

Лабораторная работа №1 «Дискретизация аналоговых сигналов»

Радиофизическая лаборатория 2020-2021 уч. год., понедельник 17:05–20:00

Группы Б01-818, С01-819 ФРКТ МФТИ, УЛК-1 4.22 (Физтех.Цифра) / онлайн

Даты	Разделы
1 февраля 2021 г.	Занятие 1. Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.
8 февраля 2021 г.	Занятие 2. Спектры импульсных и периодических сигналов.
15 февраля 2021 г.	Занятие 3. Эффект наложения спектров при дискретизации сигналов.
22 февраля 2021 г.	<i>План занятия будет уточнен.</i>
1 марта 2021 г.	Сдача лабораторной работы.

Для организации занятий используется Google Класс

<https://classroom.google.com/c/MjU5OTE4NzU0NTk3?cjc=ucm3du4>

Также необходимо подключиться к Google Классу по лекционному курсу «Дискретные преобразования сигналов»

<https://classroom.google.com/c/MjQ3NzMwMzg2Nzg2?cjc=aemjux>

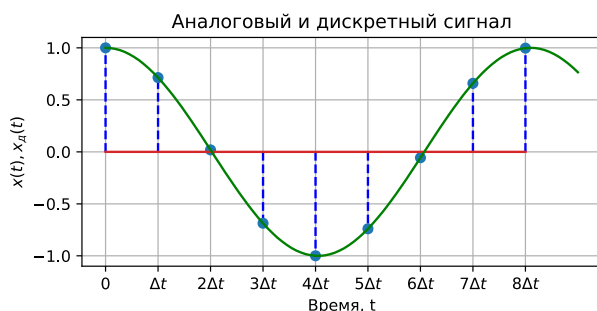
Для доступа к Google Классу потребуется авторизация со своим аккаунтом в домене @phystech.edu. Информацию о получении доступа к своему аккаунту @phystech.edu можно найти на сайте УИТ МФТИ. Если возникла ошибка «Неверный аккаунт. У этого аккаунта нет доступа к данному курсу. Смените аккаунт или свяжитесь с преподавателем», то Вы авторизовались не под аккаунтом в домене @phystech.edu.

Занятие 1. Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.

Теоретическая часть

Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.

Под **сигналом** обычно понимают величину, отражающую состояние физической системы. Поэтому естественно рассматривать сигналы как функции, заданные в физических координатах. Примером могут служить одномерные сигналы, заданные как функции времени $x(t)$, двумерные сигналы заданные на плоскости $I(x, y)$. В качестве сигналов могут выступать различные величины. Пример одномерного сигнала — зависимость напряжения в сети от времени $U(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$. Далее мы будем рассматривать в основном одномерные сигналы.



Аналоговые или непрерывные сигналы $x(t)$ описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями, причем как сама функция, так и ее аргумент могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

Дискретные сигналы, могут быть описаны в виде счетного набора отсчетов (значений) в заданные моменты времени $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации. Частота дискретизации f_d (размерность в Гц) — это величина, обратная шагу дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.

Цифровые сигналы, помимо того, что они являются дискретными, могут принимать лишь конечное число значений, соответствующих уровням квантования. Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из дискретизации и квантования, которые осуществляются аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Обычно число уровней квантования 2^m , где m — разрядность АЦП.

Для дискретных сигналов будем использовать следующие описания.

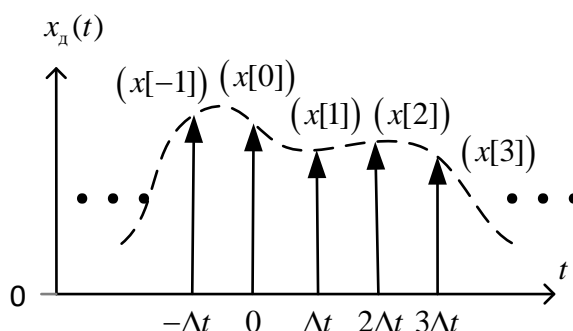
1) Функция дискретного времени k .

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации. Далее мы будем использовать квадратные скобки для обозначения функций дискретного аргумента.

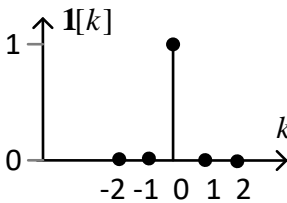
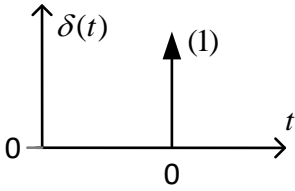
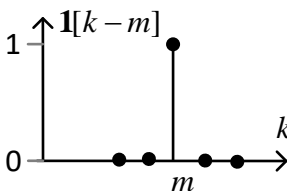
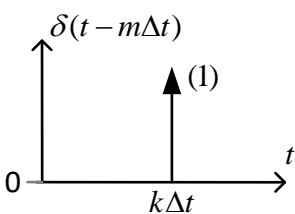
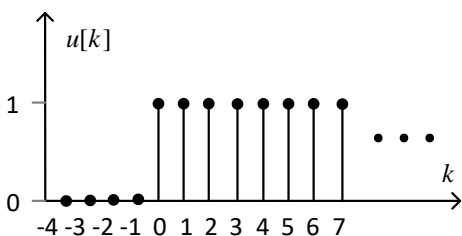
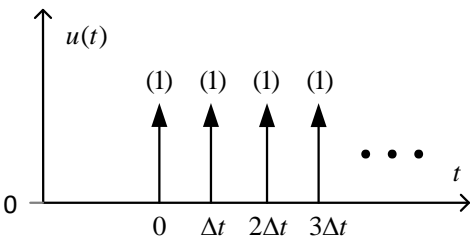
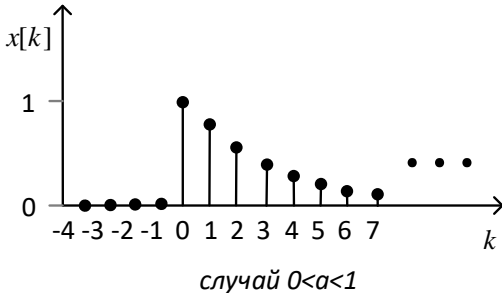
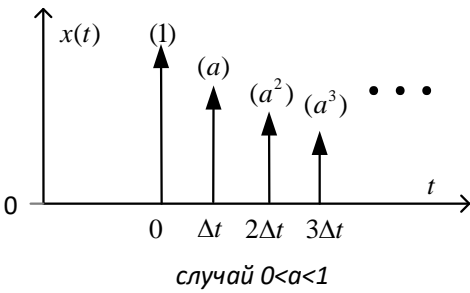
2) Функция непрерывного времени t (континуальная запись).

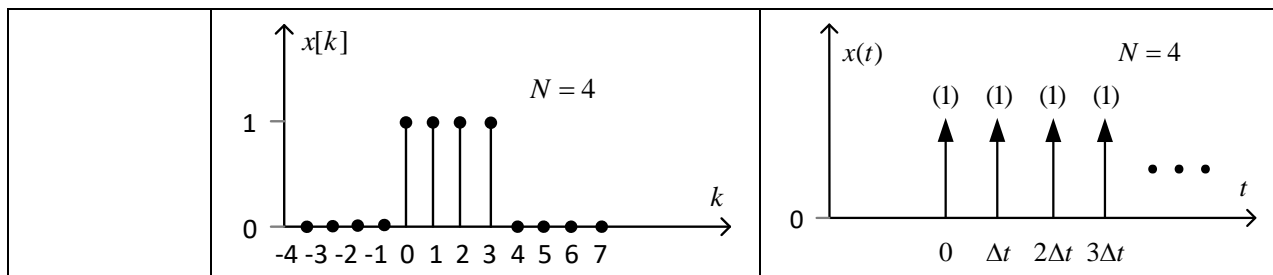
$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)$$

В этой записи дискретный сигнал представляет собой последовательность дельта-функций с площадями $x[k]$.



Далее мы вернемся к этим двум формам записи и покажем, как связь между $x[k]$ и $x(k\Delta t)$ влияет на соотношение между спектрами дискретизованного и исходного сигнала.

Дискретный сигнал	Описание в виде функции дискретного времени	Описание в виде функции непрерывного времени
Единичный импульс в точке 0	$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$ $\mathbf{1}[k]$ — единичный импульс 	$\delta(t)$ $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака 
Единичный импульс в точке m	$\mathbf{1}[k - m] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases}$ 	$\delta(t - m\Delta t)$ 
Дискретная функция включения	$u[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$ 	$\sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\Delta t)$ 
Дискретная экспонента	$x[k] = \begin{cases} a^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$  <p style="text-align: center;">случай $0 < a < 1$</p>	$\sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t - m\Delta t)$  <p style="text-align: center;">случай $0 < a < 1$</p>
Последовательность из N единичных импульсов	$x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$	$x(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(t - m\Delta t)$



Задание

Задание расположено в файле **Lab1_task.ipynb**. Первому занятию соответствуют следующие задачи.

- **Задача 1.1. Дискретизация и квантование.**
- **Задача 1.2. Декодирование .wav файла**

Контрольные вопросы

Вопрос 1.1. Объясните, в чем заключается отличие между аналоговым, дискретным и цифровым сигналом.

Вопрос 1.2. Имеется одноканальная (моно) аудиозапись с битовой глубиной 16 бит на отсчет (разрядность АЦП равна 16), представленная в виде .wav файла. Частота дискретизации 44100 Гц. Определите число уровней квантования АЦП и шаг дискретизации Δt . Оцените длительность сигнала, если объем файла составляет 280 КБ и никакое дополнительное сжатие не производится.

(такой файл доступен по ссылке <https://freesound.org/people/xserra/sounds/219759/>)

Вопрос 1.3. Привести континуальную запись (в виде последовательности дельта-функций) для следующих сигналов:

а) единичного импульса, задержанного на семь тактов дискретизации

$$x[k] = \mathbf{1}[k - 7],$$

б) дискретизованной синусоиды с относительной частотой $\nu_0 = \frac{1}{4}$

$$y[k] = \sin\left(2\pi \frac{1}{4} k\right),$$

в) последовательности из пяти единичных импульсов

$$x[k] = \sum_{m=0}^4 \mathbf{1}[k - m],$$

г) дискретной экспоненты вида

$$x[k] = \begin{cases} (-0,5)^n, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Занятие 2. Спектры импульсных и периодических сигналов.

Теоретическая часть

Преобразование Фурье

Все реальные сигналы имеют конечную удельную энергию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Например, если $x(t)$ — напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, то интеграл представляет собой энергию, выделяемую на единичном сопротивлении, и эта энергия конечна. В этом случае $x(t)$ — функция с интегрируемым квадратом на всей оси. По теореме Планшереля для функции $x(t)$ существует функция $X(f)$ также с интегрируемым квадратом на всей оси, связанная с $x(t)$ соотношением:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left| X(f) - \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df = 0.$$

Если функции $x(t)$ и $X(f)$ абсолютно интегрируемы, то

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Эти формулы представляют собой пару преобразования Фурье (FT), где частота f измеряется в Герцах (Гц). Для частоты циклической частоты $\omega = 2\pi f$, измеряемой в рад/с (радианы в секунду) пара преобразования Фурье имеет вид:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Первый интеграл называется спектральной плотностью, а второй — интегралом Фурье. Далее будем использовать запись вида $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$, что означает, что для сигнала $x(t)$ преобразование Фурье будет $X(f)$.

Свойства преобразования Фурье

Предположим, что $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$ и $y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(f)$. Тогда справедливы следующие свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности.

Для заданных чисел $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\beta \in \mathbb{C}$ $\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{FT} \alpha X(f) + \beta Y(f)$.

2. Теорема запаздывания.

Для заданной задержки по времени τ (или опережения в случае $\tau < 0$)

$$x(t - \tau) \xleftrightarrow{FT} e^{-j2\pi f\tau} X(f).$$

3. Теорема смещения.

$$x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(f + f_0);$$

4. Теорема Парсеваля-Релея.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df.$$

5. Теорема о спектре произведения.

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} X(f) \otimes Y(f),$$

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tilde{f})Y(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

6. Теорема о спектре свертки.

$$x(t) \otimes y(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f);$$

7. Теорема об изменении масштаба.

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

8. Теорема о спектре производной.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j2\pi f X(f)$$

9. Теорема о производной спектра:

$$t \cdot x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j2\pi} \frac{dX(f)}{df}.$$

Спектры гармонических сигналов

Вычислим обратное преобразование Фурье для $X(f) = \delta(f - f_0)$, т.е. от дельта-функции в точке f_0 оси частот.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t}.$$

Тогда с учетом того, что $\cos(2\pi f_0 t) = (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) / 2$ и $\sin(2\pi f_0 t) = (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) / 2j$, получаем

$$1 \overset{FT}{\longleftrightarrow} \delta(f),$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{FT}{\longleftrightarrow} \delta(f - f_0),$$

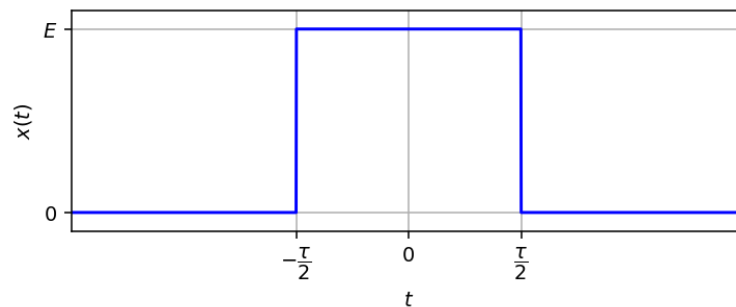
$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0),$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0).$$

Спектры импульсных сигналов

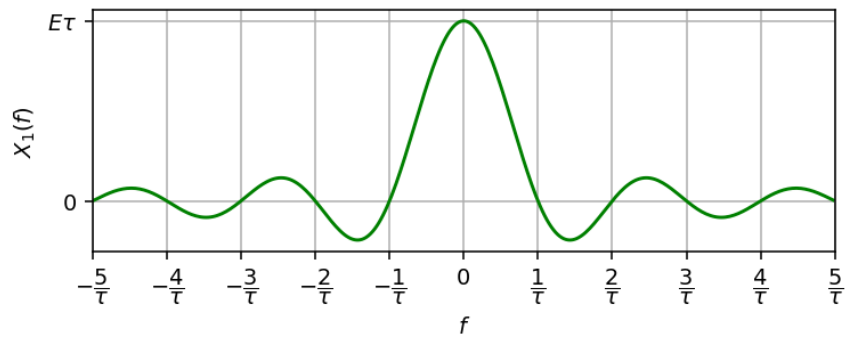
Симметричный прямоугольный импульс длительностью τ

$$x_1(t) = \begin{cases} E, & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



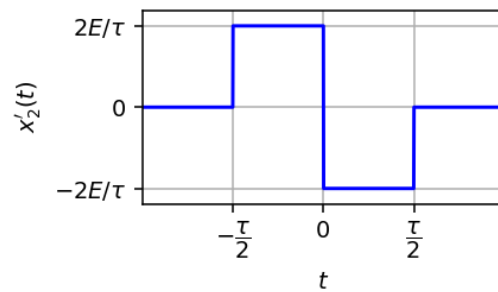
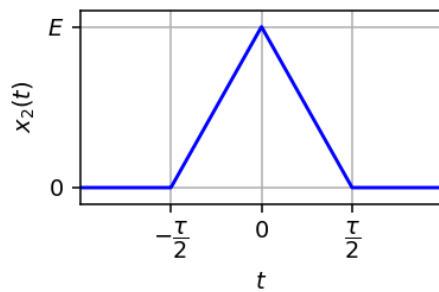
Спектр

$$X_1(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi f t} dt = \frac{E}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = E \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = E \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$

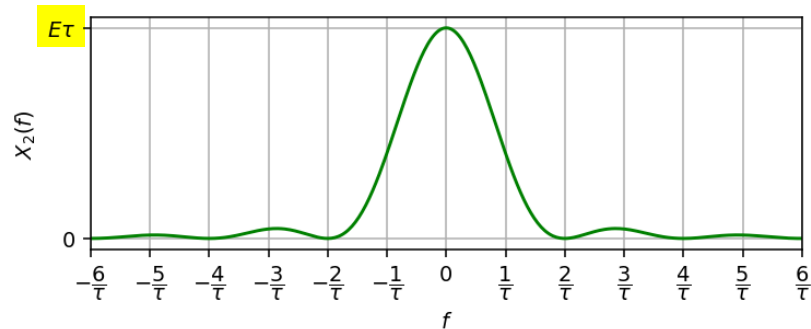


Симметричный треугольный импульс длительностью τ .

$$x_2(t) = \begin{cases} |t| - \frac{1}{2}\tau, & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



$$X_2(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j\pi f \tau/2} - e^{-j\pi f \tau/2}) 2E \frac{\sin(\pi f \tau/2)}{\pi f \tau/2} = E\tau \frac{\sin^2(\pi f \tau/2)}{(\pi f \tau/2)^2}$$



Косинусоидальный импульс длительностью τ .

$$x_3(t) = \begin{cases} E \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$

$$x_3(t) = x_1(t) \cos(2\pi \frac{1}{2\tau} t) = \frac{1}{2} x_1(t) \left(e^{j2\pi \frac{1}{2\tau} t} + e^{-j2\pi \frac{1}{2\tau} t} \right)$$

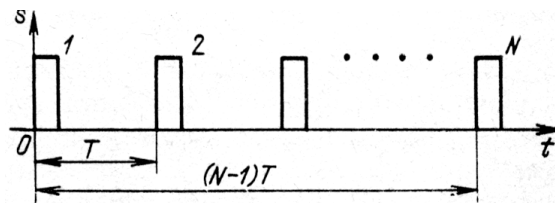
а значит

$$X_3(f) = \frac{1}{2} X_1(f - \frac{1}{2\tau}) + \frac{1}{2} X_1(f + \frac{1}{2\tau})$$

$$X_3(f) = X_1(f) \otimes \left(\frac{1}{2} \delta(f - \frac{1}{2\tau}) + \frac{1}{2} \delta(f + \frac{1}{2\tau}) \right) = \frac{1}{2} X_1(f - \frac{1}{2\tau}) + \frac{1}{2} X_1(f + \frac{1}{2\tau})$$

Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Найдём спектр пачки равноотстоящих импульсов. Для определённости возьмём пачку из N прямоугольных импульсов



Обозначим через $X_1(\omega)$ спектральную плотность первого импульса. Тогда для группы из N равноотстоящих импульсов в соответствии с теоремой запаздывания будем иметь

$$X(\omega) = X_1(\omega) [1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \dots + e^{-j\omega (N-1)T}] = X_1(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega kT}.$$

На частотах $\omega = n2\pi/T$, где n – целое, каждое слагаемое в квадратных скобках равно единице, следовательно:

$$X(\omega = n2\pi/T) = NX_1(\omega = n2\pi/T).$$

Таким образом, на частотах $\omega = n2\pi/T$ модуль спектра пачки в N раз больше модуля спектра одиночного импульса. Это объясняется тем, что на частотах $\omega = n2\pi/T$ спектральные компоненты различных импульсов складываются с фазовыми сдвигами, кратными 2π .

Суммируя N членов геометрической прогрессии, получаем

$$X(\omega) = X_1(\omega) \frac{1 - e^{-j\omega NT}}{1 - e^{-j\omega T}} = X_1(\omega) \frac{e^{-j\omega NT/2} [e^{j\omega NT/2} - e^{-j\omega NT/2}]}{e^{-j\omega T/2} [e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}]} = X_1(\omega) e^{-j\omega (N-1)T/2} \frac{\sin \omega NT/2}{\sin \omega T/2}.$$

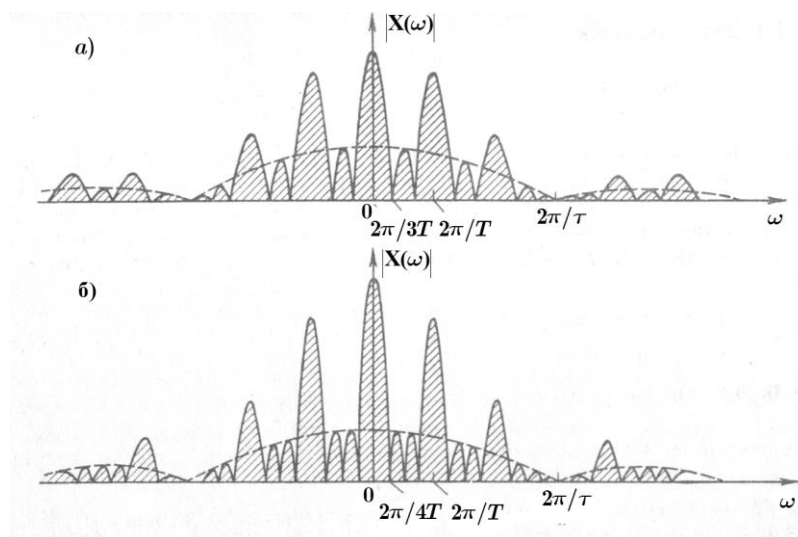
Видно, что на частотах $\omega = m2\pi/NT$, где m – целое, $X(\omega) = 0$. Подставляя сюда значение

$$X_1(\omega) = E\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2},$$

где τ – длительность отдельного импульса, получаем окончательно для спектра пачки из N равноотстоящих прямоугольных импульсов:

$$X(\omega) = e^{-j\omega[(N-1)T/2 + \tau/2]} E\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \frac{\sin \omega NT/2}{\sin \omega T/2}.$$

Для иллюстрации на рис. 1.8.14а изображён модуль спектра пачки из трёх прямоугольных импульсов, а на рис. 1.8.14б – из четырёх. При этом интервал между соседними импульсами $T = 3\tau$. Пунктиром изображён модуль спектра одиночного импульса. С увеличением числа импульсов в пачке спектральная плотность $X(\omega)$ при $N \rightarrow \infty$ принимает дискретную структуру спектра периодической функции. Нетрудно обобщить этот результат на произвольную форму одиночного импульса.



Модуль спектра пачки прямоугольных импульсов: а – три импульса в пачке, б – четыре импульса в пачке

Примеры решения задач

Задача 1.

Определить спектр $X(f)$ гармонического сигнала

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

где $f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 200$ Гц. Какой вид будет иметь спектр для $x(t)w(t)$, где $w(t)$ — некоторая оконная функция.

Решение

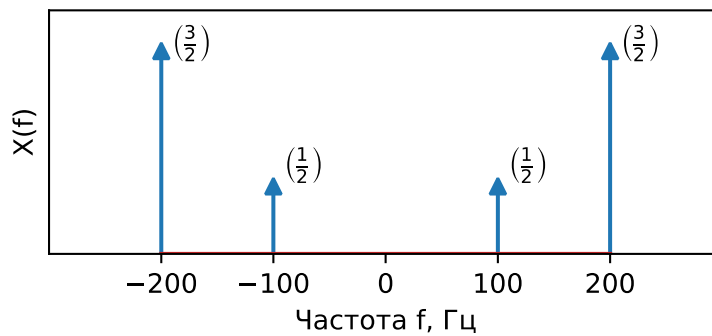
По свойствам преобразования Фурье

$$\exp(j2\pi f_0 t) \xrightarrow{FT} \delta(f - f_0),$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0).$$

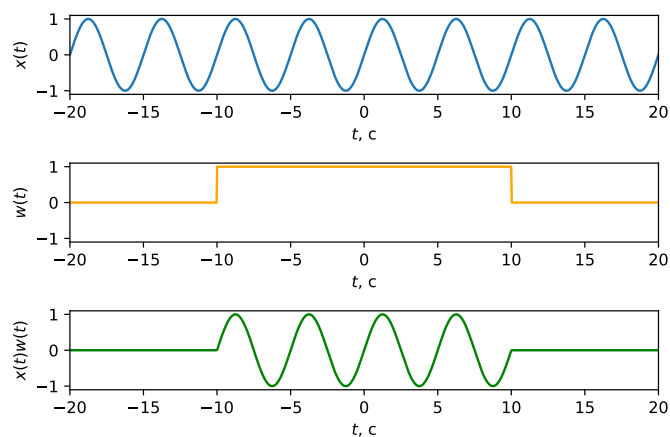
Тогда по свойству линейности преобразования Фурье

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2)$$



Ограничение сигнала по длительности.

Ограничение сигнала по длительности эквивалентно умножению на прямоугольную оконную функцию.



$y(t) = w(t)x(t)$. Пусть $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$, $w(t) \xleftrightarrow{FT} W(f)$, $y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(f)$.

$$w(t)x(t) \xleftrightarrow{FT} W(f) \otimes X(f),$$

$$w(t)x(t) \xleftrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

В нашем примере

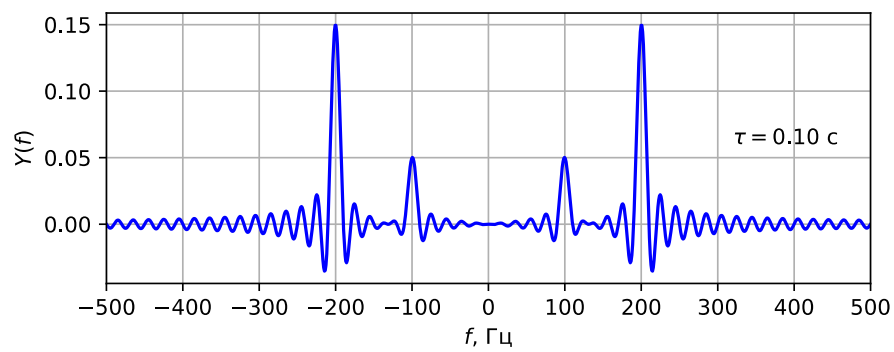
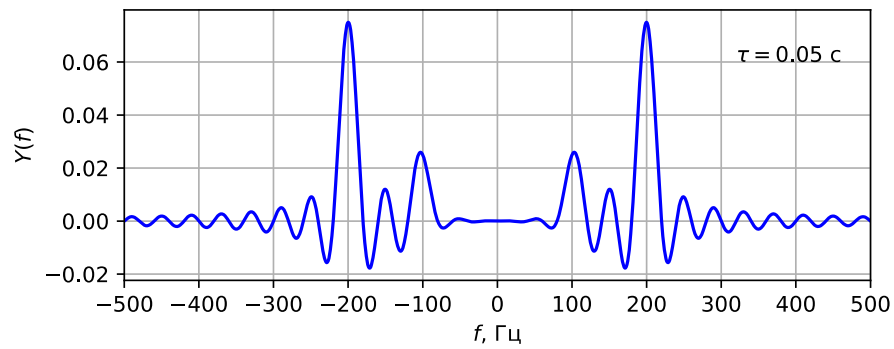
$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2).$$

$$w(t)x(t) \xleftrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}W(f - f_1) + \frac{1}{2}W(f + f_1) + \frac{3}{2}W(f - f_2) + \frac{3}{2}W(f + f_2).$$

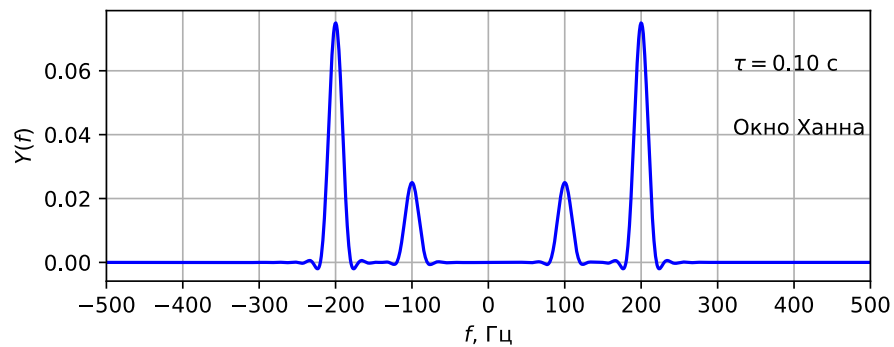
Спектр прямоугольного окна длиной τ соответствует спектру прямоугольного импульса длиной τ с высотой $E = 1$

$$W(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$



Для окна Ханна

$$W_H(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{2\pi f (1 - \tau^2 f^2)}.$$



Задача 2.

Определите спектр $W_H(f)$ аналогового окна Ханна длительностью τ .

$$w_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right), & \text{если } |t| < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Приведем два способа решения, отличные от непосредственного вычисления преобразования Фурье по формуле.

Решение 1.

Пусть $w(t)$ — прямоугольное окно той же длительности.

$$w_H(t) = \frac{1}{2} w(t) + \frac{1}{4} w(t) \exp\left(j2\pi t \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4} w(t) \exp\left(-j2\pi t \frac{1}{\tau}\right).$$

Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье

$$W_H(f) = \frac{1}{2} W(f) + \frac{1}{4} W\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4} W\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$$

Далее остается подставить $W(f)$.

Решение 2.

Рассмотрим сигнал $x(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right)$.

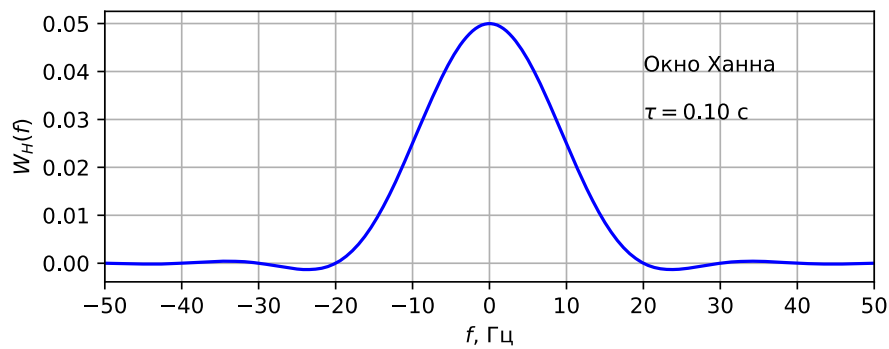
Его спектр $X(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{4} \delta\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4} \delta\left(f + \frac{1}{\tau}\right)$.

При этом $w_H(t) = w(t)x(t)$ и $W_H(f) = W(f) \otimes X(f)$.

Используя фильтрующее свойство δ -функции, получаем

$$W_H(f) = \frac{1}{2} W(f) + \frac{1}{4} W\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4} W\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$$

$$W_H(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{2\pi f (1 - \tau^2 f^2)}.$$



Задание

Задание расположено в .ipynb файле. Второму занятию соответствуют следующие задачи.

- **Задача 2.1. Спектры симметричных импульсов**
- **Задача 2.2. Теорема запаздывания для преобразования Фурье**
- **Задача 2.3. Спектр отрезка синусоиды**
- **Задача 2.4. Спектр пачки равноотстоящих импульсов**

Контрольные вопросы

Вопрос 2.1. Определите спектр $X(f)$ аналогового гармонического сигнала

$$x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t), \quad f_1 = 100 \text{ кГц}, \quad f_2 = 250 \text{ кГц}.$$

Вопрос 2.2. Определите спектр $W(f)$ аналогового симметричного окна Ханна длительностью τ .

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right), & \text{если } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Вопрос 2.3. Вычислите спектр $X_1(f)$ одностороннего экспоненциального импульса для случая $\alpha > 0$

$$x_1(t) = \begin{cases} E \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Найдите амплитудный $|X_1(f)|$ и фазовый $\varphi_1(f) = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im} X(f)}{\operatorname{Re} X(f)}\right)$ спектры этого сигнала.

Воспользовавшись этим результатом, определите спектральную плотность для двухстороннего экспоненциального импульса $x_2(t) = E \exp(-\alpha |t|) = x_1(t) + x_1(-t)$.

Вопрос 2.4. Показать, что спектральная плотность гауссова импульса $x(t) = \exp(-\beta^2 t^2)$ является гауссовой функцией частоты¹

$$X(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\left(\frac{\pi f}{\beta}\right)^2}.$$

Вопрос 2.5. Воспользовавшись свойством преобразования Фурье — теоремой о производной спектра, определить для случая $\alpha > 0$ спектральную плотность сигнала

$$x_3(t) = \begin{cases} t \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Вопрос 2.6. Пусть $X(f)$ — спектр некоторого сигнала $x(t)$ конечной длительности. Определить спектр сигнала $x(t) \cos(2\pi f_0 t)$, где $f_0 = 10$ кГц.

Занятие 3. Эффект наложения спектров при дискретизации сигналов.

Теоретическая часть

Спектр дискретизованного сигнала

Рассмотрим способы описания дискретизованного сигнала, т.е. дискретного сигнала, получаемого из аналогового с помощью дискретизации.

1) Функция дискретного времени.

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t$, $n \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации:

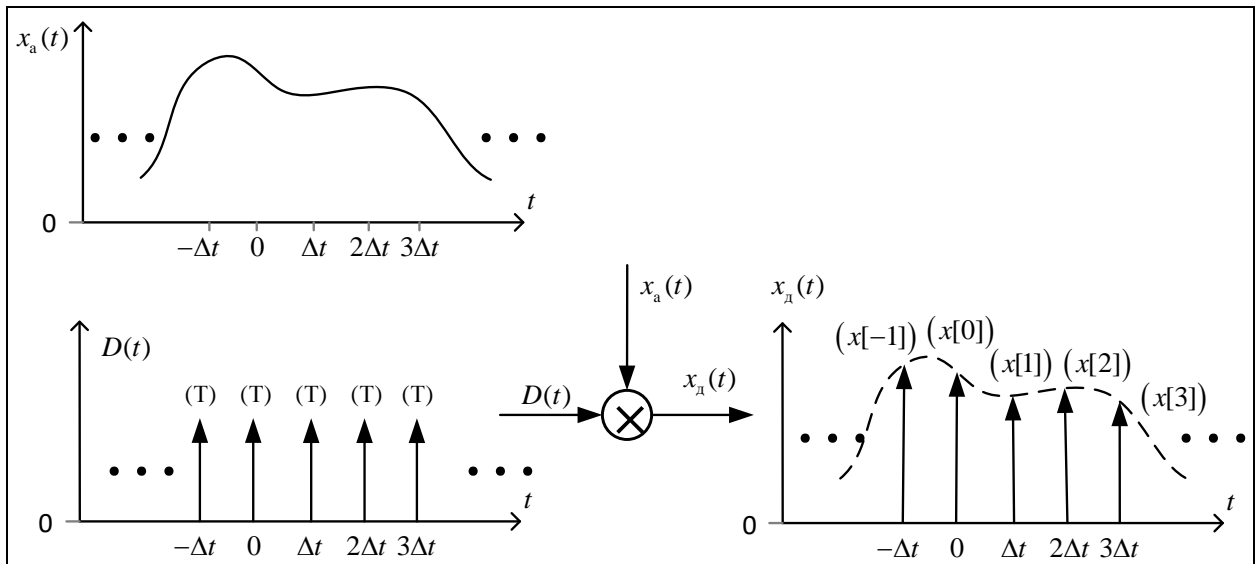
$$x[k] = Tx(k\Delta t), \quad T \in \{1; \Delta t\}$$

где T — константа с размерностью времени, равная единице или Δt . Выбор этой константы, как будет показано далее, влияет на связь между спектром дискретизованного и исходного сигнала.

2) Функция непрерывного времени (континуальная запись).

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

¹ Возможно, что в решении потребуются табличный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi} d\xi = \sqrt{\pi}$. Отдельно его определять не нужно.



В этой записи дискретизованного сигнала представляется как результат умножения исходного аналогового сигнала $x(t)$ на идеальную функцию дискретизации, представляющую собой периодическую последовательность дельта-функций Дирака с площадями T

$$D(t) = T\delta(t - k\Delta t).$$

В таком случае дискретизованный сигнал описывается последовательностью дельта-функций с площадями (весами) $x[k] = Tx(k\Delta t)$:

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Tx(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t).$$

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)$$

Определим спектр дискретизованного сигнала $X_d(f)$, зная спектр исходного аналогового сигнала до дискретизации $X(f)$. Воспользуемся континуальной формой записи дискретизованного сигнала

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - n\Delta t) = D(t)x(t)$$

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

Ряд Фурье для идеальной функции дискретизации

$$D(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm\frac{2\pi}{\Delta t}t).$$

Таким образом, $x_d(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t)$ да по теореме смещения для преобразования Фурье:

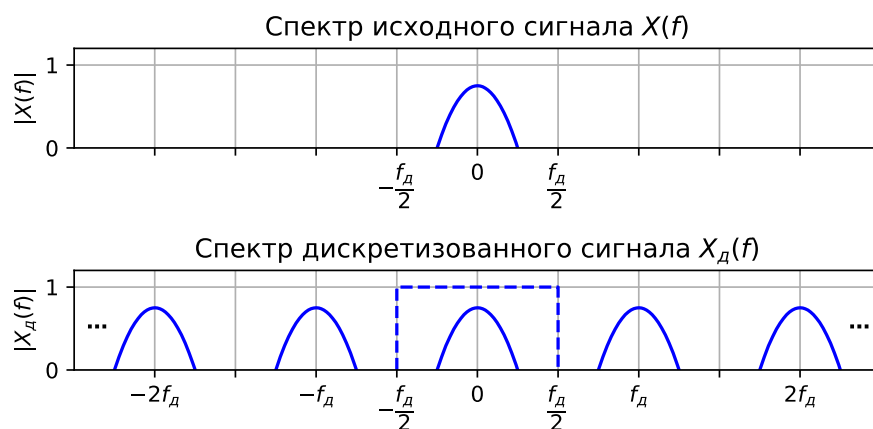
$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

При непосредственном взятии отсчетов $x[k] = x(k\Delta t)$ константа $T=1$, и спектр перед периодическим повторением масштабируется.

При $T = \Delta t$ (когда $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$) дискретизация аналогового сигнала $x(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению его спектра с периодом (по частоте), равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$

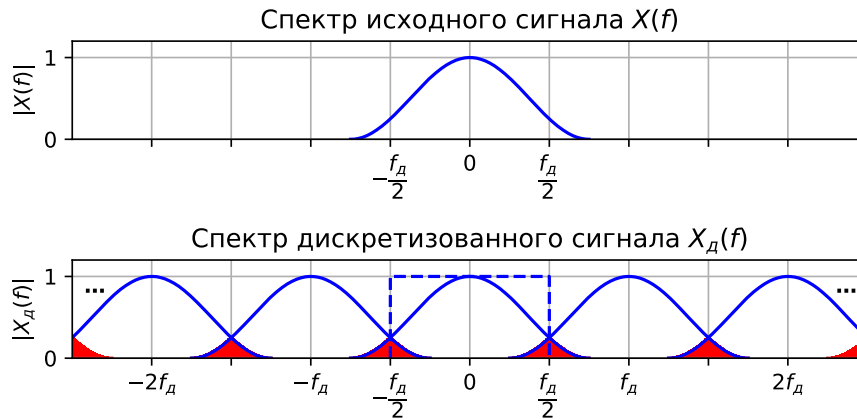
$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

Заметим, что при этом интервал $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$ является одним периодом функции $X_d(f)$. Если спектр аналогового сигнала лежит в этом интервале, то он периодически повторяется без наложения.



Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$, то возникает **эффект наложения** (англ. **aliasing**, элайзинг, алиасинг). В таком случае спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают. Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза $f_c = f_d / 2$, при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах $|f| > f_c$ не сохраняется.



Теорема Котельникова во временной области

Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шеннон 1949 г.).

Если сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_B, f_B]$, и не содержит гармонических компонент на частотах $\pm f_B^2$, то он представим с помощью своих дискретных

отсчетов $x(k\Delta t)$, взятых с шагом $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

Приведем две различные интерпретации этой теоремы.

1) Если сигнал $x(t)$ дискретизован с частотой f_d , а его спектр ограничен интервалом $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$, его можно представить с помощью дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$. Частота $f_d/2$, равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.

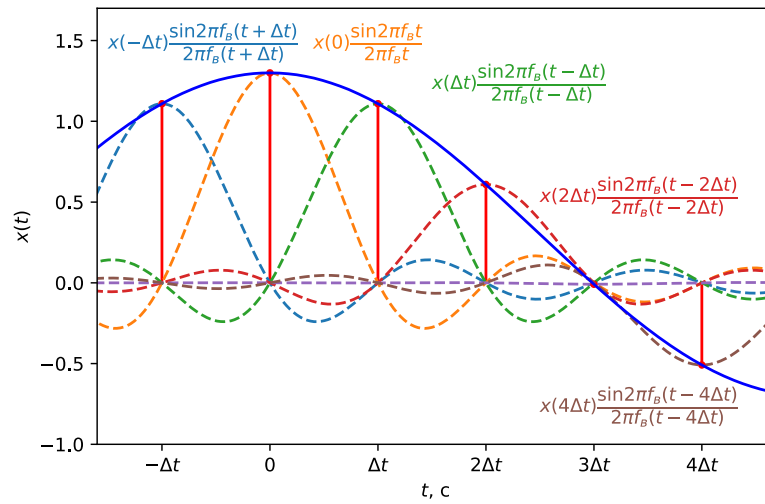
2) Отсчеты $x(k\Delta t)$ являются коэффициентами Фурье разложения сигнала $x(t)$ по базису из функций отсчетов:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

В пространстве сигналов из $L_2(-\infty, \infty)$ с спектром, ограниченным интервалом $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$, система функций $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ полна и ортогональна.

² Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала

$$x(t) = \sin(2\pi f_B t) \text{ с шагом } \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$



Для сигнала $x(t)$ с финитным спектром $X(f)$ запишем представление по функциям отсчетов:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)},$$

где

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} dt$$

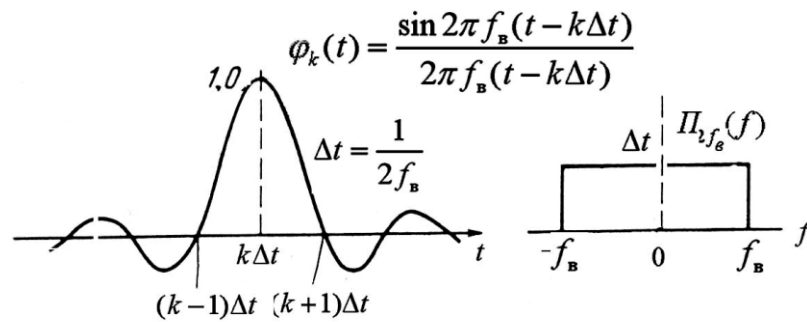
есть коэффициенты Фурье и $\Delta t = 1/2f_B$. Спектр функции отсчётов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{-j2\pi f t} dt = \Pi_{2f_B}(f) \exp(-j2\pi f k\Delta t)$$

имеет фазовый множитель из-за сдвига по времени на $k\Delta t$. Модуль этого спектра $\Pi_{2f_B}(f)$ является прямоугольной функцией с единичной площадью. С учётом обобщённого равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

выражение для коэффициента c_k можем записать в виде



$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_s}(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Произведение под интегралом при $-f_s < f < f_s$

$$X(f) \Pi_{2f_s}(f) = X(f) \frac{1}{2f_s} = X(f) \Delta t,$$

Поэтому $c_k = x(k\Delta t)$. Отсюда вывод: если сигнал имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_s, f_s]$ и шаг дискретизации $\Delta t = 1/2f_s$, то коэффициенты Фурье c_k разложения сигнала по функциям отсчётов $\varphi_k(t)$ являются выборками сигнала $x(k\Delta t)$ и для $x(t)$ имеет место представление рядом Котельникова:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)}.$$

Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.

- Взять отсчеты $x(k\Delta t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями $\Delta t x(k\Delta t)$.
- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания $[-f_s, f_s]$, подавая на вход сформированные короткие импульсы

Недостатки подхода.

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.

Теорема отсчетов в частотной области

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например, $[-T, T]$. Поэтому можно считать, что $x(t)$ является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Для периодического продолжения $x(t)$ с периодом $2T$ (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_n(t) = \sum_n c_n \exp(j2\pi n \Delta f t),$$

где $\Delta f = 1/2T$ и коэффициенты Фурье

$$c_n = (1/2T) \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi n \Delta f t) dt = \Delta f X(n\Delta f).$$

Для спектральной функции можем записать

$$X(f) = \int_{-T}^T \left[\sum_n \Delta f X(n\Delta f) \exp(j2\pi n \Delta f t) \right] \exp(-j2\pi f t) dt = \Delta f \sum_n X(n\Delta f) \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt.$$

Интеграл в этом выражении легко находится

$$\int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt = \frac{1}{j2\pi(n\Delta f - f)} \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) \Big|_{-T}^T = \frac{2 \sin 2\pi T(n\Delta f - f)}{2\pi(n\Delta f - f)}.$$

Для $X(f)$ окончательно получаем

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - n\Delta f)}{2\pi T(f - n\Delta f)}; \quad \Delta f = 1/2T.$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция $X(f)$ на любой частоте f однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы $\Delta f = 1/2T$.

Дискретизация спектральной функции с шагом $\Delta f = 1/2T$ приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом $2T$. При этом эффекта наложения отдельных периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчётов в спектральной области. Выделив один из периодов, например, при $t \in [-T, T]$, можно точно восстановить спектральную функцию $X(f)$, взяв преобразование Фурье для $x(t)$.

Эффект наложения спектров при дискретизации синусоидальных сигналов

Дискретизация сигнала $x(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению исходного спектра $X(f)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$. Полезная информация содержится в полосе $[-f_d/2, f_d/2]$. Если не принять специальных мер, возникает эффект наложения, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие

половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр. Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна $f_c = 1/2\Delta t$. Частота $f_d/2$ в зарубежной литературе называется частотой Найквиста.

Дискретизация сигнала $x(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению исходного спектра $X(f)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$. Полезная информация содержится в полосе $[-f_d/2, f_d/2]$. Если не принять специальных мер, возникает эффект наложения, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр. Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна $f_c = 1/2\Delta t$. Частота $f_d/2$ в зарубежной литературе называется частотой Найквиста.

При дискретизации синусоидальных сигналов необходимо следить за тем, чтобы частоты синусоид не превосходили половину частоты дискретизации, как того требует теорема Котельникова. Несоблюдение этого условия приводит к парадоксальным результатам, например, при наблюдении восстановленных синусоид в цифровом осциллографе.

Пусть сигнал $x(t) = \sin \pi f_0 t$ дискретизируется с частотой f_d отсчетов в секунду, т. е. через равные интервалы времени $\Delta t = 1/f_d$. Для последовательности отсчетов можем записать

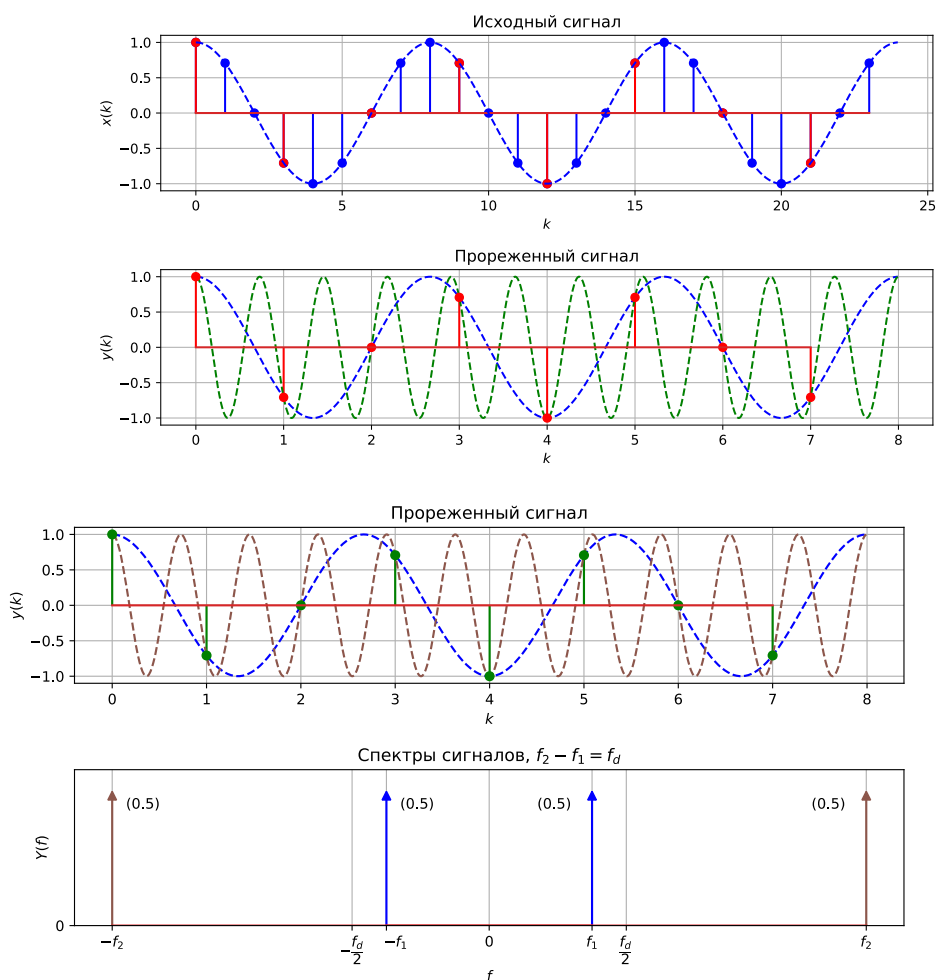
$$x[k] = \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin(2\pi f_0 k \Delta t + 2\pi m) = \sin 2\pi(f_0 + m/k\Delta t)k\Delta t.$$

Если выберем m кратным k , $m = nk$, мы можем заменить отношение m/k целочисленной переменной n , так что

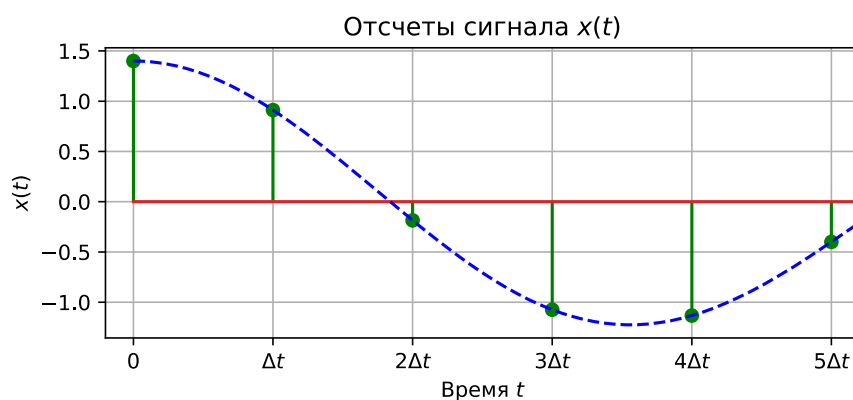
$$x[k] = \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin 2\pi(f_0 + n/\Delta t)k\Delta t = \sin 2\pi(f_0 + n f_d)k\Delta t.$$

Следовательно, частоты f_0 и $f_0 + n f_d$ дают одинаковый результат. Это выражение показывает, что последовательность цифровых отсчетов $x(k)$, представляющая синусоиду с частотой f_0 Гц, точно так же представляет синусоиды с другими частотами $f_0 + n f_d$. Это одно из важнейших соотношений в области цифровой обработки сигналов.

Вывод. При дискретизации с частотой f_d отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизованные значения синусоиды частотой f_0 Гц и синусоиды частотой $(f_0 + n f_d)$ Гц, если n —любое положительное или отрицательное целое число.



Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов



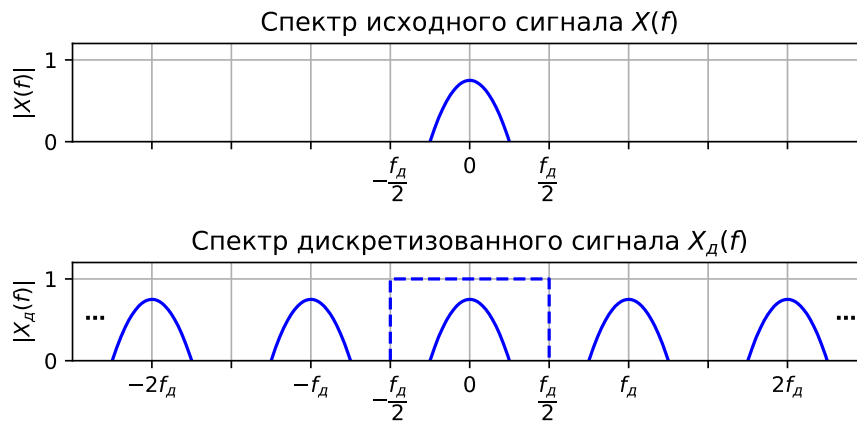
Пусть есть последовательность выборок $x(k\Delta t)$, $k \in Z$ некоторого аналогового сигнала $x(t)$, где Δt — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов, $k \in Z$ — номер отсчета. $f_d = 1/\Delta t$ — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность $[Гц] = [с^{-1}]$). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом $[-f_d/2; f_d/2]$, а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ($f_d > 2f_B$).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал) $x[k]$, которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = Tx(k\Delta t),$$

где $T = \Delta t$. Как ранее было установлено, при $T = \Delta t$ спектр дискретизованного сигнала $x[k]$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X_a(f)$ аналогового сигнала $x(t)$ с периодом, равным частоте дискретизации f_d :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_d).$$



Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $[-f_d/2; f_d/2]$. Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Континуальная запись дискретного сигнала $x[k]$ в данном случае

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi ft) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t), \end{aligned}$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t). \quad (1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции $X_d(f)^3$, получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (2)$$

В итоге получаем пару формул (1) и (2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала $x[k]$, который на отрезке оси частот $[-f_d/2; f_d/2]$ в отсутствие наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$.

Задание

Задание расположено в .ipynb файле. Третьему занятию соответствуют следующие задачи.

- **Задача 3.1.** Эффект наложения при дискретизации прямоугольного импульса
- **Задача 3.2.** Эффект наложения при прореживании сигнала¶

Контрольные вопросы

Вопрос 3.1. Определить аналоговый сигнал $x_a(t)$, после дискретизации без наложения с шагом Δt которого получается единичный импульс $x[k] = \mathbf{1}[k] = \Delta t x_a(k\Delta t)$ ($T = \Delta t$):

а) используя ряд Котельникова

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)};$$

б) восстановив аналоговый сигнал, используя значения ДВПФ последовательности $x[k]$ на периоде $[-f_d/2, f_d/2]$.

Вопрос 3.2. Воспользовавшись равенством Парсеваля для преобразования Фурье, показать, что функции отсчетов

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_s},$$

имеют конечную удельную энергию $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$, и доказать их ортогональность в $L_2(-\infty; \infty)$.

³ Напоминание. Для $2l$ - периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на интервале $(-l; l)$ ряд Фурье по системе функций $\phi_m(x) = \exp(jm\frac{\pi}{l}x)$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm\frac{\pi}{l}x), \quad \text{где коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm\frac{\pi}{l}x) dx$$

Вопрос 3.3. Определить, будут ли различимы синусоиды с частотами $f_1 = 20$ кГц и $f_2 = 80$ кГц при их дискретизации с частотой $f_d = 60$ кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения?

Список литературы

В качестве литературы рекомендуются учебные пособия [1]–[3]. Эти книги есть в библиотеке МФТИ.

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов. Изд. 2-Е, . М.: МФТИ, 2007. 332 с.
2. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2007. 120 с.
3. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2018. 560 с.