

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

Е.В. Панкратова

**СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ
ПРОЦЕССОВ В СЕТЯХ НЕЙРОДИНАМИЧЕСКИХ
ЭЛЕМЕНТОВ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных
технологий, математики и механики для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2016

УДК 519.6, 530.182

ББК В 22.311

П 16

П 16 Панкратова Е.В. Синхронизация хаотических колебательных процессов в сетях нейродинамических элементов: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. — 54 с.

Рецензент: к.ф.-м.н. **О.И. Канаков**

При изучении коллективной динамики ансамблей колебательных систем важное значение имеют задачи, связанные с исследованием особенностей их синхронного взаимодействия. В настоящее время известно, что синхронизация элементов со сложной динамикой может проявляться по-разному: в возникновении некоторой функциональной зависимости векторов состояний связанных подсистем (обобщенная синхронизация), в установлении определенных соотношений между фазами колебаний (фазовая синхронизация) и др. К наиболее строгому типу синхронного поведения относят полную синхронизацию, при которой полностью исчезают различия в динамическом поведении всех идентичных подсистем, связанных в ансамбль. Цель данного пособия — дать представление о современных математических подходах и методах изучения явления полной синхронизации и их использовании при исследовании нейродинамических систем определенных архитектур. Пособие предназначено для студентов института ИТММ ННГУ, специализирующихся в области математического моделирования. Рекомендуется при изучении дисциплин «Математические модели нейродинамики», «Приложения вычислительной математики», «Математическое моделирование». Для успешного усвоения материала необходимо предварительное изучение дисциплины «Дифференциальные уравнения».

Ответственный за выпуск: председатель методической комиссии
института информационных технологий, математики и механики ННГУ
к.ф.-м.н., доцент **О.А. Кузенков**

УДК 537.86, 530.182

ББК В 312.2

© **Е.В. Панкратова, 2016**

© **Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, 2016**

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Математические модели нейродинамических систем	7
1.1. Описание модели Ходжкина-Хаксли	7
1.1.1. Изменение калиевой проводимости	8
1.1.2. Изменение натриевой проводимости	9
1.1.3. Изменение мембранного потенциала	9
1.2. Система уравнений Моррис-Лекара	12
1.3. Система уравнений ФитцХью-Ринцеля	14
1.4. Система уравнений Хиндмарша-Роуза	15
Контрольные вопросы и упражнения	16
Глава 2. Синхронизация взаимодействующих хаотических систем	17
2.1. Фазовая синхронизация	17
2.2. Обобщенная синхронизация	19
2.3. Полная хаотическая синхронизация	20
2.3.1. Синхронное многообразие	20
2.3.2. Порог полной синхронизации хаотических колебаний	21
2.4. Синхронизация с запаздыванием	21
Контрольные вопросы и упражнения	22
Глава 3. Использование методов численного анализа для диагностики перехода к синхронному режиму колебаний	23
3.1. Хаотическая синхронизация двух элементов Ходжкина-Хаксли .	24
3.1.1. Однонаправленная связь	25
3.1.2. Взаимная синхронизация	25
3.1.3. Синхронизация шумом	26
Контрольные вопросы и упражнения	27
Глава 4. Аналитические методы изучения устойчивости режима полной синхронизации	29
4.1. Определение спектра собственных значений матрицы связи . . .	29
4.2. Метод связного графа	30

4.2.1. Основные положения	31
4.2.2. Диссипативность структурных элементов	34
4.2.3. Масштабирующий множитель	35
4.2.4. Влияние общего шумового поля	37
Контрольные вопросы и упражнения	38
Глава 5. Примеры сетевых конфигураций	39
5.1. Цепочка последовательно связанных элементов	40
5.1.1. Неоднородно связанные осцилляторы	42
5.1.2. Однородно связанные осцилляторы	43
5.1.3. Влияние шумов	43
5.2. Многослойные структуры нейронных сетей	45
5.2.1. Сети, содержащие структуры типа «звезда»	45
5.2.2. Многослойная сеть, определяющая граф с постоянной степенью вершин	46
Контрольные вопросы и упражнения	47
Литература	48

Введение

Нервная система и мозг любого животного состоят из нейронов, соединенных между собой нервными волокнами, способными передавать электрические импульсы. При этом прямое отношение к передаче электрических сигналов имеют два типа отростков нервных клеток: *аксоны* клеток обеспечивают проведение импульса и передачу воздействия на соседние нервные клетки, входные волокна которых, называемые *дендритами*, собирают передаваемую таким образом информацию. Специализированная зона контакта между отростками, обеспечивающая передачу информационного сигнала, называется *синапсом*, рис. 1. Поступившие к нейрону одновременно по нескольким дендритам импульсы суммируются. В результате, если суммарный импульс превышает некоторый порог, нейрон формирует собственный импульс и передает его далее по аксону. Таким образом, для дальнейшей передачи информации по сети необходимо одновременное поступление на клетку нескольких импульсов. В противном случае суммарный импульс не сможет достигнуть порогового значения и, следовательно, не сможет вызвать отклик нейрона.

Продолжительность передачи возбуждения от клетки к клетке зависит от типа нейрона и его расположения. Из экспериментальных работ известно, что на распространение импульса по аксонам клеток неокортекса млекопитающих может требоваться от 0.1 мс до 40 мс [1].

Очевидно, что одновременное поступление на клетку нескольких импульсов возможно как в результате асинхронной генерации пресинаптических клеток, так и их синхронной активности. В первом случае, как показано в работе [2], передача импульсов происходит при условии, что время распространения импульса по аксонам пресинаптических клеток различно. Обработка информации при этом связана с особенностями так называемого полихронного поведения элементов сети [2]. Для нейронных сетей с малым временем аксонных задержек, или с одинаковым для всех клеток временем, обработка информации

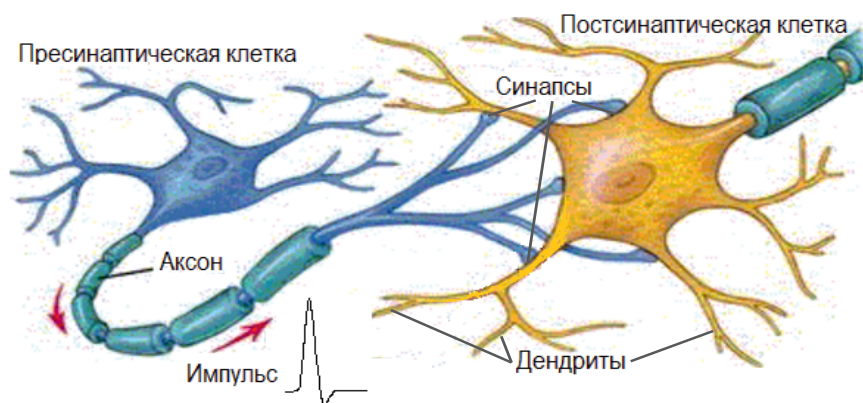


Рис. 1. Схематичное изображение передачи электрического импульса между клетками

нейронами связана с возникновением в сети определенных видов синхронного поведения клеток.

Изучению проблемы генерации электрических импульсов нейронными популяциями, в частности их синхронной активности, посвящен целый ряд как теоретических [3]–[13], так и экспериментальных научных работ [14]–[19]. Показано, что синхронная генерация электрических импульсов характерна для нейронных популяций в различных областях мозга. В частности, генерация таких жизненно важных ритмов как дыхание, осуществляется сетью синаптически связанных пейсмекерных нейронов в нижней части ствола мозга [14]. Синхронное возбуждение различных нейронных популяций является типичным механизмом восприятия визуальных [15], обонятельных [16] или тактильных [17] раздражений. С другой стороны, синхронизация нейронной активности может способствовать возникновению патологического тремора [18] и играет важную роль в таких серьезных неврологических заболеваниях как эпилепсия [19]. В связи с этим, проблема исследования синхронной активности клеток в различных, в том числе изменяющихся во времени, нейронных структурах представляет собой одну из центральных проблем нейробиологии.

В настоящее время имеются всесторонние обзоры и книги по теории синхронизации хаотических систем¹ (например, [20]–[22]), поэтому в данном пособии основные понятия и методы изучения коллективного поведения элементов со сложной динамикой приведены кратко, в объеме, позволяющем ознакомить читателя с математической постановкой и методами анализа характера популяционной динамики в контексте нейродинамических задач. Основное внимание при этом уделяется методам изучения *полной хаотической синхронизации*, при которой различия в динамическом поведении структурных элементов сети полностью исчезают.

В первой главе дано описание моделей нейродинамических систем, часто используемых при изучении особенностей хаотической нейросетевой динамики. Во второй главе приведены основные понятия, используемые при изучении поведения нейроподобных элементов и позволяющие определить тип установившегося синхронного поведения в сети. В третьей главе даны критерии и методы численного анализа степени синхронизации подсистем, в четвертой главе изложены методы получения аналитических оценок для порога связи, обеспечивающего установление полной синхронизации в сети заданной архитектуры. Примеры различных сетевых конфигураций рассмотрены в пятой главе пособия. Для организации самостоятельной работы студентов в конце каждой из глав имеются контрольные вопросы и упражнения.

¹*Хаотические динамические системы* — это системы, для которых характерны неустойчивость фазовых траекторий, рост малого начального возмущения во времени, перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие, непредсказуемость поведения системы на больших временах [22].

Глава 1. Математические модели нейродинамических систем

Нелинейные нейродинамические модели, которые строятся для объяснения обнаруживаемых в экспериментах различных явлений, а также для предсказания новых возможных эффектов, в значительной степени зависят от того нейрофизиологического эксперимента, на который они опираются. Так, для описания нейронов центральных генераторов ритма, управляющих ритмическими движениями живых организмов [3], часто используются варианты классической модели Ходжкина-Хаксли [23]. Изначально эта модель была предложена для описания экспериментально наблюдаемой кинетики изменений натриевой и калиевой проводимости при различных смещениях мембранного потенциала¹ в аксоне кальмара [24]. Это нервное волокно достигает толщины 0.5 — 1 мм — что в сотни раз превышает толщину нервных волокон млекопитающих — и представляет собой очень удобный объект исследований. Но, как известно, мембрана, окружающая нервную клетку, обладает такими же свойствами, как мембрана нервного волокна. В частности, здесь действуют те же самые механизмы формирования и распространения импульса, основанные на изменении избирательной проницаемости мембраны по отношению к различным ионам. Поэтому в научной литературе о модели Ходжкина-Хаксли иногда пишут как о модели нервной клетки. Более того, так как у самых различных животных сигналы, передаваемые по нервам, имеют много общих черт, то результаты, полученные в рамках одной модели (или в эксперименте на одном препарате), часто приобретают гораздо более общее значение [25]. В связи с этим, модель Ходжкина-Хаксли, являясь классической моделью математического описания поведения нервной клетки, часто используется при исследовании нейронной активности.

1.1. Описание модели Ходжкина-Хаксли

Возникновение нервного импульса² в рамках модели Ходжкина-Хаксли обусловлено усилением потока определенных ионов, главным образом, ионов Na^+ и K^+ , через мембрану клетки. При этом предполагается, что проводимость

¹Мембранным потенциалом называют разность электрических потенциалов между внутренней и наружной поверхностями биологической мембраны живых клеток, обусловленную неодинаковой концентрацией ионов в цитоплазме и внеклеточной жидкости.

²Переход из состояния физиологического покоя в состояние активности нервной клетки обусловлен возникновением ионных токов, что естественно приводит к изменению разности потенциалов на поверхности мембраны. Это изменение мембранного потенциала называется *потенциалом действия* (нервным импульсом, спайком).

для этих ионов регулируется некоторыми управляющими частицами, перемещающимися в мембране при изменениях электрического поля, и тем самым увеличивающие или уменьшающие потоки ионов Na^+ и K^+ через каналы³. Такое перемещение можно представить в виде перескоков положительно заряженных частиц между двумя потенциальными ямами через энергетический барьер с константами скоростей α и β , которые зависят от высоты энергетического барьера и, следовательно, являются потенциалозависимыми, рис. 1.1. В частности, повышение электрического потенциала с левой стороны мембраны приводит к увеличению константы α [27].

При ступенчатом изменении разности потенциалов на мембране происходит перераспределение частиц между двумя состояниями. При этом изменяются до новых равновесных значений вероятности заполнения правой и левой потенциальных ям: x и $(1-x)$ соответственно. Процесс изменения вероятности x заполнения правой ямы после ступенчатого сдвига потенциала может быть описан дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(1-x) - \beta x. \quad (1.1)$$

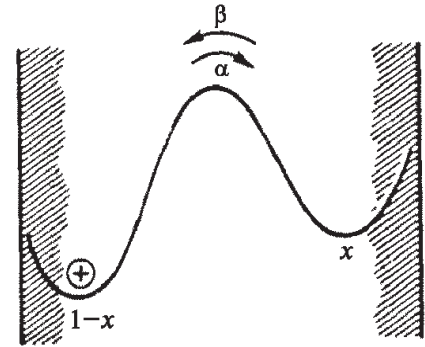


Рис. 1.1. Модель, демонстрирующая перемещение заряженных частиц в мембране при изменении электрического поля [27]

1.1.1. Изменение калиевой проводимости

Наилучшее соответствие кинетической кривой калиевой проводимости в аксоне кальмара достигается при допущении, что для открывания калиевых каналов необходим приход к определенному участку мембраны четырех активирующих частиц.

Пусть n – вероятность того, что одна частица, управляющая K^+ -проницаемостью, находится в правой части мембраны. Тогда вероятность p того, что там находится одновременно четыре частицы, равна n^4 . Поэтому K^+ -проводимость мембраны в любой момент времени равна:

$$g_K = G_K n^4, \quad (1.2)$$

где G_K – максимальная проводимость ионов калия, изменение во времени ве-

³Существование отдельных каналов для переноса ионов Na^+ и K^+ через мембрану клетки и некоторых гипотетических заряженных частиц во внутренней структуре мембраны, управляющих проводимостью этих каналов, – основные постулаты модели Ходжкина-Хаксли [26].

роятности n определяется уравнением:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n. \quad (1.3)$$

1.1.2. Изменение натриевой проводимости

Кинетические кривые натриевой проводимости имеют более сложную форму: сначала проводимость нарастает до максимума - активация, а затем снижается - инактивация.

Изменения натриевой проводимости удалось описать на основе предположения о наличии активирующих m -частиц и инактивирующих h -частиц. Предполагают, что для открывания канала необходимо поступление в определенный участок мембраны трех m -частиц. Переход через мембрану одной инактивирующей частицы вызывает блокировку канала. Таким образом, значение Na^+ -проводимости получают следующим образом:

$$g_{Na} = G_{Na} m^3 h, \quad (1.4)$$

где G_{Na} - максимальная проводимость ионов натрия, m - вероятность нахождения в заданном участке мембраны одной m -частицы, h - вероятность того, что инактивирующая частица в этом участке отсутствует. Кинетика перераспределения частиц через мембрану при наложении электрического поля описывается однотипными уравнениями:

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m m; \quad \frac{dh}{dt} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h h. \quad (1.5)$$

В результате анализа кинетических кривых активации и инактивации Аланом Ходжкиным (Alan Lloyd Hodgkin) и Эндрю Хаксли (Andrew Fielding Huxley) были построены графические зависимости скоростей $\alpha_m, \beta_m, \alpha_n, \beta_n, \alpha_h, \beta_h$ от мембранного потенциала V и подобраны эмпирические соотношения, описывающие ход указанных зависимостей [24].

1.1.3. Изменение мембранного потенциала

Для описания изменений мембранного потенциала часто используют подход, основанный на представлении ионных проводимостей мембраны в виде эквивалентной электрической цепи [24], [28].

Независимость изменений проницаемости мембраны для разных ионов обозначена на схеме, рис. 1.2, тремя ионными «батареями», каждая из которых последовательно соединена с сопротивлением, соответствующим проницае-

мости для данного иона. В натриевый и калиевый каналы включены переменные сопротивления $R_{Na} = 1/g_{Na}$ и $R_K = 1/g_K$. Батарея V_L и сопротивление утечки $R_L = 1/g_L$ отражают наличие незначительного обмена других ионов - утечку, которая мало влияет на проводимость покоей мембраны гигантского аксона. Батарея утечки и калиевая батарея V_K обращены на схеме своими положительными полюсами к наружной стороне мембраны. Натриевая батарея V_{Na} ориентирована в противоположном направлении. При уменьшении сопротивления по Na^+ во время возбуждения натриевая батарея переносит положительный заряд (Na^+) внутрь клетки. При работе натриевой батареи внутренняя среда клетки заряжается положительно.

В состоянии покоя ток через мембрану не течет. Если потенциал на мембране сместить от уровня потенциала покоя в сторону деполяризации, то проницаемости Na^+ и K^+ каналов изменяются определенным образом от одного стационарного состояния к другому. В этом случае в каждом из параллельно соединенных участков текут токи, пропорциональные разности между равновесным потенциалом⁴ иона V_i и поддерживаемым на мембране потенциалом V :

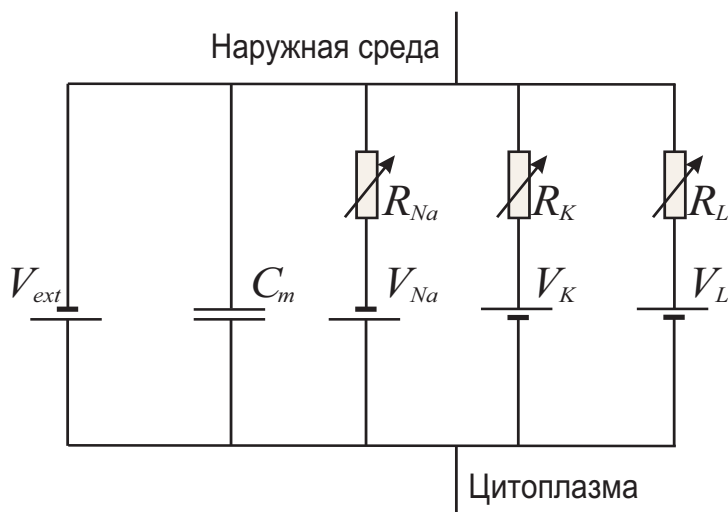


Рис. 1.2. Эквивалентная схема мембраны нервного волокна [28]

$$I_i = g_i(V - V_i), \quad (1.6)$$

где g_i - проводимость мембраны для данного вида ионов.

⁴Равновесным потенциалом называют разность потенциалов, при которой наступает равновесие между выходом определенных ионов по концентрационному градиенту и их входом по возникшему электрическому градиенту. Его величина может быть рассчитана из уравнения Нернста:

$$V_K = \frac{RT}{nF} \ln \frac{[K_{out}^+]}{[K_{in}^+]},$$

где V_K - равновесный потенциал для K^+ , например, $R = 8.314$ Дж/(моль·К) - универсальная газовая постоянная, T - абсолютная температура, $F = 96485$ Кл/моль - число Фарадея, n - валентность K^+ (+1), $[K_{out}^+]$ и $[K_{in}^+]$ - наружная и внутренняя концентрации ионов калия.

В частности, если перейти от натуральных логарифмов к десятичным и подставить в уравнение числовые значения констант, то равновесный потенциал для ионов калия при $T = 310^\circ K (37^\circ C)$ будет определяться выражением:

$$V_K \approx 61.5 \log \frac{[K_{out}^+]}{[K_{in}^]}.$$

Общий ток через мембрану I_{tot} равен сумме емкостного тока и ионного тока, обусловленного движением ионов по отдельным путям:

$$I_{tot} = C_m \frac{dV}{dt} + I_{ion} + I_{ext}, \quad (1.7)$$

где параметр C_m характеризует электрическую емкость мембраны, V - мембранный потенциал, $I_{ion} = \sum_i I_i$ - трансмембранный ионный ток, I_{ext} - ток, возникающий под действием внешних факторов.

Таким образом, изменение мембранного потенциала описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} C_m \frac{dV}{dt} &= -g_K(V - V_K) - g_{Na}(V - V_{Na}) - g_L(V - V_L) + I_{ext} = \\ &= -G_K n^4(V - V_K) - G_{Na} m^3 h(V - V_{Na}) - G_L(V - V_L) + I_{ext}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Введем величину $v = V - V_{eq}$, определяющую отклонение мембранного потенциала V нервной клетки от равновесного состояния V_{eq} . Тогда система уравнений Ходжкина-Хаксли примет вид:

$$\begin{aligned} C_m \frac{dv}{dt} &= -G_K n^4(v - v_K) - G_{Na} m^3 h(v - v_{Na}) - G_L(v - v_L) + I_{ext}, \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(v)(1 - m) - \beta_m(v)m, \quad \frac{dh}{dt} = \alpha_h(v)(1 - h) - \beta_h(v)h, \\ \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(v)(1 - n) - \beta_n(v)n, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где зависимости скоростей $\alpha_m(v)$, $\beta_m(v)$, $\alpha_n(v)$, $\beta_n(v)$, $\alpha_h(v)$, $\beta_h(v)$ определяются соотношениями [24]:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= 0.1 \frac{25 - v}{\exp\left(\frac{25-v}{10}\right) - 1}, \quad \alpha_h = 0.07 \exp\left(\frac{-v}{20}\right), \quad \alpha_n = 0.01 \frac{10 - v}{\exp\left(\frac{10-v}{10}\right) - 1} \\ \beta_m &= 4 \exp\left(\frac{-v}{18}\right), \quad \beta_h = \frac{1}{\exp\left(\frac{30-v}{10}\right) + 1}, \quad \beta_n = 0.125 \exp\left(\frac{-v}{80}\right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

На рис. 1.3 представлено изменение во времени переменной v , полученное для неавтономной системы⁵ при следующих параметрах: емкость мембраны $C_m = 1$ мкФ/см², максимальная Na^+ -проводимость $G_{Na} = 120$ мСм/см²,

⁵Система называется *неавтономной*, если аргумент t (в нашем случае - это время) входит явным образом в функции, задающие систему

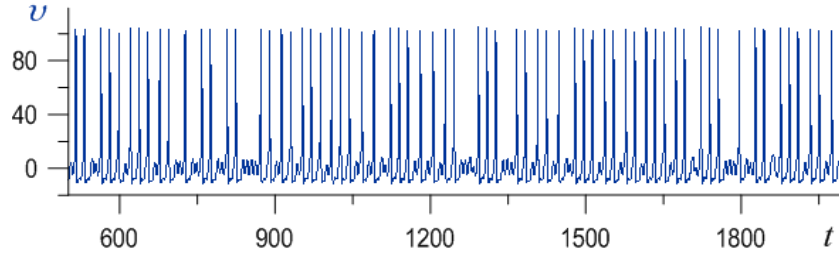


Рис. 1.3. Изменение во времени переменной v в модели Ходжкина-Хаксли в результате воздействия внешнего сигнала $I_{ext}(t) = B \sin(2\pi ft)$, $B = 4$ мкА/см², $f = 123,5$ Гц

максимальная K^+ -проводимость $G_K = 36$ мСм/см², проводимость фоновой утечки $G_L = 0.3$ мСм/см², $v_{Na} = 115$ мВ, $v_K = -12$ мВ, $v_L = 10.6$ мВ.

1.2. Система уравнений Моррис-Лекара

Модель, предложенная в 1981 году авторами К. Моррис (Catherine Morris) и Х. Лекар (Harold Lecar) для описания электрической активности в мышечном волокне ракообразных, изначально представляла собой систему трех дифференциальных уравнений, отражающих характер изменения мембранного потенциала, а также калиевых и кальциевых токов через мембрану клетки [29]. В результате исследований стало известно, что изменением кальциевых токов можно пренебречь, поэтому модель Моррис-Лекара получила распространение в виде:

$$\begin{aligned} C_m \frac{dV}{dt} &= -G_{Ca} M_\infty(V)(V - V_{Ca}) - G_K W(V - V_K) - G_L(V - V_L) - I, \\ \frac{dW}{dt} &= \phi \lambda_W(V)[W_\infty(V) - W], \end{aligned} \quad (1.11)$$

где V - мембранный потенциал клетки, W - вероятность активации калиевого канала. Внешний ток I , входящий в первое уравнение системы, медленно изменяется во времени:

$$\frac{dI}{dt} = \mu(V_{th} + V). \quad (1.12)$$

Выражения для потенциалозависимых функций $M_\infty(V)$, $W_\infty(V)$ и $\lambda_W(V)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} M_\infty(V) &= \frac{1}{2} \left(1 + \text{th} \frac{V - V_1}{V_2} \right), \quad W_\infty(V) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{th} \frac{V - V_3}{V_4} \right), \\ \lambda_W(V) &= \frac{1}{3} \left(\text{ch} \frac{V - V_3}{2V_4} \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Изменение во времени переменной $V(t)$ представлено на рис. 1.4а для следующих параметров: $C_m = 1$ мкФ/см², $G_{Ca} = 1.2$ мСм/см², $V_{Ca} = 0.8$ мВ, $G_K = 2$ мСм/см², $V_K = -1.1$ мВ, $G_L = 0.5$ мСм/см², $V_L = -0.5$ мВ, $\phi = 1$, $V_1 = -0.01$ мВ, $V_2 = 0.15$ мВ, $V_3 = 0.1$ мВ, $V_4 = 0.05$ мВ, $\mu = 0.005$, $V_{th} = 0.2$ мВ.

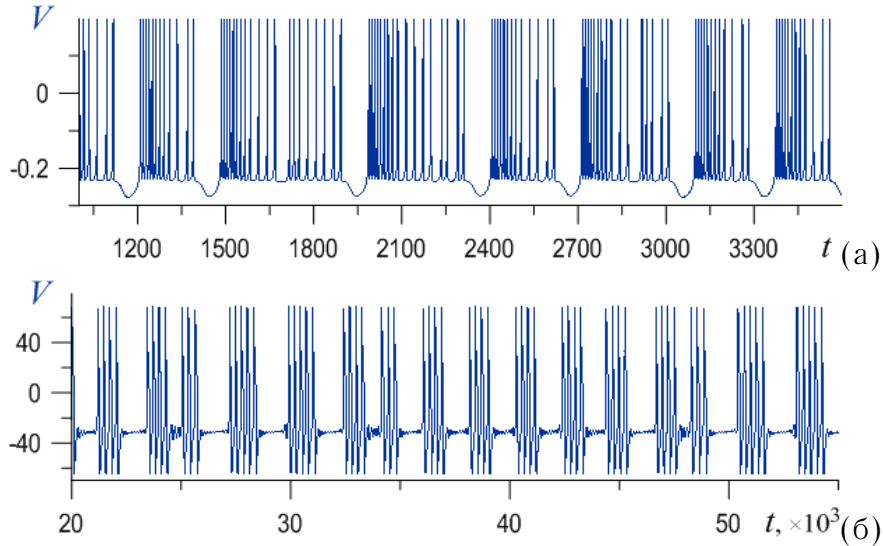


Рис. 1.4. Изменение во времени переменной v в модели Моррис-Лекара

Следует отметить, что в модели Моррис-Лекара могут наблюдаться хаотические режимы, обусловленные различными бифуркационными сценариями перехода к хаосу. В частности, при $C_m = 20$ мкФ/см², $G_{Ca} = 4.4$ мСм/см², $V_{Ca} = 177$ мВ, $G_K = 8$ мСм/см², $V_K = -84$ мВ, $G_L = 2$ мСм/см², $V_L = -60$ мВ, $\phi = 0.05$, $V_1 = -1.2$ мВ, $V_2 = 18$ мВ, $V_3 = 2$ мВ, $V_4 = 30$ мВ, $\mu = 0.0005$, $V_{th} = 24$ мВ в системе происходит генерация в виде пачек импульсов, известных в научной литературе как *берсты эллиптического (elliptic) типа* [34], рис. 1.4б.

Математическое моделирование поведения нервной клетки, основанное на детальном представлении о механизмах функционирования нейрона как биологического объекта, позволяет дать количественный прогноз его поведения. Параметры таких моделей имеют явный физический и биологический смысл, поэтому могут быть измерены, либо оценены, из реальных биологических экспериментов, тем самым упрощая взаимодействие физиологов и физиков. Однако, такое моделирование, имея целый ряд преимуществ, зачастую не допускает возможности аналитического исследования. Поэтому для изучения особенностей поведения нейродинамических систем часто используют модели, описывающие способность нервной клетки генерировать импульсы на качественном уровне, в частности, модели ФитцХью-Ринцеля [34] и Хиндмарша-Роуза [35].

1.3. Система уравнений ФитцХью-Ринцеля

В начале 1960-х годов на базе уравнений Ходжкина-Хаксли Ричард ФитцХью (Richard FitzHugh) предложил элегантное феноменологическое описание основных особенностей динамики нейрона. Исследования Ричарда ФитцХью опирались на тот факт, что некоторые переменные в модели Ходжкина-Хаксли обладают быстрой кинетикой по сравнению с другими. Ввиду того, что активация натриевых каналов происходит во времени заметно быстрее, чем изменение мембранного потенциала, переменная m может быть положена равной [25]:

$$m_{\infty}(V) = \frac{\alpha_m(V)}{\alpha_m(V) + \beta_m(V)}. \quad (1.14)$$

Далее, Р. ФитцХью обратил внимание на то, что во время формирования потенциала действия инактивация натриевых каналов связана с активацией калиевых каналов равенством: $h + n \approx 0.8$. Таким образом, переменная h может быть представлена в виде: $h = 0.8 - n$. Учет всех этих особенностей показал, что четырехмерная модель Ходжкина-Хаксли может быть сведена к двумерной, содержащей быструю переменную V и медленную - n .

В результате проведенного анализа, а также сопоставления с динамикой системы релаксационных колебаний, Ричардом ФитцХью была предложена феноменологическая модель возбуждения нервной клетки. В своих первых публикациях при изучении динамики полученных уравнений ученый использовал название «модель Бонхоффера-ван дер Поля» в честь голландского инженера и физика Бальтазара ван дер Поля (Balthasar van der Pol) и немецкого биохимика Карла Фридриха Бонхоффера (Karl Friedrich Bonhoeffer), впервые предложившего использование модели релаксационных колебаний при описании поведения нейронов [30]. Впоследствии, система уравнений Р. ФитцХью получила очень широкое распространение и в настоящее время в большей степени известна как модель ФитцХью-Нагумо⁶ [31]:

$$\frac{dv}{dt} = v - v^3/3 - w, \quad \frac{dw}{dt} = \epsilon(v + a - bw). \quad (1.15)$$

Вклад японского электроинженера Нагумо (Jin-Ichi Nagumo) заключался в том, что в тех же 60-х годах на базе туннельного диода им была построена соответствующая эквивалентная схема [33].

Модель ФитцХью-Нагумо - двумерная модель, качественно описывающая способность нервной клетки генерировать электрические импульсы. В силу своей низкой размерности, эта модель не может описать формирование слож-

⁶В модели ФитцХью-Нагумо переменная v соответствует мембранному потенциалу клетки, w - восстанавливающая переменная, a и b - экспериментально определяемые параметры, ϵ - малый параметр [32].

ных колебаний мембранного потенциала нервных клеток, наблюдающихся в экспериментах (например, хаотической генерации спайков). В 1987 году Джон Ринцель (John Rinzel) модифицировал систему ФитцХью-Нагумо, добавив еще одну переменную, медленно изменяющуюся во времени. В результате этих преобразований получилась модель, в рамках которой стало возможно изучение такой специфической реакции нервных клеток как регулярная или хаотическая генерация берстов,⁷ т.е. модель ФитцХью-Ринцеля:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= v - v^3/3 - w + y, \\ \frac{dw}{dt} &= \delta(v - bw), \quad \frac{dy}{dt} = \mu(c - v - dy),\end{aligned}\tag{1.16}$$

где переменная v моделирует мембранный потенциал нейрона, переменные w, y определяют соответствующие концентрации ионов, μ - малый параметр. Изменение во времени переменной $v(t)$ представлено на рис. 1.5 для следующих параметров системы: $b = 0.8, d = 1, \delta = 0.08, c = -1.21, \mu = 0.0001$.

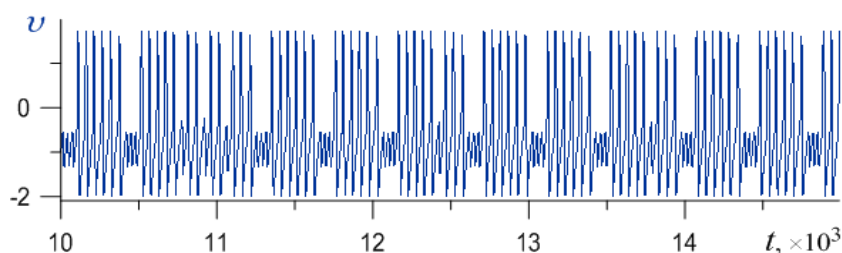


Рис. 1.5. Изменение во времени переменной v в модели ФитцХью-Ринцеля

Наблюдаемые в модели ФитцХью-Ринцеля пачки электрических импульсов называются *берстами эллиптического (elliptic) типа* [34].

1.4. Система уравнений Хиндмарша-Роуза

В 1982 году английский математик Д. Хиндмарш (J.L. Hindmarsh) and физиолог Р. Роуз (R.M. Rose) в результате анализа уравнений Ходжкина-Хаксли получили двумерную модель нервной клетки, похожую на систему ФитцХью-Нагумо, но позволяющую наблюдать длительные интервалы между последовательно возникающими импульсами в реализации. Позднее, в 1984 году, добавив еще одно уравнение в свою модель, они предложили систему, в настоящее время известную как модель Хиндмарша-Роуза и часто используемую

⁷Генерацией *берстов* (от англ. слова *burst* - «взрыв» в виде пачки импульсов) называют изменение мембранного потенциала, представляющее собой быстрые колебания большой амплитуды (*active phase*), чередующиеся с медленно изменяющимися состояниями (*silent phase*).

для описания поведения нейрона:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= w - v^3 + 3v^2 + I - y, \\ \frac{dw}{dt} &= c - 5v^2 - w, \quad \frac{dy}{dt} = \mu[s(v + v_0) - y].\end{aligned}\tag{1.17}$$

Как и в модели ФитцХью-Ринцеля, переменная v соответствует мембранному потенциалу клетки, переменные w и y определяют концентрации ионов, μ - малый параметр. Для параметров: $I = 3.26$, $c = 1$, $s = 4$, $v_0 = 1.6$, $\mu = 0.0021$ изменение во времени переменной $v(t)$ представлено на рис. 1.6. Наблюдаемые

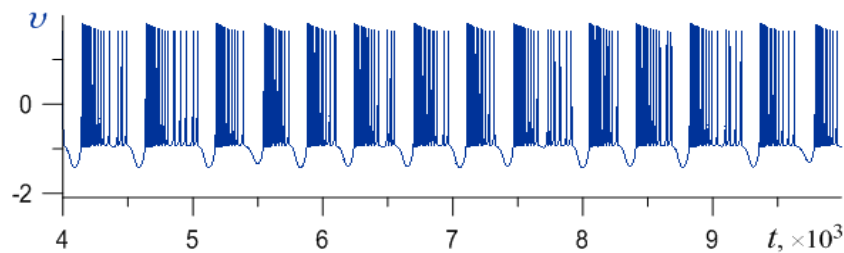


Рис. 1.6. Изменение во времени переменной v в модели Хиндмарша-Роуза

в модели Хиндмарша-Роуза пачки импульсов называются *берстами прямоугольного (square-wave) типа*.

Контрольные вопросы и упражнения

- 1.1. Какие динамические системы называются хаотическими?
- 1.2. Дать определение автономной динамической системы.
- 1.3. Какие аттракторы существуют в фазовом пространстве автономной классической модели Ходжкина-Хаксли (т.е. для параметров, указанных в п. 1.1.3.) при изменении параметра постоянного тока $I_{ext} \in [0, 20]$? Какие бифуркации определяют рождение/исчезновение этих аттракторов?
- 1.4. В результате численного интегрирования системы
 - (а) ФитцХью-Ринцеля для различных значений параметра c получить интервал $c \in (c_1, c_2)$,
 - (б) Хиндмарша-Роуза для различных значений параметра I получить интервал $I \in (I_1, I_2)$,

внутри которого наблюдается хаотическая динамика.

Глава 2. Синхронизация взаимодействующих хаотических систем

Возникновение синхронной генерации в сетях, состоящих из элементов, демонстрирующих сложную динамику, представляет собой одно из важнейших нелинейных явлений, привлекающих к себе широкое внимание исследователей. В результате изучения этого явления, представляющего интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения, были обнаружены различные типы синхронного поведения хаотических подсистем. Остановимся более подробно на описании особенностей некоторых из них, а именно: фазовой, обобщенной, полной синхронизации, а также синхронизации с запаздыванием (так называемой lag-синхронизации).

Рассмотрим систему двух взаимодействующих хаотических элементов:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_2)) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{h}_2(\mathbf{x}_1)),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}_1 = \{v_1, w_1, \dots\} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_2 = \{v_2, w_2, \dots\} \in \mathbb{R}^n$, функции $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}_2) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{h}_2(\mathbf{x}_1) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяют связь между взаимодействующими подсистемами.

2.1. Фазовая синхронизация

В основе определения фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы исследуемого сигнала.

Ввиду того, что мгновенная фаза должна однозначно характеризовать состояние системы, ее определение возможно лишь для систем с достаточно простой топологией хаотического аттрактора (систем с *фазово-когерентным аттрактором*). Для аттракторов такого типа проекция фазовой траектории на некоторую плоскость состояний все время

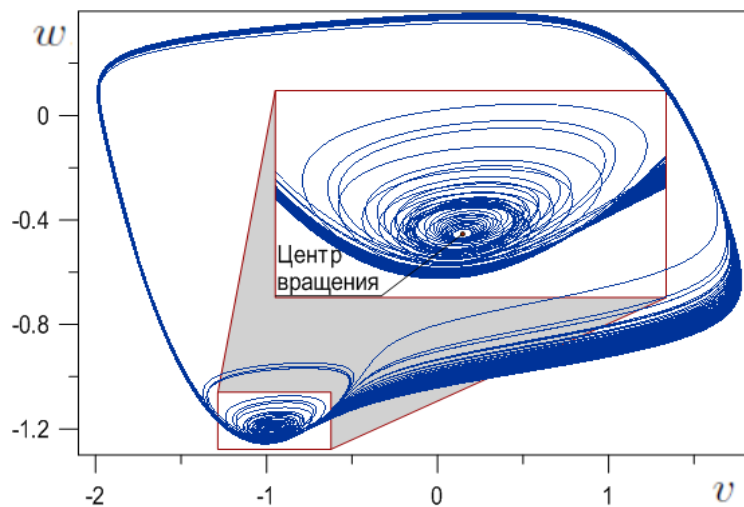


Рис. 2.1. Проекция на плоскость (v, w) фазово-когерентного аттрактора системы ФитцХью-Ринцеля

вращается вокруг некоторого центра, рис. 2.1, не пересекая и не огибая его, поэтому фаза может быть введена однозначно одним из следующих способов:

1. Мгновенная фаза как угол в полярной системе координат

$$\phi_j(t) = \operatorname{arctg} \frac{w_j(t)}{v_j(t)} \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

где слагаемое $\pm \pi k$ обеспечивает формирование полного угла вращения для фазы j -го элемента, а значение целочисленной переменной k определяется условием непрерывности функции $\phi_j(t)$. Таким образом полученная мгновенная фаза является полной фазой, определенной на бесконечном интервале: $\phi_j(t) \in [-\infty, \infty]$ [22].

2. Мгновенная фаза как фаза сигнала, представленного в комплексной форме

$$z_j(t) = v_j(t) + i\hat{v}_j(t), \quad (2.3)$$

или

$$z_j(t) = \sqrt{v_j^2(t) + \hat{v}_j^2(t)} e^{i\phi_j(t)}, \quad (2.4)$$

для которого

$$\phi_j(t) = \arccos \frac{v_j(t)}{\sqrt{v_j^2(t) + \hat{v}_j^2(t)}}. \quad (2.5)$$

Входящая в выражение (2.5) функция $\hat{v}_j(t)$ есть преобразование Гильберта сигнала $v_j(t)$, определяемая интегралом:

$$\hat{v}_j(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_j(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (2.6)$$

вычисление которого выполняется в смысле главного значения Коши [37].

3. Мгновенная фаза, получаемая с использованием секущей поверхности Пуанкаре, трансверсально пересекаемой всеми траекториями хаотического аттрактора [21]. В этом случае для каждого отрезка траектории между двумя пересечениями с поверхностью фаза может быть определена как линейная функция времени, возрастающая на 2π с каждым возвращением на секущую поверхность:

$$\phi_j(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \quad (2.7)$$

где t_n – время n -го пересечения секущей поверхности.

При возникновении хаотической фазовой синхронизации наблюдается установление некоторых соотношений между фазами $\phi_j(t)$ и $\phi_k(t)$ взаимодействующих подсистем, а именно: если разность мгновенных фаз хаотических сигналов $\mathbf{x}_j(t)$ и $\mathbf{x}_k(t)$, введенная одним из вышеперечисленных способов, является ограниченной во времени, т.е.

$$|\phi_j(t) - \phi_k(t)| < \mathcal{K}, \quad (2.8)$$

или в более общем случае:

$$|m\phi_j(t) - n\phi_k(t)| < \mathcal{K}, \quad (2.9)$$

где \mathcal{K} – ограниченная константа, зависящая от начальной разности фаз, m и n – целые числа, то говорят о возникновении *фазовой синхронизации* [22].

Выполнение условия (2.8) обеспечивает совпадение характерных частот взаимодействующих подсистем (средних частот хаотических колебаний) или характерных временных масштабов. При этом амплитуды колебаний остаются хаотическими и практически некоррелированными.

Для аттракторов, соответствующих развитому хаосу, при котором спектр не содержит выраженных пиков, диагностировать фазовую синхронизацию традиционными методами не представляется возможным. В этом случае говорят о возникновении синхронизации временных масштабов [38].

2.2. Обобщенная синхронизация

Явление обобщенной синхронизации было впервые обнаружено в середине 90-х годов XX века [40, 41] для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_d) \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_r, \mathbf{h}(\mathbf{x}_d)), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^n$, функция $\mathbf{h}(\mathbf{x}_d) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяет связь между ведущей \mathbf{x}_d (*drive*) и ведомой \mathbf{x}_r (*response*) подсистемами.

Режим *обобщенной синхронизации* означает, что после завершения переходного процесса между состояниями взаимодействующих хаотических осцилляторов устанавливается функциональное соотношение

$$\mathbf{x}_r(t) = \Psi[\mathbf{x}_d(t)]. \quad (2.11)$$

Позднее было показано, что такой тип синхронизации может наблюдаться и

для других систем взаимодействующих нелинейных элементов, в частности, для распределенных сред, систем с задержкой во времени и др. Диагностика и исследование данного вида синхронизации представляют собой очень сложную задачу, так как детерминированная функция $\Psi[\mathbf{x}(t)]$, связывающая состояния подсистем, может иметь достаточно сложный характер и даже быть недифференцируемой [42].

2.3. Полная хаотическая синхронизация

При определенном взаимодействии идентичных хаотических подсистем можно наблюдать явление *полной синхронизации* хаоса, когда после за-

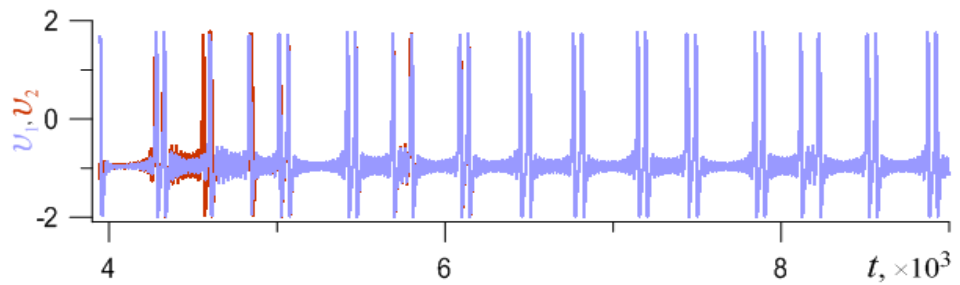


Рис. 2.2. Установление полной синхронизации колебаний

вершения переходного процесса между состояниями взаимодействующих хаотических осцилляторов эволюция во времени состояний подсистем происходит одинаково, рис. 2.2. Нетрудно заметить, что полная синхронизация является частным случаем обобщенной синхронизации, если в качестве детерминированной функции взять зависимость $\mathbf{x}_1(t) = \Psi[\mathbf{x}_2(t)] \equiv \mathbf{x}_2(t)$.

2.3.1. Синхронное многообразие

Рассмотрим систему двух взаимодействующих идентичных хаотических элементов:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) + \varepsilon \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_2) + \varepsilon \mathbf{h}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),\end{aligned}\quad (2.12)$$

где нелинейные векторные функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x}_2)$ определяют индивидуальную динамику подсистем, связь между которыми задается векторными функциями $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ и $\mathbf{h}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Если $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = \mathbf{h}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = 0$, то в пространстве полной системы (2.12)

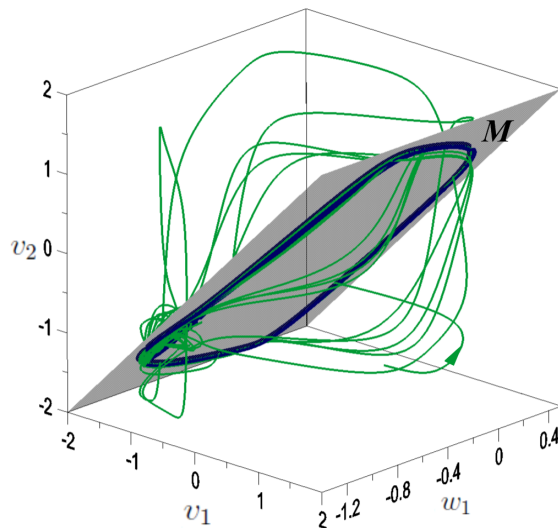


Рис. 2.3. Приближение фазовой траектории системы двух связанных элементов ФитцХью-Ринцеля к аттрактору, лежащему на синхронном многообразии $\mathbf{M}: \{ \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \equiv \mathbf{x}(t) \}$

существует инвариантное симметричное многообразие \mathbf{M} : $\{\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \equiv \mathbf{x}(t)\}$, устойчивость которого обеспечивает реализацию полной синхронизации элементов системы. При этом любая траектория системы (2.1) неограниченно приближается к аттрактору, расположенному на \mathbf{M} , см. рис. 2.3.

2.3.2. Порог полной синхронизации хаотических колебаний

Очевидно, что в какой-то момент времени полностью синхронное состояние может быть реализовано при любом ε , но при малых значениях параметра связи оно не является устойчивым. В отсутствие связи при малом возмущении векторов состояний подсистем из свойства неустойчивости хаоса последует экспоненциальное расхождение по времени траекторий. При малой связи расхожимость будет слабее, но устойчивым синхронное состояние становится только при достаточно большой силе межэлементной связи. Таким образом, полная хаотическая синхронизация – пороговое явление, наблюдающееся только в том случае, когда параметр связи превышает значение ε^* , ниже которого состояния подсистем близки, но все же различаются. При

$$\varepsilon > \varepsilon^* \quad (2.13)$$

состояния подсистем синхронно (идентично) хаотически меняются со временем.

2.4. Синхронизация с запаздыванием

Режим, при котором взаимодействующие элементы демонстрируют близкие к идентичным, но сдвинутые на некоторый временной интервал τ колебания, т.е. $\mathbf{x}_1(t) \approx \mathbf{x}_2(t + \tau)$, называется *синхронизацией с запаздыванием* или *lag-синхронизацией*.

Возникновение такого типа синхронизма возможно, в частности, в ансамблях с неидентичными управляющими параметрами подсистем. В этом случае симметричное под-

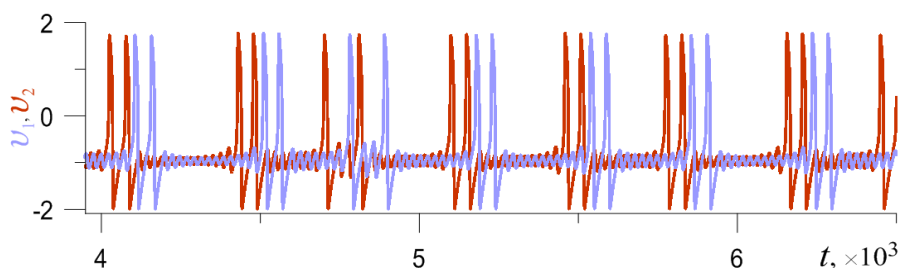


Рис. 2.4. Синхронизация с запаздыванием

пространство перестает существовать, и, следовательно, при конечном значении параметра связи полная синхронизация невозможна.

Контрольные вопросы и упражнения

- 2.1. Какой аттрактор называется фазово-некогерентным? Привести пример.
- 2.2. Какие переменные системы Хиндмарша-Роуза (см. п. 1.4.) могут быть использованы при вычислении мгновенной фазы как угла вращения? Подтвердить ответ построением соответствующих проекций фазового портрета хаотического аттрактора системы.
- 2.3. Построить график изменения во времени мгновенной фазы колебаний в системе ФитцХью-Ринцеля (см. п. 1.3.). При расчете фазы рассмотреть два различных способа ее введения. Сравнить полученные результаты.
- 2.4. Сформулировать основные признаки разных режимов синхронного поведения подсистем (полной, фазовой, обобщенной и lag-синхронизации).
- 2.5. Построить графики изменения во времени переменных v_1 и v_2 системы:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_1 - v_1^3/3 - w_1 + y_1 + \varepsilon(v_2 - v_1), \\ \dot{w}_1 &= \delta(v_1 - bw_1), \\ \dot{y}_1 &= \mu(c - v_1 - dy_1), \\ \dot{v}_2 &= v_2 - v_2^3/3 - w_2 + y_2 + \varepsilon(v_1 - v_2), \\ \dot{w}_2 &= \delta(v_2 - bw_2), \\ \dot{y}_2 &= \mu(c - v_2 - dy_2).\end{aligned}\tag{2.14}$$

при $\varepsilon = 0.5$. К какому типу синхронизации можно отнести полученный режим колебаний?

Глава 3. Использование методов численного анализа для диагностики перехода к синхронному режиму колебаний

Наличие разных видов синхронного поведения хаотических осцилляторов обуславливает актуальность задачи диагностики и количественного анализа степени синхронизации подсистем. Одним из наиболее простых с точки зрения численного анализа является поиск режима полной синхронизации, заключающийся в непосредственном сравнении векторов состояний взаимодействующих подсистем $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ и вычислении *ошибки синхронизации* [20]:

$$\delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|. \quad (3.1)$$

Но расчет ошибки синхронизации не позволяет определить особенностей перехода к режиму идентичного поведения подсистем. Поэтому часто при вычислении порога полной хаотической синхронизации дополнительно проводят, например, анализ *функции подобия* [51]:

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [v_2(t + \tau) - v_1(t)]^2 \rangle}{\sqrt{\langle v_1^2(t) \rangle \langle v_2^2(t) \rangle}} \quad (3.2)$$

позволяющей выявить не только полную, но и синхронизацию с запаздыванием. При этом в режиме полной синхронизации минимум функции $S(\tau)$ достигается при $\tau = 0$, при синхронизации с задержкой - при некотором значении $\tau = \tau^*$. В обоих случаях свидетельством полностью синхронного поведения является равенство нулю величины $S_{min} = \min_{\tau} [S(\tau)]$. Функция подобия может быть использована и для количественного анализа обобщенной синхронизации. Однако, в этом случае необходимо знать в явном виде функцию детерминированной связи между колебаниями подсистем.

Чтобы охарактеризовать степень синхронности подсистем можно использовать также вычисление *коэффициента взаимной корреляции*:

$$R(\tau) = \frac{\langle v_1(t)v_2(t + \tau) \rangle - \langle v_1(t) \rangle \langle v_2(t + \tau) \rangle}{\sqrt{(\langle v_1^2(t) \rangle - \langle v_1(t) \rangle^2)(\langle v_2^2(t + \tau) \rangle - \langle v_2(t + \tau) \rangle^2)}}, \quad (3.3)$$

максимальное значение которого $R_{max} = \max_{\tau} [R(\tau)]$ будет равно единице в случае синхронизации с запаздыванием (и, разумеется, полной синхронизации) и стремится к нулю при потере колебаниями $v_1(t)$ и $v_2(t)$ статистической взаимосвязи.

Обнаружить установление фазовой синхронизации хаотических осцилля-

торов можно с помощью вычисления *коэффициента эффективной диффузии разности фаз* B_{eff} , который дает оценку скорости линейного роста дисперсии разности фаз во времени:

$$\langle (\phi(t) - \langle \phi(t) \rangle)^2 \rangle = 2B_{eff}t. \quad (3.4)$$

При этом для расчета B_{eff} строится зависимость дисперсии фазы σ_ϕ^2 от времени и определяется ее линейная аппроксимация $\sigma_{appr}^2 = at + b$. Наклон получившейся прямой определяет значение коэффициента эффективной диффузии: $B_{eff} = a/2$ [50]. Очевидно, что в случае строгого фазового захвата он должен быть равен нулю, что связано с выполнением условия (2.9). В численных экспериментах из-за ограниченной точности вычислений добиться нулевого значения коэффициента эффективной диффузии разности фаз не удастся, однако B_{eff} резко уменьшается на границе захвата.

Для диагностирования режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами в настоящее время известно несколько методов — метод ближайших соседей [40],[43], метод вспомогательной системы [45] и метод расчета условных ляпуновских показателей [44].

Так как в режиме динамического хаоса фазовые траектории, стартующие из близких начальных точек в бассейне притяжения, стремятся на аттрактор и в то же время экспоненциально расходятся на нем, спектр ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) хаотического решения всегда имеет по крайней мере один положительный показатель¹. Очевидно, что переход к хаотической синхронизации подсистем всегда сопровождается изменением спектра ЛХП [47].

3.1. Хаотическая синхронизация двух элементов Ходжкина-Хаксли

Рассмотрим особенности перехода к режиму полной синхронизации при увеличении силы связи между элементами на основе анализа изменения спектра ЛХП, минимального значения функции подобия и межимпульсного интервала в реализациях мембранного потенциала двух систем Ходжкина-Хаксли. В качестве моделей взаимодействия элементов рассмотрим три вида связи: однонаправленную (систему «ведущий-ведомый»), двунаправленную (взаимную) и связь через общее шумовое поле [55]. Так как в фазовом пространстве индивидуальных автономных систем Ходжкина-Хаксли при классическом выборе параметров хаотические аттракторы не возникают, для всех ви-

¹Режим поведения в случае, когда спектр содержит более одного положительного показателя Ляпунова, называют *гиперхаосом*.

дов связи мы рассмотрим взаимодействие неавтономных идентичных элементов, для которых $I_{ext}(t) = B \sin(2\pi ft)$, $B = 4 \mu A/cm^2$, $f = 123,5$ Гц.

3.1.1. Однонаправленная связь

Динамическая система восьмого порядка

$$\begin{aligned} C_m \dot{v}_1 &= I_{ion}(v_1, m_1, h_1, n_1) + I_{ext}(t) + \varepsilon(v_2 - v_1), \\ C_m \dot{v}_2 &= I_{ion}(v_2, m_2, h_2, n_2) + I_{ext}(t), \\ \dot{m}_{1,2} &= \alpha_m(1 - m_{1,2}) - \beta_m m_{1,2}, \\ \dot{h}_{1,2} &= \alpha_h(1 - h_{1,2}) - \beta_h h_{1,2}, \\ \dot{n}_{1,2} &= \alpha_n(1 - n_{1,2}) - \beta_n n_{1,2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

имеет восемь ляпуновских показателей (ЛП). При нулевом значении коэффициента связи ($\varepsilon = 0$) система (3.5) распадается на две несвязанные между собой подсистемы, каждая из которых имеет три отрицательных и один положительный ЛП. Подсистемы идентичны, поэтому спектры их одинаковы. Так как обе подсистемы подвержены влиянию синусоидального воздействия, то нулевого ЛП в спектрах нет. Появление связи между подсистемами приводит к снятию вырождения. При этом генерация системы (3.5) происходит в режиме гиперхаоса, о чем свидетельствует наличие в спектре двух положительных ЛП, рис. 3.1а. Так как связь однонаправленная, то увеличение силы связи приводит к изменению лишь одного из максимальных ляпуновских показателей, который при $\varepsilon \approx 0.05$ становится отрицательным. Синхронное поведение обеих подсистем устанавливается при $\varepsilon \approx 0.22$, о чем свидетельствует как полное совпадение интервалов на рис. 3.1б, так и нулевое значение минимумов $S_{min} = \min_{\tau} S(\tau)$ функции подобия (3.2), рис. 3.1в.

3.1.2. Взаимная синхронизация

Если связь между элементами Ходжкина-Хаксли симметричная, т.е. уравнения для изменения мембранных потенциалов имеют вид:

$$C_m \dot{v}_{1,2} = I_{ion}(v_{1,2}, m_{1,2}, h_{1,2}, n_{1,2}) + I_{ext}(t) + \varepsilon(v_{2,1} - v_{1,2}), \quad (3.6)$$

то увеличение ε приводит к уменьшению обоих максимальных значений ЛП, рис. 3.1г. При $\varepsilon \approx 0.034$ в спектре остается один положительный ЛП: режим гиперхаоса сменяется хаотическим поведением, которое, в свою очередь, при $\varepsilon \approx 0.092$ переходит в режим периодической генерации. При $\varepsilon \approx 0.116$ в системе устанавливается синхронное хаотическое поведение подсистем.

На рис. 3.1д изображены множества значений межимпульсных интерва-

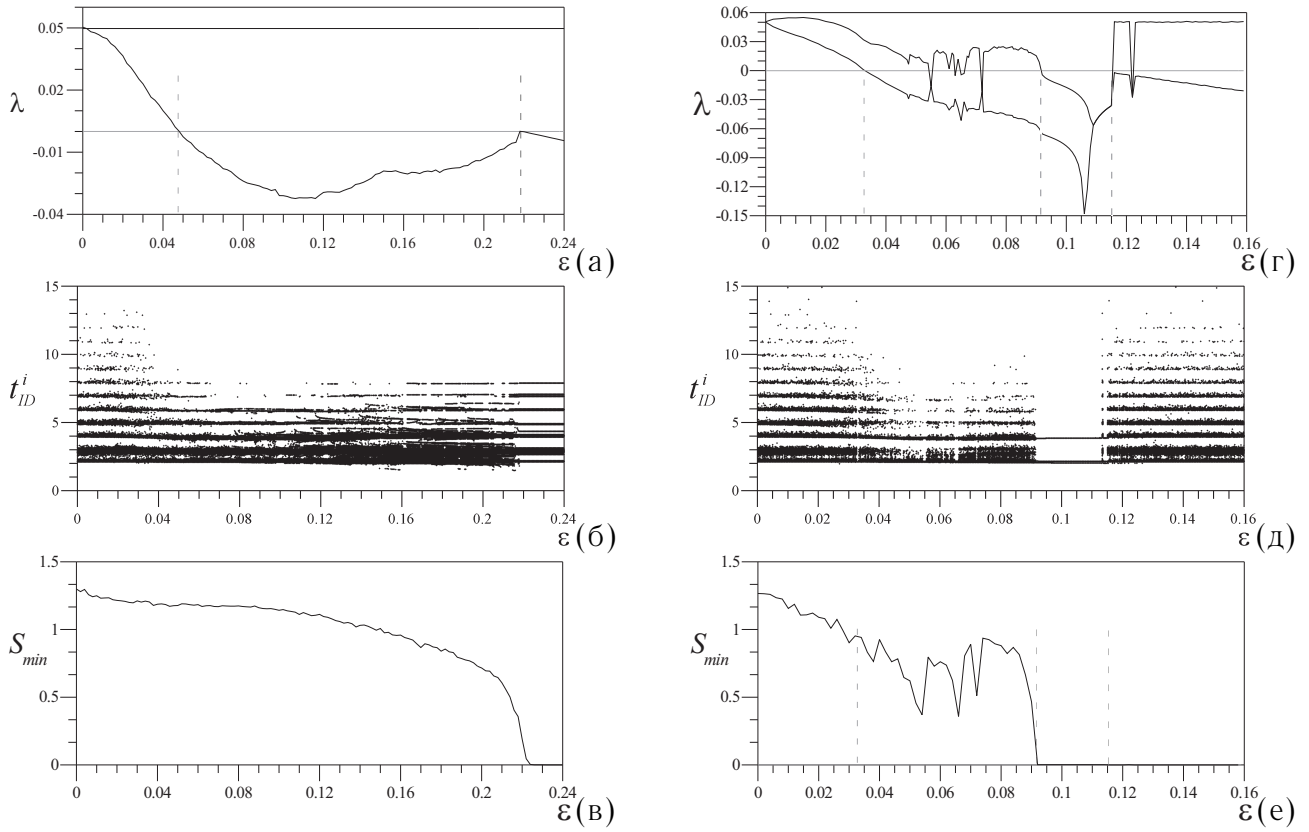


Рис. 3.1. Переход к полной синхронизации, происходящий в результате увеличения силы связи ε в системе двух элементов Ходжкина-Хаксли с однонаправленной (а-в) и двунаправленной (г-е) типами связи: (а), (г) — два максимальных ляпуновских показателя в спектре ЛХП, (б), (д) — множество возможных значений длительности интервалов между импульсами, генерируемыми одним из элементов, (в), (е) — минимальное значение функции подобия [55]

лов, наблюдаемых в реализациях одной из подсистем при изменении ε . Из рисунка видно, что перед установлением полной синхронизации подсистем при $\varepsilon \approx 0.092$ увеличение силы связи выводит поведение системы (3.6) из хаотического режима в режим периодической генерации, при которой наблюдаются повторяющиеся три интервала (максимальный интервал в этом режиме возникает из-за отсутствующего в реализациях каждого третьего импульса). При этом, как видно из рис. 3.1е, происходит синхронизация с задержкой, о чем свидетельствуют нулевые значения минимумов $S_{min} = \min_{\tau} S(\tau)$.

3.1.3. Синхронизация шумом

Наличие флуктуаций в природе естественно, поэтому исследования синхронизационных процессов в сетях, подверженных влиянию различных шумов получили широкое распространение. Моделирование влияния случайных факторов может быть различным. В частности, значительный интерес вызывают задачи, связанные с возможностью синхронизации элементов в результате воздействия на них одного и того же шумового поля в отсутствие каких

бы то ни было связей (электрических, химических и др.) между элементами [12, 52, 53]. В этом случае известно, что полная синхронизация возможна под воздействием шума достаточно большой интенсивности [21]. Рассмотрим проявление этого эффекта в системе двух несвязанных между собой ($\varepsilon = 0$) элементов Ходжкина-Хаксли:

$$C_m \dot{V}_{1,2} = I_{ion}(V_{1,2}, m_{1,2}, h_{1,2}, n_{1,2}) + I_{ext}(t), \quad (3.7)$$

для которых переменные, отвечающие за изменение мембранного потенциала клетки, подвержены влиянию одного и того же шумового поля. Рассмотрим внешнее воздействие: $I_{ext}(t) = B \sin(2\pi ft) + \xi(t)$, где шумовая компонента $\xi(t)$ моделируется белым гауссовым процессом с нулевым средним $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и корреляционной функцией $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D\delta(\tau)$.

При численном моделировании для обнаружения режима полного синхронизма элементов будет проводиться вычисление ошибки синхронизации (3.1) и старшего ЛП λ_{max} отдельного элемента.

Построив обе эти характеристики в зависимости от интенсивности шума D , рис. 3.2, нетрудно заметить, что смена знака λ_{max} происходит при $D^* \approx 1.5$. Начиная с этого же значения интенсивности шума поведение элементов в рассматриваемом ансамбле становится синхронным, о чем свидетельствуют пренебрежимо малые значения ошибки синхронизации. Таким образом, можно сделать вывод, что при $D > D^*$ синхронное поведение элементов Ходжкина-Хаксли устанавливается и в отсутствие каких бы то ни было связей между осцилляторами.

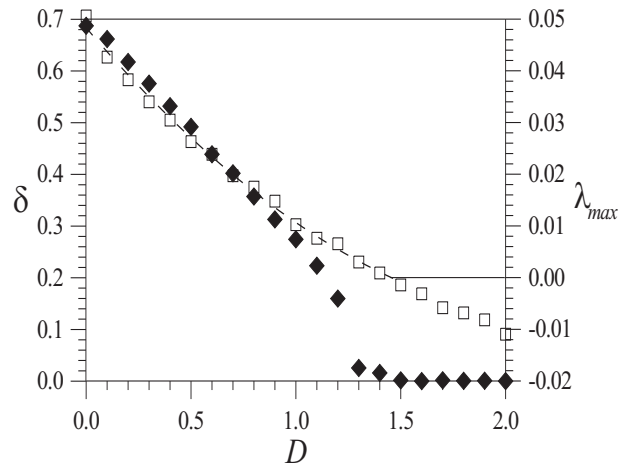


Рис. 3.2. Зависимость относительной ошибки синхронизации δ (символы «◆») и старшего ляпуновского показателя λ_{max} (символы «□») от интенсивности шума D

Контрольные вопросы и упражнения

- 3.1. Дать определение дисперсии фазы.
- 3.2. Определить минимальное значение, достигаемое функцией подобию двух сигналов $v_1 = a \sin(2\pi ft)$ и $v_2 = a \cos(\pi/3 + 2\pi ft)$. При каком $\tau = \tau^*$ оно наблюдается?
- 3.3. Двумя различными способами определить порог полной хаотической

синхронизации системы двух связанных элементов ФитцХью-Ринцеля:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \dot{v}_1 = v_1 - v_1^3/3 - w_1 + y_1 + \varepsilon(v_2 - v_1), \\
 & \dot{w}_1 = \delta(v_1 - bw_1), \\
 & \dot{y}_1 = \mu(c - v_1 - dy_1), \\
 & \dot{v}_2 = v_2 - v_2^3/3 - w_2 + y_2 + \varepsilon(v_1 - v_2), \\
 & \dot{w}_2 = \delta(v_2 - bw_2), \\
 & \dot{y}_2 = \mu(c - v_2 - dy_2).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 (б) \quad & \dot{v}_1 = v_1 - v_1^3/3 - w_1 + y_1 + \varepsilon(v_2 - v_1), \\
 & \dot{w}_1 = \delta(v_1 - bw_1), \\
 & \dot{y}_1 = \mu(c - v_1 - dy_1), \\
 & \dot{v}_2 = v_2 - v_2^3/3 - w_2 + y_2, \\
 & \dot{w}_2 = \delta(v_2 - bw_2), \\
 & \dot{y}_2 = \mu(c - v_2 - dy_2).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.4. Получить изменение спектра ляпуновских характеристических показателей при увеличении интенсивности шума D в системе двух связанных элементов Хиндмарша-Роуза:

$$\begin{aligned}
 & \dot{v}_1 = w_1 - v_1^3 + 3v_1^2 + I - y_1 + \xi(t), \\
 & \dot{w}_1 = c - 5v_1^2 - w_1, \\
 & \dot{y}_1 = \mu[4(v_1 + 1.3) - y_1], \\
 & \dot{v}_2 = w_2 - v_2^3 + 3v_2^2 + I - y_2 + \xi(t), \\
 & \dot{w}_2 = c - 5v_2^2 - w_2, \\
 & \dot{y}_2 = \mu[4(v_2 + 1.3) - y_2],
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

где общая шумовая компонента $\xi(t)$ (общее шумовое поле) моделируется белым гауссовым процессом с нулевым средним $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и корреляционной функцией $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau)$.

Глава 4. Аналитические методы изучения устойчивости режима полной синхронизации

При исследовании устойчивости режима синхронного поведения большого числа хаотических динамических систем в сетях заданной структуры наибольшую трудность вызывает задача о нахождении порогов синхронизации, т.е. сил связи, при которых наступает синхронизация. В настоящее время оценки значений коэффициентов связи, при которых поведение всех элементов в ансамбле становится полностью синхронизованным, могут быть получены различными методами. Наиболее распространенными являются подходы, основанные на вычислении собственных значений матрицы связи и на использовании теории графов, позволяющие получить порог синхронизации для систем n линейно связанных осцилляторов вида:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \mathcal{P} \mathbf{x}_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^d)$ - d -вектор, содержащий координаты i -го осциллятора, $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$ - нелинейная вектор-функция, определяющая динамику элемента сети. Ненулевые элементы $(d \times d)$ -матрицы $\mathcal{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_d)$, где $p_h = 1$ для $h = 1, 2, \dots, s$ и $p_h = 0$ для $h = s + 1, \dots, d$ определяют переменные, по которым связаны индивидуальные системы. Матрица связи $\mathcal{G} = \{\varepsilon_{ij}\}$ - $(n \times n)$ симметричная матрица с неотрицательными недиагональными элементами. Диагональные элементы матрицы связи выбираются из условия диффузионности, т.е. полагаются равными $\varepsilon_{ii} = -\sum_{j=1; j \neq i}^n \varepsilon_{ij}$, $i = \overline{1, n}$.

4.1. Определение спектра собственных значений матрицы связи

В силу выполнения условия диффузионности, спектр собственных значений матрицы связи всегда содержит одно нулевое значение λ_1 , соответствующее собственному вектору, направленному вдоль синхронного многообразия, и $(n - 1)$ отрицательных значений $\lambda_n < \dots < \lambda_3 < \lambda_2 < 0$. Известно, что существенное влияние на значение порога локальной синхронизации оказывает минимальное по модулю отрицательное собственное значение λ_2 .

В 1996 году авторами Ч. Ву (Chai Wah Wu) и Л. Чуа (Leon O. Chua) было сформулировано предположение (*Wu-Chua conjecture*), в основе которого лежит следующее соотношение между λ_2 и порогом синхронизации [7]:

Если для сетей одной и той же структуры при силах связи $\varepsilon_{n_1}^*$ происходит синхронизация n_1 числа элементов, то синхронное поведение для n_2 числа элементов произойдет при

$$\varepsilon_{n_2}^* = \frac{\varepsilon_{n_1}^* \cdot \lambda_2(n_1)}{\lambda_2(n_2)}. \quad (4.2)$$

Однако, уже через год было показано, что предположение Ву-Чуа верно не для всех хаотических осцилляторов [5]. В частности, для некоторых систем увеличение силы связи может приводить к дестабилизации синхронного состояния [6], связанной с переходом через так называемую коротковолновую бифуркацию (*short-wavelength bifurcation*). В качестве примера могут быть приведены определенным образом связанные системы Ресслера (по x -переменным).

В результате, в 1997 году авторами Л. Пекора (Louis M. Pecora) и Т. Кэрролл (Thomas L. Carroll) был предложен критерий устойчивости, связанный с вычислением так называемой основной функции устойчивости (*master stability function*). Для получения ее значений необходимо вычисление максимального ляпуновского показателя определенным образом записанных уравнений в вариациях [5].

Позднее, в 2001 году А.Ю. Погромский и Х. Наймайер (Henk Nijmeijer) сформулировали достаточные условия, обеспечивающие справедливость предположения Ву-Чуа и позволяющие использовать оценку (4.2) для получения порога синхронизации, в частности, в сетях хаотических нейродинамических элементов [8].

Следует отметить, однако, что аналитическое получение оценки порогов синхронизации с помощью предположения Ву-Чуа, критерия Пекоры-Кэрролла, так и целого ряда аналогичных подходов [8]-[10], опирающихся на вычисление собственных значений матрицы связи, не всегда возможно в ансамблях со сложной конфигурацией. Более того, в сетях с изменяющимися во времени коэффициентами связи использование таких методов и вовсе становится невозможным.

4.2. Метод связного графа

В 2004 году В.Н. Белых, И.В. Белых и М. Хаслер (Martin Hasler) предложили новый метод, позволяющий оценить порог *глобальной* синхронизации для сетей с различными (неоднородно распределенными) силами связи между элементами — *метод связного графа* [4]. Ключевое преимущество данного метода заключается в возможности его использования при рассмотрении се-

тей, коэффициенты связи в которых изменяются во времени, т.е. для матриц $\mathcal{G} = \{\varepsilon_{ij}(t)\}$.

4.2.1. Основные положения

Согласно методу связного графа симметричная $(n \times n)$ матрица \mathcal{G} определяет связный граф с n вершинами и m ребрами, где число ребер m равно числу ненулевых элементов ε_{ij} , лежащих над главной диагональю. При этом i -ой вершине графа поставлен в соответствие i -ый осциллятор. Таким образом, если l -ый и q -ый осцилляторы связаны, т.е. $\varepsilon_{lq} = \varepsilon_{ql} > 0$, то граф имеет ребро, соединяющее l -ую и q -ую вершины. Через это ребро проходит путь единичной длины $|P_{lk}| = 1$. В общем случае длина пути $|P_{ij}|$ равна числу ребер, содержащихся в простой цепи P_{ij} , соединяющей i -ую и j -ую вершины. Следует отметить, что не всегда сумма длин кратчайших путей, соединяющих определенные вершины графа, будет оптимальной (т.е. не завышенной). В работе [56] рассмотрен случай, когда выбор более длинных путей в итоге приводит к понижению порогового значения ε^* .

Построение диаграммы графа связи позволяет наглядно отобразить, какие именно из элементов сети связаны между собой. В случае, когда, например, все n элементов сети связаны с оставшимися $(n - 1)$ элементами (структура «каждый с каждым») число ребер m в соответствующем графе будет равно $n(n - 1)/2$, сам граф при этом называют полным (*complete graph*), рис. 4.1.

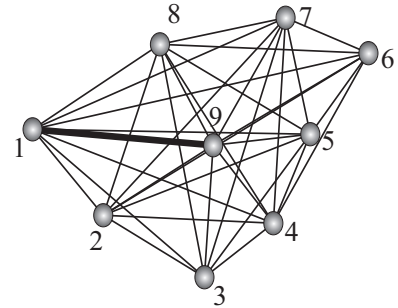


Рис. 4.1. Диаграмма графа связи для структуры «каждый с каждым»

Синхронное многообразие \mathbf{M} : $\{\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_n(t) \equiv \mathbf{x}(t)\}$, существующее в силу выполнения условия диффузионности, представляет собой d -мерную гиперплоскость в $(d \times n)$ -мерном пространстве системы (4.1). Очевидно, что глобальная асимптотическая устойчивость этого многообразия, в результате которой любая траектория системы (4.1) неограниченно приближается к аттрактору, расположенному на \mathbf{M} , определяет устойчивость режима полной хаотической синхронизации.

Вводя обозначения $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$, $i, j = \overline{1, n}$, запишем уравнения для разностей:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ij} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \sum_{k=1}^n \{\varepsilon_{jk} \mathcal{P} \mathbf{X}_{jk} - \varepsilon_{ik} \mathcal{P} \mathbf{X}_{ik}\}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

Применяя теорему о среднем значении к компонентам вектора $\mathbf{F}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) =$

$(F^{(1)}(\mathbf{x}_j) - F^{(1)}(\mathbf{x}_i), F^{(2)}(\mathbf{x}_j) - F^{(2)}(\mathbf{x}_i), \dots, F^{(d)}(\mathbf{x}_j) - F^{(d)}(\mathbf{x}_i))$, для h -ой компоненты получаем: $F^{(h)}(\mathbf{x}_j) - F^{(h)}(\mathbf{x}_i) = \mathcal{D}F^{(h)}(\mathbf{x}^*)\mathbf{X}_{ij}$, где $h = 1, \dots, d$ и $\mathcal{D}F^{(h)}$ - d -вектор строка Якоби для $\mathbf{x}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]$. Разность вектор-функций в этом случае может быть записана в виде [4]:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) &= \int_0^1 \frac{d}{d\beta} \mathbf{F}(\beta\mathbf{x}_j + (1-\beta)\mathbf{x}_i) d\beta = \\ &= \left[\int_0^1 \mathcal{D}\mathbf{F}(\beta\mathbf{x}_j + (1-\beta)\mathbf{x}_i) d\beta \right] \mathbf{X}_{ij}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Здесь $\mathcal{D}\mathbf{F}$ - $(d \times d)$ -матрица Якоби. Принимая во внимание равенство (4.4), перепишем уравнение для разностей:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ij} = \left[\int_0^1 \mathcal{D}\mathbf{F}(\beta\mathbf{x}_j + (1-\beta)\mathbf{x}_i) d\beta \right] \mathbf{X}_{ij} + \sum_{k=1}^n \{\varepsilon_{jk} \mathcal{P}\mathbf{X}_{jk} - \varepsilon_{ik} \mathcal{P}\mathbf{X}_{ik}\}. \quad (4.5)$$

Добавляя и вычитая слагаемое $\mathcal{A}\mathbf{X}_{ij}$ в выражении (4.5), получаем:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_{ij} &= \left[\int_0^1 \mathcal{D}\mathbf{F}(\beta\mathbf{x}_j + (1-\beta)\mathbf{x}_i) d\beta - \mathcal{A} \right] \mathbf{X}_{ij} + \mathcal{A}\mathbf{X}_{ij} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \{\varepsilon_{jk} \mathcal{P}\mathbf{X}_{jk} - \varepsilon_{ik} \mathcal{P}\mathbf{X}_{ik}\}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Матрица $\mathcal{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_d)$, где $a_h \geq 0$ для $h = 1, 2, \dots, s$ и $a_h = 0$ для $h = s+1, \dots, d$ жестко определена матрицей \mathcal{P} . Таким образом, дополнительные слагаемые появляются только в уравнениях для переменных, на которые действует сила связи. Заметим, что матрица $-\mathcal{A}$ введена для подавления неустойчивости, вызванной неотрицательностью действительных частей собственных чисел Якобиана $\mathcal{D}\mathbf{F}$. В то время как неустойчивость, введенная в уравнение (4.6) положительно определенной матрицей $+\mathcal{A}$, может быть подавлена выбором подходящей матрицы связи \mathcal{G} .

Рассмотрим вспомогательную систему:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ij} = \left[\int_0^1 \mathcal{D}\mathbf{F}(\beta\mathbf{x}_j + (1-\beta)\mathbf{x}_i) d\beta - \mathcal{A} \right] \mathbf{X}_{ij} \quad (4.7)$$

Предположим, что положительно определенная квадратичная форма вида:

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{X}_{ij}^T \mathcal{H} \mathbf{X}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.8)$$

является функцией Ляпунова для системы (4.7), т.е. производная функции (4.8) в силу системы (4.7) отрицательно определена:

$$\dot{U}_{ij} = \mathbf{X}_{ij}^T \mathcal{H} \left[\int_0^1 \mathcal{D}\mathbf{F}(\beta \mathbf{x}_j + (1 - \beta) \mathbf{x}_i) d\beta - \mathcal{A} \right] \mathbf{X}_{ij} < 0, \quad X_{ij} \neq 0, \quad (4.9)$$

В выражениях (4.8) и (4.9) матрица $\mathcal{H} = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_s, \mathcal{H}_1)$, $h_1 > 0, h_2 > 0, \dots, h_s > 0$ и $((d-s) \times (d-s))$ -матрица \mathcal{H}_1 положительно определены. Следует отметить, что функции Ляпунова вида (4.8) действительно существуют для большого числа диссипативных¹ нелинейных осцилляторов, встречающихся в прикладной нелинейной динамике (системы Лоренца, Лурье, Чуа и др.).

Выберем и зафиксируем простые цепи P_{ij} , соединяющие i -ую и j -ую вершины графа для всех $i, j = 1, \dots, n$.

Теорема

Если для состоящей из диссипативных нелинейных осцилляторов сети (4.1) производная функции Ляпунова в силу системы (4.7) отрицательна, то синхронное многообразие $\mathbf{M}: \{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_n\}$ глобально асимптотически устойчиво при выполнении следующего неравенства:

$$\varepsilon_k(t) > \frac{a}{n} b_k(n, m), \quad k = 1, \dots, m \quad (4.10)$$

где $b_k(n, m) = \sum_{j>i; k \in P_{ij}}^n |P_{ij}|$ - сумма длин всех цепей P_{ij} , проходящих через k -ое ребро связного графа; значение параметра a определяется особенностями динамики индивидуального элемента сети [4].

Таким образом, определив для каждого ребра связного графа величину $b_k(n, m)$, мы получаем распределение достаточных для установления режима полной синхронизации в рассматриваемом ансамбле пороговых значений сил связи между соответствующими элементами сети. Выбрав максимальное из полученных пороговых значений коэффициентов связи

$$\varepsilon^* = \max_k \frac{a}{n} b_k(n, m) \quad (4.11)$$

можно получить верхнюю оценку, превышение которой заведомо приведет к установлению режима синхронного поведения элементов в ансамбле. В случае, когда все коэффициенты связи в сети одинаковы, т.е. $\varepsilon_k = \varepsilon$ для любого k , выражение (4.11) определяет порог полной хаотической синхронизации.

¹ Системы, фазовый объем которых во времени уменьшается, называются *диссипативными*. Любое решение диссипативной системы с течением времени погружается в область $\|\mathbf{x}\| < R$, называемую *шаром диссипации*.

4.2.2. Диссипативность структурных элементов

Использование метода связного графа возможно только для сетей, состоящих из диссипативных нелинейных осцилляторов.

Диссипативность системы ФитцХью-Ринцеля

Рассмотрим функцию вида:

$$U = v^2 + \frac{1}{\delta}w^2 + \frac{1}{\mu}y^2. \quad (4.12)$$

Производная функции (4.12) в силу системы ФитцХью-Ринцеля (см. п. 1.3.)

$$\dot{U} = v\dot{v} + \frac{1}{\delta}w\dot{w} + \frac{1}{\mu}y\dot{y} \quad (4.13)$$

или

$$\dot{U} = v[v - v^3/3 - w + y] + \frac{1}{\delta}w[\delta(v - bw)] + \frac{1}{\mu}y[\mu(c - v - dy)] \quad (4.14)$$

отрицательна вне области, определяемой уравнением:

$$\frac{1}{3} \left(v^2 - \frac{3}{2} \right)^2 + bw^2 + d \left(y - \frac{c}{2d} \right)^2 = \frac{3d + c^2}{4d}. \quad (4.15)$$

Это означает, что все траектории системы, попав внутрь (4.15), никогда эту область фазового пространства не покинут. Следовательно, уровень функции (4.12) (функции Ляпунова), охватывающий (4.15)

$$U_R \equiv R = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3(3d + c^2)}{4d}} + \frac{3d + c^2}{4\delta bd} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{c}{2d} - \sqrt{\frac{3d + c^2}{4d^2}} \right)^2, \quad (4.16)$$

определяет радиус шара диссипации рассматриваемой системы.

Диссипативность системы Ходжкина-Хаксли

Запишем систему уравнений Ходжкина-Хаксли в виде:

$$\begin{aligned} C_m \dot{v} &= -\alpha_v(m, h, n)v + \beta_v(m, h, n) + I_{ext}(t), \\ \dot{m} &= -[\alpha_m(v) + \beta_m(v)]m + \alpha_m(v), \\ \dot{h} &= -[\alpha_h(v) + \beta_h(v)]h + \alpha_h(v), \\ \dot{n} &= -[\alpha_n(v) + \beta_n(v)]n + \alpha_n(v), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\alpha_v(m, h, n) &= G_K n^4 + G_{Na} m^3 h + G_L, \\ \beta_v(m, h, n) &= G_K n^4 v_K + G_{Na} m^3 h v_{Na} + G_L v_L.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Из уравнений системы (4.17) получаем, что:

$$\begin{aligned}\dot{m} < 0 \text{ для } m > m_{max}^* &= \max_v \frac{\alpha_m(v)}{\alpha_m(v) + \beta_m(v)} \\ \dot{m} > 0 \text{ для } m < m_{min}^* &= \min_v \frac{\alpha_m(v)}{\alpha_m(v) + \beta_m(v)}.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Таким образом, границы области притяжения по переменной m определяются границами интервала $\mathcal{S}_m := \{m | m \in [m_{min}^*; m_{max}^*]\}$. Так как функции $\alpha_m(v)$ и $\beta_m(v)$ могут принимать только положительные значения, то $m_{min}^* = 0$, $m_{max}^* = 1$. Аналогично для переменных h и n получаем, что $\mathcal{S}_h := \{h | h \in [h_{min}^*; h_{max}^*] = [0; 1]\}$ и $\mathcal{S}_n := \{n | n \in [n_{min}^*; n_{max}^*] = [0; 1]\}$, соответственно.

Так как значения, принимаемые функцией $I_{ext}(t)$, ограничены, т.е. $|I_{ext}(t)| < I_{max}$, то для переменной v получаем:

$$\begin{aligned}\dot{v} < 0 \text{ для } v > v_{max}^* &= \max_{(m,h,n)} \frac{\beta_v(m, h, n) + I_{max}}{\alpha_v(m, h, n)} \\ \dot{v} > 0 \text{ для } v < v_{min}^* &= \min_{(m,h,n)} \frac{\beta_v(m, h, n) - I_{max}}{\alpha_v(m, h, n)}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Таким образом, границы области притяжения по переменной v определяются границами интервала $\mathcal{S}_v := \{v | v \in [v_{min}^*; v_{max}^*]\}$. В частности, для случая рассматриваемых параметров (см. п. 1.1.3.) $v_{max}^* = [\beta_v(1, 1, 0) + 4] / \alpha_v(1, 1, 0) \approx 109.8$ мВ, $v_{min}^* = [\beta_v(0, 0, 1) + 4] / \alpha_v(0, 0, 1) \approx -11.8$ мВ.

Очевидно, что все фазовые траектории системы (4.17), начинающиеся в точках вне области:

$$\mathcal{S} := \mathcal{S}_v \times \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_h \times \mathcal{S}_n, \quad (4.21)$$

с увеличением времени стремятся внутрь \mathcal{S} . Следовательно, система (4.17) диссипативна. При этом область \mathcal{S} является ее поглощающей областью.

4.2.3. Масштабирующий множитель

В методе связного графа влияние особенностей динамики индивидуально-го элемента сети на значение порога синхронизации заложено в параметре a (4.10). Выбор модели зачастую связан с необходимостью рассмотрения определенной степени детализации решаемой задачи. Это могут быть модели, спо-

собные качественно воспроизвести то или иное поведение клетки. В число таких систем входят модели ФитцХью-Ринцеля [34], Хиндмарша-Роуза [35] и др. Либо это могут быть модели количественного описания, так называемые *conductance-based* модели, среди которых, к примеру, система Моррис-Лекара [29], описывающая колебания в гигантских мышечных волокнах ракообразных, модель Уилсона для корковых нервных клеток и др. В общем случае входящий в выражение для порогов синхронизации (4.10) параметр a , может быть определен различными способами. Получим его значение в рамках метода функций Ляпунова на примере ансамблей систем ФитцХью-Ринцеля:

$$\begin{aligned}\dot{v}_i &= v_i - v_i^3/3 - w_i + y_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}(t)v_j, \\ \dot{w}_i &= \delta(v_i - bw_i), \\ \dot{y}_i &= \mu(c - v_i - dy_i),\end{aligned}\quad i = 1, \dots, n \quad (4.22)$$

Определение параметра a для сети элементов ФитцХью-Ринцеля

Рассмотрим линейную вспомогательную систему вида (4.7), записанную в разностях $V_{ij} = v_j - v_i$, $W_{ij} = w_j - w_i$ и $Y_{ij} = y_j - y_i$:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{ij} &= V_{ij} - r(t)V_{ij} - W_{ij} + Y_{ij} - aV_{ij}, \\ \dot{W}_{ij} &= \delta(V_{ij} - bW_{ij}), \\ \dot{Y}_{ij} &= \mu(-V_{ij} - dY_{ij}),\end{aligned}\quad i = 1, \dots, n \quad (4.23)$$

где $r(t) = \frac{1}{3}(v_i^2 + v_iv_j + v_j^2)$ есть функция времени, изменяющаяся вдоль траекторий системы (4.22). Система (4.23) имеет единственное состояние равновесия $V_{ij} = W_{ij} = Y_{ij} = 0$. Рассмотрим кандидат-функцию Ляпунова вида:

$$U_{ij} = \frac{1}{2}V_{ij}^2 + \frac{1}{2\delta}W_{ij}^2 + \frac{1}{2\mu}Y_{ij}^2, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.24)$$

Производная этой функции в силу системы (4.23):

$$\dot{U}_{ij} = [1 - a - r(t)]V_{ij}^2 - bW_{ij}^2 - dY_{ij}^2, \quad (4.25)$$

отрицательно определена при

$$a > \max_t [1 - r(t)] = 1. \quad (4.26)$$

Подставив полученное значение масштабирующего множителя в (4.10), получим следующее выражение для определения условия полной хаотической синхронизации системы (4.22):

$$\varepsilon_k(t) > \frac{b_k(n, m)}{n}. \quad (4.27)$$

Для случая однородной связи, когда $\varepsilon_k(t) = \varepsilon, k = 1, \dots, m$, порог полной синхронизации определяется неравенством:

$$\varepsilon > \varepsilon^* = \max_k \frac{b_k(n, m)}{n}. \quad (4.28)$$

Как показывают результаты численного моделирования, определенное таким образом значение параметра a часто бывает завышенным. Однако, полученное из условия глобальной устойчивости решения системы, записанной в разностях, оно гарантирует установление *глобальной синхронизации элементов* в сети. При изучении эффекта полной синхронизации в сетях, состоящих из большого числа элементов, для получения более точной оценки можно использовать значение параметра a , полученное численно для существенно меньших ансамблей. В частности, для системы двух взаимосвязанных осцилляторов нетрудно показать, что $a = 2\varepsilon^*$.

4.2.4. Влияние общего шумового поля

Допустим, что переменные, отвечающие за изменение мембранного потенциала клетки, подвержены влиянию одного и того же шумового поля. В работе [13] показано, что полученные в рамках метода связанного графа условия на пороги синхронизации позволяют предсказать изменение этих порогов и в этом случае. Флуктуации не влияют на качественную картину поведения сил связи при изменении числа элементов в ансамбле. Так, например, если в детерминированном случае порог синхронизации линейно зависит от числа элементов n , то и при наличии шумового воздействия такая зависимость сохранится. Учет влияния шумового поля сводится к масштабированию параметра a , входящего в выражение для оценки порогов синхронизации. При этом закон изменения сил связи, достаточных для установления режима полной синхронизации, примет следующий вид:

$$\varepsilon_D^*(n) = \tilde{a} \tilde{\varepsilon}^*(n), \quad \tilde{a} = a \frac{\lambda_{max}^D}{\lambda_{max}^0}, \quad D < D^*. \quad (4.29)$$

Здесь, $\lambda_{max}^0, \lambda_{max}^D$ - значения старшего ляпуновского показателя в детерминированном случае и при наличии шума с интенсивностью D , соответственно. Таким образом, зная характер зависимости $\lambda_{max}(D)$, полученной для индивидуального элемента сети, можно в итоге получить зависимость порога синхронизации от интенсивности шумового поля:

$$\varepsilon^*(D) = \frac{\varepsilon^*}{\lambda_{max}^0} \lambda_{max}(D), \quad D < D^*. \quad (4.30)$$

Здесь ε^* – пороговое значение силы связи, определяемое выражением (4.11).

Контрольные вопросы и упражнения

- 4.1. Какие системы называются диссипативными?
- 4.2. Показать диссипативность системы (а) Хиндмарша-Роуза (см. п. 1.4.), (б) Моррис-Лекара (см. п. 1.2.).
- 4.3. Получить значение масштабирующего множителя (параметра a) для системы диффузионно связанных элементов Хиндмарша-Роуза.
- 4.4. Показать, что спектр собственных значений матрицы связи всегда содержит одно нулевое значение λ_1 .
- 4.5. Получить общую формулу для определения минимального по модулю отрицательного собственного значения матрицы связи:

(а)

$$\mathcal{G}_{star} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & -\varepsilon & 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & \dots & \dots & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{N}_\varepsilon \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}=? \quad (4.31)$$

(б)

$$\mathcal{G}_{path} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & -2\varepsilon & \varepsilon & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -2\varepsilon & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -2\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \varepsilon & -2\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Глава 5. Примеры сетевых конфигураций

В центральной нервной системе выделяют три основных генетически детерминированных типа нервных сетей: локальные, дивергентные с одним входом и иерархические, среди которых структуры с одним входом — одни из наиболее распространенных [48]. Командный нейрон, находящийся в основании такой сети может оказывать влияние сразу на множество нейронов, и поэтому сети с одним входом выступают согласующим элементом в сложном сочетании нейросетевых систем всех типов. Известно, что структуры такого типа встречаются в некоторых частях среднего мозга и ствола мозга [48]. В качестве простейшей модели такого типа сети может быть рассмотрен ансамбль, в котором один осциллятор образует связи с большим числом несвязанных между собой клеток. На языке теории графов это означает, что одна из вершин имеет степень $d = n - 1$ ¹, рис. 5.1а.

Аналогом такой вершины в нейрофизиологии может выступать так называемый *пейсмекерный нейрон*, задающий определенные колебания связанным с ним нервным клеткам. Для такой структуры, получившей название «звезда» [4, 6], сумма длин всех цепей, проходящих через какое-либо ребро содержит одно слагаемое, соответствующее цепи единичной длины и $(n - 2)$ слагаемых — цепям длины 2, т.е.:

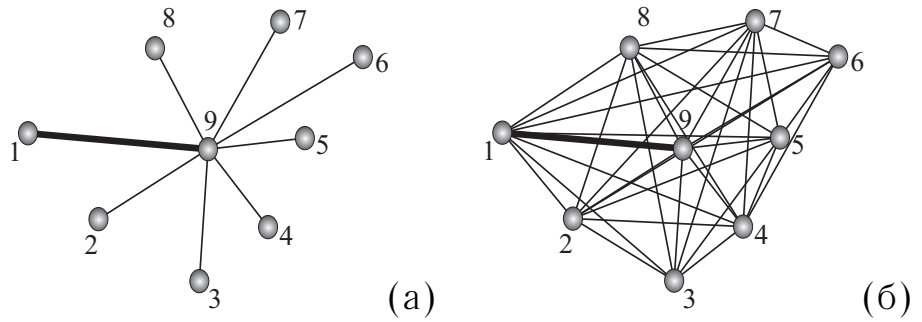


Рис. 5.1. Конфигурации (а) - «звезда», (б) - «каждый с каждым»

$$b_k(n, m) = |P_{1n}| + \underbrace{|P_{12}| + \dots + |P_{1(n-1)}|}_{(n-2) \text{ слагаемых}} = 1 + 2(n - 2) = 2n - 3. \quad (5.1)$$

Следовательно,

$$\varepsilon^*(n) \sim \max_k \frac{b_k(n, m)}{n} = \frac{2n - 3}{n} = 2 - \frac{3}{n}. \quad (5.2)$$

При достаточно большом количестве входящих в такую сеть осцилляторов порог синхронизации перестает быть зависимым от n . Для сравнения, для ан-

¹Степенью вершины s_i графа $G(S)$ называется число d_i , равное количеству ребер графа, инцидентных этой вершине. В частности, если s_1, s_2 — вершины, а $k = (s_1, s_2)$ — соединяющее их ребро, тогда вершина s_1 и ребро k инцидентны, вершина s_2 и ребро k тоже инцидентны.

самбля глобально связанных элементов, где каждый i -ый осциллятор связан с оставшимися $(n - 1)$ элементами (так называемой конфигурации «каждый с каждым», рис. 5.1б порог полной синхронизации обратно пропорционален числу входящих в сеть элементов:

$$\varepsilon^*(n) \sim \frac{1}{n}. \quad (5.3)$$

Очевидно, что структура сети оказывает существенное влияние на характер изменения пороговых значений сил связи, при которых в рассматриваемых ансамблях устанавливается режим полной синхронизации. Получим зависимости порогов полной хаотической синхронизации от полного числа элементов в сетях различной архитектуры.

5.1. Цепочка последовательно связанных элементов

Согласно методу связного графа, цепочке n последовательно связанных элементов ставится в соответствие связный (n, m) -граф: граф с n вершинами и $m = n - 1$ ребрами, диаграмма которого представлена на рис. 5.2.

Определяющая этот граф матрица связи \mathcal{G} в этом случае имеет вид:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \varepsilon & -2\varepsilon & \varepsilon & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & -2\varepsilon & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -2\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \varepsilon & -2\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Число ребер m равно числу ненулевых элементов ε_{ij} , расположенных над диагональю матрицы связи.

Каждой вершине графа соответствует осциллятор рассматриваемой сети. Таким образом, для любой пары вершин i, j может быть выбрана простая цепь P_{ij} . Длина этой цепи $|P_{ij}|$ равна числу ребер, вошедших в цепь P_{ij} , соединяющую согласно матрице связи \mathcal{G} (5.4) i -ую и j -ую вершины графа.

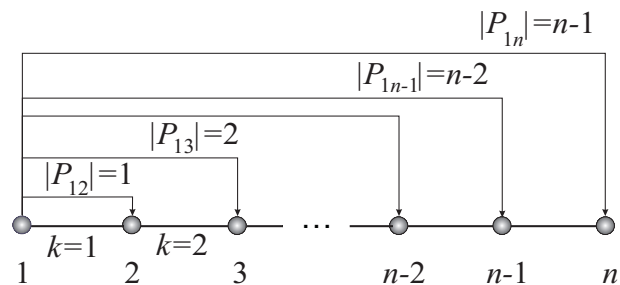


Рис. 5.2. Сеть, состоящая из n последовательно связанных элементов. Стрелками отмечены цепи (с указанием длин), проходящие через ребро $k = 1$

Учитывая широкий спектр моделей, задающих математическое описание для изменения мембранного потенциала нервной клетки, при дальнейшем теоретическом анализе будут рассмотрены пороги синхронизации, определяемые как:

$$\tilde{\varepsilon}_k^* = \frac{\varepsilon_k^*}{a} = \frac{b_k(n, m)}{n}. \quad (5.5)$$

Утверждение 1

В ансамбле, состоящем из n последовательно связанных элементов, порог полной синхронизации для k -го ребра ($k = 1, \dots, n - 1$) определяется выражением:

$$\tilde{\varepsilon}_k^* = \frac{k(n - k)}{2}. \quad (5.6)$$

Доказательство

1. Введем следующее обозначение: $S_1^n = \sum_{j=2}^n |P_{1j}|$ - сумма длин цепей P_{1j} , соединяющих первую вершину графа со всеми остальными ($j > 1$), рис. 5.2, тогда

$$S_1^n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}. \quad (5.7)$$

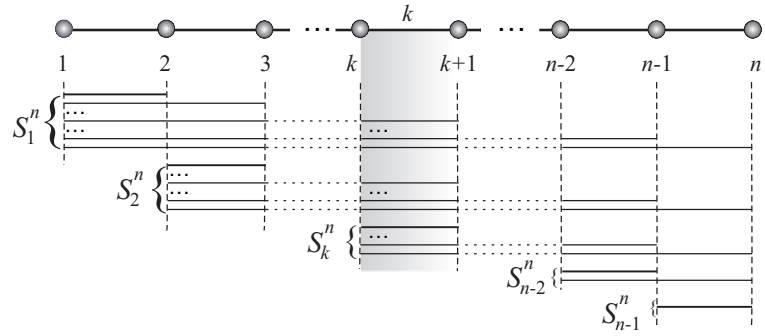


Рис. 5.3. Определение суммы длин цепей P_{ij} , проходящих через k -ое ребро графа

Очевидно, что в общем случае сумма длин цепей, соединяющих l -ую вершину со всеми вершинами вплоть до q -ой ($l < j \leq q$), будет определяться выражением:

$$S_l^q = \sum_{j=l+1}^q |P_{lj}| = \frac{[1 + (q - l)](q - l)}{2}. \quad (5.8)$$

2. Используя введенное обозначение, запишем сумму длин цепей P_{ij} , проходящих через k -ое ребро графа, рис. 5.3:

$$\begin{aligned} b_k(n, k) &= (S_1^n - S_1^k) + (S_2^n - S_2^k) + \dots + (S_{k-1}^n - S_{k-1}^k) + S_k^n = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (S_j^n - S_j^k) + S_k^n. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Разность сумм, входящих в выражение (5.9), распишем, учитывая (5.8):

$$\begin{aligned} S_j^n - S_j^k &= \frac{(1+n-j)(n-j)}{2} - \frac{(1+k-j)(k-j)}{2} = \\ &= \frac{(n-k)(n+k+1)}{2} - j(n-k). \end{aligned} \quad (5.10)$$

В результате подстановки (5.10) в (5.9) получаем:

$$\begin{aligned} b_k(n, k) &= (n-k) \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{n+k+1}{2} - j \right) + \frac{(1+n-k)(n-k)}{2} = \\ &= (n-k) \left[\left(\frac{n+k+1}{2} (k-1) - \frac{k(k-1)}{2} \right) + \frac{(1+n-k)}{2} \right] = \\ &= \frac{kn(n-k)}{2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В итоге, учитывая (5.11), по закону (5.5) получаем распределение пороговых значений сил связи, достаточных для установления режима полной синхронизации в цепочке последовательно связанных элементов:

$$\tilde{\varepsilon}_k^* = \frac{k(n-k)}{2}. \quad \blacksquare \quad (5.12)$$

5.1.1. Неоднородно связанные осцилляторы

Согласно Утверждению 1, для сохранения режима синхронного поведения элементов при увеличении их числа в цепочке изменение коэффициента связи для k -го ребра ($k = \text{const} = 1, 2, \dots, n-1$) должно происходить линейно, рис. 5.4а. При этом, чем ближе к центру цепочки расположено ребро, тем больше скорость нарастания $\tilde{\varepsilon}_k^*$. Наибольших сил связи для установления синхронного поведения элементов сети требует центральное ребро цепочки: $(\tilde{\varepsilon}_k^*)' = 0$ при $k = n/2$. Для него $k \neq \text{const}$ и изменение коэффициента связи при увеличении числа элементов происходит пропорционально n^2 . В частности, если n - *четное*, то $\tilde{\varepsilon}_{k=n/2}^* = n^2/8$ [кривая с символами « \diamond » на рис. 5.4а]. Если цепочка содержит *нечетное* число элементов, то центрального ребра нет, значение k при этом получается дробным (например, при $n = 9$, $k = 4.5$). Это означает, что максимум порога синхронизации приходится на оба ближайших к центру ребра [$k = (n+1)/2$ и $k = (n-1)/2$], рис. 5.4б. При этом $\tilde{\varepsilon}_{k=(n-1)/2}^* = \tilde{\varepsilon}_{k=(n+1)/2}^* = (n^2 - 1)/8$.

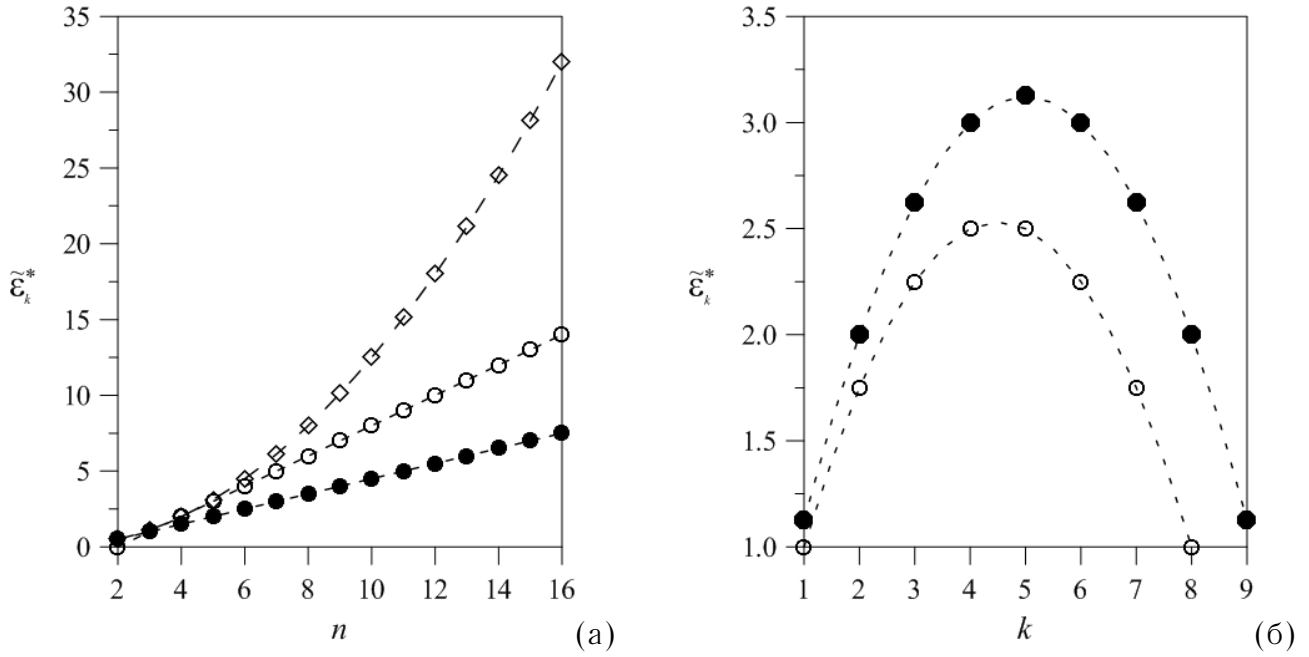


Рис. 5.4. Зависимость порогов синхронизации $\tilde{\varepsilon}_k^*$, определяемых согласно (5.6), (а) от полного числа элементов в цепочке для ребер $k = 1$ (символы «●»), $k = 2$ («○») и $k = n/2$ («◇»); (б) от номера ребра для двух случаев: $n = 9$ («○») и $n = 10$ («●»)

5.1.2. Однородно связанные осцилляторы

В случае однородной связи, когда $\varepsilon_k(t) = \varepsilon$, $k = 1, \dots, m$, порог синхронизации определяется максимальным значением распределения (5.6):

$$\varepsilon^* = \max_k \varepsilon_k^* = \begin{cases} \frac{a}{8}n^2, & n = 2l, \quad l \in N \\ \frac{a}{8}(n^2 - 1), & n = 2l + 1, \quad l \in N \end{cases} \quad (5.13)$$

Таким образом, независимо от того четное или нечетное число элементов составляет сеть, изменение порога синхронизации при увеличении числа осцилляторов в цепочке происходит пропорционально квадрату n .

5.1.3. Влияние шумов

Исследуем характер изменения оценок для порогов синхронизации в условиях наложения шумового поля. Как и в разделе 3.1.3., будем считать, что переменные, отвечающие за изменение мембранного потенциала клетки, подвержены влиянию одного и того же шумового поля. Рассмотрим следующее внешнее воздействие: $I_{ext}(t) = A \sin(2\pi ft) + \xi(t)$, где шумовая компонента $\xi(t)$ моделируется белым гауссовым процессом с нулевым средним $\langle \xi(t) \rangle = 0$

и корреляционной функцией $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau)$:

$$C_m \frac{dV_i}{dt} = I_{ion}(V_i, m_i, h_i, n_i) + I_{ext}(t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} V_j,$$

$$\frac{dm_i}{dt} = \alpha_m(1 - m_i) - \beta_m m_i,$$

$$\frac{dh_i}{dt} = \alpha_h(1 - h_i) - \beta_h h_i, \quad \frac{dn_i}{dt} = \alpha_n(1 - n_i) - \beta_n n_i. \quad (5.14)$$

Согласно (4.29) закон изменения сил связи, достаточных для установления режима полной синхронизации, примет следующий вид:

$$\varepsilon_D^*(n) = \tilde{a} \tilde{\varepsilon}^*(n), \quad \tilde{a} = a \frac{\lambda_{max}^D}{\lambda_{max}^0}, \quad D < D^*. \quad (5.15)$$

Здесь, $\lambda_{max}^0, \lambda_{max}^D$ - значения старшего ляпуновского показателя в детерминированном случае и при наличии шума с интенсивностью D , соответственно. В выражении (5.15) $D_c \approx 1.5$ - значение интенсивности шума, при котором старший ляпуновский показатель становится отрицательным (см. рис. 3.2).

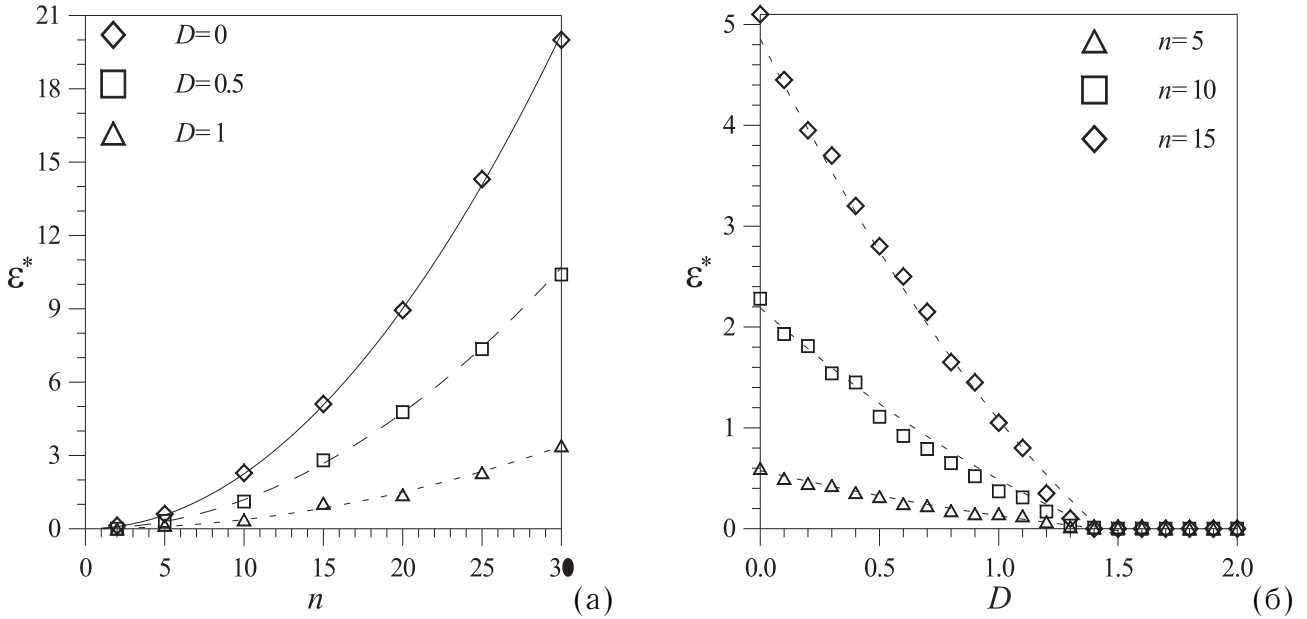


Рис. 5.5. Зависимость порога синхронизации (а) от числа элементов в цепочке в детерминированном случае и при наличии шума с интенсивностями $D = 0.5$ и $D = 1$; (б) от интенсивности шума для цепочек с различным числом элементов

На рис. 5.5а представлены зависимости, отражающие изменения в характере поведения кривых $\varepsilon^*(n)$ при увеличении интенсивности шумового воздействия, на рис. 5.5б изображены зависимости $\varepsilon^*(D)$ для цепочек, состоящих из различного числа элементов Ходжкина-Хаксли.

5.2. Многослойные структуры нейронных сетей

Многослойные сети описывают множество нейронных групп, каждая из которых представляет определенный уровень сети. Такой тип межнейронных связей можно увидеть в главных сенсорных и двигательных путях [48].

5.2.1. Сети, содержащие структуры типа «звезда»

Сети, в которых один нейрон оказывает влияние сразу на множество нервных клеток, могут выступать согласующим элементом в сложном сочетании нейросетевых систем. В частности, организованные по иерархическому принципу двигательные или сенсорные системы также могут содержать структуры такого типа. В многослойных сетях, моделирующих структуру иерархических систем, информация передается от одного уровня к другому. В реальных системах число нейронов определенного уровня, как и число связей с нейронами соседних уровней, может быть любым, поэтому рассмотренные далее сети, состоящие из двух структур типа «звезда», соединенных цепочкой последовательно связанных элементов, могут рассматриваться как один из вариантов многослойных структур, внутренние уровни которых содержат по одному нейрону. На рис.5.6 изображена диаграмма графа, соответствующего такой сети.

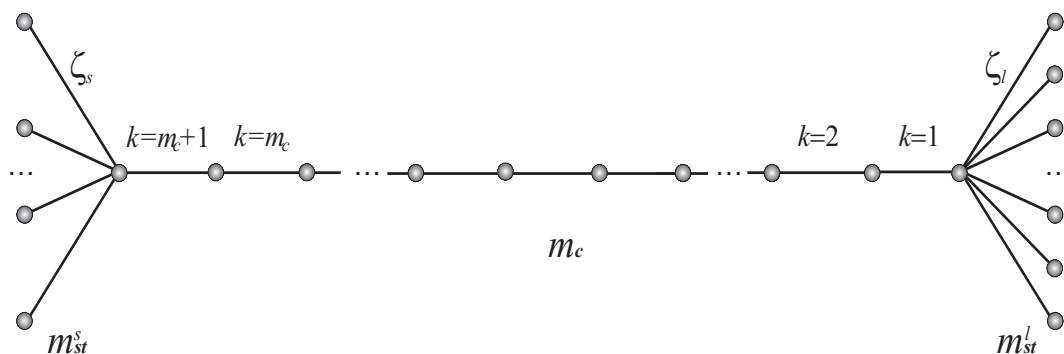


Рис. 5.6. Структура сети, в которой центральные узлы двух «звезд» связаны посредством цепи последовательно связанных элементов

Введем следующие обозначения: m_c – число элементов, составляющих цепочку, соединяющую центральные узлы «звезд»; m_{st}^l, m_{st}^s – число элементов в «звездах». Индексы l, s введены для того, чтобы можно было различать «звезды» между собой. Таким образом, полное число элементов, входящих в сеть есть $n = m_{st}^l + m_{st}^s + m_c$.

Утверждение 2

В ансамбле, представляющем собой две «звезды», связанные посредством цепочки, пороги синхронизации для ребер, принадлежащих этой

цепочке, определяются выражением:

$$\varepsilon_k^* = -0.5k^2 + \frac{m_c^2 + 2m_c + 2m_cm_{st}^s + 5m_{st}^s - m_{st}^l}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}k + \frac{(m_{st}^l - 1)[m_c(m_c + 3 + 2m_{st}^s) + 6m_{st}^s]}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}, \quad (5.16)$$

для ребер, которые не принадлежат цепочке, т.е. ребер ζ_l или ζ_s :

$$\tilde{\varepsilon}_{m_{st}^{l,s}}^* = \frac{m_c^2 + 3m_c - 8 + 4m_{st}^{l,s} + 2(m_c + 3)m_{st}^{s,l}}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}. \quad (5.17)$$

5.2.2. Многослойная сеть, определяющая граф с постоянной степенью вершин

В сенсорных системах иерархическая организация носит восходящий характер; в нее включаются различные клеточные уровни, по которым информация поступает в высшие центры - от первичных рецепторов к вторичным вставочным нейронам, затем к третичным и т.д. Двигательные системы организованы по принципу нисходящей иерархии, где команды «спускаются» от нервной системы к мышцам: клетки, расположенные, фигурально говоря, «наверху», передают информацию специфическим моторным клеткам спинного мозга, а те в свою очередь - определенным группам мышечных клеток.

Рассмотрим структуру многослойной сети, состоящей из идентичных элементов, связи между которыми устанавливаются в соответствии со следующими предположениями:

- элементы одного уровня не связаны между собой, информация по сети может передаваться лишь от уровня к уровню;
- каждый элемент связан лишь с несколькими элементами соседнего уровня

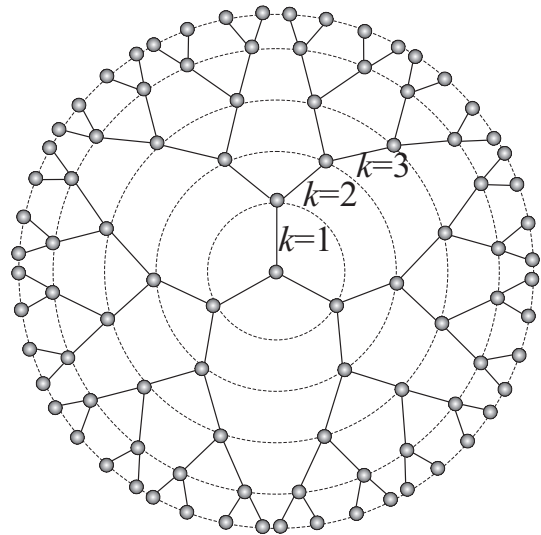


Рис. 5.7. Диаграмма графа связи, определяющего многослойную структуру сети. Полное число элементов в сети определяется степенным законом: $n = 3 \cdot 2^m - 2$, где m - полное число слоев в сети

ня. В частности, рассмотрим случай, когда каждый нейрон s -ого уровня связан с двумя нервными клетками последующего $(s + 1)$ -ого уровня.

Схематическое представление одного из возможных типов многослойной сети представлено на рис. 5.7.

Утверждение 3

Для сети многослойной структуры, которой соответствует граф с равными степенями всех вершин ($d_i = 3$), рис. 5.7, порог синхронизации для ребер, принадлежащих k -ому слою ($k = 1, 2, \dots, m$), определяется следующим образом:

$$\tilde{\varepsilon}_k^* = \frac{2^{2(m-k+1)}[(3m-5)2^k - 2(m-k) + 4]}{3 \cdot 2^m - 2} + \frac{2^{(m-k)}[(13-3m-3k)2^k - 6] - 3}{3 \cdot 2^m - 2}. \quad (5.18)$$

Контрольные вопросы и упражнения

- 5.1. Сравнить условия полной хаотической синхронизации, полученные для различных сетевых структур. Какие структуры в случае большого числа элементов синхронизовать проще, а какие сложнее?
- 5.2. Как получить порог полной синхронизации в сетях однородно связанных элементов (т.е. при $\varepsilon_k = \varepsilon, k = 1, \dots, m$)?
- 5.3. Определить ребро k , на которое приходится максимальное значение порога синхронизации в структуре, изображенной на рис. 5.6.
- 5.4. Показать, что для структуры, изображенной на рис. 5.6, порог полной хаотической синхронизации в случае однородно связанных элементов определяется выражением:

$$\tilde{\varepsilon}^* = \frac{(m_c + 3)(m_{st}^l - 1)(m_c + 2m_{st}^s)}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)} + \frac{[m_{st}^l - 5m_{st}^s - m_c(m_c + 2m_{st}^s + 2)]^2}{8(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)^2}. \quad (5.19)$$

- 5.5. Получить закон изменения порога синхронизации $\tilde{\varepsilon}^*(n)$ при следующих условиях увеличения числа элементов в сети однородно связанных элементов, рис. 5.6:

- расширение сети за счет увеличения $m_{st}^l = m_{st}^s \equiv m_{st}$ (симметричный случай) при $m_c = const$.
- расширение сети за счет увеличения m_c при $m_{st}^l = m_{st}^s \equiv m_{st} = const$ (симметричный случай).
- расширение сети за счет увеличения m_{st}^l при $m_c = const$ и $m_{st}^s = const$ (асимметричный случай).

Замечание: учесть, что $n = m_{st}^l + m_{st}^s + m_c$.

- 5.6. Численно на примере диффузионно связанных систем Хиндмарша-Роуза показать, как меняется порог синхронизации при наличии шума $\xi_i(t)$: белого гауссова процесса с нулевым средним $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ и корреляционной функцией $\langle \xi_i(t) \xi_i(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau)$, $\xi_i(t) = \xi_j(t)$, $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$.
- 5.7. Определить, на ребра какого слоя приходится максимальное значение порога синхронизации в структуре, изображенной на рис. 5.7.
- 5.8. Получить условие полной хаотической синхронизации в сетях однородно связанных элементов, представленных на рис. 5.8. Каким законом определяется полное число элементов в данных сетях?

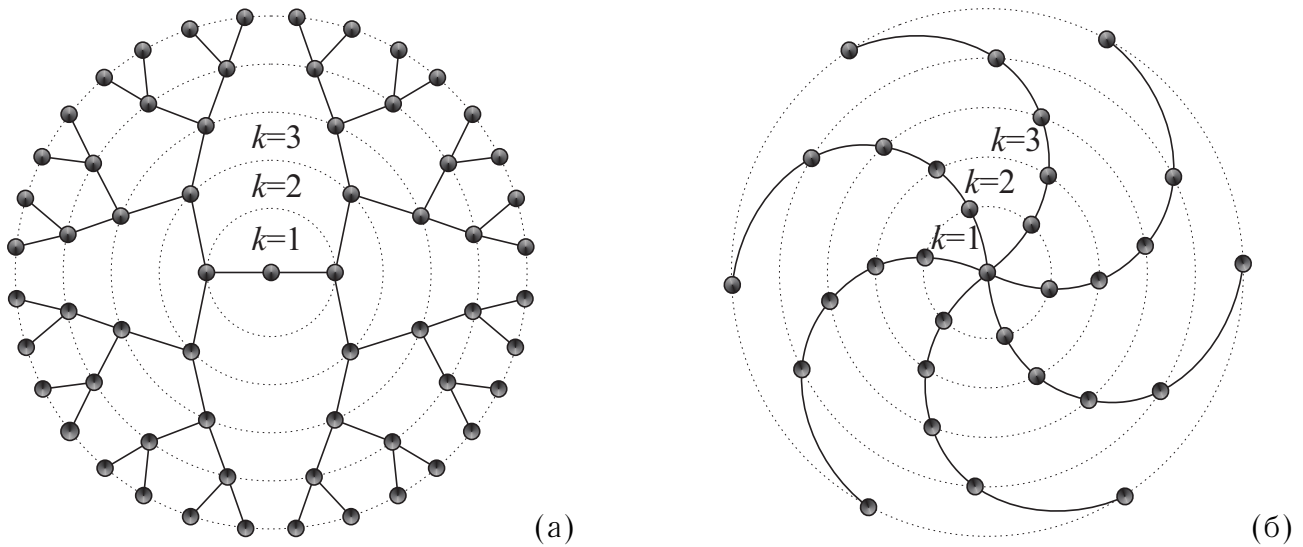


Рис. 5.8. Примеры различных структур многослойных сетей

Литература

- [1] Swadlow, H.A. Monitoring the excitability of neocortical efferent neurons to direct activation by extracellular current pulses / H.A. Swadlow // Journal of Neurophysiology. — 1992. — Vol. 68. — P. 605-619.
- [2] Izhikevich, E.M. Polychronization: Computation with spikes / E.M. Izhikevich // Neural Computation. — 2006. — Vol. 18. — P. 245-282.
- [3] Абарбанель, Г.Д.И. Синхронизация в нейронных ансамблях / Г.Д.И. Абарбанель, М.И. Рабинович, А. Сельверстон, М.В. Баженов, Р. Хуэрта, М.М. Сущик, Л.Л. Рубчинский. // Успехи физических наук. — 1996. — Т.166, №4. — С. 363-390.
- [4] Belykh, V.N. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems / V.N. Belykh, I.V. Belykh, M. Hasler // Physica D. — 2004. — Vol. 195 - P. 159-187.
- [5] Pecora, L.M. Master stability functions for synchronized coupled limit-cycle and chaotic systems / L.M. Pecora, T.L. Carroll // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — P. 2109-2112.
- [6] Pecora, L.M. Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems / L.M. Pecora // Physical Review E. — 1998. — Vol. 58, №1. — P. 347-360.
- [7] Wu, C.W. On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems / C.W. Wu, L.O. Chua // IEEE Trans. Circuits Syst. I. — 1996. — Vol. 43. — P. 161-165.
- [8] Pogromsky, A.Yu. Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems / A.Yu. Pogromsky, H. Nijmeijer // IEEE Trans. Circuits Syst. I. — 2001. — Vol.48. — P. 152-162.
- [9] Rulkov, N.F. Robustness of synchronized chaotic oscillations / N.F. Rulkov, M.M. Sushchik // Int. J. Bif. and Chaos. — 1997. — Vol. 7. — P. 625-631.
- [10] Ashwin, P. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators / P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart // Physics Letters A. — 1994. — Vol. 193. — P. 126-139.
- [11] Belykh, I.V. Generalized connection graph method for synchronization in asymmetrically networks / I.V. Belykh, V.N. Belykh, M. Hasler // Physica D. — 2006. — Vol. 224. — P. 42-51.

- [12] Zhou, C. Noise-induced synchronization and coherence resonance of a Hodgkin-Huxley model of thermally sensitive neurons / C. Zhou, J. Kurths // *Chaos*. – 2003. – Vol. 13, №1. – P. 401-409.
- [13] Belykh, V.N. Dynamics and synchronization of noise perturbed ensembles of periodically activated neuron cells / V.N. Belykh, E.V. Pankratova, E. Mosekilde // *Int. J. Bif. Chaos*. – 2008. – Vol. 195. – P. 2807-2815.
- [14] Koshiya, N. Neuronal pacemaker for breathing visualized in vitro / N. Koshiya, J.C. Smith // *Nature*. – 1999. – Vol. 400. – P. 360-363.
- [15] Gray, C.M. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties / C.M. Gray, P. König, A.K. Engel, W. Singer // *Nature*. – 1989. – Vol. 338. – P. 334-337.
- [16] Stopfer, M. Impaired odour discrimination on desynchronization of odour-encoding neural assemblies / M. Stopfer, S. Bhagavan, B.H. Smith, G. Laurent // *Nature*. – 1997. – Vol. 390. – P. 70-74.
- [17] Steinmetz, P.N. Attention modulates synchronized neuronal firing in primate somatosensory cortex / P.N. Steinmetz, A. Roy, P.J. Fitzgerald, S.S Hsiao, K.O. Johnson, E. Niebur // *Nature*. – 2000. – Vol. 404. – P. 187-190.
- [18] Freund, H.-J. Motor unit and muscle activity in voluntary motor control / H.-J. Freund // *Physiol. Rev*. – 1983. – Vol. 63. – P. 387-436.
- [19] Engel, J. *Epilepsy: A Comprehensive Textbook* / J. Engel, T.A. Pedley // Philadelphia: Lippincott-Raven, 1975.
- [20] Boccaletti, S. The synchronization of chaotic systems / S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. Valladares, C. Zhou // *Physics Reports*. – 2002. – Vol. 366. – P. 1-101.
- [21] Пиковский, А. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртс. – Москва: Техносфера, 2003.
- [22] Анищенко, В.С., Вадивасова, Т.Е. Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по спец. «Радиофизика и электроника» и «Физика». – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010.
- [23] Hodgkin, A.L. A quantitative description of membrane current and its application conduction and excitation in nerve / A.L. Hodgkin, A.F. Huxley // *J. Physiology*. – 1952. – Vol. 117 – P. 500-544.
- [24] Ходжкин, А. Нервный импульс / А. Ходжкин. – Москва: Мир, 1965.

- [25] Keener, J. Mathematical Physiology / J. Keener, J. Sneyd. — Berlin: Springer Verlag, 1998.
- [26] Антонов, В.Ф. Биофизика / В.Ф. Антонов, А.М. Черныш, В.И. Пасечник, С.А. Вознесенский, Б.К. Козлова. — Москва: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999.
- [27] Рубин, А.Б. Биофизика / А.Б. Рубин. — Москва: Книжный дом, "Университет 1999.
- [28] Окс, С. Основы нейрофизиологии / С. Окс. — Москва: Мир, 1969.
- [29] Morris, C. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber / C. Morris, H. Lecar // Biophys. J. — 1981. — Vol. 35. — P. 193-213.
- [30] Scott, A. Encyclopedia of nonlinear science. / A. Scott. — Great Britain: Taylor&Francis Group, 2006.
- [31] Fitzhugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. Fitzhugh // Biophys. J. — 1961. — Vol. 1. — P. 445-466.
- [32] [https : //en.wikipedia.org/wiki/FitzHugh – Nagumo_model](https://en.wikipedia.org/wiki/FitzHugh-Nagumo_model)
- [33] Nagumo, J.S. An active pulse transmission line stimulating nerve axon / J.S. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // Proc. IRE. — 1962. — Vol. 50. — P. 2061-2071.
- [34] Rinzel, J. A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems, in Mathematical Topics in Population Biology, Morphogenesis, and Neurosciences, Lecture Notes in Biomath. Vol. 71, p. 267-281. E. Teramoto and M. Yamaguti, eds., Springer-Verlag, Berlin. 1987.
- [35] Hindmarsh, J.L. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations / J.L. Hindmarsh, R.M. Rose // Proc. Roy. Soc. London B. — 1984. — Vol. 221. — P. 87-102.
- [36] Осипов, Г.В. Синхронизация внешним периодическим воздействием. / Г.В. Осипов, А.В. Половинкин // Учебное пособие, 2005.
- [37] Павлов, А.Н. Методы анализа сложных сигналов. Учебное пособие для студ. физ. фак., Саратов: Научная книга, 2008.
- [38] Hramov, A.E. An approach to chaotic synchronization / A.E. Hramov, A.A. Koronovskii // Chaos. — 2004. — Vol. 14(3). — С. 603-610.

- [39] Короновский, А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов // Успехи физических наук. — 2009. — т. 179, №1. — С. 1281-1310.
- [40] Rulkov, N.F. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems / N.F. Rulkov, M.M. Suschik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 51. — P. 980-994.
- [41] Kocarev, L. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of inidirectionally coupled dynamical systems / L. Kocarev, U. Parlitz // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 76, №11. — P. 1816-1819.
- [42] Rulkov, N.F. Detectability of nondifferentiable generalized synchrony / N.F. Rulkov, V.S. Afraimovich // Phys. Rev. E. — 2003. — V. 67. — P. 066218.
- [43] Parlitz, U. Experimental observation of phase synchronization / U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, L. Kocarev // Physical Rev. E. — 1996. — Vol. 54. — P. 2115.
- [44] Pyragas, K. Weak and strong synchronization of chaos // Physical Rev. E. — 1997. — Vol. 56, №5 — P. 5183.
- [45] Abarbanel, H.D.I. Generalized synchronization of chaos: the auxiliary system approach / H.D.I. Abarbanel, N.F. Rulkov, M.M. Suschik // Phys. Rev. E. — 1996. — Vol. 53. — P. 4528.
- [46] Osipov, G.V. Three types of transistons to phase synchronization in coupled chaotic oscillators / G.V. Osipov, B. Hu, C.S. Zhou, M.V. Ivanchenko, J. Kurths // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 91 №2. — P. 024101.
- [47] Benettin, G. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I. Theory. Part II. Numerical application G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.M. Strelcyn // Meccanica. — 1980. — Vol. 15. — P. 9-30.
- [48] Блум, Ф. Мозг, разум и поведение / Ф. Блум, А. Лейзерсон, Л. Хофстедтер. — Москва: Мир, 1988.
- [49] Харари, Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. — Москва: Мир, 1977.
- [50] Захарова, А.С. Взаимосвязь порога синхронизации с коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы хаотических автоколебаний А.С. Захарова, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко // Нелинейная динамика. — 2008. — Т. 4, №2. — С. 169-180.

- [51] Rosenblum, M.G. From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators / M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, №22. — P. 4193-4196.
- [52] Toral, R. Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems / R. Toral, C.R. Mirasso, E. Hernandez-Garcia, O. Piro // Chaos. — 2001. — Vol. 11, №3. — P. 665-673.
- [53] Jensen, R.V. Synchronization of randomly driven nonlinear oscillators / R.V. Jensen // Phys. Rev. E. — 1998. — Vol. 58, №6. — P. 6907-6910.
- [54] Белых, В.Н. Хаотическая синхронизация в ансамблях связанных нейронов, моделируемых системой ФитцХью-Ринцеля / В.Н. Белых, Е.В. Панкратова. // Известия вузов. Радиофизика. — 2006. — Т. 49. — С. 1002-1014.
- [55] Панкратова, Е.В. Особенности перехода к режиму полной синхронизации в сетях элементов Ходжкина-Хаксли / Е.В. Панкратова, В.Н. Белых. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2008. — Т. 16, №2. — С. 3-19.
- [56] Belykh, I. Synchronization and graph topology / I.V. Belykh, M. Hasler, M. Lauret, H. Nijmeijer // Int. J. of Bif. and Chaos. — 2005. — Vol. 15, №11. — P. 3423-3433.

Евгения Валерьевна **Панкратова**

СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В СЕТЯХ НЕЙРОДИНАМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,4. Уч.-изд.л.
Заказ № . Тираж 25 экз.

Отпечатано в типографии
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37