Semnale și sisteme

Lucrare de laborator nr. 7

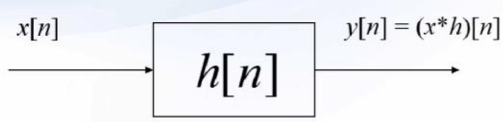
Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

- Convoluția dintre două secvențe unidimensionale $x[n]$ și $y[n]$ este dată de relația:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

- Cunoscând răspunsul la impuls al unui sistem discret liniar și invariant în timp, se poate calcula răspunsul sistemului pentru orice semnal de intrare utilizând suma de convoluție.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Evaluarea sumei de convoluție se poate face *analitic* în unele cazuri chiar dacă suma este infinită. Pentru secvențe finite, adică semnale discrete care au valori nenule doar pentru un set finit de indecși, se pot folosi *metoda grafică* sau funcția *conv* din Matlab. O reprezentare aproximativă a convoluției unor secvențe infinite se obține prin trunchierea sumei la un număr finit de termeni (echivalentă cu considerarea unui interval finit de indecși).

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Functia *conv*(*u*,*v*) facilitează calculul sumei de convoluție dintre două secvențe cu lungime finită: $x[n]$ de lungime N și $y[n]$ de lungime M, după formula

$$w[n] = \sum_k x[k]y[n-k+1]$$

pentru toate valorile lui k care produc indici valizi pentru $x[k]$ și $y[n-k+1]$: $k = \max(1, n+1-M) : 1 : \min(n, N)$. Rezultatul constă într-o secvență de valori de dimensiune $M + N - 1$, independentă de intervalele pe care sunt definite semnalele de intrare.

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Pentru două secvente de aceeași lungime, $N = M$, se obține:

$w[1] = x[1]y[1]$

$w[2] = x[1]y[2] + x[2]y[1]$

$w[3] = x[1]y[3] + x[2]y[2] + x[3]y[1]$

…

$w[N] = x[1]y[N] + x[2]y[N-1] + \cdots + x[N]y[1]$

$w[N+1] = x[2]y[N] + x[3]y[N-1] + \cdots + x[N]y[2]$

…

$w[2N-2] = x[N]y[N-1] + x[N-1]y[N]$

$w[2N-1] = x[N]y[N]$

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

<u>Determinarea indecșilor corespunzători valorilor nenule</u>

Se consideră două semnale $x[n]$ și $y[n]$ cu valori diferite de zero pe intervalul $[s_x, e_x]$, respectiv $[s_y, e_y]$. $w[n] = x[n] * y[n]$ poate fi exprimat ca o sumă finită ($y[k] = 0$ pentru $k < s_y$ sau $k > e_y$)

$$w[n] = \sum_{k=s_y}^{e_y} x[n-k]y[k]$$

Prin schimbarea de variabilă $j = k - s_y$ suma devine

$$w[n] = \sum_{j=0}^{e_y - s_y} x\left[n - j - s_y\right]y[j + s_y]$$

Observăm că dacă $n - e_y > e_x$ sau $n - s_y < s_x$ atunci $x\left[n - j - s_y\right] = 0$

➔ $w[n] = 0$, pentru $n < s_x + s_y$, respectiv pentru $n > e_x + e_y$

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Determinarea indecsilor corespunzatori valorilor nenule

Pentru secvența $w[n] = (x * y)[n]$ avem următoarele relații pentru definirea indecșilor corespunzători valorilor nenule:

$s_w = s_x + s_y \qquad e_w = e_x + e_y$

Numărul de puncte în care trebuie calculată suma este: $e_w - s_w - 1$.

Prin urmare atunci când folosim functia *conv* pentru a calcula convoluția $w[n]$ a două secvențe finite $x[n]$ și $y[n]$ putem proceda după cum urmează:

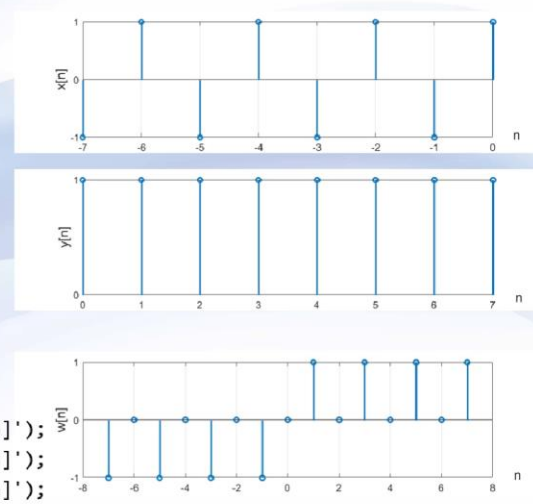
- identificăm indicii sx, ex, sy, ey,
- definim vectorii care descriu intervalele de indecși: dtx=sx:ex, dty=sy:ey, dtw=sx + sy:ex + ey,
- calculăm w=conv(x, y),
- reprezentăm grafic convoluția prin stem(dtw,w).

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Exemplu: Să se calculeze în Matlab convoluția dintre următoarele semnale:

$x[n] = (-1)^n(u[-n] - u[-n-8])$

$y[n] = u[n] - u[n-8]$

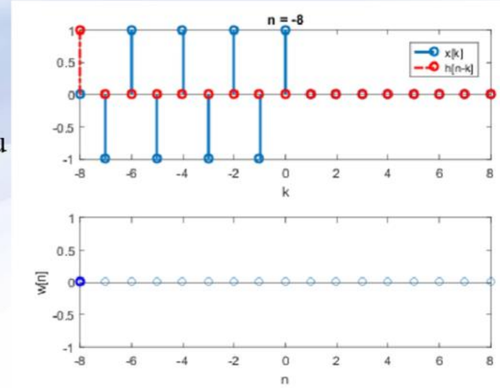



```
sx = -7; ex = 0;
sy = 0 ; ey = 7;
dtx = sx:ex;
dty = sy:ey;
dtw = sx+sy : ex+ey ;
x = (-1).^dtx;
y = ones(1, ey-sy+1);
w = conv(x, y);
subplot(3,1,1); stem(dtx, x); xlabel('n'); ylabel('x[n]');
subplot(3,1,2); stem(dty, y); xlabel('n'); ylabel('y[n]');
subplot(3,1,3); stem(dtw, w); xlabel('n'); ylabel('w[n]');
```

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

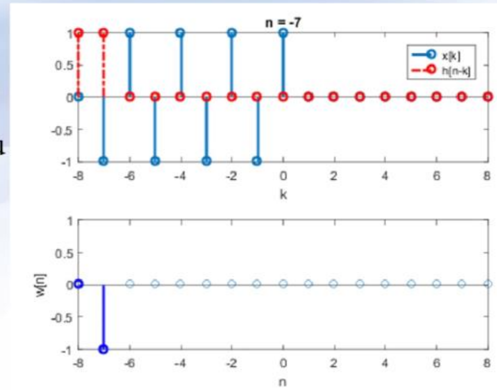
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

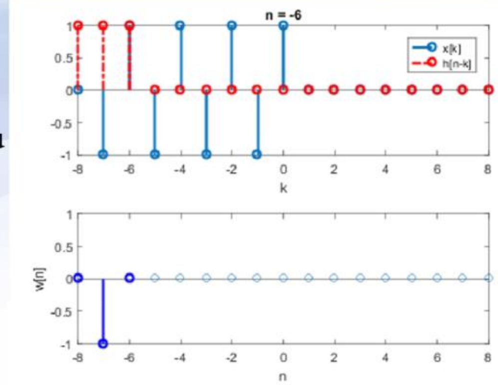
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

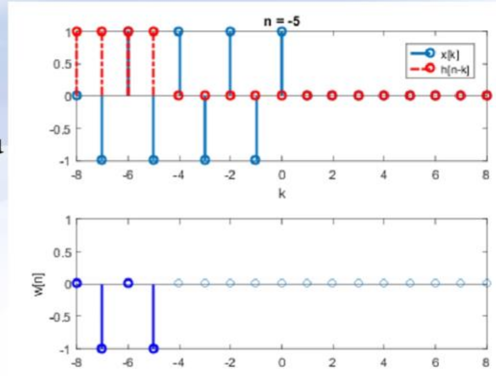
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

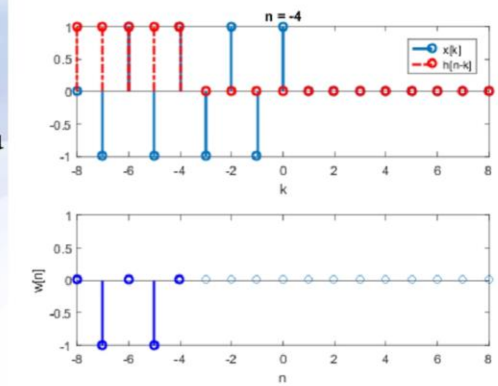
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

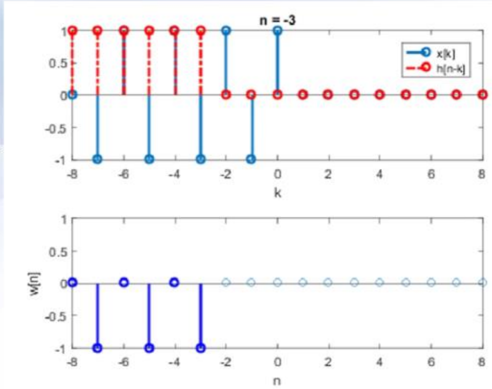
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

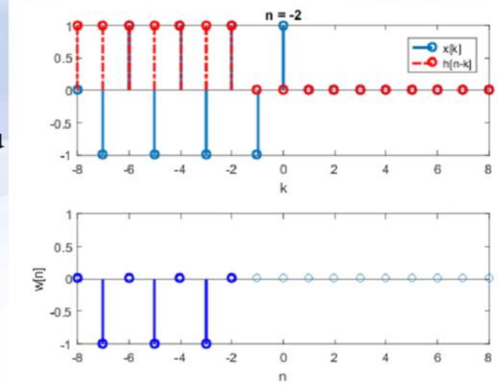
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

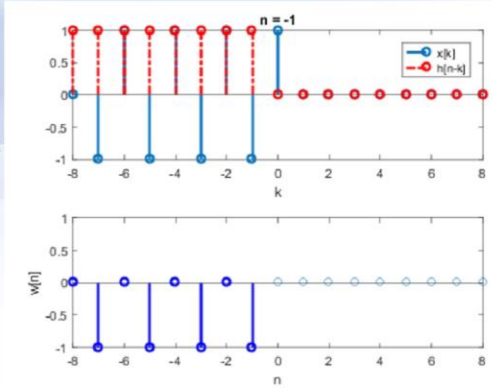
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

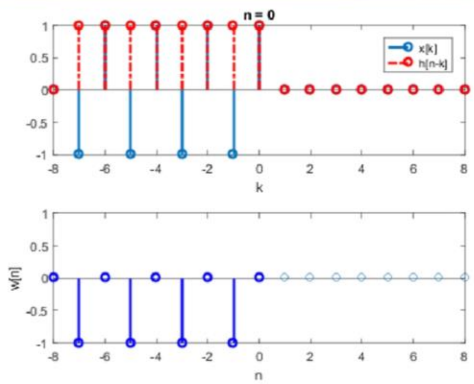
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

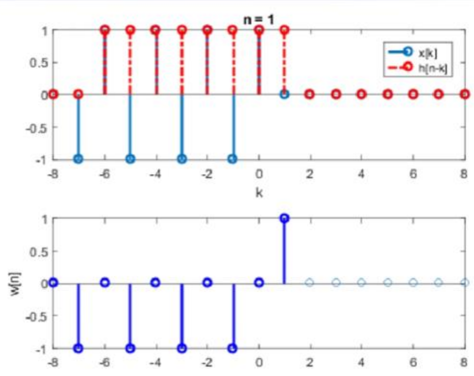
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

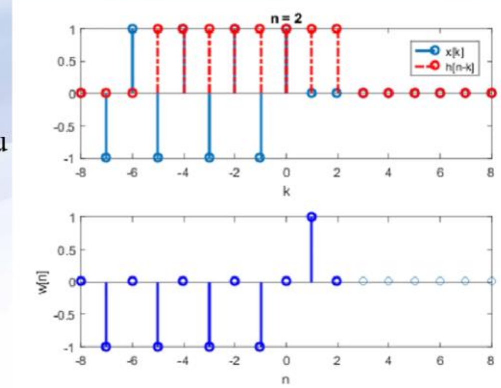
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

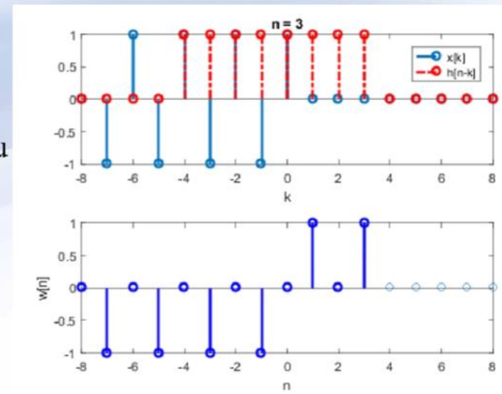
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

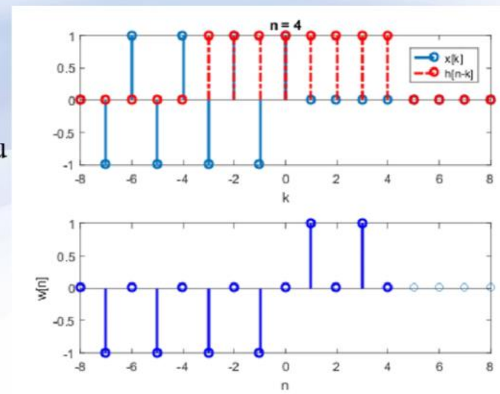
1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda grafică

1. se reprezintă cele două semnale în funcție de k,
2. se reflectă semnalul $y[k]$,
3. se deplasează semnalul $y[-k]$ cu n,
4. se înmulțesc valorile $x[k]$ cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k,
5. se însumează produsele obținute la pasul anterior, obținându-se $y[n]$ pentru n specificat,
6. se repetă pașii 3-5 pentru toate valorile posibile ale lui n.



Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Metoda analitică

<u>Exemplu</u> Să se calculeze convolutia dintre urmatoarele semnale $x[n] = u[n-1]$, $v[n] = 0.5^{n-1}u[n]$.

$$x[n] * v[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]v[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-1]0.5^{n-k-1}u[n-k]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 0.5^{n-k-1}u[n-1] = 0.5^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{k} - 1\right)u[n-1] = 0.5^{n-1}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right)u[n-1]$$

$$= 0.5^{n-1}\left(2^{n+1} - 2\right)u[n-1] = (4 - 0.5^{n-2})u[n-1]$$

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

```
x = @(n)(n>=1);
v = @(n)((0.5).^( n-1).*( n>=0));
sx = 1; ex = 20; dtx = sx:ex;
sv = 0; ev = 19; dtv = sv:ev;
dty = sx+sv:ex;
y = conv(double(x(dtx)), v(dtv));
subplot(3,1,1); stem(dtx, x(dtx)); xlabel('n'); ylabel('x[n]');
subplot(3,1,2); stem(dtv, v(dtv)); xlabel('n'); ylabel('v[n]');
subplot(3,1,3); stem(dty, y(1:length(dty))); hold on ;
y2 = (4 - ((0.5).^(dty-2))).*(dty>=1);
stem(dty,y2,'* r'); xlabel('n'); ylabel('y[n]') ;
legend ('y', 'y2')
```

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Exercitiul 1. Sa se calculeze convolutia dintre urmatoarele semnale utilizand metoda analitica, metoda grafica si functia *conv*

$x[n] = u[n] - u[n-2]$, $y[n] = 0.2^n u[n]$

Sa se compare rezultatele obtinute.

Sa se reprezinte grafic in Matlab $x[n]$, $y[n]$ si rezultatele obtinute.

Exercitiul 2. Fie $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ si $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$.

a) Sa se calculeze convolutia dintre semnalele
   i. $y_1[n] = x[n] * h[n]$
   ii. $y_2[n] = x[n+1] * h[n]$
   iii. $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

b) Sa se reprezinte grafic in Matlab $x[n]$, $h[n]$, $x[n+1]$, $h[n+2]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$ si $y_3[n]$.

Convoluția semnalelor discrete unidimensionale

Exercitiul 3. Se considera doua sisteme LTI conectate in serie (S1 urmat de S2). Raspunsul la impuls pentru sistemul S1 este $h_1[n] = \alpha^n u[n]$, $|\alpha| < 1$, iar pentru sistemul S2 $h_2[n] = \sin(8n)$. Sa se determine iesirea sistemului format din interconectarea celor doua sisteme pentru intrarea $x[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$. Sa se reprezinte grafic in Matlab $h_1[n]$, $h_2[n]$, $x[n]$ si iesirea sistemului.