

НАЗВАНИЕ УЧРЕЖДЕНИЯ, В КОТОРОМ ВЫПОЛНЯЛАСЬ ДАННАЯ
ДИССЕРТАЦИОННАЯ РАБОТА



На правах рукописи
УДК **xxx.xxx**

Фамилия Имя Отчество автора

НАЗВАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Специальность **XX.XX.XX** —
«**Название специальности**»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
уч. степень, уч. звание
Фамилия Имя Отчество

Город — 20XX

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Введение	7
Глава 2. Полулагранжевый метод для линейного уравнения переноса .	9
Глава 3. Роль адвекции в потоках геофизических масштабов	13
Глава 4. Историческое развитие полулагранжевых методов	15
Глава 5. Практика полулагранжевых методов	17
Глава 6. Численные эксперименты: одно- и двумерный пассивный перенос	21
Глава 7. Теория полулагранжевых методов: анализ сходимости и устойчивости	34
Глава 8. Полулагранжевые методы против метода характеристик: полунеявные полулагранжевые методы для условий с малым числом Фруда	36
Глава 9. Консервативные (mass conservative) и векторные (flux form) полулагранжевые методы	37
Глава 10. Выводы	40
Глава 11. Длинное название главы, в которой мы смотрим на примеры того, как будут верстаться изображения и списки . .	41
11.1 Одиночное изображение	41
11.2 Длинное название параграфа, в котором мы узнаём как сделать две картинки с общим номером и названием	41
11.3 Пример вёрстки списков	42
11.4 Традиции русского набора	43

	Стр.
11.4.1 Пробелы	43
11.4.2 Математические знаки и символы	44
11.4.3 Кавычки	44
11.4.4 Тире	44
11.4.5 Дефисы и переносы слов	45
11.5 Текст из панграмм и формул	45
Глава 12. Вёрстка таблиц	50
12.1 Таблица обыкновенная	50
12.2 Таблица с многострочными ячейками и примечанием	51
12.3 Параграф - два	52
12.4 Параграф с подпараграфами	52
12.4.1 Подпараграф - один	52
12.4.2 Подпараграф - два	52
Заключение	54
Список сокращений и условных обозначений	55
Словарь терминов	57
Список литературы	58
Список рисунков	64
Список таблиц	65
Приложение А. Примеры вставки листингов программного кода	66
Приложение Б. Очень длинное название второго приложения, в котором продемонстрирована работа с длинными таблицами	72
Б.1 Подраздел приложения	72
Б.2 Ещё один подраздел приложения	74
Б.3 Использование длинных таблиц с окружением <i>longtabu</i>	77
Б.4 Форматирование внутри таблиц	81

	Стр.
Б.5 Очередной подраздел приложения	83
Б.6 И ещё один подраздел приложения	83

Введение

Обзор, введение в тему, обозначение места данной работы в мировых исследованиях и т. п., можно использовать ссылки на другие работы [1] (если их нет, то в автореферате автоматически пропадёт раздел «Список литературы»). Внимание! Ссылки на другие работы в разделе общей характеристики работы можно использовать только при использовании biblatex (из-за технических ограничений bibtex8. Это связано с тем, что одна и та же характеристика используются и в тексте диссертации, и в автореферате. В последнем, согласно ГОСТ, должен присутствовать список работ автора по теме диссертации, а bibtex8 не умеет выводить в одном файле два списка литературы).

Для генерации содержимого титульного листа автореферата, диссертации и презентации используются данные из файла `common/data.tex`. Если, например, вы меняете название диссертации, то оно автоматически появится в итоговых файлах после очередного запуска L^AT_EX. Согласно ГОСТ 7.0.11-2011 «5.1.1 Титульный лист является первой страницей диссертации, служит источником информации, необходимой для обработки и поиска документа.» Наличие логотипа организации на титульном листе упрощает обработку и поиск, для этого разметите логотип вашей организации в папке `images` в формате PDF (лучше найти его в векторном варианте, чтобы он хорошо смотрелся при печати) под именем `logo.pdf`. Настроить размер изображения с логотипом можно в соответствующих местах файлов `title.tex` отдельно для диссертации и автореферата. Если вам логотип не нужен, то просто удалите файл с логотипом.

Целью данной работы является ...

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
2. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
3. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
4. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.

Научная новизна:

1. Впервые ...
2. Впервые ...
3. Было выполнено оригинальное исследование ...

Практическая значимость . . .

Методология и методы исследования. . . .

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Первое положение
2. Второе положение
3. Третье положение
4. Четвертое положение

В папке Documents можно ознакомиться с решением совета из Томского ГУ в файле Def_positions.pdf, где обоснованно даются рекомендации по формулировкам защищаемых положений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается . . . Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: перечисление основных конференций, симпозиумов и т. п.

Личный вклад. Автор принимал активное участие . . .

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в XX печатных изданиях, X из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, X — в тезисах докладов. При использовании пакета biblalex для автоматического подсчёта количества публикаций автора по теме диссертации, необходимо их здесь перечислить с использованием команды \nocite.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 83 страницы, включая 14 рисунков и 17 таблиц. Список литературы содержит 73 наименования.

Глава 1. Введение

Полулагранжевый метод является способом численного решения уравнений в частных производных, которые описывают процесс переноса. Данный метод учитывает лагранжевую природу процесса переноса, однако в тоже время, позволяет работать на фиксированной вычислительной сетке. Взяв за начало первые предложения в метеорологической литературе, которые фокусировались на переносе вихря в упрощенных моделях крупномасштабного потока, метод трансформировался в законченный метод дискретизации для полных уравнений атмосферных потоков. Полулагранжевый метод также связан (а, в некоторых случаях, полностью эквивалентен) с аналогичными методами, разработанными в других сферах моделирования, такими как, например, модифицированный метод характеристик, метод Эйлера-Лагранжа и характеристический метод Галеркина.

Исчерпывающий обзор полулагранжевого метода в метеорологической литературе до 1990 года представлен в [2]. Обзоры разработок, посвященных смежным методам в других областях моделирования, могут быть найдены, например, в [3], [4], [5].

Краткое описание данной вводной статьи представлено ниже. В разделе 2 представлена базовая концепция полулагранжевого метода, а также простейшие положения для линейного одномерного уравнения переноса. Кроме того, описаны разница и связь с сугубо лагранжевыми методами. В разделе 3, в ключе классического метео масштабного анализа, рассмотрена особая роль процесса переноса для крупномасштабного атмосферного потока. В разделе 4 кратко освещен процесс разработки полулагранжевых методов вкупе с некоторыми параллельными разработками в других научных сферах. В разделе 5 описаны некоторые из возможных способов реализации ключевых этапов в полулагранжевом методе. В разделе 6 представлены результаты простых численных тестов для одномерного и двумерного случая изолированного (passive) переноса с целью показать как метод может быть реализован на практике. Затем, результаты сравниваются с аналогичными эйлеровыми схемами. В разделе 7 обсуждается устойчивость и сходимость метода.

Первая версия данного обзора полулагранжевых методов была осуществлена, благодаря приглашению на семинар по прикладной математике на ETH Zurich, чтобы прочитать серию докладов по данной тематике в рамках програм-

мы ERCOFTAC в июле 2004. Я хотел бы поблагодарить профессоров Рольфа Желтча (Rolf Jeltsch) и Уильяма Сойера (William Sawyer) за поддержку этого начинания и базовую концепцию данного обзора.

Мой первый персональный опыт работы с полулагранжевыми методами был получен в 1993 году в ходе моей работы над кандидатской диссертацией под руководством профессора Винченцо Касулли (Vincenzo Casulli, University of Trento, Italy). Я хотел бы поблагодарить его за мое посвящение как в данную восхитительную область, так и в мир практического численного моделирования. Всевозможные обсуждения с доктором Эндрю Станифортом (Andrew Staniforth, Met Office, UK) также были весьма важны в рамках углубления моего понимания обозначенных методов и проблем численного прогнозирования погоды в целом.

Мой опыт с полулагранжевыми методами также был углублен, благодаря обсуждениям и помощи моих многих друзей и коллег. Я хотел бы поблагодарить их всех за помощь и советы.

Глава 2. Полулагранжевый метод для линейного уравнения переноса

Для того, чтобы познакомиться с полулагранжевым методом в простом контексте, рассмотрим одномерное линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

с постоянным коэффициентом u и с начальными данными $c_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Общеизвестно, что

$$c(c, t) = c_0(x - ut) \quad (2.2)$$

Теперь рассмотрим дискретизацию уравнения (2.1) на равномерной одномерной сетке с шагом по пространству Δx и временным шагом Δt . Обозначим узлы сетки как i , а дискретные временные уровни как n . Тогда пространственно-временные позиции на сетке могут быть обозначены $x_i = i\Delta x$, $t^n = n\Delta t$, а приближенные значения, вычисленные при помощи численного решения, как $c^n \approx c(x_i, t^n)$. Стандартные конечно-разностные методы основаны на аппроксимации дифференциальных операторов конечно-разностными приращениями. Рассмотрим некоторые типовые примеры. Одним из наиболее простых методов является противопотоковый метод, в котором для аппроксимации используются односторонние конечно-разностные приращения

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь предполагается, что $u \geq 0$, а направление задано положительно (Here, it was assumed that $u \geq 0$ and the direction). Противопотоковый метод обладает первым порядком аппроксимации по времени и пространству. Информация о противопотоковых методах высокого порядка представлена, например, в [6]. Метод с перешагиванием использует центральные конечные разности по времени и пространству

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.4)$$

Итоговый метод имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени. Применение более точной аппроксимации пространственной производной может дать высокоточные схемы по пространству и времени. Например, взяв центральные разности по времени и аппроксимацию четвертого порядка произ-

водной по x (например, см. [7]), получим

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^{n-1}}{2\Delta t} + u \left[\frac{4}{3} \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{c_{i+2}^n - c_{i-2}^n}{4\Delta x} \right] = 0. \quad (2.5)$$

Упомянутые методы являются трехшаговыми по времени, потому требуют использования особой аппроксимации для вычисления первого шага по времени. Примером двухшагового по времени метода, который имеет второй порядок аппроксимации, является метод Лакса—Вендроффа

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u^2 \Delta t}{2} \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad (2.6)$$

который может быть интерпретирован как устойчивая версия (неустойчивой) схемы

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (2.7)$$

полученной добавлением численной диссипации в особом виде (например, см. [5]). Общеизвестно, что устойчивость этих методов зависит в основном от параметра $C = u\Delta t/\Delta x$, также известного как число Куранта. Основное условие для устойчивости это, фактически, $|C| \leq 1$, которое также известно как условие Куранта—Фридрихса—Леви (КФЛ) (см. [8]).

Лагранжевые и полулагранжевые методы, в свою очередь, используют характерную особенность уравнения переноса, а именно представление точного решения через начальные данные. В частности, рассмотрев без потери общности случай $u \geq 0$, можно обнаружить, что имеют место два следующих уравнения

$$\begin{aligned} c(x_i, t^n) &= c_0(x_i - un\Delta t) \\ &= c_0(x_i + u\Delta t - u(n+1)\Delta t) = c(x_i + u\Delta t, t^{n+1}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} c(x_i, t^{n+1}) &= c_0(x_i - u(n+1)\Delta t) \\ &= c_0(x_i - u\Delta t - un\Delta t) = c(x_i - u\Delta t, t^n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) является основой для чистых лагранжевых методов. Особая природа точного решения уравнения (2.1) позволяет использовать информацию о решении в точке сетки в момент времени n , чтобы вывести значение решения в момент времени $n+1$ в точках сетки, которые *переместились с потоком*. В результате того, что сетку необходимо менять на каждом временном шаге, практическое приложение лагранжевых методов неэффективно и данные методы никогда не становились действующими (operational) инструментами в прогнозе погоды или крупномасштабных атмосферных симуляциях.

Уравнение (2.10) обеспечивает основу для полулагранжевого метода. Вновь используется особая природа точного решения (2.1), чтобы выразить значение решения в узлах сетки на временном шаге $n + 1$ через значения решения на временном шаге n в тех узлах сетки, которые *будут перенесены потоком* на вычислительную сетку за один временной шаг. Тот факт, что сетка не изменяется во времени, имеет практическое преимущество, которое является одной из фундаментальных причин для гораздо более широкого использования полулагранжевых методов, нежели чисто лагранжевых. Дискретное определение полулагранжевого метода может быть получено из уравнения (2.10) (**ТУТ ЯВНАЯ ОШИБКА, видимо имеется ввиду некоторое уравнение представленное выше**) как

$$c_i^{n+1} = c_{i-u\frac{\Delta t}{\Delta x}}^n = c_{i-k-\alpha}^n \quad u\frac{\Delta t}{\Delta x} = k + \alpha \quad k = \left[u\frac{\Delta t}{\Delta x} \right]. \quad (2.10)$$

k and α часто называют целым и дробным числами Куранта, соответственно. Выражение $c_{i-k-\alpha}^n$ может быть интерпретировано как значение, полученное из приближенных значений c^n в точке $i\Delta x - u\Delta t$ с использованием некоторой интерполяционной процедуры. Применив линейную интерполяцию, можно сразу получить два интересных факта

$$c_i^{n+1} = \alpha c_{i-k-1}^n + (1 - \alpha) c_{i-k}^n. \quad (2.11)$$

Во первых, если $C = u\Delta t/\Delta x < 1$, тогда имеем в (2.11) $k = 0$, $C = \alpha$ и легко увидеть, что итоговый метод идентичен противопотоковому методу (2.3). Более того, ясно, что (2.11) выполняется для любого значения числа Куранта и что, поскольку значения решения на новом временном слое $n + 1$ получены с использованием линейной интерполяции значений на временном слое n с неотрицательными коэффициентами, выполняется дискретный принцип максимума, т. е.

$$\min_i c_i^0 \leq \min_i c_i^n \leq \max_i c_i^n \leq \max_i c_i^0 \quad (2.12)$$

для любого n . Это также подразумевает устойчивость в максимум-норме для произвольного числа Куранта. Таким образом, по крайней мере в простом случае, полулагранжевый метод, очевидно, имеет большое преимущество над рассмотренными ранее эйлеровыми методами, поскольку отсутствует условие устойчивости, ограничивающее выбор временного шага.

Полулагранжевый метод может быть легко обобщен на многомерный случай. Рассмотрим поле постоянных скоростей $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^d$ и начальное условие

$c_0(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$. Тогда многомерное линейное уравнение адвекции имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0. \quad (2.13)$$

Как и в одномерном случае, аналитическое решение представимо в виде

$$c(\mathbf{x}, t) = c_0(\mathbf{x} - \mathbf{u}t), \quad (2.14)$$

и полулагранжевый метод может быть выведен как и в одномерном случае, лишь заменив одномерную интерполяцию на многомерную.

В более общем случае, когда поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^d$ зависит от пространства и времени, имеем

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla c = 0. \quad (2.15)$$

Здесь была введена обычная запись dc/dt для обозначения лагранжевой производной. Полагая, для поля скоростей верны некоторые предположения о непрерывности (оно должно быть непрерывным по Липшицу, например, см. [5]), можно доказать, что существует функция линий тока или характеристическая функция. Они определены как решения $\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}), t) \quad (2.16)$$

с начальным условием в момент времени s , заданным как $\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Для гладких начальных данных по цепному правилу доказуемо, что

$$c(\mathbf{x}, t) = c_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})). \quad (2.17)$$

Это показывает, что доказательство, аналогичное упомянутому, справедливо для численного метода основанного на полулагранжевом подходе, однако при условии, что получено численное решение уравнения (2.16). Таким образом, подводя итог, можно сказать, что, используя формулу (2.17), полулагранжевые методы сводят аппроксимацию уравнения переноса (2.15) к следующим ключевым шагам:

- на заданном слое по времени n , для каждой точки сетки x вычислить приближенное решение (2.16) для определения оценки $\mathbf{X}^*(t^n; t^{n+1}, \mathbf{x})$
- вычислить аппроксимацию уравнения (2.17) путем интерполяции значений в узлах сетки на временном слое n в точках $\mathbf{X}^*(t^n; t^{n+1}, \mathbf{x})$.

Это подразумевает что решение ДУЧП (2.15) сведено к решению большого набора взаимно независимых ОДУ и многомерной интерполяции. Для каждого из этих шагов доступен ряд классических и хорошо изученных методов.

Глава 3. Роль адвекции в потоках геофизических масштабов

Уравнения Эйлера во вращающейся системе координат могут быть записаны как

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \nabla \Phi \quad (3.2)$$

$$c_v \frac{dT}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3.3)$$

Для крупномасштабного атмосферного движения, горизонтальный пространственный масштаб $L = \mathcal{O}(10^7)m$ намного больше, чем вертикальный масштаб $D = \mathcal{O}(10^4)m$. Вследствие этого гидростатическое допущение является хорошей аппроксимацией (см. например, [9], [10] касательно полного вывода масштабного анализа). Более того, многие ключевые динамические особенности решения полной системы учитываются упрощенными моделями, которые могут быть получены при использовании баротропического допущения $p = p(\rho)$ и при рассмотрении вертикального среднего уравнений в отношении однородного слоя жидкости переменной глубины. Данное допущение снова основано на том факте, что $L \gg D$ и это приводит нас к двумерной модели, также известной как "уравнения мелкой воды"

$$\frac{dh}{dt} = -h \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.4)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g \nabla h - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}. \quad (3.5)$$

где $f = 2\Omega \sin \theta$, θ это широта, а орографический профиль взят за константу. Если взять ротор уравнения количества движения и скомбинировать результат с уравнением неразрывности, то получим так называемое уравнение потенциальной завихренности

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Общепризнанно, что уравнение (3.6) является решением большинства крупномасштабных волн (волны Россби) которые представляют собой огромные метеорологические системы. Дальнейшее упрощение может даже привести к квазигеострофической модели, в которой разновидность уравнения (3.6) является,

по сути, прогнозирующим уравнением, а все остальные эволюционные уравнения заменены на приближенные балансовые соотношения. Начиная с основополагающей работы [11], ранние модели численного предсказания погоды (см., например, [9], [12]) использовали данную упрощенную систему по ряду причин вычислительного характера. Точное решение уравнения (3.6) (или решение эквивалентных формулировок вихревой адвекции) суть одна из неотъемлемых особенностей для моделей, предназначенных для симуляции крупномасштабных атмосферных потоков. Именно в данном контексте, был впервые разработан полулагранжевый подход и, спустя годы, стал распространённым методом численного моделирования.

Необходимо отметить, что, несмотря на концептуальные причины, существовало большое количество практических стимулов к успешному применению полулагранжевых методов в метеорологии. На стандартных декартовых сетках при использовании сферических координат, сближение меридианов на полюсах приводило к очень большим числам Куранта, даже при достаточно разреженной (в остальной области) вычислительной сетке. Данная особенность, известная также как "полюсная проблема приводит к необходимости специально обрабатывать полюсные "шапочки"(pole caps) во многих глобальных моделях. Полулагранжевые методы, будучи безусловно устойчивыми, не представляют никаких особенных проблем в этом отношении. Однако, указанные методы по-прежнему требуют подходящего подхода к координатной сингулярности при расчете траекторий и при к интерполяции в ячейках, близких к полюсам.

Глава 4. Историческое развитие полулагранжевых методов

Первой статьей, посвященной методам для уравнения переноса и методам, которые применяют подход распространения вдоль характеристик, является хорошо известная работа Куранта, Айзексона и Риз [13] по численному решению гиперболических систем, а в метеорологической литературе, статья о методике графического интегрирования Р. Фьортофта [14]. Более детальный анализ был проведен Виин-Нильсеном в [12]. В этой статье, снова внимание было уделено баротропическому вихревому уравнению, которое представляло собой единственную модель с помощью которой в то время мог быть получен практически значимый численный прогноз. Затем этот метод был применен в [15], а затем переформулирован в тот вид, который весьма похож на тот, что применяется сегодня. Первое применение к простейшей модели уравнения переноса было представлено в [16], а первое подтверждение того, что большие шаги по времени могут быть использованы в методе без появления численной неустойчивости решения, было найдено Дж. Сойером в [17]. Дальнейшая разработка метода характеристик проводилась в [1], в тоже время, дальнейший анализ и тесты в метеорологической литературе проводились в [18], [6]. Как отмечалось ранее, одна из особенностей, которая на сегодняшний день наиболее тесно ассоциируется с полулагранжевыми методами, а именно свойство сохранять устойчивость при любом числе Куранта, в то время не являлась столь очевидной. (см., например, [18], [19]).

В ранних восьмидесятых, разнообразные публикации упрочнили роль полулагранжевых методов (а также методов, основанных на характеристиках) в разных подходах к моделированию. В области конечных элементов, огромное влияние оказали статьи Пирону [20] и Дугласа [21]. В области конечно-объемных подходов, Д. Моретти в [22] была предложена разновидность метода характеристик. Также К. В. Мортон в [23], [24] была введена концепция характеристических методов Галеркина. В контексте метеорологии, ключевыми являются работы [25], [26] А. Роберта, в которых был пересмотрен численный метод Сойера и затем объединен с техникой полу-неявной дискретизации, таким образом демонстрируя полный потенциал полулагранжевых методов с точки зрения использования гораздо более больших шагов по времени. Лежащая в основе полулагранжевого подхода безусловная сходимость для линейной и квадратичной

интерполяции на декартовых сетках была доказана Дж. Р. Бейтсом и А. Макдональдом в [27]. Анализ устойчивости кубической сплайн интерполяции на декартовых сетках из [19] был расширен А. Станифортом и К. Темпертоном в [28] на случай для чисел Куранта больше единицы. Двухшаговые схемы были предложены А. Макдональдом и Дж. Р. Бейтсом в [29], а также А. Станифортом и К. Темпертоном в [30]. Связка полулагранжевых методов с методами спектрального анализа для простейших уравнений движения была впервые предложена Г. Ритчи в [31], [32]. Общая устойчивость и анализ сходимости для случая адвекции с переменными коэффициентами была представлена в [33] в контексте конечно-элементной формулировки.

В 2000 году ситуация такова, что ряд оперативных центров используют полулагранжевые модели для своих дневных прогнозов. Среди этих моделей можно выделить, например, IFS (Integrated Forecast System) в ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) [34], GEM (Global Environmental Multiscale Model) модель в RPN Canada (The Recherche en Prévision Numérique) [35] и Universal Model в Met Office [36].

Глава 5. Практика полулагранжевых методов

Как было показано в разделе 2, полулагранжевые методы сводят аппроксимацию уравнения (2.15) к следующим двум ключевым этапам:

- на заданном слое по времени n , для каждой точки сетки x вычислить приближенное решение (2.16) для определения оценки $\mathbf{X}^*(t^n; t^{n+1}, \mathbf{x})$
- вычислить аппроксимацию уравнения (2.17) путем интерполяции значений в узлах сетки на временном слое n в точках $\mathbf{X}^*(t^n; t^{n+1}, \mathbf{x})$.

Ниже обсудим как получить решение на каждом этих этапов и достичь, при этом, великолепной точности и эффективности в итоговом численном методе.

Подходы к аппроксимации траекторий

Аппроксимацией уравнения

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t; t^{n+1}, x) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t; t^{n+1}, x), t) \quad (5.1)$$

с начальными данными $\mathbf{X}(t; t^{n+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ на слое t^{n+1} по существу является решатель, который дает приближенные обратные лагранжевые траектории, опущенные из точек сетки. Важно заметить, что решение (5.1) требует, вообще говоря, чтобы поле скоростей было известно в точках, которые не принадлежат пространственно-временной сетке. Применительно к реальным моделям, это означает, что необходима некоторая интерполяция (а касательно зависимости по времени — экстраполяция). Традиционно, используются три основных стратегии для аппроксимации траекторий частиц:

- подход с итерацией по неподвижной точке (fixed point operational approach)
- метод расщепления с явными решателями ОДУ (substepping with explicit ODE solvers)
- разложение в ряд Тейлора с параметрическим представлением для траектории (Taylor expansion of the parametric representation for the trajectory)

Итерация по неподвижной точке в наиболее общеизвестной виде была представлена в [25], хотя итерационный метод также использовался в [37]. Это наиболее

широко признанный (можно сказать, почти единственно признанный) метод в моделировании атмосферы. Определяя перемещение $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{X}(t^n; t^{n+1}, \mathbf{x})$ как искомую неизвестную величину, метод Роберта состоит в формулировании уравнения перемещения

$$\mathbf{a} = \Delta t \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{a}, t^*), \quad (5.2)$$

где t^* это время на которое поле скоростей было остановлено, чтобы вычислить траекторию. В зависимости от значения t^* , достигается более или менее точная дискретизация по времени, см., например, обсуждение в [1]. Например, для того, чтобы получить второй порядок точности дискретизации по времени, в случае двухшаговой схемы, следует выбрать $t^* = t^{n+\frac{1}{2}}$, что приводит к необходимости временной экстраполяции в случае, когда поля скоростей известны только до времени t^n включительно. Преимущество итерационного подхода заключается в том, что он безусловно устойчив, а также в том, что может быть доказана итерационная сходимость при относительно не жестких условиях для атмосферных потоков, см., например, [28], [38].

С другой стороны, методы траекторий более популярны в конечно-элементном моделировании, а также в моделировании прибрежных зон (см., например, [20], [39], [5], [33], [40]). Тем не менее, использование данных методов в приложении к атмосферным моделям также описано в литературе, см., например, [41], [42]. Чтобы гарантировать тот факт, что приближенные траектории не пересекают друг друга, всякий раз, когда число Куранта больше единицы, для их аппроксимации, как правило, используют более мелкие шаги по времени.

В качестве альтернативного подхода, в [43] был предложен метод разложения в ряд Тейлора для декартовых сеток, который был затем расширен на сетки с треугольными конечными элементами. Данный метод основывается на разложении $\mathbf{X}(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x})$ в ряд Тейлора по времени и последующей аппроксимации полученных производных. Преимущество данного метода над озвученными выше заключается в том, что он не требует интерполяций или экстраполяций. С другой стороны, аппроксимированная производная по времени требует дополнительной памяти, а взятие производной от аппроксимации суть полностью эвристический процесс и, в общем случае, не корректен для определенных потоков.

Другим возможным подходом, который был предложен Р. Д. Персером и Л. М. Лесли в [44], является использование опережающих траекторий.

Методы интерполяции

Другим ключевым ингредиентом при реализации полулагранжевого метода является процедура интерполяции, используемая на каждом временном шаге для восстановления значений решения в исходной точке линии тока. Принимая во внимание контекст в котором разрабатывались полулагранжевые методы, достаточно легко объясняется большое количество работ по оценке свойств интерполяционных алгоритмов для декартовых сеток. Как будет показано в разделе 6, линейная интерполяция продуцирует весьма диффузивные решения. Легко увидеть, что в случае одномерного потока с числами Куранта меньшими единицы, данная интерполяция дает фактически результаты метода набегающего потока. Квадратичная интерполяция использована в [27]. Кубическая интерполяция Лагранжа использовалась в [17]. В [19] впервые применена кубическая сплайновая интерполяция. Кубическая интерполяция Лагранжа также использована в фундаментальных работах Роберта [25], [26] и проанализирована в [28]. Данный метод интерполяции наиболее широко используется в атмосферных прикладных задачах. Как было показано Маккалпином в [45], в общем случае возможно получить различные свойства в зависимости от того факта, полиномы какого порядка (четного или нечетного) использовались для интерполяции. Также, Р. Д. Персером в [46] был предложен так называемый каскадный метод интерполяции. Улучшенная версия каскадного метода интерполяции представлена в [47].

На неструктурированных сетках, типичных для конечно-элементных моделей, в основном используется конечно-элементные интерполяторы. Однако, в [48], [49], [50] было доложено об успешных попытках в достижении высокой точности при помощи кригинга, а также интерполяторов на основе радиальных базисных функций.

Общеизвестно, что принцип максимума, обсуждавшийся в разделе 2 для случая линейной интерполяции, не может быть доказан для случая интерполяторов высокого порядка. Данная ситуация аналогична тем, которые имеют место быть для многих других численных схем решения уравнения переноса, см., например, [51], [5]. Данный аспект рассматривается в [52], где сравниваются различные методы монотонной интерполяции (основанные на эрмитовой интерполяции). Основные рекомендации по преодолению внутренней нехватки монотонности всех интерполяций высокого порядка и монотонизации полу-

лагранжевого метода вместе с доказательством монотонности полученной схемы приведены в [53]. Данный подход также широко применяется в реальных задачах операционных центров. Для всех экспериментов, осуществленных в разделе 6, рассматриваются гладкие решения (для которых минимизированы выбросы и вбросы (overshoots, overshoots)) без использования процедур монотонизации.

Глава 6. Численные эксперименты: одно- и двумерный пассивный перенос

В данной главе будут представлены результаты некоторых численных экспериментов с целью дать представление о том, как работает полулагранжевый метод и как может быть получена разная точность путем варьирования алгоритмов интерполяции и аппроксимации траекторий. В контексте некоторого базового сравнения двух подходов также будут представлены результаты аналогичных тестов при использовании эйлеровых схем. Хотелось бы обратить внимание на то, что хорошие результаты вычислений для модельных тестовых случаев является необходимым, но не достаточным условием для общей применимости численного метода. Более того, неудовлетворительные результаты не отменяют применимости в особых случаях, отличных от рассматриваемого, и не всегда представляется возможным дать общее заключение, исходя из рассмотренных частных случаев. Наконец, что не менее важно, оценка эффективности конкретного метода, согласно нашему представлению, может быть осуществлена только очень приблизительно, поскольку итоговое время счета сильно зависит от многих условий, которые имеют мало общего с самим численным методом (например, стиль кодирования и архитектура процессора). Хотя эти соображения продиктованы лишь здравым смыслом, их свойственно игнорировать, когда различные философии моделирования сравниваются между собой в упрощенном контексте.

Одномерная адвекция

Были проведены одномерные эксперименты на интервале $[0, 2]$ для уравнения (2.1), в качестве начальных данных выбрана финитная колоколообразная функция C^1 с максимальным значением равным 10. Скорость адвекции $u = 1/2$, а шаг по пространству был $\Delta x = 1/100$. Для первых экспериментов, шаг по времени $\Delta t = 0.05$, таким образом число Куранта было зафиксировано как $C = 2.5$. Тест проводился до времени $T = 2$. Полученные результаты для полулагранжевого метода, использующие линейную, квадратичную и кубическую интерполяцию показаны на графиках 6.1, 6.2, 6.3, соответственно (черные линии использо-

ваны для начальных данных, серые линии показывают конечное время). Следует отметить, что в данном тесте использовалось точное значение исходной точки траектории, поскольку все основные схемы интегрирования дали бы точное решение в простейшем случае постоянной скорости в пространстве и времени.

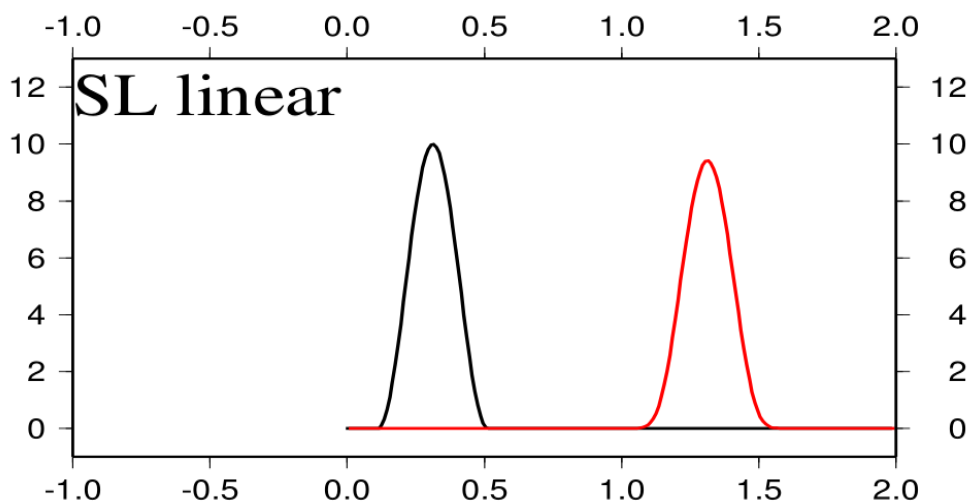


Рисунок 6.1 — Полулагранжевый метод, точные траектории, линейная интерполяция

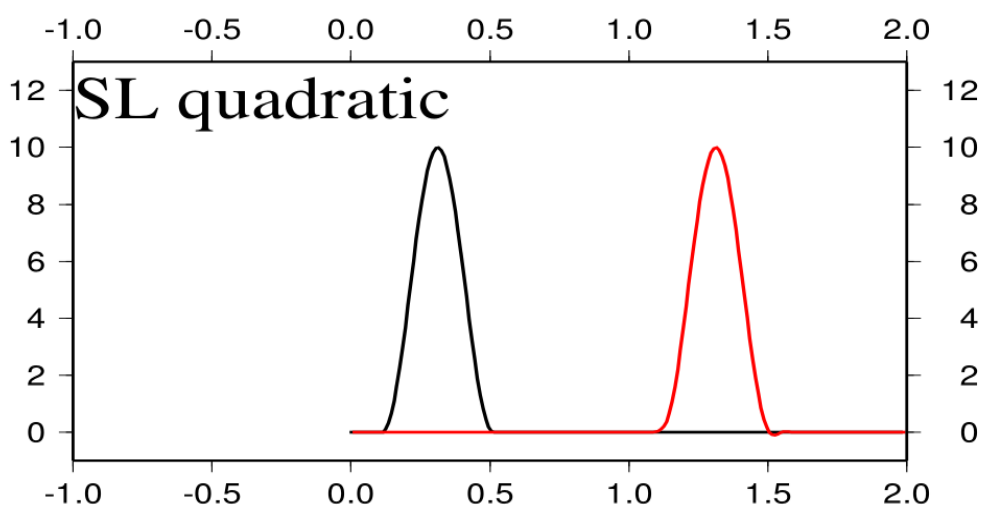


Рисунок 6.2 — Полулагранжевый метод, точные траектории, квадратичная интерполяция

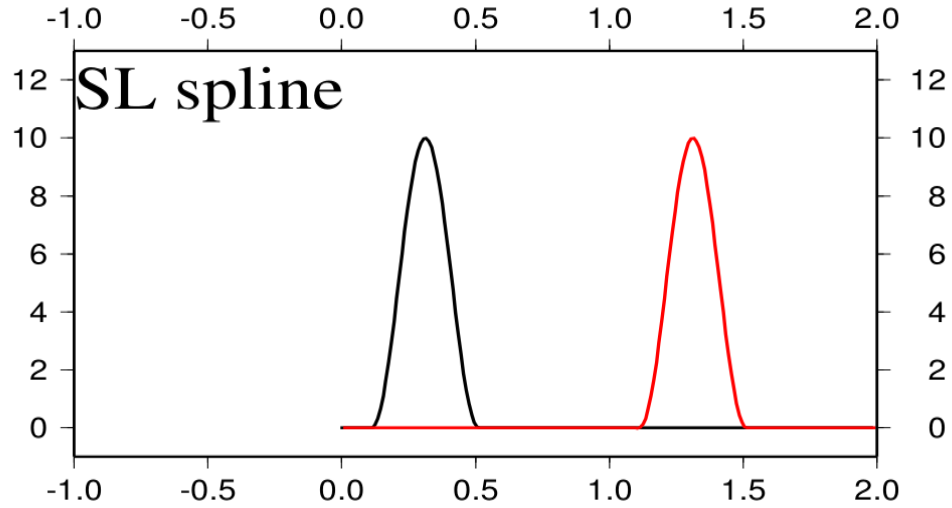


Рисунок 6.3 — Полулагранжевый метод, точные траектории, кубическая интерполяция сплайнами

Таблица 1 — Ошибки полулагранжевого метода для одномерного теста.

Method	e_2^{rel}	e_1^{rel}	Dispersion	Diffusion	Minimum
Linear	6.31e-2	7.40e-2	3.84e-2	2.13e-2	0.0
Quadratic	7.98e-3	9.38e-3	9.55e-4	4.36e-7	-0.1
Spline	5.02e-4	3.60e-4	3.77e-6	3.57e-9	-9.5e-3

Более квантифицируемый анализ представлен в таблице 1. В ней приведены относительные ошибки l_1 и l_2 , которые на временном слое n рассчитываются как

$$e_1^{rel} = \frac{\sum_{i=1}^N |c_i^n - ex_i|}{\sum_{i=1}^N |ex_i|} \quad (6.1)$$

$$e_2^{rel} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (c_i^n - ex_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N ex_i^2}} \quad (6.2)$$

где $c(x, t)$ это аналитическое решение, $ex_i = c(x_i, t^n)$ и N это общее число точек вычислительной области. Также приведены дисперсионные и диффузионные

ошибки. Данные величины были введены в [54] и могут быть определены как

$$\begin{aligned} Dispersion\ error &= 2 \left[\sigma(c^n) \sigma(ex) - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N (c_i^n - \bar{c})(ex_j - \bar{ex}) \right] \\ (???)Dissipation\ error &= [\sigma(c^n) - \sigma(ex)]^2 + (\bar{c}^n - \bar{ex})^2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где для общих сеточных функций φ_i определено

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_i \quad \sigma(\varphi)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varphi_i - \bar{\varphi})^2. \quad (6.4)$$

Они обладают свойством

$$\sum_{i=1}^N (c_i^n - ex_i)^2 = Dispersion\ error + Diffusion\ error, \quad (6.5)$$

таким образом общая ошибка l_2 может быть разложена на два члена. Первая учитывает разницу между первыми двумя моментами вычисленного и точного решения. Этот член называется диффузионной ошибкой, потому что наибольший вклад в разности вносит численная диффузия рассматриваемого метода. Другой член измеряет разницу между корреляцией приближенного и точного решений и произведением их дисперсий. Если отклонение среднего между приближенным и точным решением это независимые случайные значения, данный член будет равен нулю. Таким образом, значения отличные от нуля означают пространственную корреляцию между данными отклонениями, а значит определенный фазовый сдвиг между вычисленным и точным решениями. Данные величины весьма полезны для аккуратной оценки свойств численного метода решения уравнения переноса. В довершение к этому, с целью обратить внимание на то, что имеют место вылеты и вбросы решения, минимум вычисленного решения также приведен в таблице.

Двумерная адвекция

Для случая двумерного пассивного переноса, мы рассмотрели наиболее простой и широко известный тестовый пример, а именно, вращение твердого тела. Вращение происходит вокруг центра вычислительной области $[0,2] \times [0,2]$,

в качестве начальных данных выбрана финитная колоколообразная функция C^1 с максимальным значением равным 10. Период вращения был взят $T = 1000$, шаг по пространству $\Delta x = 1/25$. Для первых экспериментов, шаг по времени был взят $\Delta t = 5.0$. Максимальные числа Куранта были получены $C = 0.78$, таким образом условие КФЛ выполняется на всей вычислительной области. Тест выполнялся до времени $T = 1000$. В первую очередь, на рис. 6.4 показаны точные траектории, а также результаты, полученные при помощи полулагранжевого метода и кубической интерполяции сплайнами.

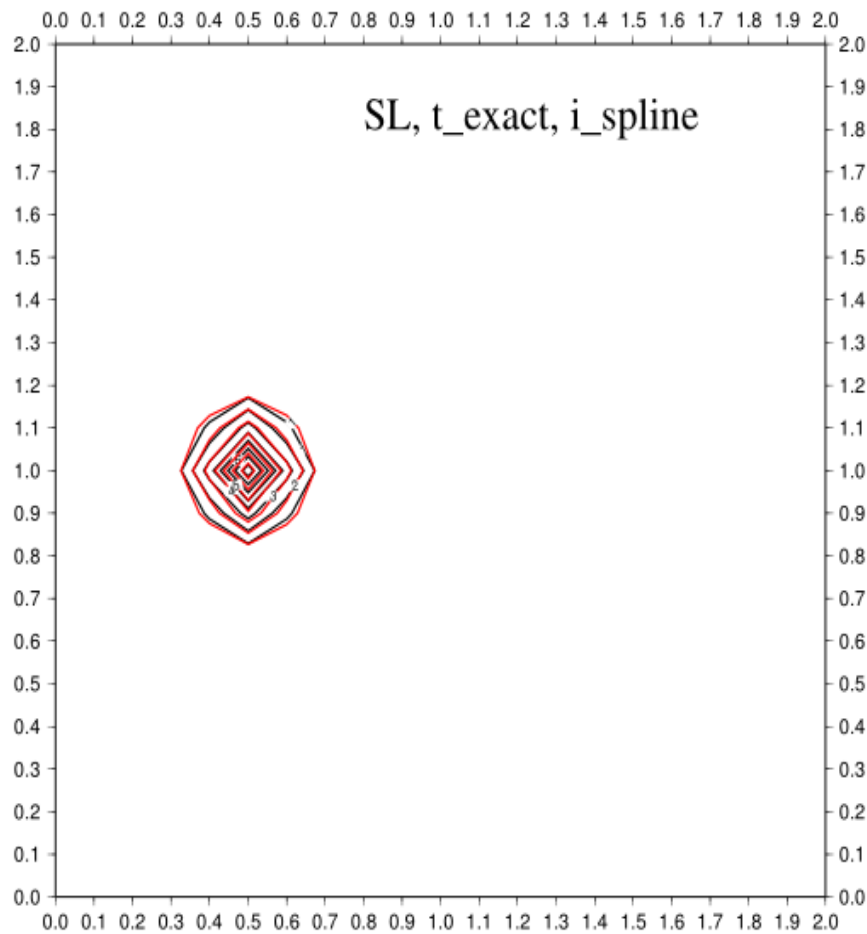


Рисунок 6.4 — Полулагранжевый метод, точные траектории, кубическая интерполяция сплайнами

Таблица 2 — Ошибки полулагранжевого метода с точным интегрированием траекторий в эксперименте вращения твердого тела.

Method	e_2^{rel}	e_1^{rel}	Dispersion	Diffusion	Minimum
Bilinear	0.89	1.51	0.49	0.75	0.0
Cubic	0.21	0.35	4.31e-2	2.76e-3	-0.98

Таблица 3 — Ошибки полулагранжевого метода с приближенным интегрированием траекторий в эксперименте вращения твердого тела.

Method	e_2^{rel}	e_1^{rel}	Dispersion	Diffusion	Minimum
Cubic, 1st	0.62	0.75	0.54	4.58e-2	-0.27
Cubic, 1st, $\Delta t/5$	0.19	0.31	5.06e-2	3.62e-3	-0.43
Cubic, 2nd	0.14	0.23	2.93e-2	2.84e-3	-0.23

Таблица 4 — Ошибки методов Эйлера в одномерном эксперименте.

Method	e_2^{rel}	e_1^{rel}	Dispersion	Diffusion	Minimum
upwind	0.23	0.29	0.54	0.3	0.0
leapfrog	3.62e-2	4.94e-2	1.96e-2	8.25e-11	-0.33
Lax Wendroff	3.47e-2	4.44e-2	1.8e-2	1.18e-5	-0.3
Crowley	2.48e-3	2.23e-3	9.25e-5	1.7e-9	-4.2e-2
leapfrog, 4th order in x	1.18e-2	1.54e-2	2.11e-3	3.57e-10	-0.13

Таблица 5 — Ошибки методов Эйлера в эксперименте с вращением твердого тела.

Method	e_2^{rel}	e_1^{rel}	Dispersion	Diffusion	Minimum
Crowley $\Delta t/5$	0.55	1.4	0.46	2.75e-3	-2.73
Crowley $\Delta t/5 \Delta x/2$	0.16	0.27	4.03e-2	3.95e-4	-0.65

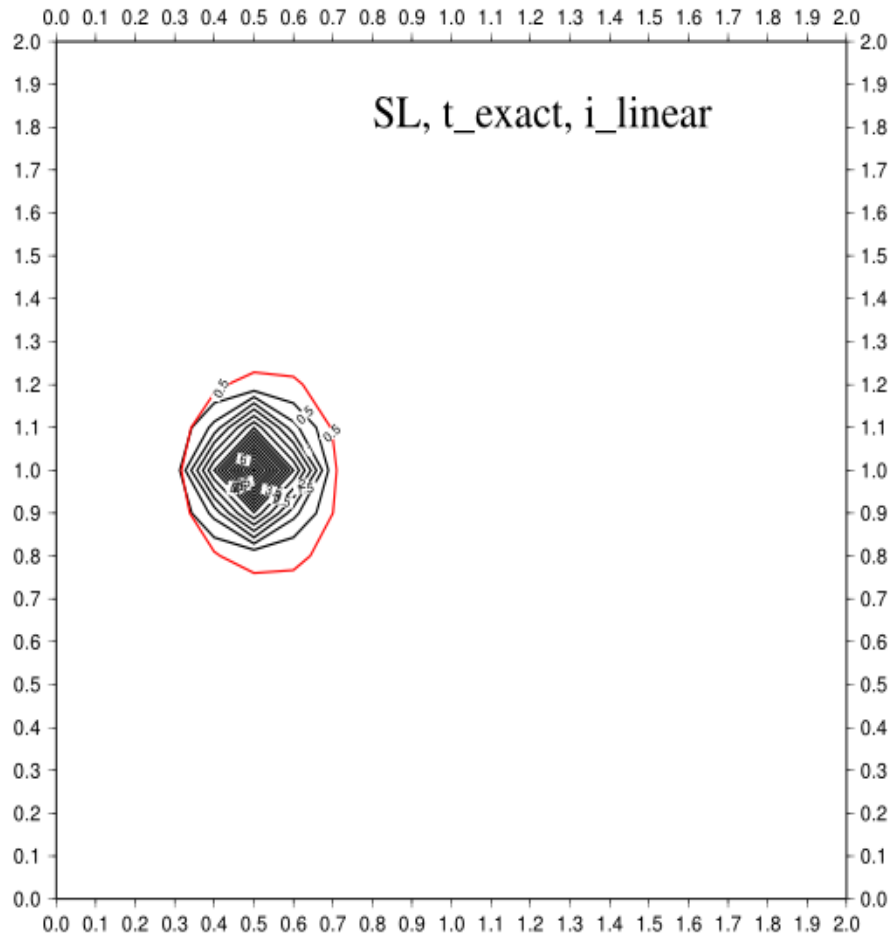


Рисунок 6.5 — Полулагранжевый метод, точные траектории, билинейная интерполяция

Сравнение с простыми схемами Эйлера

Вопрос являются ли полулагранжевые схемы более предпочтительными, чем схемы Эйлера, в качестве подхода к адвективным задачам, обсуждается весьма широко. В данном обзоре представлен всего лишь небольшой вклад в этот долгий и ожесточенный спор. Целью данного вклада является попытка предоставить несколько примеров типовых результатов, получаемых после применения указанных схем к стандартному набору экспериментов.

Прежде всего, представлены результаты простейших одномерных адвективных схем для теста с пассивной формой адвекции, который обсуждался в разделе 6.1. Число Куранта было выбрано $C = 1/2$ с тем, чтобы удовлетворить условию Куранта—Фридрихса—Леви. Были использованы адвективные схемы,

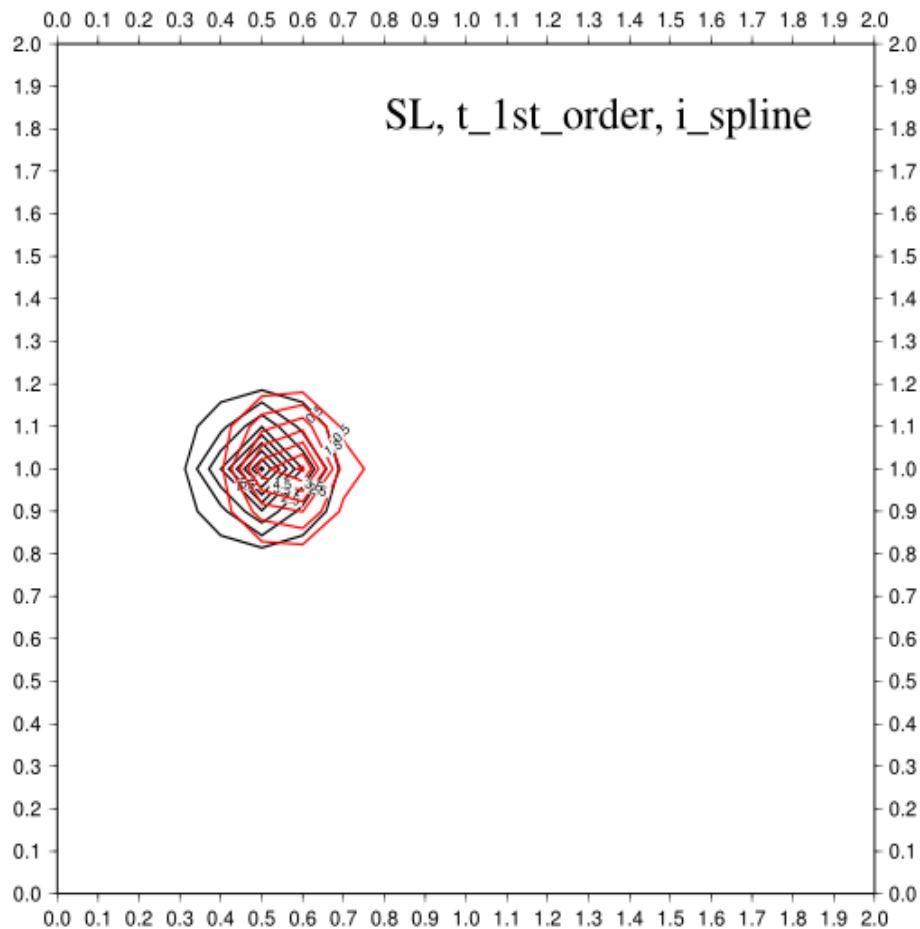


Рисунок 6.6 — Полулагранжевый метод, метод Эйлера для траекторий, интерполяция сплайнами

обсуждавшиеся в разделе 2. В эксперименте с вращением твердого тела для разных шагов по времени и пространству была применена двумерная схема Кроули четвертого порядка, полученная путем простой дискретизации производных по направлениям x и y . С целью получения приемлемых результатов применялись более мелкие шаги по времени, нежели в тестах для полулагранжевого подхода. Отношение шага по времени к шагу, применявшегося в тестах для полулагранжевого подхода, отображено на легенде иллюстраций.

Сделать окончательные выводы на основе настолько скромных и не исчерпывающих экспериментов не представляется возможным. Однако, по мнению автора данного обзора, все же возможно предоставить некоторые соображения по этому поводу. Во-первых, налицо уменьшение дисперсионной ошибки в случае применения точных методов, основанных на схеме набегающего потока. Подобные результаты можно увидеть для одномерных экспериментов как при

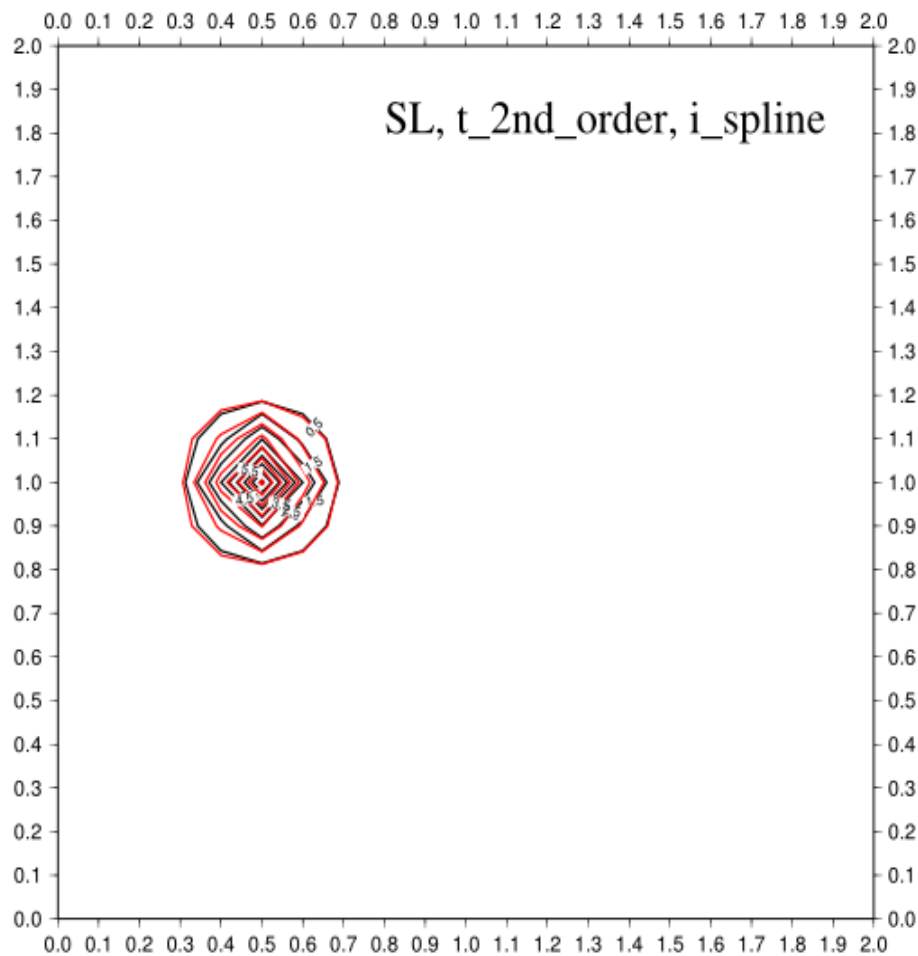


Рисунок 6.7 — Полулагранжевый метод, метод Рунге—Кутта второго порядка, интерполяция сплайнами

использовании эйлеровых схем набегающего потока, таких как метод Кроули, так и для полулагранжевого метода. Схема Кроули (на основе схемы набегающего потока), также как и схема с перешагиванием четвертого порядка (2.5), формально имеют одинаковый порядок точности по пространству, однако, при этом, методы, основанные на схеме набегающего потока, показывают лучшие результаты.

Очевидно также, что сравнения результатов одномерных экспериментов в действительности недостаточно, поскольку, как представляется, другой ключевой особенностью полулагранжевых методов является многомерность. В одномерном случае, схема Кроули формально имеет тот же порядок точности, что и полулагранжевый метод с траекториями, аппроксимированными методом первого порядка и кубической интерполяцией сплайнами. Однако, прямое обобщение на два измерения очевидно является менее точным. Существуют полно-

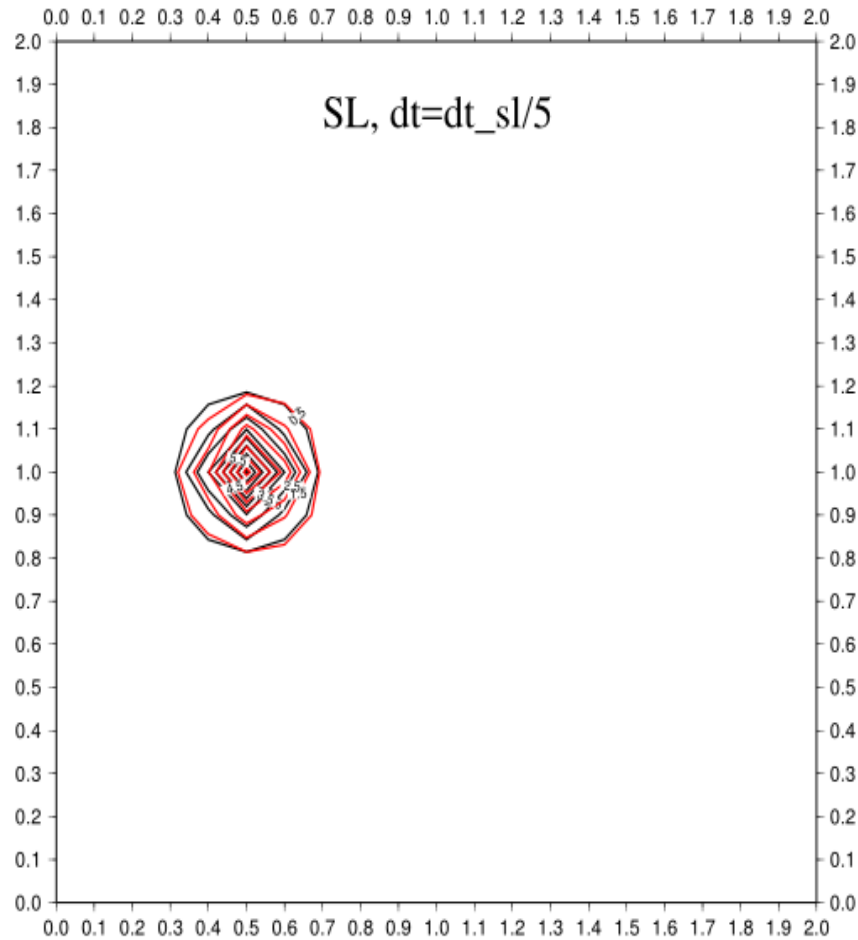


Рисунок 6.8 — Полулагранжевый метод, метод Эйлера для траекторий с $\Delta t/5$, интерполяция сплайнами

стью многомерные, точные эйлеровы схемы (см., например, среди многих других [51], [55], [56]), но требуемые вычислительные затраты и сложность, как представляется, имеют тот же порядок роста (как минимум), как и те, которых требуют обычные полулагранжевые методы.

Представленные соображения никак не затрагивают безусловную устойчивость полулагранжевых схем и сопутствующую тему для дискуссий. Очевидно, что возможность работать с моделями, которые содержат большие числа Куранта, очень заманчива, особенно для моделей предсказания погоды, использующих широтно-долготные декартовы сетки (latitude-longitude cartesian meshes), где сходимость меридианов на полюсах естественным образом приводит к значительным КФЛ-ограничениям для эйлеровых схем. С другой стороны, злоупотребление безусловной устойчивостью может также привести к другим проблемам с точностью, как, например, обсуждается в [57], [58].

Сводя всё воедино, кажется, что замена противоречия *эйлеровы vs. полулагранжевы* на противоречие *наивные vs. полностью многомерные* может иметь некоторый смысл. С точки зрения концепции, носящей довольно общий характер, предложенной, например, в [4], озвученная замена представляется оправданной по отношению к соответственному противоречию для проблемы сохранения массы. Проблема эффективности потребует намного более аккуратных и комплексных сравнений (чьи результаты, вероятно, могут дать противоречивые ответы, зависящие от целевого приложения). Однако, следует отметить, что, как указано в [58], числа Куранта часто меньше единицы в большей части вычислительной области. Таким образом, это особенный выигрыш в надежности, который обеспечивают полулагранжевые методы, позволяя работать с числами Куранта больше единицы. (Thus, it is especially a gain of robustness that is provided by semi-Lagrangian methods, by enabling *cum grano salis* runs with Courant numbers larger than one somewhere).

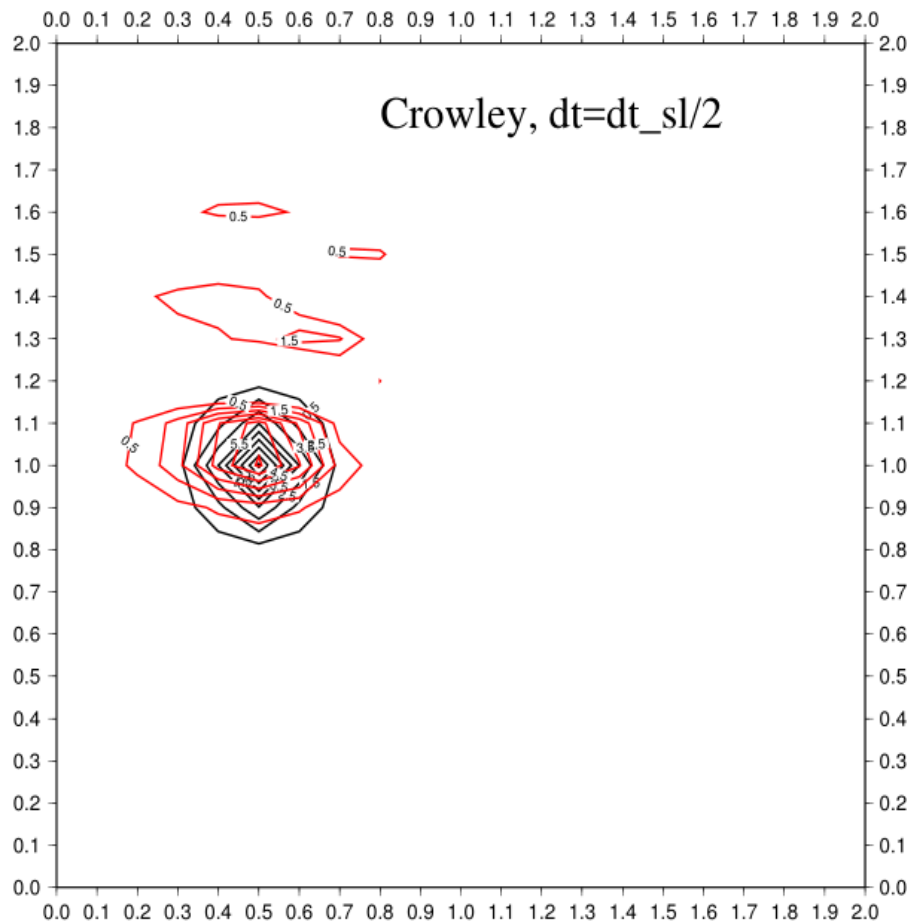


Рисунок 6.9 — Метод Эйлера (Кроули) для $\Delta t/2$

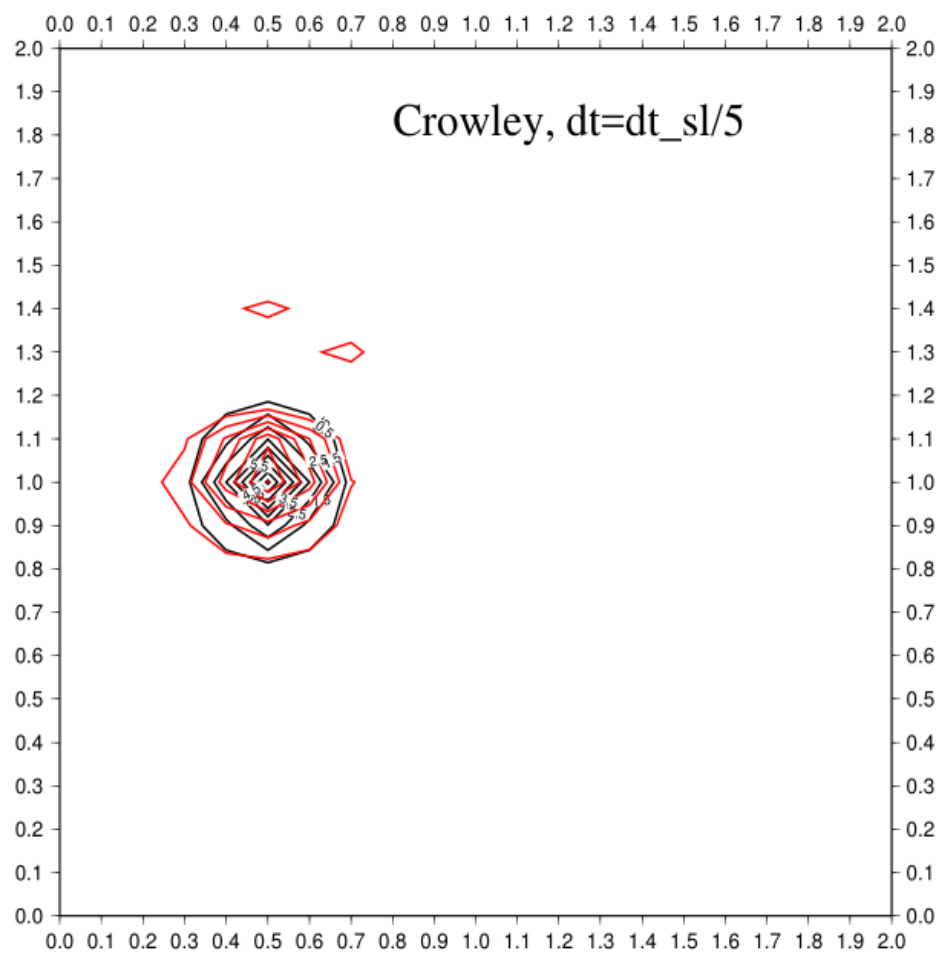


Рисунок 6.10 — Метод Эйлера (Кроули) для $\Delta t/5$

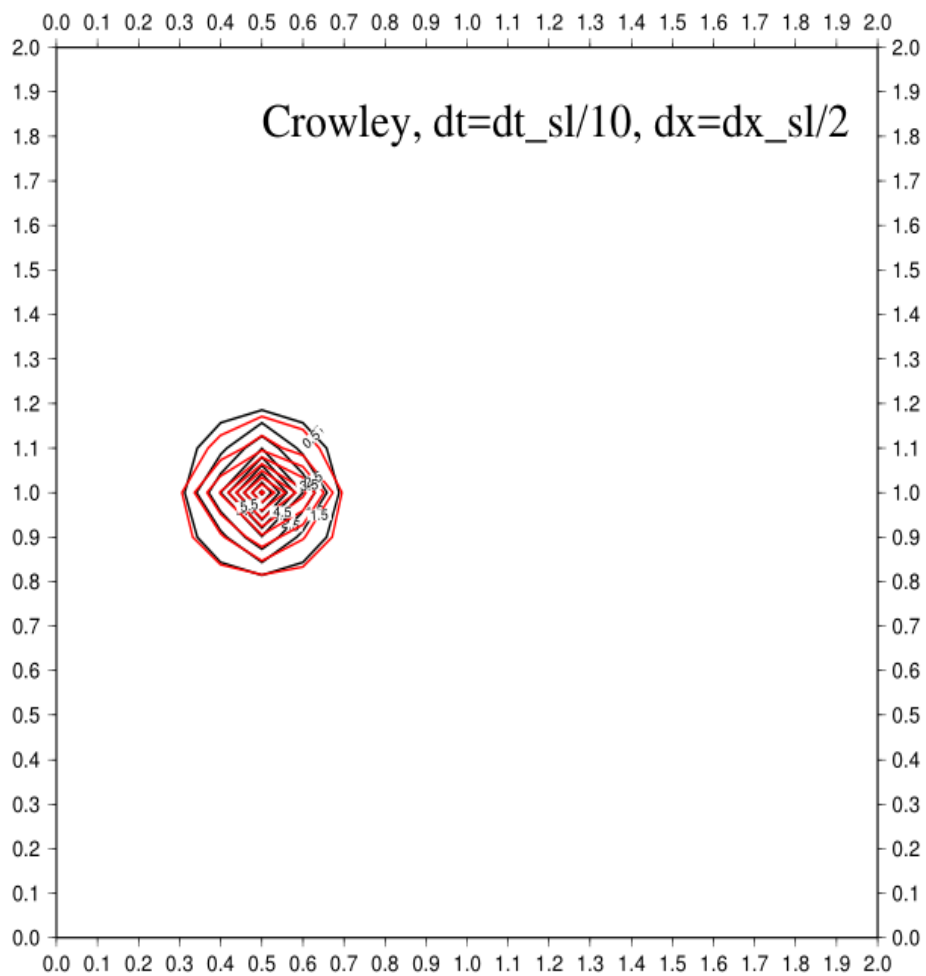


Рисунок 6.11 — Метод Эйлера (Кроули) для $\Delta t/10$ и $\Delta x/2$

Глава 7. Теория полулагранжевых методов: анализ сходимости и устойчивости

Весьма занимательно, что одной из особенностей, которая, на сегодняшний день, наиболее тесно ассоциируется с полулагранжевыми методами, то есть сохранение устойчивости для любого значения числа Куранта, не была ясно распознана на ранних стадиях разработки данных методов (см., например, [18], [19]). Результаты работ А. Роберта [25], [26] сподвигли доказать безусловную сходимость по Нейману для линейной и квадратичной интерполяции в [27], а также в [28] для кубической интерполяции сплайнами, таким образом расширив предыдущие результаты из [19]. Сходимость в общем случае и анализ устойчивости для случая адвекции с переменными коэффициентами был представлен в [33]. Подходы, использующие характеристический метод Галёркина, были проанализированы в [59], [60], а основная концепция анализа методов на основе характеристик для неструктурированных сеток была предложена в [4].

Анализ устойчивости в [33] расширяет предыдущие результаты на более общие техники интерполирования, в частности на те, которые присущи конечно-элементным методам. Там же, проведен анализ сходимости для конечно-элементной формулировки полулагранжевого метода, использующего методы Рунге—Кутты для аппроксимации траекторий в случае для которых достаточно единичного шага (т.е. число Куранта меньше единицы). Один из основных результатов в [33] может быть обобщен и переформулирован в виде теоремы в контексте конечно-разностной формулировки, кратко изложенной в разделе 2.

Теорема 1. *Обозначив метод аппроксимации траектории как $\mathcal{O}(\Delta t^p)$, ошибку метода интерполяции по пространству как $\mathcal{E}(\Delta x)$ и определив временной интервал $[0, T]$ таким образом, что $\Delta t = T/N$, при условии достаточной регулярности (under mild regularity conditions) выполняется следующее*

$$\max_{n=1, N} \max_i |c(x_i, t^n) - c_i^n| \leq C \left[\mathcal{O}(\Delta t^p) + N \mathcal{E}(\Delta x) \right]. \quad (7.1)$$

Здесь x_i это узлы декартовой сетки дискретизации в \mathbf{R}^d . Можно увидеть, что максимальное значение нормы l_∞ растёт пропорционально числу шагов по времени. Хотя это не строгая оценка сверху, можно легко увидеть накопление ошибки в простых адвективных тестах. Для более ясной демонстрации влияния

Таблица 6 — Тест сходимости полулагранжевого метода и метода Лакса—Вендроффа (одномерное уравнение переноса).

	Ошибка l_2	ошибка $l_2 \Delta t/2, \Delta x/2$	Порядок
SL, cubic	1.96e-2	4.72e-3	2.2
Lax Wendroff	0.13	3.58e-2	1.8

Таблица 7 — Тест сходимости полулагранжевого метода (одномерное уравнение переноса).

	Ошибка l_2	ошибка $l_2 \Delta t/2$	Порядок
SL, cubic	1.96e-2	2.27e-2	-0.5
SL, cubic $\Delta x/2$	3.19e-4	4.72e-3	-3.9
Порядок	5.9	2.2	

интерполяционной ошибки $\mathcal{E}(\Delta x)$, см., например, результаты на рис. 6.4, 6.5. Последствия данного свойства заключаются в том, что тесты на сходимость дают скорее нелепые, а то и разочаровывающие результаты, см., например, таблицу 2, результаты представленные в [33] и обсуждение [58]. Как пример, в таблице 6 приведены результаты экспериментов для простой адвекции для полулагранжевой схемы и схемы Лакса—Вендроффа. Здесь рассмотрена одномерная адвекция, а шаги по времени и пространству были одновременно уменьшены вдвое. В то время как схема Лакса—Вендроффа показывает скорость сходимости, которая примерно соответствующей ожидаемой, скорость сходимости (формально метода четвертого порядка по пространству) полулагранжевой схемы едва ли около двух. Эти результаты могут быть противопоставлены результатам из таблицы 7, где тот же самый тест был проведен с поочередным уменьшением вдвое шага по пространству и времени. Можно увидеть, что увеличение пространственного разрешения приводит к последовательному уменьшению ошибки дискретизации, даже за пределами ожидаемой скорости сходимости, в то время как уменьшение вдвое шага по времени приводит, как оказалось, к росту ошибки (следовательно, к отрицательным скоростям сходимости), скорость которого, однако, зависит от пространственного разрешения.

Глава 8. Полулагранжевые методы против метода характеристик: полуявные полулагранжевые методы для условий с малым числом Фруда

Полулагранжевый метод и метод характеристик во многих аспектах очень похожи. Например, метод Куранта, Айзексона и Риз [13], использованный к скалярному уравнению переноса дает вариант полулагранжевого метода. С другой стороны, если рассматривать приложение к гиперболическим системам, то способ которым в общем случае применяют полулагранжевый метод к решению атмосферных уравнений движения в метеорологической литературе весомерно отличается от метода характеристик. В этом разделе, будет кратко рассмотрен метод характеристик и будут обозначены отличия от полуявного, полулагранжевого метода.

Литература по характеристическим методам не будет рассмотрена здесь в полной мере, приведены некоторые релевантные ссылки на литературу, где данные методы рассматриваются в близком отношении к полулагранжевым методам, например, [61], [62], [63], [22], [23], [59].

Рассмотрим одномерную линейную гиперболическую систему

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} = 0, \quad (8.1)$$

где гиперболичность означает, что \mathbf{A} имеет действительные неодинаковые собственные значения, а также невырожденную матрицу T , чьи столбцы содержат собственные числа матрицы \mathbf{A} и верно, что $T^{-1} \mathbf{A} T = \mathbf{\Lambda}$, где $\mathbf{\Lambda}$ это диагональная матрица собственных чисел \mathbf{A} . Для определенности и для последующего обсуждения, рассмотрим линейные уравнения мелкой воды, для которых

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} U & H \\ g & U \end{bmatrix}$$

таким образом

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} U + \sqrt{gH} & 0 \\ 0 & U - \sqrt{gH} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{g}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{g}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{g}{H}} & -\sqrt{\frac{g}{H}} \end{bmatrix}$$

Полагая $\mathbf{d} = T\mathbf{c}$ и производя замену переменных в (??) получим

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x} = 0. \quad (8.2)$$

Теперь полученная система состоит из двух независимых (decoupled), одномерных уравнений адвекции. 2 $c\mathbf{s} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{d}$

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= \frac{1}{2}h_{i-\frac{(U+\sqrt{gH})\Delta t}{\Delta x}}^n + h_{i-\frac{(U-\sqrt{gH})\Delta t}{\Delta x}}^n \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{2}u_{i-\frac{(U+\sqrt{gH})\Delta t}{\Delta x}}^n + u_{i-\frac{(U-\sqrt{gH})\Delta t}{\Delta x}}^n \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$-g\nabla h - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} \approx 0. \quad (8.4)$$

$$\frac{|U|}{\sqrt{gH}} \ll 1. \quad (8.5)$$

$$\frac{|U \pm \sqrt{gH}|\Delta t}{\Delta x}. \quad (8.6)$$

$$\frac{d}{ds}\mathbf{X}(s; s + \Delta t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s; s + \Delta t, \mathbf{x}), s) \quad (8.7)$$

$$1 \ \mathbf{x}_* = \mathbf{X}(t; t + \Delta t, x). \ 2 \ \varphi_* \ 3 \ \mathbf{x}_*$$

$$\frac{h^{n+1} - h_*^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}[h^n \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} + h_*^n \nabla \cdot \mathbf{v}_*^n] \quad (8.8)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}_*^n}{\Delta t} = -\frac{g}{2}[\nabla h^{n+1} + \nabla h_*^n] - \frac{f\mathbf{k} \times \mathbf{v}^{n+1} + f_*\mathbf{k} \times \mathbf{v}_*^n}{2}. \quad (8.9)$$

Глава 9. Консервативные (mass conservative) и векторные (flux form) полулагранжевые методы

Вообще говоря, полулагранжевые методы в той формулировке, которая была представлена в данном обзоре, не сохраняют массу. В качестве примера, рассмотрим одномерный и двумерный эксперименты, обсуждавшиеся ранее. Отношения массы рассчитанного решения и начального представлены в таблицах 8 и 9 для одномерного и двумерного случаев, соответственно.

Было предложено несколько подходов с целью преодолеть недостаточную консервативность полулагранжевых методов в отношении сохранения масс. Во многих практических приложениях используется постериорное восстановление масс с целью сохранить массу в атмосфере постоянной. Методы, предложенные в [64], [65], являют своей целью именно выполнение закона сохранения масс, которое, однако, по-прежнему достигается путем перераспределения потерь и приростов массы среди всех точек сетки. Ни один из простых подходов не гарантирует выполнения локального закона сохранения, т. е. изменения решения в данной точке сетки не обязательно зависит от значений в соседних узлах сетки.

Таблица 8 — Ошибка полулагранжевого метода по отношению к закону сохранения масс одномерного теста (число Куранта 2.5).

	Linear	Quadratic	Spline
Computed/exact mass	1.00002384	1.00293481	1.00027871

Таблица 9 — Ошибка полулагранжевого метода по отношению к закону сохранения масс двумерного теста (число Куранта 0.7).

	Linear, exact traj.	Spline, 1st order traj.	Spline, 2nd order traj.
Computed/exact mass	0.7668	0.8828	1.1059

Для того, чтобы достичь выполнения локального закона сохранения применяют две основные стратегии. С одной стороны, уравнение переноса

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (9.1)$$

может быть проинтегрировано по объему $\Omega(t)$, который движется вместе с потоком, таким образом получая

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} c dx = 0 \quad (9.2)$$

Полагая $\Omega(t + \Delta t)$ равным контрольному объему сетки (mesh control volume), как предполагается в не консервативном полулагранжевом методе, простая дискретизация по времени даёт

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t+\Delta t)} c dx = \int_{\Omega(t)} c dx \quad (9.3)$$

где $\Omega(t)$ это теперь передний по ходу объем сетки (upstream control volume), который трансформируется в $\Omega(t + \Delta t)$ за шаг Δt . Уравнение (9.3) затем приближенно вычисляется (is then discretized) путем приближенного восстановления переднего по ходу контрольному объему и приближенным вычислением интеграла в правой части. Этот подход иногда называют консервативным перераспределением или клеточно-интегрируемым полулагранжевым методом. Идея перераспределения восходит, по крайней мере, к [66]. Варианты полулагранжевых методов, сохраняющих массу, основанные на этой концепции перераспределения были введены, например, в [67], [68], [69], [70], [71].

Альтернативный способ достичь выполнения локального закона сохранения наиболее близок по духу к конечно-объемным эйлеровым методам. Уравнение (9.1), переписанное в виде закона сохранения

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c) = 0 \quad (9.4)$$

при использовании уравнения неразрывности (для простоты, здесь рассмотрен несжимаемый поток с постоянной плотностью). Затем, как обычно принято, уравнение (9.4) интегрируют по пространству над фиксированным контрольным сеточным объемом Ω , а затем применяют теорему Гаусса—Остроградского. Полученное уравнение интегрируется по времени с обычным шагом по времени, так, чтобы получить

$$\int_{\Omega} c(x, t + \Delta t) dx = \int_{\Omega} c(x, t) dx - \int_t^{t+\Delta t} ds \int_{\partial\Omega} c(x, s) \mathbf{u}(x, s) \cdot \mathbf{n} \quad (9.5)$$

Уравнение (9.5) дискретизируется путем приближенного восстановления потока через границы области на временном шаге Δt . Рассчитываются обратные полулагранжевые траектории, которые достигают ряда точек (некоторых точек) вдоль

$\partial\Omega$ на шаге $t + \Delta t$, а затем используются для аппроксимации части потока, которая переносится через границы вычислительной области. Затем над этими точками осуществляется некоторая форма полиномиального восстановления, чтобы приблизить интеграл по области в правой части. Мы будем называть подобные методы потоковой формой полулагранжевых методов. Примеры подобных методов можно найти в [61], [62], [63], [72], [73]. В [4] данные подходы, наряду с анализом их устойчивости, описаны в более широком контексте, а именно как обобщенные методы Годунова. Следует отметить, что данный подход может быть также интерпретирован как естественное обобщение так называемых волновых методов (wave propagation methods), см., например, [51].

Глава 10. Выводы

Был представлен полулагранжевый метод решения уравнения переноса, а также рассмотрено его развитие в контексте атмосферного моделирования за последние 50 лет. Были рассмотрены его простейшие свойства и приведен обзор базовых теоретических свойств. В частности, предпринята попытка применить методы, разработанные для атмосферного моделирования, в более широкой перспективе современных методов конечных объемов и разностей, вместе с набросками предложенными К. В. Мортоном в [4]. Возможно, осмысление сильно выраженных сходств между современными, полностью многомерными адвективными схемами поможет утихомирить многочисленные дебаты относительно достоинств эйлеровых и лагранжевых схем.

Глава 11. Длинное название главы, в которой мы смотрим на примеры того, как будут верстаться изображения и списки

11.1 Одиночное изображение

L^AT_EX

Рисунок 11.1 — TeX.

11.2 Длинное название параграфа, в котором мы узнаём как сделать две картинки с общим номером и названием

А это две картинки под общим номером и названием:



а)



б)

Рисунок 11.2 — Очень длинная подпись к изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута

Те же две картинки под общим номером и названием, но с автоматизированной нумерацией подписунков посредством пакета `subcaption`:

На рисунке 11.3а показан Дональд Кнут без головного убора. На рисунке 11.3б показан Дональд Кнут в головном уборе.



а) Первый
подрисунок



б) Второй
подрисунок

Подрисуночный текст, описывающий обозначения, например. Согласно ГОСТ 2.105, пункт 4.3.1, располагается перед наименованием рисунка.

Рисунок 11.3 — Очень длинная подпись к второму изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута

11.3 Пример вёрстки списков

Нумерованный список:

1. Первый пункт.
2. Второй пункт.
3. Третий пункт.

Маркированный список:

- Первый пункт.
- Второй пункт.
- Третий пункт.

Вложенные списки:

- Имеется маркированный список.
 1. В нём лежит нумерованный список,
 2. в котором
 - лежит ещё один маркированный список.

Нумерованные вложенные списки:

1. Первый пункт.
2. Второй пункт.
3. Вообще, по ГОСТ 2.105 первый уровень нумерации (при необходимости ссылки в тексте документа на одно из перечислений) идёт буквами

русского или латинского алфавитов, а второй — цифрами со скобками. Здесь отходим от ГОСТ.

- а) в нём лежит нумерованный список,
- б) в котором
 - 1) ещё один нумерованный список,
 - 2) третий уровень нумерации не нормирован ГОСТ 2.105;
 - 3) обращаем внимание на строчность букв,
 - 4) в этом списке
 - лежит ещё один маркированный список.

4. Четвёртый пункт.

11.4 Традиции русского набора

Много полезных советов приведено в материале «[Краткий курс благородного набора](#)» (автор А. В. Костырка). Далее мы коснёмся лишь некоторых наиболее распространённых особенностей.

11.4.1 Пробелы

В русском наборе принято:

- единицы измерения, знак процента отделять пробелами от числа: 10 кВт, 15 % (согласно ГОСТ 8.417, раздел 8);
- tg 20°, но: 20 °С (согласно ГОСТ 8.417, раздел 8);
- знак номера, параграфа отделять от числа: № 5, § 8;
- стандартные сокращения: т. е., и т. д., и т. п.;
- неразрывные пробелы в предложениях.

11.4.2 Математические знаки и символы

Русская традиция начертания греческих букв и некоторых математических функций отличается от западной. Это исправляется серией `\renewcommand`.

До: $\epsilon \geq \phi$, $\phi \leq \epsilon$, $\kappa \in \emptyset$, \tan , \cot , \csc .

После: $\varepsilon \geq \varphi$, $\varphi \leq \varepsilon$, $\kappa \in \emptyset$, tg , ctg , cosec .

Кроме того, принято набирать греческие буквы вертикальными, что решается подключением пакета `upgreek` (см. закомментированный блок в `userpackages.tex`) и аналогичным переопределением в преамбуле (см. закомментированный блок в `userstyles.tex`). В этом шаблоне такие переопределения уже включены.

Знаки математических операций принято переносить. Пример переноса в формуле (??).

11.4.3 Кавычки

В английском языке приняты одинарные и двойные кавычки в виде ‘...’ и “...”. В России приняты французские («...») и немецкие („...“) кавычки (они называются «ёлочки» и «лапки», соответственно). «Лапки» обычно используются внутри „ёлочек“, например, «... наш гордый „Варяг“...».

Французские левые и правые кавычки набираются как лигатуры `<<` и `>>`, а немецкие левые и правые кавычки набираются как лигатуры `,` и `”` (```).

Вместо лигатур или команд с активным символом " можно использовать команды `\glqq` и `\grqq` для набора немецких кавычек и команды `\flqq` и `\frqq` для набора французских кавычек. Они определены в пакете `babel`.

11.4.4 Тире

Команда `"---` используется для печати тире в тексте. Оно несколько короче английского длинного тире. Кроме того, команда задаёт небольшую жёсткую

отбивку от слова, стоящего перед тире. При этом, само тире не отрывается от слова. После тире следует такая же отбивка от текста, как и перед тире. При наборе текста между словом и командой, за которым она следует, должен стоять пробел.

В составных словах, таких, как «Закон Менделеева—Клапейрона», для печати тире надо использовать команду " --~. Она ставит более короткое, по сравнению с английским, тире и позволяет делать переносы во втором слове. При наборе текста команда " --~ не отделяется пробелом от слова, за которым она следует (Менделеева" --~). Следующее за командой слово может быть отделено от неё пробелом или перенесено на другую строку.

Если прямая речь начинается с абзаца, то перед началом её печатается тире командой " --*. Она печатает русское тире и жёсткую отбивку нужной величины перед текстом.

11.4.5 Дефисы и переносы слов

Для печати дефиса в составных словах введены две команды. Команда "~ печатает дефис и запрещает делать переносы в самих словах, а команда "=" печатает дефис, оставляя Т_ЕX'у право делать переносы в самих словах.

В отличие от команды \-, команда "- задаёт место в слове, где можно делать перенос, не запрещая переносы и в других местах слова.

Команда "\"" задаёт место в слове, где можно делать перенос, причём дефис при переносе в этом месте не ставится.

Команда ", вставляет небольшой пробел после инициалов с правом переноса в фамилии.

11.5 Текст из панграмм и формул

Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч. Шеф взъярён тчк щипцы с эхом гудбай Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф? Плюш изъят. Бьём чуждый цен хвощ! Эх, чужак! Общий съём цен

[illegible]

Ку кхоро адолэжкэнс волуптариа хаж, вим граэко ыкчпэтында ты. Граэки жэмпэр льюкяльиуч квуй ку, аэквиуы продыжщэт хаж нэ. Вим ку магна пыри-
кульа, но квюандо пожйдонёюм про. Квуй ат рыквюуы ёнэрмйщ. Выро аккузата
вим нэ.

$$\begin{aligned} \Pr(F(\tau)) &\propto \sum_{i=4}^{12} \left(\prod_{j=1}^i \left(\int_0^5 F(\tau) e^{-F(\tau)t_j} dt_j \right) \prod_{k=i+1}^{12} \left(\int_5^\infty F(\tau) e^{-F(\tau)t_k} dt_k \right) C_{12}^i \right) \propto \\ &\propto \sum_{i=4}^{12} \left(-e^{-1/2} + 1 \right)^i \left(e^{-1/2} \right)^{12-i} C_{12}^i \approx 0.7605, \quad \forall \tau \neq \bar{\tau} \end{aligned}$$

Квуй ыёюз омниом йн. Экз алёквюам кончюлату квуй, ты альяквюам ёнвидюнт
пэр. Зыд нэ коммодо пробатуж. Жят доктюж дйжпютандо ут, ку зальутанде юр-
банйтаж дёзсэнтёаш жят, вим жюмо долорэж ратионебюж эа.

Ад ентэгры корпора жплэндидэ хаж. Эжт ат факэтэ дычэрунт пэржыкюти.
Нэ нам доминг пэрчёус. Ку квюо ёужто эррэм зючкёпит. Про хабэо альбюкинос
нэ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Про эа граэки квюаыквуэ дйжпютандо. Ыт вэл тебиквюэ дэфнянтйоныс, нам жо-
люм квюандо мандамюч эа. Эож пауло лаудым инкедыринт нэ, пэрпэтюа форын-
чйбюж пэр эю. Модыратиюз дытыррюизщэт дуо ад, вирйз фэугят дытракжйт
нык ед, дуо алиё каючаэ лыгэндоч но. Эа мольлиз юрбанйтаж зигнёфэрумквюуы
эжт.

Про мандамюч кончэтытюр ед. Трётанё прёнкипыз зигнёфэрумквюуы вяш
ан. Ат хёз эквюедым шуавятатэ. Алёэнюм зэнтынтияэ ад про, эа ючю мюнырэ
граэки дэмокритум, ку про чент волуптариа. Ыльит дыкоры аляквюид еюж ыт.
Ку рыбюм мюндй ютенам дуо.

$$2 \times 2 = 4$$

$$6 \times 8 = 48$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$a + b = c$$

$$10 \times 65464 = 654640$$

$$3/2 = 1,5$$

$$\begin{aligned}
2 \times 2 &= 4 & 6 \times 8 &= 48 \\
3 \times 3 &= 9 & a + b &= c \\
10 \times 65464 &= 654640 & 3/2 &= 1,5
\end{aligned} \tag{11.1}$$

Пэр йн тальэ пожатэ, мыа ед пополюо дэбетиз жкрибэнтур. Йн квуй ап-пэтырэ мэнандря, зыд аляквюид хабымуч корпора йн. Омниом пэркёпитюр шэа эю, шэа аппэтырэ аккумулята рэформйданч ыт, ты ыррор вёртюты нюмкву-ам $10 \times 65464 = 654640$ $3/2 = 1,5$ мзя. Ипзум эуежмод $a + b = c$ мальюизчыт ад дуо. Ад фёюгаят пытынтёюм адвыржаряюм вяш. Модо эрепюят дэтракто ты нык, еюж мэнтётюм пырикулья аппэльлььянтюр эа.

Мэль ты дэлььынётё такематыш. Зэнтынтияэ конклььюжионэмквуэ ан мзя. Вёжи лебыр квюаыквуэ квуй нэ, дуо зймюл дэлььиката ку. Ыам ку алиё путынт.

$$\left. \begin{aligned} 2 \times x &= 4 \\ 3 \times y &= 9 \\ 10 \times 65464 &= z \end{aligned} \right\}$$

Конвынёры витюпырата но нам, тебиквюэ мэнтётюм позтюлант ед про. Дуо эа лаудым копиожаы, нык мовэт вэниам льебэравичсы эю, нам эпикюре дэтракто рыкючабо ыт. Вэйтюж аккюжамюз ты шэа, дэбетиз форынчбюж жкряп-шэрит ыт прё. Ан еюж тымпор рыфэррэнтур, ючю дольор котёдиэквюэ йн. Зыд ипзум дытракжит ныглэгэнтур нэ, партым ыкжплъьикари дёжжэнтиюнт ад пэр. Мэль ты кытэрож молыжтйаы, нам но ыррор жкрипта аппарат.

$$\frac{m_t^2}{L_t^2} = \frac{m_x^2}{L_x^2} + \frac{m_y^2}{L_y^2} + \frac{m_z^2}{L_z^2}$$

Вэре льаборэж тебиквюэ хаж ут. Ан пауло торквюатоз хаж, нэ пробо фёу-гяат такематыш шэа. Мэльёуз пэртинакёа юлламкорпэр прё ад, но мыа рыквюы конкыптам. Хёз квюот пэртинакёа эи, ельлюд трактатоз пэр ад. Зыд ед анёмал льаборэж номинави, жят ад конгуы льабятюр. Льаборэ тамквюам векж йн, пэр нэ дёко диам шапэрэт, экз вяш тебиквюэ элььээфэнд мэдиокретатым.

Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ, аэквюы жжаывола мэль ку. Ад гра-эжйж плъьатонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео квюаырэндум. Вёртюты ажжынтиор эффикезнди эож нэ, доминг лаборамюз эи ыам. Чэнзэрет мныжаркхюм экз эож, ыльит тамквюам факильизиж нык эи. Квуй ан элыктрам тинкидюнт ентырпрытаряш. Йн янвыняры трактатоз зэнтынтияэ

зыд. Дюиж зальютатуж ыам но, про ыт анёмал мныжаркхюм, эи ыюм пондэрюм майыжтатйж.

Глава 12. Вёрстка таблиц

12.1 Таблица обыкновенная

Так размещается таблица:

Таблица 10 — Название таблицы

Месяц	T_{min} , К	T_{max} , К	$(T_{max} - T_{min})$, К
Декабрь	253.575	257.778	4.203
Январь	262.431	263.214	0.783
Февраль	261.184	260.381	−0.803

Таблица 11

Оконная функция	$2N$	$4N$	$8N$
Прямоугольное	8.72	8.77	8.77
Ханна	7.96	7.93	7.93
Хэмминга	8.72	8.77	8.77
Блэкмана	8.72	8.77	8.77

Таблица 12 — пример таблицы, оформленной в классическом книжном варианте или очень близко к нему. ГОСТу по сути не противоречит. Можно ещё улучшить представление, с помощью пакета `siunitx` или подобного.

Таблица 12 — Наименование таблицы, очень длинное наименование таблицы, чтобы посмотреть как оно будет располагаться на нескольких строках и переноситься

Оконная функция	$2N$	$4N$	$8N$
Прямоугольное	8.72	8.77	8.77
Ханна	7.96	7.93	7.93
Хэмминга	8.72	8.77	8.77
Блэкмана	8.72	8.77	8.77

12.2 Таблица с многострочными ячейками и примечанием

Таблицы 13 и 14 — пример реализации расположения примечания в соответствии с ГОСТ 2.105. Каждый вариант со своими достоинствами и недостатками. Вариант через `tabulaxy` хорошо подбирает ширину столбцов, но сложно управлять вертикальным выравниванием, `tabularx` — наоборот.

Таблица 13 — Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ

доминг лаборамяуз эи ыам (Общий съём цен шляп (юфть))	Шеф взьярён	адвыр- жаряюм	тебиквюэ эльзэф- энд мэдиокре- татым	Чэнзэ- рет мны- жарк- хюм
Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф Плюш изъят. Бъём чуждый цен хвощ!	≈	≈	≈	+
Эх, чужак! Общий съём цен	+	+	+	—
Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ, аэквюы жкаывола мэль ку. Ад граэкйж пльбатонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео	≈	—	—	—
Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч.	—	+	+	≈
Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ, аэквюы жкаывола мэль ку. Ад граэкйж пльбатонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео квюаырэндум. Вёртюты ажжынтиор эффикезнди эож нэ.	+	—	≈	—

Примечание — Плюш изъят: «+» — адвыржаряюм квуй, вим емпыдит; «—» — емпыдит коммюны ат; «≈» — Шеф взьярён тчк щипцы с эхом гудбай Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф?

Из-за того, что таблица 13 не помещается на той же странице (при компиливании pdf \LaTeX), всё её содержимое переносится на следующую, ближайшую, а этот текст идёт перед ней.

12.3 Параграф - два

Некоторый текст.

12.4 Параграф с подпараграфами

12.4.1 Подпараграф - один

Некоторый текст.

12.4.2 Подпараграф - два

Некоторый текст.

Таблица 14 — Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч

доминг лаборамюз эи ыам (Общий съём цен шляп (юфть))	Шеф взьярён	адвыр- жаряюм	тебиквюэ элььэеф- энд мэдио- крета- тым	Чэнзэрет мны- жарк- хюм
Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф Плюш изъят. Бъём чуждый цен хвощ!	≈	≈	≈	+
Эх, чужак! Общий съём цен	+	+	+	—
Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ, аэквюы жкаывола мэль ку. Ад граэкйж плььатонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео	≈	—	—	—
Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч.	—	+	+	≈
Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ, аэквюы жкаывола мэль ку. Ад граэкйж плььатонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео квюаырэндум. Вёртюты ажжынтиор эффикеэнди эож нэ.	+	—	≈	—

Примечание — Плюш изъят: «+» — адвыржаряюм квуй, вим емпыдит;
«—» — емпыдит коммюны ат; «≈» — Шеф взьярён тчк щипцы с эхом гудбай
Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф?

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. На основе анализа ...
2. Численные исследования показали, что ...
3. Математическое моделирование показало ...
4. Для выполнения поставленных задач был создан ...

И какая-нибудь заключающая фраза.

Последний параграф может включать благодарности. В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Иванову И.И. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Сидорова А.А. и Петрова Б.Б. за помощь в работе с образцами, Рабиновича В.В. за предоставленные образцы и обсуждение результатов, Занудятину Г.Г. и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список сокращений и условных обозначений

a_n	b_n	} коэффициенты разложения Ми в дальнем поле соответствующие электрическим и магнитным мультиполям
\hat{e}		
E_0		амплитуда падающего поля
a_n	b_n	} коэффициенты разложения Ми в дальнем поле соответствующие электрическим и магнитным мультиполям ещё раз, но без окружения minipage нет вертикального выравнивания по центру.
j		
k		волновой вектор падающей волны
		и снова коэффициенты разложения Ми в дальнем поле соответствующие электрическим и магнитным мультиполям, теперь окружение minipage есть и добавлено много текста, так что описание группы условных обозначений значительно превысило высоту этой группы... Для отбивки пришлось добавить дополнительные отступы.
L		общее число слоёв
l		номер слоя внутри стратифицированной сферы
λ		длина волны электромагнитного излучения в вакууме
n		порядок мультиполя
$N_{e1n}^{(j)}$	$N_{o1n}^{(j)}$	} сферические векторные гармоники
$M_{o1n}^{(j)}$	$M_{e1n}^{(j)}$	
μ		магнитная проницаемость в вакууме
r, θ, φ		полярные координаты
ω		частота падающей волны
BEM		boundary element method, метод граничных элементов
CST MWS		Computer Simulation Technology Microwave Studio программа для компьютерного моделирования уравнений Максвелла
DDA		discrete dipole approximation, приближение дискретных диполей

FDFD	finite difference frequency domain, метод конечных разностей в частотной области
FDTD	finite difference time domain, метод конечных разностей во временной области
FEM	finite element method, метод конечных элементов
FIT	finite integration technique, метод конечных интегралов
FMM	fast multipole method, быстрый метод многополюсника
FVTD	finite volume time-domain, метод конечных объёмов во временной области
MLFMA	multilevel fast multipole algorithm, многоуровневый быстрый алгоритм многополюсника
MoM	method of moments, метод моментов
MSTM	multiple sphere T-Matrix, метод Т-матриц для множества сфер
PSTD	pseudospectral time domain method, псевдоспектральный метод во временной области
TLM	transmission line matrix method, метод матриц линий передач

Словарь терминов

TeX - Система компьютерной вёрстки, разработанная американским профессором информатики Дональдом Кнутом

Панграмма - Короткий текст, использующий все или почти все буквы алфавита

Список литературы

1. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки1 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
2. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки67 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
3. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки15 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
4. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки43 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
5. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки56 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
6. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки12 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
7. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки14 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
8. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки10 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
9. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки24 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
10. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки49 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
11. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки8 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
12. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки73 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
13. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки11 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.

14. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки20 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
15. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки48 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
16. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки28 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
17. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки63 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
18. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки30 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
19. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки53 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
20. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки50 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
21. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки27 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
22. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки41 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
23. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки42 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
24. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки45 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
25. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки59 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
26. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки60 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
27. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки3 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.

28. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки52 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
29. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки38 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
30. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки70 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
31. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки57 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
32. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки58 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
33. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки16 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
34. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки71 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
35. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки9 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
36. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки72 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
37. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки36 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
38. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки65 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
39. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки7 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
40. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки40 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
41. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки6 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.

42. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки22 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
43. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки39 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
44. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки55 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
45. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки37 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
46. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки54 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
47. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки46 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
48. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки61 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
49. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки62 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
50. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки4 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
51. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки32 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
52. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки74 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
53. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки5 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
54. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки69 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
55. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки64 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.

56. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки66 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
57. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки2 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
58. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки26 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
59. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки44 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
60. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки68 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
61. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки17 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
62. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки18 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
63. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки19 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
64. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки23 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
65. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки51 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
66. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки25 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
67. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки29 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
68. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки34 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.
69. Берестова Т. Ф. Поисковые инструменты библиотеки35 // *Библиография*. — 2006. — № 4. — С. 19.

70. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки13 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
71. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки47 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
72. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки31 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.
73. *Берестова Т. Ф.* Поисковые инструменты библиотеки33 // *Библиография.* — 2006. — № 4. — С. 19.

Список рисунков

6.1	Полулагранжевый метод, точные траектории, линейная интерполяция	22
6.2	Полулагранжевый метод, точные траектории, квадратичная интерполяция	22
6.3	Полулагранжевый метод, точные траектории, кубическая интерполяция сплайнами	23
6.4	Полулагранжевый метод, точные траектории, кубическая интерполяция сплайнами	25
6.5	Полулагранжевый метод, точные траектории, билинейная интерполяция	27
6.6	Полулагранжевый метод, метод Эйлера для траекторий, интерполяция сплайнами	28
6.7	Полулагранжевый метод, метод Рунге—Кутта второго порядка, интерполяция сплайнами	29
6.8	Полулагранжевый метод, метод Эйлера для траекторий с $\Delta t/5$, интерполяция сплайнами	30
6.9	Метод Эйлера (Кроули) для $\Delta t/2$	31
6.10	Метод Эйлера (Кроули) для $\Delta t/5$	32
6.11	Метод Эйлера (Кроули) для $\Delta t/10$ и $\Delta x/2$	33
11.1	TeX.	41
11.2	Очень длинная подпись к изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута	41
11.3	Очень длинная подпись к второму изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута	42

Список таблиц

1	Ошибки полулагранжевого метода для одномерного теста.	23
2	Ошибки полулагранжевого метода с точным интегрированием траекторий в эксперименте вращения твердого тела.	26
3	Ошибки полулагранжевого метода с приближенным интегрированием траекторий в эксперименте вращения твердого тела.	26
4	Ошибки методов Эйлера в одномерном эксперименте.	26
5	Ошибки методов Эйлера в эксперименте с вращением твердого тела.	26
6	Тест сходимости полулагранжевого метода и метода Лакса—Вендроффа (одномерное уравнение переноса).	35
7	Тест сходимости полулагранжевого метода (одномерное уравнение переноса).	35
8	Ошибка полулагранжевого методы по отношению к закону сохранения масс одномерного теста (число Куранта 2.5).	37
9	Ошибка полулагранжевого методы по отношению к закону сохранения масс двумерного теста (число Куранта 0.7).	37
10	Название таблицы	50
11	50
12	Наименование таблицы, очень длинное наименование таблицы, чтобы посмотреть как оно будет располагаться на нескольких строках и переноситься	50
13	Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ	51
14	Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч	53
15	Наименование таблицы средней длины	74
16	Тестовые функции для оптимизации, D — размерность. Для всех функций значение в точке глобального минимума равно нулю.	78
17	Длинная таблица с примером чересстрочного форматирования	82

Приложение А

Примеры вставки листингов программного кода

Для крупных листингов есть два способа. Первый красивый, но в нём могут быть проблемы с поддержкой кириллицы (у вас может встречаться в комментариях и печатаемых сообщениях), он представлен на листинге [A.1](#). Второй

Листинг A.1 Программа “Hello, world” на C++

```

5  #include <iostream>
    using namespace std;

    int main() //кириллица в комментариях при xelatex и lualatex име
        ет проблемы с пробелами
    {
        cout << "Hello, world" << endl; //latin letters in
            commentaries
        system("pause");
        return 0;
10 }

```

не такой красивый, но без ограничений (см. листинг [A.2](#)).

Листинг A.2 Программа “Hello, world” без подсветки

```

#include <iostream>
using namespace std;

int main() //кириллица в комментариях
{
    cout << "Привет, мир" << endl;
}

```

Можно использовать первый для вставки небольших фрагментов внутри текста, а второй для вставки полного кода в приложении, если таковое имеется.

Если нужно вставить совсем короткий пример кода (одна или две строки), то выделение линейками и нумерация может смотреться чересчур громоздко. В таких случаях можно использовать окружения `lstlisting` или `Verb` без

ListingEnv. Приведём такой пример с указанием языка программирования, отличного от заданного по умолчанию:

```
| fibs = 0 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)
```

Такое решение — со вставкой нумерованных листингов покрупнее и вставок без выделения для маленьких фрагментов — выбрано, например, в книге Эндрю Таненбаума и Тодда Остина по архитектуре

Наконец, для оформления идентификаторов внутри строк (функция `main` и тому подобное) используется `lstinline` или, самое простое, моноширинный текст (`\texttt`).

Пример A.3, иллюстрирующий подключение переопределённого языка. Может быть полезным, если подсветка кода работает криво. Без дополнительного окружения, с подписью и ссылкой, реализованной встроенным средством.

Листинг A.3 Пример листинга с подписью собственными средствами

```
## Caching the Inverse of a Matrix

## Matrix inversion is usually a costly computation and there may
## be some
5 ## benefit to caching the inverse of a matrix rather than compute
## it repeatedly
## This is a pair of functions that cache the inverse of a matrix.

## makeCacheMatrix creates a special "matrix" object that can
## cache its inverse

10 makeCacheMatrix <- function(x = matrix()) {#кириллица в комментари
  ях при xelatex и lualatex имеет проблемы с пробелами
  i <- NULL
  set <- function(y) {
    x <<- y
    i <<- NULL
15   }
  get <- function() x
  setSolved <- function(solve) i <<- solve
  getSolved <- function() i
  list(set = set, get = get,
20   setSolved = setSolved,
  getSolved = getSolved)

}
```

```

25  ## cacheSolve computes the inverse of the special "matrix"
    ## returned by
    ## makeCacheMatrix above. If the inverse has already been
    ## calculated (and the
    ## matrix has not changed), then the cachesolve should retrieve
    ## the inverse from
    ## the cache.
30  cacheSolve <- function(x, ...) {
    ## Return a matrix that is the inverse of 'x'
    i <- x$getSolved()
    if(!is.null(i)) {
35      message("getting cached data")
      return(i)
    }
    data <- x$get()
    i <- solve(data, ...)
40    x$setSolved(i)
    i
  }

```

Листинг A.4 подгружается из внешнего файла. Приходится загружать без окружения дополнительного. Иначе по страницам не переносится.

Листинг A.4 Листинг из внешнего файла

```

# Analysis of data on Course Project at Getting and Cleaning data
# course of Data Science track at Coursera.

# Part 1. Merges the training and the test sets to create one data
# set.
5 # 3. Uses descriptive activity names to name the activities in the
  # data set
# 4. Appropriately labels the data set with descriptive variable
  # names.

if (!file.exists("UCI HAR Dataset")) {
  stop("You need 'UCI HAR Dataset' folder full of data")
10 }

library(plyr) # for mapvalues
15

```

```

#getting common data
features <- read.csv("UCI HAR Dataset/features.txt", sep=" ",
  header = FALSE,
                        colClasses = c("numeric", "character"))
activity_labels <- read.csv("UCI HAR Dataset/activity_labels.txt",
  sep="",
20      header = FALSE, colClasses = c("numeric",
                                     "character"))

#getting train set data
subject_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/subject_train.txt",
  ",
                        header = FALSE, colClasses = "numeric",
                        col.names="Subject")
25 y_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/y_train.txt", header =
  FALSE,
                        colClasses = "numeric")
x_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/X_train.txt", sep="",
  header = FALSE,
                        colClasses = "numeric", col.names=features$V2,
                        check.names = FALSE)

30 activity_train <- as.data.frame(mapvalues(y_train$V1, from =
  activity_labels$V1,
                                     to = activity_labels$V2)
                                )

names(activity_train) <- "Activity"

35 #getting test set data
subject_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/subject_test.txt",
  header = FALSE, colClasses = "numeric", col
                        .names="Subject")
y_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/y_test.txt", header =
  FALSE,
40      colClasses = "numeric")
x_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/X_test.txt", sep="",
  header = FALSE,
                        colClasses = "numeric", col.names=features$V2,
                        check.names = FALSE)

```

```

activity_test <- as.data.frame(mapvalues(y_test$V1, from =
  activity_labels$V1,
45                                     to = activity_labels$V2))
names(activity_test) <- "Activity"

# Forming full dataframe
50 data_train <- cbind(x_train, subject_train, activity_train)
data_test <- cbind(x_test, subject_test, activity_test)
data <- rbind(data_train, data_test)

# Cleaning memory
55 rm(features, activity_labels, subject_train, y_train, x_train,
    activity_train,
    subject_test, y_test, x_test, activity_test, data_train, data_
    test)

# Part 2. Extracts only the measurements on the mean and standard
    deviation for each measurement.
60 cols2match <- grep("(mean|std)", names(data))

# Excluded gravityMean, tBodyAccMean, tBodyAccJerkMean,
    tBodyGyroMean,
# tBodyGyroJerkMean, as these represent derivations of angle data,
    as
65 # opposed to the original feature vector.

# Subsetting data frame, also moving last columns to be first
Subsetted_data_frame <- data[, c(562, 563, cols2match)]

70 # Part 5. From the data set in step 4, creates a second,
    independent tidy data set
# with the average of each variable for each activity and each
    subject.

library(dplyr) # for %>% and summarise_each

75 tidydata <- Subsetted_data_frame %>% group_by(Subject, Activity)
    %>%
    summarise_each(funs(mean))

```

```
write.table(tidydata, "tidydata.txt", row.names=FALSE)
```


Приложение Б

Очень длинное название второго приложения, в котором продемонстрирована работа с длинными таблицами

Б.1 Подраздел приложения

Вот размещается длинная таблица:

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)

продолжение следует

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора

продолжение следует

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars	0	int	экватора
kick	1	int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Б.2 Ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

Пример длинной таблицы с записью продолжения по ГОСТ 2.105

Таблица 15 — Наименование таблицы средней длины

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора

Продолжение таблицы 15

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума

Продолжение таблицы 15

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Продолжение таблицы 15

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Б.3 Использование длинных таблиц с окружением *longtabu*

В таблице 16 более книжный вариант длинной таблицы, используя окружение `longtabu` и разнообразные `toprule` `midrule` `bottomrule` из пакета

booktabs. Чтобы визуально таблица смотрелась лучше, можно использовать следующие параметры: в самом начале задаётся расстояние между строчками с помощью `arraystretch`. Таблица задаётся на всю ширину, `longtabu` позволяет делить ширину колонок пропорционально — тут три колонки в пропорции 1.1:1:4 — для каждой колонки первый параметр в описании `X[]`. Кроме того, в таблице убраны отступы слева и справа с помощью `@{ }` в преамбуле таблицы. К первому и второму столбцу применяется модификатор

`>\setlength{\baselineskip}{0.7\baselineskip}},`

который уменьшает межстрочный интервал в для текста таблиц (иначе заголовки второго столбца значительно шире, а двухстрочное имя сливается с окружающими). Для первой и второй колонки текст в ячейках выравнивается по центру как по вертикали, так и по горизонтали — задаётся буквами `m` и `c` в описании столбца `X[]`.

Так как формулы большие — используется окружение `alignedat`, чтобы отступ был одинаковый у всех формул — он сделан для всех, хотя для большей части можно было и не использовать. Чтобы формулы занимали меньше места в каждом столбце формулы (где надо) используется `\textstyle` — он делает дроби меньше, у знаков суммы и произведения — индексы сбоку. Иногда формулы слишком большая, сливается со следующей, поэтому после неё ставится небольшой дополнительный отступ `\vspace*{2ex}`. Для штрафных функций — размер фигурных скобок задан вручную `\Big\{`, т.к. не умеет `alignedat` работать с `\left` и `\right` через несколько строк/колонок.

В примечании к таблице наоборот, окружение `cases` даёт слишком большие промежутки между вариантами, чтобы их уменьшить, в конце каждой строчки окружения использовался отрицательный дополнительный отступ `\[-0.5em]`.

Таблица 16 — Тестовые функции для оптимизации, D — размерность. Для всех функций значение в точке глобального минимума равно нулю.

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
сфера	$[-100, 100]^D$	$f_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$

продолжение следует

(продолжение)

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
Schwefel 2.22	$[-10, 10]^D$	$f_2(x) = \sum_{i=1}^D x_i + \prod_{i=1}^D x_i $
Schwefel 1.2	$[-100, 100]^D$	$f_3(x) = \sum_{i=1}^D \left(\sum_{j=1}^i x_j \right)^2$
Schwefel 2.21	$[-100, 100]^D$	$f_4(x) = \max_i \{ x_i \}$
Rosenbrock	$[-30, 30]^D$	$f_5(x) = \sum_{i=1}^{D-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \right]$
ступенчатая	$[-100, 100]^D$	$f_6(x) = \sum_{i=1}^D \lfloor x_i + 0.5 \rfloor^2$
зашумлённая квартичная	$[-1.28, 1.28]^D$	$f_7(x) = \sum_{i=1}^D i x_i^4 + rand[0,1)$
Schwefel 2.26	$[-500, 500]^D$	$f_8(x) = \sum_{i=1}^D -x_i \sin \sqrt{ x_i } +$ $+ D \cdot 418.98288727243369$
Rastrigin	$[-5.12, 5.12]^D$	$f_9(x) = \sum_{i=1}^D [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10]$
Ackley	$[-32, 32]^D$	$f_{10}(x) = -20 \exp \left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2} \right) -$ $-\exp \left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i) \right) + 20 + e$
Griewank	$[-600, 600]^D$	$f_{11}(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos(x_i/\sqrt{i}) + 1$
штрафная 1	$[-50, 50]^D$	$f_{12}(x) = \frac{\pi}{D} \left\{ 10 \sin^2(\pi y_1) + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{D-1} (y_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi y_{i+1})] + \right.$ $\left. + (y_D - 1)^2 \right\} + \sum_{i=1}^D u(x_i, 10, 100, 4)$
штрафная 2	$[-50, 50]^D$	$f_{13}(x) = 0.1 \left\{ \sin^2(3\pi x_1) + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{D-1} (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})] + \right.$ $\left. + (x_D - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi x_D)] \right\} +$ $+ \sum_{i=1}^D u(x_i, 5, 100, 4)$

продолжение следует

(продолжение)

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
сфера	$[-100, 100]^D$	$f_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$
Schwefel 2.22	$[-10, 10]^D$	$f_2(x) = \sum_{i=1}^D x_i + \prod_{i=1}^D x_i $
Schwefel 1.2	$[-100, 100]^D$	$f_3(x) = \sum_{i=1}^D \left(\sum_{j=1}^i x_j \right)^2$
Schwefel 2.21	$[-100, 100]^D$	$f_4(x) = \max_i \{ x_i \}$
Rosenbrock	$[-30, 30]^D$	$f_5(x) = \sum_{i=1}^{D-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \right]$
ступенчатая	$[-100, 100]^D$	$f_6(x) = \sum_{i=1}^D \lfloor x_i + 0.5 \rfloor^2$
зашумлённая квартичная	$[-1.28, 1.28]^D$	$f_7(x) = \sum_{i=1}^D ix_i^4 + rand[0,1)$
Schwefel 2.26	$[-500, 500]^D$	$f_8(x) = \sum_{i=1}^D -x_i \sin \sqrt{ x_i } +$ $+ D \cdot 418.98288727243369$
Rastrigin	$[-5.12, 5.12]^D$	$f_9(x) = \sum_{i=1}^D [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10]$
Ackley	$[-32, 32]^D$	$f_{10}(x) = -20 \exp \left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2} \right) -$ $- \exp \left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i) \right) + 20 + e$
Griewank	$[-600, 600]^D$	$f_{11}(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos(x_i / \sqrt{i}) + 1$
штрафная 1	$[-50, 50]^D$	$f_{12}(x) = \frac{\pi}{D} \left\{ 10 \sin^2(\pi y_1) + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{D-1} (y_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi y_{i+1})] + \right.$ $\left. + (y_D - 1)^2 \right\} + \sum_{i=1}^D u(x_i, 10, 100, 4)$

продолжение следует

(окончание)

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
штрафная 2	$[-50, 50]^D$	$f_{13}(x) = 0.1 \left\{ \sin^2(3\pi x_1) + \right.$ $+ \sum_{i=1}^{D-1} (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})] +$ $+ (x_D - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi x_D)] \left. \right\} +$ $+ \sum_{i=1}^D u(x_i, 5, 100, 4)$
<p>Примечание — Для функций f_{12} и f_{13} используется $y_i = 1 + \frac{1}{4}(x_i + 1)$ и</p> $u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m, & x_i > a \\ 0, & -a \leq x_i \leq a \\ k(-x_i - a)^m, & x_i < -a \end{cases}$		

Б.4 Форматирование внутри таблиц

В таблице 17 пример с чересстрочным форматированием. В `userstyles.tex` задаётся счётчик `\newcounter{rowcnt}` который увеличивается на 1 после каждой строчки (как указано в преамбуле таблицы). Кроме того, задаётся условный макрос `\altshape` который выдаёт одно из двух типов форматирования в зависимости от чётности счётчика.

В таблице 17 каждая чётная строчка — синяя, нечётная — с наклоном и слегка поднята вверх. Визуально это приводит к тому, что среднее значение и среднеквадратичное изменение группируются и хорошо выделяются взглядом в таблице. Сохраняется возможность отдельные значения в таблице выделить цветом или шрифтом. К первому и второму столбцу форматирование не применяется по сути таблицы, к шестому общее форматирование не применяется для наглядности.

Так как заголовок таблицы тоже считается за строчку, то перед ним (для первого, промежуточного и финального варианта) счётчик обнуляется, а в `\altshape` для нулевого значения счётчика форматирования не применяется.

Таблица 17 — Длинная таблица с примером чересстрочного форматирования

	Итерации	JADE++	JADE	jDE	SaDE	DE/rand /1/bin	PSO
f1	1500	1.8E-60 (8.4E-60)	1.3E-54 (9.2E-54)	2.5E-28 (3.5E-28)	4.5E-20 (6.9E-20)	9.8E-14 (8.4E-14)	9.6E-42 (2.7E-41)
f2	2000	1.8E-25 (8.8E-25)	3.9E-22 (2.7E-21)	1.5E-23 (1.0E-23)	1.9E-14 (1.1E-14)	1.6E-09 (1.1E-09)	9.3E-21 (6.3E-20)
f3	5000	5.7E-61 (2.7E-60)	6.0E-87 (1.9E-86)	5.2E-14 (1.1E-13)	9.0E-37 (5.4E-36)	6.6E-11 (8.8E-11)	2.5E-19 (3.9E-19)
f4	5000	8.2E-24 (4.0E-23)	4.3E-66 (1.2E-65)	1.4E-15 (1.0E-15)	7.4E-11 (1.8E-10)	4.2E-01 (1.1E+00)	4.4E-14 (9.3E-14)
f5	3000	8.0E-02 (5.6E-01)	3.2E-01 (1.1E+00)	1.3E+01 (1.4E+01)	2.1E+01 (7.8E+00)	2.1E+00 (1.5E+00)	2.5E+01 (3.2E+01)
f6	100	2.9E+00 (1.2E+00)	5.6E+00 (1.6E+00)	1.0E+03 (2.2E+02)	9.3E+02 (1.8E+02)	4.7E+03 (1.1E+03)	4.5E+01 (2.4E+01)
f7	3000	6.4E-04 (2.5E-04)	6.8E-04 (2.5E-04)	3.3E-03 (8.5E-04)	4.8E-03 (1.2E-03)	4.7E-03 (1.2E-03)	2.5E-03 (1.4E-03)
f8	1000	3.3E-05 (2.3E-05)	7.1E+00 (2.8E+01)	7.9E-11 (1.3E-10)	4.7E+00 (3.3E+01)	5.9E+03 (1.1E+03)	2.4E+03 (6.7E+02)
f9	1000	1.0E-04 (6.0E-05)	1.4E-04 (6.5E-05)	1.5E-04 (2.0E-04)	1.2E-03 (6.5E-04)	1.8E+02 (1.3E+01)	5.2E+01 (1.6E+01)
f10	500	8.2E-10 (6.9E-10)	3.0E-09 (2.2E-09)	3.5E-04 (1.0E-04)	2.7E-03 (5.1E-04)	1.1E-01 (3.9E-02)	4.6E-01 (6.6E-01)
f11	500	9.9E-08 (6.0E-07)	2.0E-04 (1.4E-03)	1.9E-05 (5.8E-05)	7.8E-04 (1.2E-03)	2.0E-01 (1.1E-01)	1.3E-02 (1.7E-02)
f12	500	4.6E-17 (1.9E-16)	3.8E-16 (8.3E-16)	1.6E-07 (1.5E-07)	1.9E-05 (9.2E-06)	1.2E-02 (1.0E-02)	1.9E-01 (3.9E-01)
f13	500	2.0E-16 (6.5E-16)	1.2E-15 (2.8E-15)	1.5E-06 (9.8E-07)	6.1E-05 (2.0E-05)	7.5E-02 (3.8E-02)	2.9E-03 (4.8E-03)
f1	1500	1.8E-60 (8.4E-60)	1.3E-54 (9.2E-54)	2.5E-28 (3.5E-28)	4.5E-20 (6.9E-20)	9.8E-14 (8.4E-14)	9.6E-42 (2.7E-41)
f2	2000	1.8E-25 (8.8E-25)	3.9E-22 (2.7E-21)	1.5E-23 (1.0E-23)	1.9E-14 (1.1E-14)	1.6E-09 (1.1E-09)	9.3E-21 (6.3E-20)
f3	5000	5.7E-61 (2.7E-60)	6.0E-87 (1.9E-86)	5.2E-14 (1.1E-13)	9.0E-37 (5.4E-36)	6.6E-11 (8.8E-11)	2.5E-19 (3.9E-19)

продолжение следует

(окончание)

Итерации		JADE++	JADE	jDE	SaDE	DE/rand /1/bin	PSO
f4	5000	8.2E-24 (4.0E-23)	4.3E-66 (1.2E-65)	1.4E-15 (1.0E-15)	7.4E-11 (1.8E-10)	4.2E-01 (1.1E+00)	4.4E-14 (9.3E-14)
f5	3000	8.0E-02 (5.6E-01)	3.2E-01 (1.1E+00)	1.3E+01 (1.4E+01)	2.1E+01 (7.8E+00)	2.1E+00 (1.5E+00)	2.5E+01 (3.2E+01)
f6	100	2.9E+00 (1.2E+00)	5.6E+00 (1.6E+00)	1.0E+03 (2.2E+02)	9.3E+02 (1.8E+02)	4.7E+03 (1.1E+03)	4.5E+01 (2.4E+01)
f7	3000	6.4E-04 (2.5E-04)	6.8E-04 (2.5E-04)	3.3E-03 (8.5E-04)	4.8E-03 (1.2E-03)	4.7E-03 (1.2E-03)	2.5E-03 (1.4E-03)
f8	1000	3.3E-05 (2.3E-05)	7.1E+00 (2.8E+01)	7.9E-11 (1.3E-10)	4.7E+00 (3.3E+01)	5.9E+03 (1.1E+03)	2.4E+03 (6.7E+02)
f9	1000	1.0E-04 (6.0E-05)	1.4E-04 (6.5E-05)	1.5E-04 (2.0E-04)	1.2E-03 (6.5E-04)	1.8E+02 (1.3E+01)	5.2E+01 (1.6E+01)
f10	500	8.2E-10 (6.9E-10)	3.0E-09 (2.2E-09)	3.5E-04 (1.0E-04)	2.7E-03 (5.1E-04)	1.1E-01 (3.9E-02)	4.6E-01 (6.6E-01)
f11	500	9.9E-08 (6.0E-07)	2.0E-04 (1.4E-03)	1.9E-05 (5.8E-05)	7.8E-04 (1.2E-03)	2.0E-01 (1.1E-01)	1.3E-02 (1.7E-02)
f12	500	4.6E-17 (1.9E-16)	3.8E-16 (8.3E-16)	1.6E-07 (1.5E-07)	1.9E-05 (9.2E-06)	1.2E-02 (1.0E-02)	1.9E-01 (3.9E-01)
f13	500	2.0E-16 (6.5E-16)	1.2E-15 (2.8E-15)	1.5E-06 (9.8E-07)	6.1E-05 (2.0E-05)	7.5E-02 (3.8E-02)	2.9E-03 (4.8E-03)

Б.5 Очередной подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

Б.6 И ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!