Semnale și sisteme

Lucrare de laborator nr. 6

Funcții de corelație unidimensionale pentru semnale continue și discrete

Puterea și energia semnalelor

- Energia unui semnal $x(t)$ sau $x[n]$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \qquad E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Puterea unui semnal $x(t)$ sau $x[n]$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \qquad P_x = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} |x[n]|^2$$

Un semnal este de tip energie dacă $E_x < \infty$ și este de tip putere dacă $0 < P_x < \infty$.
Semnalele periodice uzuale sunt de tip putere și au puterea

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt \qquad P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} |x[n]|^2$$

Puterea și energia semnalelor

Exemplu: Să se determine dacă următoarele semnale sunt de tip energie sau de tip putere.

a) $x(t) = \begin{cases} t-2, & t \in [0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^2 |t-2|^2 dt = 8/3$$

Semnal de tip energie

b) $x(t) = Acos(\omega t)$

$$P_x = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T A^2 cos^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{\omega}{2\pi}A^2 \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2}(1+\cos(2\omega t + 2\varphi))\, dt = \frac{A^2}{2} < \infty$$

Semnal de tip putere

Funcții de corelație

- *Funcția de intercorelație* măsoară dependența valorilor unui semnal de valorile unui alt semnal.

Pentru semnale permanente (de tip putere)

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau)dt$$

$$\varphi_{xy}[n] = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M}\sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x[k]y[k-n]$$

Pentru semnale tranzitorii (de tip energie)

$$\tilde{\varphi}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-\tau)dt$$

$$\tilde{\varphi}_{xy}[n] = \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x[k]y[k-n]$$

Funcții de corelație

- *Funcția de autocorelație* descrie dependența generală a valorilor unui semnal la un anumit moment de valorile aceluiași semnal la un alt moment.
  - pentru semnale permanente (de tip putere) funcția de autocorelatie este

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t \qquad \varphi_x[n] = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M}\sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x[k]x[k-n]$$

  - pentru $\tau = 0$, $P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \varphi_x(0)$

Funcții de corelație

- pentru semnale periodice, funcția de autocorelație se simplifică considerabil:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{kT_0}\int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{kT_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t$$

- funcția de autocorelatie a unui semnal periodic este și ea periodică și are aceeași perioadă ca și semnalul original.
- pentru semnale tranzitorii (de tip energie) funcția de autocorelatie este

$$\tilde{\varphi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t \qquad E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \tilde{\varphi}_x(0)$$

- pentru $\tau = 0$, $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \tilde{\varphi}_x(0)$.

Funcții de corelație

<u>Exemplu</u>

Calculul funcției de autocorelatie pentru un semnal sinusoidal $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\big(\omega_0(t-\tau)\big)\sin(\omega_0 t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2T_0}\int_0^{T_0} \cos(\omega_0\tau)\mathrm{d}t - \frac{1}{2T_0}\int_0^{T_0} \cos\big(\omega_0(2t-\tau)\big)\mathrm{d}t = \frac{\cos(\omega_0\tau)}{2}$$

```
syms t w0 tau
T0=2*pi/w0;
phix=1/T0*int(sin(w0*(t-tau))*sin(w0*t), t, 0, T0)
```

Detecția semnalelor periodice utilizând funcții de corelație

Detecția semnalelor periodice utilizând autocorelația

Funcția de autocorelație poate fi utilizată pentru găsirea de tipare care se repetă precum prezența unui semnal periodic într-un semnal zgomotos.

Se consideră un semnal compus: $x(t) = p(t) + b(t)$, unde $p(t)$ este un semnal periodic cu perioadă necunoscută și $b(t)$ este zgomotul suprapus. Se presupune că cele două componente au media zero. Funcția de autocorelatie a lui $x(t)$ este

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\big(p(t)+b(t)\big)\big(p(t-\tau)+b(t-\tau)\big)\mathrm{d}t,$$

și poate fi scrisă sub forma $\varphi_x(\tau) = \varphi_p(\tau) + \varphi_{pb}(\tau) + \varphi_{bp}(\tau) + \varphi_b(\tau)$.

Considerând că zgomotul $b(t)$ este independent de $p(t)$ ($\varphi_{pb}(\tau) \approx \varphi_{bp}(\tau) \approx 0$) și că $b(t)$ este un semnal aleator cu $\varphi_b(\tau) \approx 0$ pentru o valoare a lui τ suficient de mare, pentru $\tau > \tau_x$ se va obține $\varphi_x(\tau) \approx \varphi_p(\tau)$. Funcția de autocorelație $\varphi_x(\tau)$ ia forma unei functii periodice evidențiind prezența lui $p(t)$ și permițând detectarea perioadei.

Detecția semnalelor periodice utilizând funcții de corelație

Detecția semnalelor periodice utilizând intercorelația

În urma intercorelației a două semnale cu perioadă egală se va obține o funcție periodică cu aceeași perioadă.

Se consideră un semnal $x(t) = p(t) + b(t)$, unde $p(t)$ este un semnal periodic cu perioadă cunoscută T_0. Intercorelația lui $x(t)$ cu un semnal de referință $r(t)$ cu aceeași perioadă T_0 este:

$$\varphi_{xr}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\big(p(t) + b(t)\big)r(t-\tau)\mathrm{d}t$$

$$\varphi_{xr}(\tau) = \varphi_{pr}(\tau) + \varphi_{br}(\tau)$$

$b(t)$ și $r(t)$ fiind independente vom obține: $\varphi_{br}(\tau) \approx 0\ \forall\tau$, $\varphi_{xr}(\tau) \approx \varphi_{pr}(\tau)$ care este o funcție periodică.

Generarea semnalelor aleatoare în Matlab

- Zgomotul alb poate fi definit ca o secvență de valori aleatoare necorelate și poate fi generat în Matlab utilizând funcțiile *rand* sau *randn*:
  - ```
    x = rand(1, 100);  % genereaza 100 esantioane de zgomot alb uniform
                       % distribuite intre 0 si 1
    ```
  - ```
    xn = 2*(x-0.5);    % transforma valorile in intervalul [-1 1]
    ```
  - ```
    x = randn(1, 100); % genereaza 100 esantioane de zgomot alb Gaussian
    cu medie zero si varianta unitara
    ```
    ```

Exerciții

Exercițiul 1. Să se calculeze funcția de autocorelatie pentru semnalul

$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Exercițiul 2.

a. Scrieți o funcție în Matlab pentru calculul funcției de autocorelație

   $\varphi_{xx}[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} x[k]x[k-n]$.

b. Generați un semnal sinusoidal discret în Matlab cu perioada 64 și amplitudinea 1

   $x_p[n] = A_s \sin\left(2\pi \frac{n}{N}\right)$.

c. Adăugați zgomot alb: $x[n] = x_p[n] + A\,\mathrm{rand}(n)$

d. Utilizați funcția de la punctul a. pentru a calcula autocorelația semnalului zgomotos $x[n]$.

e. Reprezentați în Matlab semnalul $x[n]$ și funcția sa de autocorelație $\varphi_x[n]$. Afișați autocorelația pentru diferite amplitudini ale zgomotului și estimați (de pe grafic) perioada semnalului original.