(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$  с помощью операций подстановки, обращения и сложения двух функций.

41\*. Доказать, что всякая частично рекурсивная функция может быть получена из  $s(x) = x + 1$ ,  $q(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$  с помощью операций подстановки, обращения и сложения двух функций (теорема Ю. Робинсон).

42\*. Рассмотрим следующие функции Аккермана:

$$B(0, y) = 2 + y;$$

$$B(x + 1, 0) = sg x;$$

$$B(x + 1, y + 1) = B(x, B(x + 1, y)).$$

Назовем всюду определенную функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  *B-мажорируемой*, если существует натуральное число  $m$  такое, что

$$f(x_1, \dots, x_n) < B(m, \max(x_1, \dots, x_n) + 3).$$

Доказать, что:

$$(а) B(x, y) \text{ и } A(x) \text{ общерекурсивны};$$

$$(б) B(n + 2, x + 1) \geq 2^{x+1};$$

$$(в) B(n + 1, x + 2) \geq B(n + 1, x + 1);$$

$$(г) B(n + 2, x + 3) \geq B(n + 1, x + 4);$$

$$(д) \text{ простейшие функции } B\text{-мажорируемы};$$

(е) функция, полученная с помощью суперпозиции из  $B$ -мажорируемых функций,  $B$ -мажорируема;

(ж) функция, полученная с помощью примитивной рекурсии из  $B$ -мажорируемых функций,  $B$ -мажорируема;

(з) функция  $A$  не является примитивно рекурсивной.

43. Доказать, что не существует примитивно рекурсивной функции, универсальной для семейства  $n$ -местных примитивно рекурсивных функций.

44. Доказать, что не существует частично рекурсивной функции, универсальной для семейства всех  $n$ -местных общерекурсивных функций.

## § 2. МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Машина Тьюринга  $T$  полностью определяется:

(а) внешним алфавитом  $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  (где  $a_0 = 0, a_1 = 1$ );

(б) алфавитом внутренних состояний  $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ ;

(в) программой, т. е. совокупностью выражений  $T(i, j)$  ( $i = 1, \dots, m; j = 0, \dots, n$ ), каждое из которых имеет один из следующих видов:  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l R, q_i a_j \rightarrow q_k a_l L$ , где  $0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n$ . Выражения  $T(i, j)$  называются командами.

Машинным словом или конфигурацией называется слово вида  $A q_k a_l B$ , где  $0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n, A$  и  $B$ —слова (возможно, пустые) в алфавите  $\mathcal{A}$ . Пишем  $a_l^x$  для обозначения слова  $a_l a_l \dots a_l$  ( $x$  раз).

Пусть даны машина  $T$  и машинное слово  $M = A q_i a_j B$ , где  $0 \leq i \leq m$ . Обозначим через  $M'_T$  слово, которое получается из  $M$  по правилам:

(1) для  $i = 0$  положим  $M'_T = M$ ;

(2) для  $i > 0$

(а) если  $T(i, j)$  имеет вид  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l$ , то  $M'_T = A q_k a_l B$ ;

(б) если  $T(i, j)$  имеет вид  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l R$ , то:

(Б<sub>1</sub>) если  $B$  не пусто, то  $M'_T = A a_l q_k B$ ,

(Б<sub>2</sub>) если  $B$  пусто, то  $M'_T = A a_l q_k a_0$ ;

(в) если  $T(i, j)$  имеет вид  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l L$ , то:

(В<sub>1</sub>) если  $A = A_1 a_s$  для некоторых  $A_1$  и  $a_s$ , то

$$M'_T = A_1 q_k a_s a_l B,$$

(В<sub>2</sub>) если  $B$  пусто, то  $M'_T = q_k a_0 a_l B$ .

Положим  $M_T^{(0)} = M$ ,  $M_T^{(n+1)} = (M_T^{(n)})'$ . Говорим, что машина  $T$  перерабатывает машинное слово  $M$  в слово  $M_1$ , если  $M_T^{(n)} = M_1$  для некоторого  $n$ . Пишем  $M \Rightarrow_T M_1$ , если машина  $T$  перерабатывает  $M$  в  $M_1$  и при этом не используется пункт  $(B_2)$  определения. Пишем  $M \Rightarrow_T M_1$ , если машина  $T$  перерабатывает слово  $M$  в слово  $M_1$  и при этом не используются пункты  $(B_1)$  и  $(B_2)$  определения.

Говорим, что машина  $T$  вычисляет  $n$ -местную частичную числовую функцию  $f$ , где  $\delta_f \subseteq \mathcal{N}^n$ ,  $\rho_f \subseteq \mathcal{N}$ , если выполнены следующие условия:

(а) если  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \delta_f$ , то машина  $T$  останавливается, т. е. перерабатывает слово  $q_1 01^x_1 0 \dots 1^x_n 0$  в некоторое слово  $Aq_0 B$  и при этом слово  $Aq_0 B$  содержит  $f(x_1, \dots, x_n)$  вхождений символа 1;

(б) если  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin \delta_f$ , то машина, начиная работу со слова  $M = q_1 01^x_1 0 \dots 1^x_n 0$ , работает бесконечно, т. е.  $q_0$  не входит в  $M_T^{(n)}$  ни для какого  $n$ .

Говорим, что машина  $T$  правильно вычисляет функцию  $f^n$ , если выполнены условия:

(а) если  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \delta_f$ , то

$$q_1 01^x_1 0 \dots 1^x_n 0 \Rightarrow_T q_0 01^{f(x_1, \dots, x_n)} 00 \dots 0;$$

(б) если  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin \delta_f$ , то машина, начиная работу со слова  $q_1 01^x_1 0 \dots 1^x_n 0$ , работает бесконечно.

Функция  $f$  называется вычислимой (правильно вычислимой), если существует машина, которая вычисляет (правильно вычисляет) функцию  $f$ .

Пусть  $T_1, T_2, T_3$  — три машины Тьюринга с одним и тем же внешним алфавитом  $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ , с алфавитами внутренних состояний

$$Q_1 = \{q_0, q_1, \dots, q_r\}, \quad Q_2 = \{q_0, q_1, \dots, q_s\}, \quad Q_3 = \{q_0, q_1, \dots, q_t\}$$

и программами  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  соответственно. Композицией  $T_1 \cdot T_2$  машин  $T_1$  и  $T_2$  называется машина  $T$ , программа которой есть объединение множеств  $S_{q_{r+1}}^{q_0} \Pi_1$  и  $S_{q_{r+1} \dots q_{r+s}}^{q_1 \dots q_s} \Pi_2$ , где  $S_{q_i}^{q_j} \Pi$  означает множество команд, полученных из  $\Pi$  заменой всех  $q_j$  на  $q_i$ .



Разветвлением машины  $T_1$  на  $(T_2, T_3)$  по  $(q_i, q_j)$  (символически  $T_1 \left\{ \begin{matrix} q_i = T_2 \\ q_j = T_3 \end{matrix} \right\}$ ), где  $q_i, q_j \in Q_1$ , называется машина  $T$ , программа которой получается следующим образом: из  $\Pi_1$  исключаются команды  $T_1(i, k)$  и  $T_1(j, k)$  для  $k = 0, 1, \dots, n$ ; полученное множество называем  $\Pi'_1$ ; тогда

$$\Pi = \Pi'_1 \cup S_{q_i q_{r+1} \dots q_{r+s+1}}^{q_1 q_2 \dots q_s} \Pi_2 \cup S_{q_j q_{r+s} \dots q_{r+s+t-2}}^{q_1 q_2 \dots q_t} \Pi_3.$$

Пусть  $A = a_{s_0} \dots a_{s_k}$  — слово в алфавите  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ . Положим

$$k_l(A) = \prod_{t=0}^k p_t^{s_k - t}, \quad k_r(A) = \prod_{t=0}^k p_t^{s_t}.$$

Если  $M = A q_i a_j B$  — машинное слово, то полагаем

$$\nu(M) = 2^{k_l(A)} \cdot 3^i \cdot 5^j \cdot 7^{k_r(B)}.$$

Номером команды  $T(i, j)$  назовем число

$$\mu(T(i, j)) = p_{c(i, j)}^{p_0^k \cdot p_1^i \cdot p_2^s},$$

где  $s = 0$ , если  $T(i, j)$  есть  $q_i a_j \rightarrow q_k a_r$ ,  $s = 1$ , если  $T(i, j)$  есть  $q_i a_j \rightarrow q_k a_r L$ ,  $s = 2$ , если  $T(i, j)$  есть  $q_i a_j \rightarrow q_k a_r L$ .

Номером  $\lambda(T)$  машины Тьюринга  $T$  назовем произведение всех номеров команд  $T(i, j)$  машины  $T$ .

1. Какую функцию  $f(x)$  вычисляет машина  $T$  со следующей программой команд:

$$\begin{aligned} q_1 0 &\rightarrow q_2 0 R, & q_1 1 &\rightarrow q_0 1, \\ q_2 0 &\rightarrow q_0 1, & q_2 1 &\rightarrow q_2 1 R? \end{aligned}$$

2. Пусть машина  $T$  имеет следующую программу:

$$q_1 0 \rightarrow q_0 0.$$

Какие функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$ , ...,  $f_n(x_1, \dots, x_n)$ , ... вычисляет эта машина?

3. Построить машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию  $f(x) = x + 1$ .

4. Построить машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию  $o(x) = 0$ .

5. Построить следующие машины Тьюринга.

А. Перенос нуля:  $q_1 001^x 0 \Rightarrow_A q_0 01^x 00$ .

Б<sup>+</sup>. Правый сдвиг:  $q_1 01^x 0 \Rightarrow_{B^+} 01^x q_0 0$ .

Б<sup>-</sup>. Левый сдвиг:  $01^x q_1 0 \Rightarrow_{B^-} q_0 01^x 0$ .

В. Транспозиция:  $01^x q_1 01^y 0 \Rightarrow_V 01^y q_0 01^x 0$ .

Г. Удвоение:  $q_1 01^x 0 \Rightarrow_G q_0 01^x 01^x 0$ .

Ц<sub>n</sub>. Циклический сдвиг:  $q_1 01^{x_1} 01^{x_2} \dots 01^{x_n} 0 \Rightarrow_{Ц_n} q_0 01^{x_2} \dots 01^{x_n} 01^{x_1} 0$ .

К<sub>n</sub>. Копирование:  $q_1 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 0 \Rightarrow_{K_n} q_0 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 0$ .

6. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию  $I_m^n(x_1, \dots, x_n)$  (где  $1 \leq m \leq n$ ).

7. (а) Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  правильно вычислимы. Показать, что функция  $h(x) = f(g(x))$  правильно вычислима.

(б) Пусть функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  и  $g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)$  правильно вычислимы. Показать, что функция  $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$  правильно вычислима.

8. Построить машины Тьюринга для правильного вычисления функций:

(а)  $x + y$ ;

(д)  $x \div y$ ;

(б)  $x \div 1$ ;

(е)  $x - y$ ;

(в)  $sg(x)$ ;

(ж)  $\frac{x}{2}$ ;

(г)  $\overline{sg}(x)$ ;

(з)  $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ .

9. Доказать, что:

(а) если функция  $f^{n+1}$  получается из правильно вычисляемых функций  $g^n$  и  $h^{n+2}$  с помощью примитивной рекурсии, то  $f^{n+1}$  правильно вычислима;

(б) если функция  $f^n$  получается из правильно вычисляемой функции  $g^{n+1}$  с помощью  $\mu$ -оператора, то  $f^n$  правильно вычислима.

10. Доказать, что любая частично рекурсивная функция правильно вычислима.

11. Доказать, что существуют примитивно рекурсивные функции  $\alpha, \beta, \gamma$  такие, что:

(а)  $\alpha(x, y) = \lambda(T_1 \cdot T_2)$ , если  $\lambda(T_1) = x$  и  $\lambda(T_2) = y$ ;

(б)  $\beta(x) = \lambda(T)$  для некоторой машины  $T$ , перерабатывающей слово  $q_1 0$  в слово  $q_0 01^x 0$ ;

(в)  $\gamma(x, y, z) = \lambda\left(T_1 \begin{cases} q_i = T_2 \\ q_j = T_3 \end{cases}\right)$ , если  $\lambda(T_1) = x$ ,  $\lambda(T_2) = y$ ,  $\lambda(T_3) = z$ .

12. Построить примитивно рекурсивные функции  $\gamma^n(x_1, \dots, x_n)$  такие, что

$$\nu(q_1 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 0) = \gamma^n(x_1, \dots, x_n).$$

13. Построить примитивно рекурсивную функцию  $\rho(s, k, l, u, v)$ , удовлетворяющую условию: если  $u = k_l(A)$ ,  $v = k_r(B)$ ,  $0 \leq s \leq 2$ , то  $\rho(s, k, l, u, v) = \nu((Aq_i a_j B)_T')$ , где  $T(i, j)$  есть  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l$  при  $s = 0$ ,  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l L$  при  $s = 1$ ,  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l R$  при  $s = 2$ .

14. Построить примитивно рекурсивную функцию  $\sigma(t, i, j, u, v)$ , удовлетворяющую условию: если  $u = k_l(A)$ ,  $v = k_r(B)$ ,  $t = \lambda(T)$ ,  $q_i$  входит в алфавит внутренних состояний, а  $a_j$  — во внешний алфавит машины  $T$ , то  $\sigma(t, i, j, u, v) = \nu((Aq_i a_j B)_T')$ .

15. Построить примитивно рекурсивную функцию  $\tau(t, x)$ , удовлетворяющую условию: если  $t = \lambda(T)$ ,  $x = \nu(M)$ , где  $M = Aq_i a_j B$  — машинное слово в алфавите машины  $T$ , то  $\tau(t, x) = \nu(M_T^{(y)})$ .

16. Построить примитивно рекурсивную функцию  $w(t, x, y)$ , удовлетворяющую условию: если  $t = \lambda(T)$ ,  $x = \nu(M)$ , где  $M$  — машинное слово в алфавите машины  $T$ , то  $w(t, x, y) = \nu(M_T^{(y)})$ .

17. Построить примитивно рекурсивную функцию  $\varepsilon(x)$ , удовлетворяющую условию: если  $x = \nu(M)$ , то  $\varepsilon(x)$  есть число вхождений символа  $a_1$  в слово  $M$ .

18. Доказать, что если машина  $T$  вычисляет  $f(x_1, \dots, x_n)$  и  $t_0 = \lambda(T)$ , то:

(а)  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \delta_f \Leftrightarrow \text{ex}(1, w(t_0, \gamma^n(x_1, \dots, x_n), y)) = 0$  для некоторого  $y$ ;

(б)  $f(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(w(t_0, \gamma^n(x_1, \dots, x_n), h^{n+1}(t_0, x_1, \dots, x_n)))$ , где

$$h^{n+1}(t_0, x_1, \dots, x_n) = \mu y [\text{ex}(1, w(t_0, \gamma^n(x_1, \dots, x_n), y)) = 0],$$

а функции  $\gamma$ ,  $w$  и  $\varepsilon$  взяты из задач 12, 16 и 17.

19. Доказать, что любая вычислимая функция частично рекурсивна.

20. Доказать, что функция вычислима тогда и только тогда, когда существует машина Тьюринга с внешним алфавитом  $\{0, 1\}$ , вычисляющая эту функцию.

21. Доказать, что существует двуместная частично рекурсивная функция  $U(t, x)$ , универсальная для семейства всех одноместных частично рекурсивных функций.

22. Доказать, что существует  $(n+1)$ -местная частично рекурсивная функция  $U^{n+1}(t, x_1, \dots, x_n)$ , универсальная для семейства всех  $n$ -местных частично рекурсивных функций.

23\*. Доказать, что следующие функции не являются частично рекурсивными:

$$(a) h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ есть номер машины } T \text{ и машина } T \\ & \text{останавливается, начиная работу} \\ & \text{с машинного слова } q_1 01^y 0, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$(б) g(x) = h(x, x);$$

$$(в) h_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ есть номер машины } T \text{ и машина } T \\ & \text{останавливается, начиная работу} \\ & \text{с машинного слова } q_1 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

24. Доказать, что существует примитивно рекурсивная функция  $S(z, x, y, w)$  такая, что

$$S(z, x, y, w) = \begin{cases} 1, & \text{если } z = \lambda(T) \text{ и машина } T \text{ перерабатывает слово} \\ & q_1 01^x \text{ в слово } q_0 01^y 0 \dots 0 \text{ не более чем за } w \text{ шагов,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

25. Доказать, что существуют примитивно рекурсивные функции  $p, T_1, T_2, \dots$  такие, что:

$$(a) U(m, x) = p(\mu y [T_1(m, x, y) = 0]);$$

$$(б) U^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n) = p(\mu y [T_n(m, x_1, \dots, x_n, y) = 0]).$$

## § 3. РЕКУРСИВНЫЕ И РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА

В дальнейшем под *множеством* мы будем понимать лишь подмножества множества натуральных чисел  $\mathcal{N}$ , множествами  $n$ -ок (кортежей длины  $n$ ) будем называть подмножества множества  $\mathcal{N}^n$  ( $n \geq 1$ ).

Пусть  $P$  —  $n$ -местный предикат на множестве  $\mathcal{N}$ . Функция  $\theta_P(x_1, \dots, x_n)$  называется *представляющей* (или *характеристической*) функцией для предиката  $P$ , если эта функция удовлетворяет условию

$$\theta_P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x_1, \dots, x_n) = \text{и}, \\ 1, & \text{если } P(x_1, \dots, x_n) = \text{л}. \end{cases}$$

Предикат  $P$  называется *рекурсивным* (примитивно рекурсивным), если его представляющая функция общерекурсивна (примитивно рекурсивна).

Множество  $n$ -ок  $M$  называется *рекурсивным* (примитивно рекурсивным), если предикат  $P(x_1, \dots, x_n) = \text{и} \Leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in M$  является рекурсивным (примитивно рекурсивным) предикатом.

Множество  $n$ -ок  $M$  называется *рекурсивно перечислимым*, если существует  $(n+1)$ -местный примитивно рекурсивный предикат  $R_M(x_1, \dots, x_n, y)$ , удовлетворяющий условию

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in M \Leftrightarrow \exists y R_M(x_1, \dots, x_n, y).$$

Для любого множества  $n$ -ок  $M$  определим *характеристическую функцию*  $\chi_M(x_1, \dots, x_n)$  и *частичную характеристическую функцию*  $\chi_M^*(x_1, \dots, x_n)$  следующим образом:

$$\chi_M(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in M, \\ 1, & \text{если } \langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin M; \end{cases}$$

$$\chi_M^*(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in M, \\ \text{не определено,} & \text{если } \langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin M. \end{cases}$$

Если  $f$  —  $n$ -местная частичная функция, то множество

$$\Gamma_f = \{ \langle x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n) \rangle \mid \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \delta_f \}$$

называется *графиком функции*  $f$ . Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется *доопределением функции*  $g(x_1, \dots, x_n)$ , если  $\Gamma_g \subseteq \Gamma_f$  и  $\delta_f = \mathcal{N}$ .

1. Доказать, что следующие предикаты примитивно рекурсивны:

- (а)  $x = y$ ;
- (б)  $x + y = z$ ;
- (в)  $x \cdot y = z$ ;
- (г)  $x$  делит  $y$ ;
- (д)  $x$  четно;
- (е)  $x$  и  $y$  взаимно просты;
- (ж)  $\exists n (x = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$ ;
- (з)  $\exists n (x = 1 + 2 + \dots + n)$ .

2. Доказать, что если  $P(x_1, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, \dots, x_n)$  — рекурсивные (примитивно рекурсивные) предикаты, то следующие предикаты также рекурсивны (примитивно рекурсивны):

- (а)  $(P(x_1, \dots, x_n) \& Q(x_1, \dots, x_n))$ ;
- (б)  $(P(x_1, \dots, x_n) \vee Q(x_1, \dots, x_n))$ ;
- (в)  $\neg P(x_1, \dots, x_n)$ ;
- (г)  $(P(x_1, \dots, x_n) \supset Q(x_1, \dots, x_n))$ ;
- (д)  $P(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n)$ ;
- (е)  $P(f(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1})$ , если  $f(x_1, \dots, x_m)$  — орф (прф).

3. Доказать, что если предикат  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  рекурсивен (примитивно рекурсивен), то предикаты  $\exists y (y \leq z \& R(x_1, \dots, x_n, y))$  и  $\forall y (y \leq z \supset R(x_1, \dots, x_n, y))$  также рекурсивны (примитивно рекурсивны).

4. Доказать, что если предикат  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  примитивно рекурсивен, то  $M = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid \exists y \exists z R(x_1, \dots, x_n, y, z)\}$  — рекурсивно перечислимое множество.

5. Доказать, что существует множество, не являющееся рекурсивно перечислимым.

6. Доказать, что любое конечное множество натуральных чисел примитивно рекурсивно.

7. Доказать, что множество  $n$ -ок рекурсивно (примитивно рекурсивно) тогда и только тогда, когда его характеристическая функция общерекурсивна (примитивно рекурсивна).

8. Доказать, что если  $f$  — общерекурсивная (примитивно рекурсивная) функция и  $a$  — фиксированное число, то множество решений уравнения  $f(x_1, \dots, x_n) = a$  рекурсивно (примитивно рекурсивно).

9. Пусть функция  $f$  частично рекурсивна, но не общерекурсивна. Доказать, что область определения функции  $f^{-1}$  примитивно рекурсивна.

10. Доказать, что если множества  $A$  и  $B$  рекурсивны (примитивно рекурсивны), то множества  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $\mathcal{N} \setminus A$  также рекурсивны (примитивно рекурсивны).

11. Доказать, что если множества  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы, то множества  $A \cap B$  и  $A \cup B$  рекурсивно перечислимы.

12. Доказать, что всякое примитивно рекурсивное множество рекурсивно перечислимо.

13. Пусть множества  $A$  и  $B$  отличаются конечным числом элементов. Доказать, что:

(а) если  $A$  рекурсивно, то  $B$  рекурсивно;

(б) если  $A$  рекурсивно перечислимо, то  $B$  рекурсивно перечислимо.

14. Доказать, что если множество  $A$  и его дополнение  $\mathcal{N} \setminus A$  рекурсивно перечислимы, то  $A$  рекурсивно (теорема Поста).

15. Пусть  $M \subseteq \mathcal{N}^n$ . Положим

$$c^n(M) = \{c^n(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in M\},$$

где  $c^n$  определена в задаче 14 из § 1. Доказать, что:

(а)  $M$  примитивно рекурсивно тогда и только тогда, когда  $c^n(M)$  примитивно рекурсивно;

(б)  $M$  рекурсивно тогда и только тогда, когда  $c^n(M)$  рекурсивно;

(в)  $M$  рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда  $c^n(M)$  рекурсивно перечислимо.

16. Пусть  $M \subseteq \mathcal{N}$  — непустое множество. Доказать, что  $M$  рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда существует примитивно рекурсивная функция  $\alpha(x)$  такая, что  $M = \{\alpha(x) \mid x \in \mathcal{N}\}$ .

17. Пусть  $M$  — непустое множество  $n$ -ок. Доказать, что множество  $M$  рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда существуют одноместные примитивно рекурсивные функции  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  такие, что

$$M = \{(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) \mid x \in \mathcal{N}\}.$$

18. Пусть общерекурсивная функция  $f(x)$  удовлетворяет условию:  $f(x) \geq x$  для всех  $x \in \mathcal{N}$ . Доказать, что область значений  $\rho_f$  функции  $f$  рекурсивна.

19. Доказать, что бесконечное множество  $A$  рекурсивно тогда и только тогда, когда  $A$  есть множество значений строго возрастающей общерекурсивной функции.

20. Доказать, что непустое множество  $A$  рекурсивно тогда и только тогда, когда  $A$  есть множество значений монотонно (не обязательно строго) возрастающей общерекурсивной функции.

21. Доказать, что каждое бесконечное рекурсивно перечислимое множество содержит бесконечное рекурсивное подмножество.

22. Доказать, что каждое бесконечное рекурсивно перечислимое множество представимо в виде  $A = \rho_f$  для некоторой общерекурсивной 1-1-функции  $f$ .

23. Доказать, что график общерекурсивной функции рекурсивен.

24. Доказать, что если график  $\Gamma_f$  функции  $f$  рекурсивно перечислим, то функция  $f$  частично рекурсивна.

25. Доказать, что полный прообраз рекурсивного множества относительно общерекурсивной функции рекурсивен.

26. Пусть  $A$  — рекурсивное множество,  $f$  — общерекурсивная функция с  $\rho_f = \mathcal{N}$ ,  $f(A) \cap f(\mathcal{N} \setminus A) = \emptyset$ . Доказать, что  $f(A)$  рекурсивно.

27. Пусть  $A, B$  — рекурсивно перечислимые множества, а  $C$  — рекурсивное множество такие, что  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \subseteq C \subseteq A \cup B$ . Доказать, что  $A$  рекурсивно.

28. Пусть  $f, g$  — общерекурсивные функции, причем  $g$  — 1-1-функция. Пусть также имеем  $f(x) \geq g(x)$  для всех  $x$ . Доказать, что если  $\rho_g$  рекурсивно, то  $\rho_f$  рекурсивно.

29. Пусть  $A, B$  — рекурсивно перечислимые множества. Доказать, что существуют рекурсивно перечислимые множества  $A_1 \subseteq A$ ,  $B_1 \subseteq B$  такие, что  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ ,  $A_1 \cup B_1 = A \cup B$ .

30\*. Доказать, что:

(а) функция, получающаяся с помощью суперпозиции из функций с рекурсивно перечислимым графиком, имеет рекурсивно перечислимый график;

(б) функция, получающаяся с помощью схемы примитивной рекурсии из функций с рекурсивно перечислимым графиком, имеет рекурсивно перечислимый график;

(в) функция, получающаяся с помощью  $\mu$ -оператора из функции с рекурсивно перечислимым графиком, имеет рекурсивно перечислимый график;

(г) график любой частично рекурсивной функции рекурсивно перечислим.

31. Доказать, что функция частично рекурсивна тогда и только тогда, когда ее график рекурсивно перечислим (теорема о графике).





41. Доказать, что частичная функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu t [g(x_1, \dots, x_n, t) = 0]$$

для подходящей примитивно рекурсивной функции  $g(x_1, \dots, x_n, t)$  тогда и только тогда, когда график функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  примитивно рекурсивен.

42\*. Пусть  $F(x, y)$  определена с помощью рекурсии по двум переменным:

$$\begin{cases} F(0, y) = \varphi(y), \\ F(x+1, 0) = \psi(x, F(x, \alpha(x)), F(x, F(x, \gamma(x))))), \\ F(x+1, y+1) = \tau(x, y, F(x, F(x+1, y))). \end{cases}$$

Доказать, что если функции  $\varphi, \psi, \alpha, \gamma, \tau$  общерекурсивны, то функция  $F$  общерекурсивна.

43\*. Доказать, что множество

$$H = \{x \mid \exists y T_1(x, x, y) = 0\},$$

где  $T_1$  — функция из задачи 25 из § 2, является рекурсивно перечислимым, но не рекурсивным.

44. Доказать, что если область определения частично рекурсивной функции  $f^n$  есть рекурсивное множество, то  $f^n$  имеет рекурсивное доопределение.

45. Доказать, что если  $V(n, x)$  есть частично рекурсивная функция, универсальная для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, то множество  $M = \{x \mid V(x, x) = 0\}$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

46. Найти частично рекурсивную функцию  $f(x)$ , не имеющую общерекурсивного доопределения.

47. Найти частично рекурсивную функцию  $f(x)$ , не представимую в виде

$$f(x) = \mu y [g(x, y) = 0]$$

ни для какой общерекурсивной функции  $g$ .

48. Доказать, что если  $V(n, x)$  есть частично рекурсивная функция, универсальная для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, то множество

$$G = \{n \mid V(n, x) \text{ — общерекурсивная функция}\}$$

не является рекурсивно перечислимым.

## § 4. НУМЕРАЦИИ КЛИНИ И ПОСТА

Введем обозначения:

$$[x, y] = c(l(x), c(r(x), y)),$$

$$[x]_{21} = c(l(x), l(r(x))),$$

$$[x]_{22} = r(r(x)),$$

$$[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] = [[x_1, x_2], x_3, \dots, x_n] \text{ (для } n > 2),$$

$$[x]_{n1} = [[x]_{21}]_{n-1,1}, \dots, [x]_{n,n-1} = [[x]_{21}]_{n-1,n-1},$$

$$[x]_{nn} = [x]_{22} \text{ (для } n > 2),$$

$$K^2(x_0, x_1) = U(l(x_0), c(r(x_0), x_1)),$$

$$K^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n) = K^n([x_0, x_1], x_2, \dots, x_n) \text{ (для } n > 2),$$

где функции  $c, l, r$  определены в задаче 13 из § 1, а  $U(x, y)$  — в задаче 21 из § 2.

Функцию  $K^2$  называем *клиниевской нумерующей функцией*, и если  $f(x) = K^2(m, x)$  для всех  $x$  и некоторого  $m$ , то называем число  $m$  *клиниевским номером функции  $f$*  и обозначаем  $f = \kappa_m = \kappa f$ . Отображение  $\kappa: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}_1$ , где  $\mathcal{C}_1$  — семейство всех одноместных частично рекурсивных функций, называется *клиниевской нумерацией семейства  $\mathcal{C}_1$* . Аналогичным образом определяется *клиниевская нумерация  $n$ -местных частично рекурсивных функций*.

Если рекурсивно перечислимое множество  $A$  есть совокупность значений функции  $K(n, x)$  для некоторого  $n$ , то число  $n$  назовем *постовским номером множества  $A$*  и обозначим  $A = \pi_n = \pi A$ . Отображение  $\pi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P}$  — семейство всех рекурсивно перечислимых множеств, называется *постовской нумерацией семейства  $\mathcal{P}$* .

Пусть  $A, B \subseteq \mathcal{N}$ . Будем говорить, что функция  $f$   *$m$ -сводит  $A$  к  $B$* , если

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

$A$  называется  *$m$ -сводимым к  $B$*  (символически  $A \leq_m B$ ), если существует общерекурсивная функция  $f$ , которая  $m$ -сводит  $A$  к  $B$ .

Рекурсивно перечислимое множество  $A$  называется  *$m$ -универсальным*, если к нему  $m$ -сводится любое рекурсивно перечислимое множество.

Рекурсивно перечислимое множество  $A$  называется *креативным* или *творческим*, если существует общерекурсивная функция  $f_A$  такая, что для любого  $x$

$$f_A(x) \in (A \cap \pi_x) \cup (-A \cap -\pi_x).$$

1. Доказать, что:

(а)  $[x, y]$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{N}^2$  и  $\mathcal{N}$ ;

(б)  $[x_1, \dots, x_n]$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{N}^n$  и  $\mathcal{N}$ ;

(в)  $[[x]_{21}, [x]_{22}] = x$ ,  $[[x, y]_{21} = x$ ,  $[[x, y]_{22} = y$ ;

(г)  $[[x]_{n1}, \dots, [x]_{nn}] = x$ ,  $[[x_1, \dots, x_n]_{ni} = x_i$ ;

(д)  $[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_m], x_{m+1}, \dots, x_n]$ ;

(е)  $c(x_0, c(x_1, x_2)) = [c(x_0, x_1), x_2]$ .

2. Доказать, что:

(а)  $K^{n+m+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) =$   
 $= K^{m+1}([x_0, x_1, \dots, x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ ;

(б)  $K^n(c(x_0, x_1), x_2, \dots, x_n) = U^{n+1}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

3. Доказать, что:

(а)  $K^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n)$  является универсальной для всех  $n$ -местных частично рекурсивных функций;

(б) для любой частично рекурсивной функции  $f^{n+m}$  существует примитивно рекурсивная функция  $g^n$  такая, что

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = K^{m+1}(g(x_1, \dots, x_n), y_1, \dots, y_m).$$

4. Доказать, что всякая частично рекурсивная функция  $f$  имеет бесконечно много клиниевских номеров.

5. Построить примитивно рекурсивные функции, дающие по клиниевским номерам исходных одноместных функций клиниевские номера функций, получающихся из исходных:

- (а) с помощью суперпозиции;
- (б) с помощью обращения;
- (в) с помощью итерации;
- (г) с помощью взятия суммы двух функций.

6. Доказать, что существует рекурсивно перечислимое множество  $P$ , удовлетворяющее условиям:

- (а) если  $x \in P$ , то  $\kappa_x$  есть примитивно рекурсивная функция;
- (б) для любой примитивно рекурсивной функции  $f$  существует  $x \in P$  такое, что  $f = \kappa_x$ .

7. Доказать, что существует общерекурсивная функция, универсальная для семейства всех одноместных примитивно рекурсивных функций.

8. Построить примитивно рекурсивные функции, дающие по клиниевским номерам исходных функций клиниевские номера функций, получающихся из исходных:

- (а) с помощью суперпозиции;
- (б) с помощью примитивной рекурсии;
- (в) с помощью  $\mu$ -оператора.

9. Доказать, что для любой частично рекурсивной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  существует такая примитивно рекурсивная функция  $g(x_1, \dots, x_n)$ , что для любого  $x$

$$\kappa g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \kappa f(x_1, \dots, x_n), & \text{если } f(x_1, \dots, x_n) \text{ определено,} \\ \omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

10\*. (а) Доказать, что для каждой частично рекурсивной функции  $f(x_1, \dots, x_n, y)$  существует такая примитивно рекурсивная функция  $g(x_1, \dots, x_n)$ , что

$$\kappa g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \kappa f(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)), & \text{если} \\ f(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) \text{ определено,} \\ \omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(б) Доказать, что для каждой частично рекурсивной функции  $f(x)$  существует такое натуральное число  $a$ , что

$$\kappa a = \begin{cases} \kappa f(a), & \text{если } f(a) \text{ определено,} \\ \omega & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(теорема о неподвижной точке).

11. Доказать, что для любой частично рекурсивной функции  $f(x, y)$  существует число  $n$  такое, что  $f(n, y) = \kappa_n(y)$  для всех  $y$ .

12. Доказать, что существует число  $n$  такое, что:

- (а)  $\kappa_n(0) = n$ ;
- (б)  $\kappa_n(n) = n$ .

13. Доказать, что существует примитивно рекурсивная функция  $f$  такая, что для любого  $x$ , если  $\kappa_x$  есть общерекурсивная функция, то

$$\kappa_{\kappa_x}(f(x)) = \kappa_f(x).$$

14\*. Построить частично рекурсивные функции  $\kappa_a$  такие, что:

- (а)  $\kappa_a = \chi_{\{a\}}$ ;

$$(б) \kappa_a = \chi_{\{a\}}^*;$$

$$(в) \kappa_a = \chi_{\mathcal{N} \setminus \{a\}}^*.$$

15\*. Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство всех одноместных частичных числовых функций. Отображение  $F: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  назовем *эффективным оператором*, если функция  $g(n, x) = (F(\kappa_n))(x)$  частично рекурсивна. Доказать, что для любого эффективного оператора  $F$  существует частично рекурсивная функция  $f$  такая, что  $f = F(f)$ .

16. Доказать, что для любых частично рекурсивных функций  $\alpha, \gamma, \delta$  существует частично рекурсивная функция  $f$ , удовлетворяющая условиям:

$$(а) \text{ если } \alpha(x) = 0, \text{ то } f(x) = 0;$$

$$(б) \text{ если } \alpha(x) > 0, \text{ то } f(x) = \gamma(f(\delta(x))).$$

17\*. Пусть  $\mathcal{A}$  — некоторое непустое семейство одноместных частично рекурсивных функций, отличное от семейства всех таких функций. Доказать, что множество

$$\kappa^{-1}(\mathcal{A}) = \{x \mid \kappa x \in \mathcal{A}\}$$

не является рекурсивным (*теорема Райса*).

18. Доказать, что следующие множества не рекурсивны:

$$(а) A_1 = \{x \mid \kappa_x \text{ — константа}\};$$

$$(б) A_2 = \{x \mid \kappa_x(a) = b\}, \text{ где } a, b \text{ — фиксированные числа};$$

$$(в) A_3 = \{c(x, y) \mid y \in \delta_{\kappa x}\};$$

$$(г) A_4 = \{c(x, y) \mid y \in \rho_{\kappa x}\};$$

$$(д) A_5 = \{c(x, y) \mid \kappa_x = \kappa_y\}.$$

19. Доказать рекурсивную перечислимость множеств всех клин-евских номеров следующих семейств одноместных частично рекурсивных функций:

$$(а) \text{ функций, определенных в точке } 0;$$

$$(б) \text{ функций } f \text{ таких, что } f(a) = b \text{ для данных чисел } a \text{ и } b;$$

$$(в) \text{ функций с непустой областью определения.}$$

20. Доказать, что всякое рекурсивно перечислимое множество имеет бесконечно много постовских номеров.

21. Пусть  $\mathcal{A}$  — некоторое непустое семейство рекурсивно перечислимых множеств, отличное от семейства всех рекурсивно перечислимых множеств. Доказать, что множество

$$\pi^{-1}(\mathcal{A}) = \{x \mid \pi_x \in \mathcal{A}\}$$

не является рекурсивным (*теорема Райса*).

22. Доказать, что не рекурсивны множества:

- (а)  $\{x \mid \pi_x \neq \emptyset\}$ ;
- (б)  $\{x \mid \pi_x = \mathcal{N}\}$ ;
- (в)  $\{x \mid a \in \pi_x\}$ , где  $a$  — фиксированное число;
- (г)  $\{x \mid \pi_x \text{ конечно}\}$ ;
- (д)  $\{c(x, y) \mid \pi_x = \pi_y\}$ .

23. Доказать, что рекурсивно перечислимы множества всех постовских номеров следующих семейств рекурсивно перечислимых множеств:

- (а) содержащих данное число  $a$ ;
- (б) непустых.

24. Доказать, что для любой частично рекурсивной функции  $f^n$  существует примитивно рекурсивная функция  $g^n$  такая, что

$$\pi_g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \pi_f(x_1, \dots, x_n), & \text{если } f(x_1, \dots, x_n) \text{ определено,} \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

25. Доказать, что для каждого рекурсивно перечислимого множества  $P \subseteq \mathcal{N}^{n+1}$  ( $n > 0$ ) существует такая примитивно рекурсивная функция  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ , что

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in P \Leftrightarrow x_0 \in \pi_{\alpha(x_1, \dots, x_n)}.$$

26. Доказать, что существуют примитивно рекурсивные функции  $f, g, h, u, v, w$  такие, что:

- (а)  $\pi_x \cap \pi_y = \pi_{f(x, y)}$ ;
- (б)  $\pi_x \cup \pi_y = \pi_{g(x, y)}$ ;
- (в)  $\{x\} = \pi_{h(x)}$ ;
- (г)  $\{c(s, t) \mid s \in \pi_x, t \in \pi_y\} = \pi_{u(x, y)}$ ;
- (д)  $\kappa_y(\pi_x) = \pi_{v(x, y)}$ ;
- (е)  $\kappa_y^{-1}(\pi_x) = \pi_{w(x, y)}$ .

27. Доказать, что существуют примитивно рекурсивные функции  $f$  и  $g$  такие, что:

- (а)  $\delta_{\kappa x} = \rho_{\kappa f(x)}$ ;
- (б)  $\rho_{\kappa x} = \delta_{\kappa g(x)}$ .

28. (а) Доказать, что для любой частично рекурсивной функции  $f^{n+1}$  существует примитивно рекурсивная функция  $g^n$  такая, что

$$\pi_g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \pi_{f(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))}, & \text{если } f(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) \text{ определено,} \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(6) Доказать, что для любой частично рекурсивной функции  $f$  существует такое число  $a$ , что

$$\pi_a = \begin{cases} \pi_{f(a)}, & \text{если } f(a) \text{ определено,} \\ \emptyset & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(теорема о неподвижной точке).

29. Доказать, что для любого рекурсивно перечислимого множества  $M \subseteq \mathcal{N}^{n+2}$  существует примитивно рекурсивная функция  $g^n$  такая, что

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n) \rangle \in M \Leftrightarrow x_0 \in \pi_{g(x_1, \dots, x_n)}.$$

30. Доказать, что существует число  $n$  такое, что:

(а)  $\pi_n = \{n\}$ ;

(б)  $\pi_n = \{n^2\}$ ;

(в)  $\pi_n = \mathcal{N} \setminus \{n\}$ .

31. Доказать, что отношение  $\leq_m$  рефлексивно и транзитивно.

32. Доказать, что всякое рекурсивное множество  $m$ -сводимо к любому непустому множеству с непустым дополнением.

33. Доказать, что если  $A$   $m$ -сводимо к рекурсивному (рекурсивно перечислимому) множеству, то  $A$  рекурсивно (рекурсивно перечислимо).

34. Доказать, что множество

$$K_1 = \{c(x, y) \mid x \in \pi_y\}$$

является  $m$ -универсальным.

35. Доказать, что каждое  $m$ -универсальное множество не рекурсивно.

36. Доказать, что множество

$$K = \{x \mid x \in \pi_x\}$$

является креативным.

37. Доказать, что каждое креативное множество не рекурсивно.

38. Доказать, что если  $A$  — креативное множество,  $A \leq_m B$  и  $B$  рекурсивно перечислимо, то  $B$  креативно.



39\*. Доказать, что каждое креативное множество является  $m$ -универсальным.

40. Доказать, что множество  $m$ -универсально тогда и только тогда, когда оно креативно.

41\*. Доказать, что множество

$$K_2 = \{x \mid \pi_x \neq \emptyset\}$$

является креативным.

42. Доказать, что существует примитивно рекурсивная функция  $\sigma(x)$  такая, что машина Тьюринга с номером  $\sigma(x)$  вычисляет функцию  $\kappa_x$ .

43. Доказать, что множество  $H$  из задачи 43 из § 3 является креативным.

## ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

### § 1. Операции над множествами

3. Множество  $\{\emptyset\}$  имеет один элемент  $\emptyset$ , а множество  $\emptyset$  не имеет элементов.

7. Нет. Пусть  $x \in A \cap B$ ; тогда  $x \notin C$ . Таким образом,  $x \in (A \cap B) \setminus C$ .

11. Докажем, например, (е).

Пусть  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Тогда  $x \in A$  и  $x \in B \cup C$ . Если  $x \in B$ , то  $x \in A \cap B$ , а значит,  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Если  $x \in C$ , то имеем  $x \in A \cap C$ , а значит,  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Итак,  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Пусть  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Если  $x \in A \cap B$ , то  $x \in A$  и  $x \in B$ . Отсюда следует, что  $x \in A$  и  $x \in B \cup C$ , т. е.  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Если  $x \in A \cap C$ , то  $x \in A$  и  $x \in C$ . Отсюда следует, что  $x \in A$  и  $x \in B \cup C$ , т. е.  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Итак,  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ .

12. Докажем, например, (а).

Пусть  $x \in -(A \cap B)$ . Это означает, что  $x \in U$  и  $x \notin A \cap B$ . Отсюда следует, что  $x \notin A$  или  $x \notin B$ . Если  $x \notin A$ , то  $x \in -A$ , а значит,  $x \in (-A) \cup (-B)$ . Если  $x \notin B$ , то  $x \in -B$ , а значит,  $x \in (-A) \cup (-B)$ . Итак,  $-(A \cap B) \subseteq (-A) \cup (-B)$ .

Пусть  $x \in (-A) \cup (-B)$ . Если  $x \in -A$ , то  $x \in U$  и  $x \notin A$ , а значит,  $x \notin A \cap B$ . Отсюда следует, что  $x \in -(A \cap B)$ . Если  $x \in -B$ , то  $x \in U$  и  $x \notin B$ , а значит,  $x \notin A \cap B$ . Отсюда следует, что  $x \in -(A \cap B)$ . Итак,  $(-A) \cup (-B) \subseteq -(A \cap B)$ .

13. (в) Пусть  $A \cap B \subseteq C$  и  $x \in A$ . Рассмотрим два случая:  $x \in B$  или  $x \in -B$ . Если  $x \in B$ , то  $x \in A \cap B \subseteq C$ , т. е.  $x \in (-B) \cup C$ . Если  $x \in -B$ , то  $x \in (-B) \cup C$ .

Пусть  $A \subseteq (-B) \cup C$  и  $x \in A \cap B$ . Тогда  $x \in A$  и  $x \in B$ . Значит,  $x \in C$ .

(д) Пусть  $(A \setminus B) \cup B = A$  и  $x \in B$ . Тогда ясно, что  $x \in A$ .

Пусть  $B \subseteq A$ . Тогда  $(A \setminus B) \cup B = (A \cap (-B)) \cup B = (A \cup B) \cap (-B \cup B) = A$ .

(е) Пусть  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ . Тогда  $C \subseteq A \cap (B \cup C)$ , а значит,  $C \subseteq A$ .

Пусть  $C \subseteq A$ . Тогда  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$ .

14. Докажем, например, (в).

Пусть  $x \in A \cap (B \dot{-} C)$ . Тогда  $x \in A$  и  $x \in B \dot{-} C$ . Отсюда следует, что если  $x \in B$ , то  $x \notin C$ , значит,  $x \in A \cap B$ , но  $x \notin A \cap C$ . Если  $x \in C$ , то  $x \notin B$ . Значит,  $x \in A \cap C$ , но  $x \notin A \cap B$ . Таким образом,  $x \in (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$ . Итак,  $A \cap (B \dot{-} C) \subseteq (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$ .

Пусть  $x \in (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$ . Если  $x \in A \cap B$  и  $x \notin A \cap C$ , то  $x \in A$ ,  $x \in B$ ,  $x \notin C$ . Значит,  $x \in A \cap (B \dot{-} C)$ . Если  $x \in A \cap C$  и  $x \notin A \cap B$ , то  $x \in A$ ,  $x \in C$ ,  $x \notin B$ . Значит,  $x \in A \cap (B \dot{-} C)$ . Итак,  $(A \cap B) \dot{-} (A \cap C) \subseteq A \cap (B \dot{-} C)$ .

15. Докажем, например, (а).

Пусть  $x \in (A_1 \cup \dots \cup A_n) \dot{-} (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ . Если существует  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) такое, что  $x \in A_i$ , то для всех  $j = 1, \dots, n$  имеем  $x \notin B_j$ . Тогда  $x \in A_i \dot{-} B_j$ , а значит,  $x \in (A_1 \dot{-} B_1) \cup \dots \cup (A_n \dot{-} B_n)$ . Если существует  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) такое, что  $x \in B_i$ , то для всех  $j = 1, \dots, n$  имеем  $x \notin A_j$ . Тогда  $x \in A_i \dot{-} B_j$ , а значит,  $x \in (A_1 \dot{-} B_1) \cup \dots \cup (A_n \dot{-} B_n)$ .

16. (в) Пусть  $A \dot{-} B = C$ . Тогда  $B \dot{-} C = B \dot{-} (A \dot{-} B) = B \dot{-} (B \dot{-} A) = A$  (см. задачу 14 (а), (г)).

17. (а)  $A \cup B = A \dot{-} B \dot{-} (A \cap B)$ ,  $A \setminus B = A \dot{-} (A \cap B)$ ;

(б)  $A \cap B = (A \cup B) \dot{-} A \dot{-} B$ ,  $A \setminus B = (A \cup B) \dot{-} B$ ;

(в)  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ ,  $A \cup B = (A \dot{-} B) \dot{-} [A \setminus (A \setminus B)]$ .

18. (а) Из  $A$  и  $B$  с помощью операций  $\cap$  и  $\cup$  могут получиться лишь множества  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$  и  $A \cap B$ , которые все отличаются от  $A \setminus B$ , например, при  $A = B \neq \emptyset$ .

(б) Пусть множество  $C$  получается из  $A$  и  $B$  с помощью операций  $\cap$  и  $\setminus$ . Число применений операций  $\cap$  и  $\setminus$  для получения  $C$  из  $A$  и  $B$  назовем *высотой множества  $C$* . Индукцией по высоте множества  $C$  докажем, что  $C$  является подмножеством или  $A$ , или  $B$ .

Если высота  $C$  равна 0, то  $C = A$  или  $C = B$  и утверждение доказано.

Пусть  $C$  имеет высоту  $n + 1$ , а для всех множеств меньшей высоты утверждение доказано. Тогда  $C = D \cap E$  или  $C = D \setminus E$  для некоторых множеств  $D$  и  $E$ , высота которых меньше  $n + 1$ . В обоих случаях  $C \subseteq D$ , а по индуктивному предположению  $D$  — подмножество  $A$  или  $B$ . Таково же и  $C$ . Итак, из  $A$  и  $B$  с помощью операций  $\cap$  и  $\setminus$  могут получиться лишь подмножества  $A$  или  $B$ . Но  $A \cup B$  не всегда является подмножеством  $A$  или  $B$ .

19. Необходимые свойства операций  $\dot{-}$  и  $\cap$  находятся в задачах 11(б), (г), 14(а), (б), (в), (ж), (з) и 16(в). Вычитанием в рассматриваемом кольце множеств является операция  $\dot{-}$ , что следует из задачи 16(в).

21. (а) Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  и  $B \subseteq A$ . Для каждого элемента  $a_i$  имеются две возможности:  $a_i \in B$  или  $a_i \notin B$ . Всех подмножеств  $A$  имеется  $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ . (б)  $C_n^k$ .

22. (а) Пусть  $C \in P(A \cap B)$ , т. е.  $C \subseteq A \cap B$ . Тогда  $C \subseteq A$  и  $C \subseteq B$ , а значит,  $C \in P(A)$  и  $C \in P(B)$ . Итак,  $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$ .

Пусть  $C \in P(A) \cap P(B)$ . Тогда  $C \in P(A)$  и  $C \in P(B)$ , т. е.  $C \subseteq A$  и  $C \subseteq B$ , а значит,  $C \subseteq A \cap B$ . Таким образом,  $C \in P(A \cap B)$ . Итак,  $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$ .

(в) Пусть  $C \in P(A \cup B)$ . Тогда  $C \subseteq A \cup B$ . Положим  $A_1 = C \cap A$  и  $B_1 = C \cap B$ . Тогда  $C = A_1 \cup B_1$  и  $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ .

Если  $A_1 \in P(A)$  и  $B_1 \in P(B)$ , то  $A_1 \subseteq A$  и  $B_1 \subseteq B$ . Тогда  $A_1 \cup B_1 \subseteq A \cup B$ , т. е.  $A_1 \cup B_1 \in P(A \cup B)$ .

23. Если  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ , то второе множество должно содержать элемент  $\{a\}$ , т. е.  $\{a\} = \{c\}$  или  $\{a\} = \{c, d\}$ . В обоих случаях  $a = c$ . Теперь осталось доказать, что из  $\{a, b\} = \{a, d\}$  следует  $b = d$ . Если  $a = b$ , то  $a = d$  и, значит,  $b = d$ . Если  $a \neq b$ , то  $a \neq d$ , значит,  $b = d$ . Обратное очевидно.

24. (а) Неверно. Например,  $A = \emptyset, B = \{\emptyset\}, C = \{\{\emptyset\}\}$ .

(б) Неверно. Тот же пример, что и в (а).

(в) Верно. Докажем от противного. Пусть  $x \in A \cap C$ ; тогда, так как  $A \cup C \subseteq B$ , то  $x \in B$ . Но  $x \in A \cap B$ , а значит,  $x \in -C$ . Это противоречит тому, что  $x \in C$ .

(г) Неверно. Например, возьмем  $A = C \neq B$ .

(д) Неверно. Например, возьмем три попарно непересекающихся непустых множества.

26. Пусть, например,  $A_1 = \{\emptyset\}, A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$ .

27.  $X = (C \setminus A) \cup B$ . В самом деле,  $B \subseteq X \subseteq (-A) \cup B$  (из первого уравнения по задачам 13(б), (в)) и  $C \cap (-A) \subseteq X \subseteq C$  (из второго уравнения по задачам 13(а), (г)). Отсюда

$$B \cup (C \cap (-A)) \subseteq X \subseteq ((-A) \cup B) \cap C = ((-A) \cap C) \cup (B \cap C) = \\ = ((-A) \cap C) \cup B.$$

Легко проверить, что  $X = (C \setminus A) \cup B$  удовлетворяет данной системе.

28.  $X = (A \setminus B) \cup C$ .

29. (а) Система имеет решение тогда и только тогда, когда  $B_i \subseteq A_i$  и  $B_i \subseteq (-A_j) \cup B_j$  для всех  $i, j \in I$ . При этом условием решением систе-

мы является любое  $X$  такое, что  $\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq X \subseteq \bigcap_{i \in I} ((-A_i) \cup B_i)$  (см. задачу 13(а), (б), (в)).

(б) Система имеет решение тогда и только тогда, когда  $A_i \subseteq B_i$  и  $B_i \cap (-A_j) \subseteq B_j$  для всех  $i, j \in I$ . При этом условием решением системы является любое  $X$  такое, что  $\bigcup_{i \in I} (B_i \cap (-A_i)) \subseteq X \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$  (см. задачу 13(а), (б), (г)).

$$30. X = C \setminus B.$$

31. (б) Использовать тождества задач 11 и 12.

(г) Используя (а), заменить каждое уравнение системы уравнением, в правой части которого стоит  $\emptyset$ . Полученную систему  $A_1 = \emptyset, \dots, A_n = \emptyset$  заменить одним уравнением  $A_1 \cup \dots \cup A_n = \emptyset$ .

Используя (б), привести полученное уравнение к виду  $(A \cap X) \cup (B \cap (-X)) = \emptyset$ . Заменить полученное уравнение системой

$$\begin{cases} A \cap X = \emptyset, \\ B \cap (-X) = \emptyset. \end{cases}$$

Используя (в), записать условия существования решения и найти решение.

32. (а)  $X = A$  при условии  $C \subseteq A \subseteq B$ .

(б)  $X = A$  при условии  $C \subseteq A \subseteq B$ .

(в)  $B \cup C \subseteq X \subseteq -A$  при условии  $B \cup C \subseteq -A$ .

34. Пусть  $I$  — бесконечное подмножество множества  $\mathcal{N}$ ,  $A = \bigcap_{i \in \mathcal{N}} X_i$  и  $B = \bigcap_{i \in I} X_i$ .

Если  $x \in A$ , то  $x \in X_i$  для всех  $i \in \mathcal{N}$ . В частности,  $x \in X_i$  для всех  $i \in I$ , т. е.  $x \in B$ . Итак,  $A \subseteq B$ .

Если  $x \in B$ , то  $x \in X_i$  для всех  $i \in I$ . Возьмем произвольное  $j \in \mathcal{N}$ . Так как множество  $I$  бесконечно, то найдется  $i \in I$  такое, что  $j < i$ . Тогда  $x \in X_i \subseteq X_j$ . Таким образом,  $x \in X_j$  для всех  $j \in \mathcal{N}$ . Итак,  $B \subseteq A$ .

35. Доказательство аналогично данному в решении задачи 34.

36. (в) Пусть  $x \in -\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right)$ . Тогда  $x \in U$  и  $x \notin \bigcup_{k \in K} A_k$ , т. е.  $x \notin A_k$  для всех  $k \in K$ . Значит,  $x \in -A_k$  для всех  $k \in K$ , т. е.  $x \in \bigcap_{k \in K} (-A_k)$ .  
Итак,  $-\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right) \subseteq \bigcap_{k \in K} (-A_k)$ .

Пусть  $x \in \bigcap_{k \in K} (-A_k)$ . Тогда  $x \in -A_k$  для всех  $k \in K$ . Значит,  $x \in U$  и  $x \notin A_k$  для всех  $k \in K$ . Имеем  $x \notin \bigcup_{k \in K} A_k$  и, значит,  $x \in -\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right)$ .  
Итак,  $\bigcap_{k \in K} (-A_k) \subseteq -\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right)$ .

(е) Пусть  $x \in \bigcup_{k \in K} (B \cap A_k)$ . Тогда существует  $k \in K$  такое, что  $x \in B \cap A_k$ , т. е.  $x \in B$  и  $x \in A_k$ . Имеем  $x \in \bigcup_{k \in K} A_k$  и, значит,  $x \in B \cap \bigcup_{k \in K} A_k$ . Итак,  $\bigcup_{k \in K} (B \cap A_k) \subseteq B \cap \bigcup_{k \in K} A_k$ .

Пусть  $x \in B \cap \bigcup_{k \in K} A_k$ . Тогда  $x \in B$  и  $x \in \bigcup_{k \in K} A_k$ , т. е. существует  $k \in K$  такое, что  $x \in A_k$ . Имеем  $x \in B \cap A_k$ , а значит,  $x \in \bigcup_{k \in K} (B \cap A_k)$ .  
Итак,  $B \cap \bigcup_{k \in K} A_k \subseteq \bigcup_{k \in K} (B \cap A_k)$ .

37. (а) Если  $x \in \bigcup_{k \in K} \bigcap_{t \in T} A_{kt}$ , то существует  $k_0 \in K$  такое, что  $x \in \bigcap_{t \in T} A_{k_0 t}$ . Это означает, что  $x \in A_{k_0 t}$  для любого  $t \in T$ . Значит,  $x \in \bigcup_{k \in K} A_{kt}$  для любого  $t \in T$ . Итак,  $x \in \bigcap_{t \in T} \bigcup_{k \in K} A_{kt}$ .

(б) Пусть, например,  $A_{kt} = \emptyset$ , если  $k \neq t$ , и  $A_{kk} = \mathcal{N}$ . Тогда

$$\bigcup_{k \in \mathcal{N}} \bigcap_{t \in \mathcal{N}} A_{kt} = \emptyset, \text{ но } \bigcap_{t \in \mathcal{N}} \bigcup_{k \in \mathcal{N}} A_{kt} = \mathcal{N}.$$

39. (а) Ясно, что  $A_i \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$  для всех  $i \in T$ . Теперь пусть множество  $B$  таково, что  $A_i \subseteq B$  для всех  $i \in T$ . Тогда  $\bigcup_{i \in T} A_i \subseteq B$  (см. задачу 38 (а)).

(б) Ясно, что  $\bigcap_{t \in T} A_t \subseteq A_i$  для всех  $i \in T$ . Теперь пусть множество  $B$  таково, что  $B \subseteq A_i$  для всех  $i \in T$ . Тогда  $B \subseteq \bigcap_{i \in T} A_i$  (см. задачу 38 (б)).

40. Пусть  $x \in \bigcap_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} A_n$ . Тогда существует такое  $k$ , что  $x \notin B_k$ . Пусть  $k_0$  — наименьшее такое  $k$ . Ясно, что  $k_0 > 0$ , так как  $x \in B_0$ . Тогда  $x \in B_{k_0-1} \setminus B_{k_0}$ .

41. Положим  $B_0 = A_0$ ,  $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$ .

## § 2. Отношения и функции

5. Пусть  $x \in (A \times B) \cup (C \times D)$ . Тогда  $x = \langle y, z \rangle$  и  $y \in A, z \in B$  или  $y \in C, z \in D$ . Отсюда  $y \in A \cup C, z \in B \cup D$  и  $x = \langle y, z \rangle \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ . Итак,  $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ . Условие « $(C \subseteq A$  и  $D \subseteq B)$  или  $(A \subseteq C$  и  $B \subseteq D)$ » является необходимым и достаточным, чтобы получилось равенство.

6. Докажем, например, (а).

Пусть  $x \in (A \cup B) \times C$ . Тогда  $x = \langle y, z \rangle$ , где  $y \in A \cup B, z \in C$ . Отсюда  $y \in A$  или  $y \in B$ . Значит,  $\langle y, z \rangle \in A \times C$  или  $\langle y, z \rangle \in B \times C$ . Итак,  $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$ .

Пусть  $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$ . Тогда  $x \in A \times C$  или  $x \in B \times C$ . Это означает, что  $x = \langle y, z \rangle$  и в первом случае  $y \in A, z \in C$ , а во втором случае  $y \in B, z \in C$ . Значит,  $y \in A \cup B$ , а  $x = \langle y, z \rangle \in (A \cup B) \times C$ . Итак,  $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ .

7. Пусть  $a \in A, b \in B$ . Тогда  $\langle a, b \rangle \in A \times B$ , а значит,  $\langle a, b \rangle \in C \times D$ , т. е.  $a \in C, b \in D$ . С другой стороны,  $\langle b, a \rangle \in B \times A$ , а значит,  $\langle b, a \rangle \in C \times D$ , т. е.  $b \in C, a \in D$ . Тогда  $\langle a, a \rangle \in C \times D$ , а значит,  $a \in B$ . Аналогично,  $\langle b, b \rangle \in C \times D$ , а значит,  $b \in A$ . Итак,  $A = B$ . Тогда имеем  $A \times B = C \times D$ , и по задаче 3 (б)  $A = C, B = D$ .

8. Мы считаем, что 0 делит 0.

(а)  $\delta_R = \rho_R = \mathcal{N}$ , так как  $\langle x, x \rangle \in R$ .  $R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{N} \text{ и } y \text{ делит } x\}$ .

$R \cdot R = R$ ;  $R \cdot R^{-1} = \mathcal{N}^2$ , так как  $\langle x, y \rangle \in R \cdot R^{-1} \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $x$  делит  $z$  и  $z$  делит  $y$ . Но такое  $z$  легко находится по любым  $x$  и  $y$ . Надо взять, например,  $z = x \cdot y$ .  $R^{-1} \cdot R = \mathcal{N}^2$ , так как  $\langle x, y \rangle \in R^{-1} \cdot R \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $z$  делит  $x$  и  $z$  делит  $y$ . Надо взять  $z = 1$  для любых  $x, y$ .

(б) Делается аналогично (а).

(в)  $\delta_R = \rho_R = \emptyset$ ,  $R^{-1} = R$ ,  $R \cdot R = R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = \emptyset^2$ .

(г)  $\delta_R = \rho_R = \emptyset$ ,  $R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \emptyset \text{ и } 2y \geq 3x\}$ ,  $R \cdot R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \emptyset \text{ и } 4x \geq 9y\}$ ,  $R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = \emptyset^2$ .

(д)  $\delta_R = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\rho_R = \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$R^{-1} = \left\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } x \geq \sin y\right\}$ ,

$R \cdot R = \{\langle x, y \rangle \mid \sin \sin x \leq y\}$ ,

$R \cdot R^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2$ ,  $R^{-1} \cdot R = \left\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ .

9. (в)  $x \in \delta_{R_1 \cdot R_2} \Leftrightarrow$  существует  $y$  такое, что  $\langle x, y \rangle \in R_1 \cdot R_2 \Leftrightarrow$  существуют  $y$  и  $z$  такие, что  $\langle x, z \rangle \in R_1$  и  $\langle z, y \rangle \in R_2 \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle x, z \rangle \in R_1$  и  $z \in \delta_{R_2} \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle z, x \rangle \in R_1^{-1}$ ,  $z \in \rho_{R_1}$  и  $z \in \delta_{R_2} \Leftrightarrow x \in R_1^{-1} (\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$ .

(г)  $x \in \rho_{R_1 \cdot R_2} \Leftrightarrow$  существует  $y$  такое, что  $\langle y, x \rangle \in R_1 \cdot R_2 \Leftrightarrow$  существуют  $y$  и  $z$  такие, что  $\langle y, z \rangle \in R_1$  и  $\langle z, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $z \in \rho_{R_1}$  и  $\langle z, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $z \in \rho_{R_1}$ ,  $z \in \delta_{R_2}$  и  $\langle z, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow x \in R_2 (\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$ .

11. Если  $R = i_A$ , то для любого отношения  $R_1$  на  $A$  имеем  $\langle x, y \rangle \in R \cdot R_1 \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle x, z \rangle \in R$  и  $\langle z, y \rangle \in R_1$ , но  $\langle x, z \rangle \in R$  только при  $x = z$ . Таким образом,  $R \cdot R_1 = R_1$ . Аналогично,  $R_1 \cdot R = R_1$ . Обратно, положим  $R_1 = i_A$ . Тогда, так как  $R \cdot R_1 = R_1$ , то  $R = i_A$ .

12. (в)  $\langle x, y \rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1$  или  $\langle y, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1}$  или  $\langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ .

(д) Пусть  $R$  — бинарное отношение между элементами множеств  $A$  и  $B$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in -R^{-1} &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (B \times A) \setminus R^{-1} \Leftrightarrow x \in B, y \in A \text{ и } \langle x, y \rangle \notin R^{-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in B, y \in A \text{ и } \langle y, x \rangle \notin R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in (A \times B) \setminus R \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in -R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (-R)^{-1}. \end{aligned}$$

13. Если  $A \neq \emptyset$  и  $B \neq \emptyset$ , то таких отношений  $R$  не существует.

Пусть  $x \in A \cap B$ . Тогда  $\langle x, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in -R$ . Получили противоречие.

Пусть  $A \cap B = \emptyset$ . Так как  $R^{-1} \subseteq B \times A$ , а  $-R \subseteq A \times B$ , то  $R^{-1} = -R = \emptyset$ . Отсюда  $R = \emptyset$  и  $R = A \times B$ . Получили противоречие.

14. (а)  $2^{n-m}$ .

(б)  $n^m$ .

(в) Если  $n \geq m$ , то это число равно  $A_n^m$  — числу размещений из  $n$  элементов по  $m$ ; если  $n < m$ , то таких функций не существует.

(г) При  $m = n$ .



15. (а)  $\langle x, y \rangle \in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle x, z \rangle \in R_1$  и  $\langle z, y \rangle \in R_2 \cdot R_3 \Leftrightarrow$  существуют  $z, u$  такие, что  $\langle x, z \rangle \in R_1$ ,  $\langle z, u \rangle \in R_2$  и  $\langle u, y \rangle \in R_3 \Leftrightarrow$  существует  $u$  такое, что  $\langle x, u \rangle \in R_1 \cdot R_2$  и  $\langle u, y \rangle \in R_3 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$ .

(б)  $\langle x, y \rangle \in (R_1 \cdot R_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cdot R_2 \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle y, z \rangle \in R_1$  и  $\langle z, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle x, z \rangle \in R_2^{-1}$  и  $\langle z, y \rangle \in R_1^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$ .

(в)  $\langle x, y \rangle \in \left( \bigcup_{i \in I} R_i \right) \cdot Q \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle x, z \rangle \in \bigcup_{i \in I} R_i$  и  $\langle z, y \rangle \in Q \Leftrightarrow$  существуют  $z$  и  $i \in I$  такие, что  $\langle x, z \rangle \in R_i$  и  $\langle z, y \rangle \in Q \Leftrightarrow$  существует  $i \in I$  такое, что  $\langle x, y \rangle \in R_i \cdot Q \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \bigcup_{i \in I} (R_i \cdot Q)$ .

(г) Доказывается аналогично (в).

16. (а)  $\langle x, y \rangle \in Q \cdot \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right) \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle x, z \rangle \in Q$  и  $\langle z, y \rangle \in \bigcap_{i \in I} R_i \Leftrightarrow$  существует  $z$  такое, что  $\langle x, z \rangle \in Q$  и  $\langle z, y \rangle \in R_i$  для всех  $i \in I \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in Q \cdot R_i$  для всех  $i \in I \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \bigcap_{i \in I} (Q \cdot R_i)$ .

(б) Доказывается аналогично (а).

(в) Например, для (а):  $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle\}$ ,  $R_2 = \{\langle 0, 1 \rangle\}$ ,  $Q = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$ .

17. Нет.

19. (а) Пусть  $b \in B$ . Тогда  $B^A$  содержит функцию  $f: A \rightarrow B$ , определенную так:  $f(x) = b$  для всех  $x \in A$ .

20. Поставим в соответствие элементу  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  из  $A^n$  функцию  $f: I \rightarrow A$ , определенную так:  $f(i) = a_i$ .

23. (а)  $f$  есть 1-1-функция.

(б)  $f \cap (\delta_f \times (\rho_f \cap \delta_\rho))$  и  $g \cap ((\rho_f \cap \delta_g) \times \rho_g)$  являются 1-1-функциями.

24. Пусть функции  $f_1: A \rightarrow A_1$  и  $f_2: B \rightarrow B_1$  осуществляют взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $A_1$  и между  $B$  и  $B_1$  соответственно.

(а) Функция  $F: A \times B \rightarrow A_1 \times B_1$ , определенная так:  $F(\langle a, b \rangle) = \langle f_1(a), f_2(b) \rangle$ , осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $A \times B$  и  $A_1 \times B_1$ .

(б) Пусть  $h \in A^B$ ; тогда  $F(h) = f_2^{-1} \cdot h \cdot f_1$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $A^B$  и  $A_1^B$ .

27. См. задачи 26 и 28.

29. Если  $R$  — взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ , то результат следует из задачи 28.

Обратно,  $\delta_R = A$ , так как  $R \cdot R^{-1} = i_A$ ;  $\rho_R = B$ , так как  $R^{-1} \cdot R = i_B$ . Если  $\langle x, y \rangle \in R$  и  $\langle x, z \rangle \in R$ , то  $\langle y, z \rangle \in R^{-1} \cdot R$ , а значит,  $y = z$ . Если  $\langle y, x \rangle \in R$  и  $\langle z, x \rangle \in R$ , то  $\langle y, z \rangle \in R \cdot R^{-1}$ , а значит,  $y = z$ .

32. Условия, когда включения заменяются равенствами, приведены в задаче 33.

33. Пусть  $f$  не является 1-1-функцией. Тогда существуют  $a, b \in \delta_f$  такие, что  $a \neq b$  и  $f(a) = f(b)$ . Положим  $A = \{a\}$ ,  $B = \{b\}$ . Обратное очевидно.

34. Если  $x \in f(A) \setminus f(B)$ , то существует  $y \in A$  такое, что  $f(y) = x$  и  $y \notin B$ . Таким образом,  $x \in f(A \setminus B)$ .

35. Если  $x \in f(A \setminus B)$ , то существует  $y \in A$  и  $y \in B$  такое, что  $f(y) = x$ . Таким образом,  $x \in f(A)$ . Ясно, что  $x \notin f(B)$ , так как  $f$  есть 1-1-функция.

38. Докажем, например, (а).

Пусть  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ . Это означает, что  $f(x) \in A \cup B$ . Если  $x \in A$ , то  $x \in f^{-1}(A)$ . Если  $f(x) \in B$ , то  $x \in f^{-1}(B)$ . Итак,  $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

Пусть  $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ . Если  $x \in f^{-1}(A)$ , то  $f(x) \in A \subseteq A \cup B$ , т. е.  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ . Если  $x \in f^{-1}(B)$ , то  $f(x) \in B \subseteq A \cup B$ ,  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ . Итак,  $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B)$ .

42. В первом случае должно быть  $\rho_f = B$ . Во втором случае  $f$  должна быть 1-1-функцией.

46. (а) Пусть  $x \in \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij}$ . Это означает, что существует  $i_0 \in I$  такое, что для всех  $j \in J$  имеем  $x \in A_{i_0 j}$ . Пусть  $f$  — функция из  $J^I$ . Тогда  $x \in A_{i_0 f(i_0)}$  и  $x \in \bigcup_{i \in I} A_{i f(i)}$ . Поэтому  $x \in \bigcap_{j \in J^I} \bigcup_{i \in I} A_{i f(i)}$ .

Обратно, пусть  $x \notin \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij}$ . Тогда для любого  $i \in I$  существует  $j_i \in J$  такое, что  $x \notin A_{i j_i}$ . Положим  $f_0(i) = j_i$ . Тогда имеем  $x \notin \bigcup_{i \in I} A_{i f_0(i)}$ . Поэтому  $x \notin \bigcap_{j \in J^I} \bigcup_{i \in I} A_{i f(i)}$ .

(б) Можно использовать (а) и задачи 36 (в), (г) из § 1.

47. По определению.

48. (б) Пусть  $f \in \bigcup_{i \in I} \prod_{j \in I} B_{ij}$ . Тогда существует  $i_0 \in I$  такое, что  $f \in \prod_{j \in I} B_{i_0 j}$ . Отсюда  $f(j) \in B_{i_0 j}$  для любого  $j \in I$ . Поэтому  $f \in \prod_{j \in I} X_j$ , но  $f(i_0) \notin A_{i_0}$ . Значит,  $f \notin \prod_{i \in I} A_i$ .

Обратно, пусть  $f \in \prod_{i \in I} X_i \setminus \prod_{i \in I} A_i$ . Тогда  $f(i) \in X_i$  для всех  $i$  и существует  $i_0 \in I$  такое, что  $f(i_0) \notin A_{i_0}$ . Тогда  $f(i_0) \in B_{i_0 i_0}$  и  $f(j) \in B_{i_0 j}$  при  $j \neq i_0$ . Поэтому  $f \in \prod_{j \in I} B_{i_0 j}$  и  $f \in \bigcup_{i \in I} \prod_{j \in I} B_{ij}$ .

49. (б) Отображение  $\varphi: B^{\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)} \rightarrow \prod_{t \in T} B^{A_t}$  осуществляет требуемое взаимно однозначное соответствие:

$$(\varphi(f))(t) = f \cap (A_t \times B) \text{ для } f \in B^{\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)} \text{ и } t \in T.$$

(в) Отображение  $\varphi: \left(\prod_{t \in T} B_t\right)^A \rightarrow \prod_{t \in T} B_t^A$  осуществляет требуемое взаимно однозначное соответствие:

$$(\varphi(f))(t) = f \cap (A \times B_t) \text{ для } f \in \left(\prod_{t \in T} B_t\right)^A \text{ и } t \in T.$$

50. Пусть  $a_t \in A_t$ . Определим функцию  $f: T \rightarrow \bigcup_{t \in T} A_t$  следующим образом:  $f(t) = a_t$ .

51. Отображение  $\varphi: \prod_{t \in T} A_t \rightarrow \left(\prod_{t_1 \in T_1} A_{t_1}\right) \times \left(\prod_{t_2 \in T_2} A_{t_2}\right)$  осуществляет требуемое взаимно однозначное соответствие:

$$\varphi(f) = \left(f \cap \left(T_1 \times \bigcup_{t_1 \in T_1} A_{t_1}\right), f \cap \left(T_2 \times \bigcup_{t_2 \in T_2} A_{t_2}\right)\right).$$

### § 3. Специальные бинарные отношения

1.  $R$  — рефлексивное отношение на  $A \Leftrightarrow i_A \subseteq R$ .

2.  $R$  — иррефлексивное отношение на  $A \Leftrightarrow R \cap i_A = \emptyset$ . Например, пусть  $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{N}, x < y\}$ ,  $R_2 = R_1^{-1}$ . Тогда  $R_1 \cdot R_2$  рефлексивно.

3.  $R$  симметрично  $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ .

4.  $R_1 \cdot R_2$  симметрично  $\Rightarrow R_1 \cdot R_2 = (R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1} = R_2 \cdot R_1$ ,  
 $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1 \Rightarrow (R_1 \cdot R_2)^{-1} = (R_2 \cdot R_1)^{-1} = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} = R_1 \cdot R_2$ .

5. (a)  $R$  антисимметрично  $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq i_A$ .

(б)  $(R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$ ;  $R_1^{-1} \cap R_2 =$   
 $= (R_1 \cap R_2^{-1})^{-1}$ .

6. (a) Например,  $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{Q}, |x - y| \leq 1\}$ ;

(б)  $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{Z}, x \leq y \leq x^2\}$ ;

(в)  $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{Q}, x \leq y\}$ ;

(г)  $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{Q}, x = y = 0\}$ .

7. (a) Например,  $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{Q}, x, y > 0\}$ ;

(б)  $x \in A \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$  или  $\langle y, x \rangle \in R$  для некоторого  $y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$  и  $\langle y, x \rangle \in R \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$ .

8.  $R \subseteq i_A$ .

9. См. указание к задаче 8.

11. (a) Да. (б) Нет.

14.  $R^{-1} = R$ .

15.  $R$  — эквивалентность  $\Rightarrow R^{-1} = R$ ,  $R \cdot R \subseteq R$ ,  $i_A \subseteq R$ . Обратно,  $R \cdot R^{-1}$  симметрично для любого  $R$ . Поэтому  $R$  симметрично и  $R \cdot R = R \cdot R^{-1} \subseteq R$ .

16. (a)  $R_1 = R_1 \cdot R_1$ .

(б)  $A^2 = (A^2)^{-1} = (R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1} = R_2 \cdot R_1$ .

17. Разбиению  $\{A_i\}_{i \in I}$  сопоставляем эквивалентность:

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid \text{существует } i \in I \text{ такое, что } x, y \in A_i\}.$$

18. Если  $R$  — эквивалентность, то  $\mathcal{P} = A/R$  (см. задачу 13).

19. Полагаем  $f_1([x]_Q) = f(x)$ . Очевидно,

$$[x]_Q = [y]_Q \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Поэтому  $f_1$  есть взаимно однозначное соответствие между  $A/Q$  и  $f(A)$ , а  $(\varepsilon \cdot f_1)(x) = f_1(\varepsilon(x)) = f_1([x]_Q) = f(x)$ .

21.  $R_1 \cup R_2$  — эквивалентность  $\Rightarrow R_1 \cdot R_2 \subseteq (R_1 \cup R_2) \cdot (R_1 \cup R_2) \subseteq R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cup R_2 = (R_1 \cdot i_A) \cup (i_A \cdot R_2) \subseteq R_1 \cdot R_2$ .

Обратно, пусть  $R_1 \cup R_2 = R_1 \cdot R_2$ . Тогда  $R_2 \cdot R_1 = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1} = (R_1 \cdot R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1 \cup R_2$ ,  $(R_1 \cup R_2) \cdot (R_1 \cup R_2) = (R_1 \cdot R_1) \cup (R_2 \cdot R_1) \cup (R_1 \cdot R_2) \cup (R_2 \cdot R_2) \subseteq R_1 \cup R_2$ , т. е.  $R_1 \cup R_2$  транзитивно. Симметричность и рефлексивность  $R_1 \cup R_2$  очевидны.

22.  $R_1 \cdot R_2$  — эквивалентность  $\Rightarrow R_1 \cdot R_2 = (R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1} = R_2 \cdot R_1$ . Пусть  $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$ . Тогда  $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = (R_2 \cdot R_1)^{-1} = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} = R_1 \cdot R_2$ , т. е.  $R_1 \cdot R_2$  симметрично;  $(R_1 \cdot R_2) \cdot (R_1 \cdot R_2) = R_1 \cdot (R_2 \cdot R_1) \cdot R_2 = R_1 \cdot (R_1 \cdot R_2) \cdot R_2 = (R_1 \cdot R_1) \cdot (R_2 \cdot R_2) \subseteq R_1 \cdot R_2$ , т. е.  $R_1 \cdot R_2$  транзитивно; рефлексивность очевидна.

23.  $R_1 \cdot R_2$  есть эквивалентность (см. задачу 22). Очевидно,  $R_1 \cup R_2 \subseteq R_1 \cdot R_2$ . Пусть теперь  $R_1 \cdot R_2 \subseteq Q$  для некоторого отношения эквивалентности  $Q$ . Тогда  $R_1 \cdot R_2 \subseteq (R_1 \cup R_2) \cdot (R_1 \cup R_2) \subseteq Q \cdot Q \subseteq Q$ .

24.  $Q$  есть объединение всевозможных произведений вида

$$R_{i_1} \cdot R_{i_2} \cdot \dots \cdot R_{i_k} \quad (k \geq 1, i_1, \dots, i_k \in I).$$

25. Пусть  $A$  состоит из  $n+1$  элементов,  $a \in A$  и множество  $B \subseteq A \setminus \{a\}$  содержит  $i$  элементов. Число эквивалентностей  $R$  на  $A$  таких, что  $[a]_R = B \cup \{a\}$ , равно  $p_{n-1}$ .

30. (а), (б) следуют из антисимметричности частичного порядка.

(в)  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{D}, x = y = 0 \text{ или } x \neq 0, y \neq 0, x \leq y\}$  есть частичный порядок на  $\mathcal{D}$ .

33.  $R$  — предпорядок  $\Rightarrow R = R \cdot i_A \subseteq R \cdot R$ .

38. Например,  $A$  есть  $\mathcal{N}$  с частичным порядком из задачи 29,  $A_1$  есть  $\mathcal{N}$  с обычным порядком  $\leq$ ,  $f(x) = x$ . Для линейно упорядоченных множеств см. задачу 8 из § 5.

39.  $h(x) = \{y \mid y \leq x\}$  для  $x \in A$  есть требуемый изоморфизм.

40. Тогда и только тогда, когда  $R_1 = R_2$ . Если  $R_1 \neq R_2$ , то существует пара  $\langle x, y \rangle$  такая, что  $\langle x, y \rangle \in R_1$ ,  $\langle x, y \rangle \notin R_2$  или  $\langle x, y \rangle \notin R_1$ ,  $\langle x, y \rangle \in R_2$ . В первом случае  $\langle x, y \rangle \in R_1 \subseteq R_1 \cdot R_2$ ,  $\langle y, x \rangle \in R_2 \subseteq R_1 \cdot R_2$ ,  $x \neq y$ . Аналогично рассматривается второй случай. Если же  $R_1 = R_2$ , то  $R_1 \cdot R_2 = R_1$  (см. задачу 33).

41. (б) В противном случае  $A$  содержит бесконечное подмножество  $\{a, a_1, a_2, \dots\}$  такое, что  $a > a_1 > a_2 > \dots$  или  $a < a_1 < a_2 < \dots$ .

42. (а) Например,  $\langle m, n \rangle \leq \langle m_1, n_1 \rangle \Leftrightarrow m < m_1$  или  $(m = m_1$  и  $n \leq n_1)$ .

(б)  $\langle m_1, \dots, m_k \rangle \leq \langle n_1, \dots, n_l \rangle \Leftrightarrow$  существует  $i$  ( $1 \leq i \leq \min(k, l)$ ) такое, что  $m_1 = n_1, \dots, m_{i-1} = n_{i-1}$ ,  $m_i < n_i$  или  $k \leq l$  и  $m_1 = n_1, \dots, m_k = n_k$ .

(в)  $a + bi \leq a_1 + b_1i \Leftrightarrow a < a_1$  или  $a = a_1, b \leq b_1$ .

44. Пусть  $R_1$  — произвольный линейный порядок на множестве  $B_1$  всех минимальных элементов множества  $A$  (см. задачи 41, 43),  $R_2$  — линейный порядок на множестве  $B_2$  всех минимальных элементов множества  $A \setminus B_1$  и т. д. Для  $x, y \in A$  полагаем

$x \leq y \Leftrightarrow (x \in B_i, y \in B_j, i < j)$  или существует  $i$  такое,

что  $x, y \in B_i$  и  $\langle x, y \rangle \in R_i$ .

45. Докажем индукцией по  $m$ . При  $m = 1$  все элементы  $A$  попарно несравнимы и число элементов в  $A$  не превосходит  $n$ . Пусть  $m > 1$ ,  $B$  — множество минимальных элементов из  $A$ . Если  $C$  — произвольная цепь в множестве  $A \setminus B$ , то  $C$  имеет наименьший элемент  $a$  (см. задачу 41 (а)) и существует  $a_0 \in B$  такой, что  $a_0 \leq a$  (см. задачу 41 (б)). Поэтому  $C \cup \{a_0\}$  есть цепь в  $A$ ,  $a_0 \notin C$  и, следовательно,  $C$  содержит не более  $m - 1$  элементов. По предположению индукции  $(A \setminus B)$  содержит не более  $(m - 1) \cdot n$  элементов, а множество  $A = (A \setminus B) \cup B$  не более  $(m - 1)n + n = mn$  элементов.

47.  $h([a, b]) = \langle b, a \rangle$  есть требуемый изоморфизм.

48. (а) Все двухэлементные линейно упорядоченные множества изоморфны между собой и самодвойственны. Множества из двух несравнимых элементов также самодвойственны и изоморфны между собой.

(б) Любое трехэлементное частично упорядоченное множество удовлетворяет в точности одному из следующих пяти условий:

(1) имеются наибольший и наименьший элементы, т. е. порядок линейный;

(2) нет наибольшего элемента, есть наименьший;

(3) нет наименьшего элемента, есть наибольший;

(4) два элемента сравнимы, третий несравним с остальными;

(5) все три элемента попарно несравнимы.

Частично упорядоченные трехэлементные множества изоморфны тогда и только тогда, когда они удовлетворяют одному и тому же из условий (1)–(5). Частично упорядоченные множества самодвойственны тогда и только тогда, когда они удовлетворяют одному из условий (1), (4), (5).

49. (1)  $\Rightarrow$  (2). Бесконечная строго убывающая цепь  $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$  не содержит минимального элемента.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Пусть существует свойство  $T$  элементов множества  $A$  такое, что для любого элемента  $a \in A$  из справедливости  $T$  для всех элементов, строго меньших  $a$ , вытекает справедливость  $T$  для  $a$ , и элемент  $b \in A$  не обладает свойством  $T$ . Тогда существует  $b_1 \in A$ ,  $b_1 < b$ , такой, что  $b_1$  не обладает свойством  $T$ , и т. д. Получаем бесконечную цепь  $b > b_1 > \dots > b_n > \dots$

(3)  $\Rightarrow$  (1). Пусть  $M \subseteq A$  и  $T$  есть свойство:  $a \notin M$  или существует минимальный элемент  $m$  в множестве  $M$ . Допустим, что  $a \in A$  и все элементы, строго меньшие  $a$ , обладают свойством  $T$ . Возможны два случая: (а) существует элемент  $b \in M$  такой, что  $b < a$ , (б) не существует такого  $b$ . В случае (а), так как  $b$  обладает свойством  $T$ , существует минимальный элемент множества  $M$ . В случае (б)  $a \notin M$  или  $a \in M$  и  $a$  есть минимальный элемент множества  $M$ . Поэтому  $a$  обладает свойством  $T$ . Из условия (3) следует, что все элементы множества  $A$  обладают свойством  $T$ . Пусть теперь  $M \neq \emptyset$ ,  $a \in M$ . Тогда  $M$  имеет минимальный элемент.

50. Если все цепи множества вполне упорядочены, то оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей и, следовательно, условию минимальности (см. задачу 49). Обратное очевидно.

51. Если  $A$  обладает указанным свойством, то для любого неминимального элемента  $a \in A$  существует точная верхняя грань  $u(a)$  множества  $\{x \mid x \in A, x < a\}$  и для любого немаксимального  $a \in A$  существует точная нижняя грань  $v(a)$  множества  $\{x \mid x \in A, x > a\}$ . Если  $a < b$ , то

$$b = v(v \dots (v(a)) \dots) \text{ (} n \text{ раз)}, \quad a = u(u \dots (u(b)) \dots) \text{ (} n \text{ раз)}$$

для некоторого  $n$ . Возможны четыре случая.

(а)  $A$  имеет наименьший и наибольший элементы. Тогда  $A$  конечно.

(б)  $A$  имеет наименьший элемент  $a_0$  и не имеет наибольшего. Тогда любой элемент  $a \in A$  представим в виде  $\nu(\nu \dots (\nu(a_0)) \dots)$  ( $n$  раз) для некоторого  $n$  и  $A$  изоморфно множеству натуральных чисел с их обычным порядком.

(в)  $A$  имеет наибольший элемент  $a_0$  и не имеет наименьшего. Тогда  $A$  изоморфно множеству отрицательных целых чисел.

(г)  $A$  не имеет наибольшего и наименьшего элементов. Тогда  $A$  изоморфно множеству всех целых чисел.

52. Все конечные множества и только они (см. задачу 32 и задачу 42 из § 5).

53. (а) Проверим транзитивность  $\leq$ :

$$\varphi(x, y) = x, \quad \varphi(y, z) = y \Rightarrow \varphi(x, z) = \varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z)) = \\ = \varphi(x, y) = x.$$

Рефлексивность и антисимметричность очевидны.

(б)  $\varphi(\varphi(x, y), x) = \varphi(x, \varphi(x, y)) = \varphi(\varphi(x, x), y) = \varphi(x, y)$ . Аналогично,

$$\varphi(\varphi(x, y), y) = \varphi(x, y); \quad \varphi(z, x) = z, \quad \varphi(z, y) = z \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi(z, \varphi(x, y)) = \varphi(\varphi(z, x), y) = \varphi(z, y) = z.$$

55. (б) См. задачи 20 и 24.

56. Пусть  $a, b$  — максимальные элементы решетки  $M$ . Тогда  $a \cup b \in M$ ,  $a \cup b \geq a$ ,  $a \cup b \geq b$ . Отсюда  $a \cup b = a = b$ .

57. Если  $M = \{a_1, \dots, a_k\}$ , то  $a_1 \cup \dots \cup a_k$  есть наибольший элемент в  $M$ .

58. (а) Семейство конечных подмножеств натурального ряда.

(б) Семейство подмножеств натурального ряда с конечными дополнениями.

(в) Множество целых чисел.

60. (а)  $x \cup y = y \Rightarrow x \cap y = x \cap (x \cup y) = x$ ; обратное аналогично.

(б)  $x \leq x$ , так как  $x \cup x = x \cup (x \cap (x \cup y)) = x$ ;

$$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = x \cup y = (x \cap y) \cup y = y;$$

$$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x = x \cap y = x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z = x \cap z;$$

$$z \leq x, z \leq y \Rightarrow z = z \cap y = (z \cap x) \cap y = z \cap (x \cap y);$$

$$x \leq z, y \leq z \Rightarrow z = z \cup y = (z \cup x) \cup y = z \cup (x \cup y).$$

61. Использовать, кроме определения, тождества из задачи 59.

(а)  $0 = x \cap (-x)$ ,  $1 = x \cup (-x)$  для любого  $x \in M$ .

(б) Пусть  $b_1, b_2$  — дополнения элемента  $a \in M$ . Имеем

$$b_2 = (a \cap b_1) \cup b_2 = (a \cup b_2) \cap (b_1 \cup b_2) = b_1 \cup b_2.$$



Аналогично,  $b_1 = b_1 \cup b_2 = b_2$ .

$$(r) a \cap b \cap [(-a) \cup (-b)] = [a \cap b \cap (-a)] \cup [a \cap b \cap (-b)] = 0;$$

$$(a \cap b) \cup [(-a) \cup (-b)] = [a \cup (-a) \cup (-b)] \cap [b \cup (-a) \cup (-b)] = 1.$$

$$(e) a \leq b \Rightarrow b = a \cup b \Rightarrow -b = -(a \cup b) = (-a) \cap (-b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cap (-b) = a \cap (-a) \cap (-b) = 0;$$

$$a \cap (-b) = 0 \Rightarrow b = b \cup [a \cap (-b)] = (b \cup a) \cap [b \cup (-b)] = b \cup a \Rightarrow a \leq b.$$

65. Пусть  $A_1 = D \cup \{x\}$ ,  $A_2 = D \cup \{y\}$ . Тогда  $x \cap u \neq 0$  для любого  $u \in D$  или  $y \cap v \neq 0$  для любого  $v \in D$ ; в противном случае для некоторых  $u, v \in D$  имеем  $(x \cup y) \cap (u \cap v) = 0$  и  $0 \in D$ . Поэтому  $A_1$  или  $A_2$  можно расширить до фильтра (см. задачу 64).

66. (a)  $\Rightarrow$  (б) следует из задачи 65.

67. Пусть  $D$  — данный фильтр. Тогда семейство  $S = \{D_1 \mid D_1 \text{ есть фильтр на } M, D_1 \supseteq D\}$  удовлетворяет условиям леммы Цорна (см. задачи 66 и 68 из § 5) и поэтому имеет максимальный элемент.

68. Имеем  $a \cap (-b) \neq 0$  (см. задачу 61 (e)). Из задач 64 и 67 вытекает требуемое утверждение.

69.  $h(a) \cap h(b) = h(a \cap b)$ ,  $h(a) \cup h(b) = h(a \cup b)$ ,  $-h(a) = h(-a)$ . Поэтому  $S$  замкнуто относительно  $\cap$ ,  $\cup$  и  $-$ .

70. Отображение  $h$ , определенное в задаче 69, монотонно и удовлетворяет условию  $h(x) \leq h(y) \Rightarrow x \leq y$  вследствие утверждения задачи 68. Поэтому  $h$  есть изоморфизм между  $M$  и  $h(M)$ .

71. Следует из задачи 57.

72. Отображение  $h$ , определенное в задаче 69, есть изоморфизм между булевой алгеброй  $M$  и  $h(M)$ . Покажем, что  $h(M) = P(\mathcal{P})$ . Множество  $\mathcal{P}$  конечно. Пусть  $A = \{D_1, \dots, D_k\} \subseteq \mathcal{P}$ ,  $a_1, \dots, a_k$  — наименьшие элементы фильтров  $D_1, \dots, D_k$  соответственно. Тогда  $A = h(a_1 \cup \dots \cup a_k)$ : если  $D \in h(a_1 \cup \dots \cup a_k)$ , то  $a_i \in D$  для некоторого  $i$  и  $D = D_i$  в силу максимальности  $D_i$ , поэтому  $D \in A$ ; обратное включение очевидно.

#### § 4. Кардинальные числа

2. (в) Пусть  $f$  — функция из  $A$  на  $B$ . Тогда любая функция  $g: B \rightarrow A$  такая, что  $g(b) \in f^{-1}(\{b\})$  для  $b \in B$ , есть 1-1-функция.

3. Пусть  $f$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $A_2$ . Положим  $B_0 = A$ ,  $B_1 = A_1$ ,  $B_{n+2} = f(B_n)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Тогда

$$B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots,$$

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{i \in \mathcal{N}} (B_i \setminus B_{i+1}) \cup \bigcap_{i \in \mathcal{N}} B_i = \\ &= \bigcup_{i \in \mathcal{N}} (B_{2i} \setminus B_{2i+1}) \cup \bigcup_{i \in \mathcal{N}} (B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}) \cup \bigcap_{i \in \mathcal{N}} B_i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_i &= \bigcup_{i \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} (B_i \setminus B_{i+1}) \cup \bigcap_{i \in \mathcal{N}} B_i = \\ &= \bigcup_{i \in \mathcal{N}} (B_{2i+2} \setminus B_{2i+3}) \cup \bigcup_{i \in \mathcal{N}} (B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}) \cup \bigcap_{i \in \mathcal{N}} B_i. \end{aligned}$$

Имеем  $f(B_{2i} \setminus B_{2i+1}) = B_{2i+2} \setminus B_{2i+3}$ , т. е.  $(B_{2i} \setminus B_{2i+1}) \sim (B_{2i+2} \setminus B_{2i+3})$ . Так как все множества  $B_i \setminus B_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) и  $\bigcap_{i \in \mathcal{N}} B_i$  попарно не пересекаются, то  $A \sim A_1$  (см. задачу 24 (в) из § 2).

4. Имеем  $f(A) \subseteq B$ ,  $g(B) \subseteq A$ , где  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow A$  являются 1-1-функциями. Тогда  $f(g(B)) \subseteq f(A) \subseteq B$  и  $f(A) \sim B$  (см. задачу 3).

6. (а) Пусть  $f(A) \subset A$ , где  $f$  есть 1-1-функция  $a \in A \setminus f(a)$ . Положим  $a_0 = a$ ,  $a_{i+1} = f(a_i)$  при  $i \geq 0$ . Тогда  $a_{i+1} \in f(\dots(f(A))\dots)$  ( $i$  раз), но  $a_{i+1} \notin f(f(\dots(f(A))\dots))$  ( $i+1$  раз), поэтому  $a_i \neq a_j$  при  $i \neq j$ . Значит,  $A$  содержит бесконечное подмножество  $\{a_0, a_1, \dots\}$ .

7. Пусть  $A$  бесконечно,  $a_0 \in A$ . Тогда  $A \setminus \{a_0\}$  также бесконечно (см. задачу 5 (б)) и существует  $a_1 \in A \setminus \{a_0\}$ . Далее,  $A \setminus \{a_0, a_1\}$  бесконечно и существует  $a_2 \in A \setminus \{a_0, a_1\}$  и т. д. Положим  $f(0) = a_0$ ,  $f(1) = a_1$ ,  $f(2) = a_2$ , ... Тогда  $f$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{N}$  и  $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$ .

8. Пусть  $A$  бесконечно,  $B = \{b_0, b_1, \dots\}$  — счетное подмножество  $A$ . Тогда  $A = B \cup (A \setminus B) \sim (B \setminus \{b_0\}) \cup (A \setminus B) = A \setminus \{b_0\}$ .

9. Достаточно доказать утверждение для  $\mathcal{N}$ . Пусть  $I \subseteq \mathcal{N}$  и  $I$  бесконечно. Построим  $f: \mathcal{N} \rightarrow I$ . Возьмем в качестве  $f(0)$  наименьший элемент множества  $I$ , в качестве  $f(n+1)$  наименьший элемент множества  $I \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ . Тогда  $f$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{N}$  и  $I$ .

10. (а) Следует из задач 2(в) и 9.

(б) Если  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$  ( $n \geq 0$ ), то следующая функция  $f$  отображает  $\mathcal{N}$  на  $A$ :

$$f(i) = a_i \text{ для } 0 \leq i \leq n, \quad f(i) = a_0 \text{ для } i > n.$$

11. Следует из задач 5 (б) и 9.

12. (а) Пусть  $A = f(\mathcal{N})$ ,  $B = g(\mathcal{N})$  для 1-1-функций  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  и  $g: \mathcal{N} \rightarrow B$ . Положим  $h(2k) = f(k)$ ,  $h(2k+1) = g(k)$  при  $k = 0, 1, \dots$ . Тогда  $h$  отображает  $\mathcal{N}$  на  $A \cup B$ . Так как  $A \cup B$  бесконечно, то  $A \cup B$  счетно (см. задачу 10 (б)).

(б) Пусть  $A_i = \{a_{i1}, \dots, a_{in_i}\}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Полагаем  $f(a_{ij}) = n_0 + \dots + n_{i-1} + j - 1$  для  $i \in \mathcal{N}$ ,  $j \leq n_i$ . Тогда  $f$  есть 1-1-функция из  $\bigcup_{i \in \mathcal{N}} A_i$  на  $\mathcal{N}$ .

(в) Пусть  $A_0 = \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, \dots\}$ ,  $A_1 = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots\}$ ,  $A_2 = \{a_{20}, a_{21}, a_{22}, \dots\}$ , ... Положим  $B_0 = \{a_{00}\}$ ,  $B_1 = \{a_{01}, a_{10}\}$ , ...,  $B_n = \{a_{0n}, a_{1,n-1}, \dots, a_{nn}\}$ . Тогда  $\bigcup_{i \in \mathcal{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} B_i$  не более чем счетно (см. задачу (б)). Тогда  $\overline{\bigcup_{i \in \mathcal{N}} A_i} \geq \overline{A_0} = \aleph_0$ .

13. (а) Пусть  $A_1$  — счетное подмножество  $A$ . Тогда  $A_1 \cup B \sim A_1$  (см. задачи 11 и 12 (а)). Поэтому  $A \cup B = (A \setminus A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A \setminus A_1) \cup A_1 = A$ .

(б) Следует из (а), так как  $A = (A \setminus B) \cup B$  и  $(A \setminus B)$  бесконечно.

14. Пусть  $A_1 = \{a_0, a_1, \dots\}$ ,  $A_2 = \{b_0, b_1, \dots\}$ . Тогда  $A_1 \times A_2 = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} (A_1 \times \{b_i\})$ ,  $A_1 \times \{b_i\} \sim A_1$ . Поэтому  $A_1 \times A_2$  счетно (см. задачу 12 (в)).

15. (а) Следующая функция  $f$  есть 1-1-функция из  $\mathcal{Z}$  на  $\mathcal{N}$ :

$$f(0) = 0, \quad f(k) = 2k, \quad f(-k) = 2k - 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

(б) Следующая функция  $f$  отображает  $\mathcal{Z}^2$  на  $\mathcal{Q}$ :

$$f(\langle x, y \rangle) = \frac{x}{y} \quad \text{при } y \neq 0, \quad f(\langle x, 0 \rangle) = 0.$$

Поэтому  $\overline{\mathcal{Q}} \leq \overline{\mathcal{Z}^2}$  (см. задачу 2 (в)). Отсюда  $\overline{\mathcal{N}} \leq \overline{\mathcal{Q}} \leq \overline{\mathcal{Z}^2} \leq \overline{\mathcal{N}}$  (см. задачи 15 (а) и 14) и  $\overline{\mathcal{Q}} = \overline{\mathcal{N}}$  (см. задачу 4).

(в) Пусть  $a_1, b_1$  — рациональные числа такие, что  $a < a_1 < b_1 < b$ ,  $f(0) = \frac{a_1 + b_1}{2}$ ,  $f(n+1) = \frac{a_1 + f(n)}{2}$  есть 1-1-функция из  $\mathcal{N}$  в  $[a, b]$ . С другой стороны,  $[a, b] \cap \mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}$ .

(г) Следует из (б) и задачи 14.

16. Следует из задач 12 (в) и 14, так как множество всех конечных последовательностей есть объединение по  $n \in \mathcal{N}$  множеств последовательностей фиксированной длины  $n$ .

17. Следует из задачи 16.

18. Следует из задачи 16, так как многочлен  $a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \dots + a_k x^{n_k} + a_{k+1}$  можно представить как конечную последовательность элементов счетного множества  $\{x, +\} \cup \mathcal{N}$ .

19. Следует из задачи 18, так как множество корней любого многочлена конечно.

20. В интервале  $(a, b)$  можно найти рациональное число  $c$  ( $a < c < b$ ). Поэтому данное множество интервалов эквивалентно подмножеству множества  $\mathcal{Q}$ .

21. Под буквой  $T$  понимаем пару взаимно перпендикулярных отрезков такую, что один из них проходит через середину другого. В точке пересечения отрезков проводим окружность радиусом меньше половины каждого отрезка. Буква  $T$  делит круг на части. В каждой из этих частей существует точка с рациональными координатами. Различным буквам  $T$  соответствуют различные тройки точек.

22. Следует из задачи 20. Любой точке  $x \in A$  сопоставляем интервал  $\left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right)$ .

23. Следует из задачи 20. Каждой точке разрыва  $a$  сопоставляем интервал  $\left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)\right)$ .

24. (а) Следует из задачи 13 (а).

(б) Для  $x \in [0, 1]$  полагаем  $f(x) = a + (b - a)x$ . Тогда  $f$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $[0, 1]$  и  $[a, b]$ .

(в)  $f(x) = \operatorname{tg} x$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\mathcal{Q}$ ,  $[a, b] \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (см. (а) и (б)).

25. Возьмем, например,  $[0, 1]$  и  $[0, 1]^2$ . Пары действительных чисел  $\langle 0, a_0 a_1 \dots; 0, b_0 b_1 \dots \rangle$ , где ни одно из этих чисел не имеет 9 в периоде, сопоставляем число  $0, a_0 b_0 a_1 b_1 \dots$ . Далее используем задачу 4.

26. Рассмотрим две окружности, например, с центрами в начале координат и радиусами  $r$  и  $R$ . Точке  $\langle r \cos \varphi, r \sin \varphi \rangle$  сопоставляем точку  $\langle R \cos \varphi, R \sin \varphi \rangle$ .

27.  $\mathcal{Q}^2 \sim [a, b]^2 \sim [a, b] \sim \mathcal{Q}$  (см. задачи 24 (а) из § 2, 24 (в) и 25).

28. Следует из задачи 24 (в).

29. Пусть  $f$  есть 1-1-функция из  $\mathcal{N}$  на отрезке  $[0, 1]$ . Пусть  $f(n) = 0, a_{n0}a_{n1}\dots a_{nk}\dots$ . Строим действительное число  $\beta$  следующим образом:  $\beta = 0, b_0b_1b_2\dots$ , где

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ii} \neq 1, \\ 2, & \text{если } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Ясно, что для любого  $n$  имеем  $f(n) \neq \beta$ . Получили противоречие.

30. с, так как  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \cup (\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q})$  и  $\mathcal{Q}$  счетно (см. задачи 15(б) и 13(б)).

31. Следует из задач 19 и 13 (б).

32.  $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{N}} [i, i+1] \subset \bigcup_{i \in \mathcal{N}} [i, i+1] \subset \mathcal{Q}$ .

33. Каждому  $x \in \mathcal{Q}$  можно сопоставить счетную последовательность рациональных чисел, сходящуюся к  $x$ , и, так как  $\mathcal{Q} \sim \mathcal{N}$ , последовательность натуральных чисел. Поэтому  $\overline{\mathcal{Q}}$  не превосходит мощности множества  $S$  всех таких последовательностей. Обратно, последовательности натуральных чисел  $a_0, a_1, a_2, \dots$  сопоставляем действительное число

$$0, \underbrace{0 \dots 0}_{a_0+1 \text{ раз}} \underbrace{10 \dots 0}_{a_1+1 \text{ раз}} \underbrace{010 \dots 0}_{a_2+1 \text{ раз}} 1 \dots$$

34. (а) Следует из задач 33 и 4, так как множество  $\mathcal{N}^{\mathcal{N}}$  последовательностей натуральных чисел эквивалентно подмножеству множества  $\{0, 1\}^{\mathcal{N}}$ : последовательности натуральных чисел  $a_0, a_1, a_2, \dots$  сопоставляем

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{a_0}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{a_1}, 1, \dots$$

(б) Следует из (а) и задачи 44 из § 2.

35. (а) Следует из задачи 25.

(б)  $A_i \sim \mathcal{N}^{\mathcal{N}}$  для любого  $i \in I$  (см. задачу 33). Поэтому  $\prod_{i \in I} A_i \sim (\mathcal{N}^{\mathcal{N}})^I \sim \mathcal{N}^{\mathcal{N} \times I} \sim \mathcal{N}^{\mathcal{N}}$  (см. задачи 25 (г) и 47 из § 2 и задачу 14).

36. (а) с, так как  $\mathcal{Q}^{\mathcal{N}} \sim (\mathcal{N}^{\mathcal{N}})^{\mathcal{N}}$  (см. далее указание к задаче 35(б)).

(б) с, так как непрерывная функция  $f$  однозначно определяется счетным множеством  $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}$  (которое можно представить в виде счетной последовательности).

(в) с, так как монотонная функция однозначно определяется своими значениями на счетном множестве точек: в точках разрыва (см. задачу 23) и в рациональных точках.

37. Можно. Множество  $B = \{x - y \mid x, y \in A\}$  счетно. Любое  $a \in \mathcal{D} \setminus B$  удовлетворяет условию задачи.

38. Допустим,  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}^{[0, 1]}$  есть 1-1-функция из  $[0, 1]$  на  $\mathcal{D}^{[0, 1]}$ . Положим  $f(x) = (\varphi(x))(x) + 1$  для  $x \in [0, 1]$ . Тогда  $f \in \mathcal{D}^{[0, 1]}$  и  $f = \varphi(x_0)$  для некоторого  $x_0 \in [0, 1]$ . Отсюда  $f(x_0) = (\varphi(x_0))(x_0) + 1$ . Получили противоречие.

40. Пусть  $\varphi$  есть 1-1-функция из  $A$  на  $P(A)$ . Положим  $B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin \varphi(x)\}$ . Тогда  $B = \varphi(x_0)$  для некоторого  $x_0 \in A$ . Имеем  $x_0 \in B \Rightarrow x_0 \notin \varphi(x_0) = B$ ,  $x_0 \notin B \Rightarrow x_0 \notin \varphi(x_0) \Rightarrow x_0 \in B$ , т. е. противоречие. Поэтому такой функции  $\varphi$  не существует.

41. Пусть  $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \sim C \subseteq A_0 \in \mathfrak{A}$  для некоторых  $C$  и  $A_0$ . Тогда существует  $B \in \mathfrak{A}$  такое, что  $B$  не эквивалентно никакому подмножеству множества  $A_0$ . С другой стороны,  $B \subseteq \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ . Получили противоречие.

42. Пусть  $\mathfrak{A}$  есть множество, содержащее все множества. Тогда  $P(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}$ . С другой стороны,  $P(\mathfrak{A}) > \mathfrak{A}$  (см. задачу 40). Получили противоречие.

43. (а) Положим, например,  $b_n = (a_n + 1) \cdot 2^n$ .

(б) Предположим,  $\varphi$  есть 1-1-функция из  $\mathcal{N}$  на  $A$ . Положим

$$b_n = [(\varphi(0))_n + \dots + (\varphi(n))_n + 1] \cdot 2^n.$$

Тогда для любого  $i$  имеем

$$n \geq i \Rightarrow \frac{(\varphi(i))_n}{b_n} \leq \frac{(\varphi(i))_n}{((\varphi(i))_n + 1) \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\varphi(i))_n}{b_n} = 0$  для любого  $i \in \mathcal{N}$ , что противоречит условию.

## § 5. Ординальные числа

4. Пусть  $A = \mathcal{N}$ ,  $B = \mathcal{Z}$  с обычными порядками. Тогда  $\overline{A} = \overline{B}$ , но  $A \neq B$ .

5. В множестве из  $n$  элементов можно выбрать наименьший элемент  $n$  способами, поэтому число  $O_n$  линейных порядков на  $n$  элементах равно  $n \cdot O_{n-1}$ .

6. Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , где  $a_1 < \dots < a_n$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ , где  $b_1 < \dots < b_n$ . Положим  $f(a_i) = b_i$ . Тогда  $f$  — изоморфизм между  $A$  и  $B$ .

7. См. указание к задаче 4.

8. Пусть  $f$  — монотонная 1-1-функция из  $A$  на  $B$ . Тогда  $f^{-1}$  — также монотонное отображение, так как из  $(x, y \in A, \text{ но неверно, что } x \leq y)$  следует, что  $y < x$  и  $f(y) < f(x)$ , т. е. неверно  $f(x) \leq f(y)$ .

11. Пусть  $A$  удовлетворяет условиям (а), (б), (в). Положим  $f(0) = a_0$ ,  $f(n+1) = (f(n))'$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда  $\rho_f = A$  вследствие условия (в). Если  $n, m \in \mathcal{N}$  и  $n < m$ , то  $f(n) < (f(n))' \leq f(m)$  вследствие условия (б), поэтому  $f$  — монотонная 1-1-функция из  $\mathcal{N}$  на  $A$ .

12. Пусть  $A$  бесконечно и  $A_a$  конечно для любого  $a \in A$ . Положим  $f(a) = \overline{A}$ . Тогда  $f$  есть изоморфизм  $A$  на  $\mathcal{N}$ .

13. Пусть  $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  удовлетворяет условиям (а) и (б),  $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ . Построим  $f: A \rightarrow \mathcal{Q}$  и  $g: \mathcal{Q} \rightarrow A$ . Положим  $f(a_0) = q_0$ ,  $g(q_0) = a_0$ . Пусть  $f(a_0), \dots, f(a_n)$  и  $g(q_0), \dots, g(q_n)$  уже построены. Если  $a_{n+1} = g(q_i)$  для некоторого  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ ), то положим  $f(a_{n+1}) = q_i$ . Если  $a_{n+1} \notin \{g(q_0), \dots, g(q_n)\}$ , то возьмем в качестве  $f(a_{n+1})$  первое  $q_j \notin \{f(a_0), \dots, f(a_n), q_0, \dots, q_n\}$ , расположенное относительно  $f(a_0), \dots, f(a_n), q_0, \dots, q_n$  так же, как  $a_{n+1}$  расположено относительно  $a_0, \dots, a_n, g(q_0), \dots, g(q_n)$ . Далее, если  $q_{n+1} = f(a_i)$  для некоторого  $i$  ( $0 \leq i \leq n+1$ ), то полагаем  $g(q_{n+1}) = a_i$ . Если  $q_{n+1} \notin \{f(a_0), \dots, f(a_{n+1})\}$ , то возьмем в качестве  $g(q_{n+1})$  первое  $a_j \notin \{a_0, \dots, a_{n+1}, g(q_0), \dots, g(q_n)\}$ , расположенное относительно множества  $\{a_0, \dots, a_{n+1}, g(q_0), \dots, g(q_n)\}$  так же, как  $q_{n+1}$  расположено относительно множества  $\{f(a_0), \dots, f(a_{n+1}), q_0, \dots, q_n\}$ . Остается доказать, что  $f$  есть изоморфизм  $A$  на  $\mathcal{Q}$ .

14. Пусть  $A = \{a_0, a_1, \dots\}$  — счетное линейно упорядоченное множество. Построим изоморфизм  $f$  из  $A$  в  $\mathcal{Q}$ . Полагаем  $f(a_0) = 0$ . Далее, пусть  $f(a_0), \dots, f(a_n)$  построены. Если  $a_{i_0} < a_{i_1} < \dots < a_{i_{k-1}} < a_{n+1} < a_{i_k} < \dots < a_{i_n}$  (где  $i_j \leq n$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ ), то выбираем  $q_{n+1} \in \mathcal{Q}$  такое, что  $f(a_{i_{k-1}}) < q_{n+1} < f(a_{i_k})$ . Если  $a_{n+1}$  меньше всех  $a_1, \dots, a_n$ , то выбираем  $q_{n+1} \in \mathcal{Q}$  такое, что  $q_{n+1} < f(a_0), \dots, q_{n+1} < f(a_n)$ , а если  $a_{n+1}$  больше всех  $a_1, \dots, a_n$ , то выбираем  $q_{n+1} \in \mathcal{Q}$  такое, что  $q_{n+1} > f(a_0), \dots, q_{n+1} > f(a_n)$ . Полагаем  $f(a_{n+1}) = q_{n+1}$ .

15. (б) Пусть  $a, b \in A$ ,  $a < b$ . Возьмем множество  $C \subseteq B$  всех таких последовательностей  $\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} \rangle$  ( $n \geq 0$ ), что  $x_i \in \{a, b\}$  для  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_{n+1} = x_{n+3} = b$ ,  $x_{n+2} = a$  и не существует  $i \leq n$  такого, что  $x_i = x_{i+2} = b$ ,  $x_{i+1} = a$ . Тогда  $C$  имеет порядковый тип  $\eta$  (см. задачу 13); утверждение следует из задачи 14.

16. См. указания к задаче 24 из § 4.

17. Рассмотрим случай, когда  $A$  не содержит наибольшего и наименьшего элементов. Остальные случаи рассматриваются подобным образом. Пусть  $B$  — счетное плотное в  $A$  подмножество. Ввиду задачи 13 существует изоморфизм  $h$  из  $B$  на  $\mathcal{Q}$ . Возьмем  $a \in A$ . Существуют  $a_1, a_2 \in A$  такие, что  $a_1 < a < a_2$ . Тогда существуют  $b_0, b \in B$  такие, что  $a_1 < b_0 < a < b < a_2$ . Далее строим последовательность  $b_0, b_1, b_2, \dots$  элементов из  $B$  такую, что  $a_1 < b_0 < b_1 < b_2 < \dots < a < b$ . Последовательность  $h(b_0), h(b_1), h(b_2), \dots$  является монотонной и ограничена числом  $h(b)$ , поэтому она имеет пределом действительное число  $\alpha$ . Положим  $f(a) = \alpha$ . Тогда  $f$  есть изоморфизм из  $A$  в  $\mathcal{Q}$ .

20. (а) Проверить, что если  $A$  и  $B$  — линейно упорядоченные непересекающиеся множества, то отношение  $\leq$ , данное в определении суммы порядковых типов, линейно упорядочивает  $A \cup B$  и  $\overline{A_1} = \overline{A}$ ,  $\overline{B_1} = \overline{B}$ ,  $A_1 \cap B_1 = \emptyset \Rightarrow \overline{A_1} + \overline{B_1} = \overline{A} + \overline{B}$ . Аналогично для  $\overline{A \cdot B}$ .

21. См., например, задачу 22 (г).

22. (г) Множество, упорядоченное по типу  $\omega + 1$ , имеет наибольший элемент в отличие от множества порядкового типа  $\omega$ .

(е) Пусть  $A = \{x \mid x \in \mathcal{Q} \text{ и } x < \sqrt{2}\}$ ,  $B = \{x \mid x \in \mathcal{Q} \text{ и } x > \sqrt{2}\}$ . Тогда  $\overline{A} = \overline{B} = \eta$  и  $\overline{A} + \overline{B} = \eta$ .



(ж) Пусть  $A = \{x \mid x \in \mathcal{Q} \text{ и } x < 0\}$ ,  $B = \{0\}$ ,  $C = \{x \mid x \in \mathcal{Q} \text{ и } x > 0\}$ . Тогда  $\overline{A} = \overline{C} = \lambda$  и  $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \lambda$ .

(з) Пусть  $\overline{A} + \overline{B} = \lambda$ . Тогда  $A \simeq A_1 \subseteq \mathcal{Q}$ ,  $B \simeq B_1 \subseteq \mathcal{Q}$ ,  $A_1 \cup B_1 = \mathcal{Q}$ ,  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$  и  $a < b$  для  $a \in A$  и  $b \in B$ . Поэтому существует в  $A_1$  точная верхняя грань  $a_1$  или в  $B_1$  точная нижняя грань  $b_1$ . Тогда  $\overline{A_1} = \lambda + 1 \neq \lambda$  или  $\overline{B_1} = 1 + \lambda \neq \lambda$ .

23. Например,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = \omega$ .

24. (д) Множество порядкового типа  $\eta^2$  удовлетворяет условиям задачи 13 (е). В множестве  $A$  порядкового типа  $\omega\eta$  порядковый тип множества элементов, не являющихся непосредственно следующими за какими-либо элементами из  $A$ , равен  $\eta$ . Для множества  $B$  порядкового типа  $\omega(\eta + 1)$  порядковый тип аналогичного множества равен  $\eta + 1$ .

26. (б) Например,  $\alpha = \omega^*$ ,  $\beta = \omega$ ,  $\gamma = 2$ .

28. Пусть  $\overline{A} = \alpha$ ,  $\overline{B} = \beta$ ,  $\{A_b \mid b \in B\}$  — семейство попарно непересекающихся множеств, упорядоченных по типу  $\alpha$ ,  $\varphi_b$  — изоморфизмы  $A$  на  $A_b$ . Тогда следующая функция  $f$  есть изоморфизм из  $A \cdot B$  на  $\bigcup_{b \in B} A_b$ :  $f(\langle a, b \rangle) = \varphi_b(a)$ .

31. (а) Нет. (б) Нет. (в) Нет. (г) Да.

34. Пусть  $a \in A$  не является наибольшим элементом  $A$ . Тогда множество  $\{x \mid x \in A, x > a\}$  имеет наименьший элемент.

35. Нельзя, так как эта цепь не содержит наименьшего элемента.

36. Любое не вполне упорядоченное множество содержит бесконечно убывающую цепь.

37. В противном случае получаем  $f(f(a)) < f(a)$ ,  $f(f(f(a))) < f(f(a))$  и т. д.

38. Следует из задачи 37.

39. Следует из задач 9 (г) и 38.

40. Пусть  $f_1$  и  $f_2$  — два изоморфизма из  $A$  на  $B$ ,  $f_1(a) < f_2(a) = b$  для некоторого  $a \in A$ . Тогда  $f_2^{-1} \cdot f_1$  есть изоморфизм  $B$  в  $B$  и  $(f_2^{-1} \cdot f_1)(b) < b$ . Получили противоречие (см. задачу 37).

41. Пусть  $A$  и  $B$  вполне упорядочены,  $S = \{a \mid a \in A, A_a \simeq A_b \text{ для некоторого } b \in B\}$ . Тогда  $S = A$  или  $S = A_{a_0}$  для некоторого

$a_0 \in A$ ,  $S \simeq B$  или  $S \simeq B_{b_0}$  для некоторого  $b_0 \in B$ . Если  $S = A$ ,  $S \simeq B$  или  $S = A$ ,  $S \simeq B_{b_0}$  или  $S = A_{a_0}$ ,  $S \simeq B$ , то утверждение доказано. Случай  $S = A_{a_0}$ ,  $S = B_{b_0}$  невозможен, так как тогда  $A_{a_0} \simeq B_{b_0}$  и  $a_0 \in S = A_{a_0}$ .

42. Пусть  $A$ —бесконечное множество, вполне упорядоченное относительно заданного и двойственного порядков,  $a_0 \in A$ . Тогда  $B_0 = \{x \mid x < a_0\}$  или  $B_1 = \{x \mid x > a_0\}$  бесконечно. Пусть  $B_0$  бесконечно. Тогда  $B_0$  имеет наибольший элемент  $b_1$ , далее  $B_0 \setminus \{b_1\}$  имеет наибольший элемент  $b_2$  и т. д. Получаем  $b_0 > b_1 > b_2 > \dots$ , что противоречит полной упорядоченности  $B$  относительно  $\leq$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $B_1$  бесконечно.

43. Предположим, что  $B \neq A_x$ . Тогда  $A \setminus B$  непусто и имеет наименьший элемент  $x$ . Получаем  $A_x \subseteq B$  и  $x \notin B$ . Приходим к противоречию.

44. (а) Следует из задачи 41. (б) Следует из задачи 38.

45.  $f(\beta) = W_\beta$  для  $\beta < \alpha$  есть изоморфизм из  $W_\alpha$  на множество  $\{W_\beta \mid \beta < \alpha\}$ , упорядоченное отношением включения. См. далее задачу 10.

46. Пусть  $M$ —множество порядковых чисел,  $M_1$ —непустое подмножество  $M$ ,  $\alpha \in M_1$ . Тогда  $W_\alpha$  вполне упорядочено (см. задачу 45). Если  $M_1 \cap W_\alpha = \emptyset$ , то  $\alpha$  есть наименьший элемент в  $M_1$ . Если  $M_1 \cap W_\alpha \neq \emptyset$ , то  $M_1 \cap W_\alpha \subseteq W_\alpha$  имеет наименьший элемент  $\beta$ , который является наименьшим в  $M_1$ .

47. (а) Пусть  $A = \bigcup_{\alpha \in S} W_\alpha$ . Тогда  $A$  вполне упорядочено (см. задачу 46). Тогда  $\beta = \overline{A}$  есть искомое порядковое число (см. задачи 45, 38).

(б) Существует  $\beta \notin S$  (из (а)). Тогда  $W_\beta \setminus S$  вполне упорядоченно и содержит наименьший элемент  $\gamma$ , который и будет искомым.

48. Следует из задачи 47 (а).

49. Имеем  $\alpha + 1 > \alpha$ . Пусть  $\alpha < \beta$ . Тогда  $W_\alpha \subset W_\beta$  (см. задачу 45),  $W_\alpha \cup \{\alpha\}$  есть начальный отрезок  $W_\beta$  или  $W_\alpha \cup \{\alpha\} = W_\beta$ ,  $\overline{W_\alpha \cup \{\alpha\}} = \alpha + 1 \leq \overline{W_\beta} = \beta$ .

50. Пусть  $\alpha \neq 0$  и  $\alpha$  не является предельным, т. е.  $\alpha \neq \sup \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ . Тогда существует  $\gamma$  такое, что  $\beta \leq \gamma$  для всех  $\beta < \alpha$ , и неверно, что  $\alpha \leq \gamma$ . Поэтому  $\gamma < \alpha$  и  $\gamma$  есть наибольшее в  $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ .

51. Пусть  $\beta$  — порядковое число. Множество  $\{\alpha \mid \alpha \leq \beta, W_\beta \setminus W_\alpha \text{ конечно}\}$  имеет наименьший элемент  $\gamma$ . Тогда  $\gamma = 0$  или  $\gamma$  есть предельное порядковое число,  $\beta = \gamma + n$ , где  $n = \overline{W_\beta \setminus W_\gamma}$ .

53.  $A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A'_i$ , поэтому  $A_i$  вполне упорядочено.  $I \simeq B \subseteq \bigcup_{i \in I} A'_i$ , где  $B = \{\alpha_i \mid \alpha_i \text{ есть наименьший элемент в } A'_i\}$ .

54. Пусть  $\alpha = \bar{A}$ ,  $\beta = \bar{B}$ ,  $\gamma = \bar{C}$ ,  $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ .

(а) Если  $\bar{B} < \bar{A}$ , то  $B$  подобно начальному отрезку множества  $A \subseteq B$ , что противоречит задаче 38.

(б) Следует из (а).

(в) Если  $A \simeq B_a$  для некоторого  $a \in B$ , то  $C \cup A \simeq C \cup B_a$ . Обратно, пусть  $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$  и  $\alpha \geq \beta$ . Тогда по уже доказанному  $\gamma + \alpha \geq \gamma + \beta$ . Получили противоречие. Поэтому  $\alpha < \beta$ .

(г) Следует из (а).

(д) Следует из (в).

(е) Следует из (г).

55. Например,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = \omega$ .

56. Пусть  $\alpha = \bar{A}$ ,  $\beta = \bar{B}$ ,  $\gamma = \bar{C}$ .

(а) Следует из задачи 54 (а).

(б) Пусть  $A = B_a$  для некоторого  $a \in B$ . Тогда  $C \times A = (C \times B)_{(c, a)}$ , где  $c$  — наименьший элемент  $C$ .

(в), (г) Следуют из (б).

(д) Следует из (а).

57. (а) Пусть  $\alpha = \bar{A}$ ,  $\beta = \bar{B}$ . Если  $\alpha = \beta$ , то  $\alpha - \beta = 0$ . Если  $\beta < \alpha$ , то  $B \simeq A_a$  для  $a \in A$ ;  $\beta + A \setminus A_a = A_a \cup (A \setminus A_a) = A = \alpha$ ,  $\alpha - \beta = \overline{A \setminus A_a}$ ,  $\beta + \gamma_1 = \beta + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$  (см. задачу 54 (д)).

(б)  $\alpha - \gamma \leq \beta - \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma + (\alpha - \gamma) \leq \gamma + (\beta - \gamma) = \beta$  (см. задачу 54 (в)).

(в)  $\alpha - \gamma < \alpha - \beta \Rightarrow \alpha = \gamma + (\alpha - \gamma) < \beta + (\alpha - \beta) = \alpha$  (см. задачу 54 (в), (г)).

(г)  $\gamma\alpha = \gamma(\beta + (\alpha - \beta)) = \gamma\beta + \gamma(\alpha - \beta)$  (см. задачу 26 (а)), поэтому  $\gamma(\alpha - \beta) = \gamma\alpha - \gamma\beta$ .

58. (а)  $\alpha_2 < \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 = (\alpha_1 + \beta_1) - \alpha_1 \leq (\alpha_2 + \beta_2) - \alpha_2 = \beta_2$  (см. задачу 57 (в)).

(б) Пусть  $\alpha = \overline{A}$ ,  $\beta = \overline{B}$ . Тогда  $\gamma = \overline{(A \times B)_{(a, b)}}$  для некоторых  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Полагаем  $\delta = \overline{A_a}$ ,  $\varepsilon = \overline{B_b}$ . Имеем  $\gamma = \alpha\varepsilon + \delta$ , так как  $(A \times B)_{(a, b)} = (A \times B_b) \cup (A_a \times \{b\})$ . Пусть  $\gamma = \alpha\varepsilon_1 + \delta_1 = \alpha\varepsilon_2 + \delta_2$ ,  $\delta_1, \delta_2 < \alpha$ . Если  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , то  $\alpha\varepsilon_1 < \alpha\varepsilon_2$  (см. задачу 56 (б)). Если  $\delta_2 < \delta_1$ , то тоже  $\alpha\varepsilon_1 < \alpha\varepsilon_2$  по (а). Тогда  $\alpha\varepsilon_1 + \delta_1 < \alpha\varepsilon_1 + \alpha = \alpha(\varepsilon_1 + 1) \leq \alpha\varepsilon_2 \leq \alpha\varepsilon_2 + \delta_2$  (см. задачи 54 (б), (в), 26 (а), 49, 56 (а), (в)). Получили притворение. Поэтому  $\varepsilon$  и  $\delta$  определены однозначно.

(в)  $\alpha = 1 \cdot \alpha < \beta \cdot (\alpha + 1)$  (см. задачу 56 (б)). Утверждение следует из (б).

59. Из задачи 58 следует, что  $\alpha_0 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2$  для некоторых  $\alpha_2 < \alpha_1$  и  $\beta_1$ . Далее  $\alpha_1 = \alpha_2\beta_2 + \alpha_3$ ,  $\alpha_3 < \alpha_2$  и т. д. Получаем последовательность  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$ . Поэтому  $\alpha_{n+1} = 0$  для некоторого  $n \geq 1$  (см. задачу 46).

60. Пусть  $\gamma$  не обладает свойством  $P$ . Тогда существует наименьшее ординальное число  $\alpha \leq \gamma$ , не обладающее свойством  $P$ . Все ординальные числа  $\beta < \alpha$  обладают свойством  $P$ . Получили противоречие.

61. Пусть  $\alpha$  — порядковое число. Возьмем следующее свойство  $P$ :  $\beta$  есть такое ординальное число, что  $\alpha^\beta$  существует и однозначно определено. Это свойство удовлетворяет условиям задачи 60.

62. Например, множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел таких, что лишь конечное число членов последовательности отлично от 0, упорядоченное так:

$a_0, \dots, a_n, \dots <_f b_0, \dots, b_n, \dots \Leftrightarrow$  существует  $n \geq 0$  такое, что  $a_n < b_n$  и  $a_k = b_k$  при  $k > n$ .

63. Доказательства используют принцип трансфинитной индукции (см. задачу 60).

(а)  $\gamma > 1$  и  $\alpha$  фиксированы.  $P(\beta)$  есть следующее свойство: если  $\beta > \alpha$ , то  $\gamma^\beta > \gamma^\alpha$ .

(б)  $\alpha$  и  $\beta$  фиксированы.  $P(\gamma)$  есть свойство  $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ .

(в)  $\alpha$  и  $\beta$  фиксированы.  $P(\gamma)$  есть свойство  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$ .

64. (а) Рассмотрим случай, когда  $\gamma = \delta + 1$  и  $\alpha \neq 0$ . Имеем  $\beta = \omega^\gamma - \alpha$  и  $\alpha < \omega^\gamma$ . Представим  $\alpha$  в виде  $\alpha = \omega^\delta \cdot \varepsilon + \tau$ , где  $\tau < \omega^\delta$  (см. задачу 58 (в)). Тогда  $\varepsilon < \omega$  и  $\omega^{\delta+1} = \omega^\delta(\omega - (\varepsilon + 1)) = \omega^\gamma - \omega^\delta(\varepsilon + 1) \leq \beta$ . Случай, когда  $\gamma$  предельное, следует из уже доказанного.

(б) Трансфинитная индукция по  $\beta$ .

(в) Пусть  $\varepsilon$  — наименьшее такое  $\tau$ , что  $\beta < \alpha^\tau$ . Тогда  $\varepsilon > 0$  и не является предельным, т. е.  $\varepsilon = \xi + 1$ . Далее применяем задачу 58 (в).

(г) Последовательно применяем (в). Процесс обрывается, так как всякое множество порядковых чисел вполне упорядоченно.

65. Полагаем  $\mathfrak{A}_0 = \emptyset$ ,  $\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}_\alpha \cup \{\mathfrak{A}_\alpha\}$ ,  $\mathfrak{A}_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} \mathfrak{A}_\gamma$  для предельного  $\beta$ .

Для доказательства транзитивности  $\mathfrak{A}_\alpha$ , того, что  $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha = \alpha$ , и единственности  $\mathfrak{A}_\alpha$ , используется принцип трансфинитной индукции (см. задачу 60).

66. (2)  $\Rightarrow$  (1). Пусть

$$S = \{\varphi \mid \varphi: A_1 \rightarrow \bigcup_{a \in A_1} X_a, \text{ где } A_1 \subseteq A, \varphi(a) \in X_a\}.$$

Тогда  $S$  непусто и частично упорядочено по включению.  $S$  удовлетворяет условиям леммы Цорна. Максимальный элемент в  $S$  есть искомая функция выбора.

(1)  $\Rightarrow$  (4). Пусть  $\mathfrak{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ ,  $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  есть функция выбора. Тогда  $C = \{f(i) \mid i \in I\}$  — требуемое множество.

(4)  $\Rightarrow$  (1). Возьмем  $\mathfrak{A} = \{\{X_a\} \times X_a \mid a \in A\}$ . Тогда

$$(\{X_a\} \times X_a) \cap (\{X_b\} \times X_b) = \emptyset \text{ для } a \neq b.$$

Пусть  $C$  таково, что  $(\{X_a\} \times X_a) \cap C$  состоит ровно из одной точки  $c_a$ . Тогда  $c_a = \langle X_a, d_a \rangle$  для некоторого  $d_a \in X_a$ ,  $f = \{c_a \mid a \in A\}$  есть требуемая функция выбора.

(1)  $\Rightarrow$  (5). Пусть  $M$  — произвольное множество,  $f$  — функция выбора на  $P(M) \setminus \{\emptyset\}$ . Рассмотрим семейство  $S$  таких  $A \subseteq M$ ,  $A \neq \emptyset$ , что  $A$  может быть вполне упорядоченно так, что  $\alpha \in f(M \setminus A_\alpha)$  для любого  $a \in A$ . Тогда  $S$  непусто, так как  $\{f(M)\} \in S$ . Пусть  $A$  и  $B$  — множества из  $S$  с указанными полными порядками. Тогда  $A = B$  или одно из них является отрезком другого. Поэтому объединение  $L$  всех множеств из  $S$  само принадлежит  $S$ . Если  $L \neq M$ , то  $L \cup \{f(M \setminus L)\} \in S$ . Отсюда  $L = M$ .

(5)  $\Rightarrow$  (3). Пусть  $L$  есть цепь в множестве  $M$ , частично упорядоченном отношением  $\leq$ . Если  $L = M$ , то  $L$  максимальна. Если  $L \neq M$ , то вполне упорядочим множество  $A = M \setminus L$  отношением  $\leq_1$ . Любому  $a \in A$  сопоставим теперь некоторое множество  $L_a \supseteq L$ . Если всем  $b <_1 a$  уже сопоставлены  $L_b$ , то полагаем  $L_a = \bigcup_{b <_1 a} L_b \cup \{a\}$ , если  $a$

сравним по  $\leq$  со всеми элементами из  $\bigcup_{b <_1 a} L_b$ , и  $L_a = \bigcup_{b <_1 a} L_b$  в противном случае.  $\bigcup_{a \in A} L_a$  есть максимальная цепь, содержащая  $L$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $M$  удовлетворяет условиям леммы Цорна,  $a \in M$ . Тогда  $\{a\}$  содержится в максимальной цепи  $L$ . Верхняя грань  $s$  цепи  $L$  является максимальным элементом в  $M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (6). Пусть  $\mathfrak{A}$  — семейство множеств, имеющее конечный характер. Отношение  $\subseteq$  является частичным порядком. Выберем в  $\mathfrak{A}$  некоторое линейно упорядоченное подсемейство  $\mathfrak{B} = \{A_i\}_{i \in I}$ . Рассмотрим  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Пусть  $C$  — конечное подмножество  $A$ . Тогда  $C$  является подмножеством  $A_i$  для некоторого  $i \in I$ , поэтому  $C \in \mathfrak{A}$ . Значит,  $A \in \mathfrak{A}$ . Множество  $A$  является верхней гранью семейства  $\mathfrak{B}$ . По лемме Цорна  $\mathfrak{B}$  содержит максимальный элемент.

(6)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $A$  удовлетворяет условиям леммы Цорна. Семейство  $\mathfrak{A}$  всех цепей множества  $A$  имеет конечный характер и, следовательно, в  $A$  существует максимальная цепь. Верхняя грань этой цепи будет максимальным элементом в  $A$ .

67. Применить лемму Цорна (задача 66 (2)) к множеству  $B = \{x \mid x \geq a\}$ .

68. Следует из задачи 66 (2).

69. Пусть  $S$  есть семейство частичных порядков  $Q$  на  $A$  таких, что  $Q \supseteq R$ . Тогда  $S$  непусто, частично упорядочено включением и удовлетворяет условиям леммы Цорна (задача 66 (2)). Максимальный элемент  $L$  в  $S$  есть требуемый линейный порядок.

## § 6. Действия над кардинальными числами

1. Пусть  $m = \overline{A}$ ,  $n = \overline{B}$ . Множества  $A$  и  $B$  можно вполне упорядочить (см. задачу 66 (5) из § 5). Но тогда одно из этих множеств подобно другому или его отрезку (см. задачу 41 из § 5), т. е.  $m \leq n$  или  $n \leq m$ . Использовать также задачу 4 из § 4.

2. Следует из задачи 1.

3. Следует из задачи 40 из § 4.

4. (б), (в), (г) Следуют из задачи 13 (а) из § 4. (д) Следует из задачи 32 из § 4.

5. (а)  $B_1 = A_1 \times \{0\}$ ,  $B_2 = A_2 \times \{1\}$ .

7. (в), (г) Доказываются индукцией по  $n$ .

8. (б) Например,  $n = m = \aleph_0$ , так как  $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ .

9. Пусть  $\overline{A} = \mathfrak{n}$ ,  $\overline{B} = \mathfrak{m}$  и  $A \subseteq B$ . Тогда положим  $\mathfrak{n}_1 = \overline{B \setminus A}$ . Например,  $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2$ .

10. (б) Следует из задачи 14 из § 4.

(в) Ясно, что  $\mathcal{N} \times \mathcal{D} = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} (\{i\} \times \mathcal{D})$  и  $\{i\} \times \mathcal{D} \sim \mathcal{D}$ . Результат

следует из задачи 32 из § 4.

(г) Следует из задачи 34 (а) из § 4.

12. (е), (ж) Пусть  $\overline{A} = \mathfrak{n}$ .  $A$  можно вполне упорядочить (см. задачу 66 (5) из § 5). Пусть  $\overline{A} = \alpha$ . Тогда  $\alpha = \omega \cdot \beta + \gamma$  для некоторых порядковых чисел  $\gamma < \omega$  и  $\beta$  (см. задачу 58 (в) из § 5). Отсюда имеем  $\mathfrak{n} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$ , где  $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$  — мощности множеств порядковых типов  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно,  $\mathfrak{n} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{n}_1$ , так как  $\mathfrak{n}_2$  конечно. Имеем  $\aleph_0 \cdot \mathfrak{n} = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \mathfrak{n}_1 = \aleph_0 \cdot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$  (см. задачу 10 (б)),  $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} \leq \aleph_0 \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ .

13. Пусть  $\overline{A} = \mathfrak{n}$ . Положим  $M = \{\varphi \mid \varphi \text{ есть 1-1-функция из } B \times B \text{ на } B \text{ для некоторого бесконечного } B \subseteq A\}$ .  $M$  непусто (см. задачи 8 из § 4 и 10 (б)), частично упорядочено включением и удовлетворяет условиям леммы Цорна (см. задачу 66 (2) из § 5). Поэтому  $M$  имеет максимальный элемент  $\varphi_0: B_0 \times B_0 \rightarrow B_0$ . Если  $\overline{B_0} = \mathfrak{n}$ , то  $\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}$ .

Пусть  $\mathfrak{m} = \overline{B_0} < \mathfrak{n}$ . Тогда  $\overline{A \setminus B_0} > \mathfrak{m}$  (см. задачу 12 (е)), т. е.  $A \setminus B_0 \supseteq B_1$  для некоторого  $B_1$  мощности  $\mathfrak{m}$ . Имеем

$$(B_0 \cup B_1) \times (B_0 \cup B_1) = (B_0 \times B_0) \cup (B_1 \times B_0) \cup (B_0 \times B_1) \cup (B_1 \times B_1),$$

$$\overline{B} = \overline{(B_1 \times B_0) \cup (B_0 \times B_1) \cup (B_1 \times B_1)} = \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m},$$

так как  $\mathfrak{m}^2 = \overline{B_0 \times B_0} = \overline{B_0} = \mathfrak{m}$ . Существует 1-1-функция  $f$  из  $B$  на  $B_1$ . Положим  $\psi(\langle a, b \rangle) = \varphi_0(\langle a, b \rangle)$ , если  $a, b \in B_0$ , и  $\psi(\langle a, b \rangle) = f(\langle a, b \rangle)$ , если  $\langle a, b \rangle \in B$ . Имеем  $\psi \in M$  и  $\psi \supset \varphi_0$ , что противоречит максимальнойности  $\varphi_0$ .

14. Пусть  $2 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$  и  $\mathfrak{n}$  бесконечно. Тогда  $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{n} + \mathfrak{m} \leq \mathfrak{n} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot 2 \leq \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} \leq \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ .

15. (а) Следует из задачи 34 (а) из § 4.

(б) Следует из задачи 33 из § 4.

(в) Следует из задачи 36 (а) из § 4.

17. Следует из задачи 25 из § 2.

18. Следует из задачи 44 из § 2.

19. Пусть  $\bar{A} = m$ ,  $\bar{B} = n$  и  $\bar{C} = p$ , и пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  попарно не пересекаются.

(а) Если  $f$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $B_1 \subseteq B$ , а  $g$  — между  $B$  и  $C_1 \subseteq C$ , то  $f \cdot g$  осуществляет требуемое соответствие между  $A$  и  $C_2 \subseteq C$ .

(е)  $m \leq n \Rightarrow m + n \leq n + n = 2 \cdot n \leq m \cdot n$ .

(ж) Если  $n$  конечное, то оба равенства выполняются только при  $m = 0$ . Пусть  $n$  бесконечное. Если  $m + n = n$ , то  $\aleph_0 \cdot m + \aleph_0 \cdot n = \aleph_0 \cdot n$ . Отсюда  $\aleph_0 \cdot m + n = n$  (см. задачу 14). Итак,  $\aleph_0 \cdot m \leq n$ . Если  $\aleph_0 \cdot m \leq n$ , то  $m \leq \aleph_0 \cdot m \leq n$ . Значит,  $m \leq n$ . Итак,  $m + n = n$  (опять см. задачу 14).

(з) Если  $n \leq n_1$ , то существует  $p$  такое, что  $n + p = n_1$  (см. задачу 9). Тогда  $n_1 + m = n + p + m = p + n = n_1$ .

(и) Если  $m$  бесконечное, то доказывать нечего, так как  $k \cdot m = m$  (см. задачу 14). Если  $m$  конечное, а  $n$  бесконечное, то  $n \geq k \cdot m$  и  $n + k \cdot m = n + m = n$  (опять см. задачу 14). Если  $m$  конечное и  $n$  конечное, то оба равенства выполняются только при  $m = 0$ .

(к) Аналогично (и).

(л) Следует из задачи 18 и задачи 40 из § 4.

20. (а) Если  $2^m \geq \aleph_0$ , то  $m \geq \aleph_0$ , и результат следует из задачи 19(д).

(б) Если  $m^n = \aleph_0$ , то  $2 \leq m \leq \aleph_0$ . Тогда  $2^n \leq m^n = \aleph_0$ . Значит,  $n$  конечное, так как  $2^{\aleph_0} = c$ . Если  $m$  конечное, то  $m^n$  конечное. Значит,  $m = \aleph_0$ .

21. (а) Докажем, что  $n^n \leq 2^n$ . Пусть  $\bar{A} = n$ . По определению  $f \subseteq A \times A$  для любой  $f \in A^A$ . Итак,  $n^n \leq 2^{n \cdot n} = 2^n$  (см. задачу 13).

(б) Следует из (а).

22. (а) Пусть  $A_i \sim A$  для всех  $i \in I$ , где  $\bar{A} = n$ ,  $\bar{I} = m$ , а  $A_i$  для всех  $i \in I$  попарно не пересекаются. Обозначим через  $a_i$  элемент из  $A_i$ , соответствующий элементу  $a$  из  $A$ . Пары  $\langle i, a \rangle$ , где  $i \in I$  и  $a \in A$ , ставим в соответствие элемент  $a_i$  из  $A_i$ . Таким образом,  $I \times A \sim \bigcup_{i \in I} A_i$ .

(б) Если  $m$  и  $n$  конечные, то, очевидно,  $m = n$ . Если  $m$  и  $n$  бесконечные, то  $m = m + p = n + p = n$  (см. задачу 14). Другие случаи невозможны.

(в) Аналогично (б).

25. Следует из задачи 25 (е) из § 2.

26. Следует из задачи 25 (ж) из § 2.

27. Следует из задачи 46 из § 2.



28. Пусть  $\{A_i\}_{i \in I}$ ,  $\{B_i\}_{i \in I}$  — системы попарно непересекающихся множеств таких, что  $\overline{A} = m$ ,  $\overline{B} = n$ . Пусть  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  — система функций таких, что  $\varphi_i$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $A_i$  и  $C_i \subseteq B_i$ .

(а) Определим  $F: \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$  так:  $F(a) = \varphi_i(a)$ , если  $a \in A_i$ .

(б) Определим  $F: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$  так:  $(F(f))(j) = \varphi_j(f(j))$ , если

$$f \in \prod_{i \in I} A_i.$$

29. (б) Пусть  $\overline{A}_i = m_i$  и  $J \subseteq I$ . Доопределим функцию  $f: J \rightarrow \bigcup_{i \in J} A_i$  до функции  $g: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  так:

$$g(i) = \begin{cases} f(i), & \text{если } i \in J, \\ a_i, & \text{если } i \in I \setminus J, \end{cases}$$

где  $a_i$  — произвольный элемент из  $A_i$ .

30. Пусть  $\{A_i\}_{i \in I}$ ,  $\{B_i\}_{i \in I}$  — системы попарно непересекающихся множеств таких, что  $\overline{A}_i = m_i$ ,  $\overline{B}_i = n_i$ . Пусть  $\{f_i\}_{i \in I}$  — система функций таких, что  $f_i$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $A_i$  и  $C_i \subseteq B_i$ .

(а) Пусть  $b_j, c_i \in B_j$ ,  $b_i \neq c_i$  для всех  $i \in I$ ,  $\overline{I} \geq 3$ . Следующая функция  $\varphi$  есть 1-1-функция из  $\bigcup_{i \in I} A_i$  в  $\prod_{i \in I} B_i$ :

$$(\varphi(a_i))(j) = \begin{cases} f_i(a_i), & \text{если } i = j, \\ c_j, & \text{если } i \neq j, f_i(a_i) \neq c_j, \\ b_j, & \text{если } i \neq j, f_i(a_i) = c_j, \end{cases}$$

где  $a_i \in A_i$ ,  $j \in I$ .

Случай  $\overline{I} \leq 2$  проверяется легко.

(б)  $\sum_{i \in I} m_i \leq \prod_{i \in I} n_i$  вследствие (а). Предположим, что  $\sum_{i \in I} m_i = \prod_{i \in I} n_i$ .

Тогда  $\prod_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} C_i$ , где  $\overline{C}_i = m_i$ ,  $C_i \cap C_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Рассмотрим  $M_i = \{g(i) \mid g \in C_i\}$ .  $M_i \subseteq B_i$ ,  $\overline{M}_i \leq \overline{C}_i = m_i$ , поэтому  $B_i \setminus M_i \neq \emptyset$ .

Пусть  $h \in \prod_{i \in I} (B_i \setminus M_i)$ . Тогда  $h(i) \notin M_i$ ,  $h \notin C_i$  для всех  $i \in I$ . Получили противоречие.

31. Имеем  $\sum_{i \in \mathcal{N}} m_i < \prod_{i \in \mathcal{N}} m_{i+1} \leq m_0 \cdot \prod_{i \in \mathcal{N}} m_{i+1}$  (см. задачу 30 (б)).

32. Следует из задачи 32 (а).

33. По определению.

34. См. задачу 49 (б) из § 2.

35. Пусть  $m^{\aleph_0} = \sum_{i \in \mathcal{N}} m_i$ , где  $m_i < m_{i+1}$ . Тогда для всех  $i \in \mathcal{N}$  имеем  $m_i \leq m^{\aleph_0}$ . Значит,  $\prod_{i \in \mathcal{N}} m_i \leq (m^{\aleph_0})^{\aleph_0} = m^{\aleph_0} = \sum_{i \in \mathcal{N}} m_i$  (см. задачи 28 (б), 17(в), 10(б)). Это противоречит результату задачи 31.

## ЧАСТЬ II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

### § 1. Алгебра высказываний

1. Формулой является лишь последовательность (в).
2. (а) 9 способов; (б) 19 способов.
4. Индукцией по числу логических связок, входящих в  $C$ .
5. Индукцией по числу шагов построения формулы  $A$ .
6. Аналогично задаче 5.
8. (а)  $P = \text{и}$ ; (б)  $P = Q = \text{и}$ ; (в)  $P = R = \text{и}$ ,  $Q = \text{л}$ .
9. Делается непосредственно по таблицам истинности.
10. (а) Например,  $X = Y = Z = \text{и}$ ;  
 (б) например,  $X = Y = Z = V = W = \text{л}$  и  $U = \text{и}$ ;  
 (в) например,  $X = Y = \text{л}$  и  $Z = \text{и}$ ;  
 (г) например,  $X = Y = \text{и}$  и  $Z = \text{л}$ ;  
 (д) только при  $X = Y = \text{и}$ .

13. Докажем, например, (а). Если при некоторых значениях переменных значение формулы  $(B \vee C)$  есть л, то при этих же значениях переменных значения  $B$  и  $C$  также равны л. Тогда при этих значениях

переменных одна из формул  $(A \vee B)$  или  $(\neg A \vee C)$  должна иметь значение л.

14. Пусть  $A \sim B$ . Придадим переменным некоторые значения. Если значение  $A$  при этих значениях будет и, то значение  $B$  также и. Отсюда значение  $(A \equiv B)$  есть и. Аналогично рассматривается случай, когда значение  $A$  есть л.

Обратно. Пусть  $(A \equiv B)$  тождественно истинна. Тогда формулы  $(A \supset B)$  и  $(B \supset A)$  тождественно истинны. Если значение  $A$  при некоторых значениях переменных есть и, то значение  $B$  не может быть л, иначе значение  $(A \supset B)$  было бы л. Аналогично рассматривается случай, когда значение  $A$  есть л.

17. Пусть  $A (P \setminus C)$  зависит от переменных  $P_0, \dots, P_k$ . Придадим этим переменным некоторые значения. Тогда значение  $A (P \setminus C)$  будет равно значению  $A$ , если переменная  $P$  принимает значение, равное значению  $C$ , а остальные переменные  $A$  имеют значения, совпадающие с заданными.

18. При вычислении значений  $A$  и  $A_1$  мы будем использовать значения  $B$  и  $B_1$ , которые совпадают, так как  $B \sim B_1$ .

19—21. Доказываются непосредственно по таблицам истинности.

22. Индукцией по числу шагов построения формулы  $A$ , используя задачи 20 (а), (б), (в), (д) и 18.

23. Индукцией по числу шагов построения формулы  $A$ , используя задачи 22, 19 (г), (и).

24. См. указание к задаче 23.

25. Пусть у некоторого дизъюнкта  $B$  переменные  $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$  входят в  $B$  без отрицания, а  $P_{j_1}, \dots, P_{j_m}$  — с отрицанием. Если множества  $\{P_{i_1}, \dots, P_{i_k}\}$  и  $\{P_{j_1}, \dots, P_{j_m}\}$  не пересекаются, то, придавая  $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$  значение л, а  $P_{j_1}, \dots, P_{j_m}$  значение и, получим, что  $B$  имеет значение л.

26. Аналогично задаче 25.

27. Индукцией по числу шагов построения формулы  $A$ .

28. Используя задачу 27, доказать, что

$$A(P_0, \dots, P_n) \sim \neg A^*(\neg P_0, \dots, \neg P_n).$$

29. Пусть значение переменных  $A, \dots, B$  есть и, а значение переменных  $P, \dots, Q$  есть л. Требуемой элементарной конъюнкцией является  $(A \& \dots \& B \& \neg P \& \dots \& \neg Q)$ .

30. Сразу следует из задачи 29.

31. (а) Легко заметить, что полученная в задаче 30 дизъюнкция элементарных конъюнкций есть с.д.н.ф. формулы  $A$ .

(б) Следует из задачи 26.

32. Пусть значение переменных  $P_1, \dots, P_m$  есть и, а значение переменных  $Q_1, \dots, Q_n$  есть л. Требуемой элементарной дизъюнкцией является  $(\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_m \vee Q_1 \vee \dots \vee Q_n)$ .

33. Сразу следует из задачи 32.

34. (а) Легко заметить, что полученная в задаче 33 конъюнкция элементарных дизъюнкций есть с.к.н.ф. формулы  $A$ .

(б) Следует из задачи 25.

35. (а)  $((P \& Q \& R) \vee (P \& Q \& \neg R) \vee (P \& \neg Q \& R) \vee (P \& \neg Q \& \neg R) \vee (\neg P \& Q \& R) \vee (\neg P \& Q \& \neg R) \vee (\neg P \& \neg Q \& R) \vee (\neg P \& \neg Q \& \neg R))$ ;

(б)  $((\neg P \& Q) \vee (\neg P \& \neg Q) \vee (P \& Q))$ ;

(в)  $(P \& Q)$ .

36. (а)  $(P \vee Q \vee R)$ ;

(б)  $((P \vee Q \vee R) \& (P \vee \neg Q \vee R) \& (P \vee Q \vee \neg R) \& (P \vee \neg Q \vee \neg R) \& (\neg P \vee Q \vee R))$ ;

(в)  $((P \vee Q \vee \neg R) \& (P \vee \neg Q \vee \neg R) \& (P \vee Q \vee R))$ .

37. (а) Например,  $A = (\neg P \vee \neg Q)$ ;

(б)  $((P \& Q \& R) \vee (\neg P \& Q \& R) \vee (\neg P \& \neg Q \& R))$ .

38.  $((\neg P \& \neg Q \& R) \vee (P \& \neg Q \& \neg R) \vee (\neg P \& Q \& \neg R))$ .

39.  $((P \& Q \& R) \vee (P \& Q \& \neg R) \vee (P \& \neg Q \& R) \vee (\neg P \& Q \& R))$ ;  
 $((P \& \neg Q \& \neg R) \vee (\neg P \& Q \& \neg R) \vee (\neg P \& \neg Q \& R) \vee (P \& Q \& R))$ .

40. (а)  $A = ((P \& Q \& R) \vee (P \& Q \& \neg R) \vee (\neg P \& Q \& R) \vee (\neg P \& \neg Q \& R))$ ;

(б)  $A = ((P \& Q \& R) \vee (\neg P \& \neg Q \& \neg R))$ ;

(в)  $A = ((P \vee Q \vee \neg R) \& (\neg P \vee \neg Q \vee R))$ .

41. Попарно не эквивалентных конъюнктов от  $n$  переменных имеется  $2^n$ . Если какой-то из этих конъюнктов не входит в с.д.н.ф. формулы  $A$ , то  $A$  имеет значение л при соответствующем наборе значений переменных для данного конъюнкта.

42. Легко следует из задач 31 (а) и 34 (а).

43. (а) Меняем в с.к.н.ф. формулы  $A$   $\&$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\&$ .

(б) Используя задачу 42, строим с.д.н.ф. формулы  $A$  и далее в ней меняем  $\&$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\&$ ,  $P_i$  на  $\neg P_i$ ,  $\neg P_i$  на  $P_i$ .

(в) Меняем в с.к.н.ф. формулы  $A$   $\&$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\&$ ,  $P_i$  на  $\neg P_i$ ,  $\neg P_i$  на  $P_i$ .

44. Заметим вначале, что

$$(A_1 \vee \dots \vee A_s) \sim ((A_1 \vee \dots \vee A_s) \& \&(P \vee \neg P)) \sim ((A_1 \& P) \vee (A_1 \& \neg P) \vee \dots \vee (A_s \& P) \vee (A_s \& \neg P));$$

аналогично,

$$(A_1 \& \dots \& A_s) \sim ((A_1 \& \dots \& A_s) \vee (P \& \neg P)) \sim ((A_1 \vee P) \& \&(A_1 \vee \neg P) \& \dots \&(A_s \vee P) \&(A_s \vee \neg P)).$$

Используя это, мы всегда можем считать, что у любых формул  $A$  и  $B$  заданные нормальные формы содержат одни и те же переменные.

(а) С.д.н.ф. формулы  $(A \vee B)$  получается, если возьмем дизъюнкцию всех конъюнктов с.д.н.ф. для  $A$  и с.д.н.ф. для  $B$ ; с.к.н.ф. формулы  $(A \vee B)$  получается использованием задачи 42.

(б) Используя задачу 42, строим с.к.н.ф. для  $A$  и с.к.н.ф. для  $B$ . Тогда с.к.н.ф. для  $(A \& B)$  получается, если возьмем конъюнкцию всех дизъюнктов с.к.н.ф. для  $A$  и с.к.н.ф. для  $B$ . Теперь с.д.н.ф. для  $(A \& B)$  получается, как в задаче 42.

(в) Использовать  $(A \supset B) \sim (\neg A \vee B)$ , задачи 42, 43 (б), (в), 44 (а).

45. Пусть в с.к.н.ф. формулы  $A$  отсутствует член  $(\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_k)$ . Возьмем любой дизъюнкт  $(P_{i_1} \vee \dots \vee P_{i_s} \vee \neg P_{j_1} \vee \dots \vee \neg P_{j_t})$ . Он эквивалентен формуле  $((P_{j_1} \& \dots \& P_{j_t}) \supset (P_{i_1} \vee \dots \vee P_{i_s}))$ , если  $t \geq 1$ , и формуле  $(P_{i_1} \vee \dots \vee P_{i_s})$ , если  $t = 0$ .

Обратно. Докажем, что если в с.к.н.ф. для  $A$  имеется член  $(\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_k)$ , то  $A$  не эквивалентна никакой формуле, содержащей лишь связки  $\&, \vee, \supset$ . Ясно, что в случае, когда все  $P_1, \dots, P_k$  имеют значение и, значение  $A$  есть л. Но из переменных  $P_1, \dots, P_k$  с помощью связок  $\&, \vee, \supset$  можно построить лишь формулы, значение которых есть и, когда все переменные  $P_1, \dots, P_k$  принимают значение и.

46. Используя эквивалентности из задач 21 (б), (в), формулу  $A$  можно привести к виду  $(P_1 \equiv \dots \equiv P_1 \equiv \dots \equiv P_n \equiv \dots \equiv P_n)$ . Если, например, переменная  $P_1$  входит в данное выражение нечетное число раз, то придадим  $P_1$  значение л, а остальным переменным значения и; тогда легко подсчитать, что значение  $A$  будет л. Если же все переменные входят в данное выражение четное число раз, то, используя эквивалентность из задачи 21 (а), приведем формулу  $A$  к виду  $(P_1 \equiv \dots \equiv P_1) (2k \text{ раз})$ . А эта формула тождественно истинная.

47. Непосредственно по таблицам истинности доказывается эквивалентность  $(A \equiv \neg B) \sim \neg (A \equiv B)$ . Используя эту эквивалентность и задачи 21 (б), (в), приведем формулу  $A$  к одному из видов:

$(P_{i_1} \equiv \dots \equiv P_{i_k})$ , если в  $A$  имеется четное число вхождений  $\neg$ ;

$\neg (P_{i_1} \equiv \dots \equiv P_{i_k})$ , если в  $A$  имеется нечетное число вхождений  $\neg$ .

В первом случае результат вытекает из задачи 46. Во втором случае формула  $A$  не является тождественно истинной, так как, придавая всем переменным значение и, получим, что  $A$  имеет значение л.

## § 2. Функции алгебры логики

1. Положим  $\varphi(P_i) = v_i$ ,  $\varphi(\neg A) = \neg \varphi(A)$ ,  $\varphi((A \& B)) = \varphi(A) \& \varphi(B)$ ,  $\varphi((A \vee B)) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$ ,  $\varphi((A \supset B)) = \varphi(A) \supset \varphi(B)$ . Значению и соответствует 1, а значению л соответствует 0.

2.  $2^{2^n}$ .

3. (а) Все переменные существенны.

(б)  $x$ .

(в) Нет существенных переменных.

4. (а)  $x \& y = \neg (\neg x \vee \neg y)$ ,  $x \supset y = \neg x \vee y$ .

(б)  $x \vee y = \neg (\neg x \& \neg y)$ ,  $x \supset y = \neg (x \& \neg y)$ .

(в)  $x \& y = \neg (x \supset \neg y)$ ,  $x \vee y = \neg x \supset y$ .

(г)  $\neg x = x \mid x$ ,  $x \& y = (x \mid y) \mid (x \mid y)$ ,  $x \vee y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$ ,  $x \supset y = x \mid (y \mid y)$ .

(д)  $\neg x = x \supset 0$ .

(е)  $\neg x = x + 1$ .

(ж)  $x \vee y = (x \supset y) \supset y$ .

6. (а) Функции, которые можно получить с помощью  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ ,  $\equiv$ , принадлежат  $C_1$ , а функция  $\neg$  не принадлежит  $C_1$ .

(б) Функции, которые можно получить с помощью  $\&$  и  $\vee$ , принадлежат  $C_0$ , а функция  $\supset$  не принадлежит  $C_0$ .

(в) Функции, которые можно получить с помощью  $\vee$  и  $\supset$ , удовлетворяют условию: существует  $i$  такое, что  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \geq x_i$ , а функция  $x \& y$  не удовлетворяет этому условию.

7. (а) Проверить равенство при  $x = 1$  и при  $x = 0$ .

(б) Заметим, что  $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_i^{\varepsilon_i} = 1$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = \varepsilon_1, \dots, x_i = \varepsilon_i$ .

8. (а) Следует из задачи 7.

(б), (в), (г) Следуют из задачи 4 (а), (б), (в).

9. (а) Следует из задачи 6 (а).

(б) Из переменных  $x_1, x_2, \dots$  с помощью  $\neg$  можно получить лишь функции, зависящие существенно не более чем от одной переменной.

10. (а) Следует из задач 4 (г) и 8.

(б)  $\neg x = x \perp x$ ,  $x \vee y = \neg (x \perp y) = (x \perp y) \perp (x \perp y)$  и далее как в задаче 8 (б).

(в)  $\neg x = x \supset 0$  и далее как в задаче 8 (г).

(г)  $\neg x = x + 1$  и далее как в задаче 8 (б).

11. (а)  $\neg x = x + 1$  и далее как в задаче 8 (в), используя, что  $+$  и  $\cdot$  коммутативны, ассоциативны, дистрибутивны и  $x + x = 0$ ,  $x + 0 = x$ ,  $x \cdot x = x$ .

(б) Число различных «многочленов» от переменных  $x_1, \dots, x_n$  равно  $2^{2^n}$ , т. е. столько же, сколько и функций алгебры логики от  $n$  переменных.

12. (а) Класс функций, полученный из переменных с помощью  $\equiv$ , содержится в  $C_1$ . Для  $\neg$  см. указание к задаче 9 (б).

(б) Класс функций, полученный из переменных с помощью  $+$ , содержится в  $C_0$ . Для  $\neg$  см. указание к задаче 9 (б).

(в) Разделяющие классы  $C_1$  и  $C_0$ .

(г) Разделяющие классы  $L$  и  $C_0$ .

13. (а)  $0 = x/x$  и далее как в задаче 10 (в). Разделяющие классы  $C_1$  и  $C_0$ .

(б)  $x \vee z = \{x, x, z\}$ ,  $\neg y = \{0, y, 1\}$  и далее как в задаче 8 (б). Разделяющие классы  $L$ ,  $C_0$  и  $C_1$ .

(в)  $\neg x = x \equiv 0$  и далее как в задаче 8 (б). Разделяющие классы  $C_1$ ,  $L$  и  $C_0$ .

14. Функции, полученные из переменных с помощью  $\equiv$  и  $+$ , содержатся в  $L$ . Можно добавить лишь  $\&$  или  $\vee$ .

15. Лишь  $\{\mid\}$  и  $\{/ \}$  (см. задачу 10 (а), (б)). Каждая из остальных двуместных функций попадает в один из классов  $C_1$ ,  $C_0$ ,  $L$ ,  $M$  и  $D$ .

16. (а) и (б)  $\neg (x_1 \vee \dots \vee x_n)$  для любого  $n \geq 2$ .

17. Оставить лишь те функции, из которых можно выразить суперпозициями функцию  $\mid$ .

18. (а)  $x \vee y = (x \supset y) \supset y$ . См. далее ответ к задаче 45 из § 1 и задачу 6 (б), (в).

(б) Многочлен из задачи 11 (б) представляет функцию из  $C_0$  тогда и только тогда, когда его свободный член равен 0. Разделяющие классы для  $\&$  и  $+$  есть  $C_1$  и  $L$ .

(в) Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — монотонная функция. Тогда (см. задачу 7)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot h(x_2, \dots, x_n) \vee \neg x_2 \cdot g(x_2, \dots, x_n),$$

$$h(x_2, \dots, x_n) = f(1, x_2, \dots, x_n), g(x_2, \dots, x_n) = f(0, x_2, \dots, x_n)$$

— монотонные функции и  $h(x_2, \dots, x_n) \geq g(x_2, \dots, x_n)$  для любых  $x_2, \dots, x_n$ . Тогда  $h(x_2, \dots, x_n) = h(x_2, \dots, x_n) \vee g(x_2, \dots, x_n)$ . Имеем

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 \cdot (h(x_2, \dots, x_n) \vee g(x_2, \dots, x_n)) \vee \neg x_1 \cdot g(x_2, \dots, x_n) = \\ &= x_1 \cdot h(x_2, \dots, x_n) \vee g(x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, мы придем к выражению функции  $f$  через  $\vee$ ,  $\&$ ,  $0$ ,  $1$ . Независимость системы легко доказывается.

г) Имеем  $\neg x = (x \equiv 0)$ ,  $x + y = \neg(x \equiv y)$ . Каждая линейная функция легко получается суперпозициями из  $\neg$  и  $+$ . Разделяющие классы  $C_0$  и  $C_1$ .

д) Прежде всего заметим, что всякая самодвойственная функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  может быть получена из некоторой монотонной самодвойственной функции с помощью функции  $\neg$ . Положим:

$$F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n), \text{ если } \neg x_1 = y_1, \dots, \neg x_n = y_n;$$

$F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0$ , если  $\neg x_1 \geq y_1, \dots, \neg x_n \geq y_n$  и существует  $i$  такое, что  $\neg x_i > y_i$ ;

$F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 1$ , если  $\neg x_1 \leq y_1, \dots, \neg x_n \leq y_n$  и существует  $i$  такое, что  $\neg x_i < y_i$ ;

$$F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = x_1 \text{ в остальных случаях.}$$

Ясно, что  $f(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n)$ . Разбором случаев легко доказать, что функция  $F$  является монотонной и самодвойственной.

Докажем теперь, что всякая монотонная самодвойственная функция есть суперпозиция функции  $h(x, y, z) = xy + xz + yz$ . Доказательство проведем индукцией по числу переменных  $n$ , от которых функция  $f$  зависит существенно.

Если  $n = 1$ , то имеется единственная такая функция  $f(x) = x$ . Имеем  $h(x, x, x) = x$ .

Если  $n = 2$ , то таких функций не существует.

Если  $n = 3$ , то имеется единственная такая функция  $h(x, y, z)$ .

Пусть утверждение справедливо для функций, существенно зависящих не более, чем от  $n - 1$  переменных, и  $f$  существенно зависит от  $n$  переменных ( $n \geq 4$ ). Тогда  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = h(f(x_1, x_1, x_3, x_4, \dots, x_n), f(x_1, x_2, x_2, x_4, \dots, x_n), f(x_3, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n))$ .



Если  $x_1 = x_2$ , то в правой части равенства получится  $f(x_1, x_1, x_3, x_4, \dots, x_n)$ . (Используется факт, что если  $a \leq b \leq c$ , то  $h(a, b, c) = b$ ). Если  $x_1 = x_3$ , то в правой части равенства получится  $f(x_1, x_2, x_1, x_4, \dots, x_n)$ . Если  $x_2 = x_3$ , то в правой части равенства получится  $f(x_1, x_2, x_2, x_4, \dots, x_n)$ .

19. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \notin C_1$ . Тогда  $f(1, \dots, 1) = 0$  и  $\sup \in C_1$ , а  $\{0, \sup\}$  — базис  $C$  (см. задачу 10 (в)).

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \notin C_0$ . Тогда  $f(0, \dots, 0) = 1$  и  $+, \forall \in C_1$ , а  $\{+, \forall, 1\}$  — базис  $C$  (см. задачу 10 (г)).

20. (а) Пусть  $f$  — немонотонная функция и  $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ , но  $1 = f(a_1, \dots, a_n) > f(b_1, \dots, b_n) = 0$ . Тогда  $\neg x = f(x^{\varepsilon_1}, \dots, x^{\varepsilon_n})$ , где  $x^{\varepsilon_i} = x$ , если  $a_i < b_i$ , и  $x^{\varepsilon_i} = a_i$ , если  $a_i = b_i$ .

(б) Добавим к  $M$  любую немонотонную функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Так как  $0, 1 \in M$ , то можем из  $f$  получить  $\neg$  (см. (а)). Заметим, что  $\&, \forall \in M$ ; далее см. задачу 8 (а).

21. (а) Пусть  $f$  — несамо двойственная функция и  $a_1, \dots, a_n$  таковы, что  $f(a_1, \dots, a_n) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$ . Пусть  $\varphi(x) = f(x^{\varepsilon_1}, \dots, x^{\varepsilon_n})$ , где  $x^{\varepsilon_i} = x$ , если  $a_i = 0$ , и  $x^{\varepsilon_i} = \neg x$ , если  $a_i = 1$ . Тогда  $\varphi(x)$  является константой 0 или 1, так как  $\varphi(0) = f(a_1, \dots, a_n) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n) = \varphi(1)$ ;  $\neg \varphi(x)$  является другой константой.

(б) Добавим к  $D$  любую не само двойственную функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Так как  $\neg \in D$ , то можем из  $f$  получить 0 и 1 (см. (а)). Функция  $h(x, y, z)$  является само двойственной. Тогда  $h(x, y, 1) = x \vee y$ ; далее см. задачу 8 (б).

22. (а) Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — нелинейная функция. Используя задачу 11 (б), функцию  $f$  можно представить в виде

$$x_1 x_2 \varphi_1(x_3, \dots, x_n) + x_1 \varphi_2(x_3, \dots, x_n) + x_2 \varphi_3(x_3, \dots, x_n) + \varphi_4(x_3, \dots, x_n),$$

здесь  $\varphi_1(x_3, \dots, x_n)$  не является константой 0. Выберем  $a_3, \dots, a_n$  так, чтобы  $\varphi_1(a_3, \dots, a_n) = 1$ . Тогда  $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, a_3, \dots, a_n) = x_1 x_2 + a x_1 + b x_2 + c$  для некоторых  $a, b, c$ . Тогда  $g(x_1 + b, x_2 + a) + c + ab = x_1 \& x_2$ .

б) Добавляя к  $L$  любую нелинейную функцию, по (а) получим  $\&$ . Далее задача 8 (в), так как  $\neg \in L$ .

23. Рассмотрим множество  $S$  замкнутых классов, содержащих  $K$  и отличных от  $C$ . Тогда  $S$  удовлетворяет условиям леммы Цорна (см. задачу 66(2) из § 5 части I), так как все классы из  $S$  не содержат функцию  $|$ . Максимальный элемент в  $S$  и будет искомым предполным классом.

24. Следует из задачи 23.

25. Пусть  $A$  — предполный класс, отличный от  $C_1, C_0, L, D$  и  $M$ . Тогда в  $A$  найдутся функции  $f_1 \notin C_1, f_2 \notin C_0, f_3 \notin L, f_4 \notin D, f_5 \notin M$ . Функции  $g(x) = f_1(x, \dots, x)$  и  $h(x) = f_2(x, \dots, x)$  являются либо функциями 0 и 1, либо одна из них есть  $\neg$ . В первом случае вследствие задачи 20 (а) из  $f_5$  получаем  $\neg$ . Во втором случае вследствие задачи 21 (а) из  $f_4$  получаем 0 и 1. Итак,  $0, 1, \neg \in A$ . Теперь вследствие задачи 22 (а) из  $f_3$  получаем  $\&$ . Итак,  $\neg, \& \in A$  и  $A = C$  (см. задачу 8 (в)).

26. Воспользуемся указанием к задаче 25. Из любого базиса для  $C$  можно оставить не более пяти функций:  $f_1 \notin C_1, f_2 \notin C_0, f_3 \notin L, f_4 \notin D, f_5 \notin M$ . Если  $f_1(x, \dots, x) = 0$ , то  $f_1 \notin D$  и можно выбросить  $f_4$ . Если  $f_2(x, \dots, x) = 1$ , то  $f_2 \notin D$  и можно выбросить  $f_4$ . Если  $f_1(x, \dots, x) = f_2(x, \dots, x) = \neg x$ , то можно выбросить  $f_2$ .

29. Индукцией по числу шагов построения  $T$ , используя задачи 27 и 28.

30. 31. Следуют из задачи 29.

32. 33. См. задачу 30.

### § 3. Исчисления высказываний

1. (а)  $A \vdash A, \vdash (A \supset A)$  (аксиома, правило 7).

(б)  $\Sigma_1: A \vdash A$  (аксиома),

$\Sigma_2: (A \supset B) \vdash (A \supset B)$  (аксиома),

$\Sigma_3: A, (A \supset B) \vdash B$  (правило 8,  $\Sigma_1, \Sigma_2$ ),

$\Sigma_4: (B \supset C) \vdash (B \supset C)$  (аксиома),

$\Sigma_5: A, (A \supset B), (B \supset C) \vdash C$  (правило 8,  $\Sigma_3, \Sigma_4$ ),

$\Sigma_6: (A \supset B), A, (B \supset C) \vdash C$  (правило 14,  $\Sigma_5$ ),

$\Sigma_7: (A \supset B), (B \supset C), A \vdash C$  (правило 14,  $\Sigma_6$ ).

(в) Из аксиом  $\neg A \vdash \neg A$  и  $\neg \neg A \vdash \neg \neg A$ , применяя правила 14, 10, 11, 7, получить  $\vdash (\neg \neg A \supset A)$ . Из аксиом  $\neg A \vdash \neg A$  и  $\neg \neg A \vdash \neg \neg A$ ,

применяя правила 10, 9, 7, получить  $\vdash (A \supset \neg \neg A)$ . Применить правило 1.

(г) Из аксиом  $A \vdash A$ ,  $(A \supset B) \vdash (A \supset B)$ ,  $(A \supset (B \supset C)) \vdash (A \supset (B \supset C))$  с помощью правил 8, 14, 15.

(д) Из аксиом  $A \vdash A$ ,  $(A \supset B) \vdash (A \supset B)$ ,  $\neg B \vdash \neg B$  с помощью правил 9, 10, 14.

(е) См. указание к (д).

2. Заменить в секвенциях вывода для  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  каждую формулу  $D$  на  $D(P \setminus C)$ . Доказать индукцией по длине вывода, что при этом получится требуемый вывод.

3. (а) Использовать правила 7 и 8.

(б) Использовать аксиому  $(A \& B) \vdash (A \& B)$  и правила 2, 3, 14, 15 и (а).

(в) Использовать аксиомы  $A \vdash A$ ,  $B \vdash B$  и правила 1, 14 и (а).

(г) Использовать аксиому  $(A \vee B) \vdash (A \vee B)$  и правила 6, 15.

(д) Использовать аксиому  $\neg B \vdash \neg B$  и правила 9, 10, 14.

(е) Использовать аксиому  $B \vdash B$  и правила 10, 11, 14.

(ж) Использовать (б) и правило 7.

(з) Использовать (в) и правило 8.

4. По правилу 12 из выводимости  $\Gamma_1 \vdash$  следует выводимость  $\Gamma_1 \vdash \neg (A \supset A)$ . Далее используем выводимость  $\vdash (A \supset A)$  и правило 10.

5. Использовать задачу 3.

6. (а) Использовать правила 1 и 7.

(б) Использовать аксиомы  $A \vdash A$ ,  $B \vdash B$  и правила 2, 3 и 8.

7. Использовать задачи 3 и 5.

8. Индукцией по числу шагов построения  $A$  из  $B$ , используя задачу 6.

9. (д), (е) Использовать правила 1—5 и задачи 3 и 5.

(ж), (з) Использовать правила 1—5 и задачи 1 (а), 3 и 5.

(и)  $\Sigma_1: (A \supset B), A \vdash B$  (по правилу 8),

$\Sigma_2: (A \supset B), A \vdash (\neg A \vee B)$  (правило 5),

$\Sigma_3: (A \supset B), \neg (\neg A \vee B) \vdash \neg A$  (задача 3(д)),

$\Sigma_4: (A \supset B), \neg (\neg A \vee B) \vdash (\neg A \vee B)$  (правило 8),

$\Sigma_5: (A \supset B), \neg (\neg A \vee B) \vdash \neg (\neg A \vee B)$  (правило 13),

$\Sigma_6: (A \supset B), \neg (\neg A \vee B) \vdash$  (правило 10),

$\Sigma_7: (A \supset B) \vdash (\neg A \vee B)$  (правило 11).

(к) Использовать (и) и задачи 1 (а), 3 (а).

(л)  $\Sigma_1: \neg A, B, A \vdash B$  (правило 13),

$\Sigma_2: \neg A, B \vdash (A \supset B)$  (правило 7),

$\Sigma_3: \neg (A \supset B), B \vdash A$  (правило 14 и задачи 1(в), 3(а), (д) и 5(а)),

$\Sigma_4: \vdash (\neg (A \supset B) \supset (B \supset A))$  (правило 7, дважды),

$\Sigma_5: \vdash ((A \supset B) \vee (B \supset A))$  (по (и) и 1 (в)).

10. Использовать задачу 23 из § 1 и задачу 8.

11. См. задачу 25 из § 1 и задачу 9 (к).

12. Индукцией по длине вывода.

13. Следует из задач 9—11.

14. Использовать задачу 12. Для (д) и (е) воспользоваться также задачей 3 (ж), (з).

15. Привести  $A$  к с.д.н.ф.  $(A_1 \vee \dots \vee A_s)$ , а  $B$  к с.к.н.ф.  $(B_1 \& \dots \& B_t)$ . Тогда для любой пары  $A_i$  и  $B_j$  секвенция  $A_i \vdash B_j$  доказуема в ИС и поэтому  $A_i$  и  $B_j$  имеют общий литерал  $C_{ij}$ . Полагаем  $C = \vee_{i,j} C_{ij}$ .

16. (а)  $B$ ; (б)  $(D \& A)$ .

17. (а) Да. (б) Да. (в) Нет.

18. (а)  $A_1 = (P \supset (P \supset P))$ ,

$A_2 = ((P \supset (P \supset P)) \supset ((P \supset ((P \supset P) \supset P)) \supset (P \supset P)))$ ,

$A_3 = ((P \supset ((P \supset P) \supset P)) \supset (P \supset P))$ ,

$A_4 = (P \supset ((P \supset P) \supset P))$ ,

$A_5 = (P \supset P)$ .

(б)  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ((P \supset P) \supset ((P \supset P) \supset ((P \vee P) \supset P)))$ ,  
 $((P \supset P) \supset ((P \vee P) \supset P)), ((P \vee P) \supset P)$ ;  $A_1 - A_5$  взяты из (а).

(в) Получается из (а) и аксиомы 9.

19. Пусть  $A_1, \dots, A_k$  есть вывод  $A$  в ИВ. Доказать индукцией по  $k$ , что  $A_1(P \setminus B), \dots, A_k(P \setminus B)$  есть вывод в ИВ.

20. (а)  $\{(P \supset (Q \supset R)), P, Q\}$ .

(б)  $\{(P \supset \neg \neg Q), \neg Q\}$ .

21. Вывод состоит из одной формулы  $A$ .

22. (г) Если  $A_1, \dots, A_k$  есть вывод  $A$  из  $\Gamma_1, B_1, \dots, B_n$  есть вывод  $B$  из  $A, \Gamma_2$ , то  $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_n$  есть вывод  $B$  из  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .

(д) Аналогично задаче 19.

23. Пусть  $B_1, \dots, B_n$  есть вывод  $B$  из  $\Gamma, A$ . Доказать индукцией по  $n$ , используя аксиомы 1, 2 и задачу 18 (а), что формулы  $(A \supset B_1), \dots, (A \supset B_n)$  выводимы из  $\Gamma$ .

24. (а) Пусть  $T = (A \supset (B \supset A))$ . Имеем  $A \vdash (T \supset A)$  и  $B \vdash (T \supset B)$ . Тогда  $A, B \vdash (T \supset (A \& B))$  по аксиоме 5. Отсюда  $A, B, T \vdash (A \& B)$  и  $A, B \vdash (A \& B)$ .

(б), (в), (д), (е), (з) Следуют непосредственно из аксиом.

(ж) Использовать задачу 23.

(г) Использовать правило  $\frac{\Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash \neg A}$ , которое следует из аксиом и задачи 23.

25. Пусть  $\Gamma \vdash A$ ,  $\Gamma \vdash \neg A$ ;  $B$  — любая формула. Тогда  $\Gamma, \neg B \vdash A$ ;  $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$ ;  $\Gamma \vdash \neg \neg B$ ;  $\neg \neg B \vdash B$ ;  $\Gamma \vdash B$ . Обратное очевидно.

26. Использовать задачи 23, 24.

27. Следует из задачи 26.

28. Использовать задачи 22—24.

29. Индукцией по длине вывода  $A$  в ИВ.

30. Доказать одновременно три утверждения (а), (б), (в) индукцией по длине вывода секвенции в ИС.

32. Следует из задач 13 и 30 (в).

33. Например,  $A = P$ ,  $B = Q$ , где  $P$  и  $Q$  — различные переменные.

34. Используем задачу 32. Пусть, например,  $A$  принимает значение л при значении л для переменных  $P_1, \dots, P_k$  и значении и для переменных  $P_{k+1}, \dots, P_n$ . Положим  $B_1 = \dots = B_k = (P \& \neg P)$ ,  $B_{k+1} = \dots = B_n = (P \vee \neg P)$ . Тогда  $A (P_1 \setminus B_1, \dots, P_n \setminus B_n)$  тождественно ложна и  $\neg A (P_1 \setminus B_1, \dots, P_n \setminus B_n)$  выводима.

35. (а) Следует из задачи 26.

(б)  $\|A\| \cap \|B\| = \|A \& B\|$ ,  $\|A\| \cup \|B\| = \|A \vee B\|$ ,  $-\|A\| = \|\neg A\|$ .

(в)  $\vdash A \Rightarrow \vdash (B \supset A) \Rightarrow \|B\| \leq \|A\|$  для любой формулы  $B$ . Обратное, пусть  $\|A\| = 1$ . Возьмем  $B$  такую, что  $\vdash B$ . Тогда  $\|B\| \leq \|A\| \Rightarrow \vdash (B \supset A) \Rightarrow \vdash A$ .

37. (а) Индукцией по числу шагов в построении формулы  $A$ , используя задачу 66 из § 3 части I.

(б) Пусть неверно  $\vdash A$ . Тогда  $\|A\| \neq 1$  в  $F/\approx$  (см. задачу 35 (в)). Существует ультрафильтр  $T$  на  $F/\approx$  такой, что  $\|A\| \notin T$  (см. задачу 68 из § 3 части I). Придадим переменным значения, как в (а). Тогда  $A$  принимает значение л.

39.  $A$  принимает значение 1 при  $P = Q = 1$ ,  $R = 2$ .

40. Следующие логические матрицы доказывают (см. задачу 38) независимость аксиом:

$$1) M = \{0, 1, 2\}; D = \{2\}; x \& y = \min(x, y); x \vee y = \max(x, y);$$

$$x \supset y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq y, \\ 0, & \text{если } x > y; \end{cases} \neg x = 2 - x.$$

2) Матрица из задачи 39.

3)  $M = \{0, 1\}; D = \{1\}; x \& y = y; \vee, \supset, \neg$  определяются, как в § 2.

4)  $M = \{0, 1\}; D = \{1\}; x \& y = x; \vee, \supset, \neg$  определяются, как в § 2.

5)  $M = \{0, 1\}; D = \{1\}; x \& y = 0; \vee, \supset, \neg$  определяются, как в § 2.

6)  $M = \{0, 1\}; D = \{1\}; x \vee y = y; \&, \supset, \neg$  определяются, как в § 2.

7)  $M = \{0, 1\}; D = \{1\}; x \vee y = x; \&, \supset, \neg$  определяются, как в § 2.

8)  $M = \{0, 1\}; D = \{1\}; x \vee y = 1; \&, \supset, \neg$  определяются, как в § 2.

9)  $M = \{0, 1\}; D = \{1\}; \neg x = 0; \vee, \&, \supset$  определяются, как в § 2.

$$10) M = \{0, 1, 2\}; D = \{2\}; x \& y = \min(x, y); x \vee y = \max(x, y);$$

$$x \supset y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq y, \\ y, & \text{если } x > y; \end{cases} \neg x = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

41. (а) Достаточно вывести в ИВ аксиому L3.

(б) См. указание к задаче 23.

(в) Доказать, что все аксиомы ИВ выводимы в L.

42. (а) Достаточно вывести в ИВ формулу  $(\neg A \supset (A \supset B))$ .

(б) Использовать матрицу из указания 10) к задаче 40.

43. См. указание к задаче 23.

44. (а) См. указание к задаче 29.

(б), (в), (г) См. указание к задаче 30.

45. Использовать задачу 44.

46. Индукцией по длине вывода формулы  $A$  в ИВ, используя задачу 45.

47. (б) Формула  $A_n$  не общезначима в  $M_n$ .

48. Пусть  $M$  содержит  $n$  элементов для некоторого  $n \in \mathcal{N}$ . Рассмотрим формулу  $A_n$  из задачи 47 и произвольные значения переменных в множестве  $M$ . Тогда для некоторой пары  $i, j$  ( $i \neq j$ ) значения  $P_i$  и  $P_j$  совпадают, и формула  $A_n$  принимает значение 0, так как  $\vdash_{\text{И}} ((B \vee (P \equiv P)) \vee C)$  для любых формул  $B$  и  $C$ . Поэтому  $A_n$  общезначима в  $\mathbb{M}$ , но невыводима в ИИВ (см. задачу 47).

## § 4. Язык логики предикатов

1. (а), (б) Да. (в) Нет.
2. (а), (б) Да. (в), (г) Нет.
3.  $v_0$  не является предметной переменной.
5. (а)  $\{v_0, f^1(v_0), f^1(f^1(v_0)), \dots\}$ ;  
 (б)  $\{v_0, g^2(v_0, v_0), g^2(v_0, g^2(v_0, v_0)), g^2(g^2(v_0, v_0), v_0), g^2(g^2(v_0, v_0), g^2(v_0, v_0)), \dots\}$ .
9. (а)  $O(x) \Leftrightarrow \forall y S(x, y, y)$ ;  
 (б)  $E(x) \Leftrightarrow \forall y P(x, y, y)$ ;  
 (в)  $D(x) \Leftrightarrow \exists z (E(z) \& S(z, z, x)) \Leftrightarrow \exists z (\forall y P(z, y, y) \& S(z, z, x))$  ( $E(z)$  из (б));  
 (г)  $Ч(x) \Leftrightarrow \exists y S(y, y, x)$ ;  
 (д)  $H(x) \Leftrightarrow \neg Ч(x) \Leftrightarrow \neg \exists y S(y, y, x)$  ( $Ч(x)$  из (г));  
 (е)  $\Pi(x) \Leftrightarrow (\neg E(x) \& \forall y \forall z (P(y, z, x) \supset (E(y) \vee E(z))))$  ( $E(z)$  из (б)).
10. (а)  $x = y \Leftrightarrow \forall z \forall u (S(x, z, u) \supset S(y, z, u))$ ;  
 (б)  $x \leq y \Leftrightarrow \exists z S(x, z, y)$ ;  
 (в)  $x < y \Leftrightarrow (x \leq y \& \neg x = y)$  ( $\leq, =$  из (а) и (б));  
 (г)  $D(x, y) \Leftrightarrow \exists z P(x, z, y)$ .
12. (а)  $\forall x \forall y \forall z (S(x, y, z) \supset S(y, x, z))$ ;  
 (б)  $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w ((S(x, y, u) \& S(u, z, v) \& S(y, z, w)) \supset S(x, w, v))$ ;  
 (е)  $\forall x \exists y (\Pi(y) \& x \leq y)$  ( $\Pi$  из 9 (е),  $\leq$  из 10 (б)).
13. Все предложения ложны в системе  $\mathcal{M}$ .
20. (а)  $P \Leftrightarrow \forall x R(x, x)$ ;  
 (б)  $C \Leftrightarrow \forall x \forall y (R(x, y) \supset R(y, x))$ ;  
 (в)  $T \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \& R(y, z)) \supset R(x, z))$ ;  
 (г)  $(P \& C \& T)$  ( $P, C, T$  из (а), (б), (в)).
21. (а)  $Ч_1 \Leftrightarrow \forall x (x \leq x)$ ;  $Ч_2 \Leftrightarrow \forall x \forall y ((x \leq y \& y \leq x) \supset x = y)$ ;  
 $Ч_3 \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((x \leq y \& y \leq z) \supset x \leq z)$ ;  
 (б)  $Ч_1, Ч_2, Ч_3$  из (а),  $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$ .
22. Пусть  $x = y \Leftrightarrow (Q(x, y) \& Q(y, x))$ .  
 (а)  $\forall y Q(x, y)$ ;  
 (б)  $\forall y (Q(y, x) \supset y = x)$ .
23. (а)  $x = y \cap z \Leftrightarrow (Q(x, y) \& Q(x, z) \& \forall u ((Q(u, y) \& Q(u, z)) \supset Q(u, x)))$ ;

- (б)  $x = y \cup z \Leftrightarrow (Q(y, x) \& Q(z, x) \& \forall u((Q(y, u) \& Q(z, u)) \supset Q(x, u)))$ ;  
 (в)  $x = \emptyset \Leftrightarrow \forall y Q(x, y)$ ;  
 (г)  $x = A \Leftrightarrow \forall y Q(y, x)$ ;  
 (д)  $x = -y \Leftrightarrow \exists z \exists u (z = x \cap y \& z = \emptyset \& u = x \cup y \& u = A)$  ( $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\emptyset$ ,  $A$  из предыдущих пунктов).

24. (а)  $x \subseteq y \Leftrightarrow f(x, y) = x$ .

(б) Пусть  $x = \emptyset \Leftrightarrow \forall y (x \subseteq y)$  ( $\subseteq$  из (а)). Тогда « $x$  — одноэлементное множество»  $\Leftrightarrow (\forall y((y \subseteq x) \supset (y = x \vee y = \emptyset))) \& \neg x = \emptyset$ .

29.  $((P^1(0) \& \forall x(P^1(x) \supset P^1(g^1(x)))) \supset \forall x P^1(x))$ .

30. Пусть  $x < y \Leftrightarrow (Q(x, y) \& \neg Q(y, x))$ . Тогда

$$(\forall y (\forall x (x < y \supset P(x)) \supset P(y)) \supset \forall y P(y)).$$

## § 5. Выполнимость формул логики предикатов

2. См. (д) определения истинностного значения в § 4.

4. Пусть  $A$  — бескванторная формула и  $A_1, \dots, A_k$  — различные атомные формулы, являющиеся подформулами  $A$ . Требуемая формула получается заменой всех вхождений  $A_1, \dots, A_k$  в  $A$  на пропозициональные переменные  $P_1, \dots, P_k$  соответственно.

5. (в) Например,  $A \Leftrightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ ;  $\mathbb{M} = \langle \mathcal{N}; P \rangle$ , где  $P(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x < y$ .

6. Индукцией по числу шагов построения формулы  $A$ .

7. (а) Выполнима в  $\langle \mathcal{N}; P \rangle$ , где  $P(x) = \text{и} \Leftrightarrow x$  — четное число.

(б) Выполнима в  $\langle \mathcal{N}; P \rangle$ , где  $P(x)$  — тождественно истинный предикат.

(в) Невыполнима. Пусть  $\mathbb{M}$  — модель, в которой эта формула истинна. Тогда существует элемент  $a$  из  $\mathbb{M}$  такой, что  $\mathbb{M} \models \forall y (Q(a, a) \& \& \neg Q(a, y))$ . Отсюда имеем  $\mathbb{M} \models (Q(a, a) \& \neg Q(a, a))$ . Приходим к противоречию.

(г) Выполнима в модели из (а).

(д) Выполнима в  $\langle \mathcal{N}; Q, R \rangle$ , где  $Q(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow x \geq y$ ;  $R(x, y, z) = \text{и} \Leftrightarrow x + y \leq z$ .

(е) Выполнима в  $\langle \mathcal{N}; P \rangle$ , где  $P(x)$  тождественно ложен.

8. (а) Нет. Формула ложна в  $\langle \mathcal{N}; P \rangle$ , где  $P(x) = \text{и} \Leftrightarrow x$  — четное число.

(б) Нет. Формула ложна в  $\langle \mathcal{N}; P \rangle$ , где  $P(x) = \text{и}$  для всех  $x$ .

(в) Да.

(г) Нет. Формула ложна в  $\langle \mathcal{N}; Q \rangle$ , где  $Q(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow x \leq y$ .



10. (а)  $A(x) \approx \exists y P(x, y)$ ,  $t = y$ .

(б)  $A(x) \approx \forall y P(x, y)$ ,  $t = y$ .

11. Формула выполнима в  $\langle \mathcal{N}; P \rangle$ , где  $P(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow x < y$ . Пусть формула выполнима в  $\mathbb{M} = \langle M; P \rangle$ . Заметим, что  $P(m, m) = \text{л}$  для всех  $m \in M$ . Пусть  $a_0$  — произвольный элемент из  $M$ . Среди элементов  $x$  таких, что  $P(a_0, x) = \text{и}$ , выберем произвольный и обозначим его через  $a_1$ . Среди элементов  $x$  таких, что  $P(a_1, x) = \text{и}$ , выберем произвольный и обозначим его через  $a_2$ . Продолжая этот процесс, получим последовательность элементов  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Докажем, что все эти элементы различны. Если  $i < j$ , то  $P(a_i, a_{i+1}) = \text{и}$ ,  $P(a_{i+1}, a_{i+2}) = \text{и}$ , ...,  $P(a_{j-1}, a_j) = \text{и}$ , а значит,  $P(a_i, a_j) = \text{и}$ . Таким образом,  $a_i \neq a_j$ .

12. Докажем, что если данная формула ложна в какой-то модели  $\mathbb{M} = \langle M; F \rangle$ , то  $\overline{M} \geq 4$ . Ложность этой формулы в модели означает, что для любого  $x \in M$  найдется  $\varphi(x) \in M$  такое, что  $F(x, \varphi(x)) = \text{и}$ ,  $F(\varphi(x), x) = \text{л}$ ,  $F(x, x) \neq F(\varphi(x), \varphi(x))$ . Отсюда  $x \neq \varphi(x)$  для любого  $x \in M$ . Имеем  $x \neq \varphi\varphi(x)$  для любого  $x \in M$ , так как в противном случае было бы  $F(\varphi(x), \varphi\varphi(x)) = \text{и}$ ,  $F(\varphi(x), x) = \text{л}$ . Так как  $F(x, x) \neq F(\varphi(x), \varphi(x))$ ,  $F(\varphi(x), \varphi(x)) \neq F(\varphi\varphi(x), \varphi\varphi(x))$ ,  $F(\varphi\varphi(x), \varphi\varphi(x)) \neq F(\varphi\varphi\varphi(x), \varphi\varphi\varphi(x))$ , то  $F(x, x) \neq F(\varphi\varphi\varphi(x), \varphi\varphi\varphi(x))$ , т. е.  $x \neq \varphi\varphi\varphi(x)$ . Итак, для любого  $x \in M$  элементы  $\varphi(x)$ ,  $\varphi\varphi(x)$  и  $\varphi\varphi\varphi(x)$  отличны от  $x$ .

13. (а) Докажем, что если данная формула ложна в какой-то модели  $\mathbb{M} = \langle M; F \rangle$ , то  $M$  — бесконечное множество. Ложность этой формулы означает, что для любого  $x \in M$  существует  $\varphi(x) \in M$  такое, что  $F(x, x) = \text{и}$ ,  $F(\varphi(x), x) = \text{л}$  и для всякого  $z \in M$  имеем  $(F(\varphi(x), z) \supset F(x, z)) = \text{и}$ . Строим последовательность  $\{\varphi^i(x)\}$ , где  $\varphi^0(x) = x$ ,  $\varphi^{i+1}(x) = \varphi(\varphi^i(x))$ . Пусть  $i < j$ . Тогда имеем  $F(\varphi^i(x), \varphi^{j-1}(x)) = \text{и}$ , но  $F(\varphi^i(x), \varphi^{j-1}(x)) = \text{л}$ , т. е.  $\varphi^i(x) \neq \varphi^j(x)$ . Таким образом, данная последовательность состоит из различных элементов. Данная формула не выполняется в  $\mathbb{M} = \langle \mathcal{N}; F \rangle$ , где  $F(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow x \leq y$ .

$$14. \left( \exists x P_1(x) \& \exists x P_2(x) \& \exists x P_3(x) \& \exists x P_4(x) \& \exists x P_5(x) \& \right. \\ \left. \& \forall x \left( \bigwedge_{i=1}^5 (P_i(x) \supset \bigwedge_{j \neq i} \neg P_j(x)) \right) \right).$$

15. (а) Пусть в системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  данная формула ложна. Это означает, что в этой системе  $\neg \exists x A(x) = \text{и}$ ,  $\neg \forall x A(x) = \text{л}$ , т. е.  $\exists x A(x) = \text{л}$  и  $\forall x A(x) = \text{и}$ . Так как  $M \neq \emptyset$ , то такого быть не может.

(б) Если бы данная формула была ложной в системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , то в этой системе  $\exists x (A(x) \& (B \supset C(x))) = \text{и}$ ,  $\forall x (A(x) \supset \neg C(x)) = \text{и}$ ,

$\neg B = \text{л}$ . Пусть  $m \in M$  таково, что  $A(m) = \text{и}$ ,  $(B \supset C(m)) = \text{и}$ . Тогда  $(A(m) \supset \neg C(m)) = \text{и}$ , а значит,  $C(m) = \text{л}$ . Имеем  $B = \text{л}$ , что противоречит  $\neg B = \text{л}$ .

(в) Пусть в системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  данная формула ложна. Это означает, что в этой системе  $\forall x(A(x) \supset \neg B(x)) = \text{и}$ ,  $\exists x A(x) = \text{и}$ ,  $\forall x B(x) = \text{и}$ . Существует  $m \in M$  такое, что  $A(m) = \text{и}$ . Имеем  $(A(m) \supset \neg B(m)) = \text{и}$ , т. е.  $B(m) = \text{л}$ , что противоречит  $\forall x B(x) = \text{и}$ .

(г) Если бы данная формула была ложной в системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , то в этой системе  $\forall x(A(x) \supset \neg B(x)) = \text{и}$ ,  $\forall x A(x) = \text{и}$ ,  $\exists x B(x) = \text{и}$ . Существует  $m \in M$  такое, что  $B(m) = \text{и}$ . Имеем  $(A(m) \supset \neg B(m)) = \text{и}$ , т. е.  $A(m) = \text{л}$ , что противоречит  $\forall x A(x) = \text{и}$ .

18. Индукцией по числу шагов построения формулы, используя задачи 16 и 17; где необходимо, переименовывать связанные переменные по задаче 16 (с), (г).

19. (а)  $\forall x \exists y \forall z \exists u \neg A$ ;

(б)  $\exists x \exists z \forall y (A(x, y) \& B(z, y))$ ;

(в)  $\exists x \forall y \forall z (A(x, y) \vee B(x, z))$ ;

(г)  $\forall x \exists y \exists z \forall t (A(x, y) \supset B(z, t))$ .

20. Положим значение функции  $f_j^m$  на термах  $t_1, \dots, t_{m_j}$  равным терму  $f_j^m(t_1, \dots, t_{m_j})$ . Предикаты определяем произвольным образом.

21. (а) Пусть  $a_1, \dots, a_n \in M$ . Если  $\mathbb{M} \models \exists y_1 \dots \exists y_m B(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_m)$ , то берем в качестве  $\varphi_i(a_1, \dots, a_n)$  такие  $b_i$ , что  $\mathbb{M} \models B(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ .

Если  $\mathbb{M} \not\models \exists y_1 \dots \exists y_m B(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_m)$ , то в качестве  $\varphi_i(a_1, \dots, a_n)$  можно взять произвольные элементы.

(б) Следует из (а).

22.  $\forall x \forall y ((y > \varphi_1(x)) \supset (y > x)) \& (\varphi_2(x, y) < \varphi_1(x)) \& \neg (\varphi_2(x, y) < x)$ .

Например,  $\varphi_1(x) = x + 1$ ,  $\varphi_2(x, y) = x$ .

23.  $\forall x \forall y (P(x, \varphi_2(x, y)) \& \neg P(y, \varphi_1(x, y)))$ . Положим  $\varphi_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow P(x, 0) = \text{и}$ ;  $\varphi_2(x, y) = 1 \Leftrightarrow P(x, 1) = \text{и}$ .

24.  $z = \varphi_1(x, y) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad v = \varphi_2(x, y) = 1.$

25. Следует из задачи 21.

26. (а) Пусть в некоторой системе  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma; P \rangle$  формула  $\exists u \forall x \exists y A(u, x, y)$  истинна, а формула  $\exists u (\forall x (\exists y A(u, x, y) \supset$

$\supset P(u, x) \supset \forall x P(u, x)$  ложна. Тогда существует  $a \in M$  такое, что  $\mathbb{M} \models \forall x \exists y A(a, x, y)$ ,  $\mathbb{M} \models \forall x (\exists y A(a, x, y) \supset P(a, x))$  и  $\mathbb{M} \not\models \forall x P(a, x)$ . Пусть  $x_0 \in M$  таково, что  $P(a, x_0) = \text{л}$ . Тогда  $\mathbb{M} \not\models \exists y A(a, x_0, y)$  и  $\mathbb{M} \not\models \forall x \exists y A(a, x, y)$ . Приходим к противоречию.

Обратно, для любой системы  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  строим систему  $\mathbb{M}_1 = \langle M; \sigma; P \rangle$ , где  $\mathbb{M}_1 \models \forall u \forall x (P(u, x) \equiv \exists y A(u, x, y))$ . Тогда  $\mathbb{M}_1 \models (\forall x (\exists y A(a, x, y) \supset P(a, x)) \supset \forall x P(a, x))$  для некоторого  $a \in M$ . Поэтому  $\mathbb{M}_1 \models \forall x P(a, x)$  и, значит,  $\mathbb{M} \models \exists u \forall x \exists y A(u, x, y)$ .

(б) Заметим, что  $A \sim \exists v A$  и  $\exists u (\forall x (\exists y A(u, x, y) \supset P(u, x)) \supset \forall x P(u, x)) \sim \exists u \exists z \exists y \forall x ((A(u, z, y) \supset P(u, z)) \supset P(u, x))$ . Приводя  $A$  к пренексной нормальной форме (см. задачу 18) и используя несколько раз (а) и вышеприведенную эквивалентность, получим искомую  $A^*$ .

27. Имеем  $A \models A^*$  (см. указание к задаче 26 (а)).

Пусть  $A = \exists u \forall x \exists y Q(u, x, y)$ . Тогда в  $\mathcal{N}$ , где  $Q(u, x, y) = \text{и} \Leftrightarrow \Leftrightarrow y < x$ ,  $P(u, x)$  тождественно истинен,  $A^*$  истинна,  $A$  ложна.

29. Пусть  $b \in M$  и  $\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in M, \\ b, & \text{если } x \in M_1 \setminus M. \end{cases}$

Индукцией по числу шагов построения  $A$  доказать, что для любых  $c_1, \dots, c_n \in M_1$  имеем  $\mathbb{M}_1 \models A(c_1, \dots, c_n) \Leftrightarrow \mathbb{M} \models A(\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n))$ .

31. Использовать задачу 30.

32. Использовать задачу 31.

33. Если  $\forall x_1 \dots \forall x_m A(x_1, \dots, x_m)$  ложна в какой-то модели  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , то существуют  $a_1, \dots, a_m \in M$  такие, что  $A(a_1, \dots, a_m) = \text{л}$ . Тогда данная формула является ложной и в подмодели  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$ , где  $M_1 = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Если некоторые из  $a_1, \dots, a_m$  совпадают, то использовать задачу 29.

34. Если  $\exists x_1 \dots \exists x_m A(x_1, \dots, x_m)$  ложна в какой-то модели  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , то она является ложной и в подмодели  $\mathbb{M}_a = \langle \{a\}; \sigma \rangle$ , где  $a \in M$  (см. задачу 5 (б)).

35. Если  $\forall x_1 \dots \forall x_m \exists y_1 \dots \exists y_n A(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  ложна в  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ , то существуют  $a_1, \dots, a_m \in M$  такие, что  $\mathbb{M} \not\models \exists y_1 \dots \exists y_n A(a_1, \dots, a_m, y_1, \dots, y_n)$ . Тогда эта формула ложна в подмодели  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$ , где  $M_1 = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Далее применяем, если нужно, задачу 29.

36. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ . Рассмотрим отношение эквивалентности на  $M$ :  $x \sim y \Leftrightarrow ((P_1(x) \equiv P_1(y)) \& \dots \& (P_n(x) \equiv P_n(y))) = \text{и}$ . Пусть  $M_1 = M / \sim$ . Ясно, что  $\overline{M_1} \leq 2^n$ . Положим  $P_i([x]) = P_i(x)$ . Индукцией по числу шагов построения  $A(x_1, \dots, x_k)$  доказать, что для любых  $a_1, \dots, a_k \in M$  имеем  $\langle M_1; \sigma \rangle \models A([a_1], \dots, [a_k]) \Leftrightarrow \mathbb{M} \models A(a_1, \dots, a_k)$ .

37. (а) Выполнима на модели  $\mathbb{M} = \langle M; P \rangle$ , где  $M = \{a, b\}$  и  $P(a) = \text{и}$ ,  $P(b) = \text{л}$ .

(б) Выполнима на модели  $\mathbb{M} = \langle M; P_1, P_2, P_3 \rangle$ , где  $M = \{a\}$  и  $P_1(a) = P_2(a) = P_3(a) = \text{и}$ .

(в) Невыполнима.

38. Если подформула  $C$  формулы  $A$  имеет вид  $Qy C_1(x_1, \dots, x_k, y)$ , где  $Q$  есть  $\exists$  ( $\forall$ ), то привести  $C_1(x_1, \dots, x_k, y)$  к виду  $\bigvee_i \left( \&_j C_{ij} \right)$  (соответственно  $\&_i \left( \bigvee_j C_{ij} \right)$ ), где каждое  $C_{ij}$  начинается с квантора или имеет вид  $P(z)$  или  $\neg P(z)$  для некоторого  $P$  из  $\sigma$  и переменной  $z$ . Далее использовать эквивалентности из задачи 16. Повторяя процесс, получим требуемую формулу.

39. Пусть  $A$  выполнима в  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$ . Каждому  $C_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) сопоставляем элемент  $a_i \in M$  такой, что  $\mathbb{M} \models C_{i1}(a_i)$ , где  $C_i = (\exists x) C_{i1}(x)$ . Полагаем значение  $B_{ij}$  равным значению  $P_j(a_i)$ . Тогда  $A_1$  истинна.

Обратно. Пусть  $A_1$  = и при некоторых значениях переменных  $B_{ij}$ . Возьмем  $M = \{a_1, \dots, a_k\}$  и положим значение  $P_j(a_i)$  равным значению  $B_{ij}$ . Тогда  $\langle M; \sigma \rangle \models A$ .

40. Сначала использовать задачу 38. Затем привести полученную формулу  $B$  к д.н.ф.  $B_1$ , в которой вместо пропозициональных переменных подставлены  $\exists$ -составляющие. Далее применить задачу 39. При необходимости воспользоваться эквивалентностью

$$C \sim ((\exists x P(x) \& C) \vee (\exists x \neg P(x) \& C)).$$

41. (а) Выполнима. Например,  $M = \{a, b\}$ ,  $P(a) = Q(a) = Q(b) = \text{и}$ ,  $P(b) = \text{л}$ .

(б), (в) Невыполнима.

42. (а)  $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \forall x_{n+1} (x_1 = x_2 \vee \dots \vee x_1 = x_n \vee \vee x_1 = x_{n+1} \vee \dots \vee x_n = x_{n+1})$ .

(б) См. задачу 43.

$$(в) \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (\neg x_1 = x_2 \& \dots \& \neg x_1 = x_n \& \dots \& \neg x_{n-1} = x_n \& \& \forall y (y = x_1 \vee y = x_2 \vee \dots \vee y = x_n)).$$

43. (в) Использовать указание к задаче 38 и (б).

(г) Привести  $A$  к д.н.ф. и использовать (а).

44. Например,  $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots\}$  (см. задачу 43 (а)).

45. Записать формулу  $=$  и одним двуместным предикатом  $P$ , означающую, что предикат  $P$  иррефлексивен, симметричен и является всюду определенной 1-1-функцией.

## § 6. Исчисления предикатов

1. Вывод секвенции в ИС является выводом в ИПС.

2. Требуемый вывод получается из вывода в ИС заменой всех формул  $C$  на  $C(P \setminus B)$ .

3. Аналогично задачам 3 и 6 из § 3.

4. (а) Из аксиомы  $A(y) \vdash A(y)$  с помощью правил 18 и 19.

(б) Из аксиомы  $\forall x A(x) \vdash \forall x A(x)$  с помощью правил 16 и 17.

5. Использовать задачу 3 и правила 16 и 17.

8. Следует из задачи 7.

9. Следует из задач 6 и 8. См. также указание к задаче 18 из § 5.

11. Индукцией по числу шагов построения  $A$ , используя задачи 1, 9 из § 3 и задачи 6 и 8.

12. См. указание к задаче 28 из § 1.

14. (а) Нет.

(б) Да.

(в) Да.

15. (а), (б)  $u$  свободно для  $x$  в  $A(x)$  и  $u$  не входит свободно в  $A(x)$ .

17. (а) Из аксиомы 11 по правилу II.

(б) Из аксиомы 12 по правилу III.

(в) Доказать сначала  $(\forall y A(x, y) \supset \exists x A(x, y))$ .

18. (а) Нет.

(б) Да.

21. Пусть  $B_1, \dots, B_k$  — вывод  $B$  из  $\Gamma, A$  и  $\Delta(B_i)$  — соответствующие

этому выводу множества формул. Докажем индукцией по длине вывода, что каждая из формул  $(A \supset B_i)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) имеет вывод из  $\Gamma$ , причем в этом выводе  $\Delta_1(A \supset B_i) \subseteq \Delta(B_i) \cap \Gamma$ . Рассмотрим лишь случай,

когда  $B_i$  есть непосредственное следствие  $B_j = (C \supset A_1(x))$  по правилу 2. По предположению индукции имеем  $\Gamma \vdash (A \supset (C \supset A_1(x)))$  и  $\Delta_1((A \supset (C \supset A_1(x)))) \subseteq \Delta((C \supset A_1(x))) \cap \Gamma$  и  $x$  не входит свободно в  $C$  и формулы из  $\Delta((C \supset A_1(x)))$ . Возможны два случая.

1.  $A \notin \Delta((C \supset A_1(x)))$ . Тогда  $\Gamma \vdash (C \supset \forall y A_1(y))$  и  $\Gamma \vdash (A \supset (C \supset \forall y A_1(y)))$  по аксиоме 1. Имеем  $\Delta_1((A \supset (C \supset \forall y A_1(y)))) \subseteq \Delta((C \supset \forall y A_1(y))) \cap \Gamma$ .

2.  $A \in \Delta((C \supset A_1(x)))$ . Тогда  $x$  не входит свободно в  $A$  и в  $\Delta_1((A \supset (C \supset A_1(x))))$ . Тогда  $\Gamma \vdash (A \supset (C \supset A_1(x)))$ ,  $\Gamma \vdash ((A \& C) \supset A_1(x))$ ,  $\Gamma \vdash ((A \& C) \supset \forall y A_1(y))$ ,  $\Gamma \vdash (A \supset (C \supset \forall y A_1(y)))$ . Следовательно,  $\Delta_1((A \supset (C \supset \forall y A_1(y)))) = \Delta_1(A \supset (C \supset A_1(x)))$ .

24. (в) Пусть  $T$ —аксиома без свободных переменных. Тогда

$$\Gamma \vdash (T \supset A(x)), \Gamma \vdash (T \supset \forall x A(x)), \Gamma \vdash \forall x A(x).$$

26. В формулах вывода  $B$  из  $A$  заменить все связанные вхождения переменных  $z_1, \dots, z_n$  на переменные  $x_1, \dots, x_n$ , не входящие ни в одну из рассматриваемых формул. Доказать, что получится вывод  $B$  из  $A$ .

27. Использовать задачу 26.

28. Если в выводе  $A$  из  $\Gamma$  использовались константы или функциональные символы, не входящие в  $\sigma$ , то заменяем везде в выводе константы на переменные, не входящие в этот вывод, а  $f(x_1, \dots, x_n)$  на  $x_1$ . Доказать, что полученная последовательность формул будет выводом  $A$  из  $\Gamma$ . В полученном выводе все атомные подформулы с предикатами вне  $\sigma$  заменяем на  $R = \forall y Q(y, \dots, y)$ , где  $Q$  — предикатный символ из  $\sigma$ , а  $y$  — переменная, не встречающаяся в выводе. Доказать, что получится требуемый вывод.

29. Доказать аксиомы и правила вывода ИП в ИПС.

30. См. указание к задаче 30 из § 3.

31. См. задачи 8, 29 и 30.

32. Индукцией по длине вывода  $A$  из  $\Gamma$ .

34. Следует из задачи 32.

35. См. указание к задаче 25 из § 3.

37. Перенумеруем все предложения сигнатуры  $\sigma$ :  $A_0, A_1, A_2, \dots$

Положим

$$T_0 = T,$$

$$T_{i+1} = \begin{cases} T_i \cup \{A_i\}, & \text{если } T_i \cup \{A_i\} \text{ непротиворечиво,} \\ T_i \cup \{\neg A_i\} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$T = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} T_i.$$

Доказать, что все  $T_i$  непротиворечивы,  $T$  полно и непротиворечиво.

39. (б) Пусть  $\Gamma \not\vdash \forall x A(x)$ . Тогда  $\Gamma \vdash \neg \forall x A(x)$ ,  $\Gamma \vdash \exists x \neg A(x)$ ,  $\Gamma \vdash \neg A(t)$  и  $\Gamma \not\vdash A(t)$  для некоторого  $t$ .

41. Пусть  $A_0, A_1, \dots$  — все предложения сигнатуры  $\sigma' = \sigma \cup \{c_0, c_1, \dots\}$ , где  $c_i$  — предметные константы, не входящие в  $\sigma$ . Положим

$$T_0 = T,$$

$$T_{i+1} = \begin{cases} T_i \cup \{\neg A_i\}, & \text{если } T_i \cup \{A_i\} \text{ противоречиво,} \\ T_i \cup \{\exists x B(x), B(c_j)\}, & \text{если } T_i \cup \{A_i\} \text{ непротиворечиво, } A_i \\ & \text{имеет вид } \exists x B(x) \text{ и } c_j \text{ — первая} \\ & \text{константа, не входящая в } T_i \text{ и } A_i, \\ T_i \cup \{A_i\} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$T = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} T_i.$$

Доказать, что все  $T_i$  непротиворечивы,  $T$  непротиворечиво и полно в сигнатуре  $\sigma'$  (см. задачи 40, 36). Определим  $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$ . Пусть  $M$  — множество термов сигнатуры  $\sigma'$  без свободных переменных. Определим на  $M$  функции и предикаты из  $\sigma$ :

значение  $f(t_1, \dots, t_n)$  есть терм  $f(t_1, \dots, t_n)$ ;

$$\mathfrak{M} \models P(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow T \vdash P(t_1, \dots, t_n).$$

Доказать индукцией по числу шагов построения формулы  $A(x_1, \dots, x_n)$ , что для любых  $t_1, \dots, t_n \in M$  имеем  $\mathfrak{M} \models A(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow T \vdash A(t_1, \dots, t_n)$ . Тогда  $\mathfrak{M}$  есть искомая система.

42. Построенная в указании к задаче 41 система является счетной. См. также задачу 34.

43.  $\{\neg A\}$  непротиворечиво; см. далее задачи 41 и 42.

44. Следует из задачи 25, 33, 43.

45. Следует из задачи 43.

46. Следует из задачи 42.

47. Множество  $\Gamma \cup \{\neg A\}$  невыполнимо и, следовательно, противоречиво.

48. Если  $\Gamma$  невыполнимо, то  $\Gamma$  противоречиво (см. задачу 41). Так как всякий вывод содержит только конечное число формул, то существует конечное подмножество  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ , являющееся противоречивым и, значит, невыполнимым.

49. Если  $\Gamma$  невыполнимо, то существует конечное противоречивое подмножество  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  (см. указание к задаче 47). Конъюнкция формул из  $\Gamma_0$  составляет противоречивое множество.

50. Следует из задач 32 и 48.

51. Следует из задачи 50 и того, что всякий вывод конечен.

52. Следует из задачи 13 из § 5 и задачи 33.

53. Следует из задачи 4 из § 5 и задачи 44.

54. Использовать задачу 44.

(а), (б), (г) Нет.

(в), (д) Да.

## § 7. Аксиоматические теории

1. Индукцией по числу шагов построения  $t$  и  $A$ .

2. См. задачу 50 из § 6.

3. См. задачу 50 из § 6.

4. Пусть в  $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$  истинны все аксиомы  $T$ . Положим

$$x \sim y \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models x = y.$$

Доказать, что  $\sim$  — эквивалентность на  $M$ , а  $\mathfrak{M}_1 = \langle M/\sim; \sigma \rangle$ , где  $a_k = [a_k]$ ,  $f([x_1], \dots, [x_n]) = [f(x_1, \dots, x_n)]$ ,  $P([x_1], \dots, [x_m]) = [P(x_1, \dots, x_m)]$ , для  $a_k, f, P \in \sigma$ , есть требуемая модель.

5. Следует из задачи 41 из § 6 и задачи 4.

6. Следует из задачи 50 из § 6 и задачи 4.

7. Пусть  $C$  — атомная формула. Ищем в  $C$  первое вхождение термина  $f(t_1, \dots, t_n)$ , где  $t_1, \dots, t_n$  не содержат  $f$ . Пусть  $C'$  есть результат замены этого вхождения в  $C$  на переменную  $z$ , не входящую в  $C$ . Положим  $C^+ = \exists z(A(t_1, \dots, t_n, z) \& C')$ . Продолжая этот процесс, получим формулу  $C^*$  для  $C$ , не содержащую  $f$ . Если  $C$  не содержит  $f$ , то  $C^* = C$ .



Далее обозначаем через  $B^*$  для любой формулы  $B$  результат замены каждой атомной подформулы  $C$  на  $C^*$ . Утверждения задачи следуют из задачи 21 из § 5 и задачи 6.

8. Множество  $T_1 = T \cup \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots\}$ , где  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$  взяты из задачи 43 из § 5, выполнимо и, следовательно, непротиворечиво. Ввиду задачи 42 из § 6 множество  $T_1$  выполнимо в счетной системе  $\mathbb{M}$ . Поступая так же, как в указании к задаче 4, получим нормальную модель  $\mathbb{M}_1$  для  $T_1$ . Тогда  $\mathbb{M}_1$  бесконечна, так как  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$  истинны в  $\mathbb{M}_1$ .

9. Следует из задачи 5 и того, что множество формул является противоречивым тогда и только тогда, когда противоречиво некоторое конечное подмножество.

10. Множество  $T_1 = T \cup \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots\}$  (см. задачу 41 из § 5) выполнимо, так как выполнимо каждое его конечное подмножество (см. задачу 9). Любая модель для  $T_1$  бесконечна.

11. Следует из задачи 10.

12. Пусть  $G$  — множество аксиом теории групп. Множество  $G \cup \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots\} \cup \{\neg A\}$  (см. задачу 43 из § 5) невыполнимо. Тогда невыполнимо некоторое конечное подмножество  $G \cup \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\} \cup \{\neg A\}$  (см. задачу 9). Отсюда  $A$  истинна на группах с не менее чем  $n$  элементами.

13. Предложения  $\mathcal{E}_2$  и  $\neg \mathcal{E}_2$  (см. задачу 43 из § 5) не являются теоремами теории  $E$  (см. задачу 2).

14. Следует из задач 2 и 6.

15. См. задачу 43 из § 5.

16. (а) Нет.

(б) Да.

17. Предложение  $\forall x \exists y P(x, y)$  ложно в модели  $\mathbb{M} = \langle M; P \rangle$  теории  $T$ , где  $M = \{a\}$ ,  $P(a, a) = \text{л}$ ; предложение  $\neg \forall x \exists y P(x, y)$  ложно в модели  $\mathbb{M}_1 = \langle \mathcal{N}; P \rangle$  теории  $T$ , где  $P(x, y) = \text{и} \Leftrightarrow x < y$ . Поэтому оба эти предложения невыводимы в  $T$  и, следовательно,  $T$  неполна.

18. Стандартная модель арифметики  $\mathbb{N}$  является моделью теории  $Q$ .

19. Для каждой из аксиом  $Q_i$  приведем пример системы  $\mathbb{M} = \langle M; \hat{s}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{0} \rangle$  такой, что на этой системе истинны все аксиомы  $Q_1 - Q_7$ , кроме  $Q_i$ ; это будет доказывать независимость системы аксиом  $\{Q_1, \dots, Q_7\}$ .

Для  $Q_1$ :  $M = \{0, 1\}$ ,  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{s}(x) = 1$  для всех  $x$ ,  $x \hat{+} y = \max(x, y)$ ,  $x \hat{\cdot} y = \min(x, y)$ .

Для  $Q_2$ :  $M = \{0\}$ ,  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{s}(0) = 0$ ,  $0 \hat{+} 0 = 0 \hat{\cdot} 0 = 0$ .

Для  $Q_3$ :  $M$  — множество ординальных чисел, меньших  $\omega \cdot 2$ ;  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{s}(\alpha) = \alpha + 1$ ,  $\hat{+}$  и  $\hat{\cdot}$  — обычные сложение и умножение ординальных чисел.

Для  $Q_4$ :  $M = \mathcal{N}$ ;  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{s}(x) = x + 1$ ,  $x \hat{+} y = y$ ,  $x \hat{\cdot} y = 0$ , если  $y = 0$ ,  $x \hat{\cdot} y = x$ , если  $y \neq 0$ .

Для  $Q_5$ :  $M = \mathcal{N}$ ;  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{s}(x) = x + 1$ ,  $x \hat{+} y = x$ ,  $x \hat{\cdot} y = 0$ .

Для  $Q_6$ :  $M = \mathcal{N}$ ;  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{s}(x) = x + 1$ ,  $x \hat{+} y = x + y$ ,  $x \hat{\cdot} y = x \cdot y + 1$ .

Для  $Q_7$ :  $M = \mathcal{N}$ ;  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{s}(x) = x + 1$ ,  $x \hat{+} y = x + y$ ,  $x \hat{\cdot} y = y$ .

20. (а) Пусть

$$M = \mathcal{N} \cup \{a\}; \hat{0} = 0,$$

$$\hat{s}(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \in \mathcal{N}, \\ a, & \text{если } x = a, \end{cases} \quad x \hat{+} y = \begin{cases} x + y, & \text{если } x, y \in \mathcal{N}, \\ a & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$x \hat{\cdot} y = \begin{cases} x \cdot y, & \text{если } x, y \in \mathcal{N}, \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0, \\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда  $\mathbb{M} = \langle M; \hat{s}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{0} \rangle$  — модель для  $Q$ , но формула  $\neg x = s(x)$  ложна при  $x = a$ .

(б) — (м) Пусть

$$M = \mathcal{N} \cup \{a, b\}; \hat{0} = 0, \hat{s}(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \in \mathcal{N}, \\ b, & \text{если } x = a, \\ a, & \text{если } x = b, \end{cases}$$

$x \hat{+} y = x + y$ , если  $x, y \in \mathcal{N}$ ;  $x \hat{+} y = b$ , если  $y = a$  или ( $x = a$  и  $y$  нечетно) или ( $x = b$  и  $y$  четно);  $x \hat{+} y = a$ , если  $y = b$  или ( $x = a$  и  $y$  четно) или ( $x = b$  и  $y$  нечетно).

$x \hat{\cdot} y = x \cdot y$ , если  $x, y \in \mathcal{N}$ ;  $x \hat{\cdot} y = 0$ , если  $y = 0$ ;  $x \hat{\cdot} y = b$ , если ( $x = a$  и  $y \neq 0$ ) или ( $x$  нечетно и  $y = b$ );  $x \hat{\cdot} y = a$ , если ( $x \in \mathcal{N}$  и  $y = a$ ) или ( $x$  четно и  $y = b$ ) или ( $x = b$  и  $y \neq 0$ ).

Тогда  $\mathbb{M} = \langle M; \hat{s}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{0} \rangle$  — модель для  $Q$ , но все формулы (б) — (м) при некоторых значениях  $x, y, z$  ложны на  $\mathbb{M}$ .

21. (а) Если  $y = s(z)$ , то  $0 = x + y = x + s(z) = s(x + z)$ , что противоречит  $Q_2$ . Если  $y = 0$ , то  $x + 0 = 0$  и  $x + 0 = x$  (по  $Q_4$ ). По Е2 и Е3 имеем  $x = 0$ .

(б) Если  $y = s(z)$ , то  $0 = x \cdot y = x \cdot s(z) = xz + x$  ввиду (а)  $xz = 0$  и  $x = 0$ .

22. Рассмотрим модель  $\mathbb{M} = \langle M; s, +, \cdot, 0 \rangle$  для  $Q$ . Докажем, что последовательность  $0, s(0), s(s(0)), \dots$  состоит из различных элементов. Если  $s^i(0) = s^{i+k}(0)$ , то, применяя  $i$  раз  $Q_1$ , получим, что  $0 = s^k(0)$ , а это по  $Q_2$  может выполняться лишь при  $k = 0$ .

23. (а) См. указание к задаче 18.

(б) См. указание к задаче 20 (а).

(в) См. указание к задаче 20 (б).

(г) Считая  $a_0 = \aleph_0$ ,  $a_{i+1} = 2^{a_i}$ , положить  $s(a_i) = a_i$  при любом  $i$ ,  $s(x) = x + 1$  для  $x \in \mathcal{N}$ . Сложение и умножение определить, как для кардинальных чисел.

24. (а) Пусть  $r$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{Z}$ . Положим  $\hat{0} = r(0)$ ,  $\hat{s}(x) = rsr^{-1}(x)$ ,  $x \hat{+} y = r(r^{-1}(x) + r^{-1}(y))$ ,  $x \hat{\cdot} y = r(r^{-1}(x) \cdot r^{-1}(y))$ , где  $0, s, +, \cdot$  определяются, как в стандартной модели.

(б), (в) Аналогично (а).

25. Моделью теории  $P$  служит стандартная модель арифметики.

26. С помощью аксиомы  $P_A$  для  $A(x) \Leftarrow (\neg x = 0 \supset \exists y (x = s(y)))$  легко доказать  $Q_3$ .

27. Докажем, например, (а). Пусть  $A(x) \Leftarrow \neg (x = s(x))$ . Тогда  $A(0)$  выводима по  $Q_2$ ,  $\forall x (A(x) \supset A(s(x)))$  по  $Q_1$ . По  $P_A$  имеем  $\forall x A(x)$ .

28. Пусть  $\sigma_1 = \langle s, +, \cdot, 0, c \rangle$  и  $T$  — теория, аксиомами которой являются все аксиомы теории  $P$  и формулы  $\neg c = \Delta_0$ ,  $\neg c = \Delta_1, \dots$

Тогда  $T$  выполнима ввиду задачи 9. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; s, +, \cdot, 0, c \rangle$  — модель для  $T$ . Допустим, что  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$  изоморфны и  $\varphi$  — изоморфизм  $\mathbb{M}$  на  $\mathbb{N}$ . Тогда  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(s(0)) = s(\varphi(0)) = s(0)$ ,  $\dots$  Имеем  $\varphi(c) = k$  для некоторого  $k \in \mathcal{N}$ , что противоречит взаимной однозначности  $\varphi$ .

31. (а) Применить аксиому индукции  $P_B$  для

$$B(x) \Leftarrow \forall z (z < x \supset A(z)).$$

(б) Использовать (а) для формулы  $\neg A(x)$ .

(в) Следует из (б).

33. (а)  $(\neg x = \Delta_1 \& \forall y \forall z (x = y \cdot z \supset (y = \Delta_1 \vee z = \Delta_1)))$ .

(б) Обычное арифметическое доказательство.

34. (в) Пусть  $p = d(y, u)$ . Тогда  $z/x, z/y$ , а так как  $x = y \cdot \left[ \frac{x}{y} \right] + u$ , то  $z/u$ . Имеем  $z/p$ . Обратно,  $p/y, p/u$ , значит,  $p/x$  и  $p/z$ . Имеем  $p = z$ .

(г) Доказать вначале индукцией по  $x$  утверждение для  $x > y > 0$ .

(д) Пусть  $u_i = \left[ \frac{x_1 \dots x_n}{x_i} \right]$ . Так как  $d(u_i, x_i) = \Delta_i$ , то существуют  $z_i, v_i$  такие, что  $u_i z_i = x_i v_i + 1$  (см. (г)). Искомое  $z$  равно  $u_1 z_1 y_1 + \dots + u_n z_n y_n$ .

(е) Пусть  $k_i = \beta(x, y, i)$  для  $0 \leq i \leq z$ ,  $j = \max(z, u, k_0, \dots, k_z)$ . Положим  $y_1 = j!$ . Для чисел  $u_i = 1 + (i+1)y_1$  и  $u_k = 1 + (k+1)y_1$  при  $i \neq k$  и  $0 \leq i, k \leq z+1$  имеем  $d(u_i, u_k) = 1$ . По (д) существует  $x_1$  такое, что  $\text{rest}(x_1, u_i) = k_i$  для  $0 \leq i \leq z$  и  $\text{rest}(x_1, u_{z+1}) = u$ .

35. Докажем, например, что  $R_4^{(n)}$  и  $R_5^{(n)}$  выводимы в  $Q$  для каждого  $n \in \mathcal{N}$ .

$R_4^{(0)} = \forall x (x \leq 0 \supset x = 0)$ . Пусть  $x \leq 0$  и  $\neg x = 0$ . Тогда найдутся  $z$  и  $y$  такие, что  $z + x = 0$  и  $x = s(y)$ . Имеем  $0 = z + x = z + s(y) = s(z + y)$ , что противоречит  $Q_2$ . Пусть  $R_4^{(n)}$  уже доказано и  $x \leq \Delta_{n+1}$ . Тогда найдется  $z$  такое, что  $z + x = \Delta_{n+1}$ . Если  $x = 0$ , то  $x = \Delta_0$ . Если  $\neg x = 0$ , то  $x = s(y)$  для некоторого  $y$ . Имеем  $s(\Delta_n) = \Delta_{n+1} = z + x = z + s(y) = s(z + y)$ . Таким образом, по  $Q_1$  имеем  $z + y = \Delta_n$ . Тогда по  $R_4^{(n)}$  имеем ( $y = \Delta_0 \vee \dots \vee y = \Delta_n$ ). В этом случае ( $x = \Delta_0 \vee \dots \vee x = \Delta_{n+1}$ ). Итак,  $R_4^{(n+1)}$  доказано.

По  $Q_4$  имеем  $0 \leq x$  и, значит,  $R_5^{(0)}$ . Пусть  $R_5^{(n)}$  уже доказано. Если  $x = 0$ , то  $x \leq \Delta_{n+1}$ . Если  $\neg x = 0$ , то найдется  $y$  такое, что  $x = s(y)$ . Если  $y \leq \Delta_n$ , то,  $z + y = \Delta_n$  для некоторого  $z$ , а значит,  $z + s(y) = z + x = \Delta_{n+1}$ , т. е.  $x \leq \Delta_{n+1}$ . Если  $\Delta_n \leq y$ , то  $z + \Delta_n = u$  для некоторого  $z$ , а значит,  $z + \Delta_{n+1} = s(y) = x$ , т. е.  $\Delta_{n+1} \leq x$ . Итак,  $R_5^{(n+1)}$  доказано.

36. Нет. Например, из  $R_1^{(00)}, R_1^{(11)}, R_3^{(02)}$  следует  $R_3^{(01)}$ .

37. Пусть  $\mathfrak{M} = \langle M; s, +, \cdot, 0 \rangle$  есть модель для  $R$ . Положим  $M_1 = \{\Delta_i \mid i \in \mathcal{N}\}$ . Рассмотрим подсистему  $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1; s, +, \cdot, 0 \rangle$ . Изоморфизмом между  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}_1$  является отображение  $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow M_1$ , где  $\varphi(i) = \Delta_i$ .

38. (а) Из  $ZF_3$ , где  $A \leq \neg z = z$ . Единственность 0 следует из  $ZF_1$ .

(б) Из  $ZF_2$  и  $ZF_1$ .

(в) Из (б):  $\{x\} = \{x, x\}$ .

(г) Из  $ZF_1$  и  $ZF_2$ . См. указание к задаче 23 из § 1 части I.

(д) Следует из (г).

(е) Из  $ZF_4$  и  $ZF_1$ .

(ж) Из  $ZF_1$  и  $ZF_3$  для  $A \approx \exists z_1 \exists z_2 (z_1 \in x_1 \& z_2 \in x_2 \& z = \langle z_1, z_2 \rangle)$ , взяв  $P(P(x_1 \cup x_2))$  вместо  $x$ .

(з) Следует из (ж).

(и) Следует из (г) и  $ZF_9$  для  $A(t, s) \approx \exists z (\langle s, z \rangle \in t)$ .

(к) Из  $ZF_5$  и  $ZF_1$ .

(л) Взять в (г) пару  $\{x, y\}$  в качестве  $x$ .

(м) Из  $ZF_3$  при  $A \approx x \in y$ .

(н) Из  $ZF_3$ , взяв  $\cup x$  вместо  $x$  и  $A(t) \approx \forall u (u \in t \supset z \in u)$  при  $t = x$ .

39. (а) Из  $ZF_8$ , взяв  $\{x\}$  вместо  $x$ .

(б) Из  $ZF_8$ , взяв  $\{x, y\}$  вместо  $x$ .

(в) Из  $ZF_8$ , взяв  $\{x, y, z\}$  вместо  $x$ .

40. (а) Использовать задачу 39 (б), (в).

(б) Следует из (а).

(в) Следует из (а), задачи 39 (а) и  $ZF_8$ .

(д) По  $ZF_3$  существует множество  $\{z \mid z \in x \& \neg A(z)\}$ . Далее использовать (в).

(е) Пусть  $A(x, y) \approx (x \in y \vee y \in x \vee x = y)$ . Из  $\neg \forall x \forall y A(x, y)$  можно вывести по (д) существование таких  $x_0$  и  $y_0$ , что  $\neg A(x_0, y_0)$ ,  $\forall t \forall u (t \in x_0 \supset A(t, t))$  и  $\forall t (t \in y_0 \supset A(x_0, t))$ . Тогда  $x_0 \subseteq y_0$  и  $y_0 \subseteq x_0$ . Приходим к противоречию.

41. (в) Пусть  $x$  удовлетворяет  $ZF_7$  и  $z = \{y \mid y \in x \& \text{Ord}(y)\}$ . Тогда  $L(\cup z)$ .

(г) Следует из (в) и задачи 40 (д), (з).

42. (в) Следует из задач 38 (в), (л) и 41 (д).

(е) Пусть  $(N(x) \& \neg x = 0)$  и  $\neg \exists y (N(y) \& x = s(y))$ . Поэтому  $L(x)$  ввиду (б). Тогда  $\neg x \in \omega$ . Приходим к противоречию.

43. Следует из задачи 40 (д).

44. (а), (г) Использовать принцип индукции по  $x$  (см. задачу 43) для формул

$$\begin{aligned} \forall y (N(y) \supset \exists! z (N(z) \& x + y = z)), \\ \forall y (N(y) \supset \exists! z (N(z) \& x \cdot y = z)). \end{aligned}$$

45. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — вывод  $A$  в теории  $P$ . Обозначим через  $A_i^\forall$  формулу  $\forall x_1 \dots \forall x_m A_i$ , где  $x_1, \dots, x_m$  — все свободные переменные  $A_i$ . Доказать индукцией по  $i$ , что  $\rho_N(A_i^\forall)$  есть теорема  $ZF$ , используя задачи 42, 43, 44.

## § 8. Фильтрованные произведения

4. Если фильтр  $D$  — неглавный, то для любого  $X \in D$  существует бесконечная строго убывающая цепочка  $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$  множеств из  $D$ .

5. Следует из задачи 4.

6. См. задачу 66 из § 3 части I.

7. Пусть  $a, b \in I$ ,  $a \neq b$ ,  $D_1 = \{X \mid a \in X \subseteq I\}$ ,  $D_2 = \{X \mid b \in X \subseteq I\}$ . Тогда не существует фильтра  $D$ , содержащего  $D_1$  и  $D_2$ , так как  $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ .

8. Следует из задачи 64 из § 3 части I.

10. Пусть  $\Psi$  содержится в фильтре Фреше  $\Phi$ ,  $X_1, \dots, X_k \in \Psi$ . Тогда  $X_1 \cap \dots \cap X_k \in \Phi$ . Если  $\overline{X_1 \cap \dots \cap X_k} < \bar{I}$ , то  $I \setminus (X_1 \cap \dots \cap X_k) \in \Phi$ . Противоречие.

Обратно. Пусть  $\overline{X_1 \cap \dots \cap X_k} = \bar{I}$ ,  $\overline{I \setminus Y} < \bar{I}$ . Тогда

$$\overline{X_1 \cap \dots \cap X_k \cap Y} = \overline{(X_1 \cap \dots \cap X_k) \setminus (X_1 \cap \dots \cap X_k \cap (I \setminus Y))} = \bar{I}.$$

Поэтому  $\Psi \cup \Phi$ , где  $\Phi$  — фильтр из задачи 9, содержится в некотором фильтре Фреше.

11. Следует из задачи 5.

13. Следует из задачи 11.

14. См. задачу 67 из § 3 части I.

15. Пусть  $D$  — фильтр над  $I$ ,  $X \subseteq I$ ,  $X \notin D$ . Тогда  $Y \cap (I \setminus X) \neq \emptyset$  для любого  $Y \in D$ . Поэтому  $D \cup \{I \setminus X\}$  содержится в некотором ультрафильтре  $\Phi$  (см. задачи 12 и 14).

18. От противного. Пусть  $X_1 \in G_1 \setminus F, \dots, X_n \in G_n \setminus F$ . Тогда  $X_1 \cup \dots \cup X_n \in (G_1 \cap \dots \cap G_n) \setminus F$  (см. задачу 17).

19. Например,  $G_j = \{X \mid j \in X \subseteq J\}$ ,  $F$  — ультрафильтр Фреше над  $J$ .

20. Пусть  $A = \bigcap_{X \in F} X$ ,  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ . Тогда  $\{a\} \notin F$ ,  $I \setminus \{a\} \notin F$ .

Противоречие.

22. Пусть  $Y_i \in D$  для  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Положим  $X_i = (Y_0 \cap \dots \cap Y_i) \setminus \bigcap_{j \in \mathcal{N}} Y_j$ .

23. Докажем транзитивность  $\sim$ . Пусть  $f_1 \sim f_2, f_2 \sim f_3$ . Тогда

$$I_1 = \{i \mid f_1(i) = f_2(i)\} \in D, I_2 = \{i \mid f_2(i) = f_3(i)\} \in D,$$

$$I_1 \cap I_2 \subseteq I_3 = \{i \mid f_1(i) = f_3(i)\} \in D \text{ и } f_1 \sim f_3.$$

25. Требуемый изоморфизм есть  $\varphi(f) = \{f\}$ , где  $f \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ .

26. Пусть  $I = \{0, 1\}$ ,  $D = \{\{0\}, I\}$ ,  $\mathfrak{M}_i = \langle M_i; P^i \rangle$ , где  $\mathfrak{M}_0 \models P(m)$  для любого  $m \in M_0$ ,  $\mathfrak{M}_1 \not\models P(m)$  для любого  $m \in M_1$ . Тогда гомоморфизм  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$  на  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  не является сильным.

27. Доказать индукцией по длине формулы  $A$  следующее утверждение.

Пусть  $A(x_1, \dots, x_n)$  есть формула без  $\neg$  и  $\supset$ , все свободные переменные которой есть  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда, если  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i \models A(f_1, \dots, f_n)$ , то

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \models A(f_1 / D, \dots, f_n / D).$$

28. Проверить, исходя из определения, что для любых  $f, g, f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ :

$$1) f / D = g / D \Rightarrow \varphi(f / D) = \varphi(g / D);$$

$$2) \varphi(F^n(f_1 / D, \dots, f_n / D)) = F^n(\varphi(f_1 / D), \dots, \varphi(f_n / D));$$

$$3) P^n(f_1 / D, \dots, f_n / D) = \text{и} \Rightarrow P^n(\varphi(f_1 / D), \dots, \varphi(f_n / D)) = \text{и}.$$

29. Изоморфизм  $\varphi: \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \rightarrow \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j / D_j$  определяется следующим образом:  $\varphi(f / D) = f' / D_j$ , где  $f' \in \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j$ ,  $f'(j) = f(j)$  для всех  $j \in J$ . См. далее задачу 25.

30. Следует из задачи 29, так как каждый фильтр над конечным множеством является главным.

31. Изоморфизм  $\varphi: \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \rightarrow \prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} \mathfrak{M}_i / D_k \right) / D^*$  определяется следующим образом:  $\varphi(f / D) = f^* / D^*$ , где  $f^* \in \prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} \mathfrak{M}_i / D_k \right)$ ,  $f^*(k) = f' / D_k$ ,  $f' \in \prod_{i \in I_k} \mathfrak{M}_i$ ,  $f'(i) = f(i)$ .

32. Изоморфизм  $\varphi: \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \rightarrow \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j \cdot \left( \prod_{\beta \in J'} \mathfrak{M}_\beta / D_{J'} \right)$  определяется следующим образом:  $\varphi(f/D) = \langle f_1, f_2 / D_{J'} \rangle$ , где  $f_1 \in \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j$ ,  $f_1(j) = f(j)$  для  $j \in J$ ,  $f_2 \in \prod_{\beta \in J'} \mathfrak{M}_\beta$ ,  $f_2(\beta) = f(\beta)$  для  $\beta \in J'$ .

35. Пусть  $\psi: \prod_{\alpha \in I/\sim} C_\alpha \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$  определяется следующим образом:  $\psi(f)(i) = f([i])$  для  $f \in \prod_{\alpha \in I/\sim} C_\alpha$ . Тогда  $\varphi(f/D^\sim) = \psi(f)/D$  есть требуемый изоморфизм.

36. Для  $i \in I$  положим  $L_i = \{k \mid i \in I_k\}$ . Тогда для любых  $i_1, \dots, i_s \in I$  имеем  $L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_s} \neq \emptyset$ . Положим  $D = \{X \mid L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_s} \subseteq X \subseteq K \text{ для некоторых } i_1, \dots, i_s\}$ . Изоморфное вложение  $\varphi: \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i \rightarrow \prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} \mathfrak{M}_i \right) / D_1$  определяется следующим образом:  $\varphi(f) = f' / D_1$ ,  $(f'(k))(i) = f(i)$  для  $i \in I_k$ .

37. Пусть  $A(x)$  условно фильтруется по  $D$  и  $I_1 = \{i \mid \mathfrak{M}_i \models \exists x A(x)\} \in D$ . Тогда для любого  $i \in I_1$  существует  $a_i \in \mathfrak{M}_i$  такое, что  $\mathfrak{M}_i \models A(a_i)$ . Возьмем произвольную функцию  $f \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$  такую, что  $f(i) = a_i$  для  $i \in I_1$ . Получаем  $I_1 \subseteq \{i \mid \mathfrak{M}_i \models A(f(i))\} = I_2$  и  $I_2 \in D$ , т. е.  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \models A(f/D)$ . Отсюда  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \models \exists x A(x)$ .

38. Пусть  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \models \exists x A(x)$ . Тогда  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \models A(f/D)$  для некоторого  $f \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ . Отсюда  $\{i \mid \mathfrak{M}_i \models A(f(i))\} \in D$  и  $\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \exists x A(x)\} \in D$ .

41. Следует из задач 38, 39, 40.

42. Имеем  $\{i \mid \mathfrak{M}_i \models (A \supset B)\} \in D$ ,  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \not\models (A \supset B) \Rightarrow \{i \mid \mathfrak{M}_i \not\models A\} \cup \{i \mid \mathfrak{M}_i \models B\} \in D$ ,  $I_1 = \{i \mid \mathfrak{M}_i \models A\} \in D$ ,  $I_2 = \{i \mid \mathfrak{M}_i \models B\} \notin D \Rightarrow ((I \setminus I_1) \cup I_2) \cap I_1 = I_2 \cap I_1 \in D \Rightarrow I_2 \in D$ . Противоречие.

43. Следует из задач 37—39, 42.



44. Следует из задачи 41 и задачи 21 (б) из § 4.

45. Следует из задачи 43 и задачи 20 (а), (в) из § 4.

46. Следует из задачи 43 и задачи 21 (а) из § 4.

47. Следует из задачи 43.

48. См. задачу 42 (в) из § 5 и задачу 41.

49. См. задачу 42 (а) из § 5 и задачу 41.

50. См. задачу 44 из § 5 и задачу 43.

51. Для любого  $n$  имеем  $\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \mathcal{E}_n\} \in D$ , где  $\mathcal{E}_n$  — формула из задачи 43 из § 5 (см. задачу 5). См. далее задачу 41.

53. Пусть  $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle = \prod_{i \in \mathcal{N}} \mathfrak{M}_i / D$ . Построим 1-1-функцию

$\varphi: 2^{\mathcal{N}} \rightarrow M$ . Каждому  $n \in \mathcal{N}$  сопоставляем число  $k_n$  такое, что  $2^{k_n} \leq \overline{\mathfrak{M}_n} < 2^{k_n+1}$ . Пусть  $B_k = 2^{\mathcal{N}_k}$ , где  $\mathcal{N}_k = \{0, \dots, k-1\}$ . Существует 1-1-функция  $\varphi_n: B_{k_n} \rightarrow M_n$ . Определим  $\psi: 2^{\mathcal{N}} \rightarrow \prod_{n \in \mathcal{N}} \mathfrak{M}_n$ . Если

$\gamma \in 2^{\mathcal{N}}$  и  $\gamma_k$  состоит из первых  $k$  членов последовательности  $\gamma$ , то  $(\psi(\gamma))(n) = \varphi_n(\gamma_{k_n})$ . Тогда  $\varphi(\gamma) = \psi(\gamma)/D$  есть требуемая 1-1-функция.

54. Из каждого  $M_i$  выделим подмножество  $N_i$ , мощность которого есть  $\min(i, \overline{M_i})$ . Утверждение следует из задач 49 и 50.

55. Пусть  $I = X_0 \supset X_1 \supset \dots$ ;  $X_n \in D$ ,  $\bigcap_{k \in \mathcal{N}} X_k = \emptyset$  (см. задачу 22);  $I_n = \{i \mid \overline{M_i} < n\} \notin D$ ,  $Y_n = X_n \setminus I_n$ . Тогда  $i \in Y_n \Rightarrow \overline{M_i} \geq n$ . Положим  $i \sim j \Leftrightarrow \exists n (i, j \in Y_n \setminus Y_{n+1})$ . Пусть для  $\alpha \in I/\sim$  имеем  $C_\alpha = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , если  $\alpha = Y_n \setminus Y_{n+1}$ . Тогда  $\prod_{i \in I} \overline{M_i}/D \geq \prod_{\alpha \in I/\sim} \overline{C_\alpha}/D^\sim = 2^{\aleph_0}$ . (См. задачи 35, 52, 54.)

56. Можно считать, что  $\mathcal{N}$  есть основное множество каждого  $\mathfrak{M}_i$ . Пусть  $f \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/D$ . Положим  $I_n = \{i \mid f(i) = n\}$ . Тогда  $I = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} I_n$ . Если  $I_n \notin D$  для любого  $n$ , то  $\bigcup_{i \in \mathcal{N} \setminus \{n\}} I_i \in D$  для любого  $n$  и

$\bigcap_{n \in \mathcal{N}} \left( \bigcup_{i \in \mathcal{N} \setminus \{n\}} I_i \right) = \emptyset \in D$ ; противоречие. Поэтому  $I_n \in D$  для некоторого  $n \in \mathcal{N}$ . Следовательно,  $f \sim_D f_n$ , где  $f_n(i) = n$  для всех  $i \in I$ .

57. с. Следует из задачи 53, так как если  $a_i$  есть минимальный элемент в  $\mathbb{M}_i$ , то  $f/D$ , где  $f(i) = a_i$  есть минимальный элемент в  $\prod_{i \in I} \mathbb{M}_i/D$ .

58. Пусть  $\{I_k\}_{k \in K}$  — семейство всех конечных непустых подмножеств множества  $I$ . Тогда  $K \sim I$ . Поэтому (см. задачу 33)

$$2^{\bar{I}} \leq \overline{\mathbb{M}^I} \leq \overline{\prod_{k \in K} \mathbb{M}_k^I/D_2} = \overline{\prod_{i \in I} \mathbb{M}_i/D_1} = \overline{\mathbb{M}^I/D_1},$$

где  $D_2$  есть прообраз  $D_1$  относительно изоморфизма между  $K$  и  $I$ .

59. Следует из задачи 58.

60. Пусть  $X_1 \supset X_2 \supset \dots$  — последовательность множеств из  $D$  такая, что  $\bigcap_{n \in \mathcal{N}} X_n = \emptyset$  (см. задачу 22). Каждому  $n \in \mathcal{N}$  сопоставляем элемент  $b_n$  из  $\mathbb{M}$  так, что  $b_n \neq b_m$  при  $n \neq m$ . Определим  $f \in \prod_{i \in I} \mathbb{M}_i$  следующим образом: если для  $i \in I$  число  $n_i$  есть наименьшее такое  $n$ , что  $i \notin X_n$ , то полагаем  $f(i) = b_{n_i}$ . Допустим, что  $f/D = \varphi(a)$  для некоторого  $a$  из  $\mathbb{M}$ . Тогда  $X = \{i \mid f(i) = a\} \in D$ . Для  $i \in X$  имеем  $f(i) = b_j$  для некоторого  $j \in \mathcal{N}$ . Пересечение  $X \cap X_{j+1}$  непусто, так как принадлежит  $D$ . Возьмем  $i \in X \cap X_{j+1}$ . Тогда  $f(i) = b_{n_i} \neq b_j$ , так как  $n_i \geq j+1$ . Противоречие.

## § 9. Аксиоматизируемые классы

2. Пусть  $\Sigma_1$  — система аксиом для класса  $K_1$ ,  $\Sigma_2$  — для класса  $K_2$ . Тогда  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  есть система аксиом для  $K_1 \cap K_2$ ; системой аксиом для  $K_1 \cup K_2$  является  $\Sigma = \{(A_1 \vee A_2) \mid A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2\}$ .

3. Пусть  $\varphi$  — изоморфизм из  $\mathbb{M}$  на  $\mathbb{M}'$ . Доказать (индукцией по длине формулы), что для любой формулы  $A(x_1, \dots, x_n)$  и любых  $m_1, \dots, m_n$  из  $\mathbb{M}$  выполнено соотношение

$$\mathbb{M} \models A(m_1, \dots, m_n) \Leftrightarrow \mathbb{M}' \models A(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_n)).$$

4. Следует из задачи 41 из § 8.

5. Если  $\Sigma$  есть система аксиом для  $K$ , то  $\Sigma \cup \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots\}$  (см. задачу 43 из § 5) есть система аксиом для  $K'$ .

6. Пусть для  $i \in \mathcal{N}$ ,  $\mathfrak{M}_i$  есть система из  $K$  с числом элементов не менее  $i$ ,  $D$  — неглавный ультрафильтр над  $\mathcal{N}$ . Тогда  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathfrak{M}_i / D$  удовлетворяет всем требованиям задачи (см. задачу 53 из § 8).

7. Следует из задачи 6.

8. Пусть  $K$  — класс полей конечной характеристики. Для любого простого числа  $p$  существует поле  $\mathfrak{M}_p$  характеристики  $p$ ; это поле определяется аксиомами

$$R_p \approx \forall x (px = 0),$$

$$\Phi_p \approx \exists x (\neg x = 0 \& \neg 2x = 0 \& \dots \& \neg (p-1)x = 0)$$

и аксиомами поля.

Пусть  $P$  — множество простых чисел,  $D$  — неглавный ультрафильтр над  $P$ . Тогда в  $\mathfrak{M} = \prod_{p \in P} \mathfrak{M}_p / D$  истинны все формулы  $\Phi_p$ , поэтому  $\mathfrak{M} \notin K$ .

9. Пусть  $M_k \supseteq B_k = \{-k, \dots, -1\}$ , где  $-k < \dots < -1 < 0$ ,  $D$  — неглавный ультрафильтр над  $\mathcal{N}$ . Положим  $f_k(i) = -(i+1)$  для  $i \leq (k-1)$ ,  $f_k(i) = -k$  для  $i \geq k$ . Тогда  $f_0/D > f_1/D > \dots$  и  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathfrak{M}_i / D$

не является вполне упорядоченным. Если  $D$  — главный ультрафильтр, то  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathfrak{M}_i / D \approx \mathfrak{M}_{i_0}$  для некоторого  $i_0 \in \mathcal{N}$  (см. задачу 29 из § 8). Неаксиоматизируемость следует из задачи 4.

10. Пусть  $K$  замкнут относительно ультрапроизведений и элементарной эквивалентности,  $T$  — множество предложений, истинных на всех системах из  $K$ . Пусть  $T$  выполнимо в  $\mathfrak{M}$ ,  $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$  — множество предложений, истинных в  $\mathfrak{M}$ . Так как  $\neg A_i \notin T$ , то для любого  $i \in I$  существует система  $\mathfrak{M}_i \in K$  такая, что  $\mathfrak{M}_i \models A_i$ . Положим  $I_j = \{i \mid \mathfrak{M}_i \models A_j\}$ . Существует ультрафильтр  $D$  над  $I$ , содержащий все  $I_j$  ( $j \in I$ ) (см. задачи 8 и 14 из § 8). Тогда  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$  элементарно эквивалентно  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M} \in K$ .

11. Пусть  $I$  — семейство всех конечных подмножеств множества  $T$ ,  $\Phi_i$  — конъюнкция всех формул из  $i \in I$ ,  $\mathfrak{M}_i$  — система, в которой истинна  $\Phi_i$ . Положим  $I_k = \{i \mid i \in I, \mathfrak{M}_i \models \Phi_k\}$ . Тогда  $I_{k_1} \cap \dots \cap I_{k_n} \neq \emptyset$  и существует ультрафильтр  $D$  над  $I$ , содержащий все  $I_k$  ( $k \in I$ ) (см. задачи 8 и 14 из § 8). Имеем  $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D \models \Phi_k$  для любого  $k \in I$  (см. задачу 41 из § 8).

12. Следует из задачи 5 из § 7 (для счетной сигнатуры) и задачи 11.

13. Если  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_k\}$  есть система аксиом для  $K$ , то  $\{\neg(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_k)\}$  есть система аксиом для  $K_\sigma \setminus K$ . Обратно, пусть  $\Sigma_1 = \{\Phi_\alpha \mid \alpha \in A\}$  есть система аксиом для  $K$ ,  $\Sigma_2 = \{\Psi_\beta \mid \beta \in B\}$  — система аксиом для  $K_\sigma \setminus K$ . Тогда  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  противоречиво и, следовательно, (см. задачу 13), противоречиво конечное множество  $\{\Phi_{\alpha_1}, \dots, \Phi_{\alpha_k}, \Psi_{\beta_1}, \dots, \Psi_{\beta_l}\}$ . Поэтому  $\{\Phi_{\alpha_1}, \dots, \Phi_{\alpha_k}\}$  есть система аксиом для  $K$ .

14. Следует из задачи 41 из § 8.

15. Следует из задач 6 и 13.

16. Следует из задачи 15.

17. Следует из задач 8 и 13.

18. Пусть  $\bar{A} > m$ ,  $\Gamma = T \cup \{\neg c_\alpha = c_\beta \mid \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta\}$ , где  $c_\alpha$  — предметные константы, не входящие в  $T$ . Тогда любое конечное подмножество  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  выполнимо и, следовательно,  $\Gamma$  имеет модель (см. задачу 11). Любая модель для  $\Gamma$  есть модель для  $T$  и имеет мощность больше, чем  $m$ .

19. См. указание к задаче 18.

20. Пусть  $\varphi_{ij}$  есть изоморфное вложение  $\mathfrak{M}_{ij} = \langle M_i; \sigma_j \rangle$  в модель  $\mathfrak{N}_{ij} \in K$ , где  $M_i$  есть конечное подмножество  $M$ , а  $\sigma_j$  — конечное подмножество  $\sigma$ . Пусть  $I$  — семейство всех моделей  $\mathfrak{N}_{ij}$ ,  $I_{kl} = \{\mathfrak{M}_{ij} \mid M_k \subseteq M_i \text{ и } \sigma_l \subseteq \sigma_j\}$ . Каждое конечное пересечение  $I_{k_1 l_1} \cap \dots \cap I_{k_s l_s}$  непусто. Пусть  $D$  — ультрафильтр над  $I$ , содержащий все  $I_{kl}$ ,  $\mathfrak{N} = \prod_{ij} \mathfrak{N}_{ij} / D$ . Пусть  $f_0$  — произвольный элемент из  $\prod_{ij} \mathfrak{N}_{ij}$ . Тогда следующее отображение  $\varphi$  есть изоморфное вложение  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{N}$ :

$$\varphi(m) = f_m / D, \text{ где } f_m \langle \langle i, j \rangle \rangle = \begin{cases} \varphi_{ij}(m), & \text{если } m \in M_i, \\ f_0 \langle \langle i, j \rangle \rangle, & \text{если } m \notin M_i. \end{cases}$$

22. Пусть  $M_1 = \{m_1, \dots, m_k\}$ ,  $B(m_1, \dots, m_k)$  — конъюнкция всех формул из  $D(\mathbb{M})$ . Тогда  $A = \exists x_1 \dots \exists x_k B(x_1, \dots, x_k)$  есть искомая формула.

23.  $\mathbb{M} = \prod_{i \in I} \mathbb{M}_i / D$  имеет  $k$  элементов, где  $k \leq n$ . Поэтому формула

$$C = \exists x_1 \dots \exists x_k (B(x_1, \dots, x_k) \& \forall y (y = x_1 \vee \dots \vee y = x_n)),$$

где  $B(m_1, \dots, m_k)$  — конъюнкция всех формул из  $D(\mathbb{M})$ , истинна в  $\mathbb{M}$ , и, следовательно,  $\{i \mid \mathbb{M}_i \models C\} \in D$ . Имеем  $\mathbb{M} \simeq \mathbb{M}_{i_0}$  для любого  $i_0$  такого, что  $\mathbb{M}_{i_0} \models C$ .

25. Если  $M_1$  есть множество всех значений термов сигнатуры  $\sigma$  при значениях переменных из множества  $A$ , то  $\langle M_1; \sigma \rangle$  есть подсистема  $\mathbb{M}$  и содержится в любой подсистеме, содержащей  $A$ .

26. Следует из задачи 25.

27. Пусть  $\Sigma$  — система аксиом для класса  $K$  сигнатуры  $\sigma$ . Строим по ней систему  $\Sigma'$   $\forall$ -формул сигнатуры  $\sigma' \supseteq \sigma$ , удовлетворяющих условиям задачи 21 из § 5. Класс  $K$  состоит из обеднений систем класса  $K'$  всех моделей для  $\Sigma'$ .

28. Пусть  $K$  состоит из обеднений универсально аксиоматизируемого класса  $K'$  сигнатуры  $\sigma'$  (см. задачу 27),  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle \in K$ ,  $\mathbb{M}$  есть обеднение  $\mathbb{M}'$  из  $K'$ . Пусть  $A$  — конечное подмножество  $M$ ,  $\mathbb{M}'_1$  подсистема  $\mathbb{M}'$ , порожденная множеством  $A$ . Тогда  $\mathbb{M}'_1 \in K'$ ,  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$  — конечная или счетная  $K$ -подсистема  $\mathbb{M}$ .

29. Аналогично задаче 28.

30. Пусть  $\Sigma$  — система аксиом для  $K$ ,  $m > \overline{\overline{M}} + \overline{\overline{\sigma}}$ ,  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma' \rangle$  — модель для  $\Sigma \cup D(\mathbb{M})$  мощности большей, чем  $m$  (см. задачу 18). Пусть  $M \subseteq A \subset M_1$ ,  $\overline{\overline{A}} = m$ . Далее применяем задачу 29.

31. Пусть  $\sigma = \{P_\gamma \mid \gamma \in 2^{\mathcal{N}}\}$ ,  $\Sigma$  — система всех формул вида  $\exists x P_\gamma(x)$  для всех  $\gamma \in 2^{\mathcal{N}}$  и формул вида  $(\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg x_1 = x_2 \& \neg x_1 = x_3 \& \dots \& \neg x_{n-1} = x_n) \supset \forall x (\neg P_\alpha(x) \vee \neg P_\gamma(x)))$  для  $n = 2^m$ ,  $\langle \gamma(0), \dots, \gamma(m-1) \rangle \neq \langle \alpha(0), \dots, \alpha(m-1) \rangle$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Класс  $K$  всех моделей для  $\Sigma$  содержит конечные модели мощностей  $2^m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ); все бесконечные модели из  $K$  имеют мощность  $\geq \mathfrak{c}$ .

32. Пусть  $\sigma = \{f_\gamma \mid \gamma \in 2^{\mathcal{N}}\} \cup \{a_{[\gamma]_m} \mid \gamma \in 2^{\mathcal{N}}\}$ , где  $[\gamma]_m = \langle \gamma(0), \dots, \gamma(m-1) \rangle$ ,  $\Sigma$  — система всех формул вида

$$\neg a_{[\gamma]_m} = a_{[\delta]_n} \text{ для } [\gamma]_m \neq [\delta]_n,$$

$$f_\delta(a_{[\gamma]_m}) = a_{[\delta]_n} \text{ для } \delta, \gamma \in 2^{\mathcal{N}},$$

$$\forall x (f_\delta(x) = f_\gamma(x) \supset \bigvee_{i \in I} x = a_i), \text{ где } I = 2^{\mathcal{N}_1} \cup \dots \cup 2^{\mathcal{N}_m},$$

$$\mathcal{N}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}, [\delta]_m \neq [\gamma]_m.$$

Тогда  $\langle M; \sigma \rangle$ , где  $M = \bigcup_{m \in \mathcal{N}} 2^{\mathcal{N}_m}$ ,  $a_{[\gamma]_m} = [\gamma]_m$ ,  $f_\delta([\gamma]_m) = [\delta]_m$ ,

есть счетная модель для  $\Sigma$ , все собственные расширения которой имеют мощность не меньше, чем  $\mathfrak{c}$ .

33. Пусть  $K$  есть класс всех обеднений универсально аксиоматизируемого класса  $K'$  сигнатуры  $\sigma'$  (см. задачу 27),  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle \in K$ ,  $\overline{\mathbb{M}} = m$ . Возьмем  $\mathbb{M}' = \langle M; \sigma' \rangle \in K'$ . Пусть  $f^n, g^n \in \sigma'$ , полагаем  $f^n \sim g^n \Leftrightarrow f^n(m_1, \dots, m_n) = g^n(m_1, \dots, m_n)$  для любых  $m_1, \dots, m_n \in M$ . Из каждого класса эквивалентности выберем по одному функциональному символу,  $\sigma''$  получается из  $\sigma'$  опусканием остальных функциональных символов. Тогда  $\sigma''$  содержит не более, чем  $2^m$  функциональных символов. Пусть  $K''$  — класс, система аксиом которого получается из системы аксиом для  $K'$  заменой функциональных символов из  $\sigma'$  на эквивалентные им из  $\sigma''$ ,  $\mathbb{M}_1$  — система из  $K''$  мощности  $\mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}$  (см. задачу 18),  $\mathbb{M}_2$  — подсистема  $\mathbb{M}_1$ , порожденная множеством мощности  $\mathfrak{p}$ . Тогда  $\overline{\mathbb{M}}_2 = \mathfrak{p}$  (см. задачу 25),  $\mathbb{M}_2 \in K''$  и  $\mathbb{M}_2$  может быть обогащена до системы  $\mathbb{M}_3 \in K'$ . Тогда обеднение системы  $\mathbb{M}_3$  до сигнатуры  $\sigma$  входит в  $K$ .

34. Следует из задач 6 и 33.

Примеры:

(а)  $\Sigma = \{\mathcal{E}_5\}$ ;

(б)  $\Sigma = \{(\mathcal{E}_n \supset \mathcal{E}_{n+1}), (\mathcal{E}_{n+1} \supset \mathcal{E}_{n+2}), \dots\}$ ;

(в)  $K_{\sigma'}$ .

$$35. \mathbb{M} \models \neg m_1 = m_2 \Rightarrow \mathbb{M}' \models \neg \varphi(m_1) = \varphi(m_2); \mathbb{M} \not\models A(m_1, \dots, m_n) \Rightarrow \mathbb{M} \models \neg A(m_1, \dots, m_n) \Rightarrow \mathbb{M}' \models \neg A(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_2)).$$

36. Отображение  $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow M$ , где  $\varphi(n) = n + 1$ , есть изоморфизм  $\mathbb{N}$  на  $\mathbb{M}$ , поэтому  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{M}$  элементарно эквивалентны. Возьмем  $A(x) = \forall y (x \leq y)$ . Тогда  $\mathbb{M} \models A(1)$ ,  $\mathbb{N} \not\models A(1)$ .

37. Нет. Например, формула  $\exists x (x \leq 2 \& \neg x = 0 \& \neg x = 2)$  истинна в  $\mathbb{N}$ , но ложна в  $\mathbb{M}$ .

38. Нет. Например, формула  $\forall x \exists y (y \cdot y = x)$  истинна в  $\mathbb{C}$ , но ложна в  $\mathbb{D}$ .

39.  $\mathbb{M} \models A(b_1, \dots, b_m) \Rightarrow \{i \mid \mathbb{M} \models A(b_1, \dots, b_m)\} = I \in D \Rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{M}_i / D \models A(f_1/D, \dots, f_m/D)$ , где  $f_j(i) = b_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Если  $\mathbb{M}$  конечна, то  $\overline{\mathbb{M}^I/D} = \overline{\mathbb{M}}$ .

40. (a) Например, положим для  $n \in \mathcal{N}$ ,  $i \in \mathcal{N}$

$$\psi(n)(i) = \begin{cases} i, & \text{если } i \leq n, \\ n, & \text{если } i > n; \end{cases} \quad \psi(-n)(i) = \begin{cases} -i, & \text{если } i \leq n, \\ -n, & \text{если } i > n. \end{cases}$$

Тогда  $\varphi(n) = \psi(n)/D$  есть изоморфное вложение  $\mathcal{Z}$  в  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{M}_i/D$ .

(б) Нет. Формула  $\exists x \forall y (x \leq y)$  истинна в  $\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{M}_i/D$ , но ложна в  $\mathcal{Z}$ .

42. Из задачи 18 следует, что теория  $T = FD(\mathbb{M})$  имеет модель  $\mathbb{M}_1$  такую, что  $\overline{\mathbb{M}_1} \geq m$ . Тогда  $\mathbb{M}$  элементарно вложима в  $\mathbb{M}_1$  (см. задачу 41).

43. Доказать индукцией по числу шагов построения формулы  $B(x_1, \dots, x_k)$ , что для любых  $m_1, \dots, m_k \in M$

$$\mathbb{M} \models B(m_1, \dots, m_k) \Leftrightarrow \mathbb{M}_1 \models B(m_1, \dots, m_k).$$

44. Пусть  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma \rangle$  бесконечна,  $A$  — счетное подмножество  $M$ . Положим  $A_0 = A$ . Далее, если  $A_n$  уже определено, то для любой формулы  $A(x_1, \dots, x_k, y)$  и любых  $a_1, \dots, a_k \in A_n$  таких, что  $\mathbb{M} \models \exists y A(a_1, \dots, a_k, y)$ , выбираем  $a = h(A, a_1, \dots, a_k) \in M$  такой, что  $\mathbb{M} \models A(a_1, \dots, a_k, a)$ . Тогда  $A_{n+1}$  есть объединение  $A_n$  и множества всех  $h(A, a_1, \dots, a_k)$ , а  $\mathbb{M}_1 = \langle \bigcup_{n \in \mathcal{N}} A_n; \sigma \rangle$  есть счетная элементарная подмодель  $\mathbb{M}$  (см. задачу 43).

45. Аналогично задаче 44.

46. Следует из задач 42 и 45.

47. Доказывается индукцией по числу шагов в построении формулы  $A$ . Рассмотрим лишь случай  $A = \forall x B(x)$ . Пусть  $\mathbb{M}_i \models \forall x B(x)$ , но  $\mathbb{M} \not\models \forall x B(x)$ . Тогда  $\mathbb{M} \models \exists x \neg B(x)$  и  $\mathbb{M} \models \neg B(a)$  для некоторого  $a \in M$ . Имеем  $a \in M_j$  для некоторого  $j \geq i$ . По предположению индукции для формулы  $B$  имеем  $\mathbb{M}_j \not\models B(a)$ , откуда  $\mathbb{M}_j \models \exists x \neg B(x)$  и  $\mathbb{M}_i \models \exists x \neg B(x)$ , так как  $\mathbb{M}_i < \mathbb{M}_j$ . Противоречие.

48. Пусть  $\Sigma$  есть множество предложений, истинных в  $K$ ,  $\mathbb{M}$  — модель для  $\Sigma$ . Пусть  $\Delta$  — конечная совокупность предложений из  $FD(\mathbb{M})$ ,  $A_\Delta(c_1, \dots, c_n)$  — конъюнкция формул из  $\Delta$ ,  $c_1, \dots, c_n$  — все предметные константы, не входящие в  $\sigma$ . Тогда имеем  $\mathbb{M} \models \exists x_1 \dots \exists x_n A_\Delta(x_1, \dots, x_n)$  и, следовательно, существует система  $\mathbb{M}_\Delta \in K$  такая, что  $\mathbb{M}_\Delta \models \exists x_1 \dots \exists x_n A_\Delta(x_1, \dots, x_n)$ ; существуют элементы  $d_1^\Delta, \dots, d_n^\Delta$  из  $\mathbb{M}_\Delta$  такие, что  $\mathbb{M}_\Delta \models A_\Delta(d_1^\Delta, \dots, d_n^\Delta)$ . Для  $c$  из  $\mathbb{M}$  положим  $d^\Delta(c) = d_i^\Delta$ , если  $c = c_i$ ;  $d^\Delta(c)$  равно произвольному элементу из  $\mathbb{M}_\Delta$ , если  $c \notin \{c_1, \dots, c_n\}$ . Пусть  $I$  есть множество всех конечных совокупностей  $\Delta \subseteq FD(\mathbb{M})$ ,  $D$  — фильтр над  $I$ , содержащий все множества  $I_\Delta = \{\Delta' \mid \mathbb{M}_{\Delta'} \models A_\Delta(d_1^\Delta, \dots, d_n^\Delta)\}$ ,  $\mathbb{M}_1 = \prod_{\Delta \in I} \mathbb{M}_\Delta / D$ . Для  $c$  из  $\mathbb{M}$  полагаем  $\varphi(c) = f_c / D$ , где  $f_c(\Delta) = d^\Delta(c)$ ;  $\varphi(c)$  есть элементарное вложение  $\mathbb{M}$  в  $\mathbb{M}_1$ . Обратное утверждение следует из задач 3 и 4.

49. Пусть класс  $K$  универсально аксиоматизируем,  $\mathbb{M}$  — система сигнатуры  $\sigma$  и каждое конечное обединение конечной подмодели  $\mathbb{M}$  изоморфно вложимо в подходящую  $K$ -систему. Тогда (см. задачи 4 и 20)  $\mathbb{M}$  изоморфно вложима в  $K$ -систему и  $\mathbb{M} \in K$ .

Обратно. Пусть  $\Sigma$  — семейство всех  $\forall$ -формул, истинных на всех системах из  $K$ , и система  $\mathbb{M}$  есть модель для  $\Sigma$ . Покажем, что если выполнены условия задачи, то  $\mathbb{M} \in K$ . Пусть  $\mathbb{M}_1$  есть конечное обединение конечной подмодели  $\mathbb{M}$ ,  $A$  есть  $\exists$ -формула для  $\mathbb{M}_1$  из задачи 22. Тогда  $\mathbb{M}_1$  вложима в некоторую  $K$ -систему, так как в противном случае  $\Sigma \vdash \neg A$  ( $\neg A$  эквивалентно  $\forall$ -формуле) и  $\mathbb{M} \models \neg A$ . Поэтому  $\mathbb{M} \in K$ .

50. Следует из задач 20, 48 и 49.

51. Следует из задачи 50.

52. Использовать указание к задаче 48. Взять класс всех систем, элементарно эквивалентных  $\mathbb{M}_1$ , в качестве  $K$  и  $\mathbb{M}_1$  в качестве  $\mathbb{M}_\Delta$ .

53. Если  $\mathbb{M}$  содержит  $n$  элементов, то  $\mathbb{M}_1$  тоже. Из задач 52 и 39 следует  $\mathbb{M}_1 \approx \mathbb{M}$ .



55. Следует из задач 18 и 53.

56. Пусть  $T$  неполна. Тогда для некоторого предложения  $A$  не выполняется ни  $T \models A$ , ни  $T \models \neg A$ . Поэтому существуют счетные модели  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$  теории  $T$  такие, что  $\mathbb{M}_1 \models A$ ,  $\mathbb{M}_2 \models \neg A$ . Тогда существуют модели  $\mathbb{M}_3$  и  $\mathbb{M}_4$  такие, что  $\overline{\mathbb{M}}_3 = \overline{\mathbb{M}}_4 = m$ ,  $\mathbb{M}_1 < \mathbb{M}_3$ ,  $\mathbb{M}_2 < \mathbb{M}_4$  (см. задачу 46). Поэтому  $\mathbb{M}_3$  и  $\mathbb{M}_4$  неизоморфны.

57. Теория  $\aleph_0$ -категорична (см. задачу 13 из § 5 части I) и поэтому полна (см. задачу 56).

58. Пусть  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$  противоречиво. Тогда противоречиво некоторое подмножество  $\Gamma_0 \cup \{B_1, \dots, B_k\}$ , где  $B_j \in \Gamma_1$ ,  $k > 0$ . Поэтому

$$\Gamma_0 \vdash \neg (B_1 \& \dots \& B_k) \quad \text{и} \quad \Gamma_0 \vdash \forall x_1 \dots \forall x_s \neg B(x_1, \dots, x_s),$$

где  $B(c_1, \dots, c_s) = (B_1 \& \dots \& B_k)$ ,  $c_1, \dots, c_s$  — все константы из  $B_1, \dots, B_k$ , не входящие в  $\sigma$ . Так как  $\Gamma$  полно и  $\Gamma_0$  непротиворечиво, имеем  $\Gamma \vdash \forall x_1 \dots \forall x_s \neg B(x_1, \dots, x_s)$ , поэтому  $\Gamma_1 \vdash \forall x_1 \dots \forall x_s \neg B(x_1, \dots, x_s)$  и  $\Gamma_1 \vdash \neg B(c_1, \dots, c_s)$ . Противоречие.

59. Следует из задачи 58.

60. Пусть  $\Gamma = FD(\mathbb{M}_1) \cup FD(\mathbb{M}_2)$ . Любая система, в которой истинны все формулы из  $\Gamma$ , удовлетворяет требованиям задачи. Непротиворечивость  $\Gamma$  доказывается аналогично непротиворечивости  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$  из задачи 58.

61. Пусть  $\Gamma \cup \{A\}$  выполнимо в  $\mathbb{M}_1 = \langle M_1; \sigma_1 \rangle$ ,  $\mathbb{M}_1^* = \langle M_1; \sigma \rangle$ . Тогда  $FD(\mathbb{M}_1^*) \cup \{B\}$  непротиворечиво (см. задачу 59) и выполнимо в  $\mathbb{M}_2 = \langle M_2; \sigma_2 \rangle$ . Имеем  $\mathbb{M}_1^* < \mathbb{M}_2^* = \langle M_2; \sigma \rangle$ . Поэтому существует система  $\mathbb{M}_3 = \langle M_3; \sigma_1 \rangle$  такая, что  $\mathbb{M}_1 < \mathbb{M}_3$ ,  $\mathbb{M}_2^* < \mathbb{M}_3^* = \langle M_3; \sigma \rangle$ . Получаем последовательность  $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \mathbb{M}_3, \dots$  такую, что  $\mathbb{M}_1 < \mathbb{M}_3 < \dots < \mathbb{M}_2 < \mathbb{M}_4 < \dots$ ;  $\mathbb{M}_1^* < \mathbb{M}_2^* < \mathbb{M}_3^* < \dots$ . Положим  $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ ,  $\mathbb{M} = \langle M; \sigma_1 \cup \sigma_2 \rangle$ , где  $\mathbb{M}_i^* < \langle M; \sigma \rangle$ ,  $\mathbb{M}_{2k+1} < \langle M; \sigma_1 \rangle$ ,  $\mathbb{M}_{2k} < \langle M; \sigma_2 \rangle$  (см. задачу 47). Тогда  $\Gamma \cup \{A, B\}$  выполнимо в  $\mathbb{M}$ .

62. Пусть  $a_1, \dots, a_k$  — все константы, входящие в  $A$  и не входящие в  $\sigma$ ,  $b_1, \dots, b_n$  — все константы, входящие в  $B$  и не входящие в  $\sigma$ . Тогда формулы  $A_1 = \exists x_1 \dots \exists x_k A(x_1, \dots, x_k)$ ,  $B_1 = \exists y_1 \dots \exists y_n B(y_1, \dots, y_n)$

удовлетворяют условиям задачи 61 и  $\Gamma \cup \{A_1, B_1\}$  непротиворечиво. Тогда  $\Gamma \cup \{A, B\}$  непротиворечиво.

63. Пусть  $T$ —множество предложений  $C$  сигнатуры  $\sigma$  таких, что  $\vdash (A \supset B)$ .

Предположим, что  $T \cup \{\neg B\}$  непротиворечиво. Тогда  $T \cup \{B\}$  выполнимо в некоторой системе  $\mathcal{M}$ . Далее,  $\Gamma \cup \{A\}$  непротиворечиво, где  $\Gamma$  есть множество всех предложений сигнатуры  $\sigma$ , истинных в  $\mathcal{M}$ . Иначе было бы  $A \vdash \neg (C_1 \& \dots \& C_k)$  для некоторых  $C_1, \dots, C_k \in \Gamma$ ,  $\neg (C_1 \& \dots \& C_k) \in T \subseteq \Gamma$  и  $(C_1 \& \dots \& C_k) \in \Gamma$ . Из задачи 62 следует, что  $\Gamma \cup \{A, \neg B\}$  непротиворечиво и неверно  $\vdash (A \supset B)$ . Поэтому  $T \cup \{\neg B\}$  противоречиво, а значит,  $\vdash ((C_1 \& \dots \& C_k) \supset B)$  для некоторых  $C_1, \dots, C_k \in T$ ;  $(C_1 \& \dots \& C_k)$  есть искомая формула. Если  $\sigma$  пусто,  $A$  и  $\neg B$  выполнимы, то можно построить счетную модель, в которой выполнима  $(A \& \neg B)$ , т. е. не выполняется  $\vdash (A \supset B)$ .

### ЧАСТЬ III. ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

#### § 1. Частично рекурсивные функции

2. Функции  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_4$  получаются суперпозициями из  $f$  и  $I_m^n$ :

$$(a) f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \\ = f(I_2^n(x_1, \dots, x_n), I_1^n(x_1, \dots, x_n), I_3^n(x_1, \dots, x_n), \dots, I_n^n(x_1, \dots, x_n)).$$

$$(б) f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = f(I_2^n(x_1, \dots, x_n), \dots, I_n^n(x_1, \dots, x_n), I_1^n(x_1, \dots, x_n)).$$

$$(в) f_3(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(I_1^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, I_n^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})).$$

$$(г) f_4(x_1, \dots, x_{n-1}) = \\ = f(I_1^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), I_1^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, I_{n-1}^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

4. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  получена из  $o$  и  $I_m^n$  с помощью суперпозиций и примитивной рекурсии. Тогда  $f(0, \dots, 0) = 0$  и

$$x_1 \leq 1, \dots, x_n \leq 1 \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \leq 1.$$

5. (a)  $f(x) = s(s(\dots s(x)\dots))$  ( $n$  раз).

(б)  $f(x) = s(s(\dots s(o(x))\dots))$  ( $n$  раз).

(в)  $f(x, y)$  получается примитивной рекурсией из  $g(x) = I_1^1(x)$  и  $h(x, y, z) = s(I_3^3(x, y, z))$ .

(г)  $f(x, y)$  получается примитивной рекурсией из  $g(x) = o(x)$  и  $h(x, y, z) = I_1^3(x, y, z) + I_3^3(x, y, z)$ .

(д)  $f(x, 0) = 1, f(x, y + 1) = x \cdot f(x, y)$ .

(е)  $f(0) = 1, f(x + 1) = s(x) \cdot f(x)$ .

6. (а)  $x^x$ ; (б)  $x^{x^{\dots^x}}$  } у раз

7. (а)  $sg(0) = 0, sg(x + 1) = s(o(x))$ .

(б)  $\overline{sg}0 = 1, \overline{sg}(x + 1) = o(x)$ .

(в)  $0 \dot{-} 1 = 0, (x + 1) \dot{-} 1 = x$ .

(г)  $x \dot{-} 0 = x, x \dot{-} (y + 1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1$ .

(д)  $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$ .

(е)  $\max(x, y) = x \cdot sg(x \dot{-} y) + y \cdot \overline{sg}(x \dot{-} y)$ .

(ж)  $\min(x, y) = x \cdot sg(y \dot{-} x) + y \cdot \overline{sg}(y \dot{-} x)$ .

9. Докажем, например, (а):

$$f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n, 0),$$

$$f^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y + 1) = g(x_1, \dots, x_n, y + 1) + f(x_1, \dots, x_n, y).$$

$$10. f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{h(x_1, \dots, x_n)} sg \left( \prod_{j=0}^i g(x_1, \dots, x_n, j) \right).$$

$$11. g(x_1, \dots, x_n) = h_0(x_1, \dots, x_n) \cdot \overline{sg} f_0(x_1, \dots, x_n) + \dots \\ \dots + h_s(x_1, \dots, x_n) \cdot \overline{sg} f_s(x_1, \dots, x_n).$$

$$12. (a) \left[ \frac{x}{y} \right] = \sum_{i=1}^x \overline{sg}(iy \dot{-} x).$$

$$(б) \text{rest}(x, y) = x \dot{-} y \left[ \frac{x}{y} \right].$$

$$(в) \tau(x) = \sum_{i=1}^x \overline{sg}(\text{rest}(x, i)).$$

$$(г) \sigma(x) = \sum_{i=1}^x i \cdot \overline{sg}(\text{rest}(x, i)).$$

(д)  $x$  — простое число  $\Leftrightarrow \tau(x) = 2$  (см. (в));

$$\text{lh}(x) = \sum_{i=1}^x \overline{\text{sg}} (|\tau(i) - 2| + \text{rest}(x, i)).$$

$$(e) \pi(x) = \sum_{i=1}^x \overline{\text{sg}} (|\tau(i) - 2|) \text{ (см. (в))}.$$

$$(ж) k(x, y) = \mu z [z \cdot \overline{\text{sg}}(x \cdot y) + \text{sg}(x \cdot y) (\overline{\text{sg}} z + \text{rest}(z, x) + \text{rest}(z, y)) = 0] \leq x \cdot y.$$

$$(з) d(x, y) = \left[ \frac{xy}{k(x, y)} \right] + x \cdot \overline{\text{sg}} y + y \cdot \overline{\text{sg}} x \text{ (см. (ж))}.$$

$$(и) p(x) = \mu y [|\pi(y) - (x + 1)| = 0] \leq 2^{2^x} \text{ (см. (е))}.$$

$$(к) \text{long}(x) = \mu y \left[ \sum_{i=y+1}^x \overline{\text{sg}}(\text{rest}(x, p(i))) = 0 \right] \leq x.$$

$$(л) \text{ex}(x, y) = \mu z [( \overline{\text{sg}} \text{rest}(y, (p(x))^{z+1})) \cdot \text{sg} y = 0] \leq x \text{ (см. (и))}.$$

$$(м) [\sqrt{x}] = \mu z [\overline{\text{sg}} ((z+1)^2 \dot{-} x) = 0] \leq x.$$

$$(н) [^y \sqrt{x}] = \mu z [\overline{\text{sg}} ((z+1)^y \dot{-} x) \cdot \text{sg} y = 0] + \overline{\text{sg}} y \cdot x \leq x.$$

$$(о) [x\sqrt{2}] = \mu z [\overline{\text{sg}} ((z+1)^2 \dot{-} 2x^2) = 0] \leq 2x.$$

(п) Использовать разложение числа  $e$  в ряд.

(р) Использовать разложение числа  $e^x$  в ряд.

$$(с) C_x^y = \left[ \frac{x!}{y! \cdot |x - y|!} \right] \cdot \text{sg}(x \dot{-} y) + \overline{\text{sg}}(x \dot{-} y).$$

$$13. l(x) + r(x) = \mu z \left[ \overline{\text{sg}} \left( \left[ \frac{(z+1)(z+2)}{2} \right] \dot{-} x \right) = 0 \right] = z_0(x) \leq 2x;$$

$$l(x) = x \dot{-} \left[ \frac{z_0(x) \cdot (z_0(x) + 1)}{2} \right]; \quad r(x) = z_0(x) \dot{-} l(x).$$

14. Следует из задачи 13.

$$15. f^n(x_1, \dots, x_n) = F(c^n(x_1, \dots, x_n)), \text{ где } F(x) = f(c_{n1}(x), \dots, c_{nn}(x)).$$

16. (а) Пусть  $n \in \mathcal{N}$ . Рассмотрим последовательность  $\langle n, 0 \rangle, \langle n, 1 \rangle, \dots$  Тогда существует последовательность  $x_0, x_1, \dots$  такая, что  $f_1(x_0) = f_1(x_1) = \dots = n$ ,  $f_2(x_0) = 0$ ,  $f_2(x_1) = 1, \dots$ ; поэтому  $x_0, x_1, \dots$  различны.

$$(б) f_2(x) = \sum_{i=0}^x \overline{\text{sg}} |f_1(x) - f_1(i)| \dot{-} 1.$$

17. См. задачу 34 (е) из § 7 части II.

18. Ввести вспомогательную функцию

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = \prod_{i=0}^y p_i^{f(x_1, \dots, x_n, i)}.$$

Доказать, что  $F$  примитивно рекурсивна. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = \text{ex}(y, F(x_1, \dots, x_n, y)).$$

19. Следует из задачи 18.

20. Ввести вспомогательную функцию

$$F(x) = 2^{f(x)} \cdot 3^{g(x)}.$$

Доказать, что  $F$  примитивно рекурсивна. Тогда

$$f(x) = \text{ex}(0, F(x)), \quad g(x) = \text{ex}(1, F(x)).$$

21. Аналогично задаче 20.

22. См. задачу 1.

23. (в) Например,  $g(x, y) = x + 1$ .

• 24. См. указание к задаче 2.

26. (а)  $\omega(x) = \mu y [s(x) + y = 0]$ .

(б)  $f(x, y) = \mu z [|x - (z + y)| = 0]$ .

(в)  $f(x, y) = \mu z [|x - z \cdot y| = 0]$ .

(г)  $f(x, y) = \mu z [|x - z^y| = 0]$ .

(д) Пусть  $f$  —  $n$ -местная функция,  $\delta_f = \{\langle a_{11}, \dots, a_{1n} \rangle, \dots, \langle a_{k1}, \dots, a_{kn} \rangle\}$ ,  $f(a_{11}, \dots, a_{1n}) = b_1, \dots, f(a_{k1}, \dots, a_{kn}) = b_k$ ; тогда

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= b_1 \cdot \overline{\text{sg}}(|x_1 - a_{11}| + \dots + |x_n - a_{1n}|) + \dots \\ &\dots + b_k \cdot \overline{\text{sg}}(|x_1 - a_{k1}| + \dots + |x_n - a_{kn}|) + \mu z [z + (|x_1 - a_{11}| + \dots \\ &\dots + |x_n - a_{1n}|) + \dots + (|x_1 - a_{k1}| + \dots + |x_n - a_{kn}|) = 0]. \end{aligned}$$

27. Использовать следующие соотношения:

(а)  $a = b \Leftrightarrow |a - b| = 0$ .

(б)  $a \neq b \Leftrightarrow \overline{\text{sg}}|a - b| = 0$ .

(в)  $a \leq b \Leftrightarrow a \dot{-} b = 0$ .

(г)  $a < b \Leftrightarrow \overline{\text{sg}}(b \dot{-} a) = 0$ .

(д)  $a = 0$  и  $b = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$ .

(е)  $a = 0$  или  $b = 0 \Leftrightarrow a \cdot b$ .

28. (а) Введем функцию

$$\theta(t, y) = c^{n+2}(c_{n1}(t), \dots, c_{nn}(t), y, f(c_{n1}(t), \dots, c_{nn}(t), y)).$$



(ж) Пусть  $\alpha(x, y) = q((x+y)^2 + 5x + 3y + 4)$ , тогда

$$x^2 + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = i(x + 2 \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1 + i(\overline{\text{sg}} \alpha(x, q(x)))) ,$$

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \alpha \left( x^2 + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor, x^2 \right).$$

(з) Имеем  $2 \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \alpha(x + 2 \lfloor \sqrt{x} \rfloor, x)$ , тогда  $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{2 \lfloor \sqrt{x} \rfloor}{2} \right\rfloor$ .

(и) Имеем  $x \cdot y = \frac{\alpha(\alpha((x+y)^2, x^2), y^2)}{2}$ .

(к) Имеем  $x \div y = \alpha(x, y) \overline{\text{sg}} \alpha(\alpha(x, y) + y, x)$ .

(л) Имеем  $c(x, y) = \left\lfloor \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} \right\rfloor$ .

(м) Имеем  $l(x) = x \div \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor \sqrt{8x+1} \rfloor + 1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor \sqrt{8x+1} \rfloor + 1}{2} \right\rfloor$ .

(н) Имеем  $r(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor \sqrt{8x+1} \rfloor + 1}{2} \right\rfloor \div (l(x) + 1)$ .

35. Индукцией по числу шагов построения данной примитивно рекурсивной функции, используя задачу 34. Рассмотрим лишь случай получения функции с помощью оператора примитивной рекурсии. Ввиду задачи 28 достаточно рассмотреть случай, когда

$$\begin{cases} F(x, 0) = x, \\ F(x, y+1) = G(F(x, y)), \end{cases}$$

где  $G$  уже получена требуемым в задаче способом. Положим

$$\theta(x, y) = q(\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor) \cdot \overline{\text{sg}} q(x+1) + G(y) \cdot \text{sg} q(x+1).$$

Тогда для функции  $t(x) = \theta(x, x)$  имеем

$$\begin{cases} t(0) = 0, \\ t(x+1) = \theta(x, t(x)), \end{cases}$$

$t(x) = F(q(\lfloor \sqrt{x} \rfloor), q(x))$ , а также  $t(((y+x)^2 + x)^2 + y) = F(x, y)$ . Но функция  $t(x)$  ввиду задачи 28 (б) получается итерацией и суперпозициями функций, уже полученных требуемым в задаче способом.

39. (а)  $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = qq^{-1}(x_m)$ .

(б)  $o(x) = q(q^{-1}(x+x) + 1)$ .

(в) Аналогично задаче 34 (д).

(г) Пусть  $\alpha(x, y) = q((x+y)^2 + 5x + 3y + 4)$ ; тогда

$$x^2 = \alpha(q^{-1}(2x), 2x).$$

$$(д) \operatorname{sg}(x) = q(x^2 + 1).$$

$$(е) \overline{\operatorname{sg}} x = \alpha(1, \operatorname{sg} x).$$

$$(ж) \text{ Имеем } \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = q(2q + \overline{\operatorname{sg}}(q(q^{-1} + ss(0))))^{-1}(x).$$

(з) Аналогично задаче 34 (и).

(и) Аналогично задаче 34 (к).

$$(к) \text{ Имеем } \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{q(x \dot{-} q(x)) \dot{-} 1}{2} \right\rfloor + \operatorname{sg} x.$$

(л), (м), (н) Аналогично задаче 34 (л), (м) и (н).

40. Имеем  $f(x) = r((|(l(x) + 1) \overline{\operatorname{sg}} h(l(x), r(x)) - 1|)^{-1})$ . Далее применить задачу 39.

41. Индукцией по числу шагов построения данной частично рекурсивной функции, используя задачи 30, 39, 40, а также формулы для  $\operatorname{rest}(x, y)$  и  $\beta(x, y, z)$  из задач 12 и 17. К формуле

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \mu z [\operatorname{sg} y \cdot \overline{\operatorname{sg}}((z + 1)y \dot{-} x) = 0] + x \overline{\operatorname{sg}} y$$

применить задачу 40.

42. (а) Пусть функция определена следующим образом:

если  $n = 3t$ , то  $\alpha(n) = c^3(0, t, 2 + t)$ ;

если  $n = 3t + 1$ , то  $\alpha(n) = c^3(t + 1, 0, \operatorname{sg} t)$ ;

если  $n = 3t + 2$ , а  $c_{31}(\alpha(r(t))) + 1 = c_{31}(\alpha(l(t)))$  и  $c_{32}(\alpha(r(t))) = c_{33}(\alpha(l(t)))$ , то  $\alpha(n) = c^3(c_{31}(\alpha(l(t))), c_{32}(\alpha(l(t))) + 1, c_{33}(\alpha(r(t))))$ ,  
в остальных случаях  $\alpha(n) = c^3(0, 0, 2)$ .

(Здесь  $l, r$  определены в задаче 13, а  $c^3, c_{31}, c_{32}, c_{33}$  — в задаче 14.)

Функция  $\alpha$  примитивно рекурсивна. Имеем

$$B(x, y) = c_{33}(\alpha(\mu n [c_{31}(\alpha(n)) = x \text{ и } c_{32}(\alpha(n)) = y])).$$

Таким образом,  $B$  и  $A$  общерекурсивны.

(б), (в), (г) Индукцией по  $n, x$ .

(д) Имеем  $o(x) < B(0, x)$ ,  $s(x) < B(0, x)$ ,  $I_m^n(x_1, \dots, x_n) < B(0, \max(x_1, \dots, x_n))$ .

(е), (ж) Проверяем непосредственно, используя (б), (в) и (г).

(з) Из (д), (е) и (ж) следует, что всякая примитивно рекурсивная функция является  $B$ -мажорируемой.

43. Пусть  $F(t, x_1, \dots, x_n)$  — универсальная функция для семейства  $n$ -местных примитивно рекурсивных функций, являющаяся



примитивно рекурсивной. Тогда  $f(x_1, \dots, x_n) = 1 + F(x_1, x_1, \dots, x_n) = F(t_0, x_1, \dots, x_n)$  для некоторого  $t_0$ . Отсюда  $1 + F(t_0, t_0, \dots, t_0) = F(t_0, t_0, \dots, t_0)$ . Приходим к противоречию.

44. Заметим, что универсальная функция должна быть всюду определенной. Далее, см. указание к задаче 43.

## § 2. Машины Тьюринга

1.  $f(x) = x + 1$ .

2.  $f_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ .

3. Например,

$$\begin{array}{ll} q_1 0 \rightarrow q_2 0R, & q_1 1 \rightarrow q_0 1, \\ q_2 0 \rightarrow q_3 1L, & q_2 1 \rightarrow q_2 1R, \\ q_3 0 \rightarrow q_0 0, & q_3 1 \rightarrow q_3 1L. \end{array}$$

4. Например,

$$\begin{array}{ll} q_1 0 \rightarrow q_2 0R, \\ q_2 0 \rightarrow q_3 0L, & q_2 1 \rightarrow q_2 1R, \\ q_3 0 \rightarrow q_0 0, & q_3 1 \rightarrow q_3 0L. \end{array}$$

5. Сначала переводим слово  $01^x q_1 01^y 0$  в слово  $01^x q_\alpha 1^y 00$ , равное  $01^{x-i} q_\alpha 1^y 01^i 0$  при  $i = 0$ . Затем слово  $01^{x-i} q_\alpha 1^y 01^i 0$  переводим в  $01^{x-(i+1)} q_\alpha 1^y 01^{i+1} 0$ , если  $x - i > 0$ , и в  $01^y q_0 01^x 0$ , если  $x - i = 0$ .

Г.  $q_1 01^x 00 = q_1 01^{x-i} 01^i 01^i$  при  $i = 0$ . Слово  $q_1 01^{x-i} 01^i 01^i$  переводим в  $q_1 01^{x-(i+1)} 01^{i+1} 01^{i+1}$ , если  $x - i > 0$ , и в  $q_0 01^x 01^x$ , если  $x - i = 0$ .

$$\Pi_n \cdot (B^+ \cdot B)^{n-1} \cdot (B^-)^{n-1}.$$

$$K_n \cdot K_1 = \Gamma,$$

$$K_{n+1} = (B^+)^n \cdot \Gamma \cdot (B^-)^n \cdot (\Pi_{n+2})^n \cdot (B^+)^2 \cdot K_n \cdot (B^-)^2 \cdot \Pi_{2n+2} \cdot \Pi_{n+1}.$$

6.  $(\Pi_n)^{m-1} \cdot (B^+)^{n-1} \cdot (O \cdot B^-)^{n-1}$ , где  $O$  — машина, построенная в задаче 4.

7. (а) Пусть  $F$  и  $G$  — машины, правильно вычисляющие  $f$  и  $g$  соответственно. Тогда  $H = G \cdot F$  правильно вычисляет  $h$ .

$$(6) H = [K_m \cdot (B^+)^m \cdot G_1 \cdot (B^-)^m \cdot (\Pi_{m+1})^m \cdot B^+] \cdot \dots \\ \dots [K_m \cdot (B^+)^m \cdot G_{n-1} \cdot (B^-)^m \cdot (\Pi_{m+1})^m \cdot B^+] \cdot G_n \cdot (B^-)^{n-1} \cdot F.$$

8. (a) Например,

$$\begin{array}{ll} q_1 0 \rightarrow q_2 0R, & \\ q_2 0 \rightarrow q_3 1R, & q_2 1 \rightarrow q_2 1R, \\ q_3 0 \rightarrow q_4 0L, & q_3 1 \rightarrow q_3 1R, \\ & q_4 1 \rightarrow q_5 0L, \\ q_5 0 \rightarrow q_0 0, & q_5 1 \rightarrow q_5 1L. \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} q_1 0 \rightarrow q_2 0R, & \\ q_2 0 \rightarrow q_0 0L, & q_2 1 \rightarrow q_3 1R, \\ q_3 0 \rightarrow q_4 0L, & q_3 1 \rightarrow q_3 1R, \\ & q_4 1 \rightarrow q_5 0L, \\ q_5 0 \rightarrow q_0 0, & q_5 1 \rightarrow q_5 1L. \end{array}$$

$$(B) \quad \begin{array}{ll} q_1 0 \rightarrow q_2 0R, & \\ q_2 0 \rightarrow q_0 0L, & q_2 1 \rightarrow q_3 1R, \\ q_3 0 \rightarrow q_4 0L, & q_3 1 \rightarrow q_3 0R, \\ q_4 0 \rightarrow q_4 0L, & q_4 1 \rightarrow q_0 0L. \end{array}$$

9. (a) Пусть машины  $G$  и  $H$  вычисляют  $g$  и  $h$  соответственно. Используя  $G, H$  и машины из задачи 5, построить машины  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$  такие, что

$$\begin{aligned} q_1 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^y 0 &\Rightarrow_{T_1} 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 001^y q_\alpha 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 0 \Rightarrow_{T_2} \\ &\Rightarrow_{T_2} 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 001^y q_\beta 01^g(x_1, \dots, x_n, 0) 0 \dots; \end{aligned}$$

$$01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^i 01^{y-i} q_\beta 01^z 0 \Rightarrow_{T_3} \begin{cases} 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^i 01^{y-i} q_\gamma 01^z 0, & \text{если } y-i > 0, \\ 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^i 01^{y-i} q_\delta 01^z 0, & \text{если } y-i = 0, \end{cases}$$

$$01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^i 01^{y-i} q_\gamma 01^z 0 \Rightarrow_{T_4}$$

$$\Rightarrow_{T_4} 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^{i+1} 01^{y-(i+1)} q_\gamma 01^h(x_1, \dots, x_n, y, z) 0;$$

$$01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^y 00 q_\delta 01^z 0 \Rightarrow_{T_5} q_0 01^z.$$

Тогда машина  $T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \begin{cases} q_\gamma = T_4, \\ q_\delta = T_5 \end{cases}$  вычисляет  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

(б) Пусть машина  $G$  вычисляет  $g(x_1, \dots, x_n, y)$ . Используя  $G$  и машины из задачи 5, построить машины  $T_1, T_2, T_3$ , такие, что

$$q_1 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 0 \Rightarrow_{T_1} 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01 q_\alpha 0;$$

$$01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^i q_\alpha 0 \Rightarrow_{T_2} 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^i q_\beta 01^{g(x_1, \dots, x_n, i)} 0;$$

$$01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^i q_\beta 01^y 0 \Rightarrow_{T_3} \begin{cases} 01^{x_1} \dots 01^{x_n} 01^{i+1} q_\alpha 0, & \text{если } y \neq 0, \\ q_0 01^i 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Тогда машина  $T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$  вычисляет  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

10. Следует из задач 3, 4, 6, 7, 9.

$$12. \gamma^n(x_1, \dots, x_n) = 3 \cdot 7 \prod_{i=0}^{x_1-1} p_i \cdot \prod_{i=x_1+1}^{x_1+x_2} p_i \cdot \dots \cdot \prod_{i=x_1+\dots+x_{n-1}+(n-1)}^{x_1+\dots+x_n+(n-1)} p_i.$$

13. Полагаем

$$\rho(0, k, l, u, v) = 2^u \cdot 3^k \cdot 5^l \cdot 7^v,$$

$$\rho(1, k, l, u, v) = 2 \prod_{i=0}^u p_i^{\text{ex}(i+1, u)} \cdot 3^k \cdot 5^{\text{ex}(0, u)} \cdot 7 \cdot p_0^l \cdot \prod_{s=0}^v p_{s+1}^{\text{ex}(s, v)},$$

$$\rho(2, k, l, u, v) = 2 \cdot p_0^l \prod_{i=0}^u p_{i+1}^{\text{ex}(i, u)} \cdot 3^k \cdot 5^{\text{ex}(0, u)} \cdot 7 \cdot \prod_{s=0}^v p_s^{\text{ex}(s+1, v)},$$

$$\rho(s, k, l, u, v) = \rho(0, k, l, u, v) \overline{\text{sg}} s + \rho(1, k, l, u, v) \overline{\text{sg}} |s-1| + \\ + \rho(2, k, l, u, v) \overline{\text{sg}} |s-2|.$$

14. Полагаем

$$\sigma(t, 0, j, u, v) = 2^u \cdot 3^0 \cdot 5^j \cdot 7^v,$$

$$\sigma(t, i, j, u, v) = \rho(\text{ex}(2, \text{ex}(c(i, j), t))),$$

$$\text{ex}(0, \text{ex}(c(i, j), t)), \text{ex}(1, \text{ex}(c(i, j), t)), u, v) \text{ при } i > 0.$$

15. Полагаем

$$\tau(t, x) = \sigma(t, \text{ex}(1, x), \text{ex}(2, x), \text{ex}(0, x), \text{ex}(3, x)).$$

16. Полагаем

$$w(t, x, 0) = x, \quad w(t, x, y + 1) = \tau(t, w(t, x, y)).$$

$$17. \varepsilon(x) = \sum_{i=0}^x \overline{\text{sg}}|\text{ex}(i, \text{ex}(0, x)) - 1| + \overline{\text{sg}}|\text{ex}(2, x) - 1| + \\ + \sum_{i=0}^x \overline{\text{sg}}|\text{ex}(i, \text{ex}(3, x)) - 1|.$$

18. Следует из определения вычислимости и задач 12, 16, 17.

19. Следует из задачи 18 (б).

20. Следует из задач 10 и 19, так как вычисления проводились на машинах с алфавитом  $\{0, 1\}$ .

21. Полагаем  $U(t, x) = \varepsilon(w(t, \gamma^1(x), h^2(t, x)))$  (см. задачу 18). Утверждение следует из задач 10 и 17.

22. Полагаем  $U^{n+1}(t, x_1, \dots, x_n) = U(t, c^n(x_1, \dots, x_n))$ , где  $U$  определена в задаче 21, а  $c^n$  — в задаче 14 из § 1.

23. (а) Если  $h(x, y)$  частично рекурсивна, то такова же и

$$f(x) = \mu y [h(x, y) + y = 0].$$

Пусть машина  $T$  правильно вычисляет  $f(x)$  и  $\lambda(T) = a$ . Тогда  $f(a) = 0 \Leftrightarrow h(a, a) = 0 \Leftrightarrow f(a)$  не определено. Приходим к противоречию.

(в) Имеем  $h_0(\alpha(\beta(x), x)) = g(x)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  определены в задаче 11.

24. Следует из задач 12 и 16.

25. (а) Полагаем  $p(x) = l(x)$ ,  $T_1(m, x, y) = S(m, x, l(y), r(y))$ , где функция  $S$  из задачи 24.

(б) Аналогично (а).

### § 3. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества

3.  $\prod_{i=0}^z \theta_R(x_1, \dots, x_n, i)$  и  $\text{sg} \sum_{i=0}^z \theta_R(x_1, \dots, x_n, i)$  являются требуемыми представляющими функциями.

$$4. \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in M \Leftrightarrow \exists t R(x_1, \dots, x_n, l(t), r(t)).$$

5. Доказать, что рекурсивно перечислимых множеств счетное число.

9.  $\delta_f^{-1}$  — конечное множество.

$$11. x \in A \cup B \Leftrightarrow \exists y (R_A(x, y) \vee R_B(x, y));$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \exists y \exists z (R_A(x, y) \& R_B(x, z)).$$

$$14. \chi_A(x) = \theta_{R_A}(x, \mu z [\theta_{R_A}(x, z) \cdot \theta_{R_{\mathcal{N}_A}}(x, z) = 0]).$$

16. Пусть  $a \in M$  и  $x \in M \Leftrightarrow \exists y R(x, y)$ . Тогда

$$\alpha(x) = l(x) \cdot \overline{\text{sg}} \theta_R(l(x), r(x)) + a \cdot \theta_R(l(x), r(x)).$$

17. Аналогично задаче 16.

$$18. \chi_{\rho_f}(x) = \text{sg} \prod_{i=0}^x |x - f(i)|.$$

19. Пусть  $A$  рекурсивно и бесконечно. Тогда  $A = \rho_f$ , где

$$f(0) = \mu x [\chi_A(x) = 0], \quad f(t+1) = \mu x [\chi_A(x) = 0 \text{ и } x > f(t)].$$

Обратное следует из задачи 18.

20. Пусть  $A$  рекурсивно. Тогда  $A = \rho_f$ , где  $f(0) = \mu x [\chi_A(x) = 0]$ ,  $f(x+1) = f(x) \cdot \chi_A(x+1) + (x+1) \cdot \overline{\text{sg}} \chi_A(x+1)$ . Обратно, пусть  $A = \rho_f$ , где  $f$  — монотонная общерекурсивная функция. Тогда

$$\chi_A(x) = \text{sg} \prod_{i=0}^{\varphi(x)} |x - f(i)|,$$

где  $\varphi(x) = \mu z [x < f(z)]$ .

21. Пусть  $A = \rho_f$ , где  $f$  — примитивно рекурсивная функция. Положим  $g(0) = f(0)$ ,  $g(x+1) = f(\mu y [f(y) > g(x)])$ . Тогда  $B = \rho_g$  есть искоемое рекурсивное подмножество  $A$ .

22. Пусть  $A = \rho_g$ , где  $g$  — примитивно рекурсивная функция. Положим

$$f(0) = g(0), \quad f(x+1) = g\left(\mu y \left[ \sum_{i=0}^x \overline{\text{sg}} |g(y) - f(i)| = 0 \right]\right).$$

Тогда  $f$  есть искомая функция.

$$23. \chi_{\Gamma_f}(x, y) = \text{sg} |f(x) - y|.$$

24. Пусть  $\Gamma_f = \{(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x), \alpha_{n+1}(x)) \mid x \in \mathcal{N}\}$ , где  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  — примитивно рекурсивные функции (см. задачу 17). Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_{n+1}(\mu y [ |x_1 - \alpha_1(x)| + \dots + |x_n - \alpha_n(x)| = 0 ]).$$

25. Пусть множество  $A$  рекурсивно,  $f$  — общерекурсивная функция,  $B = f^{-1}(A)$ . Тогда  $\chi_B(x) = \chi_A(f(x))$ .

$$26. \chi_{f(A)}(x) = \chi_A(\mu t [ |x - f(t)| = 0 ]).$$

27. Пусть  $A = \{x \mid \exists y (f(x, y) = 0)\}$ ,  $B = \{x \mid \exists y (g(x, y) = 0)\}$ , где  $f$  и  $g$  — примитивно рекурсивные функции. Тогда

$$\chi_A(A) = \text{sg}(\chi_C(x) + f(x, \mu y [f(x, y) \cdot g(x, y) \cdot \overline{\text{sg}} \chi_C(x) = 0])).$$

28.  $y \in \rho_f \Leftrightarrow y = f(0) \vee \dots \vee y = f(t)$ , где  $t = \mu z \{ \{0, 1, \dots, y\} \cap \rho_g \subseteq \{g(0), \dots, g(z)\} \}$ , т. е.

$$t = \mu z \left[ \sum_{u=0}^y \left( \overline{\text{sg}} \chi_{\rho_g}(u) \cdot \prod_{i=0}^z |u - g(i)| \right) = 0 \right].$$

29. Пусть  $A = \rho_f$ ,  $B = \rho_g$  для некоторых примитивно рекурсивных функций  $f$  и  $g$ . Вычисляя последовательно значения функций  $f$  и  $g$  (перечисляя  $A$  и  $B$ ), строим функции  $u$  и  $v$ , перечисляющие  $A_1$  и  $B_1$ . Рассмотрим случай, когда существуют числа  $a \in A$ ,  $b \in B$  и  $a \neq b$ . Полагаем

$$u(0) = \begin{cases} f(0), & \text{если } f(0) \neq b, \\ a & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$v(0) = \begin{cases} g(0), & \text{если } g(0) \neq u(0), g(0) \neq a, \\ b & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$u(x+1) = \begin{cases} f(x+1), & \text{если } f(x+1) \notin \{v(0), \dots, v(x)\}, \\ a & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$v(x+1) = \begin{cases} g(x+1), & \text{если } g(x+1) \notin \{u(0), \dots, u(x+1)\}, \\ b & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Примитивную рекурсивность  $u$  и  $v$  можно доказать, используя задачи 18 и 20 из § 1.

30. (а) Рассмотрим для простоты случай  $f(x) = g(h(x))$ , где  $\Gamma_g$  и  $\Gamma_h$  рекурсивно перечислимы. Тогда  $\langle x, y \rangle \in \Gamma_g \Leftrightarrow \exists u R_{\Gamma_g}(x, y, u)$ ,  $\langle x, y \rangle \in \Gamma_h \Leftrightarrow \exists v R_{\Gamma_h}(x, y, v)$ . Имеем

$$\langle x, y \rangle \in \Gamma_f \Leftrightarrow \exists z \exists u \exists v (R_{\Gamma_g}(x, z, u) \& R_{\Gamma_h}(z, y, v)).$$

(б) Докажем для случая специальной рекурсии из задачи 28 (а) из § 1. Пусть

$$\begin{cases} f(x, 0) = x, \\ f(x, y+1) = G(f(x, y)) \end{cases}$$

и  $\Gamma_G = \{\langle g(t), h(t) \rangle \mid t \in \mathcal{N}\}$ , где  $g$  и  $h$  — примитивно рекурсивные функции (см. задачу 17). Положим:

если  $n = 2t$ , то  $\alpha(n) = c^3(t, 0, t)$ ;

если  $n = 2t + 1$  и  $c_{33}(\alpha(l(t))) = g(r(t))$ , то

$$\alpha(n) = c^3(c_{31}(\alpha(l(t))), c_{32}(\alpha(l(t))) + 1, h(r(t))),$$

в остальных случаях  $\alpha(n) = c^3(0, 0, 0)$ .

Примитивно рекурсивная функция  $\alpha(n)$  перечисляет множество  $c^3(\Gamma_g)$ .

(в) Докажем для случая  $f(x) = \mu y [g(x, y) = 0]$ , где  $\Gamma_g$  рекурсивно перечислим, т. е.  $\Gamma_g = \{\langle \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t) \rangle \mid t \in \mathcal{N}\}$  для примитивно рекурсивных функций  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (см. задачу 17). По определению  $\mu$ -оператора  $\langle x, y \rangle \in \Gamma_f$  равносильно утверждению о существовании таких  $t_0, \dots, t_{y-1}, t_y$ , что

$$\sum_{i=0}^y (|\alpha_1(t_i) - x| + |\alpha_2(t_i) - i| + y \overline{\text{sg}} \prod_{i=0}^{y-1} \alpha_3(t_i) + \alpha_3(t_y)) = 0.$$

Подставляя  $\beta(u, v, i)$  вместо  $t_i$ , получим примитивно рекурсивный предикат  $P(u, v, x, y)$  такой, что  $\langle x, y \rangle \in \Gamma_f \Leftrightarrow \exists u \exists v P(u, v, x, y)$ . (Определение и свойства функции  $\beta$  см. в задаче 34 из § 7 части II.)

(г) Следует из (а), (б) и (в).

31. Следует из задач 24 и 30.

32. Пусть  $f$  частично рекурсивна. Тогда

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \delta_f \Leftrightarrow \exists y (\langle x_1, \dots, x_n, y \rangle \in \Gamma_f) \Leftrightarrow \exists y \exists z P(x_1, \dots, x_n, y, z)$$

для некоторого примитивно рекурсивного предиката  $P$  (см. задачу 31). Другое доказательство следует из задачи 18 (а) из § 2.

34. Следует из задач 20 и 33.

$$\chi_M^*(x_1, \dots, x_n) = o(\mu y [\theta_p(x_1, \dots, x_n, y) = 0]).$$
$$\chi_B^*(x_1, \dots, x_n) = \chi_A^*(f(x_1, \dots, x_n))$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = l(\mu t [G(x_1, \dots, x_n, l(t), r(t)) = 0]).$$



41. Если  $\chi_{\Gamma_f}$  примитивно рекурсивна, то взять в качестве  $g$  функцию  $\chi_{\Gamma_f}$ . Обратно,

$$\chi_{\Gamma_f}(x_1, \dots, x_n, y) = \text{sg } y \cdot \left( \overline{\text{sg}} \prod_{i=0}^{y-1} g(x_1, \dots, x_n, i) + g(x_1, \dots, x_n, y) \right).$$

42. Доказывается аналогично задаче 42 (а) из § 1.

43. Пусть  $\chi_{\mathcal{N} \setminus H}^*(x) = U(m, x)$  для некоторого  $m$  (см. задачу 21 из § 2). Имеем

$$m \in H \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{N} \setminus H}^*(m) \text{ не определено} \Leftrightarrow \forall y (T_1(m, m, y) \neq 0) \Leftrightarrow m \notin H.$$

44. Положим

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n), & \text{если } \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \delta_f \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$g$  есть общерекурсивное доопределение  $f$  (см. задачу 37).

45. Пусть  $M$  — рекурсивное множество. Тогда  $\chi_{\mathcal{N} \setminus M}(x) = V(m, x)$  для некоторого  $m$ . Имеем

$$m \in M \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{N} \setminus M}(m) = 1 \Leftrightarrow V(m, m) = 1 \Leftrightarrow m \notin M.$$

46. Например,  $\overline{\text{sg}} U(x, x)$ .

47. Например,  $f(x) = x \cdot \text{sg}(U(x, x) + 1)$ . Пусть

$$f(x) = \mu y [g(x, y) = 0].$$

Тогда  $U(x, x)$  определено  $\Leftrightarrow g(x, x) = 0$  и, следовательно, множество  $H$  из задачи 43 рекурсивно. Пришли к противоречию.

48. Пусть  $G$  — рекурсивно перечислимое множество и  $g(x)$  — рекурсивная 1-1-функция, перечисляющая  $G$  (см. задачу 22). Пусть  $h(x) = V(g(x), x) + 1$ . Тогда  $h(x) = V(g(m), x)$  для некоторого  $m$ . Тогда  $h(m) = V(g(m), m) + 1 = V(g(m), m)$ . Пришли к противоречию.

#### § 4. НУМЕРАЦИИ КЛИНИ И ПОСТА

2. (а) Следует из 1 (д).

(б) Индукцией по  $n$ .

$$\begin{aligned} 3. (а) f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n) + 0 \cdot y = U(a, y, x_1, \dots, x_n) = \\ &= K^{n+1}(c(a, y), x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

(б) Следует из (а) и задачи 2 (а).

4. Имеем  $f(x) = f(x) + 0 \cdot y = K^3(a, y, x) = K^2([a, y], x)$ . Таким образом, числа  $[a, y]$  при  $y = 0, 1, \dots$  являются клиниевскими номерами  $f(x)$ .

5. (а) Имеем  $K(u, K(v, x)) = K([m, u, v], x)$  для некоторого  $m$ , тогда  $f(u, v) = [m, u, v]$  — искомая функция.

(б) Имеем  $\mu y [K^3(u, x, y) = 0] = K^3(a, u, x) = K([a, u], x)$  для некоторого  $a$ .

(в) Пусть

$$\begin{cases} F(u, 0) = 0, \\ F(u, x+1) = K(u, F(u, x)). \end{cases}$$

Тогда  $F(u, x) = K([b, u], x)$  для некоторого  $b$ .

(г)  $K(u, x) + K(v, x) = K([n, u, v], x)$  для некоторого  $n$ .

6. Пусть  $s = \kappa c$ ,  $q = \kappa d$ . Положим  $f(0) = c$ ,  $f(1) = d$  и

$$f(x) = \begin{cases} [m, f(l(t)), f(r(t))], & \text{если } x = 3t, t \neq 0, \\ [b, f(t)], & \text{если } x = 3t + 1, t \neq 0, \\ [n, f(l(t)), f(r(t))], & \text{если } x = 3t + 2, \end{cases}$$

где  $m, b, n$  взяты из указания к задаче 5. Тогда  $f$  есть примитивно рекурсивная функция, перечисляющая множество  $P$  (см. задачу 35 из § 1).

7.  $F(x, y) = K(f(x), y)$ , где  $f(x)$  — функция, построенная в задаче 6, есть искомая функция.

8. Аналогично задаче 5.

9.  $K(f(x_1, \dots, x_n), y) = K^{n+2}(e, x_1, \dots, x_n, y)$  для некоторого  $e$ . Тогда  $g(x_1, \dots, x_n) = [e, x_1, \dots, x_n]$  — искомая функция.

10. (а) Имеем

$$\begin{aligned} K(f(x_1, \dots, x_n, [y, y, x_1, \dots, x_n]), t) &= K(a, y, x_1, \dots, x_n, t) = \\ &= K([a, y, x_1, \dots, x_n], t). \end{aligned}$$

Положим  $y = a$ ,  $g(x_1, \dots, x_n) = [a, a, x_1, \dots, x_n]$ .

(б) Следует из (а).

11.  $f(x, y) = K([a, x], y)$  для подходящего  $a$ . Поэтому  $f(n, y) = K([a, n], y) = K(n, y)$  для некоторого  $n$  (см. задачу 10).

12. Имеем  $I_1^2(x, y) = K([a, x], y)$  для некоторого  $a$ . По задаче 8 существует  $n$  такое, что  $\kappa[a, n] = \kappa n$ . Тогда  $\kappa_n(0) = \kappa_n(n) = n$ .

## 13. Имеем

$$\kappa g(x, y) = \begin{cases} \kappa K(x, y), & \text{если } K(x, y) \text{ определено,} \\ \omega & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для подходящей примитивно рекурсивной функции  $g$  (см. задачу 9). Далее  $\kappa g(x, f(x)) = \kappa_{f(x)}$  для подходящей примитивно рекурсивной функции  $f$  (см. задачу 10).

## 14. (а) Положим

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = x, \\ 1 & \text{при } y \neq x. \end{cases}$$

Тогда  $F(x, y) = K(g(x), y)$  для некоторой примитивно рекурсивной функции  $g$ ,  $g = \kappa_n$  для подходящего  $n$ . Поэтому  $\kappa_{g(f(n))} = \kappa_{f(n)}$ , где  $f$  — функция, построенная в задаче 13. Отсюда

$$\kappa_{f(n)}(y) = \kappa_{g(f(n))}(y) = F(f(n), y) = \chi_{\{f(n)\}}(y).$$

Полагаем  $a = f(n)$ .

(б) Применить рассуждения пункта (а) к функции

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = x, \\ \text{не определено} & \text{при } y \neq x. \end{cases}$$

(в) Применить рассуждения пункта (а) к функции

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \neq x, \\ \text{не определено} & \text{при } y = x. \end{cases}$$

15. По задаче 11 существует число  $e$  такое, что  $\kappa_e(x) = g(e, x)$ . Полагаем  $f = \kappa_e$ . Тогда  $(F(\kappa_e))(x) = g(e, x) = \kappa_e(x)$ .

16. Определим оператор  $F$ :

$$(F(\varphi))(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha(x) = 0, \\ \gamma(\varphi(\delta(x))), & \text{если } \alpha(x) > 0, \\ \text{не определено,} & \text{если } \alpha(x) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Функция  $g(n, x) = (F(\kappa_n))(x)$  частично рекурсивна (см. задачу 39 из § 3). Ввиду задачи 15 существует требуемая функция  $f$ .

17. Пусть  $a \in \kappa^{-1}(A)$ ,  $b \notin \kappa^{-1}(A)$ . Если  $\kappa^{-1}(A)$  — рекурсивное множество, то функция

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \in \kappa^{-1}(A), \\ a, & \text{если } x \notin \kappa^{-1}(A), \end{cases}$$

является общерекурсивной. Ввиду задачи 10 (б) существует число  $n$  такое, что  $\kappa f(n) = \kappa n$ . Имеем

$$f(n) \in \kappa^{-1}(A) \Leftrightarrow n \in \kappa^{-1}(A) \Leftrightarrow f(n) = b \Leftrightarrow f(n) \notin \kappa^{-1}(A).$$

Приходим к противоречию.

18. (а) и (б) следуют из задачи 17.

(в) Множество  $B = \{x \mid 0 \in \delta_{\kappa x}\}$  нерекурсивно ввиду задачи 17.

Имеем  $x \in B \Leftrightarrow c(x, 0) \in A_3$ . Поэтому  $A_3$  нерекурсивно.

(г), (д) Аналогично (в).

19. Следует из задачи 38 из § 3.

20. Следует из задачи 16 из § 3 и задачи 4, так как пустое множество есть  $\rho_\omega$ .

21. Следует из задачи 17.

22. Следует из задачи 21.

23. Следует из задачи 38 из § 1.

24. Следует из задачи 9.

25. Рассмотрим случай, когда  $n = 1$ . Если  $P = \emptyset$ , то в качестве  $\alpha(x_1)$  берем какой-либо номер пустого множества. Если  $P \neq \emptyset$ , то ввиду задачи 17 из § 3 существуют примитивно рекурсивные функции  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  такие, что

$$P = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \mid t \in \mathcal{N}\}.$$

Тогда функция

$$g(y, t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & \text{если } \alpha_2(t) = y, \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

частично рекурсивна и  $g(y, t) = \kappa_{\alpha(y)}(t)$ . Функция  $\alpha$  искомая.

26. (а)  $t \in \pi_x \cap \pi_y \Leftrightarrow \exists z_1 \exists z_2 (|K(x, z_1) - t| + |K(x, z_2) - t| = 0)$ . Далее применяем задачу 38 из § 3 и задачу 25.

27. (а)  $t \in \delta_{\kappa x} \Leftrightarrow \exists z (K(x, t) = z)$ . Далее применяем задачу 38 из § 3 и задачу 25.

(б) Пусть

$$h(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in \pi_x, \\ \text{не определено} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда  $h(x, y) = \kappa_{g(x)}(y)$  для некоторой примитивно рекурсивной функции  $g$  (см. задачу 3 (б)).

28. Следует из задачи 10.

29. Следует из задач 25 и 28.

30. (а) Следует из задач 26 (в) и 28.

(в) Следует из задачи 29 для  $M = \{\langle y, x \rangle \mid y \neq x\}$ .

34. Рекурсивная перечислимость  $K_1$  следует из задачи 38 из § 3.

Пусть  $A = \pi_a$ . Тогда

$$x \in A \Leftrightarrow c(x, a) \in K_1.$$

35. Следует из задачи 33 и существования рекурсивно перечислимого, но не рекурсивного множества (например, см. задачу 43 из § 3).

36. Полагаем  $f_A(x) = x$ .

37. Если  $A$  — креативное и рекурсивное множество, то  $-A = \pi_a$  для некоторого  $a$ , но  $(A \cap \pi_a) \cup (-A \cap -\pi_a) = \emptyset$ , значит, это множество не содержит  $f(a)$ .

38. Пусть  $g = \kappa_a$   $m$ -сводит  $A$  к  $B$ . Строим  $f_B$  следующим образом. Ввиду задачи 26(е) имеем  $g^{-1}(\pi_x) = \pi_{w(x, a)}$ . Полагаем  $f_B(x) = g f_A w(x, a)$ .

39. Пусть  $A$  креативно, а  $B$  рекурсивно перечислимо. Применяем задачу 25 к множеству  $P = \mathcal{N} \times B$ . Имеем

$$\pi_{\alpha(x)} = \begin{cases} \mathcal{N}, & \text{если } x \in B, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция  $f_A \alpha(x)$   $m$ -сводит  $B$  к  $A$ .

40. Следует из задач 38 и 39.

41. Ввиду задачи 38 достаточно доказать, что  $K \leq_m K_2$ , где  $K$  — множество из задачи 36. Пусть

$$\pi_{\alpha(x)} = \begin{cases} \{a\}, & \text{если } x \in \pi_x, \\ \emptyset & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Можно считать, что  $\alpha(x)$  — общерекурсивная функция (см. задачу 25). Функция  $\alpha(x)$   $m$ -сводит  $K$  к  $K_2$ .

42. Пусть машина Тьюринга  $T_1$  правильно вычисляет функцию  $K(x, y)$ , а машина  $T_2(x)$  перерабатывает слово  $q_1 01^y 0$  в  $q_1 01^x 01^y 0$ . Существует примитивно рекурсивная функция  $\tau(x)$  такая, что  $\lambda T_2(x) = \tau(x)$ . Тогда  $T_2(x) \cdot T_1$  вычисляет  $\kappa_x$ . Далее см. задачу 11 из § 2.

43. Полагаем  $f_H(x) = \sigma g(x)$ , где  $g$  — функция из задачи 27 (б), а  $\sigma$  — функция из задачи 42.