Semnale și sisteme

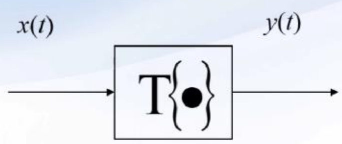
Lucrare de laborator nr. 5

Proprietati ale sistemelor

Invarianta in timp

Un sistem este ***invariant in timp*** daca o deplasare in timp a intrarii produce o deplasare in timp a iesirii cu aceeasi valoare de timp

Daca $T[x(t)] = y(t)$, atunci $T[x(t - \tau)] = y(t - \tau)$ pentru orice valoare reala de timp τ



Invarianta in timp

Exemplu: Sa se determine daca sistemul descris de urmatoarea relatie intrare/iesire este invariant in timp.

$y(t) = \frac{x(t)}{1+x(t-1)}$

1. Calculam $y_{x\_shifted}(t) = T[x_{shifted}(t)] = T[x(t-t_0)] = \frac{x(t-t_0)}{1+x(t-t_0-1)}$

2. Verificam $y_{x\_shifted}(t) = y(t-t_0)$?

$y(t) = \frac{x(t)}{1+x(t-1)} \Rightarrow y(t-t_0) = \frac{x(t-t_0)}{1+x(t-t_0-1)}$

Sistem invariant in timp

Liniaritate

Un sistem este liniar daca satisface proprietatile de omogenitate si aditivitate:

$T[k\,x(t)] = k\,T[x(t)]$

- k – constanta,
- $x(t)$ – semnal de intrare

$T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$

- $x_1(t), x_2(t)$ – semnale de intrare

Liniaritate

<u>Exemplu</u>: Sa se determine daca sistemul descris de urmatoarea relatie intrare/iesire este liniar.

$$y(t) = \frac{x(t)}{1+x(t-1)}$$

1. Verificam omogenitatea $\quad$ T[$k\,x(t)$] = k T[$x(t)$] ?

T[$k\,x(t)$] = $\frac{k\,x(t)}{1+k\,x(t-1)}$, $\qquad$ k T[$x(t)$] = $\frac{k\,x(t)}{1+\,x(t-1)}$

2. Verificam aditivitatea $\quad$ T[$x_1(t) + x_2(t)$] = T[$x_1(t)$] + T[$x_2(t)$] ?

T[$x_1(t) + x_2(t)$] = $\frac{x_1(t)+x_2(t)}{1+x_1(t-1)+x_2(t-1)}$,

T[$x_1(t)$] + T[$x_2(t)$] = $\frac{x_1(t)}{1+x_1(t-1)} + \frac{x_2(t)}{1+x_2(t-1)}$

Sistem neliniar (ambele teste esueaza)

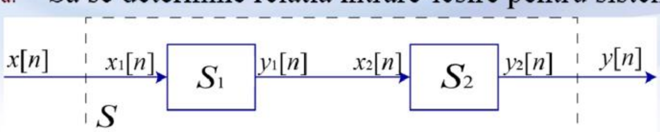
Proprietati ale sistemelor

<u>Exemplu</u>: Se considera un sistem S avand intrarea $x[n]$ si iesirea $y[n]$. Sistemul este obținut prin interconectarea in serie a unui sistem S_1 urmat de un sistem S_2. Relatiile intrare-iesire pentru S_1 si S_2 sunt:

S_1: $y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$, $\qquad$ S_2: $y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$

unde $x_1[n]$ si $x_2[n]$ reprezinta semnale de intrare.

a. Sa se determine relatia intrare-iesire pentru sistemul S.

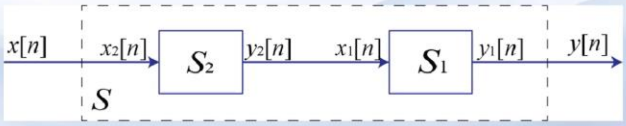


$$\boxed{\begin{aligned} y[n] &= y_2[n] \\ x_2[n] &= y_1[n] \\ x[n] &= x_1[n] \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= x_2[n-2] + \tfrac{1}{2}x_2[n-3] \\ &= 2x_1[n-2] + 4x_1[n-3] + x_1[n-3] + 2x_1[n-4] \\ &= 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4] \end{aligned}$$

Proprietati ale sistemelor

b. Sa se precizeze daca in urma inversarii ordinii in care S_1 si S_2 sunt conectate se modifica relatia intrare-iesire a sistemului S.



$$y[n] = y_1[n]$$
$$x_1[n] = y_2[n]$$
$$x[n] = x_2[n]$$

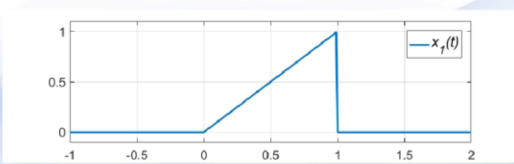
$$\begin{aligned} y[n] &= 2x_1[n] + 4x_1[n-1] \\ &= 2y_2[n] + 4y_2[n-1] \\ &= 2x_2[n-2] + x_2[n-3] + 4x_2[n-3] + 2x_2[n-4] \\ &= 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4] \end{aligned}$$

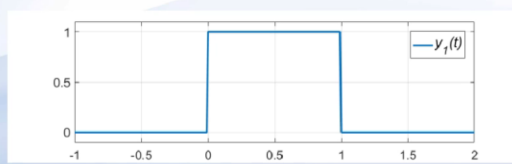
c. Sa se reprezinte in Matlab iesirea sistemului S pentru intrarea $\delta[n]$.

```
x=@(n)(n==0);
n = 0:6; y = 2*x(n-2) + 5*x(n-3) + 2*x(n-4);
figure; stem(n,y);
```

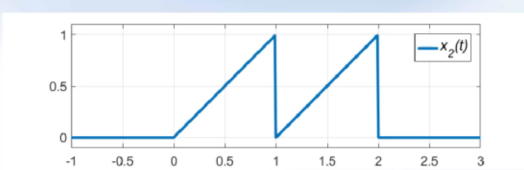
Proprietati ale sistemelor

<u>Exemplu</u>: Raspunsul unui sistem liniar si invariant in timp la semnalul $x_1(t)$ este semnalul $y_1(t)$.





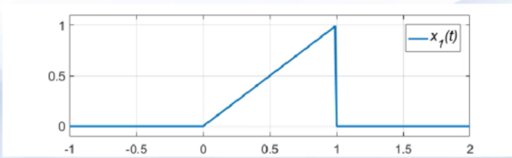
Sa se determine si sa se reprezinte in Matlab raspunsul sistemului la alte intrari care pot fi exprimate ca o combinatie liniara de intrarea $x_1(t)$.

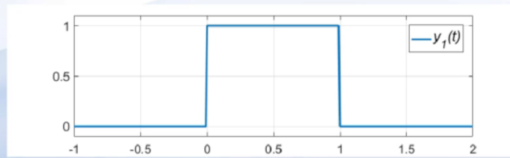


1. Se exprima $x_2(t)$ ca o functie liniara de $x_1(t)$
   $x_2(t)=x_1(t) + x_1(t-1)$
2. Se utilizeaza proprietatile de liniaritate si invarianta pentru a determina o expresie a semnalului de iesire in functie de $y_1(t)$
   $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$
   $x_1(t-1) \rightarrow y_1(t-1)$ (invarianta)
   $x_2(t) = x_1(t) + x_1(t-1) \rightarrow y_2(t) = y_1(t) + y_1(t-1)$ (aditivitate)

Proprietati ale sistemelor

<u>Exemplu</u>: Raspunsul unui sistem liniar si invariant in timp la semnalul $x_1(t)$ este semnalul $y_1(t)$.



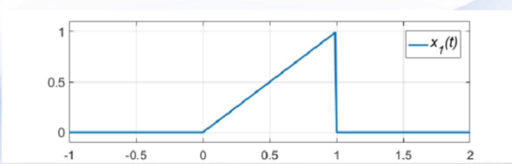


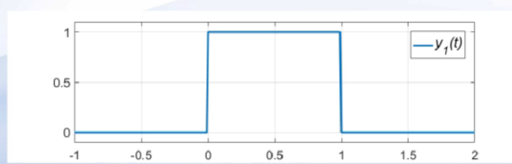
Sa se determine si sa se reprezinte in Matlab raspunsul sistemului la alte intrari care pot fi exprimate ca o combinatie liniara de intrarea $x_1(t)$.

```
u=@(t)(t>=0);
x1= @(u,t)((u(t)-u(t-1)).*t);
t = -1:0.01:3;
subplot(211); plot(t,x1(u,t)); axis([-1 2 -0.1 1.1]); grid; xlabel('t'); ylabel('x_1(t)')
y1 = @(u,t)(u(t)-u(t-1));
subplot(212); plot(t,y1(u,t)); axis([-1 2 -0.1 1.1]); grid; xlabel('t'); ylabel('y_1(t)')
x2 = x1(u,t)+ x1(u,t-1); figure; subplot(211); plot(t,x2); axis([-1 3 -0.1 1.1]); grid; xlabel('t'); ylabel('x_2(t)')
y2 = y1(u,t)+ y1(u,t-1); subplot(212); plot(t,y2); axis([-1 3 -0.1 1.1]); grid; xlabel('t'); ylabel('y_2(t)')
```

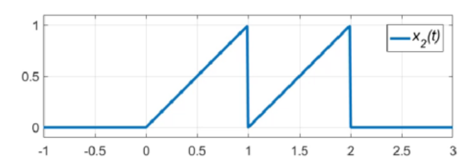
Proprietati ale sistemelor

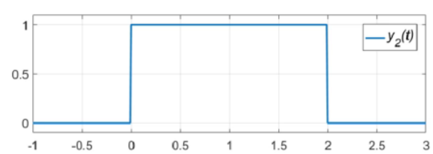
<u>Exemplu</u>: Raspunsul unui sistem liniar si invariant in timp la semnalul $x_1(t)$ este semnalul $y_1(t)$.





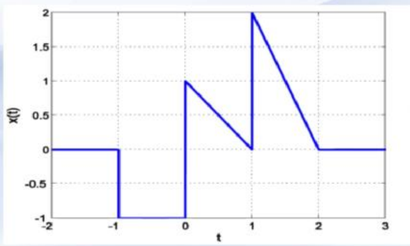
Sa se determine si sa se reprezinte in Matlab raspunsul sistemului la alte intrari care pot fi exprimate ca o combinatie liniara de intrarea $x_1(t)$.





Proprietati ale sistemelor

b) Sa se reprezinte in Matlab raspunsul sistemului pentru semnalul de intrare prezentat in figura de mai jos.



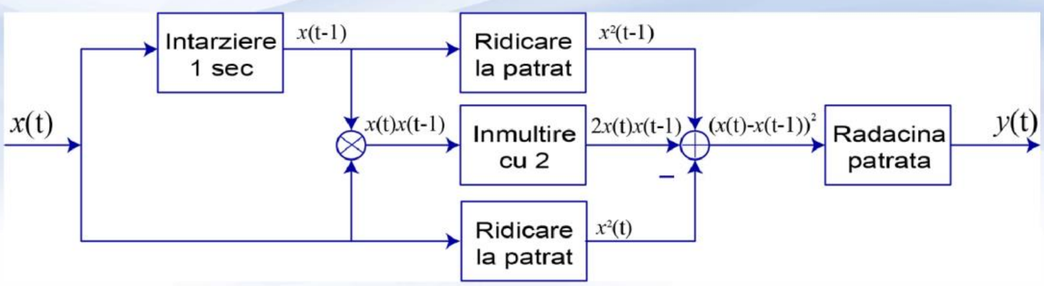
$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ -1, & -1 \le t < 0 \\ 1 - t, & 0 \le t < 1 \\ 4 - 2t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

```
x=@(t)(-1*((t>=-1)&(t<0)) + (1-t).*((t>=0)&(t<1)) + (4-2*t).*((t>=1)&(t<2)))
t=-3:0.001:4; y = abs(x(t)-x(t-1));
subplot(2,1,1), plot(t,x(t)),legend('x(t)')
subplot(2,1,2), plot(t,y),legend('y(t)')
```

Proprietati ale sistemelor

Exemplu: Pentru sistemul din figura de mai jos,

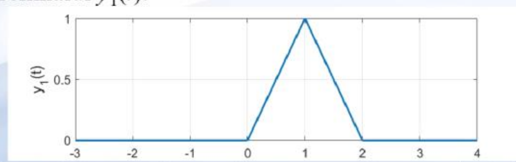
a) Sa se determine o relatie analitica intre $y(t)$ si $x(t)$.



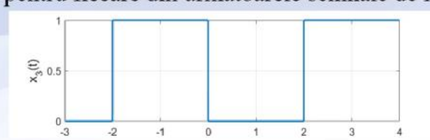
$$y(t) = |x(t) - x(t-1)|$$

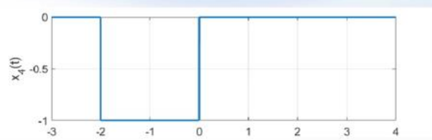
Exercitii

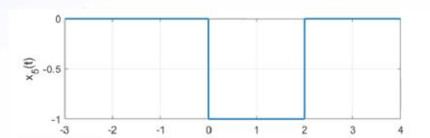
1. Raspunsul unui sistem LTI la semnalul $x_1(t)$ este semnalul $y_1(t)$.



Sa se determine si sa se reprezinte in Matlab raspunsul sistemului pentru fiecare din urmatoarele semnale de intrare.







Exercitii

2. Se considera un sistem S avand intrarea $x[n]$ si iesirea $y[n]$. Relatia intrare-iesire este $y[n] = x[n](g[n] + g[n-1])$.
   a. Daca $g[n] = 1$ oricare ar fi n, sa se arate ca S este invariant in timp.
   b. Daca $g[n] = n$ oricare ar fi n, sa se arate ca S nu este invariant in timp.
   c. Daca $g[n] = -1+(-1)^n$ oricare ar fi n, sa se arate ca S este invariant in timp.
   d. Pentru fiecare iesire obtinuta la punctele a. b. si c. sa se reprezinte in Matlab $y[n]$ pentru semnalul de intrare $x[n] = u[n] - u[n-3]$.

Exercitii

3. Se considera trei sisteme avand urmatoarele relatii intrare-iesire:

$$S1:\ \ y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right],\ n - \text{par} \\ 0,\ n - \text{impar} \end{cases}$$

$$S2:\ \ y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-2]$$

$$S3:\ \ y[n] = x[2n]$$

a. Sa se determine relatia intrare-iesire pentru sistemul rezultat din interconectarea in serie a celor trei sisteme.

b. Sa se determine daca sistemul rezultat la punctul a. este liniar si invariant in timp.

c. Sa se reprezinte in Matlab raspunsul sistemului la intrarea $x[n] = 4\delta[n]$.

4. Raspunsul unui sistem liniar si invariant in timp la un semnal treapta, $x(t) = u(t)$, este $y(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$. Care este raspunsul sistemului la intrarea $x(t) = 4u(t) - 4u(t-1)$.

Exercitii

5. Sa se determine daca urmatoarele sisteme sunt invariante in timp si/sau liniare:

a. $y(t) = tx(t)$

b. $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

c. $y(t) = \sin(x(t))$

d. $y(t) = |x(t) - x(t-1)|$

e. $y[n] = x[-n]$

f. $y[n] = 2x[n] + 3$

g. $y[n] = x[2n]$

h. $y[n] = nx[2n]$

i. $y[n] = e^{-2n}x[n]$

j. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

k. $y[n] = x[n] + 3u[n+1]$