

Лабораторная работа №3 «Цифровой спектральный анализ детерминированных сигналов»

Радиофизическая лаборатория 2020-2021 уч. год

группы Б01-818, С01-819

Даты	Разделы
12 апреля 2021 г. 19 апреля 2021 г.	Занятия 1 и 2. ДПФ и спектральный анализ Окна в спектральном анализе
26 апреля 2021 г.	Занятие 3. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT) Сдача допуска.
3 мая 2021 г. / 17 мая 2021 г.	Сдача лабораторной работы

Данная лабораторная работа посвящена основам цифрового спектрального анализа. Ей предшествует лабораторная работа №2 ДВПФ и ДПФ и лабораторная работа №1 дискретизация аналоговых сигналов. Работа нацелена на изучение эффектов, возникающих при спектральном анализе.

Под детерминированностью сигнала в данном случае подразумевается то, что спектральный анализ производится для конкретной реализации, которая полностью определена. Спектральный анализ случайных процессов, представленных ансамблем реализаций, подробно рассматривается в лабораторной работе «Цифровой спектральный анализ» на 5 курсе.

Лабораторная работа состоит из трех частей, каждая из которых рассчитана на одно занятие (4 ак. часа). Задания по моделированию выполняются с помощью библиотек языка программирования Python 3 (NumPy, SciPy, Matplotlib) либо в среде MATLAB.

Задание к допуску

№1. Вычислить ДПФ $W[n]$ и ДВПФ $W(\nu)$ для следующих оконных функций длины N .

а) Прямоугольное окно

$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

б) Окно Ханна

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

в) Окно Хэмминга

$$w_{\text{Хэмминга}}[k] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

г) Окно Блэкмана

$$w_{\text{Блэкмана}}[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

№2. Вычислите ДВПФ последовательности $y[k] = x[k]w[k]$, где $x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16}k)$ и

$$w[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m].$$

№3. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_{\text{в}} = 10$ кГц ($f_{\text{в}}$ – верхняя граничная частота) дискретизируется с минимально возможной частотой дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов. В результате получается последовательность $x[k]$. Обозначим через $X[n]$ 1000-точечное ДПФ последовательности $x[k]$.

а) Каким частотам (в Гц) в ДВПФ последовательности $x[k]$ соответствуют отсчеты ДПФ с номерами $n_1 = 100$ и $n_2 = 850$?

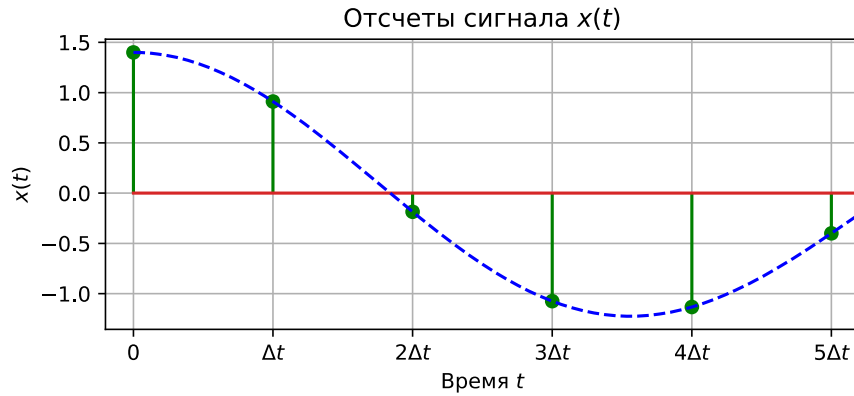
б) Каким частотам (в Гц) в спектре исходного сигнала $x(t)$ соответствуют индексы $n_1 = 100$ и $n_2 = 850$ в последовательности $X[n]$?

№4. Последовательность $x[k]$ из 1000 элементов получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ с частотой $f_{\text{д}} = 20480$ Гц. Обозначим через $X[n]$ 1024-точечное ДПФ последовательности $x[k]$ (дополненной нулевыми отсчетами). Определить расстояние (в Гц) между непрерывными частотами, которые соответствуют соседним отсчетам ДПФ.

Занятие 1. ДПФ и спектральный анализ

Теоретическая часть

В первой части лабораторной работы мы будем рассматривать следующую ситуацию. Предположим, что наблюдается некоторый аналоговый сигнал $x(t)$. Мы получили его выборки $x(k\Delta t)$, $k \in \mathbb{Z}$ с шагом Δt . Чтобы значительно ослабить эффект наложения (полностью его исключить, как правило, невозможно), перед взятием выборок сигнал $x(t)$ был пропущен через фильтр.



Предположим, что время наблюдения конечно и мы наблюдаем N отсчетов сигнала $x(k\Delta t)$, $k=0,1,\dots,N-1$. Задача состоит в том, чтобы с помощью ДПФ по этим выборкам оценить спектр сигнала.

Вычисление спектра дискретизованного сигнала с помощью ДПФ

Спектр дискретизованного сигнала $X_d(f)$ определяется с помощью ДВПФ через выборки $x[k]$:

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Отметим, что сигнал в рассматриваемом нами случае дискретизованной сигнал представлен конечным числом отсчетов $x[k]$, $k=0,1,\dots,N-1$. Как правило, мы можем определить ДВПФ лишь в N точках на оси частот $f_n = n \frac{f_d}{N} = n\Delta f$, $n \in \mathbb{Z}$ на одном периоде по оси частот, например на $[0; f_d)$. Тогда мы вычисляем

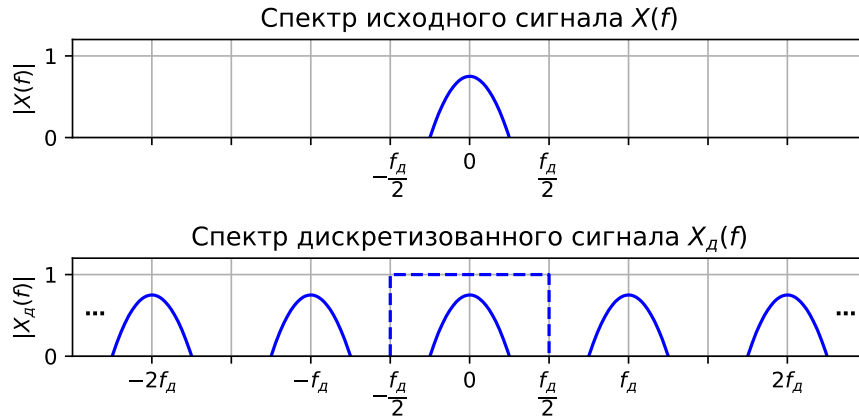
$$X_d(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right), \text{ для } n=0, 1, \dots, N-1.$$

Заметим, что мы получили формулу прямого ДПФ, т.е. $X[n] = X_d(n\Delta f)$ и ДПФ представляют собой выборки спектра дискретизованного сигнала, взятые с шагом $\Delta f = \frac{f_d}{N}$. Шаг по частоте Δf определяет разрешение по частоте.

Если частотное разрешение недостаточно для анализа, то мы можем его увеличить дополнив рассматриваемую последовательность нулевыми отсчетами. Добавление нулевых отсчетов никак не изменяет сам дискретный сигнал, однако увеличивает размерность ДПФ, а значит и число точек, в которых мы вычисляем спектр. Пусть сигнал дополнен нулями до M отсчетов, $M > N$. Тогда

$$X_d(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right), \text{ для } n = 0, 1, \dots, M-1.$$

Оценка спектра исходного сигнала с помощью ДПФ



Заметим, что $f = nf_d / N$ Гц – это частота в спектре дискретизированного сигнала, который при отсутствии наложения спектров образуется путем периодического продолжения (повторения) спектра исходного аналогового сигнала с периодом, равным частоте дискретизации (f_d в случае оси в Гц или 1 в случае оси нормированных частот). Это означает, что отсчет ДПФ с номером n будет соответствовать в спектре аналогового сигнала частоте $f \in [-f_d/2; f_d/2]$, такой, что $f = (n + mN)f_d / N$, где m – целое число.

Пример задачи спектрального анализа

Приведем пример задачи спектрального анализа по обнаружению и оцениванию параметров сигнала. Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \sin\left(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где A_m и φ_m – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; m – неизвестные заранее целые числа, определяющие нормированные частоты $\nu_m = m/N$ гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ. Для определения A_m и φ_m в этом случае достаточно вычислить ДПФ последовательности:

$$\begin{aligned} \tilde{X}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=1}^M A_m \sin\left(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m\right) \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2j} \sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{j \frac{2\pi}{N} mk + \varphi_m} - e^{-j \frac{2\pi}{N} mk - \varphi_m} \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2j} \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (m-n)k + \varphi_m} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (N-m-n)k - \varphi_m} \right] = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sum_{m=1}^M \left[\tilde{X}[m] = \frac{A_m}{2} e^{j(\varphi_m - \pi/2)} \right], & \text{если } n \in \left[0, \frac{N}{2} - 1 \right], \\ \sum_{m=1}^M \left[\tilde{X}[N-m] = \frac{A_m}{2} e^{-j(\varphi_m - \pi/2)} \right], & \text{если } n \in \left[\frac{N}{2}, N-1 \right]. \end{cases}$$

Отсюда находим неизвестные амплитуды и фазы:

$$A_m = 2|\tilde{X}[m]|; \quad \varphi_m = \arg \tilde{X}[m] + \pi/2, \quad m \in \left[0, \frac{N}{2} - 1 \right]$$

Задание на моделирование

Задание расположено в .ipynb файле. Этому занятию соответствуют следующие задачи.

Задача 1.1. Частотная ось ДПФ.

Задача 1.2. Задача распознавания спектральных компонент

Контрольные вопросы

№1. Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \cos(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где A_m и φ_m – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; m – неизвестные заранее целые числа, определяющие нормированные частоты $\nu_m = m/N$ гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ.

Выразите неизвестные амплитуды A_m и фазы φ_m через отсчеты ДПФ данной последовательности.

№2. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_b = 10$ кГц (f_b – верхняя граничная частота) дискретизируется с шагом Δt . В результате получается последовательность $x[k] = x(k\Delta t)$. Вычисляется N –точечное ДПФ, где $N = 2^m$, m – натуральное число. Определить минимальное значение m , при котором анализ возможен, а расстояние между отсчетами ДПФ по оси частот в герцах будет меньше 5 Гц. Для этого значения m определить допустимые пределы для частоты дискретизации $f_{\min} < f < f_{\max}$.

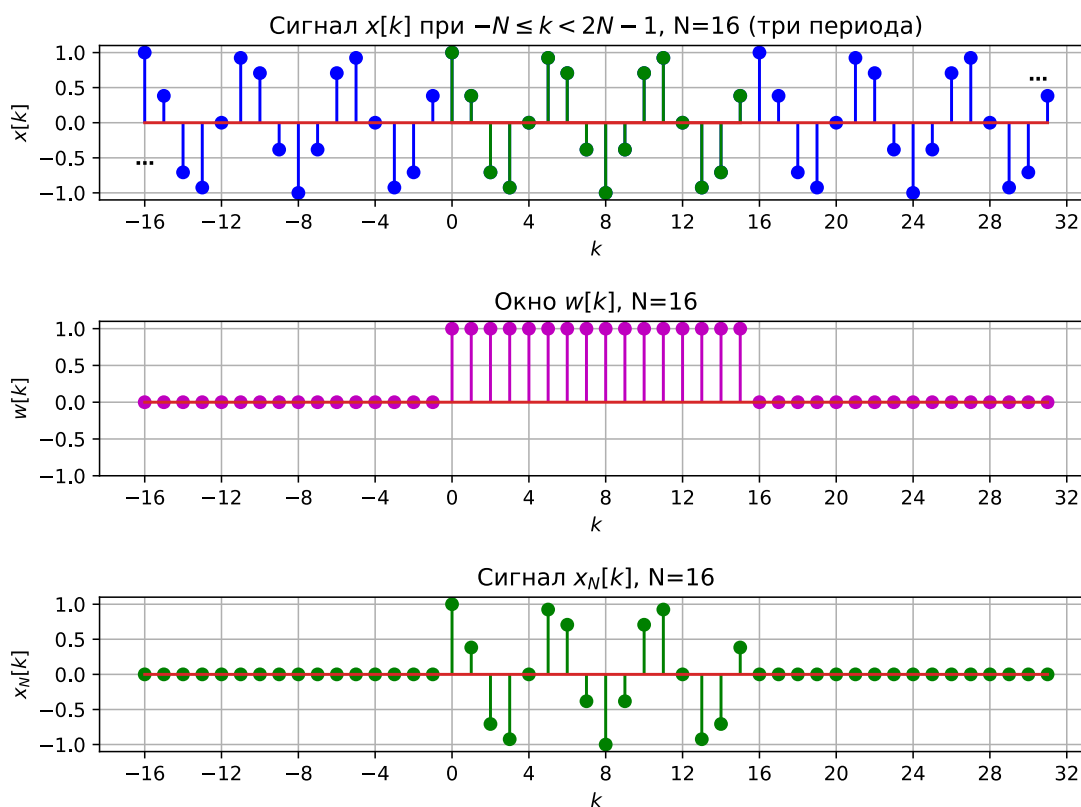
Занятие 2. Окна в спектральном анализе

Теоретическая часть

Эффекты растекания спектральных компонент и утечки спектра через боковые лепестки окна

Эффект растекания спектральных компонент неизбежно возникает при умножении последовательности на оконную функцию. Даже ограничение сигнала по длительности — умножение на прямоугольную оконную функцию — приводит к тому, что гармоники в спектре сигнала «размываются» в спектральные максимумы.

Пример.



Предположим, что имеется периодическая последовательность $x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k)$.

ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(v - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2} \delta(v + \frac{3}{16} - n).$$

$X(v)$ содержит две δ -функции с площадями $1/2$ на каждом периоде.

Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности

$$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k), \text{ т.е. для последовательности } x_N[k] = x[k]w[k], \text{ где } w[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m].$$

Заметим, что

$$W(v) = e^{-j(N-1)\pi v} \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)},$$

$$X(v) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v - \frac{3}{16} - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v + \frac{3}{16} - m).$$

Способ 1. ДВПФ последовательности $Y(v)$ может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v - \tilde{v})d\tilde{v} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{v})X(v - \tilde{v})d\tilde{v}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(v)\delta(v - v_1)dv = \begin{cases} W(v_1), & a < v_1 < b, \\ 0.5W(v_1), & (v_1 = a) \cup (v_1 = b), \\ 0, & (v_1 < a) \cup (v_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

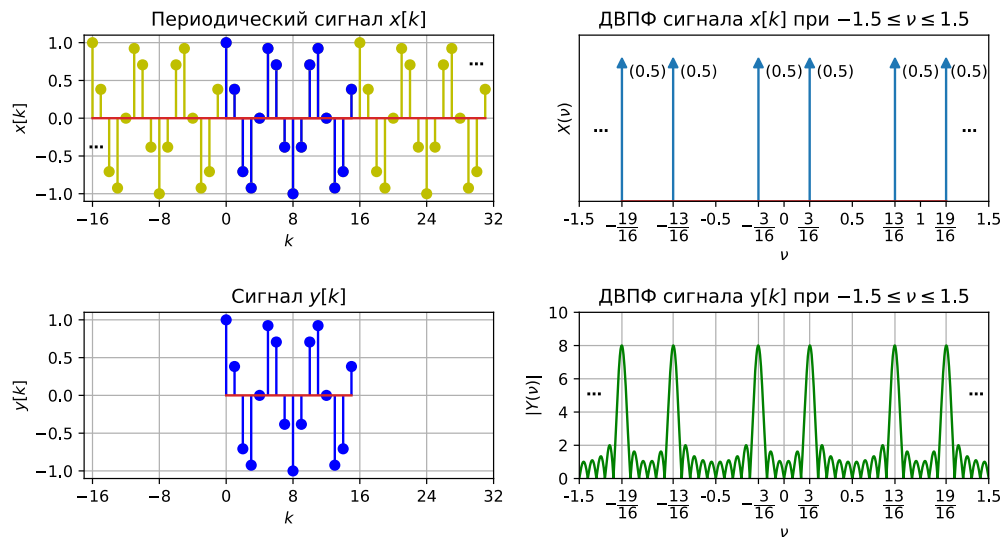
$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

Способ 2. Аналогично через теорему смещения

$$y[k] = \left(\frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w[k],$$

$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

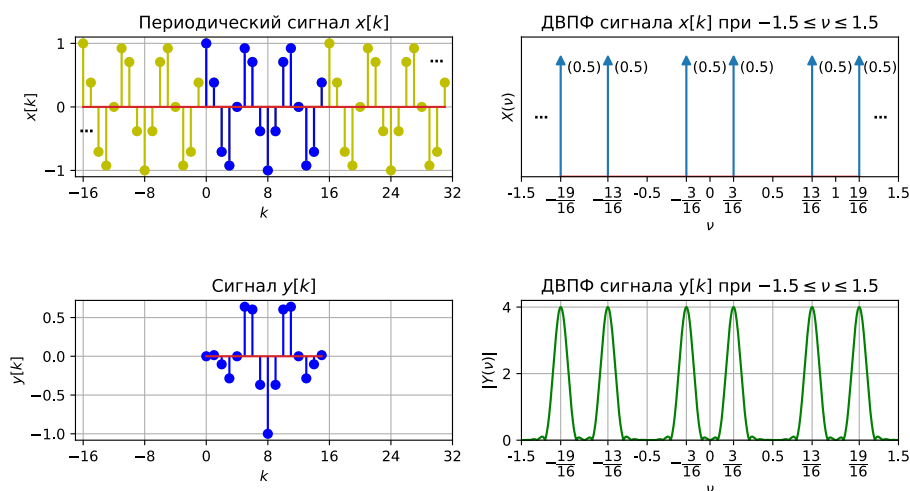
$$Y(v) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v - \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v - \frac{3}{16}))} + \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v + \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v + \frac{3}{16}))}.$$

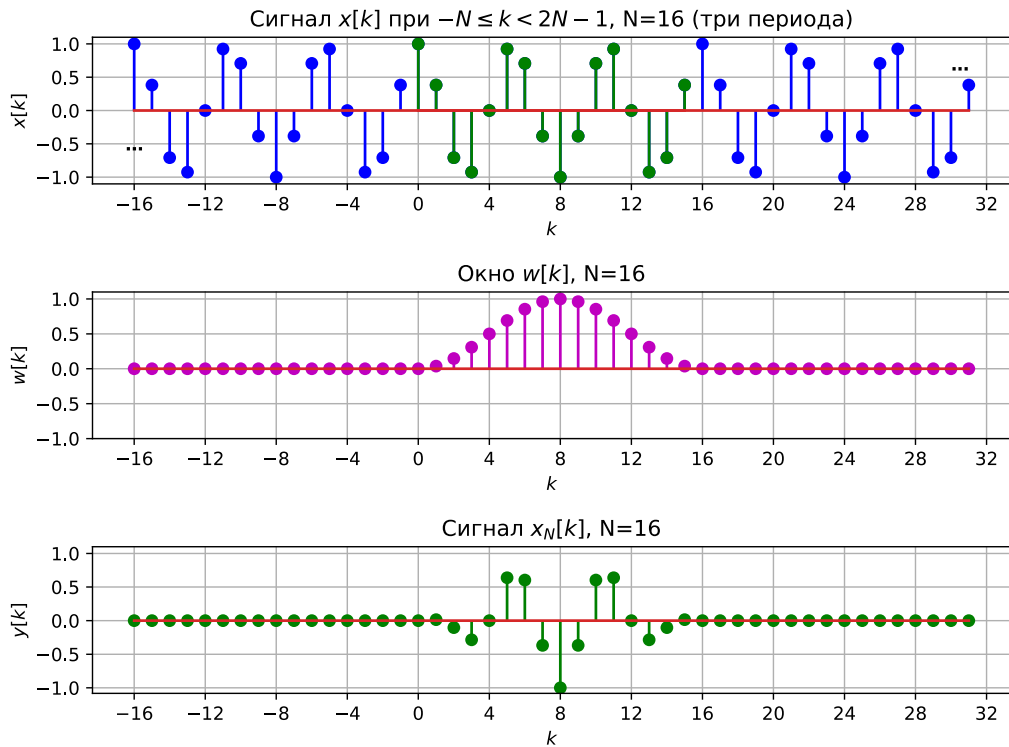


Как видно из приведённого примера, из-за ограничения длительности сигнала мы наблюдаем не только размытые спектральные максимумы, но и боковые выбросы, вызванные влиянием боковых лепестков окна. Физик Франц Артур Фридрих Шустер (нем. Franz Arthur Friedrich Schuster; 1851—1934), называл их "ложными периодичностями". Многие исследователи его времени ошибочно утверждали, эти максимумы обусловлены скрытыми периодичностями в сигнале. Шустер увидел здесь аналогию с дифракционными полосами в оптическом спектрографе, которые возникали из-за ограниченной апертуры прибора.

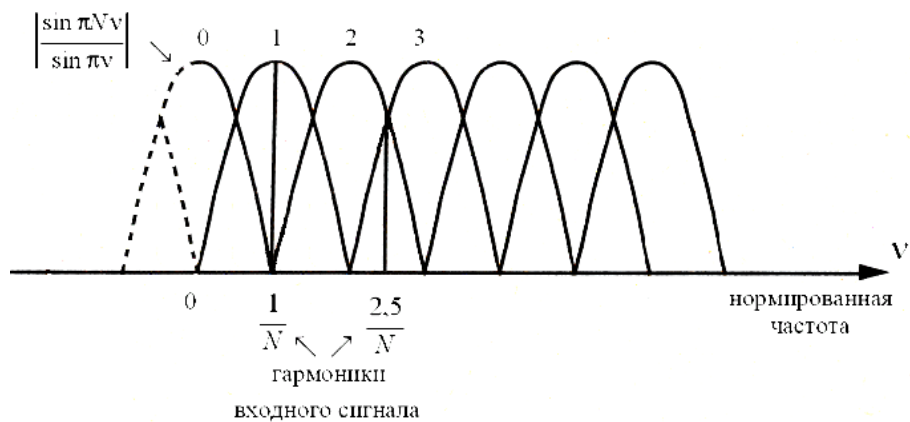
Эффект утечки спектра можно ослабить путем применения оконной функции, отличной от прямоугольной. В качестве примера рассмотрим окно Ханна. Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности $x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16}k\right)$, т.е. для последовательности $y[k] = x[k]w_{\text{Ханна}}[k]$, где

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$





Амплитудная модуляция спектра



Отметим еще один эффект, искажающий амплитуды спектральных линий и связанный с влиянием временного окна. Связь нормированной амплитудно-частотной характеристики окна $|W(v - n\Delta v)|$ с коэффициентами $Y_w(n)$ при различных значениях n показана на рис. 5.3.7 (изображены главные лепестки характеристик). Спектр входной последовательности как бы просматривается через частотный фильтр. На этом рисунке вертикальными линиями показан амплитудный отклик ДПФ-анализатора на две гармонические компоненты с единичными амплитудами и частотами $1/N$ и $2,5/N$. Первая компонента вызовет отклик с истинной амплитудой только на выходе фильтра 1, а вторая компонента – на выходах 2-го и 3-го фильтров с уменьшенной амплитудой. Максимальная амплитуда достигается, когда частоты спектральных компонент сигнала располагаются точно в центрах полос пропускания фильтров. Это соответствует случаю, когда длительность окна $T = N\Delta t$ кратна естественному периоду сигнала или когда сигнал существует только на интервале T .

На этом рисунке вертикальными линиями показан амплитудный отклик ДПФ-анализатора на две гармонические компоненты с единичными амплитудами и частотами $1/N$ и $2,5/N$. Первая компонента вызовет отклик с истинной амплитудой только на выходе фильтра 1, а вторая компонента – на выходах 2-ого и 3-го фильтров с уменьшенной амплитудой. Максимальная амплитуда достигается, когда частоты спектральных компонент располагаются точно в центрах полос пропускания фильтров. Это соответствует случаю, когда длительность окна $T = N\Delta t$ кратна естественному периоду сигнала или когда сигнал существует только на интервале T . Однако практически это условие трудно обеспечить, т. к. перед началом анализа период сигнала или его длительность часто неизвестны. В наихудшем случае, когда частоты компонент сигнала попадают точно в середину между центрами полос фильтров, амплитуда отсчета падает до уровня 0,637 (при прямоугольном окне). При возведении в квадрат наблюдаемая мощность падает до уровня 0,406. Энергетический спектр, оцениваемый по выходным сигналам фильтров в моменты, кратные T , приобретает, таким образом, паразитную модуляцию, изменяющую истинное значение до 2,5 раз. Использование окон, отличных от прямоугольного, способствует ослаблению эффекта модуляции за счет расширения главного лепестка частотной характеристики каждого фильтра.

Основные оконные функции

Рассмотрим примеры оконных функций $w[k]$ для ДПФ, которые часто используются. Для того, чтобы определить, к чему приводит умножение на ту или иную оконную функцию, для окон будем использовать следующие спектральные характеристики.

- Ширина $\Delta\nu$ главного лепестка окна на нулевом уровне.
- Ширина $\Delta\nu$ полосы на уровне половинной мощности (на уровне, который на 3 дБ ниже максимального уровня).
- Максимальный уровень боковых лепестков относительно главного в дБ.
- Асимптотическая скорость спада уровней боковых лепестков в дБ/октаву.

Прямоугольное окно

Во временной области прямоугольное окно длительностью N задается формулой

$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Умножение на прямоугольную оконную функцию эквивалентно ограничению сигнала по длительности.

Вычислим ДВПФ оконной функции

$$\begin{aligned} W_{\text{пр}}(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \\ &= \frac{2j}{2j} \frac{e^{-j\pi\nu N} (e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{e^{-j\pi\nu} (e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

$$W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu)$$

АЧХ оконной функции

$$|W_{\text{пр}}(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

Окно Бартлетта

$$w_{\text{Бартлетта}}[k] = \begin{cases} 1 - \frac{2}{N} \left| k - \frac{N}{2} \right|, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Для четного N окно Бартлетта можно представить как свертку двух прямоугольных окон длиной $N/2$, от нормированную на их длину (на $N/2$). Тогда по теореме о свертке для ДВФП частотная характеристика этого окна

$$W(\nu) = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin \pi \nu \frac{N}{2}}{\sin \pi \nu} \right)^2 \exp \left(-j2\pi\nu \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \right).$$

В итоге ширина главного лепестка окна на нулевом уровне в два раза больше, чем у прямоугольного, и составляет $\Delta\nu = 4/N$ (4 бина).

Окно Ханна

Окно Ханна для ДПФ во временной области описывается следующей формулой:

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Для того, чтобы определить это окно в спектральной области, заметим, что

$$\cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi k}{N}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi k}{N}}$$

Тогда по теореме смещения для ДВФП, окно Ханна в спектральной области может быть записано через частотную характеристику прямоугольного окна:

$$W_{\text{Ханна}}(\nu) = \frac{1}{2} W_{\text{пр}}(\nu) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right),$$

где

$$W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

Как нетрудно видеть, у окна Ханна всего три ненулевых отсчета ДПФ на одном периоде:

$$W_{\text{Ханна}}[n] = \begin{cases} 0,5, & \text{при } n = mN, \quad m \in Z, \\ -0,25, & \text{при } n = \pm 1 + mN, \quad m \in Z, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Это окно названо в честь австрийского метеоролога Юлиуса фон Ханна. Ханн изобрел метод взвешенного скользящего среднего для объединения метеорологических данных из соседних регионов, используя веса $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Его также иногда ошибочно называют окном Хэннига из-за того, что в работе Блэкмана и Тьюки 1959 года [1] фраза "hanning a signal" означала взвешивание данных этим окном.

Окно Хэмминга

Американский математик Ричард Уэсли Хэмминг, известный своими работами по теории информации, предложил использовать окно следующего вида:

$$w_{\text{Хэмминга}}[k] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Множители 0,54 и 0,46 позволяют практически полностью устранить максимальный боковой лепесток. С использованием теоремы смещения для ДВПФ, получаем частотную характеристику окна Хэмминга

$$W_{\text{Хэмминга}}(\nu) = 0,54 W_{\text{пр}}(\nu) - 0,23 W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,23 W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right).$$

Окно Блэкмана

Окно Блэкмана имеет следующий вид:

$$w_{\text{Блэкмана}}[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

ДВПФ этого окна также может быть выражено через спектр прямоугольного окна:

$$W_{\text{Блэкмана}}(\nu) = 0,42 W_{\text{пр}}(\nu) - 0,5 W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,5 W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right) + 0,08 W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{2}{N}\right) + 0,08 W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{2}{N}\right).$$

Окно Блэкмана обладает низким максимальным уровнем боковых лепестков относительно главного (-58 дБ), но при этом ширина главного лепестка на нулевом уровне составляет $\Delta \nu = 6/N$ (6 бин).

Окно Чебышёва (равноволновое окно)

Частотная характеристика окна Чебышева длины N задается формулой

$$W_{\text{Чебышева}}(v) = \frac{\cos((N-1)\arccos(\alpha \cos \pi v))}{\text{ch}((N-1)\text{arch } \alpha)}, \quad \alpha = \text{ch} \frac{\text{arch } 10^{\beta/20}}{N-1},$$

где β — разность уровней главного и боковых лепестков в дБ. Во временной области окно Чебышева можно получить, взяв обратное ДПФ для выборок $W_{\text{Чеб.}}(v_n)$, таких, что $v_n = n/N$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

У окна Чебышева все боковые лепестки имеют одинаковый уровень, спада боковых лепестков по мере удаления от главного у него нет. Однако из всех N — точечных дискретных окон с уровнем боковых лепестков относительно главного, не превосходящем β дБ, оно имеет самый узкий боковой лепесток.

Окно Кайзера

Джеймс Кайзер (Лаборатории Белла, MIT) предложил использовать окна следующего вида

$$w_{\text{Кайзера}}[k] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2k}{N} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

где N — длина окна, β — параметр окна Кайзера, $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, которая может быть вычислена с помощью быстро сходящегося степенного ряда (обычно достаточно $L < 25$)

$$I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^L \left(\frac{(x/2)^m}{m!} \right)^2.$$

Варьируя β и N , можно найти компромисс между относительным уровнем боковых лепестков окна и шириной главного. Характерно то, что относительный уровень боковых лепестков не зависит от длины окна, и определяется лишь параметром β . Кайзер и Шафер получили следующие эмпирические зависимости:

$$\beta = \begin{cases} 0,12438(a+6,3), & 60 < a \leq 120, \\ 0,76609(a-13,26)^{0.4} + 0,09834(a-13,26), & 13,26 < a \leq 60, \\ 0, & a \leq 13,26, \end{cases}$$

$$N \approx \frac{24\pi(a+12)}{155\Delta\nu} + 1,$$

где a — уровень боковых лепестков относительно уровня главного в дБ, $\Delta\nu$ — ширина главного лепестка окна на нулевом уровне.

Окна с плоской вершиной

Как было показано ранее, форма главного лепестка оконной функции приводит к искажению амплитуд гармоник, частоты которых не соответствуют бинам ДПФ. Если требуется уменьшить этот эффект, то следует использовать окна с плоской вершиной.

Приведем пример такого окна, который часто используется:

$$w_{\text{flattop}}[k] = \begin{cases} \sum_{r=0}^4 (-1)^r a_r \cos\left(\frac{2\pi}{N} rk\right), & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k, \end{cases}$$

где $a_0 = 0,21557895$, $a_1 = 0,41663158$, $a_2 = 0,277263158$, $a_3 = 0,083578947$, $a_4 = 0,006947368$. Заметим, что временная функция $w_{\text{flattop}}[k]$ может принимать отрицательные значения.

Задание на моделирование

Задание расположено в .ipynb файле. Этому занятию соответствуют следующие задачи.

Задача 2.1. Исследование характеристик различных окон.

Задача 2.2. Окно Кайзера.

Задача 2.3. Окно Чебышева.

Задача 2.4. Различимость спектральных компонент.

Задача 2.5. Маскировка слабой гармоники боковыми лепестками окна.

Задача 2.6. Амплитудная модуляция спектра.

Контрольные вопросы

№1. Вычислите для $R = 4$ ДВПФ обобщенного косинусного окна:

$$w_{\text{cos}}[k] = \begin{cases} \sum_{r=0}^R (-1)^r a_r \cos\left(\frac{2\pi}{N} rk\right), & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Сравните результат со следующими окнами: прямоугольное, Ханна, Хэмминга, Блэкмана, окно с плоской вершиной.

№2. Вычислите ДВПФ последовательности $y[k] = x[k]w[k]$, где $x[k] = \sin\left(2\pi \frac{3}{16} k\right)$, а $w[k]$ — окно Ханна для ДПФ длины $N = 16$.

№3. Предположим, что нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала с помощью ДВПФ и окна. При этом необходимо добиться разрешения не менее $\Delta\nu = 0,004$, а длина окна фиксирована и равна $N = 256$. Считая, что разрешающая способность совпадает с шириной главного лепестка ДВПФ образа используемого окна на уровне половинной мощности,

определите, какое из окон (прямоугольное, треугольное, Ханна, Хемминга) будет удовлетворять поставленным условиям.

Занятие 3. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT)

Теоретическая часть

Формула анализа STFT

Кратковременное дискретное преобразование Фурье (Discrete STFT, англ. Discrete Short-time Fourier transform) может задаваться формулой

$$X_l[n] = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]x[k + lH] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

где $w[k]$ - временное окно, l — порядковый номер кадра, H — размер кадра.

Это преобразование позволяет осуществлять ДПФ-анализ на коротких интервалах времени. Для графического отображения результатов данного преобразования часто используется представление в виде графика с двумя осями, где по горизонтальной оси отображается время (или номер кадра l), по вертикальной — соответствующие частоты, а цветом отображается $|X_l[n]|$, $|X_l[n]|^2$ (в случае спектрограммы), или фазовая часть $X_l[n]$.

Разрешения по времени и по частоте для STFT

Разрешение по времени для STFT равно длине кадра в секундах, т.е. H / f_d .

Разрешение по частоте обусловлено двумя параметрами.

- 1) Сеткой частот ДПФ $\Delta f = f_d / M$, где M — размерность ДПФ. Это разрешение можно улучшить без изменения длины кадра — путем добавления нулевых отсчетов.
- 2) Шириной главного лепестка оконной функции. Как правило, этот параметр зависит от длины кадра.

Пример. Спектрограмма для звука.

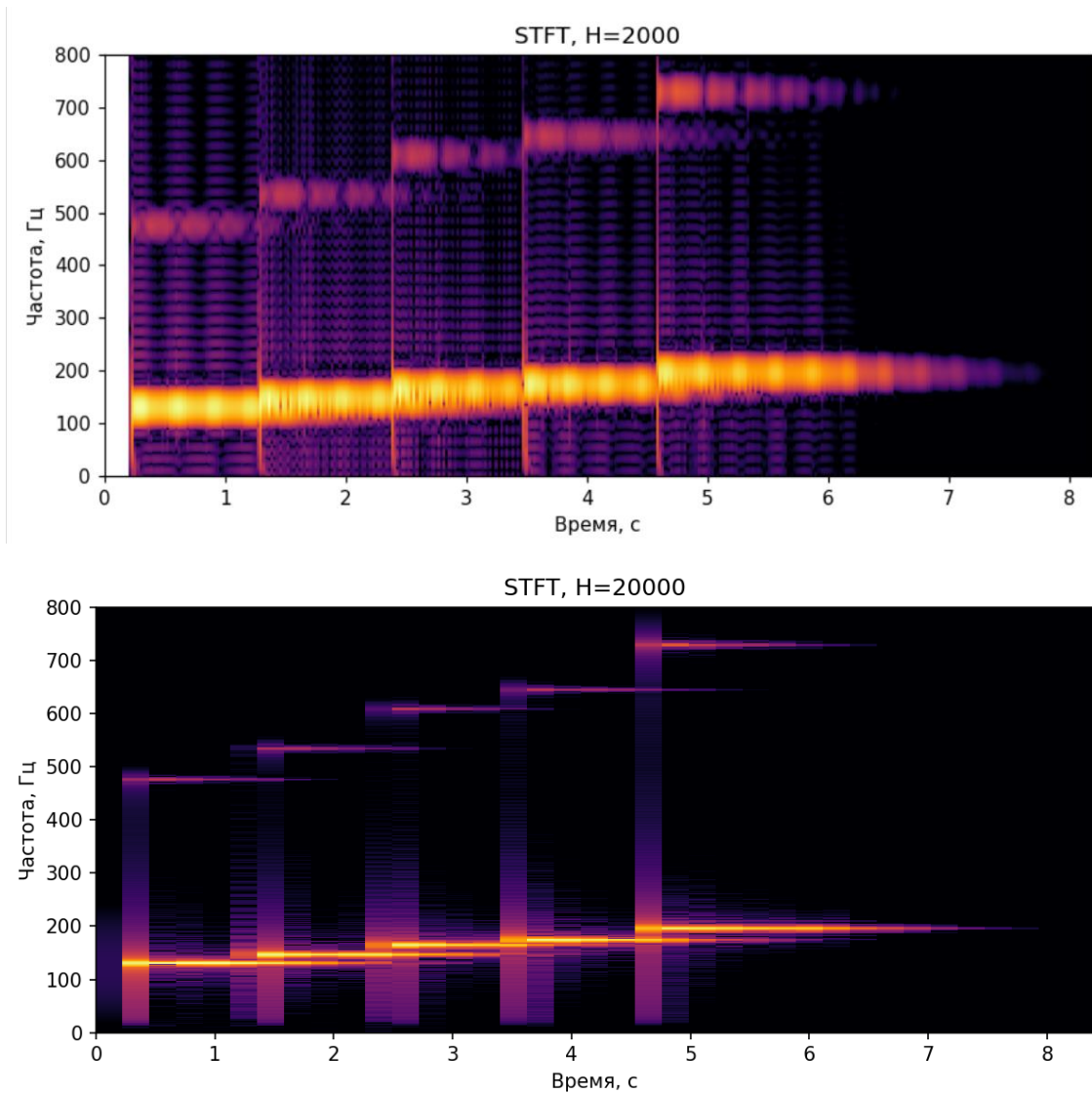
В качестве примера рассмотрим спектрограмму для звукового сигнала. Использовано окно Хемминга. Для случая, когда длина кадра $H = 2000$, мы получаем хорошее разрешение по времени и неудовлетворительное по частоте. Это связано с тем, что окно имеет достаточно широкий главный лепесток в данном применении. Во втором случае $H = 20000$, и мы получаем хорошее разрешение по частоте, и одновременно неудовлетворительное по времени.

Задание на моделирование

Задание расположено в .ipynb файле. Этому занятию соответствуют следующие задачи.

Задача 3.1. Спектрограмма аудиофайла.

Задача 3.2. Спектрограмма ЛЧМ сигнала.



Список литературы

В качестве учебной литературы рекомендуется использовать учебные пособия [2], [3] и [4].

1. Blackman R.B., Tukey J.W. The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering — Part I // The Bell System Technical Journal. 1958. № 1(37). С. 185–282. DOI:10.1002/j.1538-7305.1958.tb03874.x.
2. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.
3. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов. Изд. 2-Е, . М.: МФТИ, 2007. 332 с.
4. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2007. 120 с.