

## Лабораторная работа №2 «Дискретное и дискретное во времени преобразования Фурье (ДВПФ, ДПФ)»

Радиофизическая лаборатория 2020-2021 уч. год

группы Б01-818, С01-819

| Даты             | Разделы                           |
|------------------|-----------------------------------|
| 15 марта 2021 г. | Занятие 1. Основные свойства ДВПФ |
| 22 марта 2021 г. | Занятие 2. Основные свойства ДПФ  |
| 29 марта 2021 г. | Занятие 3. Связь ДВПФ и ДПФ       |
| 5 апреля 2021 г. | Сдача лабораторной работы         |
|                  |                                   |

Данная лабораторная работа посвящена изучению дискретного и дискретного во времени преобразования Фурье. Эти два преобразования предназначены для сигнала с дискретным временем. Они позволяют получить спектр или оценки спектра для таких сигналов. В дальнейшем умение работать с этими спектрами позволит проводить спектральный анализ состава сигнала и его цифровую фильтрацию.

Лабораторная работа состоит из трех частей, каждая из которых рассчитана на одно занятие (4 ак. часа). Задания по моделированию выполняются с помощью библиотек языка программирования Python 3 (NumPy, SciPy, Matplotlib) либо в среде MATLAB.

### Задание к допуску

Задание к допуску основано на теоретических частях трех занятий.

**№1.** Запишите пару формул дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) в нормированных частотах (в переменных  $\nu$ ). Пользуясь формулой прямого преобразования, определите ДВПФ следующих последовательностей:

а)  $h[k] = \mathbf{1}[k] - \mathbf{1}[k-1]$  (импульсная характеристика простого дискретного дифференциатора),

б)  $w[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m]$ ,  $N = 10$  (прямоугольное окно длиной в  $N$  отсчетов),

в)  $h_3[k] = \frac{1}{3}\mathbf{1}[k] + \frac{1}{3}\mathbf{1}[k-1] + \frac{1}{3}\mathbf{1}[k-2]$  (импульсная характеристика фильтра скользящего среднего второго порядка).

Для получившихся спектральных плотностей  $X(\nu) = |X(\nu)|e^{j\varphi(\nu)}$  определите модуль  $|X(\nu)|$  и

фазовую часть  $\varphi(\nu) = \arctg \frac{\text{Im } X(\nu)}{\text{Re } X(\nu)}$ .

**№2.** Определите ДВПФ  $X(v)$  и 16-точечное ДПФ  $\tilde{X}[n]$  (с нормировкой  $1/N$  в прямом преобразовании) следующих дискретных гармонических сигналов:

а)  $x_1[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - 16m]$  (последовательность единичных импульсов с периодом 16),

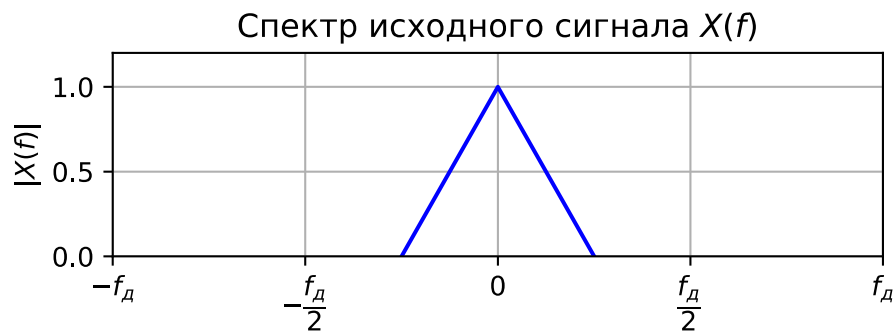
б)  $x_2[k] = \cos\left(2\pi \frac{5}{16} k\right)$  (косинусоида с относительной частотой  $v_0 = \frac{5}{16}$ ),

в)  $x_3[k] = \sin\left(2\pi \frac{3}{16} k\right)$  (синусоида с относительной частотой  $v_0 = \frac{3}{16}$ ),

г)  $x_4[k] = \cos\left(2\pi \frac{5}{16} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{3}{16} k\right)$ .

Постройте графики действительной и мнимой части отсчетов ДПФ ( $\text{Re } \tilde{X}[n]$  и  $\text{Im } \tilde{X}[n]$ ), а также схематический график для ДВПФ с указанием весов дельта-функций. Сравните результаты. Указать, в чем заключается связь между ДВПФ и ДПФ для данных периодических последовательностей.

**№3.** Предположим, что спектр исходного сигнала для дискретизации был отличен от нуля лишь на интервале  $\left[-\frac{f_d}{4}, \frac{f_d}{4}\right]$  где  $f_d$  — частота дискретизации. График модуля спектра исходного сигнала изображен на рисунке ниже.



Установить, ли наблюдаться эффект наложения при дискретизации сигнала. Построить график модуля спектральной плотности дискретизованного сигнала  $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$ .

**№4.** Пусть  $x[k]$  — действительная последовательность конечной длительности, для которой известны отсчеты 10-точечного ДПФ  $X[4] = 5 - j$ ,  $X[0] = 5$  и  $X[8] = 8 + j$ . Указать все значения ДВПФ  $X(v)$ , которые можно установить из этих данных.

## Занятие 1. Основные свойства ДВПФ

Первая часть лабораторной работы посвящена изучению дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ). Оно отличается от преобразования Фурье тем, что сигнал в нем имеет форму функции дискретного времени  $x[k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . В этой части работы мы получим формулы ДВПФ, взяв преобразование Фурье от дискретизованного сигнала. Поскольку преобразование Фурье может быть применено для сигнала с непрерывным временем  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , нам потребуется также непрерывная запись дискретизованного сигнала.

### Теоретическая часть

#### Преобразование Фурье для дискретизованных сигналов

##### Спектр дискретизованного сигнала

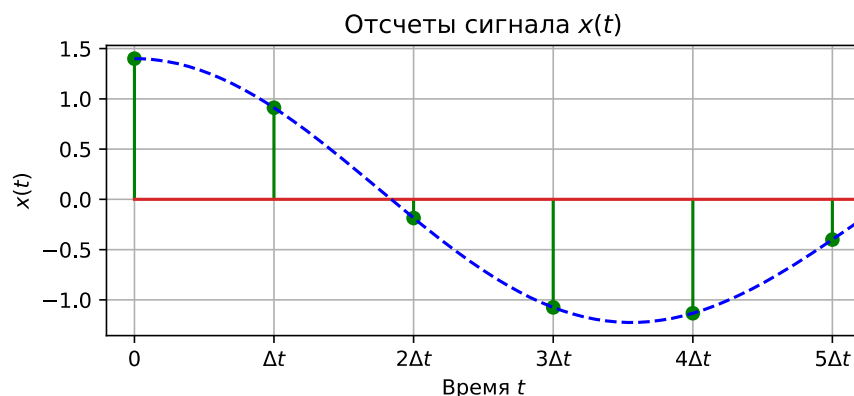
Рассмотрим способы описания дискретизованного сигнала, т.е. дискретного сигнала, получаемого из аналогового с помощью дискретизации.

##### 1) Функция дискретного времени.

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов  $x[k]$  в заданные моменты времени  $k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации:

$$x[k] = Tx(k\Delta t), \quad T \in \{1; \Delta t\}$$

где  $T$  — константа с размерностью времени, равная единице или  $\Delta t$ . Выбор этой константы, как будет показано далее, влияет на связь между спектром дискретизованного и исходного сигнала.

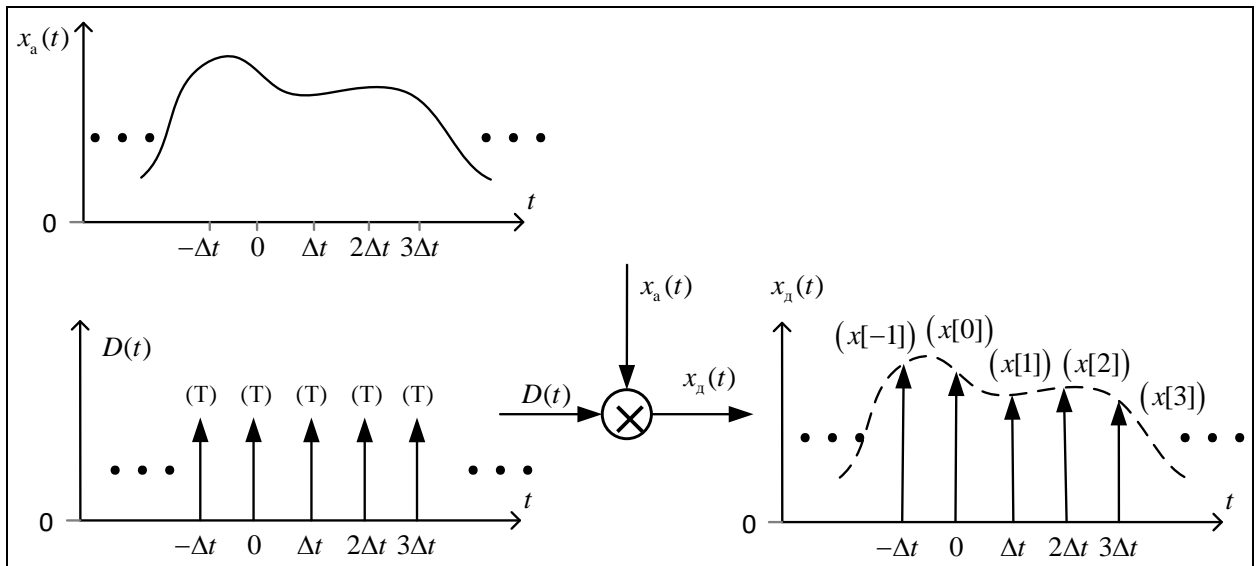


##### 2) Функция непрерывного времени (континуальная запись).

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

В этой записи дискретизованного сигнала представляется как результат умножения исходного аналогового сигнала  $x(t)$  на идеальную функцию дискретизации, представляющую собой периодическую последовательность дельта-функций Дирака с площадями  $T$

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$



В таком случае дискретизованный сигнал описывается последовательностью дельта-функций с площадями (весами)  $x[k] = Tx(k\Delta t)$ :

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Tx(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t).$$

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)$$

Определим спектр дискретизованного сигнала  $X_d(f)$ , зная спектр исходного аналогового сигнала до дискретизации  $X(f)$ . Воспользуемся континуальной формой записи дискретизованного сигнала

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - n\Delta t) = D(t)x(t)$$

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

Ряд Фурье для идеальной функции дискретизации

$$D(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t).$$

Таким образом,  $x_d(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t)x(t)$ . Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье:

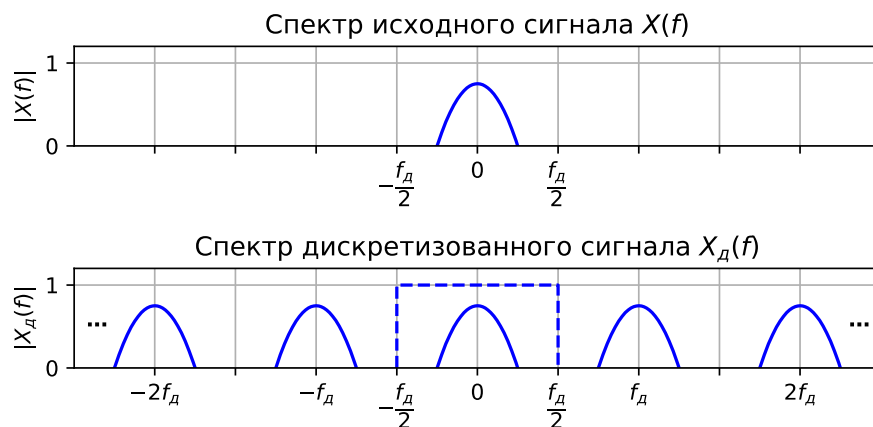
$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

При непосредственном взятии отсчетов  $x[k] = x(k\Delta t)$  константа  $T = 1$ , и спектр перед периодическим повторением масштабируется.

При  $T = \Delta t$  (когда  $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$ ) дискретизация аналогового сигнала  $x(t)$  по времени с шагом  $\Delta t$  приводит к периодическому повторению его спектра с периодом (по частоте), равным частоте дискретизации  $f_d = 1 / \Delta t$

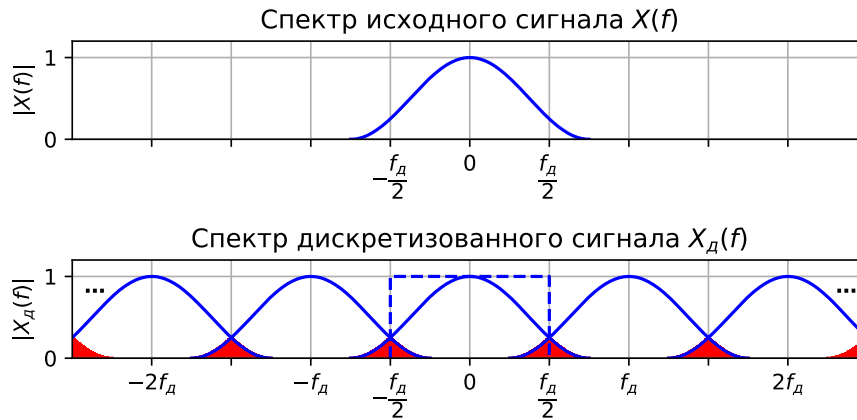
$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

Заметим, что при этом интервал  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$  является одним периодом функции  $X_d(f)$ . Если спектр аналогового сигнала лежит в этом интервале, то он периодически повторяется без наложения.



### Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$ , то возникает **эффект наложения** (англ. **aliasing**, элайзинг, алиасинг). В таком случае спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают. Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза  $f_c = f_d / 2$ , при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах  $|f| > f_c$  не сохраняется.



### Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

Пусть есть последовательность выборок  $x(k\Delta t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  некоторого аналогового сигнала  $x(t)$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов,  $k \in \mathbb{Z}$  — номер отсчета.  $f_d = 1/\Delta t$  — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность  $[\Gamma_{\text{ц}}] = [\text{с}^{-1}]$ ). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом  $[-f_d/2; f_d/2]$ , а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ( $f_d > 2f_v$ ).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал)  $x[k]$ , которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = T x(k\Delta t),$$

где  $T = \Delta t$ . Как ранее (в лекциях) было установлено, при  $T = \Delta t$  спектр дискретизованного сигнала  $x[k]$  представляет собой периодическое повторение исходного спектра аналогового сигнала  $x(t)$  с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d$ :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_d).$$

Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе  $[-f_d/2; f_d/2]$ . Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Континуальная запись дискретного сигнала  $x[k]$  в данном случае

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$X_d(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчеты по формуле

$$X_{\text{д}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t). \quad (1.1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1.1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции  $X_{\text{д}}(f)$ <sup>1</sup>, получаем, что отсчетные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_{\text{д}}} \int_{-f_{\text{д}}/2}^{f_{\text{д}}/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (1.2)$$

В итоге получаем пару формул (1.1) и (1.2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала  $x[k]$ , который на отрезке оси частот  $[-f_{\text{д}}/2; f_{\text{д}}/2]$  в отсутствие наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как  $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$ .

### Различные формы записи ДВПФ

Мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_{\text{д}}} \int_{-f_{\text{д}}/2}^{f_{\text{д}}/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Введем нормированные частоты  $\nu = f / f_{\text{д}} = f \Delta t$ . Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi \nu k),$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi \nu k) d\nu.$$

---

<sup>1</sup> Напоминание. Для  $2l$ -периодической функции  $f(x)$ , абсолютно интегрируемой на интервале  $(-l; l)$  ряд Фурье по системе функций  $\phi_m(x) = \exp(jm \frac{\pi}{l} x)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ :

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm \frac{\pi}{l} x), \quad \text{где коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm \frac{\pi}{l} x) dx$$

Если принять  $2\pi f = \omega$ , а частоту дискретизации взять в рад/с  $\omega_d = 2\pi / \Delta t$ , то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Приняв  $\theta = 2\pi v$  (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\theta k),$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \exp(j\theta k) d\theta.$$

| Частотная переменная    | Размерность  | Период повторения спектра    | Основной период                 |
|-------------------------|--------------|------------------------------|---------------------------------|
| $f$                     | Гц           | $f_d = 1 / \Delta t$         | $[-f_d / 2; f_d / 2]$           |
| $\omega = 2\pi f$       | рад/с        | $\omega_d = 2\pi / \Delta t$ | $[-\omega_d / 2; \omega_d / 2]$ |
| $v = f / f_d$           | безразмерная | 1                            | $[-0,5; 0,5]$                   |
| $\theta = 2\pi f / f_d$ | рад          | $2\pi$                       | $[-\pi; \pi]$                   |

### Пример.

Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов  $x[k] = \mathbf{1}[k+1] + \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1]$ , где  $\mathbf{1}[k]$  — единичный импульс, определяемый как

$$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДВПФ такой последовательности

$$\begin{aligned} X(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi vk} = \sum_{k=-1}^1 x[k] e^{-j2\pi vk} = x[-1]e^{j2\pi v} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi v} = \\ &= \exp(j2\pi v) + 1 + \exp(-j2\pi v) = 1 + 2\cos(2\pi v) \end{aligned}$$

## Свойства ДВПФ

### Линейность

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$  и  $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$ , то  $\alpha x[k] + \beta y[k] \xleftrightarrow{DTFT} \alpha X(v) + \beta Y(v)$ , где  $\alpha, \beta$  — фиксированные числа.



Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

### Теорема запаздывания

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$ , то  $x[k-l] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu) \exp(-j2\pi\nu l)$ .

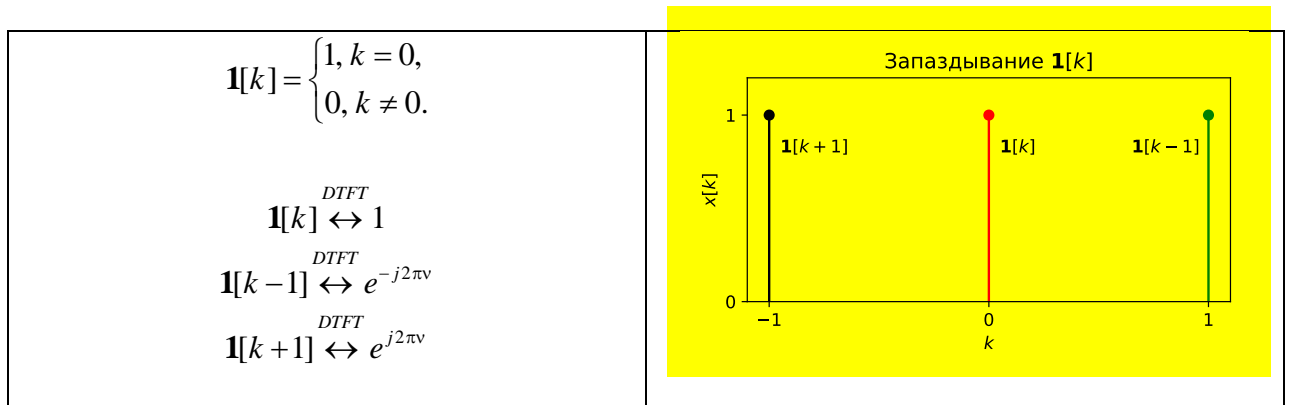
$x[k-l]$  — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала  $x[k]$  на  $l$  отсчетов в случае  $l > 0$  и опережающий сигнал  $x[k]$  на  $-l$  отсчетов в случае  $l < 0$ .

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(-j2\pi\nu l) \exp(j2\pi\nu k) d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi\nu(k-l)) d\nu = x[k-l].$$

Стоит отметить, что  $|X(\nu)|$  для запаздывающего и исходного сигнала одинаков.

#### Пример



### Теорема смещения

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$ , то  $x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0)$

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида  $\exp(j2\pi\nu_0 k)$ ,  $\nu_0 \in \mathbb{R}$  приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на  $\nu_0$  вправо в случае  $\nu_0 > 0$  и на  $-\nu_0$  влево в случае  $\nu_0 < 0$ .

#### Пример.

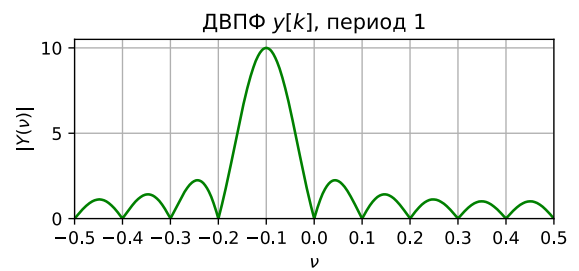
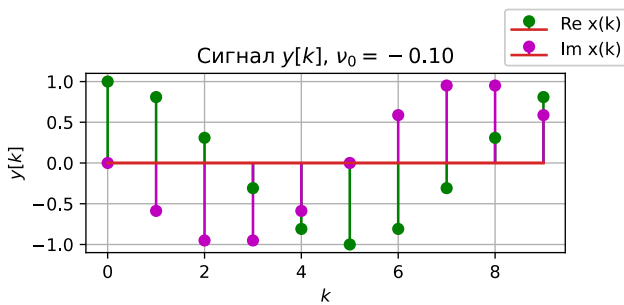
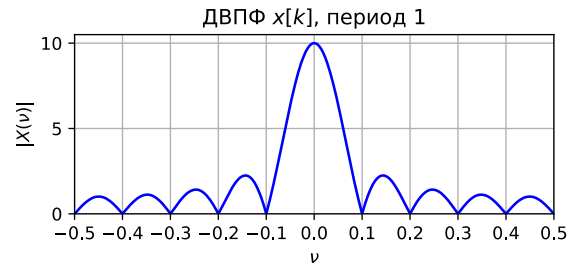
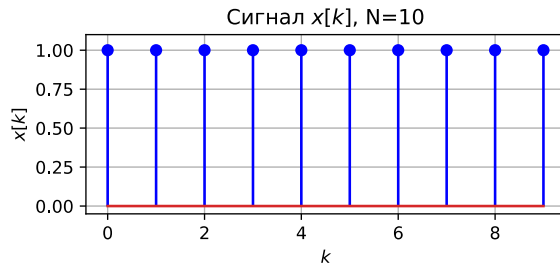
$$y[k] = x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k), \text{ где } x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)}$$

$$= \frac{2j e^{-j\pi\nu N}}{2j e^{-j\pi\nu}} \frac{(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

$$Y(\nu) = X(\nu - \nu_0) = \frac{\sin(N\pi(\nu - \nu_0))}{\sin(\pi(\nu - \nu_0))} \exp(-j(N-1)\pi(\nu - \nu_0)).$$



### Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)Y^*(\nu) d\nu$$

### Пример.

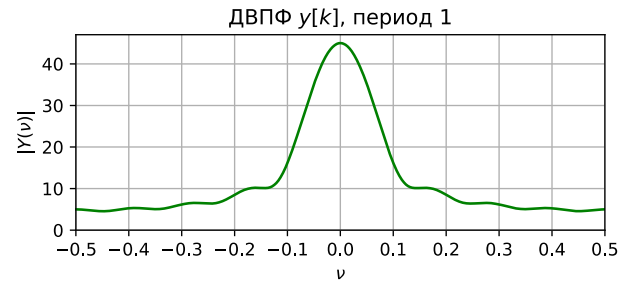
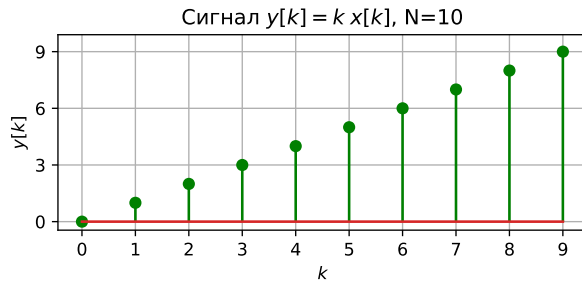
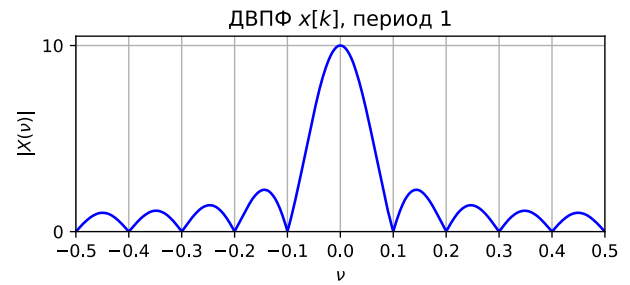
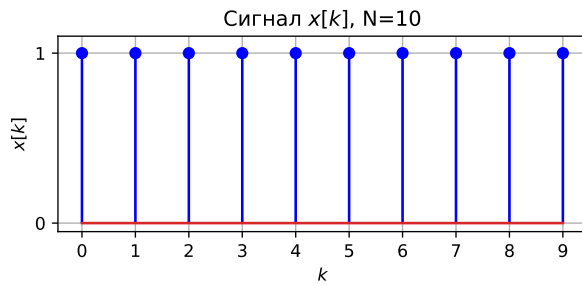
Предположим, что имеется финитная последовательность  $x[k] = \{1; 1; 1\}$ . Тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} |x[k]|^2 = 3$ .

$$\begin{aligned} \text{При этом } X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi\nu k} = x[-1]e^{j2\pi\nu} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu). \end{aligned}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2\cos(2\pi\nu)|^2 d\nu = 3.$$

### Умножение на $k$ и дифференцирование по частоте

$$\text{Если } x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu), \text{ то } kx[k] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(\nu)}{d\nu}.$$



### Изменение масштаба

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$ , то  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu L)$ .

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

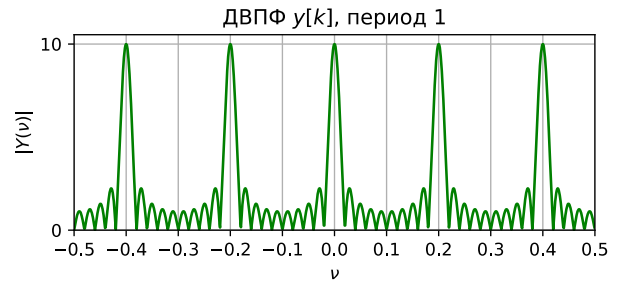
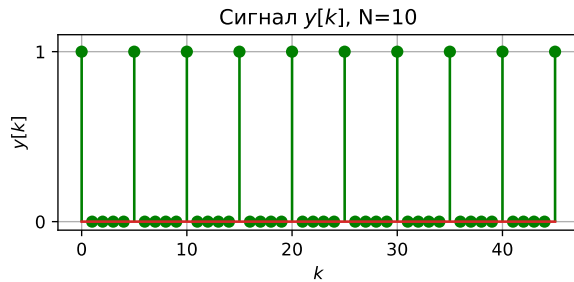
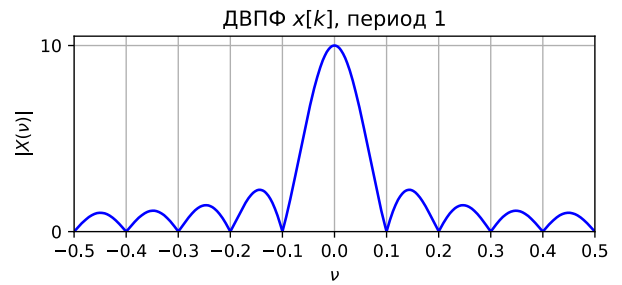
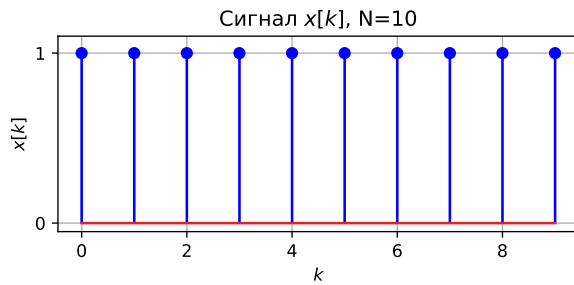
$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi\nu k) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi(\nu L)m) = X(\nu L). \end{aligned}$$

### Пример

Рассмотрим последовательность из 10 единичных импульсов. Между каждой парой отсчетов добавим  $L-1$  нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

$$|Y(\nu)| = \left| \frac{\sin(10\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)} \right|.$$

Для  $L=5$  результат показан на рисунке ниже.



### Теоремы о свертке

#### а) Теорема о свертке во временной области.

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$  и  $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$ , то  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)Y(v)$ .

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

#### б) Теорема о свертке в частотной области

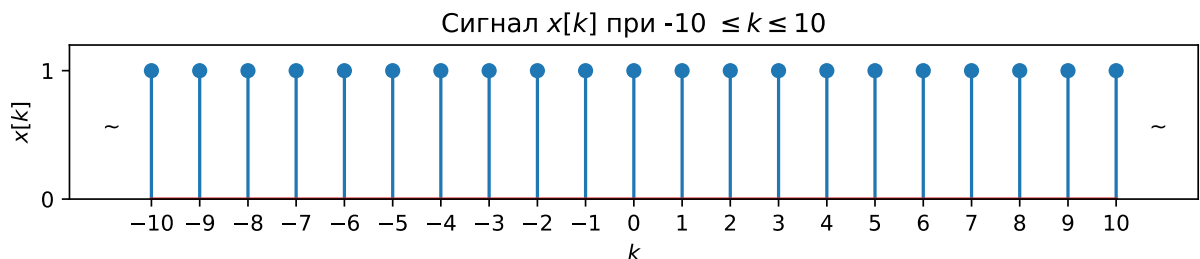
Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$  и  $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$ , то  $x[k]y[k] \xleftrightarrow{DTFT} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})Y(v-\tilde{v})d\tilde{v}$ .

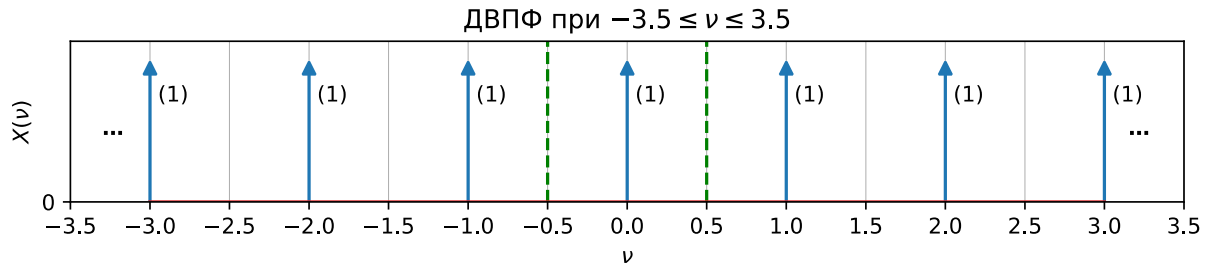
В левой части стоит произведение сигналов, в правой -- циклическая свертка спектров.

### ДВПФ периодических последовательностей

#### а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$$





Вычислим ДВПФ для последовательности  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]$ .

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \right) \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \exp(-j2\pi\nu k).$$

$$X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m).$$

Заметим, что  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m)$  — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности  $\delta$ -функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi\nu m),$$

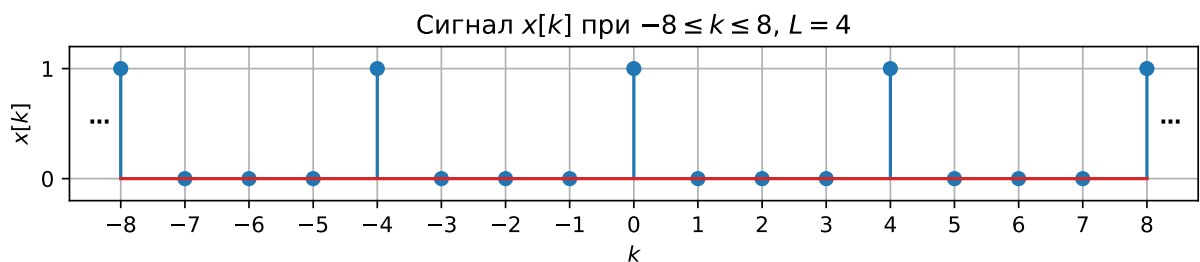
где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu) \exp(j2\pi\nu m) d\nu = e^0 = 1. \text{ Тогда получаем, что } X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n).$$

**б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом  $L$ .**

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$

Найдем ДВПФ для последовательности  $x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL]$ .



Используя свойство об изменении масштаба  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu L)$ , из

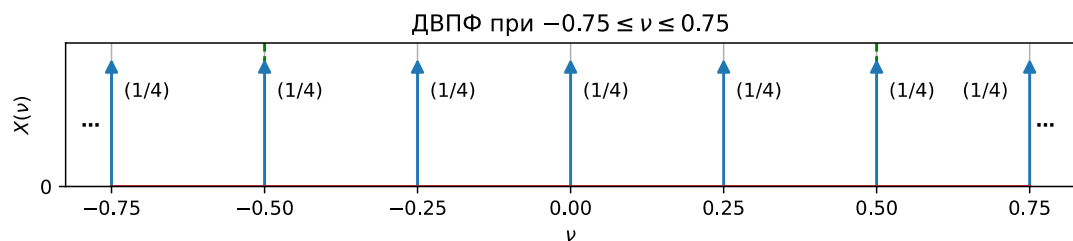
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n) \text{ получаем } \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu L - n)$$

Воспользовавшись свойством  $\delta$ -функции

$$\delta(av - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(\nu - \frac{b}{a}\right),$$

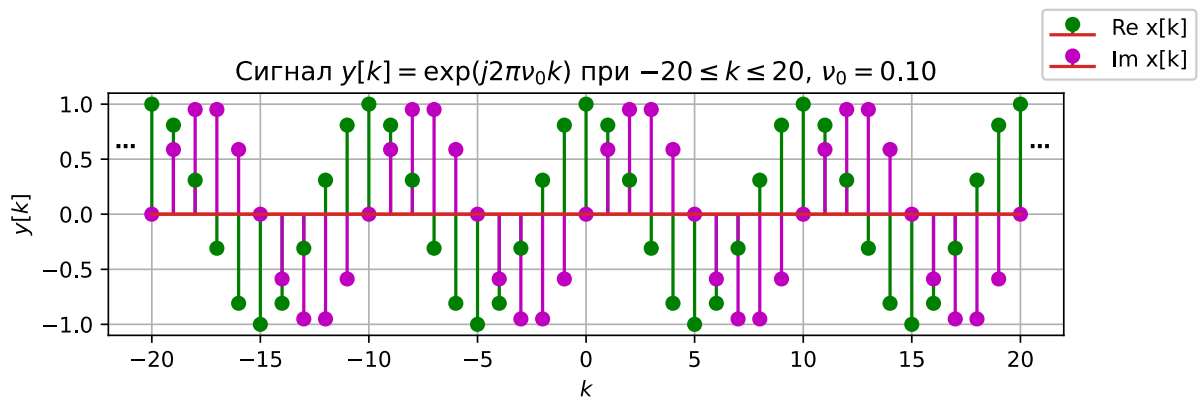
получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$



### в) Гармонические сигналы

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

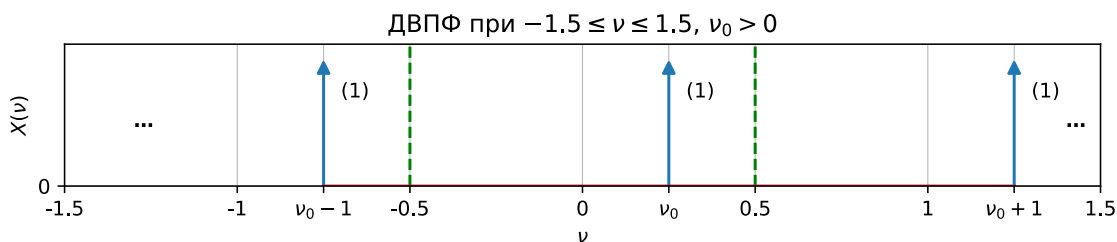


Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$ , то  $x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0)$ . (теорема смещения для ДВПФ). При

этом  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$ . Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - m] \exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$



## Задание на моделирование

Далее значения  $N$ ,  $L$ ,  $\nu_0$  следует использовать из таблицы в соответствии с Вашим вариантом задания.

| Вариант | $N$ | $L$ | $\nu_0$ |  | Вариант | $N$ | $L$ | $\nu_0$ |
|---------|-----|-----|---------|--|---------|-----|-----|---------|
| 1       | 8   | 4   | 0,1     |  | 11      | 7   | 2   | 0,1     |
| 2       | 9   | 3   | -0,1    |  | 12      | 8   | 1   | -0,1    |
| 3       | 6   | 4   | 0,1     |  | 13      | 9   | 4   | 0,1     |
| 4       | 7   | 2   | -0,1    |  | 14      | 7   | 2   | -0,1    |
| 5       | 8   | 3   | 0,1     |  | 15      | 8   | 3   | 0,1     |
| 6       | 10  | 1   | -0,1    |  | 16      | 10  | 2   | -0,1    |
| 7       | 6   | 2   | 0,1     |  | 17      | 7   | 2   | 0,1     |
| 8       | 7   | 3   | -0,1    |  | 18      | 8   | 2   | -0,1    |
| 9       | 8   | 1   | 0,1     |  | 19      | 10  | 2   | 0,1     |
| 10      | 9   | 2   | -0,1    |  | 20      | 8   | 3   | -0,1    |

**Задача 1.1. Прямоугольный импульс в дискретной форме.** С помощью моделирования вычислите и постройте график для модуля и фазы ДВПФ  $X_N(\nu)$  последовательности из  $N$  последовательных единичных импульсов  $x_N[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m]$  для  $\nu \in [-0,5; 0,5]$ . Сравните результат с аналитической записью для  $X_N(\nu)$  (задача 1.6 из задания к допуску). Заполнить таблицу, используя результаты моделирования и аналитические записи. Принять частоту дискретизации равной 1 Гц.

| Значение $X(0)$ | Ширина $\Delta\nu$ главного лепестка на нулевом уровне | Точки скачков фазы на $\pi$ | Энергия <sup>2</sup> $\times \Delta t$<br>$\int_{-1/2}^{1/2}  X(\nu) ^2 d\nu$ |
|-----------------|--|-----------------------------|---|
|                 |  |                             |   |

<sup>2</sup> Для дискретного сигнала рассматривают энергию, приходящуюся на один период частоты, т.е. на полосу частот шириной  $f_d$ :

$$\int_{-0,5f_d}^{0,5f_d} |X(f)|^2 df = \frac{1}{\Delta t} \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$$

Для ее вычисления можно воспользоваться равенством Парсеваля для ДВПФ.

### Задача 1.2. Свойство масштабирования.

Постройте последовательность  $x_L[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_N[m] \mathbf{1}[k - mL]$ , добавив  $L-1$  нулевой отсчет между каждой парой соседних отсчетов сигнала  $x_N[k]$  (из задачи 1.1). С помощью моделирования постройте модуль ее ДВПФ для  $\nu \in [-0,5; 0,5]$  и сравните результат с  $X_N(\nu L)$  (из задачи 1.1).

### Задача 1.3. Дифференцирование спектральной плотности.

Рассмотрите последовательность  $x_D[k] = k x_N[k]$ . Постройте с помощью моделирования график для модуля ДВПФ этой последовательности  $X_D(\nu)$  для  $\nu \in [-0,5; 0,5]$ .

\*\* Получить численным или символьным дифференцированием график для  $\frac{j}{2\pi} \frac{dX_N(\nu)}{d\nu}$  и сравнить его с  $X_D(\nu)$ .<sup>3</sup>

### Задача 1.4. Теорема смещения.

С помощью моделирования получите график модуля спектральной плотности  $X_S(\nu)$  для сигнала  $x_S[k] = x_N[k] \exp(j2\pi\nu_0 k)$ . Приведите ответы на следующие вопросы.

- а) Какую аналитическую форму записи имеет функция  $X_S(\nu)$ ?
- б) Как результат моделирования соотносится с теоремой смещения для ДВПФ?
- в) Почему получившийся спектр не симметричен относительно нулевой частоты?

### Задача 1.5. Теорема о свертке во временной области.

Вычислите с помощью моделирования линейную дискретную свертку последовательности

$$x_N[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$$

с точно такой же последовательностью. Постройте график для модуля ДВПФ

этой последовательности. Воспользовавшись теоремой о свертке, получите аналитическую запись ДВПФ. Заполните таблицу.

| Значение<br>$X(0)$ | Ширина $\Delta\nu$ главного<br>лепестка на нулевом уровне | Энергия $\times \Delta t$<br>$\int_{-1/2}^{1/2}  X(\nu) ^2 d\nu$ |
|--------------------|---|--|
|                    |   |  |

## Контрольные вопросы

**№1.** Пусть  $X(\nu)$  — ДВПФ спектра некоторой последовательности  $x[k]$ . Как нужно изменить последовательность  $x[k]$ , чтобы ее ДВПФ спектр был сдвинут влево относительно исходного на  $\nu_0 = 1/10$ ?

<sup>3</sup> Двумя звездочками «\*\*» здесь и далее отмечены задачи повышенной трудности.



**№2.** Пусть  $X_5(v)$  — ДВПФ спектр пяти последовательных единичных импульсов

$x_5[k] = \sum_{m=0}^4 \mathbf{1}[k-m]$ , а  $Y(v)$  — ДВПФ спектр последовательности  $y[k] = kx_5[k]$ . Пусть также

$$\Phi(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X_5(\tilde{v})Y(v-\tilde{v})d\tilde{v},$$

$$\Psi(v) = \int_{-1/2}^{1/2} Y(\tilde{v})X_5(v-\tilde{v})d\tilde{v}.$$

Чему равно  $\Phi(v)$ ? Выполняется ли  $\Phi(v) \equiv \Psi(v)$ ?

**№3.** Предположим, что имеется финитная последовательность

$$x[k] = \{1; 5; 2; 4; 1; 1; 3\}.$$

$k=0$

Не вычисляя непосредственно ее ДВПФ  $X(v)$ , опередите значения следующих выражений:

$$X(0); X(1/2); \int_{-1/2}^{1/2} X(v)dv; \int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv; \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{dX(v)}{dv} \right|^2 dv.$$

**№4.** Докажите для ДВПФ свойство: если  $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(v)$ , то  $kx[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(v)}{dv}$ . Получите аналогичное свойство для спектра сигнала (последовательности)  $k^M x[k]$ , где  $M$  - натуральное число.

В качестве примера рассмотрите случай  $x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m]$ . Постройте с помощью Octave/Python график последовательности и ДВПФ при  $-0.5 \leq v \leq 0.5$  для различных  $M$  ( $M=1, 2, 3$ ).

**№5.** Предположим, что аналоговый сигнал  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ ,  $f_0 = 250$  Гц был дискретизован с частотой дискретизации  $f_d = 1$  кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения (aliasing)?

Определить и построить график ДВПФ для отсчетов сигнала  $x[k] = \Delta t x(t)|_{t=k\Delta t}$  в переменных  $v$ .

## Занятие 2. Основные свойства ДПФ

### Теоретическая часть

#### Формы записи ДПФ

Пусть  $x[k]$  — последовательность отсчетов сигнала либо длиной в  $N$  отсчетов, либо периодическая с периодом  $N$ . Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности  $x[k]$  определяется следующим образом

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

*Примечание.* Именно в таком виде ДПФ реализовано в Matlab, библиотеках Python Numpy и Scipy.

Наряду с приведенной парой формул, существует запись ДПФ с нормирующим множителем  $1/N$  в прямом преобразовании:

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

Далее будет показано, что такая форма ДПФ удобна при рассмотрении периодических последовательностей отсчетов  $x[k]$ . Для того, чтобы различать две записи, будем использовать обозначения  $\tilde{X}[n]$  и  $X[n]$ . Очевидно, что

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} X[n].$$

В ДПФ и сигнал  $x[k]$ , и последовательность ДПФ отсчетов  $X[n]$  представляют собой функции дискретного аргумента. Функцию  $X[n]$  обычно рассматривают только для значений  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , при этом она является периодической с периодом  $N$ .

В результате обратного ДПФ получается  $N$ -периодическая функция дискретного времени, что необходимо учитывать при использовании обратного ДПФ для последовательностей конечной длительности. Для них результат обратного преобразования нужно взять на периоде  $[0, N-1]$ , а остальные отсчеты приравнять к нулю.

**Пример.** Пусть  $x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right)$ . Вычислить 16-точечное ДПФ этой последовательности  $\tilde{X}[n]$

по формуле с нормирующим множителем  $1/N$  в прямом преобразовании.

*Решение.*

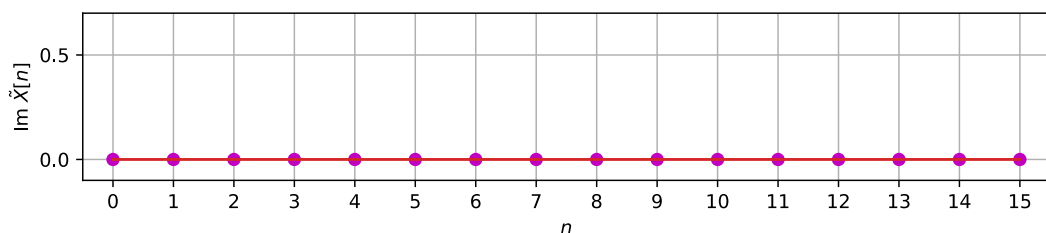
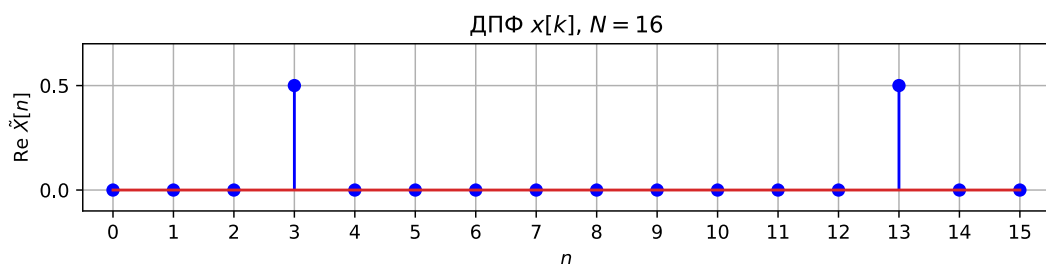
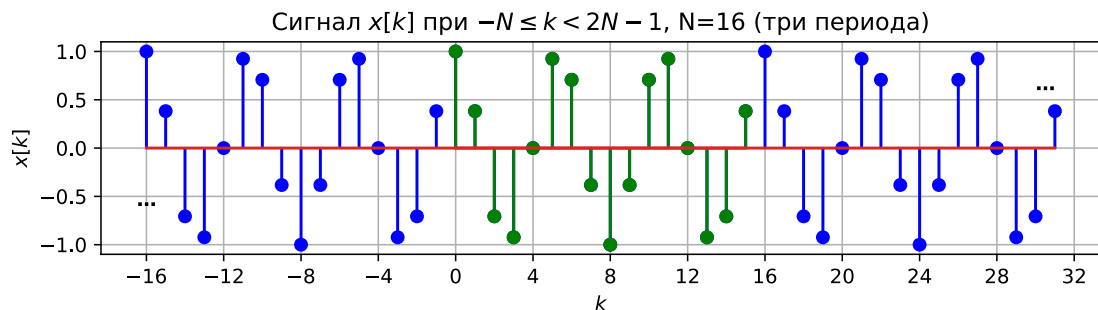
$$\begin{aligned}\tilde{X}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right) \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k) = \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{15} \left\{ \frac{1}{2} \exp\left(j2\pi k \left(\frac{3}{16} - \frac{n}{16}\right)\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-j2\pi k \left(\frac{3}{16} + \frac{n}{16}\right)\right) \right\}\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно сумму вида  $\sum_{k=0}^{15} \exp\left(j2\pi k \frac{m}{16}\right)$  при условии, что  $m$  — целое число, не равное нулю и не кратное 16. В таком случае по формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{15} \exp\left(j2\pi k \frac{m}{16}\right) = \frac{1 - \exp(j2\pi m)}{1 - \exp(j2\pi \frac{1}{16} m)} = 0.$$

В случае когда  $m$  либо равно нулю, либо кратно 16, будет выполняться

$\sum_{k=0}^{15} \exp\left(j2\pi k \frac{m}{16}\right) = \sum_{k=0}^{15} e^0 = 16$ . В итоге на периоде есть только два ненулевых отсчета ДПФ —  $\tilde{X}[3] = 1/2$  и  $\tilde{X}[13] = 1/2$ .



## Свойства ДПФ

Предположим, что для последовательности  $x[k]$  ДПФ будет  $X[n]$ , что символически будем обозначать  $x[k] \xleftrightarrow{DFT} X[n]$ . Пусть также  $y[k] \xleftrightarrow{DFT} Y[n]$ . Тогда справедливы следующие утверждения — свойства ДПФ. Далее запись вида  $x[k]_N$  обозначает  $x[k \bmod N]$ . Символ  $*$  обозначает здесь комплексное сопряжение.

| Сигналы $x[k]$ и $y[k]$  | $N$ –точечные ДПФ $\tilde{X}[n]$ и $\tilde{Y}[n]$<br>(с нормирующим множителем $1/N$ в прямом преобразовании)  | $N$ –точечное ДПФ $X[n]$ и $Y[n]$<br>(без нормирующего множителя $1/N$ в прямом преобразовании)  |
|--|--|--|
| <b>Линейность</b>  |  |  |
| $\alpha x[k] + \beta y[k],$<br>$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$                | $\alpha \tilde{X}[n] + \beta \tilde{Y}[n]$   | $\alpha X[n] + \beta Y[n]$   |
| <b>Единичный импульс</b>   |  |  |
| $x[k] = \mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, k = 0, \\ 0, k \neq 0. \end{cases}$ | $\tilde{X}[n] \equiv \frac{1}{N}$  | $X[n] \equiv 1$  |
| <b>Теорема запаздывания</b>  |  |  |
| $x[k - m]_N$   | $\tilde{X}[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nm\right)$   | $X[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nm\right)$   |
| <b>Теорема сдвига</b>  |  |  |
| $x[k] \exp\left(\pm j \frac{2\pi}{N} n_0 k\right),$<br>$n_0 \in \mathbb{Z}$  | $\tilde{X}[n \mp n_0]_N$   | $X[n \mp n_0]_N$   |
| <b>Симметрия</b>   |  |  |
| $x^*[k]$   | $\tilde{X}^*[N - n]_N,$  | $X^*[N - n]_N,$  |
| $x[N - k]_N$   | $\tilde{X}[N - n]_N$   | $X[N - n]_N$   |
| $x[k] = x^*[k]$<br>действительная<br>последовательность                      | $\tilde{X}[n] = \tilde{X}^*[N - n]_N$  | $X[n] = X^*[N - n]_N$  |
| $x[k] = -x^*[k]$<br>мнимая<br>последовательность                             | $\tilde{X}[n] = -\tilde{X}^*[N - n]_N$   | $X[n] = -X^*[N - n]_N$   |
| <b>Теорема о свертке (во временной области)</b>                              |  |  |
| $\sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[k - m]_N$   | $N \tilde{X}[n] \tilde{Y}[n]$  | $X[n] Y[n]$  |
| <b>Произведение сигналов (теорема о свертке в частотной области)</b>         |  |  |
| $x[k] y[k]$  | $\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}[m] \tilde{Y}[n - m]_N$   | $\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] Y[n - m]_N$   |
| <b>Равенство Парсеваля</b>   |  |  |
|  | $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y^*[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \tilde{Y}^*[n],$<br>$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  x[k] ^2 = \sum_{n=0}^{N-1}  \tilde{X}[n] ^2.$ | $\sum_{k=0}^{N-1} x[k] y^*[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] Y^*[n],$<br>$\sum_{k=0}^{N-1}  x[k] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1}  X[n] ^2.$ |

### Пример. Циклический сдвиг последовательности.

Пусть  $X[n]$  — восьмиточечное ДПФ последовательности

$$x[k] = \{0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,5 \ 0,6 \ 0,7 \ 0,8\}$$

изображенной на графике. Изобразить последовательность  $y[k]$ , ДПФ которой имеет вид

$$Y[n] = \exp\left(-j\frac{2\pi}{8}mn\right)X[n] \text{ для } m=3 \text{ и } m=5.$$

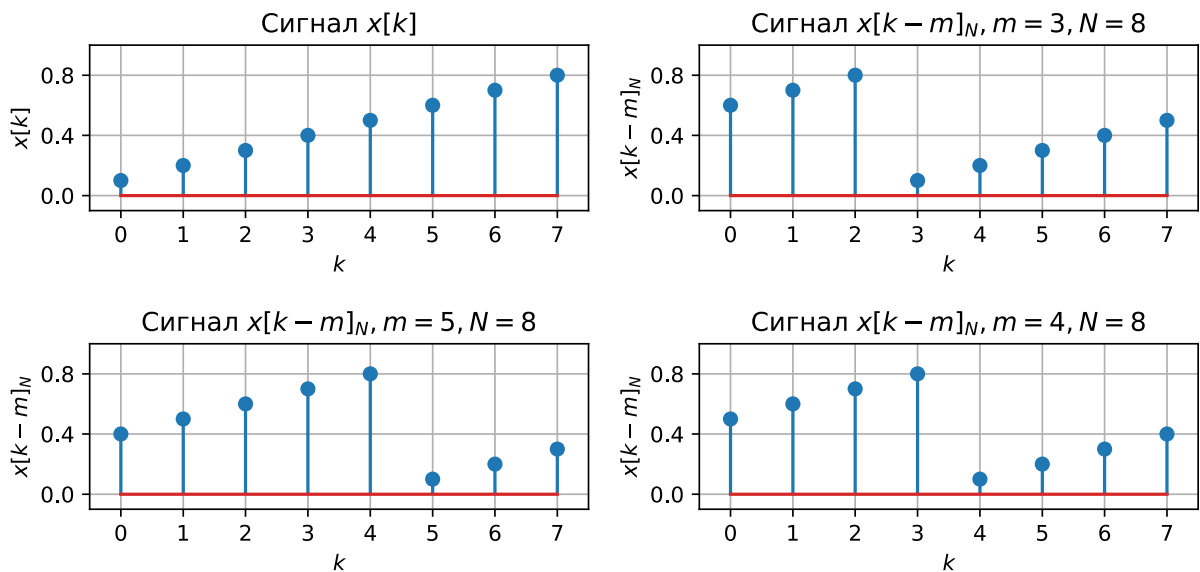
*Решение.*

Воспользуемся теоремой запаздывания для ДПФ:

$$\text{Если } x[k] \xleftrightarrow{DFT} X[n], \text{ то } x[k-m]_N \xleftrightarrow{DFT} X[n] \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nm\right).$$

Тогда последовательность  $y[k]$  получается путем циклического сдвига  $x[k]$  на  $m$  отсчетов вправо (для положительных  $m$ ):

$$y[k] = x[k-m]_N = x[(k-m) \bmod N].$$



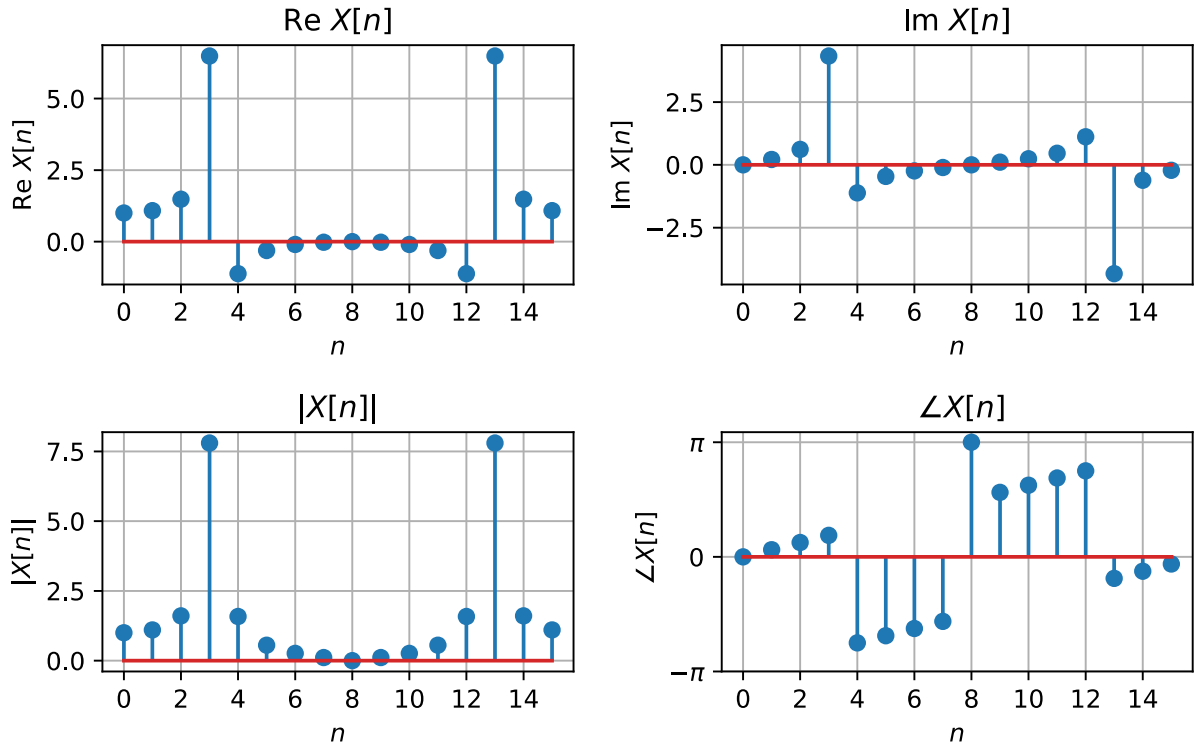
### Пример. Симметрия ДПФ.

Пусть дана последовательность

$$x[k] = \cos(2\pi k 0,2), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 15.$$

Эта последовательность не является периодом для  $\cos(2\pi k 0,2)$ . Частота косинусоиды  $\nu_{\cos} = 0,2$  не совпадает с частотами отсчетов ДПФ  $\nu_n = n/N$ ,  $N = 16$ . Максимально близкий отсчет к частоте  $\nu_{\cos} = 0,2$  — это  $n=3$  ( $\nu_3 = 0,1875$ ).

ДПФ этой последовательности представлено на рисунке.



Для действительной последовательности  $x[k] = x^*[k]$

$$x[k] \xleftrightarrow{DFT} X^*[N-n]_N.$$

Это означает, что  $X[n] = X^*[N-n]_N$ . Например,  $X[3] = X^*[13]$ .

В данном случае мы наблюдаем симметрию действительной части и модуля и антисимметрию мнимой части и фазы коэффициентов ДПФ относительно отсчета с номером  $n = N/2 = 8$ .

### Матричная форма ДПФ

Введем в рассмотрение квадратную матрицу  $[W]_N$  порядка  $N$  с элементами

$$W_N^{nk} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} nk), \quad n, k \in 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

так, что номер строки совпадает с номером дискретной экспоненциальной функции, а номер столбца совпадает с номером отсчета функций. При этом произведение  $n \cdot k$  обычно берется по модулю  $N$ , т. е.

$$W_N^{nk} = W_N^{nk \bmod N}.$$

Например,  $nk = 17$ , тогда  $nk \bmod 8 = 1$ . Эти свойства матрицы ДПФ следуют из  $N$ -периодичности функции  $W_N^{nk}$  по обоим аргументам. Для случая  $N = 8$  матрица ДПФ имеет вид

$$[W]_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} k \rightarrow 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \downarrow 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Эта же матрица с минимальными фазами будет

$$[W]_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} k \rightarrow 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \downarrow 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Через множители  $W_N^{nk}$  пара ДПФ записывается в виде

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{nk},$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] W_N^{-nk}.$$

Пусть  $\vec{X}$  и  $\vec{x}$  – N-мерные вектор-столбцы:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}.$$

Тогда в матричной форме пара ДПФ (с нормирующим множителем в обратном преобразовании) имеет вид

$$\vec{X} = [W]_N \vec{x} \text{ – прямое ДПФ,}$$

$$\vec{x} = [W_N]^{-1} \vec{X} \text{ – обратное ДПФ.}$$

Чтобы найти обратную матрицу  $[W_N]^{-1}$ , достаточно заметить, что

$$\frac{1}{N}[W_N]^* [W_N] = I_N,$$

где  $I_N$  – единичная матрица размером  $N \times N$ . В итоге получаем, что

$$[W_N]^{-1} = \frac{1}{N}[W_N]^*,$$

т.е. для нахождения обратной матрицы достаточно выполнить комплексное сопряжение для  $[W_N]$  и нормировать результат на  $N$ .

## Задание на моделирование

| Вариант | $x[k]$                       | $m$ | Вариант | $x[k]$                       | $m$ |
|---------|------------------------------|-----|---------|------------------------------|-----|
| 1       | {1; -3; 2; 4; 6; 7; 4; 6}    | 3   | 11      | {9; 3; 2; 4; 6; 3; 4; 4}     | 3   |
| 2       | {7; 3; 2; -4; 6; 0; -4; 1}   | 4   | 12      | {9; -3; 2; 4; 2; 7; 1; 3}    | 4   |
| 3       | {5; 3; 2; 0; 6; -7; 4; -6}   | -1  | 13      | {3; -6; -8; 4; 6; 7; 4; 9}   | 6   |
| 4       | {1; -3; 2; 4; 1; 7; 1; 1}    | -3  | 14      | {1; -6; 0; -4; 6; -7; 4; -9} | -3  |
| 5       | {9; -3; 2; 4; 2; 7; 1; 3}    | 4   | 15      | {1; -6; 0; -4; 6; -7; 0; 9}  | -4  |
| 6       | {1; 7; 2; 2; 6; 5; 4; 1}     | -2  | 16      | {8; 6; -8; -4; 6; -7; 4; 9}  | -1  |
| 7       | {3; 6; -8; 4; 6; -7; 4; 9}   | 6   | 17      | {-1; -7; -2; 2; -6; 5; 5; 1} | 6   |
| 8       | {8; 6; 8; 4; 3; -7; 4; 5}    | 1   | 18      | {1; -3; 2; 7; 1; 7; 1; 1}    | 2   |
| 9       | {1; -6; 8; 4; 6; -7; 4; -9}  | 2   | 19      | {9; -3; 2; 5; 2; 7; 1; 3}    | -2  |
| 10      | {1; -6; 8; -4; 0; -7; 4; -9} | -3  | 20      | {1; -1; 8; 4; 6; -2; 4; -6}  | -3  |

### Задача 2.1. Алгоритмы вычисления ДПФ.

Вычислите ДПФ  $X[n]$  для последовательности  $x[k]$  (в соответствии с Вашим вариантом).

Воспользуйтесь следующими способами:

- а) вычисление с использованием матричной формы ДПФ;
- б) алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Сравните результаты.

### Задача 2.2 Свойства симметрии ДПФ.

Для последовательности  $x[k]$  постройте графики  $\text{Re } X[n]$ ,  $\text{Im } X[n]$ ,  $|X[n]|$ ,  $\angle X[n]$ .

Сравните получившиеся результаты со свойствами симметрии ДПФ.

### Задача 2.3. Циклический сдвиг в ДПФ.

Постройте график для последовательности  $x[k]$ .

Вычислите последовательность  $y[k]$ , ДПФ которой



$$Y[n] = \exp\left(-j \frac{2\pi}{8} mn\right) X[n].$$

Сравните получившиеся последовательности.

## Контрольные вопросы

**№1.** Записать матрицу, задающую ДПФ преобразование над последовательностью (вектором) длины 4. Указать также обратную матрицу, задающую обратное преобразование.

**№2.** Для последовательности из трех единичных импульсов  $x[k] = \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1] + \mathbf{1}[k-2]$

изобразить

а) линейную дискретную свертку  $\sum_{m=0}^{N-1} x[m]x[k-m]$ ,

б) циклическую дискретную свертку  $\sum_{m=0}^{N-1} x[m]x[k-m]_N$ .

Сравнить результаты.

## Занятие 3. Связь между ДВПФ и ДПФ.

### Теоретическая часть

#### ДПФ последовательностей конечной длительности

##### Форма записи ДПФ

Пусть  $x[k]$  — последовательность отсчетов сигнала длиной в  $N$  отсчетов  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется следующим образом

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Функцию  $X[n]$  обычно рассматривают только для значений  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , при этом она является периодической с периодом  $N$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

В обратном преобразовании необходимо ограничить длительность восстанавливаемой последовательности отсчетов сигнала, т.е. рассматривать  $x[k]$  для значений  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Если длительность не ограничить, то будет восстановлена последовательность, являющаяся периодическим продолжением  $x(k)$ .

#### Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $v = n/N$ .

Рассмотрим  $N$  – точечную последовательность  $x[k]$ . Ее ДВПФ

$$X(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi vk).$$

ДПФ для последовательности  $x(k)$ , имеет следующий вид:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j2\pi \frac{n}{N} k\right).$$

Сравнивая формулы, в точках  $v = n / N$  получаем равенство

$$X(v) \Big|_{v=n/N} = X[n]$$

Это означает, что коэффициенты ДПФ  $X[n]$  равны отсчетам функции  $X(v)$ , взятым в точках  $v = n / N$  (с шагом  $\Delta v = 1 / N$ ).

### Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)

Улучшим качество визуализации ДВПФ при помощи отсчетов ДПФ. Получим  $M$  – точечную последовательность — добавим в исходную последовательность  $x[k]$   $M - N$  отсчетов, равных нулю:

$$y[k] = \begin{cases} x[k], & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & N \leq k \leq M-1. \end{cases}$$

Ее ДПФ  $M$  – точечное и определяется формулой

$$Y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} y[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right).$$

При этом ДВПФ не изменяется:

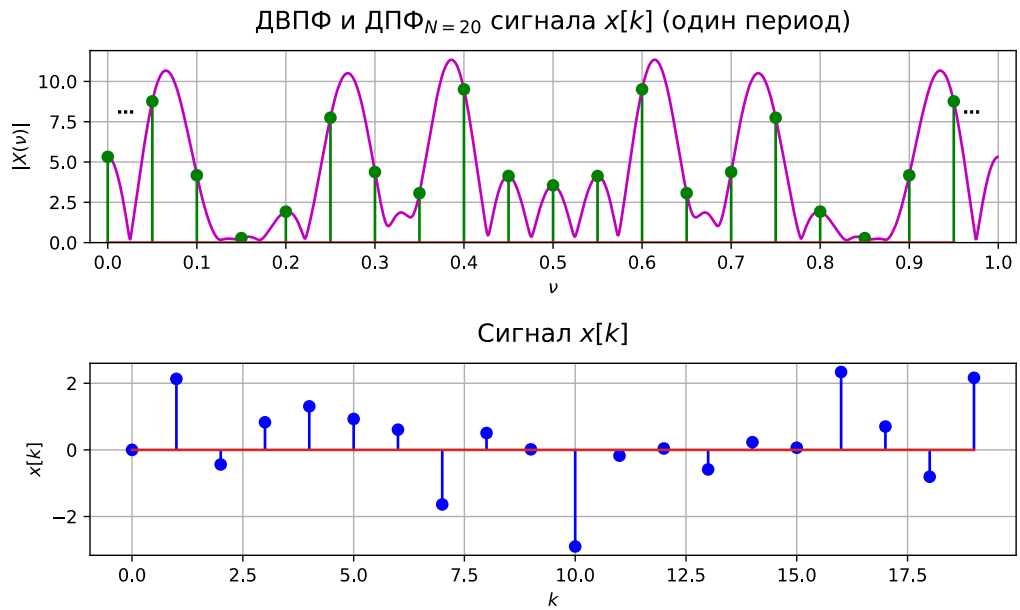
$$Y(v) = \sum_{k=0}^{M-1} x[k] \exp(-j2\pi vk) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi vk).$$

С помощью добавления нулевых отсчетов улучшено качество визуализации **ДВПФ**, поскольку число точек  $v = n / N$  на одном периоде больше, чем в исходной последовательности.

### Пример.

Рассмотрим последовательность отсчетов

$$x[k] = \begin{cases} \sin\left(2\pi \frac{1,5}{20} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{5,4}{20} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{7,6}{20} k\right), & 0 \leq k < N, \\ 0, & \{k < 0\} \cup \{k \geq N\}. \end{cases}$$



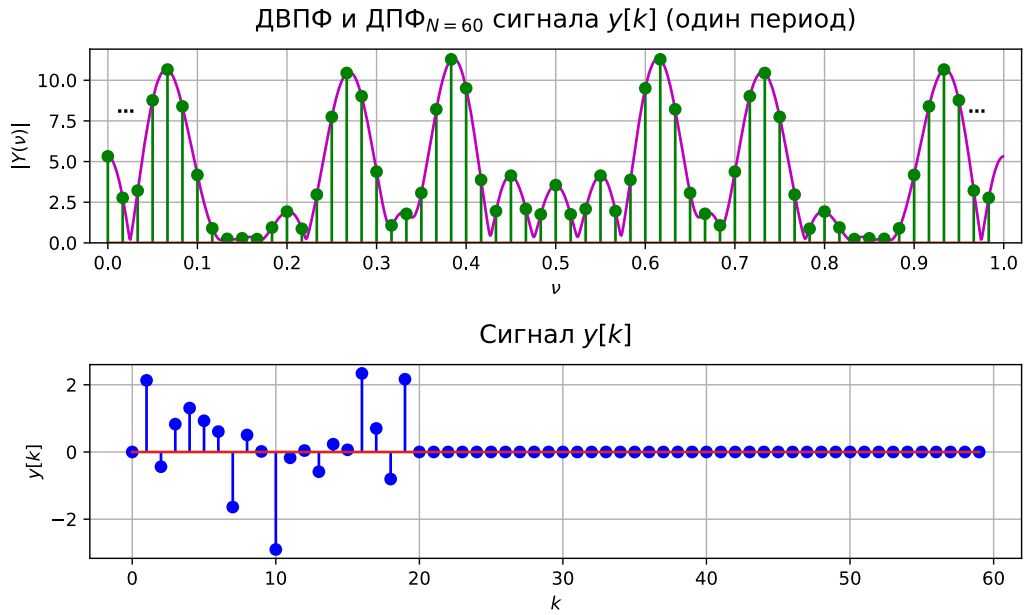
Заметим, что частоты синусоид в ней не совпадают с бинами ДПФ:

$$v_1 = \frac{1,5}{20}, \quad v_2 = \frac{5,4}{20}, \quad v_3 = \frac{7,6}{20}.$$

На рисунке изображен модуль ДВПФ этой последовательности для частот  $v \in [0; 1]$ . Приведено соответствие с 16–точечным ДПФ этой последовательности, вычисленным по формуле без нормирующего множителя  $1/N$ . В точках  $v = n/N$  значение ДВПФ совпадают с величиной отсчетов ДПФ в этих точках:

$$X(n\Delta v) = X[n], \quad \Delta v = 1/N.$$

Теперь дополним рассматриваемый в ДПФ участок сигнала нулевыми отсчетами. ДВПФ при этом не изменится (мы даже не изменили сигнал  $x[k]$ ), а число отсчетов ДПФ на одном периоде станет больше. Таким образом улучшено качество визуализации ДВПФ с помощью отсчетов ДПФ.



**Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ в точках**

$$v \neq n/N$$

Рассмотрим  $N$  – точечную последовательность  $x[k]$ . Ее ДВПФ

$$X(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi vk).$$

Обратное ДПФ для последовательности  $x[k]$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

Получаем, что

$$X(v) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right) \right) \exp(-j2\pi vk) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi \left(v - \frac{n}{N}\right) k\right).$$

Рассмотрим отдельно множитель  $\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi (v - n/N) k)$ . Это сумма  $N$  членов

геометрической прогрессии с первым членом

$$b_1 = 1, \text{ и знаменателем } q = \exp(-j2\pi (v - n/N)).$$

В точках  $v \neq n/N$ , где  $q \neq 1$ , получаем (используя известные формулы  $S_N = b_1(1 - q^N)/(1 - q)$  и  $\sin \varphi = (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})/(2j)$ ):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(v - \frac{n}{N}\right)k\right) &= \frac{1 - \exp(-j2\pi(v - n/N)N)}{1 - \exp(-j2\pi(v - n/N))} = \\
&= \frac{\exp(j\pi(v - n/N)N) \{ \exp(j\pi(v - n/N)N) - \exp(-j\pi(v - n/N)N) \}}{\exp(j\pi(v - n/N)) \{ \exp(j\pi(v - n/N)) - \exp(-j\pi(v - n/N)) \}} = \\
&= \exp(j\pi(v - n/N)(N-1)) \frac{\sin(\pi(v - n/N)N)}{\sin(\pi(v - n/N))}
\end{aligned}$$

Подставив формулу для суммы в связь, получаем интерполяционную формулу восстановления континуальной функции  $X(v)$  по коэффициентам ДПФ  $X[n]$ :

$$X(v) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \frac{\sin(\pi(v - n/N)N)}{\sin(\pi(v - n/N))} \exp(j\pi(v - n/N)(N-1)).$$

Заметим, что для последовательностей конечной длительности ДВПФ непрерывно, а значит для интерполяционной формулы выполняется

$$\lim_{v \rightarrow n/N} X(v) = X[n],$$

что согласуется с тем, что в точках  $v = n/N$  выполняется  $X(v)|_{v=n/N} = X[n]$ .

## ДПФ периодических последовательностей

### Форма записи ДПФ

Пусть  $x[k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  — периодическая последовательность отсчетов сигнала с периодом  $N$ . Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности  $x[k]$  определяется следующим образом

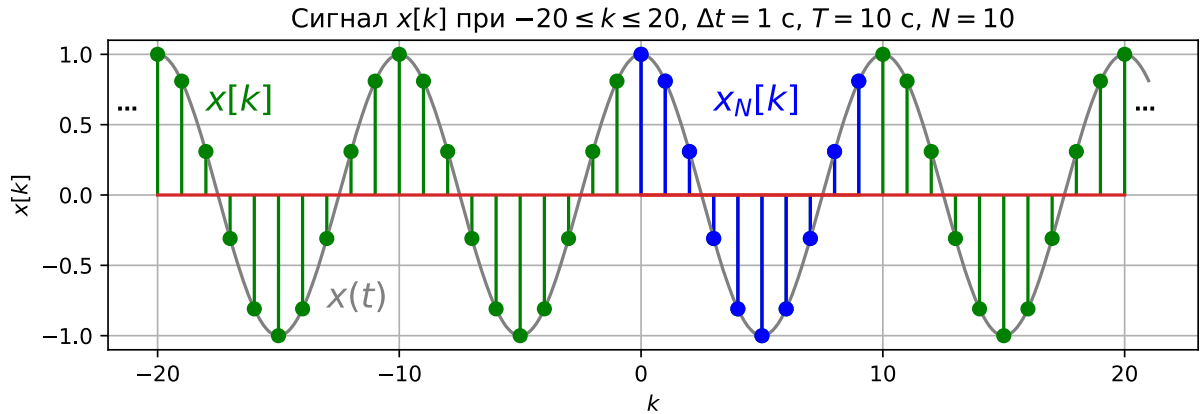
$$\begin{aligned}
\tilde{X}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right), \\
x[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).
\end{aligned}$$

$\tilde{X}[n]$  может рассматриваться как  $N$  – точечная последовательность коэффициентов ДПФ (отсчетов ДПФ), где  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .  $\tilde{X}[n]$  может также рассматриваться как периодическая последовательность с периодом  $N$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В обратном преобразовании последовательность  $x(k)$  также получится периодической.

### Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей.

Пусть аналоговый периодический сигнал  $x(t)$  с периодом  $T$  дискретизован с шагом  $\Delta t = T/N$ . Тогда на одном периоде  $x(t)$  будет содержаться  $N$  отсчетов (если крайний правый отсчет попадает на границу периода, то будем считать его относящимся к следующему периоду). Выделим для последовательности отсчетов  $x[k]$  один период

$$x_N[k] = \begin{cases} x[k], & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & \{k < 0\} \cup \{k \geq N\}. \end{cases}$$



Пусть  $x_N[k] \leftrightarrow X_N(\nu)$ . Последовательность  $x(k)$  может быть представлена в виде дискретной свертки  $x_N[k]$  и  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mN]$ . Причем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mN] \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Тогда

$$X(\nu) = \frac{1}{N} X_N(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Последовательность  $x_N[k]$  имеет конечную длительность, является абсолютно суммируемой.

$X_N(\nu)$  непрерывна. При этом ДВПФ периодической последовательности  $x(k)$  имеет дискретную структуру, которой в континуальной записи соответствует некоторый периодический набор  $\delta$ -функции.

Введем периодическую функцию дискретного аргумента  $\tilde{X}[n]$ , значения которой будут соответствовать площадям дельта-функций в  $X(\nu)$  в точках  $\nu = n/N$ :

$$X(\nu) = \tilde{X}[n] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

В таком случае

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} X_N\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k).$$

$$\begin{aligned}
x[k] &= \int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(j2\pi vk) dv = \int_0^1 X(v) \exp(j2\pi vk) dv = \\
&= \int_0^1 X_N(v) \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi vk) dv = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_N\left(\frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi \frac{n}{N} k).
\end{aligned}$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp(j2\pi \frac{n}{N} k).$$

Получаем следующую пару формул

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp(j2\pi \frac{n}{N} k),$$

определяющие прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В ДПФ частотная (  $n$  ) и временная (  $k$  ) переменная дискретны, функция  $\tilde{X}[n]$  периодична с периодом  $N$ , а в качестве главного периода для отсчетов ДПФ выбирают такой, на котором  $n = 0, \dots, N-1$ .

#### Пример.

Предположим, что имеется периодическая последовательность

$$(\infty < k < +\infty)$$

$$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k).$$

Учитывая, что

$$\cos(2\pi \frac{3}{16} k) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi \frac{3}{16} k) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi \frac{3}{16} k),$$

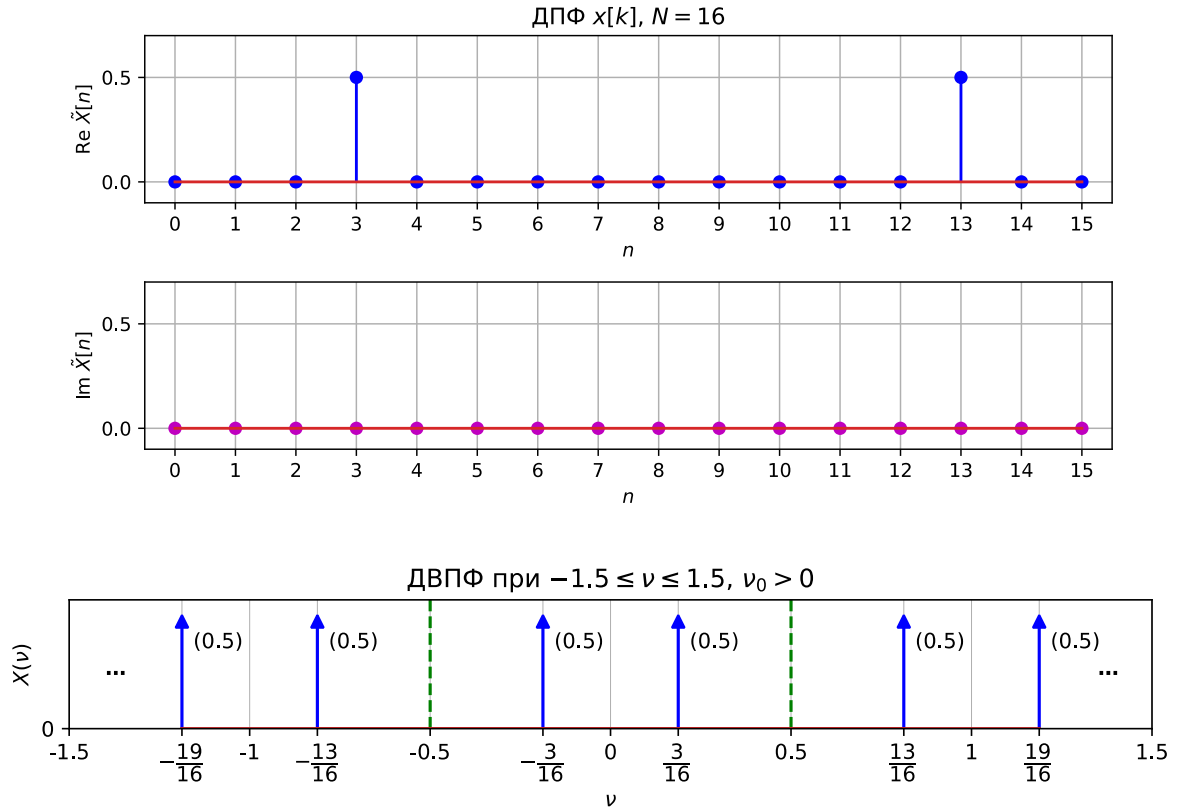
получаем для ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(v - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2} \delta(v + \frac{3}{16} - n).$$

$X(v)$  содержит две  $\delta$ -функции с площадями  $1/2$  на каждом периоде. Рассмотрим период  $0 \leq v < 1$  (правую крайнюю точку можем не включать из-за периодичности  $X(v)$ ). На нем

содержится две  $\delta$ -функции в точках  $v_1 = \frac{3}{16}$  и  $v_2 = \frac{13}{16}$ . Последовательность имеет период

$N = 16$  точек. Это означает, что можно установить значения 16-точечного ДПФ  $\tilde{X}[3] = 1/2$ ,  $\tilde{X}[13] = 1/2$ , а в остальных точках главного периода  $\tilde{X}[n] = 0$ .



Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности

$$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k), \text{ т.е. для последовательности } x_N[k] = x[k]w[k], \text{ где } w[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m].$$

Заметим, что

$$W(\nu) = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)},$$

$$X(\nu) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{3}{16} - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \frac{3}{16} - m).$$

Способ 1. ДВПФ последовательности  $Y(\nu)$  может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})W(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{\nu})X(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu}$$

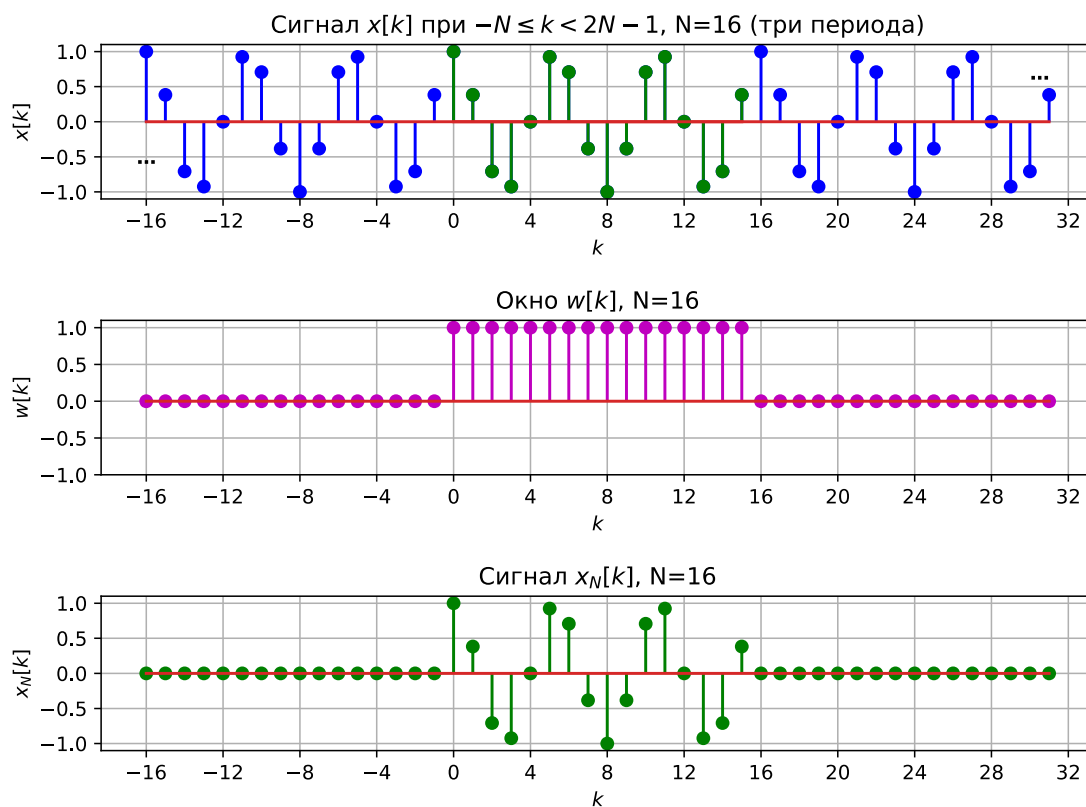
Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu - \nu_1)d\nu = \begin{cases} W(\nu_1), & a < \nu_1 < b, \\ 0.5W(\nu_1), & (\nu_1 = a) \cup (\nu_1 = b), \\ 0, & (\nu_1 < a) \cup (\nu_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что



$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

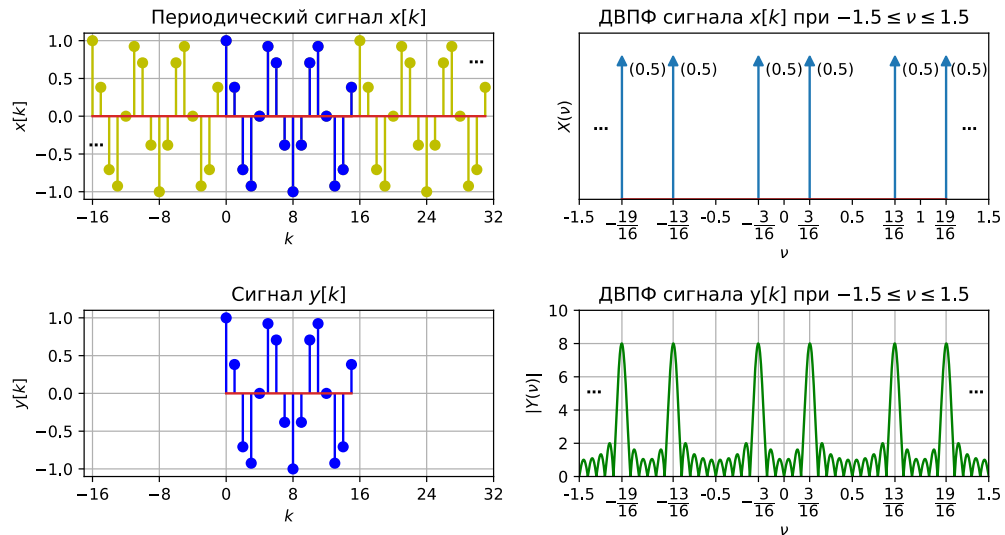


Способ 2. Аналогично через теорему смещения

$$y[k] = \left( \frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w[k],$$

$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

$$Y(v) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi\left(v - \frac{3}{16}\right)\right) \frac{\sin(N\pi(v - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v - \frac{3}{16}))} + \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi\left(v + \frac{3}{16}\right)\right) \frac{\sin(N\pi(v + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v + \frac{3}{16}))}.$$



### Частотная ось ДПФ

Отсчету  $N$  – точечного ДПФ с номером  $n$  в случае сигнала конечной длительности соответствует значение ДВПФ в точке  $v = n / N$  по оси нормированных частот:

$$X(v) \Big|_{v=n/N} = X[n].$$

Если рассматривается периодическая последовательность отсчетов, и коэффициенты ДПФ вычисляются по периоду последовательности, то весам дельта-функций в точках  $v = n / N$  в ДВПФ соответствуют отсчеты ДПФ с номерами  $n$ :

$$X(v) = \tilde{X}[n] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

Эти два обстоятельства позволяют сопоставить отсчетам ДПФ частоты в спектре дискретизованного сигнала. Учитывая, что  $v = f / f_d = f \Delta t$ , где  $f_d$  – частота дискретизации,  $\Delta t$  – шаг дискретизации, получаем, что отсчету с номером  $n$  соответствует частота  $f = n f_d / N = n / (N \Delta t)$  Гц. Разрешение по оси частот при ДПФ анализе составляет  $f_d / N$  Гц.

В таблице ниже рассмотрены основные способы введения частотной оси для отсчетов ДПФ.

| Частотная переменная и ее размерность | Связь частотной переменной с номером отсчета ДПФ | Разрешение по частоте                | Диапазон изменения частоты, соответствующий отсчетам $[0, N)$ |
|---------------------------------------|--|--------------------------------------|---|
| $f$ , [Гц]                            | $f = \frac{n f_d}{N}$                            | $\Delta f = \frac{f_d}{N}$           | $[0, f_d)$  |
| $\omega$ , [рад/с]                    | $\omega = \frac{n \omega_d}{N}$                  | $\Delta \omega = \frac{\omega_d}{N}$ | $[0, \omega_d)$   |
| $v$ , безразмерная                    | $v = \frac{n}{N}$                                | $\Delta v = \frac{1}{N}$             | $[0, 1)$  |
| $\theta$ , [рад]                      | $\theta = 2\pi \frac{n}{N}$                      | $\Delta \theta = \frac{2\pi}{N}$     | $[0, 2\pi)$   |

Заметим, что  $f = nf_d / N$  Гц – это частота в спектре дискретизированного сигнала, который при отсутствии наложения спектров образуется путем периодического продолжения (повторения) спектра исходного аналогового сигнала с периодом, равным частоте дискретизации ( $f_d$  в случае оси в Гц или 1 в случае оси нормированных частот). Это означает, что отсчет ДПФ с номером  $n$  будет соответствовать в спектре аналогового сигнала частоте  $f \in [-f_d / 2 ; f_d / 2]$ , такой, что  $f = (n + mN)f_d / N$ , где  $m$  – целое число.

## Задание на моделирование

| Вариант | $m_0$ | $m_1$ | Вариант | $m_0$ | $m_1$ |
|---------|-------|-------|---------|-------|-------|
| 1       | 1     | 0,25  | 11      | 1     | 0,6   |
| 2       | 2     | 0,2   | 12      | 2     | 0,5   |
| 3       | 3     | -0,25 | 13      | 3     | -0,5  |
| 4       | 4     | -0,2  | 14      | 4     | 0,85  |
| 5       | 5     | 0,8   | 15      | 5     | 0,6   |
| 6       | 6     | 0,75  | 16      | 6     | 0,5   |
| 7       | 7     | 0,6   | 17      | 7     | -0,5  |
| 8       | 8     | 0,5   | 18      | 8     | 0,85  |
| 9       | 9     | -0,5  | 19      | 9     | -0,25 |
| 10      | 10    | 0,85  | 20      | 10    | -0,2  |

### Задача 3.1. Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал.

Постройте на одном графике модули ДВПФ  $|X(v)|$  и ДПФ  $|X[n]|$  последовательности ( $N = 32$ )

$$x[k] = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{N} m_0 k\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{N} (m_0 + 0,25) k\right), & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Увеличьте размерность ДПФ, добавив нулевые отсчеты так, чтобы все относительные частоты синусоид попадали на бины ДПФ. Приведите на одном графике модули ДВПФ  $|X(v)|$  и ДПФ  $|X[n]|$  для этого случая. Сравните результаты.

### Задача 3.2. ДВПФ и ДПФ периодической последовательности.

Постройте графики для действительной и мнимой части коэффициентов ДПФ периодической последовательности  $x[k] = \cos\left(\frac{2\pi}{N} mk\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{N} mk\right)$  с периодом  $N = 32$ , для случаев  $m = m_0$  и  $m = m_0 + m_1$ . Получите аналитическую запись ДПФ. Сравните ДПФ последовательности с ее ДВПФ. Определите, выполняется ли связь между весами дельта-функций в ДВПФ и величинами отсчетов ДПФ.

## Контрольные вопросы

**№1.** Построить графики ДВПФ сигналов (последовательностей)  $x_1[k] = \cos(2\pi k v_0)$  и  $x_2[k] = \sin(2\pi k v_0)$ ,  $v_0 = 0.2$ ,  $-\infty < k < \infty$ . Определить ДВПФ для последовательностей  $y_1[k]$  и  $y_2[k]$  взвешанных прямоугольной оконной функцией  $w(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m]$ , т.е.  $y_1[k] = x_1[k]w[k]$  и  $y_2[k] = x_2[k]w[k]$  (это можно сделать, зная ДВПФ окна и используя теорему смещения).

**№2.** Пусть имеется  $N = 10$  точечное ДПФ некоторой последовательности отсчетов конечной длительности. Частота дискретизации  $f_d = 1$  кГц. Указать, сколько дополнительных нулей нужно добавить к этой последовательности, чтобы расстояние между отсчетами стало равным  $\Delta f = 10$  Гц.

**№3.** Воспользовавшись интерполяционной формулой восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ получить спектральную плотность для последовательности отсчетов конечной длительности, ДПФ которой имеет вид

$$X[n] = \begin{cases} 5, & \text{при } n = 5 + mN, m \in Z, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сравнить результат со спектральной плотностью сигнала, получаемого обраным ДПФ для  $X[n]$ .

### Список литературы

В качестве учебной литературы рекомендуется использовать учебные пособия [1], [2] и [3]. Все книги есть в библиотеке МФТИ.

1. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.
2. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов. Изд. 2-Е, . М.: МФТИ, 2007. 332 с.
3. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2007. 120 с.