Semnale și sisteme

Lucrare de laborator nr. 9

Serii Fourier

Răspunsul sistemelor liniare și invariante în timp la exponențiale complexe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T\{\bullet\}} \longrightarrow y(t)$$

Setul de coeficienți ai seriei Fourier $\{a_k\}$

Setul de coeficienți ai seriei Fourier $\{a_k H(k\omega_0)\}$

Răspunsul sistemelor liniare și invariante în timp la exponențiale complexe

Exemplul 1: Se consideră un sistem continuu liniar și invariant în timp având răspunsul la impuls $h(t) = e^{-4t}u(t)$. Să se determine reprezentarea în serie Fourier a ieșirii $y(t)$ pentru fiecare din următoarele semnale de intrare:

a) $x(t) = \cos(2\pi t)$
b) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$
c) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$

$$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-4\tau} e^{-jk\omega_0\tau} d\tau = -\frac{1}{4+jk\omega_0} e^{-4\tau} e^{-jk\omega_0\tau}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4+jk\omega_0}$$

a) $x(t) = cos(2\pi t)$

$\omega_0 = 2\pi$

$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) = \sum_{k=-1}^{1} a_k e^{jk2\pi t}$

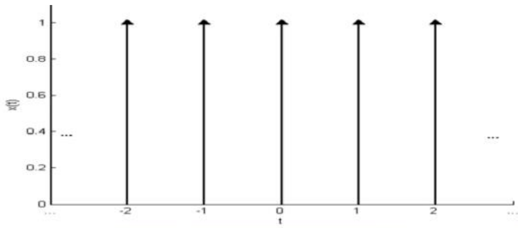
$a_0 = 0 \qquad a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$

$b_k = a_k H(k2\pi)$

$b_0 = 0 \qquad b_1 = a_1 H(2\pi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4+j2\pi}\right) \qquad b_{-1} = a_{-1} H(-2\pi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-j2\pi}\right)$

$$y(t) = \sum_{k=-1}^{+1} b_k e^{jk2\pi t}$$

$b)\ \ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$



$T_0 = 1,\ \omega_0 = 2\pi$

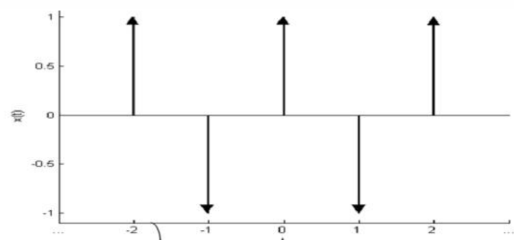
$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0} = 1$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk2\pi t}$$

$$b_k = a_k H(k2\pi) = \frac{1}{T_0}H(k2\pi) = \frac{1}{T_0}\frac{1}{4+jk2\pi} = \frac{1}{4+jk2\pi}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk2\pi t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+jk2\pi}e^{jk2\pi t}$$

$c)\ \ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$



$T_0 = 2,\ \omega_0 = \pi$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\left(\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} -\delta\left(t-\frac{T_0}{2}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{T_0}\left(e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{t=0} - e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{t=\frac{T_0}{2}}\right) = \frac{1}{T_0}\left(1-e^{-jk\omega_0\frac{T_0}{2}}\right) = \frac{1}{T_0}\left(1-e^{-jk\pi}\right) = \frac{1}{T_0}\left(1-(-1)^k\right) = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1-(-1)^k\right)e^{jk\pi t}$$

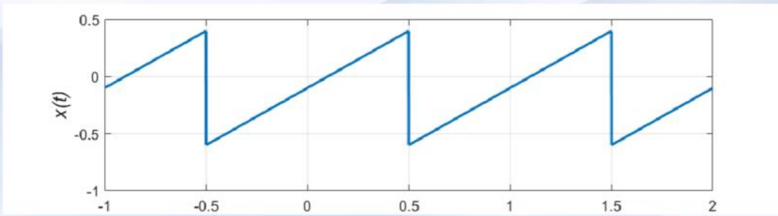
$$b_k = a_k H(k\omega_0) = \frac{1-(-1)^k}{T_0}H(k\pi) = \frac{1-(-1)^k}{T_0}\frac{1}{4+jk\pi} = \frac{1-(-1)^k}{2(4+jk\pi)}$$

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{4+jk\pi}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\pi t}$$

Analiza Fourier a unui semnal periodic

<u>Exemplul 2</u>: Pentru semnalul din figura următoare, să se determine primii N coeficienți a_k corespunzători formei complexe a seriei Fourier.



$T_0 = 1$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

```
function ak = fsAnalysis(x, t, T0, Ts, N)
% functie pentru estimarea primilor N coeficienti ai seriei Fourier complexe pentru semnalul x
% T0 - perioada semnalului x; Ts - perioada de esantionare

% extragerea unei perioade din semnalul x
t = t(1:floor(T0/Ts));
x = x(1:length(t));

% estimarea coeficientilor ak utilizand metoda trapezelor
w0 = 2*pi/T0;
ak = [];
for k = -N:N
    ak = [ak, (1/T0)*trapz(t, x.*exp(-j*k*w0*t))];
end
```

```
% generare semnal x
T0 = 1;  w0 = 2*pi/T0;
Ts = 0.0005; t= -1:Ts:2;
x = t - 0.1 - round(t);
plot(t,x)

% estimare coeficienti
N = 8;
ak = fsAnalysis(x, t, T0, Ts, N);
```

Sinteza unui semnal utilizând forma armonică a seriei Fourier

Exemplul 3: Pentru semnalul $x(t)$, semnal periodic cu perioada fundamentală $T_0 = 1$, să se realizeze sinteza semnalului utilizând forma armonică a seriei Fourier, cunoscând primii N coeficienți a_k corespunzători formei complexe (se vor utiliza coeficienții determinati la Exemplul 2). Să se afișeze spectrul de amplitudine, fază și putere.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$a_k = A_k e^{j\theta_k} = B_k + jC_k$$

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \qquad \theta_k = \arg(B_k + jC_k)$$

Spectrul de amplitudine

$$\{a_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$$

Spectrul de fază

$$\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots\}$$

Spectrul de putere

$$(a_0)^2, \frac{1}{2}(A_1)^2, \frac{1}{2}(A_2)^2, \ldots, \frac{1}{2}(A_n)^2, \ldots$$

```
a0 = ak(N+1);
ksi0 = 0;
Ak = abs(ak(N+2:end));
ksi = angle(ak(N+2:end));

% sinteza semnal
x_est = a0*ones(size(t));
for k = 1:N
     x_est = x_est + 2*Ak(k)*cos(w0*k*t+ksi(k));
end
figure; plot(t,x,'b',t,x_est,'r')
xlabel('t'); legend('x(t)', 'x_{est}(t)');

% afisare spectru
n0 = 0:N;
figure, subplot(3,1,1); stem(n0,[a0, Ak], '.')
legend('Amplitude spectrum')

subplot(3,1,2), stem(n0,[ksi0, ksi], '.g')
legend('Phase spectrum')

subplot(3,1,3), stem(n0,[a0^2, (Ak.^2)/2], '.r')
xlabel('n'), legend('Power spectrum')
```

Exerciții

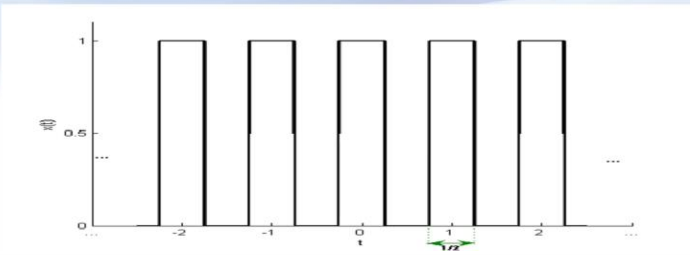
Exercițiul 1: Se consideră un sistem continuu liniar și invariant în timp având răspunsul la impuls $h(t) = e^{-4|t|}$. Să se determine reprezentarea în serie Fourier a ieșirii $y(t)$ pentru fiecare din următoarele semnale de intrare:

a) $x(t) = \cos(2\pi t)$

b) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$

c) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$

d)



Exerciții

Exercițiul 2:

a) Repetați Exemplul 2 și 3 pentru următoarele valori ale perioadei de eșantionare: Ts = 0.01; Ts = 0.001. Ce observați?

b) Repetați Exemplul 2 și 3 pentru diferite valori ale numărului de coeficienti *N*. Ce observați?

c) Afișati fiecare dintre componentele semnalului *x_est* și suma parțială a componentelor.